SIMULACION DE UN GENERADOR DE IMPULSOS TIPO ROMAN POR EL METODO DE LATTICE BOLTZMANN

William Umar Rincón Báez
Licenciado en Física
Código: 835257

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá, D.C.
Junio de 2014

SIMULACION DE UN GENERADOR DE IMPULSOS TIPO ROMAN POR EL METODO DE LATTICE BOLTZMANN

William Umar Rincón Báez
Licenciado en Física
Código: 835257

Disertación presentada para optar al título de
Magister en Ciencias Física

Director
Dr. Rer. Nat José Daniel Muñoz Castaño
Doctor en Física

Línea de investigación
Modelos de Lattice-Boltzmann

Grupo de investigación
Simulación de sistemas físicos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá, D.C.
Junio de 2014

Título en español

SIMULACION DE UN GENERADOR DE IMPULSOS TIPO ROMAN POR EL METODO DE LATTICE BOLTZMANN

Title in English

SIMULATION OF A PULSE GENERATOR TYPE ROMAN THE METHOD OF LATTICE BOLTZMANN

Resumen: Los modelos de lattice Boltzmann son alternativas novedosas para la simulación de ecuaciones diferenciales que han sido extendidas recientemente a la simulación de campos electromagnéticos. Estos modelos han probado ser rápidos y eficientes en la simulación de situaciones electromagnéticas sencillas. Por su parte, los generadores de impulso son dispositivos eléctricos de mucho interés práctico que se prestan perfectamente para la simulación de campos electromagnéticos en el dominio del tiempo. Esta trabajo tiene como objetivo utilizar el modelo de lattice Boltzmann de electrodinámica desarrollado por Mendoza y Muñoz [1] para simular el funcionamiento del generador de impulsos diseñado y construido por Román y Santamaría, y explorar de esta manera las potencialidades de este método. Para ello se implementan en lattice Boltzmann modelos para la fuente de alimentación del generador y su interruptor de plasma, que se utilizan finalmente para la simulación total del generador con una resolución baja. La simulación construida con el modelo de lattice Boltzmann reproduce con éxito el comportamiento cualitativo de las corrientes y los voltajes medidos experimentalmente en el sistema real, lo que evidencia la capacidad del método para simular este tipo de sistemas.

Abstract: Lattice Boltzmann models are, on one hand, novel alternatives for the simulation of partial differential equations that have been recently extended to the simulation of electromagnetic fields in media. These models have proven to be fast and accurate in the reproduction of simple electromagnetic problems. On the other hand, impulse generators are electrical devices of great practical interest, which are perfectly suitable for the simulation of electromagnetic fields in time domain. This work uses the lattice Boltzmann model developed by Mendoza and Muñoz to simulate the impulse generator designed and developed by Roman and Santamaria, and explores so the potential of the novel method. For this purpose, models for the voltage supply and the spark gap were built and implemented with lattice Boltzmann, models which were used thereafter in the simulation of the whole impulse generator at low spatial resolution. The simulation with lattice Boltzmann successfully reproduces the qualitative form and rise times of the voltage and current signals that were measured in the experiments. This evidences the capabilities and future possibilities of the lattice Boltzmann method for the simulation of electronically devices.

Palabras clave: Generador de Impulsos, Simulación, Lattice Boltzmann, Electrodinámica.

Keywords: Spark-Gap, Simulation, Lattice Boltzmann, Electrodinamic.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

"Mención Meritoria o Laureada"

Jurado

Jurado

Jurado

Director
José Daniel Muñoz Castaño

Bogotá, D.C., Junio 27 de 2014

Índice general

Índice general **I**

Índice de tablas **III**

Índice de figuras **IV**

Introducción **VIII**

1. Conceptos básicos **1**

1.1. Descarga Eléctrica 1

1.1.1. Ionización 1

1.1.2. Emisión de electrones en los electrodos 2

1.2. Mecanismo ruptura de las descagas eléctricas 3

1.2.1. Proceso de Townsend 3

1.2.2. Mecanismo de Streamer 5

1.2.3. Ley de Paschen 7

1.2.4. Arco Eléctrico 8

2. Generador de Impulsos **11**

2.1. Geometría esquemática del generador de impulsos 11

2.2. Generador de Impulsos Tipo Román 14

3. Método de Lattice Boltzmann **21**

3.1. Características generales 21

3.2. Ejemplo: Lattice Boltzmann para Ondas Bidimensionales 23

3.3. Aplicación: Simulación del Efecto Doppler por Lattice Boltzmann 24

4. Modelo de Lattice Boltzmann para Electrodinámica **28**

4.1. Leyes de Maxwell para la Electrodinámica 28
4.2. Modelo de Lattice Boltzmann para Electrodinámica 29
4.3. Aplicaciones desarrolladas del Modelo de Lattice Boltzmann para Electrodinámica 33
4.3.1. Efecto Skin 33
4.3.2. Microstrip 35

5. Resultados **39**
5.1. Simulación de un Condensador de Placas Paralelas 39
5.2. Simulación del "*Spark Gap*" con Fuente de Voltaje 43
5.3. Simulación de Generador de Impulsos tipo Román 45

Conclusiones **51**

Expansión de Chapman-Enskog para Ondas **53**

Expansión de Chapman-Enskog. Electrodinámica **56**

Bibliografía **60**

Índice de tablas

1.1. Modelos utilizados para simular la resistencia de arco [28] 10

2.1. Parámetros reales utilizados en la construcción del generador de impulsos. . 16

3.1. Relación de la velocidad fuente 24

5.1. Unidades de lattice normalizadas para la simulación del condensador 41

5.2. Longitudes utilizadas en el desarrollo de la simulación del generador de impulsos 46

5.3. Unidades de lattice normalizadas 49

Índice de figuras

1. Generador de Impulsos tipo Román, contruido por F. Santamaría IX

1.1. Representación esquemática de la avalancha de electrones (a) Gap entre los electrodos,(b) Avalancha de electrones [21] 3

1.2. Variación de la corriente en función de la separación entre los electrodos[21] 4

1.3. Representación de la distorsión del campo en un gap causada por una distribución espacial de carga de una avalancha de electrones [21]. 6

1.4. Representación de la teoría de Streamer, a. Streamer negativo. b. Streamer positivo [41]. 7

1.5. Campo de carga espacial (E_r) alrededor de la cabeza de avalancha [21]. . . . 8

1.6. Tensión disruptiva en función de la presión y de la distancia entre electrodos (*Curva de Paschen*)[21]. 8

1.7. Esquema de tiempo característico de la resistencia de arco [15] 9

2.1. Diagrama de generador, con la ubicación de sus diferentes elementos. La línea de formación del pulso (PFL) esta compuesto por una fuente primaria, la unidad de almacenamiento de energía, el interruptor y la línea de descarga y carga. V_{dc}es una fuente de carga DC, R_g es la resistencia de carga, L la longitud de la línea de carga, d es la distancia entre los electrodos y Z_L es la impedancia de carga [**?**]. 12

2.2. Representación esquemática del generador de impulsos 12

2.3. Representación esquemática de las fases de conmutación en un interruptor de cierre— lleno de gas("*Spark-Gap*") [**?**]. 13

2.4. Modelo eléctrico del "*spark gap*" [29]. 13

2.5. Esquema del Generador de Impulsos tipo Román [29]. 14

2.6. Generador de Impulsos tipo Román completo, construido por F. Santamaría como parte del trabajo de Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia [29] 15

2.7. Diagrama esquemático del diseño del generador de impulsos. Todas las medidas en mm. [41] 16

2.8. Modelo EMTPATP de la línea de transmisión del generador de impulsos incluyendo PFL y secciones TL, el modelo descarga (SG), una resistencia de 100Ω de carga (R) y la posición de Sensores de tensión (V). [41] 16

2.9. Perfíl de Rogowski para dos electrodos, en un corte en el plano xy. Tomado de [41]. 17

2.10. Pulso de corriente Simulado en EMTP-ATP para el modelo de generador de impulsos.Tomado de [41]. 17

2.11. Simulación de las tensiones para el "*spark-gap*", lleno de aire a 774 kPa y $d = 450\mu m$.La línea verde discontinua: la tensión de carga antes de la de chispa. Línea azul: la tensión de carga en el punto de medición. La línea azul de puntos: tensión de salida después de la de chispa. Línea roja discontinua: la tensión de salida en el punto de medición.Tomado de [41]. 18

2.12. Ubicación de los sensores de tipo sensor capacitivo "*D-dot*", en el generador de impulsos. Tomado de [41] 18

2.13. Sensores utilizados para la medición del campo eléctrico a través de un sensor capacitivo ("*D-dot*") (a), y la medición de la corriente a través de un transformador rápido de corriente (b). Tomado de [41] 19

2.14. Señales de la Integral del campo eléctrico en el sensor *D-Dot*. La línea azul: tensión en el lado de alta tensión del "*spark*" (V1). La línea negra: Tensión en el lado de carga del "*spark*" (V2) tomado de [41]. 19

2.15. Caída de tensión resistiva en el "*spark-gap*".Ubicación de los sensores de campo eléctrico D-dot en el generador de impulsos. Tomado de [41]. 19

2.16. Resistencia de arco en el gap a partir de la ec. 2.2Tomado de [41] 20

3.1. Configuración D2Q9 D3Q19 lattice y sus velocidades 22

3.2. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=0 25

3.3. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=2 25

3.4. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=5 26

3.5. *Ondas con una velocidad de la fuente Ux=10, Vista en perpectiva y vista superior* 26

3.6. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=15 26

3.7. *Ondas con una velocidad de la fuente Ux=30 y Ux=40, vista superior* 27

4.1. Celda D3Q13 para modelar las ecuaciones de Maxwell. Las flechas indican los vectores velocidad $\vec{v}_{ip}$ y los vectores de campo eléctrico $\vec{e}_{ij}$, donde p indica la localización del plano 30

4.2. Relación entre los índices de los vectores de velocidad, campo eléctrico y magnético 30

4.3. Celda cubica D3Q7 para simular el Campo Magnético. Las flechas indican los vectores de Campo $\vec{b}^p_{ij}$. 31

4.4. Simulación desarrollada del efecto Skin, para distintos valores de tiempo (click) 34
4.5. Microstrip de línea única 35
4.6. Componente z del campo eléctrico en el plano xz ubicado en $y = 25$ 36
4.7. Componente en Z del campo eléctrico em el plano xy ubicado en Lx/2 en la microstrip 36
4.8. Tensión contra corriente en la microstrip de línea única. 37
4.9. Microstrip de doble línea, en la componente z del campo eléctrico en el plano xz ubicado en $y = 25$. 38
4.10. Tensión contra corriente en la microstrip de doble línea, la línea negra corresponde al voltaje (V) y la línea verde corresponde a la corriente (I) que se propagan. 38

5.1. Condensador de placas paralelas 39
5.2. Simulación del valor de la conductividad (σ), para un condensador de placas paralelas 40
5.3. Corriente en un condensador al ser descargado, la línea roja corresponde al valor teórico encontrado, la línea negra la simulación de la corriente en en condensador 41
5.4. Voltaje en un condensador al descargar, la línea roja corresponde al valor teórico encontrado, la línea negra la simulación del voltaje en el condensador 42
5.5. Primer modelo de "*spark*" para determinación del proceso de disparo, consta de un fuente, resistencia y un "*spark*", a partir de un circuito RC 43
5.6. Tensión vs corriente, en el "*spark*" inicial. 44
5.7. Grafica el valor de la resistencia de arco medida en el "*spark*" 44
5.8. Diagrama esquemático del diseño del generador de impulsos. Todas las medidas en mm [41]. 45
5.9. Plano de corte en Lx/2 de la geometría del generador de impulsos tipo Román. 46
5.10. Fuente desarrollada a través placas paralelas, donde se coloca campo eléctrico E en la dirección perpendicular de las placas 46
5.11. Detalle de los valores de conductividad del condensador de placas paralelas, utilizado como fuente para el generador de impulsos 47
5.12. Detalle de los valores de conductividad del electrodos 47
5.13. Detalle del corte vertical de la tapa y el cilindro interior del generador de impulsos 47
5.14. Resultados de la tensión en la simulación en la fuente (línea negra) y en el "*spark*" (línea roja) 48
5.15. Corrientes en la resistencia de carga (negro), en el "*spark*" (rojo) y en la resistencia limitadora (verde) 48

5.16. Medición de la tensión en los medidores D-dot, La gráfica superior corresponde a la simulación desarrollada, la gráfica inferior corresponde a los resultados desarrollados por Santamaría() 49

5.17. Comparación entre las gráficas de voltaje y corriente en la simulación y los datos obtenidos por Santamaría en el generador de impulsos 50

Introducción

Las simulaciones de fenómenos electromagnéticos han tenido en las últimas décadas un destacado auge, que ha impulsado el diseño y la creación de mejores dispositivos eléctricos y electrónicos. Las simulaciones permiten verificar el funcionamiento de prototipos y confirmar el correcto funcionamiento de los elementos antes de que el producto real llegue a las fabricas, lo que reduce desarrollo y mejora la calidad, a la vez que permiten la exploración de nuevas posibilidades de diseño.

Existen dos tipos de simulaciones en electrodinámica, las que se realizan en el dominio de la frecuencia y las que se realizan en el dominio del tiempo. Las primeras son más adecuadas para modelar antenas, y líneas de transmisión, que trabajan al rededor de una frecuencia fija, el método de los momentos es un ejemplo usual de este tipo de simulaciones. Las segundas son más adecuadas para la simulación de pulsos electrodinámicos, como las que se generan en dispositivos de conmutación. A medida que los circuitos electrónicos, se van volviendo más rápidos y pequeños, por una parte, y que los voltajes y las corrientes de disparo de los conmutadores eléctricos se hacen más grandes y rápidas, por otra, crece la necesidad de métodos numéricos adecuados para estos sistemas. Estas simulaciones se desarrollan usando métodos numéricos que resuelven las ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo que modelan la propagación de los campos electromagnéticos. Entre estos métodos sobresalen los llamados métodos de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) y los elementos finitos (MEF). El primero de ellos, propuesto en 1966 por Yee [2], que define dos grillas de celdas cubicas, una para los campo eléctricos y otra para los campo magnéticos, desfasadas entre si por media celda. Como las leyes de Maxwell permiten calcular la evolución de los campos eléctricos en magnéticos y viceversa, este esquema permite simular la evolución de los campos electromagnéticos con una precisión de segundo orden. El segundo método, propuesto en 1956 por Turner [46], implementa la evoluacion temporal de los campos electromagnéticos representando una solución para cada elemento y la solución completa se genera conectando o armando las soluciones individuales.

En los últimos años ha surgido una alternativa en la simulación de métodos numéricos llamado lattice-Boltzmann. Este método, propuesto originalmente a finales de los 80 e inicios de los 90 del siglo pasado para la simulación de fluidos [34], ha sido extendido a hidrodinámica[8], magnetohidrodinámica [17] y más recientemente a electrodinámica [1]. El método de lattice Boltzmann representa los campos como el efecto colectivo de funciones de distribución que viajan de celda en celda con cada paso de tiempo, interactuando entre sí como si fueran partículas de un fluido[47]. En particular, método de lattice Boltzmann para electrodinámica desarrollado por Muñoz y Mendoza [1] define vectores auxiliares

perpendiculares a la dirección de propagación de las funciones de distribución y las utiliza para calcular los campos eléctricos y magnéticos. Su método ha probado ser eficiente y preciso al simular los campos electromagnéticos en sistemas sencillos para los que existe una solución teórica como por ejemplo los campos producidos por un dipolo oscilante o una microstrip, pero su efectividad no ha sido establecida para la simulación de dispositivos reales.

Los generadores de impulso son dispositivos eléctricos de mucho interés práctico que se prestan perfectamente para la simulación de campos electromagnéticos en el dominio del tiempo. Un generador de impulsos es básicamente un interruptor de potencia creado para controlar el flujo de la corriente eléctrica, que se utiliza como elemento de protección. Los generadores de impulsos de alta tensión están diseñados para realizar descargas en un tiempo de conmutación t_s del orden de $10^{-10} - 10^{-8}s$ (dependiendo de los parámetros de impulsos y su propósito), con valores de tiempo de retardo $\delta t_d(10^{-9} - 10^{-7}s)$. Uno de los tipos de generador de impulsos más promisorios es el llamado generador de impulsos Román, desarrollado y patentado por el profesor Francisco Román que utiliza el efecto corona para cargarse y tiene como ventaja la producción continua de pulsos rápidos.

En su tesis doctoral Francisco Santamaría Piedrahita [41] construyo y simulo uno de estos generadores para estudiar la formación del canal de descarga entre los electrodos del generador (*Spark-gap*), que se muestra en la figura (1). Su modelo no cuenta por tanto el electrodo flotante que genera la carga por efecto corona, sino que se conecta directamente a una fuente de voltaje. La simulación se realiza con el software EMTP-ATP, que modela el generador de impulsos usando elementos discretos y líneas de transmision.

FIGURA 1. Generador de impulsos tipo Román, contruido por F. Santamaría

Este trabajo tiene como objetivo utilizar el modelo de lattice Boltzmann de electrodinámica desarrollado por Mendoza y Muñoz para simular el funcionamiento del generador de impulsos diseñado y construido por Román y Santamaría. La meta es determinar si este modelo es capaz de reproducir las señales experimentales de voltaje y corriente medidas experimentalmente en el generador. Para ello se construyeron y probaron modelos de la fuente de voltaje y del "*spark gap*", para luego utilizarlas en la simulación del generador completo. El modelo del generador se construye utilizando los valores de conductividad reales de los materiales utilizados. Luego, se simulá la propagación de los campos producidos por la corriente de disparo del generador. A partir de estos campos se calculan las señales de voltaje y corriente para ser comparadas con las medidas en el dispositivo real. Para el desarrollo de los objetivos se organizó el contenido de la siguiente forma. En el capítulo [**1**] se hace una breve introducción a los fenómenos físicos que explican

las descargas eléctricas entre los electrodos. Luego, en el capítulo [**2**] se describe el generador de impulsos tipo Román, así como el aparato desarrollado por Santamaría. El capítulo [**3**] introduce el modelo de lattice Boltzmann utilizando como ejemplo un lattice Boltzmann para ondas en 2D. En el capítulo [**4**] se explica el modelo de Lattice Boltzman para electrodinámica (**LBE**) desarrollado por Mendoza y Muñoz para la simulación de fenómenos electromagnéticos, y se utiliza para reproducir la propagación de campos electromagnéticos en sistemas sencillos. En el capítulo [**5**] implementa modelos para la fuente de voltaje y el "*Spark gap*", y los utiliza finalmente en la simulación del generador de impulsos construido por Santamaría. Finalmente en el capítulo [**6**] se resumen las conclusiones del trabajo y las recomendaciones a futuro. En los apéndices se muestran las expansiones de Chapmann-Enskog de los modelos de ondas y electrodinámica. Este trabajo busca ser una herramienta para ser utilizados por otros grupos en el desarrollo de simulaciones de aparatos eléctricos y electrónicos.

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos

1.1. Descarga Eléctrica

Los gases son excelentes aislantes en condiciones de bajas temperaturas y humedad. Pero, cuando se aplica un voltaje lo suficientemente alto para ionizar el medio gaseoso entre dos electrodos separados, se puede producir un arco eléctrico o descarga. Durante una descarga eléctrica en un medio gaseoso se producen un gran número de procesos en los que no sólo esta implicado el gas, su composición y presión, sino también la geometría y composición de los electrodos. El gas puede pasar a un estado conductor si se presentan mecanismos que incrementan el número portadores cargados. El gas, que en condiciones normales, no conduce la electricidad, empieza a hacerlo debido a la ionización de sus átomos. La conducción eléctrica a través de este gas ionizado, o plasma, no sigue la ley de Ohm, sino que se rige por los procesos físicos elementales entre las partículas cargadas, entre los que se incluyen colisiones elásticas, exitación de las moléculas, ionización y recombinación, entre otros.

1.1.1. Ionización

La ionización de las moléculas de un gas se da por las colisiones de los electrones con las moléculas de dicho gas a lo largo del recorrido del electrón en el campo eléctrico aplicado. La taza de ionización se expresa por medio de un coeficiente de ionización α (1.1) por unidad de longitud en la dirección de la velocidad de arrastre de los electrones. α depende de la presión del gas p y el campo eléctrico aplicado E, A y B son constantes que dependen del tipo de gas utilizado.

$$\alpha = pAe^{\frac{-Bp}{E}} \quad , \tag{1.1}$$

La ionización da lugar a la multiplicación exponencial de una distribución inicial de electrones, denominada *avalancha electrónica*.

La ionización se puede producir por varios procesos diferentes: colisión, fotoionización y procesos secundarios[30].Cuando se produce la ionización por colisión, un electrón libre choca con los electrones de una molécula de gas neutro y desprende un electrón de la molécula dejandola ionizada.

En la ionización por colisión, un electrón es acelerado por el campo eléctrico entre los electrodos, de manera que el trabajo realizado por la fuerza electromagnética se convierte totalmente en energía cinética, hasta que choca con una molécula del gas. Si la energía que el electrón puede obtener a lo largo de la trayectoria libre media entre colisiones es mayor que la energía de ionización del gas W,

$$\int_0^{r_o} e\vec{E}(r)d\vec{r} \geq W \tag{1.2}$$

se produce la ionización [21],[30]. EL proceso se puede simbolizar como

$$A + e^- \rightarrow A^+ + 2e^- \quad . \tag{1.3}$$

Si la energía no es suficiente para provocar el desprendimiento de un electrón, se da una excitación del átomo, que puede ser fuente de ionización secundaria, al desprender energía en forma de al volver a su estado base.

La ionización por fotoionización se produce cuando la energía de los fotones absorbidos por el gas excede su energía de ionización, causando que se desprendan uno o más electrones. El proceso se puede describir como

$$A + hv \rightarrow e^- + A^+ \quad . \tag{1.4}$$

Este proceso puede proporcionar bajo ciertas condiciones los electrones que se requieren para iniciar una avalancha por ionización.

Los procesos secundarios de ionización corresponden a la creación de electrones por partículas que aparecieron en el proceso primario de ionización por colisión. Estos procesos secundarios afectan la amplificación de forma importante si producen emisión electrónica en el cátodo, cuando los electrones acelerados chocan finalmente con él.

1.1.2. Emisión de electrones en los electrodos

Cuando se les proporciona suficiente energía para vencer la barrera de potencial entre el nivel de Fermi del metal y el vacío, los electrones abandonan los electrodos. Esta energía puede ser suministrada por diferentes medios. Por ejemplo, en la *emisión termoiónica* el metal del electrodo alcanza una temperatura muy elevada, lo que provoca que los electrones se mueven más rápidamente, alcanzando la energía necesaria para abandonar el metal. En la *emisión fotoeléctrica* los electrones saltan de la superficie del electrodo por el impacto de fotones cuando la energía de los fotones incidentes es superior a la función de trabajo del metal. En la *emisión por impacto de iones positivos o átomos excitados* los electrones saltan de la superficie del cátodo cuando ésta es bombardeada con iones positivos o átomos metaestables. En la *emisión por efecto de campo*, se emiten electrones desde la superficie del metal al aplicar un campo eléctrico fuerte, por el efecto conocido como Shottky. El campo eléctrico disminuye la barrera de potencial de la superficie del metal, lo cual aumenta considerablemente la probabilidad de que los electrones se liberen de esta barrera por el efecto túnel. Este último proceso es independiente de la temperatura.

1.2. Mecanismo ruptura de las descagas eléctricas

Las descargas eléctricas pueden dividirse en dos grupos, dependiendo de la presión del gas en el que ocurren. En las descargas de alta presión, que se llaman así cuando la presión del gas es superior a la atmosférica, el proceso dominante es el de "*Streamer*", que corresponde a un frente de ionización de la descarga, capaz de crear y permitir la propagación de un canal de alta ionización. En cambio, en las descargas de baja presión, en las que el gas se encuentra a una presión menor o igual que la presión atmosférica, el proceso dominante es el de Townsend, que corresponde a una aproximación física a la formación de las avalanchas de electrones [31].

1.2.1. Proceso de Townsend

El proceso de Townsend es básicamente el proceso de avalacha producido por la ionización por colisión. Los electrones libres emanados del electrodo negativo son acelerados por acción del campo eléctrico, provocando más colisiones y nuevos iones que chocan a su vez con las moléculas del gas, produciendo una avalancha de electrones libres e iones positivos (ver figura 1.1). La condición de ionización se expresa en términos del campo eléctrico $\vec{E}$ y el camino libre medio de ionización λ_E, que es la distancia media de una partícula atraviesa entre colisiones bajo la influencia del campo eléctrico $\vec{E}$ [31],

$$eE\lambda_E > W_i = eV_i \quad , \tag{1.5}$$

donde W_i es la energía de ionización, V_i es el potencial de ionización y e es la carga del electrón.

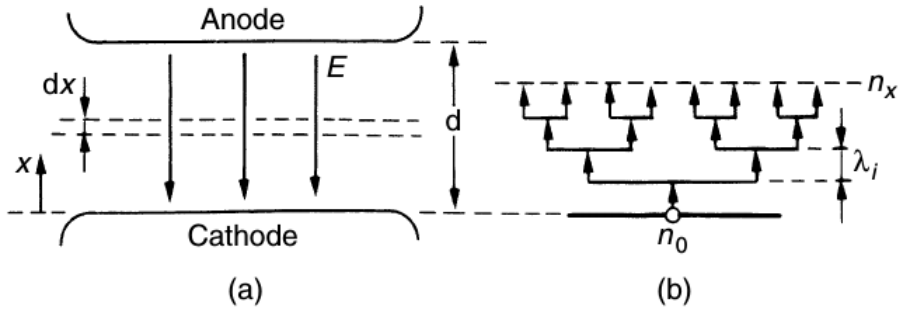

FIGURA 1.1. Representación esquemática de la avalancha de electrones (a) Gap entre los electrodos,(b) Avalancha de electrones [21]

.

El número de nuevos electrones que se producen dn en la distancia entre los electrones dx esta dada por

$$dn = \alpha n(x)dx \quad , \tag{1.6}$$

donde α, que depende de la intensidad del campo eléctrico, es el número de electrones producido por una avalancha a medida que viaja una unidad de distancia en la dirección del campo, y se conoce como coeficiente de ionización de Townsend. Al integrar el resultado de la ecuación (1.6) sobre la distancia de separación de los electrodos se encuentra

$$n = n_o e^{\alpha x} \quad , \tag{1.7}$$

donde n_o es la cantidad de electrones primarios generados por el cátodo. Este proceso, como se ve en la ecuación (1.7), crece de forma exponencial (ver figura 1.2), y es la llamada *Avalancha de electrones* , que puede ser expresada en términos de la corriente I como

$$I = I_o e^{\alpha x} \tag{1.8}$$

Esta avalancha viene acompañada por una luminosidad debida a los fotones emitidos en los impactos.

Si la temperatura del gas es constante, la variación de energía del electrón depende sólo del valor del campo eléctrico y del valor de la presión E/p. En esta situación,α depende tanto de la densidad del gas (o equivalentemente de su presión) como de la energía que gana el electrón entre colisiones [21],

$$\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{E}{p}\right) \quad . \tag{1.9}$$

De aquí, se puede entender α como la probabilidad de ionización por colisión.

$$\frac{\alpha}{p} = Ae^{-[B/(E/p)]} \quad , \tag{1.10}$$

donde $A_{(T)} = \frac{\sigma_i}{k \cdot T}$ y $B_{(T)} = V_i \frac{\sigma_i}{k \cdot T}$ son valores constantes que dependen del gas utilizado. Es necesario tener en cuenta que la teoría de Townsend es válida para valores bajos de presión y pequeñas distancias entre electrodos.

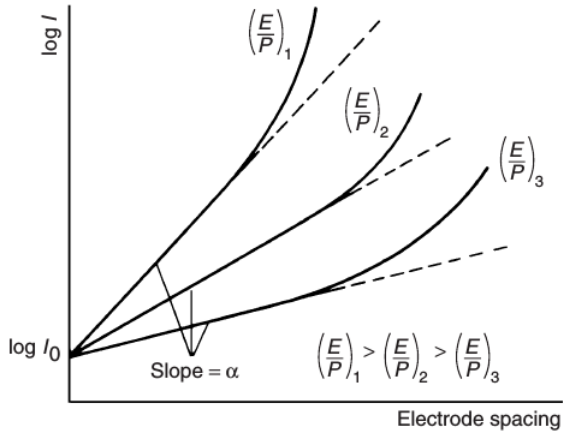

FIGURA 1.2. Variación de la corriente en función de la separación entre los electrodos[21]

Para explicar el alejamiento de la relación exponencial (que corresponde a una línea recta en la figura 1.2), Townsend postuló que un segundo mecanismo debía estar afectando a la corriente de la descarga eléctrica. La conclusión a la que llegó fue que electrones nuevos estaban participando en el proceso de descarga, aparte de los producidos por la ionización del gas aislante. Consideró que este aporte extra de electrones eran liberados del cátodo por métodos diferentes, como la fotoionización, la emisión secundaria de electrones del cátodo por el impacto de fotones, entre otros. El coeficiente de la segunda ionización descrito por Townsend (γ) incluye a todos los mecanismos que están participando en la ionización secundaria.

Si tomamos n_o como el número de electrones por segundo procedentes del cátodo debido a la radiación externa, n como el número de electrones por segundo procedentes de todas las fuentes que llegan al ánodo y n_+ como el número de electrones por segundo procedentes del cátodo por emisión secundaria, entonces se tiene que el número total de electrones procedentes del cátodo esta dada por

$$n = (n_o + n_+)e^{\alpha x} \quad . \tag{1.11}$$

La diferencia entre el número de electrones que llegan al ánodo y el número de los que abandonan el cátodo, esta dado por [21]

$$\gamma(n - (n_o + n_+)) = n_+ \tag{1.12}$$

Despejando n, y eliminando n_+ de las ecuaciones (1.11) y (1.12) se encuentra que

$$n = \frac{n_o e^{\alpha x}}{1 - \gamma(e^{\alpha x} - 1)} \quad , \tag{1.13}$$

(como era de esperar por la Ley de Ohm). Esta última expresión se puede escribir en términos de la corriente, como

$$I = \frac{I_o e^{\alpha x}}{1 - \gamma(e^{\alpha x} - 1)} \quad , \tag{1.14}$$

El efecto de los electrones secundarios incrementa la corriente que alcanza al ánodo si el término $\gamma(e^{\alpha x} - 1)$ es despreciable frente a la unidad. Además, la ecuación (1.14) da la posibilidad de que la corriente fluya a través del gas sin necesidad de ser sostenida por los electrones primarios del cátodo, representados por I_o. Usualmente se tiene que γ es del orden de 10^{-2}. Este coeficiente depende mucho de la naturaleza de la superficie del cátodo: cuanto menor es la función de trabajo (energía necesaria para liberar un electrón de la superficie del cátodo), mayor será la emisión de electrones producida en las mismas condiciones. Townsend planteó que se puede representar el proceso completo teniendo en cuenta ambos coeficientes, α y γ.

El valor de γ es pequeño para valores pequeños de $\frac{E}{p}$, y aumenta al aumentar $\frac{E}{p}$. En efecto, al aumentar la energía que alcanzan los electrones antes de colisionar con las moléculas del gas, el exceso de energía por encima de la función de trabajo se emite como fotones de cada vez mayor energía, suficiente para liberar electrones de la superficie del cátodo.

La ecuación (1.14) fija un límite para la corriente. Si $\gamma(e^{\bar{\alpha x}} - 1) > 1$, la descarga crece muy rápidamente, siendo cada vez mayor el número de eelctrones. Por el contrario, si $\gamma(e^{\bar{\alpha x}} - 1) < 1$, la avalancha no se autosostiene, y se detiene.

1.2.2. Mecanismo de Streamer

A presiones y voltajes altos, el proceso de avalancha es descrito mejor por la teoría de "*streamer*" (canales, o filamentos), desarrollada por Raether, Loed y Meek [**?**], en los años 30s. La idea fundamental es que, si la carga ionizada es suficientemente abundante, el campo eléctrico sobre la superficie de la zona ionizada se refuerza a tal punto que es capaz de generar por sí solo avalanchas a su alrededor. Cuando se ioniza por colisión o por fotoabsorción, el gas se va separando en electrones e iones, que son empujados en

direcciones opuestas por el campo eléctrico (Ver Figura 1.3). Esto genera una separación de carga y una polarización neta que apantalla el campo externo, pero genera una carga superficial en la región que se ioniza, que se convierte en un plasma conductor. Si el campo eléctrico producido por esta separación de carga crece hasta ser comparable con el campo externo, puede producir por sí solo el campo necesario para que la avalancha se siga propagando. Esto ocurre usualmente en forma de filamentos (canales o "*streamers*"), que crecen a partir de la zona de ionización (o "*streamer*") original. Los portadores de carga que se necesitan para iniciar estas nuevas avalanchas se producen por fotoionización, debida a los destellos de luz que las colisiones generan. El proceso puede crecer hasta que se obtenga un canal de plasma que conecta los dos electrodos, y que se autosostiene por la misma corriente que se establece entre ellos (lo que ya constituye una descarga de arco) [19].

Las condiciones necesarias para la propagación del canal (streamer) son: que existan suficientes fotones de alta energía para que se pueda crear la avalancha, que los fotones deben ser absorbidos para producir electrones suficientes en la punta de la avalancha, y que el campo eléctrico en la parte posterior de la punta de la avalancha se suficiente para producir una avalancha secundaria.

La avalancha se convertirá en un "*streamer*"cuando la ionización generada en el gas cree un canal conductor capaz de apantallar el campo eléctrico exterior, garantizando por sí mismo su propagación y la evolución de la descarga. La transición entre la avalancha y el "*streamer*"se produce cuando cruza completamente el espacio de separación entre electrodos.

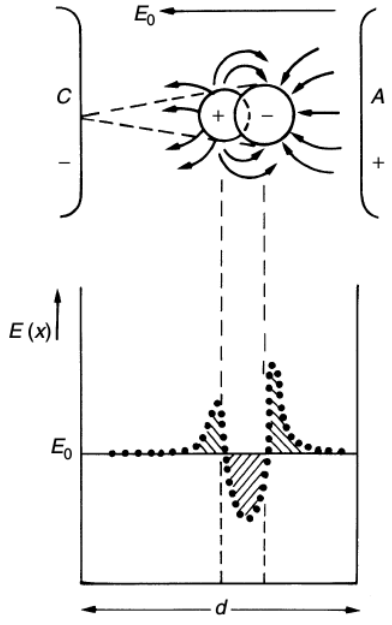

FIGURA 1.3. Representación de la distorsión del campo en un gap causada por una distribución espacial de carga de una avalancha de electrones [21].

Al tratar de identificar las condiciones para que una avalancha de Townsend se transforme en un canal, Raether observó que esto ocurre cuando $n_o e^{\alpha x_c} \approx\rightarrow \alpha x_c \approx 18 - 20$ donde x_c [21] es la longitud media de la trayectoria de la avalancha en la dirección del campo cuando la avalancha alcanza un tamaño crítico de autosostenimiento. En ese momento

se produce un fuerte aumento en la corriente, las descargas son más rápidas (10^{-7} m/s frente a los 10^{-5} m/s de las Townsend) y los efectos del gas como la fotoionización y la ionización por iones positivos predominan sobre los procesos secundarios en los electrodos.

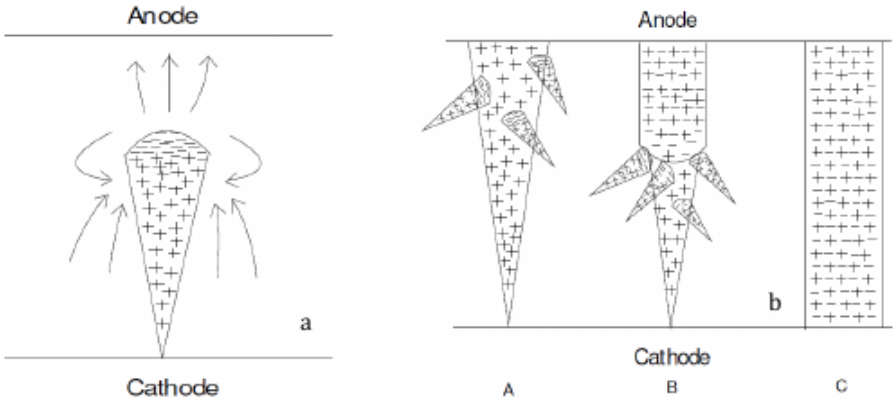

FIGURA 1.4. Representación de la teoría de Streamer, a. Streamer negativo. b. Streamer positivo [41].

La construcción del canal ocurre de manera diferente, dependiendo del voltaje y de la separación entre electrodos. Si la distancia de separación entre los electrodos es grande y/o las tensiones son muy altas, la transición avalancha-"*streamer*"ocurre cerca del cátodo, y la cabecera de la zona de plasma o líder está formadas por cargas negativas, por lo que se denomina negativa o dirigida al ánodo. La avalancha, al no crecer lo suficiente, crea un pequeño cono de carga, el cual a su vez crea avalanchas secundarias a su alrededor. Si la separación entre los electrodos es moderada y las tensiones son muy bajas el crecimiento de los canales comienza en el ánodo y crece hacia el cátodo, por lo que es llamado positivo (ver Figura1.4).

Con base en observaciones experimentales, Raether desarrolló una expresión empírica para el criterio de ruptura streamer,

$$\alpha x_c = 17.7 + lnx_c + ln\frac{E_r}{E} \quad , \tag{1.15}$$

donde E_r es la intensidad de campo de carga espacial en dirección radial a la cabeza de avalancha, (ver Figura 1.5), y E es la intensidad del campo aplicado externamente.

1.2.3. Ley de Paschen

La Ley de Paschen establece cuál debe ser la tensión mínima a partir de la que se producirá la ruptura del aire bajo campos eléctricos uniformes. El voltaje al cual ocurre el stremer depende de la forma y del material de los electrodos, de la presión del gas y de la distancia de separación entre los electrodos. A presiones bajas, el rompimiento ocurre a mayores distancias. La dependencia esta dada por

$$V_d = \frac{Bpd}{ln(Apd) - ln(1 + \frac{1}{\gamma})} \quad , \tag{1.16}$$

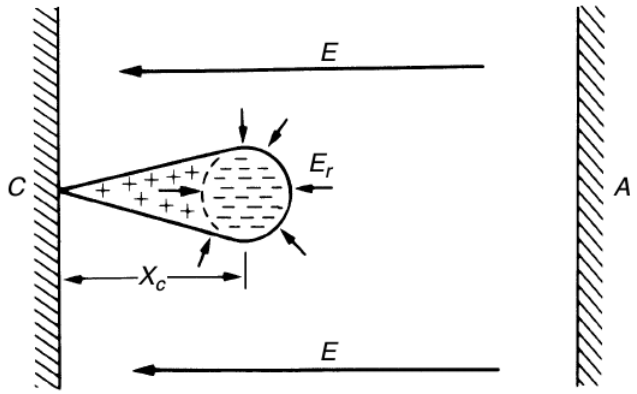

FIGURA 1.5. Campo de carga espacial (E_r) alrededor de la cabeza de avalancha [21].

donde V_d es el voltaje de rompimiento del dieléctrico, p es la presión, d es la distancia, A y B son constantes que dependen de gas, que en el caso del aire tiene valores de $15cm^{-1}Torr^{-1}$ y $365Vcm^{-1}Torr^{-1}$ respectivamente, y γ corresponde al segundo coeficiente de ionización de Townsend. La curva encontrada por Paschen (ver Figura 1.6), donde se ve la tensión de ruptura del aire en función de la presión por la distancia entre los electrodos.

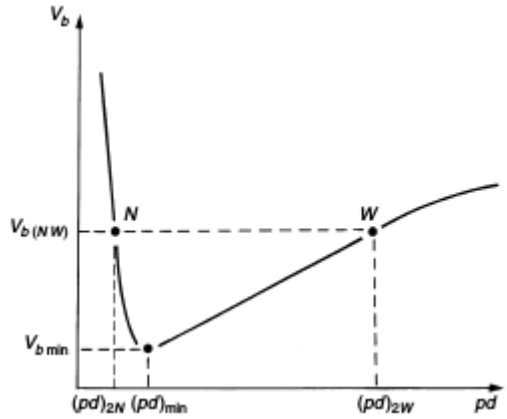

FIGURA 1.6. Tensión disruptiva en función de la presión y de la distancia entre electrodos (*Curva de Paschen*)[21].

La Ley de Paschen representa el grado de eficiencia en la ionización producida por los electrones que atraviesan el espacio entre los electrodos. Para producir la descarga se necesita primero que todo que la energía que se le suministre a los electrones debe permitir la ionización de los átomos del gas al colisionar con ellos, y que exista un número mínimo de partículas en el aislante gaseoso para que se alcance una masa crítica que autosostenga la descarga.

1.2.4. Arco Eléctrico

El spark-gap cambia de un estado aislante a conductor si el voltaje a través de los electrodos se incrementa por encima de la tensión de ruptura. A este fenómeno se le denomina arco eléctrico.

La tensión de un arco eléctrico no crece proporcionalmente a la corriente [15], sino que decrece progresivamente, pues más corriente implica más ionización y un mayor número de portadores, hasta que la corriente alcanza un valor máximo de entre 1 y 50 A. De ahí en adelante, la tensión vuelve a crecer, pues la temperatura aumenta y el camino libre medio entre choques disminuye, haciendo menos eficiente la ionización. El arco eléctrico cuenta con tres características esenciales: una baja caída de potencial en la región catódica, densidades de corriente grandes (en el rango $10^2 - 10^8 A/cm^2$, dependiendo del modo de la descarga), y una alta luminosidad en la descarga. Los electrodos en el arco reciben grandes cantidades de energía y alcanzan elevadas temperaturas por cortos intervalos de tiempo.

Antes de la ruptura, el "*spark-gap*" se comporta como un condensador que no carga completamente. El tiempo total de ruptura se suele dividir en dos partes: el tiempo límite de subida de la descarga (t_c) y el tiempo de conmutación (t_s). El tiempo límite de subida t_c corresponde al tiempo transitorio en el que el pulso electromagnético atraviesa el gap. Lehr y colaboradores [3] sugieren que este tiempo de tránsito depende de la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, y esta dado como

$$pd = \frac{pt_r}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad , \tag{1.17}$$

donde (p) corresponde a la presión del gas, (d) es la distancia de entre los electrodos y (t_r) es el tiempo de subida.

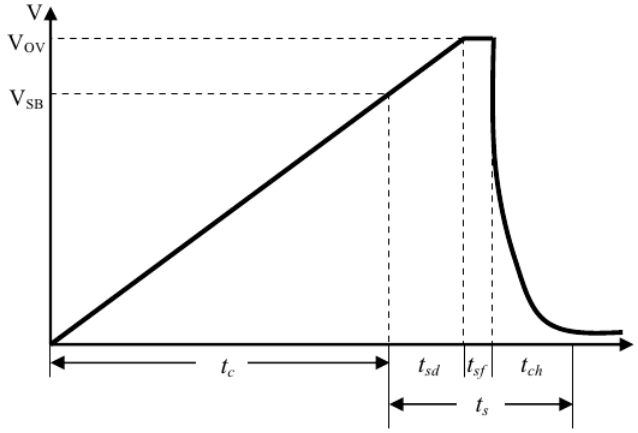

FIGURA 1.7. Esquema de tiempo característico de la resistencia de arco [15]

El tiempo de conmutación (t_s) es el tiempo que el "*spark*" tarda en pasar de un estado no conductor al conductor, y es descrito como la suma de las tres fases(ver Figura 1.7): t_{sd}, el tiempo necesario para que la tensión alcance el valor de ruptura; t_{sf}, el tiempo promedio que se requiere para que un electrón inicie la avalancha, y τ_R, es el tiempo requerido para que el canal se caliente. A lo largo de este proceso, la resistencia de arco cambia desde $M\Omega$ a $m\Omega$, por lo que el tiempo de conmutación se conoce también como la fase resistiva del canal de descarga. Esta fase determina la conductividad dependiendo del tiempo de descarga del "*spark*" e influye en el tiempo del pulso de salida.

El tiempo de la fase resistiva τ_R en gases depende del campo eléctrico en el "*spark*", la presión o densidad del gas y la impedancia del circuito de conducción del canal conductor. El tiempo de la fase resistiva para un campo eléctrico dado disminuye con la densidad del

Researcher	Equation [Ω]	Parameters	Test conditions
Toepler [1906]	$\frac{k.d}{\int_0^\tau i.dt}$	k: model constant d: inter-electrode distance [m] i: current in the channel [A]	d = 9 – 17,5 [mm] p = 100 [kPa] In air
Rompe and Weizel [1944]	$\frac{d}{\sqrt{2\frac{k}{p_0}\int_0^\tau i^2 dt}}$	k: model constant d: inter-electrode distance [m] p_0: Initial pressure in the gas [kPa] i: current in the channel [A]	$d \leq 35$ [mm] p_0 = 100 – 600 [kPa] In air Unipolar pulse, 50 [ns]
Braginskii [1958]	$\frac{d}{\pi\sigma.k^2\int_0^\tau i^{2/3} dt}$	k: model constant d: inter-electrode distance [m] σ: channel conductivity [Ω.m] i: current in the channel [A]	Empirical model
Vlastos [1972]	$\frac{k.d.r^{2/5}}{\left(\int_0^\tau i^2 dt\right)^{3/5}}$	k: model constant d: inter-electrode distance [m] r: channel radius [m] i: current in the channel [A]	d = 130 [mm] Exploding wire
Sorensen and Ristic [1977]	$k\left(\frac{p^{1/2}}{E.Z_0^{1/3}t}\right)^3$	k: model constant p: Pressure in the gas [kPa] E: Electric field [kV/m] Z_0: TL impedance [Ω]	p = 200 – 600 [kPa] d = 50 – 500 [μm] Ni, He Unipolar pulse, 100 [ns]
Kushner [1985]	$k.d\left(\frac{p_0^3}{A^2 i^6}\right)^{1/5}$	k: model constant d: inter-electrode distance [m] p_0: Initial pressure in the gas [kPa] A: Channel cross-section area [m²] i: current in the channel [A]	j = 2x104 [MA/m] d = 12 [mm] $p_0 \leq 50$ [kPa] SF_6, H_2, N_2, CH_4, Xe Unipolar pulse, 100 [ns]

TABLA 1.1. Modelos utilizados para simular la resistencia de arco [28]

gas y es descrito por la ecuación propuesta por [24],

$$\tau_R = \frac{88}{E_o^{4/3} Z_o^{1/3}} (\frac{\delta}{\delta_o})^{1/2} [ns] \quad , \tag{1.18}$$

donde δ corresponde a la densidad del gas, y δ_o a la densidad del aire, Z_o es la impedancia caracteristica del circuito del canal y E_o es le campo electrico a lo largo del canal.

La resistencia de arco del canal es una función de la evolución temporal de procesos físicos, incluidos los cinéticos de los electrones, y existen infinidad de modelos para describirla, aunque ninguno ha probado ser exitoso en todos los casos. La tabla(1.1),hace una lista del conjunto de los modelos más conocidos de resistencia de arco [28],

Aunque existen variados modelos para explicar la resistencia de arco, en este trabajo se utilizará el desarrollado por Kushner[22],

$$R_a = k \cdot A \left(\frac{p_o^3}{A^2 i^6} \right)^{1/5} \quad , \tag{1.19}$$

por ser el que mejor reprodujo los resultados experimentales del tubo de descarga que se va a simular.

CAPÍTULO 2

Generador de Impulsos

Un generador de impulsos es un tipo de interruptor de potencia del tipo plasma, dispositivo cuya función consiste en interrumpir y/o restablecer la conducción de corriente en un circuito eléctrico o línea de transmisión [18]. Su misión es proteger otros aparatos, equipos e instalaciones elétricas contra sobretensiones excesivamente elevadas y/o establecer compensaciones de potencia. Estos dispositivos se utilizan, por ejemplo, como interruptores de centrales eléctricas, donde se necesita manejar pulsos rápidos con corrientes del orden de kA y voltajes de kV. El generador del tipo plasma utiliza para la operación de cierre y apertura algún tipo de gas entre los electrodos, debido a que son las únicas sustancias capaces de pasar de valores de $M\Omega$ a $m\Omega$.

Los generadores de impulsos de alta tensión están diseñados para realizar descargas en un tiempo de conmutación t_s del orden de $10^{-10} - 10^{-8}s$ (dependiendo de los parámetros de impulsos y su propósito), con valores de tiempo de retardo $\delta t_d(10^{-9} - 10^{-7}s)$. En los interruptores de descarga de gas, estas condiciones se logran alcanzar con el aumento del campo eléctrico, de la presión del gas, y el número de electrones libres que inician la avalancha.

2.1. Geometría esquemática del generador de impulsos

Un generador de impulsos rápidos de corriente consta de tres electrodos principales: el electrodo de alta tensión, el electrodo flotante y un electrodo de tierra (ver Figura 2.1).

Los dos primeros se disponen como si fueran el conductor interno de un cable coaxial, interrumpido en el sitio donde se generará el arco, mientras que el electrodo de tierra ocupa el lugar del electrodo externo del cable coaxial. Además el montaje suele contar con dispositivos de carga, para alimentarlo, y de diagnóstico, para medir la señales de corriente y de voltaje que permitan monitorear su funcionamiento.

El esquema más detallado del generador se muestra en la figura (ver Figura 2.2). Las partes partes del generador son: la fuente de alto voltaje (HV), la línea de formación del pulso (PFL), el interruptor (*spark-gap*), la línea de transmisión (TL) y la carga (*Load*) [**?**].

La línea de formación de pulsos (**PFL**) corresponde a una línea de transmisión de tipo coaxial, pero utilizada para generar pulsos cuadrados. Una línea de transmisión es

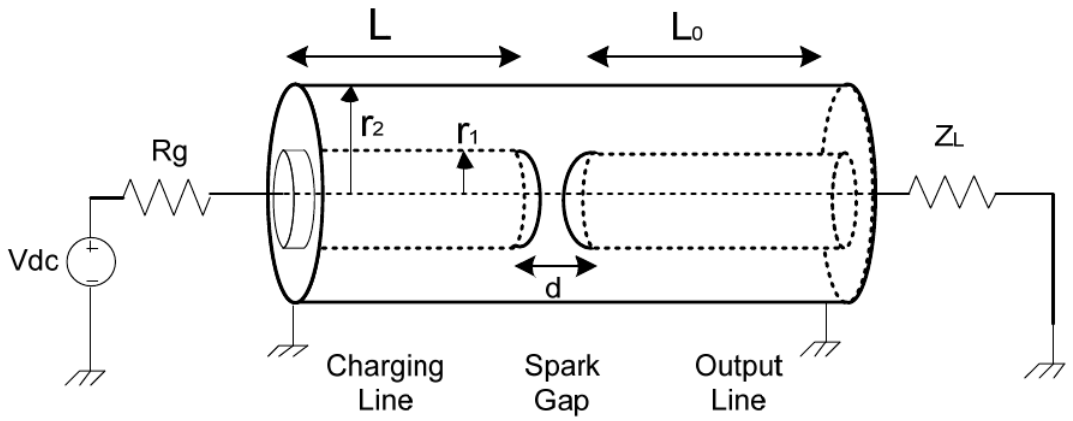

FIGURA 2.1. Diagrama de generador, con la ubicación de sus diferentes elementos. La línea de formación del pulso (PFL) esta compuesto por una fuente primaria, la unidad de almacenamiento de energía, el interruptor y la línea de descarga y carga. V_{dc}es una fuente de carga DC, R_g es la resistencia de carga, L la longitud de la línea de carga, d es la distancia entre los electrodos y Z_L es la impedancia de carga [**?**].

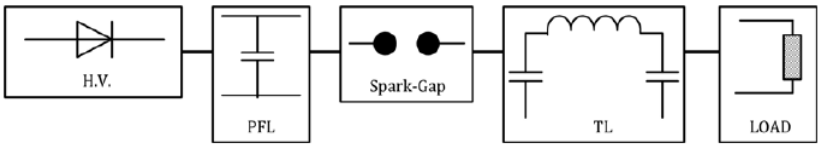

FIGURA 2.2. Representación esquemática del generador de impulsos

un condensador distribuido, que puede ser utilizado para almacenar la energía en el lugar de un condensador. La línea se carga lentamente, y la energía es liberada por medio de un interruptor. Una de las propiedades de las líneas de transmisión es su capacidad para producir un pulso de salida de voltaje constante cuando se descargada sobre una carga resistiva que coincide con la impedancia característica de la línea. En comparación con un generador de pulso cuadrado basado en la descarga de un condensador, la energía almacenada en el sistema coincide con la energía suministrada a la carga, porque la transferencia de energía es completa [**?**].

El interruptor, o "**Spark-Gap**" corresponde a la brecha de separación entre dos electrodos, donde se forma la chispa. Normalmente este espacio está lleno de un gas, y se diseña para permitir que se produzca la chispa eléctrica cuando la diferencia de voltaje entre los electrodos exceda el voltaje de disrupción deseado. Su funcionamiento es el de un interruptor, que se modela en tres momentos: antes, durante y después de la fase de ruptura (ver Figura 2.3). Antes de llegar al valor de ruptura, el interruptor puede ser visto como las dos placas de un condensador, separadas por un dieléctrico, que para este caso es un gas, con ciertas propiedades de ionización. Por tanto mientras se cargan los electrodos, aparece un campo eléctrico de intensidad $\vec{E}$ en el "*spark*, que al llegar a cierto valor de ruptura crea ionización y, con ella, el canal de plasma. En ese momento, la energía almacenada en la capacitancia entre los electrodos se disipa rápidamente.

La resistencia del canal, inicialmente con un valor muy alto (del orden de los $M\Omega$), disminuye hasta valores muy bajos (de algunos Ω), cuando se establece el canal de plas-

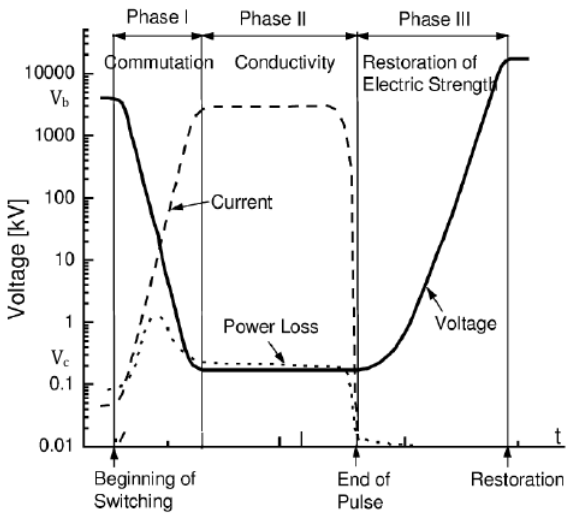

FIGURA 2.3. Representación esquemática de las fases de conmutación en un interruptor de cierre—lleno de gas("*Spark-Gap*") [**?**].

ma. Al aparecer el voltaje disruptivo, el "*spark*" (brecha), puede considerarse como una resistencia variable en serie con un inductor variable en el canal, el cual representa el almacenamiento magnético en la corriente de conducción del canal. Después de que ha establecido su valor más bajo, la resistencia del canal se puede despreciar si se compara con los valores de carga típicas en aplicaciones de resistencia del "*gap*".

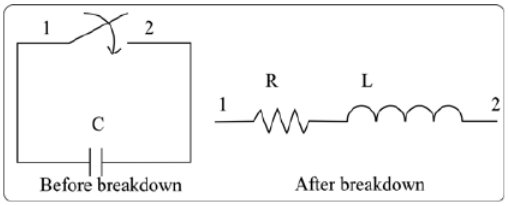

FIGURA 2.4. Modelo eléctrico del "*spark gap*" [29].

En la Figura (2.4) se muestra el modelo eléctrico del interruptor en la transición entre el estado abierto y la disrupción, que se puede resumir de la siguiente manera. Antes de disrupción, el modelo de circuito es una capacidad en paralelo con un interruptor ideal controlado por la tensión. Después de disrupción, el modelo es una resistencia de bajo valor en serie con un inductor. Un modelo completo debe incluir la variación dinámica de la inductancia y la resistencia con el tiempo y la corriente.

La línea de transmisión de la resistencia de carga (**TL**) es la continuación de la línea de transmisión proveniente de la fuente por el PFL y el S-G. El objetivo de TL es transferir la señal generada a la carga. La longitud de TL debe ser al menos la mitad de la longitud total de la señal transmitida (es decir, su duración multiplicada por la velocidad de la luz), para poder discriminar entre la señal transmitida y la señal reflejada al ser medida por el sensor de campo electromagnético de tipo capacitivo"*D-dot*".

La carga (*Load*), dependiendo de su aplicación, tendrá diferentes características geométricas, mecánicas y eléctricas que influirán en el comportamiento de otras partes

del generador. En general, cuando el objetivo es emitir pulsos electromagnéticos, la carga será una antena, mientras que una carga de impedancia constante se utiliza normalmente si el objetivo es usar las señales emitidas.

2.2. Generador de Impulsos Tipo Román

Un elemento de protección muy interesante es el generador de impulsos Román [40], diseñado y patentado por el profesor Phd Francisco Román [38],[39], docente de la Universidad Nacional de Colombia y director del Grupo de Compatibilidad Electromagnética EMC-UN, quien desde 1996 ha desarrollado con su grupo diferentes modelos de generadores de impulsos de corriente de electrodos flotantes, que logran campos eléctricos muy altos y tiempos de subida de unos pocos nanosegundos.

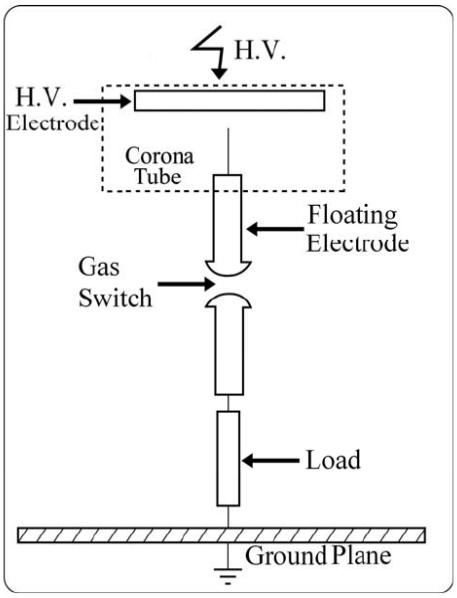

FIGURA 2.5. Esquema del Generador de Impulsos tipo Román [29].

Como se muestra en la figura (2.5), la fuente de alta tensión (HV) está conectada al electrodo de alta tensión. Un electrodo flotante (FE) [38], con una punta en su superficie superior, se coloca por debajo del electrodo de alta tensión. El término "*electrodo flotante*" se utiliza para describir el hecho de que el electrodo no está unido a un potencial de referencia, y por lo tanto, puede adquirir cualquier potencial entre el plano de tierra y la fuente de alta tensión. El sistema compuesto por el electrodo de alta tensión y el FE recibe el nombre de "tubo de corona", pues es el efecto corona entre ellos el que carga al electrodo de alta tensión. El espacio entre ellos se llena usualmente con un gas, como aire, Argón o CF6. El cátodo del interruptor está conectado a tierra a través de una carga, que idealmente debe ser una resistencia inductiva muy baja.

Cuando la fuente de alto voltaje está conectada al electrodo HV, se genera una distribución de campo electrostático entre los terminales del tubo de corona. Debido a la presencia de la punta en el electrodo flotante, habrá un aumento del campo eléctrico cerca de ella que modifica la distribución del campo electrostático en el interior del tubo. Antes de la iniciación de coronas eléctricas, el FE no tiene ninguna carga neta. Después de la

aparición de coronas eléctricas dentro del tubo de la corona, el FE adquiere una carga neta de la misma polaridad del electrodo HV, y comenzará a aumentar su potencial con respecto a tierra. Si el potencial de la FE supera la tensión de ruptura gas, se genera un canal de plasma (un *streamer*) que cierra el "*spark-gap*", y el FE se descarga a tierra. Durante la ruptura de la brecha, casi toda la carga eléctrica que se almacenó en la FE se entrega a la carga en forma de un impulso de corriente rápida. Si el mecanismo de descarga de corona se mantiene, la ruptura volverá a ocurrir, y se establece un proceso de carga y descarga continuos. Por lo tanto, el generador de corriente de impulso repetitivo puede ser construido sobre la base de este mecanismo.

FIGURA 2.6. Generador de Impulsos tipo Román completo, construido por F. Santamaría como parte del trabajo de Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia [29]

El primer generador Román (patentado en 1999) fue capaz de producir impulsos de $1.5kA$ con un tiempo de subida de $10ns$ [38]. Este generador fue utilizado para probar la respuesta de dispositivos de protección de baja tensión al ser sometidos a una corriente de choque similar a la de un rayo. Posteriormente, Mora [29], presento en 2009 un generador que era capaz de producir con una resistencia 100Ω, con una corriente de impulso de $10A$ con un tiempo de subida de $600ps$. En este trabajo se busca simular el generador de impulsos tipo Román construido por Francisco Santamaría Piedrahita en 2011, como parte de su Tesis Doctoral [41]. En su tesis, Santamaría no sólo construyó el dispositivo, sino que monitoreó experimentalmente la evolución temporal del pulso de descarga mediante mediciones de corriente y de voltaje.

La línea de formación de pulsos (PFL) del generador de impulsos diseñado por Santamaría (Ver Figura 2.7), tiene las siguiente características: impedancia característica de 100Ω, capacitancia equivalente igual a 12 pF y 0,36 m de longitud. Sobre la base de la ecuación de Peek[21]:

$$\frac{E_c}{\delta} = 31.53 + \frac{9.63}{\sqrt{\delta r}} \quad , \tag{2.1}$$

donde E_c es el campo eléctrico, δ, la densidad relativa del aire y r el radio del conductor, el voltaje máximo de DC entre los conductores interior y exterior de la línea de transmisión coaxial es de 40 kV. Los electrodos fueron diseñados siguiendo un perfil de Rogoswki[21]. La distancia real entre electrodos se calculó sobre la base de la relación funcional entre el desplazamiento y la presión, utilizando elementos finitos. Los parámetros reales del generador construido por Santamaría se puden ver en la Tabla 2.1.

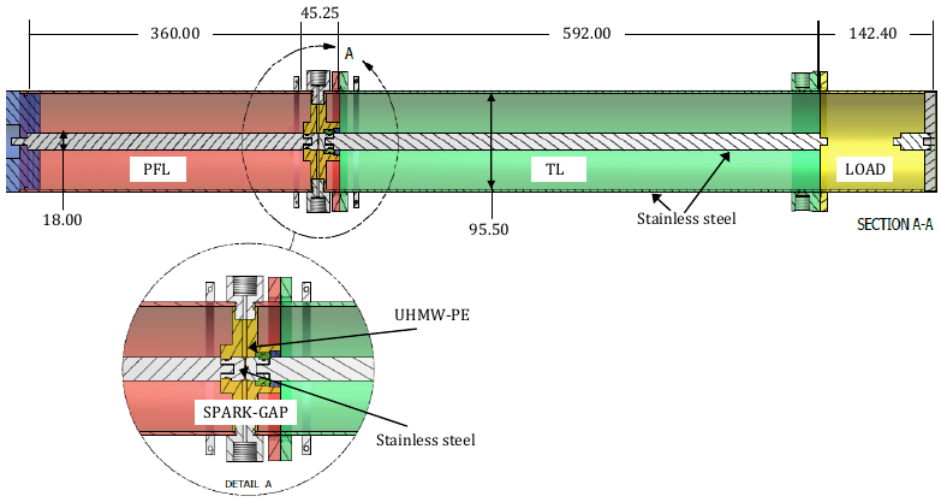

FIGURA 2.7. Diagrama esquemático del diseño del generador de impulsos. Todas las medidas en mm. [41]

TABLA 2.1. Parámetros reales utilizados en la construcción del generador de impulsos.

Parametro	**simbolo**	**Valor utilizado**
Voltaje D.C. máximo	V_m	$40kV$
Impedancia característica	Z_o	100Ω
Energía máxima por pulso	W_{pp}	$10mJ$
Tiempo de subida	t_r	$130ps$
Ancho máximo del pulso	$FWHM$	$2.4ns$
Radio del conductor interno	a	$9mm$
Radio del conductor externo	b	$47.75mm$
Longitud total	l_T	$1140mm$

El comportamiento del generador de impulsos y el efecto de la posición de los sensores en las mediciones de tensión se obtuvieron con un modelo de línea de transmisión simplificada implementado en EMTP-ATP[1] (ver Figura 2.8). Los electrodos fueron diseñados a partir del Perfil Rogoswki y fueron simulados los campos eléctricos producirdos entre los electrodos con el programa COMSOL[2]. Las simulaciones muestran que los electrodos diseñados no afectan el campo eléctrico producido (ver Figura 2.9).

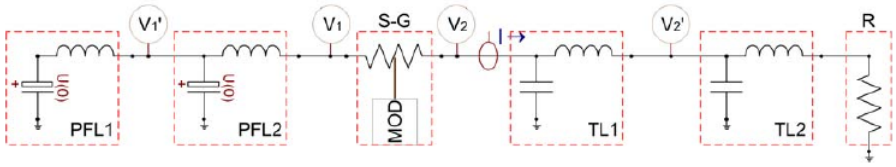

FIGURA 2.8. Modelo EMTPATP de la línea de transmisión del generador de impulsos incluyendo PFL y secciones TL, el modelo descarga (SG), una resistencia de 100Ω de carga (R) y la posición de Sensores de tensión (V). [41]

[1] www.emtp.org
[2] www.comsol.com

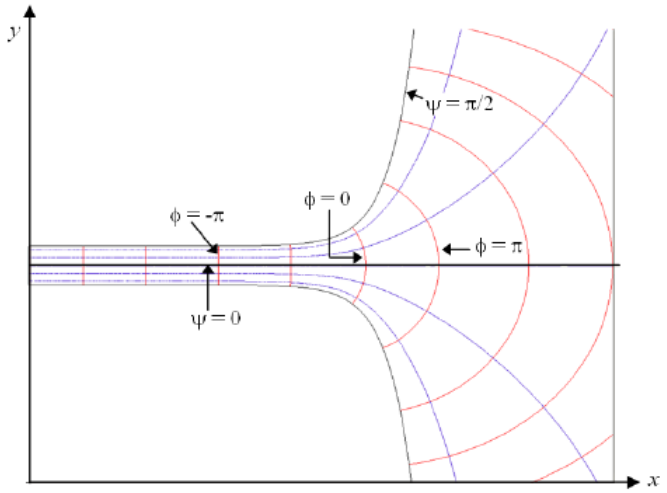

FIGURA 2.9. Perfíl de Rogowski para dos electrodos, en un corte en el plano xy. Tomado de [41].

El diseño del generador de impulsos se basó en criterios teóricos y empíricos y se apoya en las simulaciones COMSOL. El generador de impulsos fue modelada y simulada utilizando el programa EMTP-ATP. A partir de este modelo, se evaluaron los efectos de los sensores de ubicación "*D-dot*" en las señales de salida. En la Figura (2.10) se muestra el pulso de corriente simulado con el modelo del generador de impulsos desarrollado en EMTP-ATP. EN la Figura (2.11), se muestra la simulación de las tensiones en el modelo del generador de impulsos.

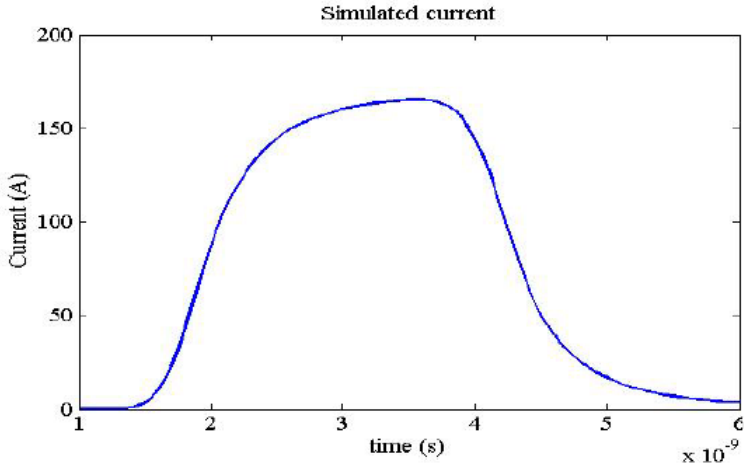

FIGURA 2.10. Pulso de corriente Simulado en EMTP-ATP para el modelo de generador de impulsos.Tomado de [41].

El generador de impulsos fue instrumentado para aproximar las señales de voltaje y de corriente en el "*Spark-Gap*". Para medir el voltaje −como no es posible hacerlo directamente sobre el "*gap*"− se instalaron dos sensores tipo capacitivos "*D-dot*" (ver Figura 2.12),sobre el coaxial externo, uno justo antes y otro justo después del "*gap*", y se monitorean sus señales con un osciloscopio con un ancho de banda analógico de 6

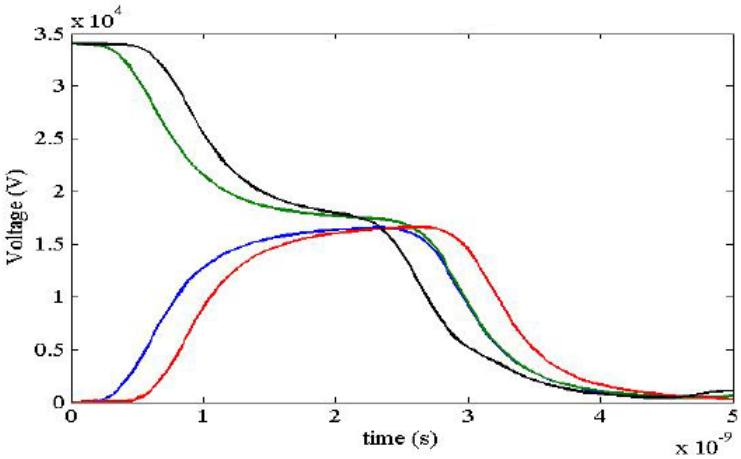

FIGURA 2.11. Simulación de las tensiones para el "*spark-gap*", lleno de aire a 774 kPa y $d = 450\mu m$.La línea verde discontinua: la tensión de carga antes de la de chispa. Línea azul: la tensión de carga en el punto de medición. La línea azul de puntos: tensión de salida después de la de chispa. Línea roja discontinua: la tensión de salida en el punto de medición.Tomado de [41].

GHz (ver Figura 2.13 (a)). Para monitorear la corriente se utilizó un transformador de corriente antes de la resistencia de carga (ver Figura 2.13 (b)). Como el objetivo de la tesis de Santamaría es probar el "*spark-gap*", las pruebas no se realizaron generando descargas por efecto corona, sino conectando directamente el generador a una fuente de voltaje de 50kV.

FIGURA 2.12. Ubicación de los sensores de tipo sensor capacitivo "*D-dot*", en el generador de impulsos. Tomado de [41]

En cuanto a los resultados en contrados por Santamaría [41], se muestran las señales de la integral del campo eléctrico (ver Figura 2.14), en la dirección de los sensores "*D-dot*", con los que se determina el voltaje en cada uno de los sensores, medidas a una presión de 774 kPa, con una distancia de separación de los electrodos $d = 450\mu m$.

La figura (2.15),se muestra uno de los resultados importantes dado por la medición de la tensión resistiva y la corriente en en "*spark-gap*", del generador de impulsos, cuando es usando aire a 774 kPa y una distancia entre electrodos de $d = 450\mu m$. Las señales en la figura (2.15) son válidas hasta 2,3 ns después del comienzo de la caída de tensión. A partir de la ecuación (2.2), se calcula la resistencia de arco en el intervalo menor a $2,5ns$

(a) (b)

FIGURA 2.13. Sensores utilizados para la medición del campo eléctrico a través de un sensor capacitivo ("*D-dot*") (a), y la medición de la corriente a través de un transformador rápido de corriente (b). Tomado de [41]

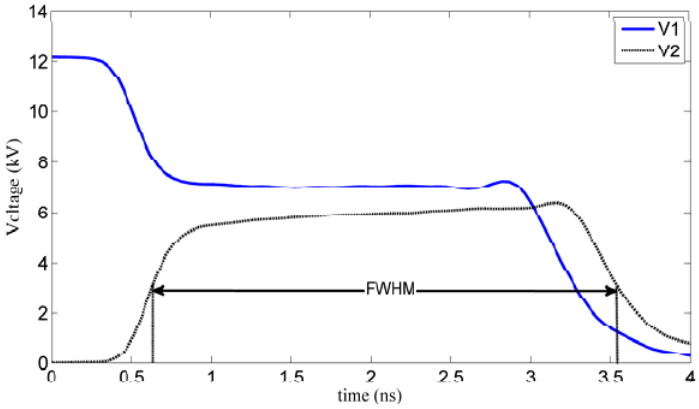

FIGURA 2.14. Señales de la Integral del campo eléctrico en el sensor *D-Dot*. La línea azul: tensión en el lado de alta tensión del "*spark*" (V1). La línea negra: Tensión en el lado de carga del "*spark*" (V2) tomado de [41].

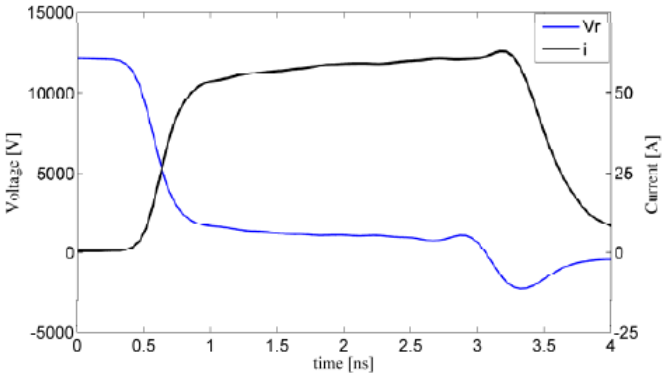

FIGURA 2.15. Caída de tensión resistiva en el "*spark-gap*".Ubicación de los sensores de campo eléctrico D-dot en el generador de impulsos. Tomado de [41].

que se muestra en la figura 2.16.

$$R_{arc} = \frac{V_R(t)}{i(t)} \tag{2.2}$$

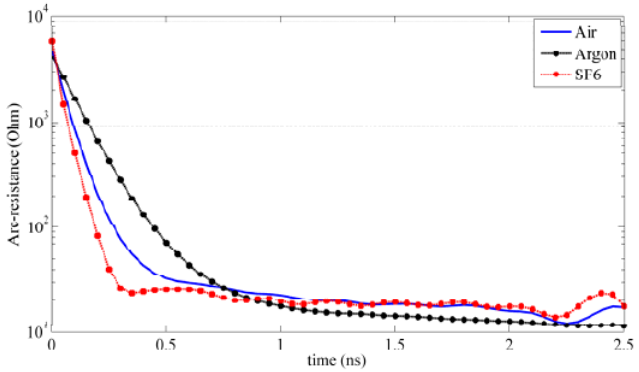

FIGURA 2.16. Resistencia de arco en el gap a partir de la ec. 2.2Tomado de [41]

Se encontró que al tener una resistencia limitadora muy alta es decir una frontera de alta impedancia, las formas de onda registradas, muestre una alta reflexión en las ondas. Los resultados mostraron que $2,3ns$ después de se generada la chispa en el gap se muestra una reflexión de onda de retorno desde el límite exterior en la ubicación de resistencia limitadora.

CAPÍTULO 3

Método de Lattice Boltzmann

Los métodos de lattice-Boltzmann (LBM) son una alternativa novedosa para la simulación de fenómenos físicos descritos por ecuaciones diferenciales. A diferencia de métodos más tradicionales, como los elementos o las diferencias finitas (que discretean directamente las ecuaciones a simular), el método de lattice-Boltzmann supone la existencia de un fluido hipotético, y simula cómo evolucionan las probabilidades de hallar una molécula del fluido en cada posición y con cada velocidad específica, usando la ecuación de transporte de Boltzmann. Las cantidades macroscópicas que se quieren simular, como la densidad, el campo eléctrico, etc., se calculan a partir de estas probabilidades. Escogiendo con cuidado la regla de evolución, es posible lograr que el sistema reproduzca en el límite continuo de celdas infinitamente pequeñas las ecuaciones diferenciales deseadas.

Como casi todos los pasos de la evolución ocurren en el interior de cada celda, el sistema es altamente paralelizable, e implementado sobre tarjetas gráficas de cómputo científico suele ser alrededor de 100 veces más rápido que los métodos tradicionales implementados sobre procesadores multinúcleo. Además, son muy estables numéricamente y muy fáciles de implementar, incluso bajo condiciones de frontera complejas. Esto los ha convertido, desde su surgimiento hace 25 años, en herramientas muy poderosas para el estudio de fenómenos y procesos en hidrodinámica[8], aerodinámica[48], difusión[47], ondas[5] y magneto-hidrodinámica[10, 26] y fluidos relativistas[27], pero también a sistemas más allá de los fluidos, como la electrodinámica[1] y la mecánica cuántica[43, 44].

3.1. Características generales

Como todo autómata celular, un modelo de lattice-Boltzmann divide el espacio en celdas, usualmente cuadradas o cúbicas, y hace transcurrir el tiempo en pasos discretos, o clics. En cada celda se escoge un conjunto discreto de velocidades $\vec{v}_i$, que permiten trasladarse a las celdas vecinas. Los más usados son D2Q9, en dos-dimensiones, y D3Q19 en tres dimensiones, respectivamente. Asociada con cada velocidad, se definen una o más variables, llamadas *funciones de distribución* f_i, que en los orígenes del método representaban la densidad de probabilidad de hallar una molécula del fluido en esa celda y moviéndose en esa dirección. Las cantidades macroscópicas que se quieren simular, como la densidad, la velocidad del fluido, la densidad de carga o los campos electromagnéticos, se calculan

con estas funciones de distribución y con las velocidades a las que están asociadas. Con cada pulso de reloj, cada celda calcula las cantidades microscópicas y, con ellas, los valores que las funciones de distribución $f_i^{(eq)}$ deberían tener en equilibrio. La evolución de las funciones de distribución consiste en hacer decaer exponencialmente cada función de distribución hacia su valor de equilibrio, con tiempo característico τ,

$$f_i(\vec{x}+\vec{v}_i, t+1) - f_i(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau}(f_i(\vec{x}, t) - f_i^{\mathrm{eq}}(\vec{x}, t)) \quad , \tag{3.1}$$

que es la ecuación de transporte de Boltzmann en la aproximación BGK (Bhatnagar-Gross-Krook [33, 6]). Finalmente, las funciones de distribución actualizadas se transportan a las celdas vecinas, viajando con el vector velocidad al que están asociadas. Esto completa el paso de evolución.

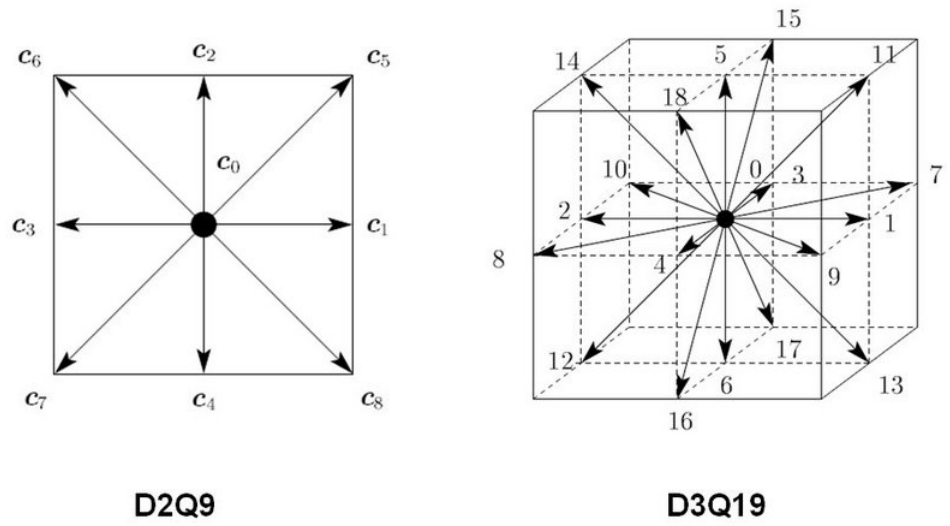

FIGURA 3.1. Configuración D2Q9 D3Q19 lattice y sus velocidades

Las ecuaciones diferenciales parciales que cumple el modelo en el límite macroscópico se hallan por medio de una expansión de Chapman-Enskog[33], que es una expansión en serie de Taylor de la ecuación de evolución combinada con expansiones perturbativas. Como resultado se obtiene que el sistema cumple secuencias infinitas de leyes de conservación. En efecto, el resultado de la expansión para el caso especial en que $\tau = 1/2$ resulta ser la siguiente expresión en límite continuo:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} f_i^{(\mathrm{eq})} \tag{3.2}$$

Si sumamos esta expresión sobre el índice i, obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{y} \quad , \tag{3.3}$$

y si multiplicamos tensiorialmente la Ec. (3.2) por v_i, y sumamos, obtenemos

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Pi}^{(0)} = 0 \quad , \tag{3.4}$$

donde

$$\rho = \sum_i f_i^{(\mathrm{eq})} \quad , \quad \vec{J} = \sum_i f_i^{(\mathrm{eq})} \vec{v}_i \quad , \quad \Pi^{(0)=\sum_i f_i^{(\mathrm{eq})}} \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i \quad , \tag{3.5}$$

Aquí $\otimes$ simboliza producto diádico. El arte consiste, entonces, en hallar las funciones de equilibrio que conviertan las Ec. (3.3,3.4) y similares en las ecuaciones diferenciales que se desean simular.

Retomando, un paso de simulación del modelo de lattice-Boltzmann se puede resumir así:

- **Cálculo de Variables Macroscópicas:** Las variables macroscópicas se calculan a partir de las funciones de distribución usando la Ec. (3.3) o expresiones similares. Si en una celda específica se desea un valor especial para alguna variable, simplemente se le asigna el valor deseado.
- **Cálculo de las funciones de equilibrio:** A partir de las cantidades macroscópicas, se calculan los valores de equilibrio para cada función f_i.
- **Colisión:** Cada función de distribución f_i toma un nuevo valor, de acuerdo con la ley de evolución BGK (Eq. 3.1).
- **Propagación:** Las funciones de equilibrio modificadas viajan a las celdas vecinas, usando cada una el vector velocidad $\vec{v}_i$ al que están asociadas.

Luego se repite para el siguiente paso de tiempo. Lo descrito anteriormente, es el modelo de lattice Boltzmann 2D para la ecuación de onda. En el apendice 5.3 se muestra la expansión de Chapman-Enskog que satisface la ecuación de onda en el límite continuo.

3.2. Ejemplo: Lattice Boltzmann para Ondas Bidimensionales

Consideremos como ejemplo el modelo de lattice-Boltzmann que reproduce la ecuación de onda en dos dimensiones,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c^2 \nabla^2 \rho \quad , \tag{3.6}$$

con c la velocidad de las ondas. Si fuésemos capaces de definir funciones de equilibrio $f_i^{(eq)}$ tales que el tensor $\Pi^{(0)}$ fuese diagonal,

$$\Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} c^2\rho & 0 \\ 0 & c^2\rho \end{pmatrix} \quad , \tag{3.7}$$

tendríamos $\nabla \cdot \Pi^{(0)} = c^2 \nabla \rho$, que reemplazando en la Ec. (3.4) nos da $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -c^2 \nabla \rho$. Si sacamos divergencia a ambos lados, y utilizamos la Ec. (3.3), obtenemos como resultado la ecuación de onda (3.6).

La pregunta es, entonces, cómo lograr que el tensor $Pi^{(0)}$ tome la forma diagonal de la Eq. (3.7). El conjunto de vectores D2Q9 (Ver Figura 3.1) se define de la siguiente manera:

$$\vec{v}_i = \begin{cases} (\cos((i-1)\pi/2), \sin((i-1)\pi/2)) & \text{para} \quad 1 \leq i \leq 4 \\ (\cos((i-1/2)\pi/2), \sin((i-1/2)\pi/2)) & \text{para} \quad 1 \leq i \leq 4 \\ (0,0) & \text{para} \quad i = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

TABLA 3.1. Relación de la velocidad fuente

U_x	0	0.1	0.2	0.3	0.5
θ	NA	NA	NA	NA	90
U_x	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
θ	75	67.5	60	52.5	45

Estos vectores, junto con los pesos

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & \text{para } i = 0 \\ \frac{1}{9} & \text{para } i = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36} & \text{para } i = 5,6,7,8 \end{cases} \quad , \tag{3.9}$$

permiten construir un tensor diagonal,

$$\sum_i w_i \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Por lo tanto, para la función de equilibrio elegimos $f_i^{(\mathrm{eq})} = 3c^2\rho w_i$. Al agregar algunos términos extra para garantizar que se cumplen las dos primeras ecuaciones (3.5), tenemos:

$$f_i^{(\mathrm{eq})} = \begin{cases} 3w_i \left[c^2\rho + (\vec{v}_i \cdot \vec{J}\right] & \text{para} \quad i > 0 \\ \frac{9}{4} w_0 \rho \left(1 - \frac{5}{3}c^2\right) & \text{para} \quad i = 0 \end{cases} \quad , \tag{3.11}$$

que reproduce la ecuación de onda en el límite macroscópico.

3.3. Aplicación: Simulación del Efecto Doppler por Lattice Boltzmann

Consideremos el caso del efecto Doppler para una fuente que se mueve emitiendo ondas sobre una superficie bidimensional. Para la simulación se utilizó una grilla de $Lx = 500$ por $Ly = 200$ y una velocidad de propagación de $c = 0.5$ celdas/click. Para generar una fuente de periódicas se utiliza una fuente que oscila senoidalmente con periodo $T = 20$ clics y se mueve con una velocidad U_x entre 0 y 2 celdas/click.

Las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 muestran la forma de la onda después de 300 clics para velocidades de la fuente de $U_x = 0$, 0.4 y 0.5, respectivamente. Las estelas y los frentes de onda son exactamente los que se esperan para estos casos: anillos concéntricos para $U_x = 0$, una estela de anillos excéntricos para $U_x = 0.4$ y una onda de choque (el cono de Mach) para $U_x = 0.5 = c$.

Cuando la velocidad de la fuente iguala o supera la velocidad de propagación de las ondas, se forma un cono de Mach. El ángulo que forma este cono con la dirección de propagación se puede medir directamente de las gráficas, y se encuentra consignado en la Tabla 3.1. Los resultados cumplen la relación teórica

$$Sin\theta = \frac{v_E}{V_s} \quad , \tag{3.12}$$

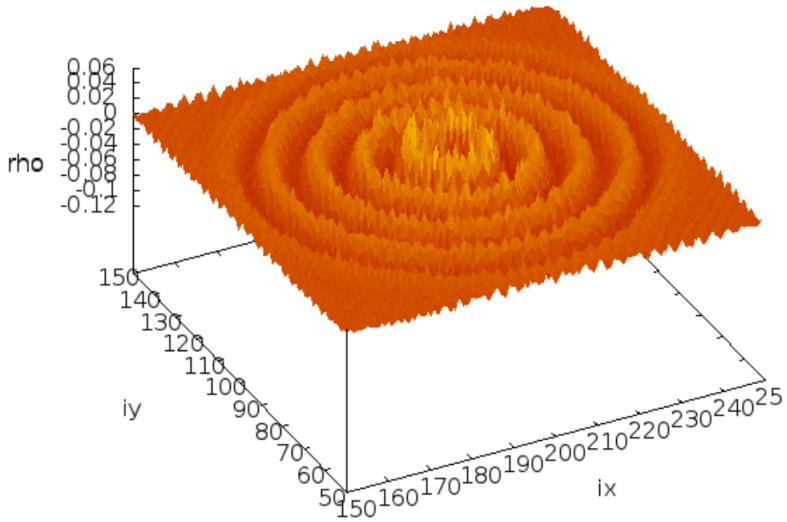

FIGURA 3.2. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=0

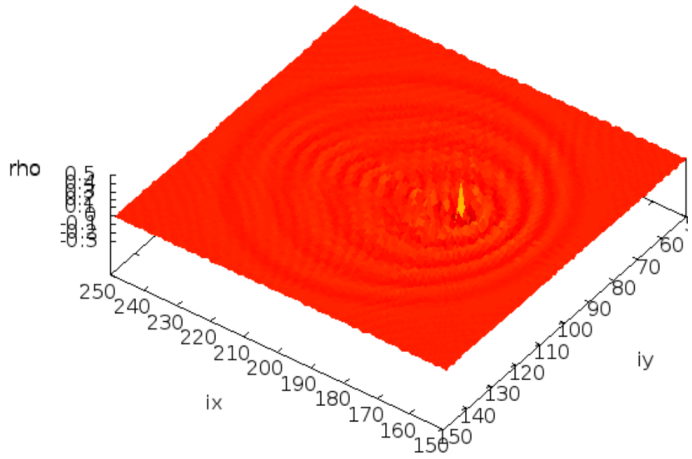

FIGURA 3.3. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=2

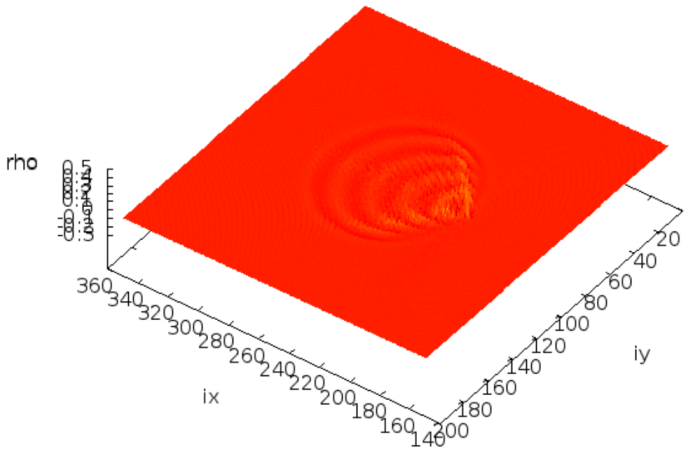

FIGURA 3.4. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=5

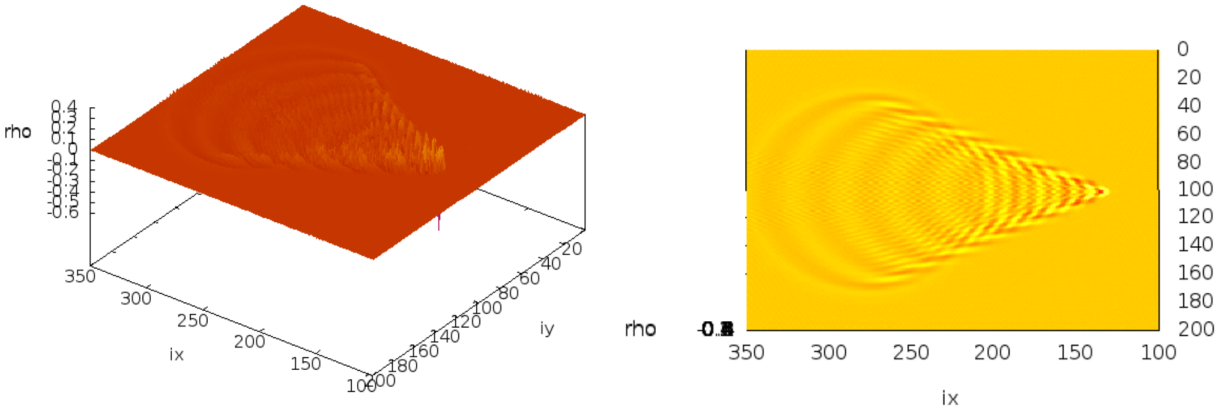

FIGURA 3.5. *Ondas con una velocidad de la fuente Ux=10, Vista en perpectiva y vista superior*

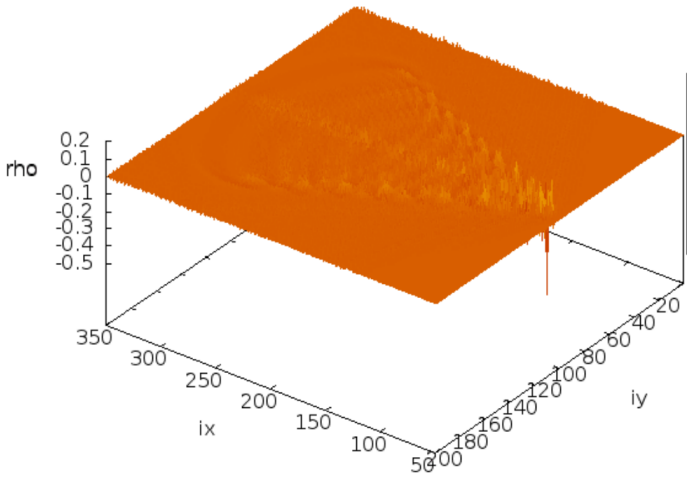

FIGURA 3.6. Ondas con una velocidad de la fuente Ux=15

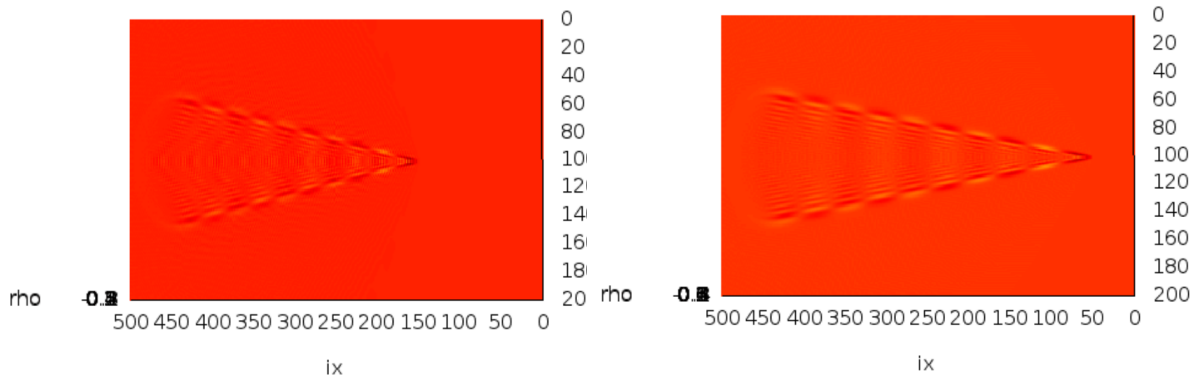

FIGURA 3.7. *Ondas con una velocidad de la fuente Ux=30 y Ux=40, vista superior*

con lo que podemos asegurar que el modelo de lattice-Boltzmann reproduce correctamente el efecto Doppler que deseábamos simular.

CAPÍTULO 4

Modelo de Lattice Boltzmann para Electrodinámica

4.1. Leyes de Maxwell para la Electrodinámica

Las fuerzas electromagnéticas gobiernan las interacciones más importantes de nuestra experiencia diaria. Desde las fuerzas que gobiernan la estructura del átomo, los enlaces químicos y la naturaleza de la luz, hasta toda la tecnología eléctrica y electrónica se rige por fuerzas electromagnéticas. A nivel tecnológico, los campos electromagnéticos se rigen por el sistema de ecuaciones propuesto por Maxwell en su artículo de 1864 *A dynamical theory of electromagnetic field*[12]. Estas ecuaciones se pueden escribir para medios materiales como

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad , \tag{4.1a}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \tag{4.1b}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{4.1c}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \tag{4.1d}$$

que en su orden se conocen como la ley de Gauss eléctrica, la ley de Gauss magnética, la ley de Faraday y la ley de Amperé generalizada. De éstas cuatro se puede deducir una quinta ley: la ley de conservación de la carga,

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\delta \rho_c}{\delta t} = 0 \tag{4.2}$$

Los vectores de desplazamiento eléctrico, $\vec{D}$ y de inducción magnética, $\vec{B}$, se relacionan con el campo eléctrico, $\vec{E}$, y el campo magnético, $\vec{H}$, a través de las relaciones

$$\vec{D} = \epsilon_r \vec{E} \quad \text{y} \tag{4.3}$$

$$\vec{B} = \mu_r \vec{H} \quad , \tag{4.4}$$

donde ϵ_0 y μ_0 (ϵ_r y μ_r) son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío (y sus valores relativos para el medio), respectivamente. Finalmente, cuando estamos en un medio conductor aparecen corrientes en el material debido a los campo eléctricos en él. Si el material es lineal e isotrópico, la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo eléctrico se relaciona por medio de la ley de Ohm,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{4.5}$$

donde σ es la conductividad eléctrica del material.

De esta forma, las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm son el conjunto de ecuaciones que nos permiten determinar el comportamiento de los campos electromagnéticos en medios dieléctricos (con una permitividad eléctrica ϵ_r), magnéticos (con una permeabilidad magnética μ_r) y conductores (con una conductividad σ).

De las cinco leyes de Maxwell, tres se pueden escribir como leyes de conservación: la ley de conservación de la carga,

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\delta \rho_c}{\delta t} = 0 \tag{4.6}$$

la ley de Faraday,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \Lambda = 0 \quad , \tag{4.7}$$

y la ley de Ampere,

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \Gamma + \mu_0 \cdot \vec{J} = 0 \quad , \tag{4.8}$$

donde los tensores antisimétricos Λ y Γ se definen como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y \\ E_z & 0 & -E_x \\ -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & c^2 B_z & -c^2 B_y \\ -c^2 B_z & 0 & c^2 B_x \\ c^2 B_y & -c^2 B_x & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.9}$$

Es interesante que sí las ecuaciones 4.6, 4.7 y 4.8, dadas como leyes de conservación se cumplen, se puede deducir que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{D} - \frac{\rho_c}{\epsilon_0}\right) = 0 \quad , \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) = 0 \quad . \tag{4.11}$$

Esto quiere decir que las leyes de Maxwell de Gauss también se siguen cumpliendo si lo hacen para la condición inicial.

4.2. Modelo de Lattice Boltzmann para Electrodinámica

En 2008, Miller Mendoza propuso como parte de su tesis de M.Sc. en Física un modelo de lattice-Boltzmann que reproduce las ecuaciones de Maxwell en el límite continuo. El modelo divide el espacio tridimensional en celdas cúbicas con el conjunto de vectores velocidad D3Q13 (Fig. 4.1), definidos como el vector nulo $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$ y los doce vectores

$\vec{v}_i^p$,

$$\vec{v}_i^0 = \sqrt{2}(\cos((2i-1)\pi/4), \sin((2i-1)\pi/4), 0) \quad , \tag{4.12a}$$

$$\vec{v}_i^1 = \sqrt{2}(\cos((2i-1)\pi/4), 0, \sin((2i-1)\pi/4)) \quad , \tag{4.12b}$$

$$\vec{v}_i^2 = \sqrt{2}(0, \cos((2i-1)\pi/4), \sin((2i-1)\pi/4)) \quad , \tag{4.12c}$$

donde $p = 0, 1, 2$ denota si los vectores se encuentran en un plano perpendicular a los ejes z, y o x, respectivamente, y el subíndice i toma los valores $i = 1, 2, 3, 4$.

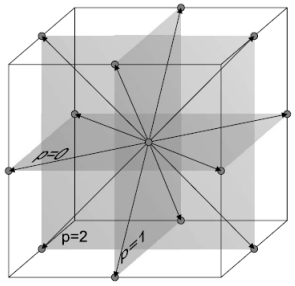

FIGURA 4.1. Celda D3Q13 para modelar las ecuaciones de Maxwell. Las flechas indican los vectores velocidad $\vec{v}_{ip}$ y los vectores de campo eléctrico $\vec{e}_{ij}$, donde p indica la localización del plano

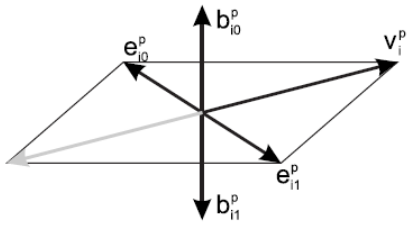

FIGURA 4.2. Relación entre los índices de los vectores de velocidad, campo eléctrico y magnético

A cada vector velocidad $\vec{v}_i^p$ se le asocian dos vectores auxiliares de campo eléctrico $\vec{e}_{ij}^p$ y dos vectores auxiliares de campo magnético $\vec{b}_{ij}i^p(j = 0, 1)$ (ver Figura 4.2), que se utilizan para calcular los dichos campos. Los vectores eléctricos son perpendiculares $\vec{v}_i^p$ y se encuentran en el mismo plano de p. Los vectores magnéticos son también perpendiculares $\vec{v}_i^p$, también perpendiculares al plano p, estos vectores deben cumplir $\vec{b}_i^p = \vec{v}_i^p \times \vec{e}_i^p$. El lattice se completa con vectores nulos $\vec{e}_0 = (0, 0, 0)$ y $\vec{b}_0 = (0, 0, 0)$. Teniendo estas condiciones, se tienen 25 vectores de campo eléctrico, pero sólo 13 de ellos son diferentes; del mismo modo, existen 16 vectores magnéticos , de los cuales solo 7 son diferentes (ver Figura 4.3). Estos vectores cumplen las relaciones

$$\sum_{i,p} v_{i\alpha}^p = 0; \sum_{i,j,p} e_{ij\beta}^p = 0 \tag{4.13}$$

$$\sum_{i,j,p} v_{i\alpha}^p e_{ij\beta}^p = 0; \sum_{i,j,p} e_{ij\alpha}^p e_{ij\beta}^p = 4\delta_{\alpha\beta} \tag{4.14}$$

$$\sum_{i,j,p} v_{i\alpha}^p e_{ij\beta}^p e_{ij\gamma}^p = 0; \sum_{i,j,p} e_{ij\alpha}^p e_{ij\beta}^p b_{ij\gamma}^p = 4\delta_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.15}$$

$$\sum_{i,j,p} b^p_{ij\alpha} b^p_{ij\beta} = 8\delta_{\alpha\beta} \quad , \tag{4.16}$$

donde $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ son las componentes del tensor de Levi-Civita, definido de la manera usual: si dos índices son iguales, la componente es cero; $\epsilon_{123} = 1$, y cualquier intercambio dos índices cambia el signo de la componente.

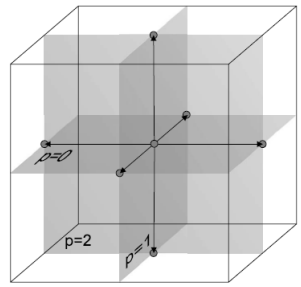

FIGURA 4.3. Celda cubica D3Q7 para simular el Campo Magnético. Las flechas indican los vectores de Campo $\vec{b}^p_{ij}$.

Los campos electromagnéticos se calculan a partir de las funciones de distribución de cada celda, que se propagan de una celda a otra con los vectores velocidad $\vec{v}^p_i$. Existen cuatro funciones de distribución asociadas a cada vector velocidad, escritos como $f^{p(r)}_{ij}(j = 0, 1$ y $r = 0, 1)$, además de dos funciones asociadas a los restantes vectores v_0, escritas como $f^{(r)}_0$. Esto hace que existan $4x12 + 2 = 50$ funciones de distribución por celda. Los campos macroscópicos se calculan de la siguiente manera: El campo de desplazamiento eléctrico, como

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{p=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} f^{p(0)}_{ij} \vec{e}^p_{ij} \quad , \tag{4.17}$$

el campo de induccion magnética, como

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{p=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} f^{p(1)}_{ij} \vec{b}^p_{ij} \quad , \tag{4.18}$$

y la densidad total de carga, como

$$\rho_c = f^{(0)}_0 + \sum_{i=1}^{4} \sum_{p=0}^{2} \sum_{j=0}^{1} f^{p(0)}_{ij} \quad . \tag{4.19}$$

A partir de ellos, se calculan el campo magnético,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r} \quad , \tag{4.20}$$

el campo eléctrico,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r} \tag{4.21}$$

y la densidad de corriente

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad . \tag{4.22}$$

Sin embargo, los últimos dos campos necesitan ser corregidos para obtener los campos reales. En efecto, la ley de Ampére es una ley de conservación con fuentes (la densidad de corriente), y los modelos de lattice-Boltzmann reproducen en principio leyes de conservación sin ellas. Para agregarlas es necesario adicionar lo que se conoce como *forzamientos*, que en este caso consisten en modificar los valores de estos campos como

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{\mu_0}{4\epsilon_r}\vec{J}' \quad , \quad \vec{J}' = \sigma\vec{E}' \quad , \tag{4.23}$$

que para el caso de un tiempo de relajación $\tau = 1/2$ corresponden a los términos con precisión de segundo orden propuestos por Zhaoli Guo, Zheng Chuguang y Shi Baochang [35].

Una vez calculados los campos, el siguiente paso consiste en calcular los valores de equilibrio de las funciones de distribución. Estos resultan ser

$$f_{ij}^{p(0)eq}(\vec{x},t) = \frac{1}{16}\vec{v}_i^p \cdot \vec{J}' + \frac{\epsilon}{4}\vec{E}' \cdot \vec{e}_{ij}^p + \frac{1}{8\mu}\vec{B} \cdot \vec{b}_{ij}^p \tag{4.24}$$

$$f_{ij}^{p(1)eq}(\vec{x},t) = \frac{1}{16}\vec{v}_i^p \cdot \vec{J}' + \frac{1}{4}\vec{E}' \cdot \vec{e}_{ij}^p + \frac{1}{8}\vec{B} \cdot \vec{b}_{ij}^p \tag{4.25}$$

$$f_{ij}^{p(0)eq}(\vec{x},t) = f_{ij}^{p(1)eq}(\vec{x},t) = \rho_c. \quad , \tag{4.26}$$

donde se hacen explícitos los dos grupos ($r = 0, 1$) de las funciones de densidad de equilibrio $f_{ij}^{p(r)eq}$.

El siguiente paso consiste en evolucionar las funciones de distribución siguiendo la regla de evolución BGK (Eq. 3.1), es decir como un decaímiento exponencial hacia sus valores de equilibrio,

$$f_i(\vec{x} + \vec{v}_i, t+1) - f_i(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau}(f_i(\vec{x},t) - f_i^{\mathrm{eq}}(\vec{x},t)) \quad , \tag{4.27}$$

En este caso, se escoge $\tau = 1/2$. Finalmente, las funciones de distribución viajan a las celdas vecinas, cada una a la celda indicada por el vector velocidad al que está asociada.

El modelo es capaz de reproducir las ecuaciones

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}' = 0 \quad , \tag{4.28}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{y} \tag{4.29}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{D}'}{\partial t} \quad , \tag{4.30}$$

que, como comentamos en la sección anterior, garantizan, además, el cumplimiento de las leyes de Gauss, si estas leyes se cumplen para la condición inicial. En estas ecuaciones, la velocidad de la luz resulta ser $c = 1/\sqrt{2}$ celdas/click. Esto quiere decir que el modelo cumple automáticamente el criterio de *Courant-Fredericks-Levy*[32].

Cuál es el principio de funcionamiento de este modelo de lattice-Boltzmann? Para entender por qué funciona, multipliquemos la Ec. (3.2) por $\vec{b}_{ij}^p$, y sumemos sobre los índices

i, j, y p. Obtenemos

$$0 = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot \Lambda \quad ,\text{con } \Lambda_{\alpha\beta} = \sum_{i,j,p} f_{ij}^{p(\mathrm{eq})} v_{i\,\alpha}^{p} b_{ij\,\alpha}^{p} \quad . \tag{4.31}$$

Si reemplazamos la función de equilibrio Ec. (4.25) en esta expresión, obtenemos

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{\gamma} E_{\gamma} \left(\sum_{i,j,p} v_{i\alpha}^{p} e_{ij\gamma}^{p} b_{ij\beta}^{p} \right) = \sum_{\gamma} E_{\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\beta} \quad , \tag{4.32}$$

que es exactamente el tensor que deseamos obtener (Ec. 4.9) para que la Ec.4.31 se convierta en la Ley de Faraday,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \quad . \tag{4.33}$$

La Ley de Ampére surge de manera similar.

4.3. Aplicaciones desarrolladas del Modelo de Lattice Boltzmann para Electrodinámica

El primer paso para simular el tubo de descarga consiste en implementar el modelo de lattice-Boltzmann descrito en este capítulo. Con el fin de comprobar que el modelo se había implementado correctamente, se reprodujeron dos simulaciones realizadas por M. Mendoza en su artículo del 2010 [1]: la reproducción del efecto skin y el cálculo de la impedancia característica de una línea de transmisión microstrip.

4.3.1. Efecto Skin

Cuando una corriente contínua viaja en un conductor, la densidad de corriente es similar en toda la sección transversal del conductor, pero cuando incide una corriente alterna, se observa una mayor densidad de corriente en la superficie que en el centro. Similarmente, cuando una onda electromagnética incide sobre un material conductor, ésta alcanza a penetrar cierta profundidad, δ, que se define como la distancia que viaja la onda al pasar un medio conductor antes de ser disipada completamente debido al movimiento de los electrones libres del material. La amplitud del campo eléctrico tiene un decaimiento exponencial con la distancia de penetración de la forma [12]

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{(-\alpha x)} \quad , \tag{4.34}$$

donde $\alpha = 1/\delta$ se conoce como el espesor skin. La profundidad de penetración (δ) es un parámetro que depende tanto de las características del material como de la onda que lo atraviesa. Su valor es:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad , \tag{4.35}$$

donde σ es la conductividad del medio, μ, su permeabilidad magnética y f es la frecuencia de la onda.

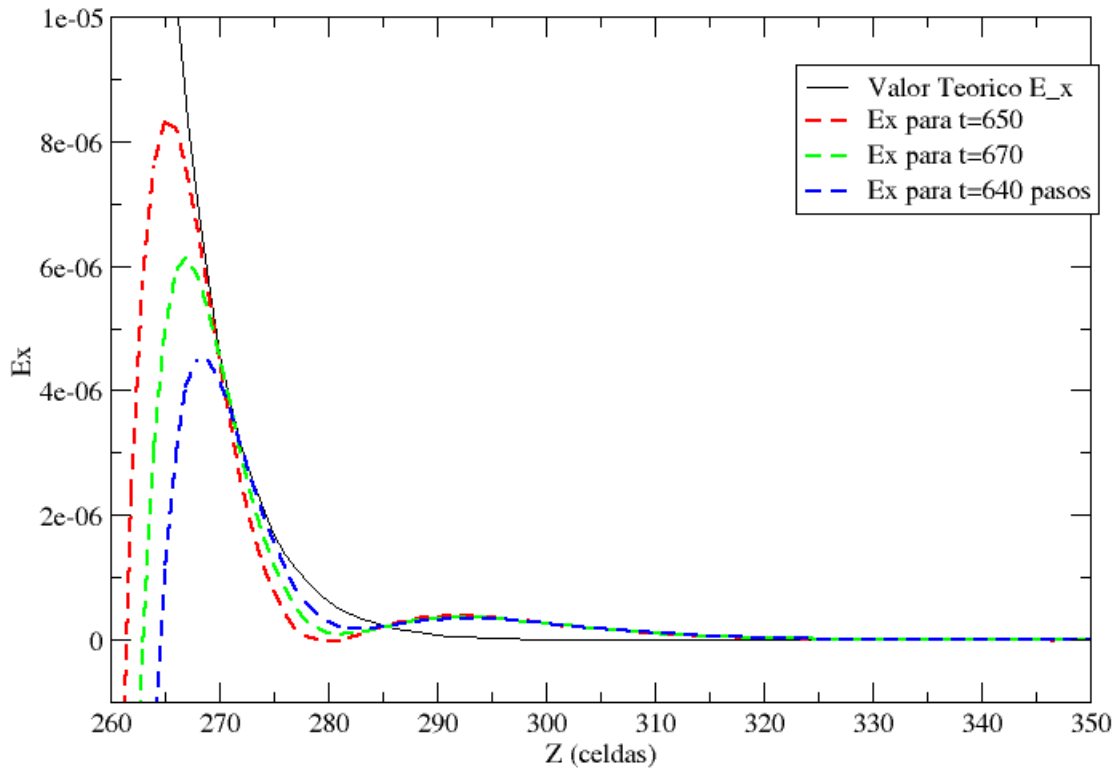

FIGURA 4.4. Simulación desarrollada del efecto Skin, para distintos valores de tiempo (click)

Para determinar que el modelo utilizado era funcional, se simuló una onda electromagnética que incide en un material conductor.Se realizaron dos simulaciones: La primera para una microstrip de línea única y la segunda para una microstrip de doble línea. Para reproducir el efecto se contruyo un espacio unidimensional de celdas es decir lattice de $1X1X1000$, con una conductividad cero para $z < L/4$ y para $z > l/4$. Para que la transición sea suave la conductividad utilizada entre las transiciones tomara la forma:

$$\sigma = \sigma_o[1 + tanh(x - L/4)] \tag{4.36}$$

La onda plana incidente se genera mediante la imposición de una oscilación armónica del campo eléctrico en $z = 1$ y el campo magnético en la misma celda pero con pomponentes perpendiculares:

$$\vec{E} = [E_o sin(\omega t), 0, 0] \tag{4.37}$$

$$\vec{B} = [0, B_o sin(\omega t), 0] \quad , \tag{4.38}$$

con un campo eléctrico inicial $E_o = 0,001$, $\omega = \pi/100$, $c = 1/\sqrt{2}$ y $\sigma_o = 10^6$ en unidades normalizadas.

En la Figura (4.4), se muestran los resultados de la simulación en comparación con la expresion teorica del campo eléctrico para el efecto Skin $E = E_o exp(-x/\Delta)$, para $t = 640$, $t = 650$ y $t = 670$. La línea sólida representa el campo eléctrico en función de la posición y la línea punteada la amplitud del campo eléctrico en función de la posición hallada con las Ecs.(4.34) y (4.35). En esta figura se puede ver una gran coherencia de los valores tomados de la simulación con respecto a los que predicen la teoría.

4.3.2. Microstrip

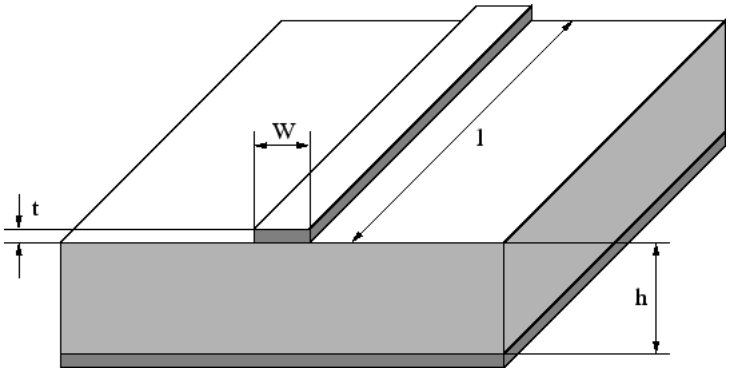

FIGURA 4.5. Microstrip de línea única

Una microstrip es un tipo de línea de transmisión eléctrica para microondas que se suele fabricar usando circuitos impresos doble faz. Con ellos se pueden formar antenas, acopladoras, filtros, divisores, bobinas entre otros. Una microstrip sencilla consta de una franja metálica, separada de una placa conductora por una capa de dieléctrico, que sirve de tierra. La microstrip se caracteriza geométricamente por su ancho W y por su longitud d (ver figura 4.5). La impedancia de este sistema es

$$Z = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{2(1+\epsilon_r)}} \ln\left[1 + \frac{4d}{\omega_{eff}}\left(\frac{14+\frac{8}{\epsilon_r}}{11}\frac{4d}{\omega_{eff}} + \sqrt{\left(\frac{14+\frac{8}{\epsilon_r}}{11}\frac{4d}{\omega_{eff}}\right)^2 + \pi^2\frac{1+\frac{1}{\epsilon_r}}{2}}\right)\right] \quad , \tag{4.39}$$

donde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ es la impedancia del vacío, ϵ_r es la constante dieléctrica del material que separa las placas, d es la distancia de separación y ω_{eff} es un ancho efectivo dado por

$$\omega_{eff} = W + t\frac{1+\frac{1}{\epsilon_r}}{2\pi} \ln\left[4e\left(\left(\frac{t}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{W}{t}+\frac{11}{10}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad . \tag{4.40}$$

Se desarrollo una matriz 3D de $100X50X50$ celdas, se colocaron dos placas metálicas de conductividad σ, donde las dimensiones de la placa pequeña, fue de $d = 20$, $W = 50$, $t = 5$ y $\epsilon_r = 1$ en unidades normalizadas. Se forzo una señal de campo eléctrico y magnético de forma similar al utilizado en el efecto Skin (Ec. 4.37, 4.38), en la primera celda. con un campo eléctrico inicial $E_o = 0,01$, $\omega = \pi/100$, $c = 1/\sqrt{2}$ y $\sigma_o = 10^6$ en unidades normalizadas.

Los resultados de la primera simulación después de 450 pasos de tiempo (ver Figuras 4.6, 4.7) y se muestra la componente z del campo eléctrico en el plano xz a $y = 25$, En la Figura 4.8, muestra el voltaje $V(z,t)$ de un conductor a otro y la densidad de corriente

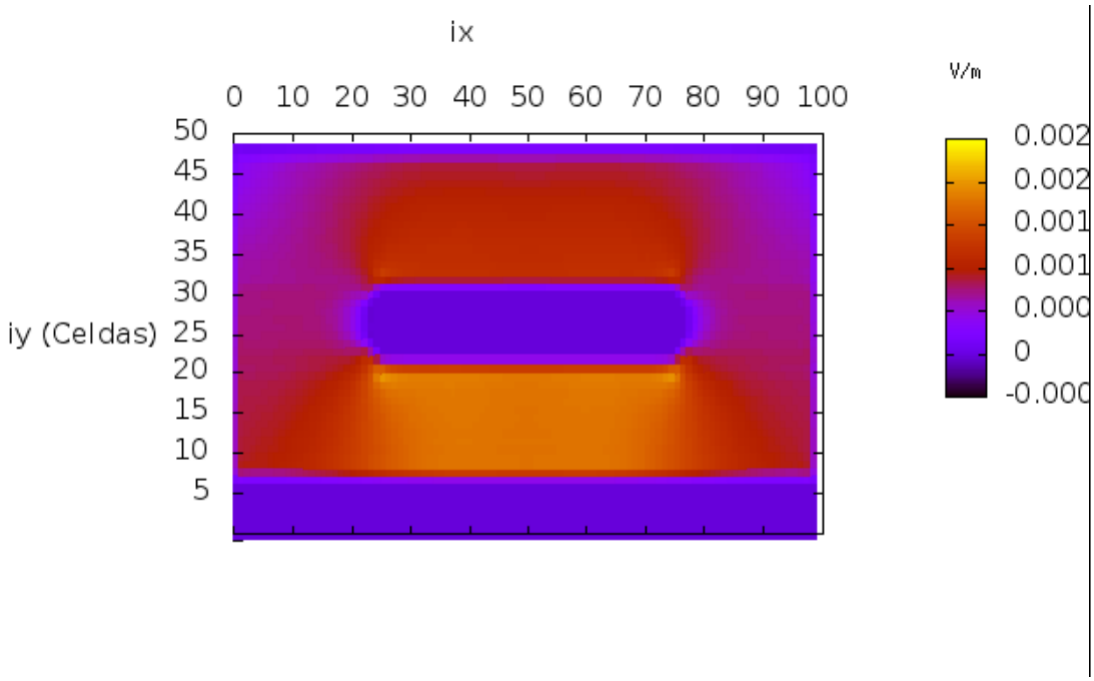

FIGURA 4.6. Componente z del campo eléctrico en el plano xz ubicado en $y = 25$

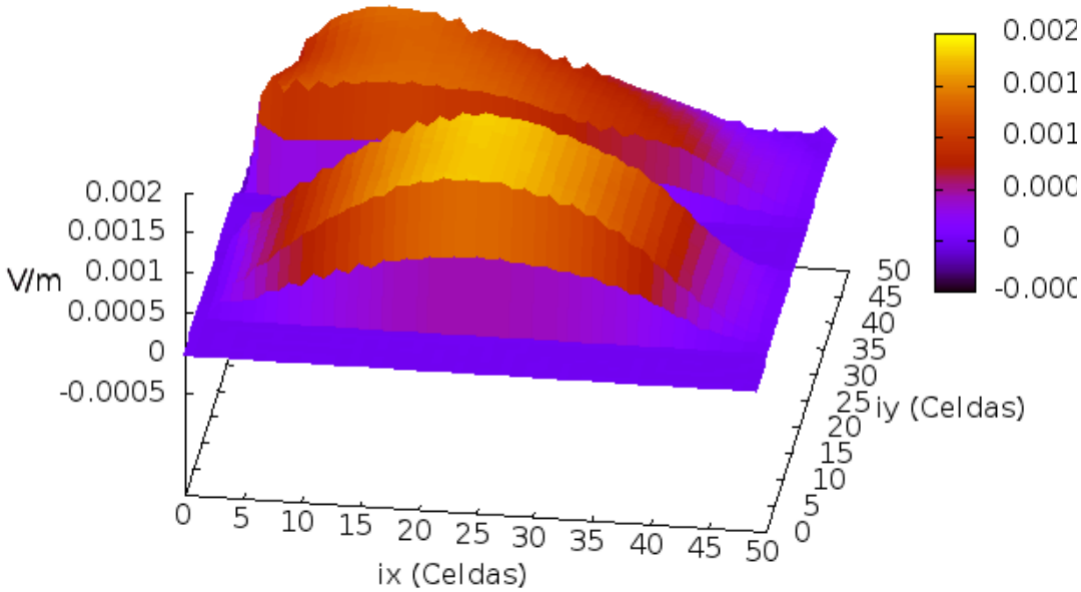

FIGURA 4.7. Componente en Z del campo eléctrico em el plano xy ubicado en Lx/2 en la microstrip

$I(z,t)$ en el conductor superior. El voltaje $V(z,t)$ y la corriente $I(z,t)$ se encuentran en fase , como se espera para una onda plana. La impedancia de la línea de transmisión, dada como $Z = V/I$, arroja como resultado un valor de $Z = 69.15\Omega$. El valor teórico hallado con la Ec.(4.39) es de 72.6Ω, lo que arroja un error del 4.7 %. Este valor coincide muy bien con los reportados por M. Mendoza [1], con los que coincide con una diferencia de solo 1.7 %.

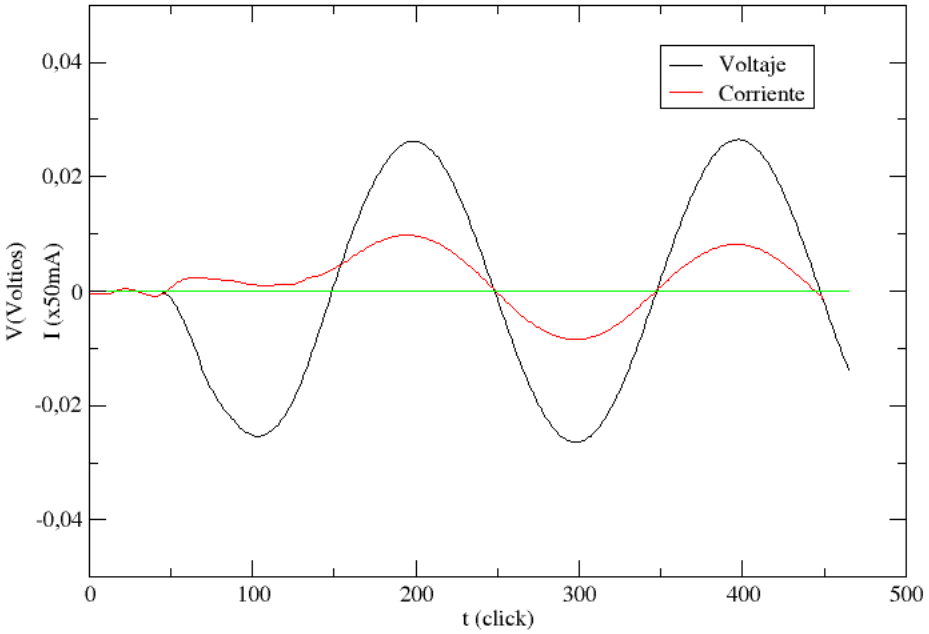

FIGURA 4.8. Tensión contra corriente en la microstrip de línea única.

La segunda simulación se realizó en forma similar, pero para una microstrip de doble línea. La componente z del campo eléctrico en el plano xz (a $y = 25$) después de 450 pasos de tiempo (Ver Figura 4.9). En este caso la tensión y la corriente no se encuentran en fase, sino que se retrasa la corriente en 30 % (ver Figura 4.10), debido a la existencia de una inductancia entre las dos líneas.

Estas simulaciones preliminares confirman que el modelo de lattice-Boltzmann para campos electromagnéticos ha sido implementado correctamente. El siguiente paso consiste en simular con él los fenómenos de carga y de disparo descritos en el Cap.2 y ,finalmente, el sistema completo del generador de impulsos.

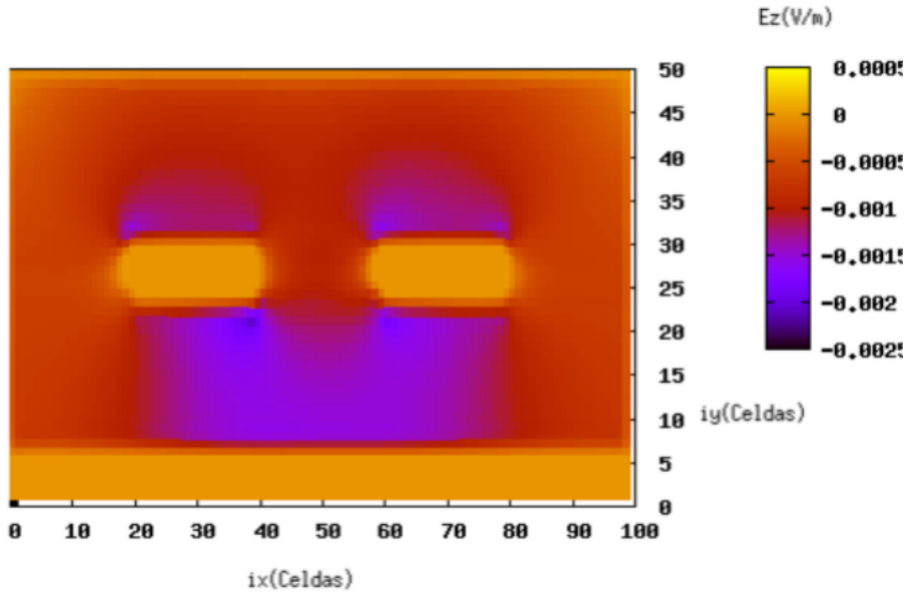

FIGURA 4.9. Microstrip de doble línea, en la componente z del campo eléctrico en el plano xz ubicado en $y = 25$.

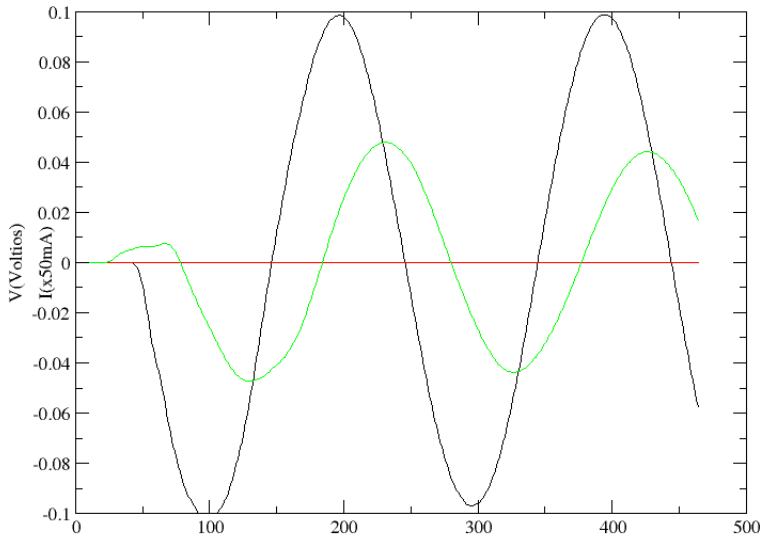

FIGURA 4.10. Tensión contra corriente en la microstrip de doble línea, la línea negra corresponde al voltaje (V) y la línea verde corresponde a la corriente (I) que se propagan.

CAPÍTULO 5

Resultados

El modelo de lattice Boltzmann para electrodinámica [1] ha sido apropiado para la simulación de sistema sencillos, como dipolos oscilantes y líneas de transmisión. El objetivo de este trabajo es aplicarlo a la simulación de un sistema de interés tecnoloógico: el generador de impulsos tipo Román, que presentó Francisco Santamaría [41], en su trabajo Doctoral. Para alcanzar este objetivo se requiere modelar algunos dispositivos que no han sido simulados hasta ahora en la literatura: un condensador cargado, una fuente de voltaje constante y un "*spark-gap*". Por lo tanto, el primer paso consistirá en simular estos dispositivos dentro de sistemas sencillos, para luego éncarar la simulación completa del generador de impulsos. Para las simualciones desarrolladas se utilizo un PC con procesador Core2 Duo de 2,5 GHz, con 4GB de memoria RAM y 250 GB de disco duro.

5.1. Simulación de un Condensador de Placas Paralelas

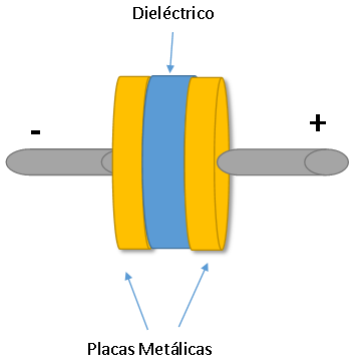

FIGURA 5.1. Condensador de placas paralelas

Los condensadores son dispositivos de carácter pasivo, capaces de almacenar y entregar cantidades finitas de energía. Un condensador consiste de dos superficies conductoras, sobre las que se puede almacenar la carga, separadas por vacío o por una delgada capa aislante (dieléctrico). La capacitancia del dispositivo depende de la geometría de las placas y del material que los separa(ver Figura5.1).

El primer objetivo de simulación consistió en reproducir la descarga de un condensador de capacitancia C a través de una resistencia en serie de valor R(circuito RC). La tensión de una placa a otra del condensador V como función del tiempo cumple la ecuación diferencial

$$C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = 0 \quad , \tag{5.1}$$

que es en realidad una realización de la ley de conservación de la carga. Su solución predice un decaimiento exponencial del voltaje,

$$V(t) = V_o e^{-\frac{t}{RC}} \quad , \tag{5.2}$$

donde V_o corresponde a la tensión entre las placas del condensador para el $t = 0$. En este caso, la corriente circulará en sentido contrario al que circulaba mientras el condensador se estaba cargando

$$I(t) = -\frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad , \tag{5.3}$$

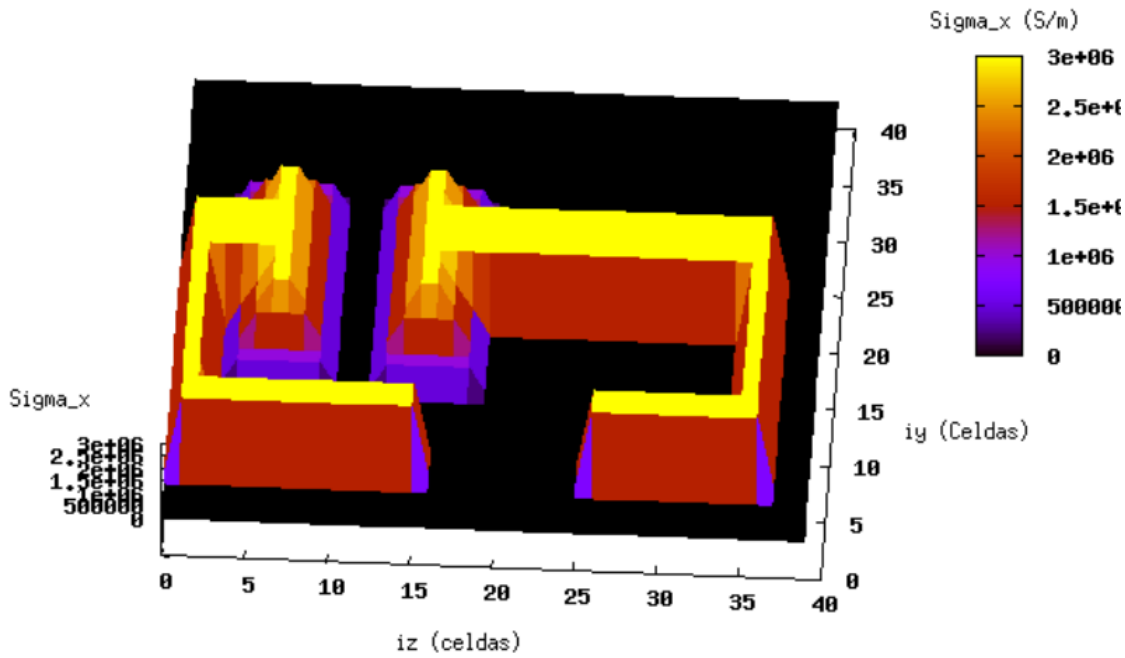

FIGURA 5.2. Simulación del valor de la conductividad (σ), para un condensador de placas paralelas

Para esta simulación se utilizó un espacio de $40x40x40$ celdas con condiciones de frontera libre, en el que se construyeron dos placas metálicas 6 celdas de radio, separadas por una distancia de 6 celdas, y de conductividad $\sigma_c = 55X10^6 S/m$ que simulan un condensador de placas paralelas circulares. Además, se construyó una resistencia de $50K\Omega$ conectada con el condensador (ver Figura 5.2). Todas las superficies metálicas se encuentran rodeadas de dos capas de celdas de conductividad $2/3\sigma_c$ y $1/3\sigma_c$, con el objetivo de garantizar un cambio suave en la conductividad y reducir inestabilidades numéricas.

La primera etapa de la simulación consiste en cargar el condensador hasta alcanzar el valor de voltaje deseado. Simular el condensador cargado requiere de algunos cuidados especiales. El modelo de lattice-Boltzmann para electrodinámica reproduce las leyes de

TABLA 5.1. Unidades de lattice normalizadas para la simulación del condensador

Unidades de lattice	**Valor**	**Unidad**
Longitud [L]	4	mm
Tiempo [T]	9,42	ps
Carga eléctrica [q]	5,80	e^-
Voltaje [V]	1	$Voltio$
Corriente [I]	1	Amperio
Resistencia [R]	1	Ω
Conductividad [σ]	250	$1/\Omega newm$
Campo eléctrico [$\vec{E}$]	250	$V/newm$
Permitividad eléctrica [ϵ_o]	1	adimensional

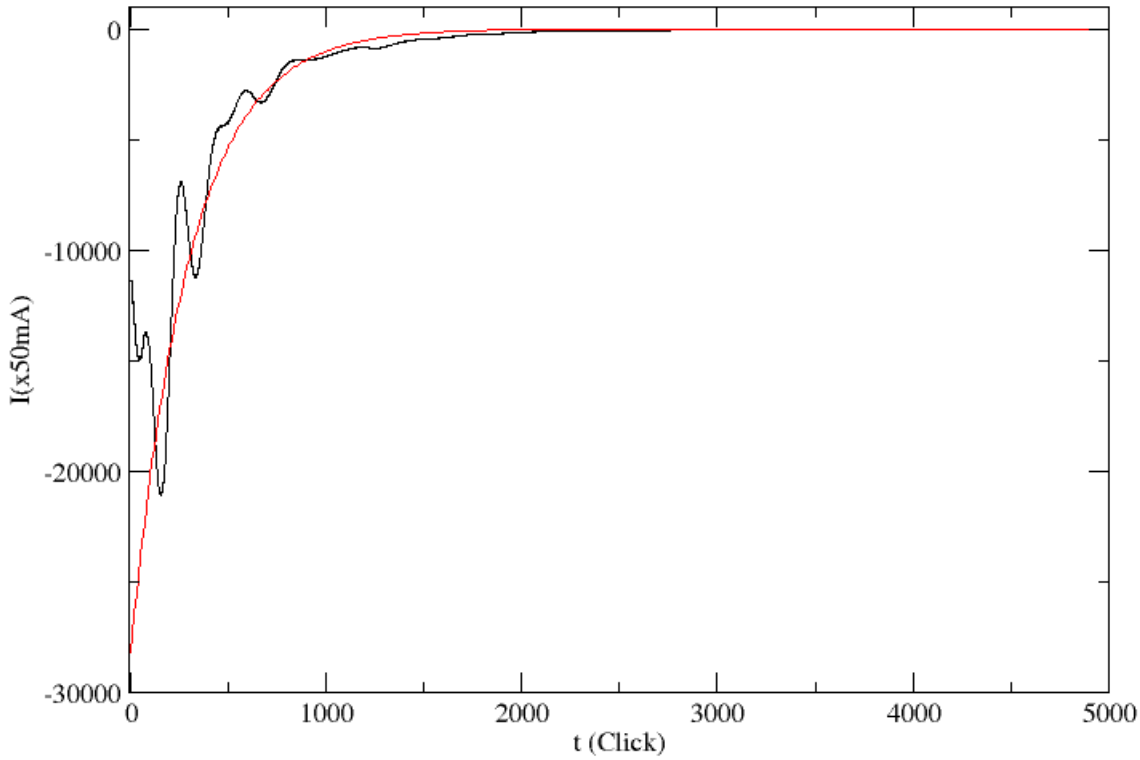

FIGURA 5.3. Corriente en un condensador al ser descargado, la línea roja corresponde al valor teórico encontrado, la línea negra la simulación de la corriente en en condensador

Maxwell solamente si la condición inicial cumple las leyes de Gauss para los campos eléctrico y magnético. Para asegurarlo, partimos de una condición en donde las funciones f son nulas, así como los campos correspondientes, y a partir de ella cargamos suavemente el condensador hasta el voltaje deseado. Para ello se impuso un campo eléctrico perpendicular a las placas en todas las celdas del eje de simetría del condensador, desde el centro de una

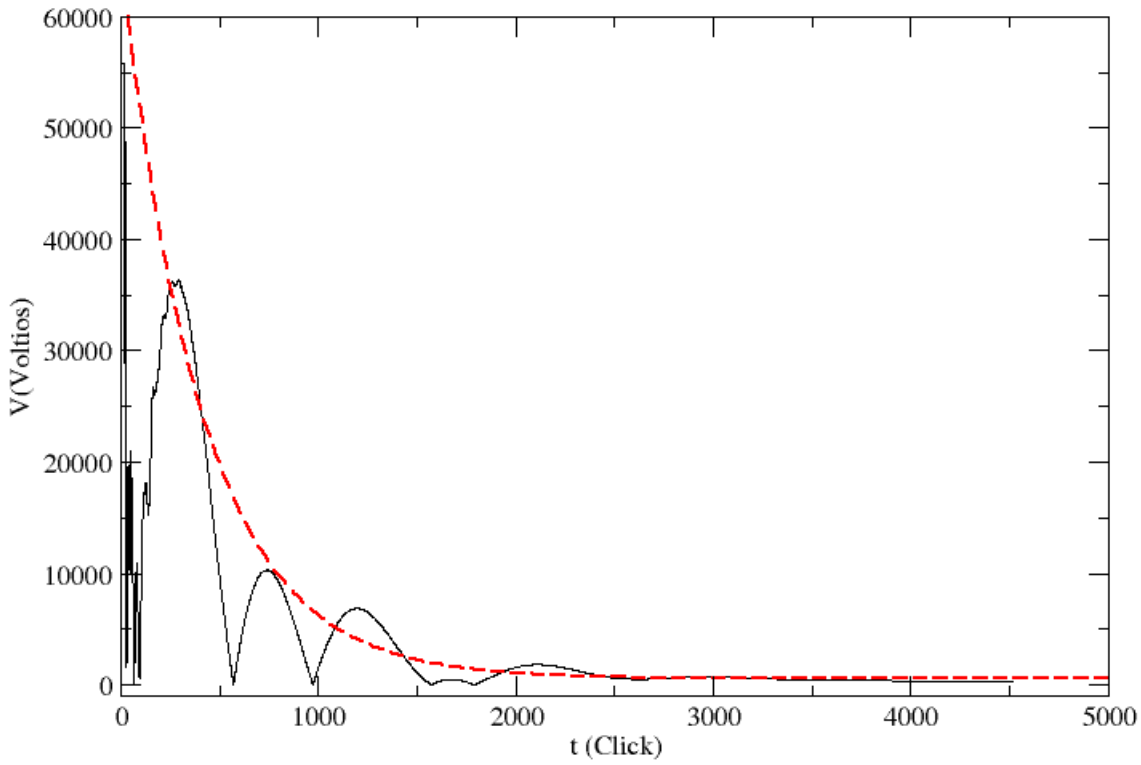

FIGURA 5.4. Voltaje en un condensador al descargar, la línea roja corresponde al valor teórico encontrado, la línea negra la simulación del voltaje en el condensador

placa hasta el centro de la otra, y se hizo crecer su intensidad como

$$E = E_{final} \cdot (1 - e^{(-t/\tau)}) \quad , \tag{5.4}$$

durante 250 pasos con $E = 55$kV y $\tau = 10$clics, que corresponden a 25.4ps, los valores normalizados utilizados en la simulación se muestran en la Tabla (5.1). A partir de ese momento, se quita la imposición del campo eléctrico y se deja correr la simulación durante 5000 pasos de tiempo. La corriente a través de la resistencia (ver Figura 5.3) y el voltaje a lo largo del condensador (ver Figura 5.4), se monitorean y se compararon los resultados con la predicción teórica. Para las curvas teóricas se calculó la capacitancia del condensador en $C = 0,16pF$ a partir de la expresión

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad . \tag{5.5}$$

El ajuste con los datos experimentales es excelente, ya que se encuentra un error solo del 9 %, entre el valor teoríco y el promedio del valor simulado. Las señales presentan, sin embargo, una oscilación que puede atribuirse al hecho de que el espacio de simulación tiene condiciones de frontera libres, lo que equivale aproximadamente a estar dentro de

una cavidad resonante. El tiempo de sumulación para cada simulacion de 5000 pasos de tiempo fue de 3 horas.

5.2. Simulación del "*Spark Gap*" con Fuente de Voltaje

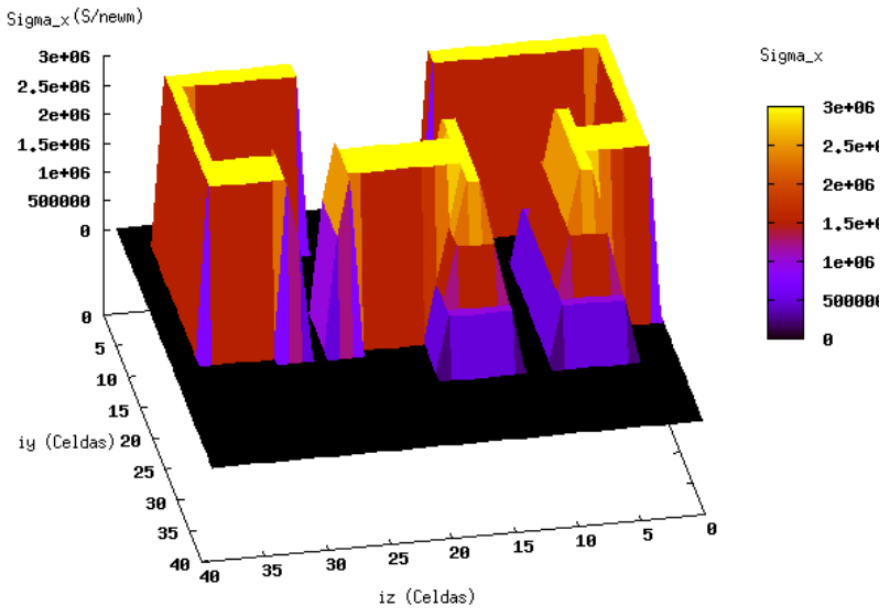

FIGURA 5.5. Primer modelo de "*spark*" para determinación del proceso de disparo, consta de un fuente, resistencia y un "*spark*", a partir de un circuito RC

El siguiente paso consistió en simular la descarga de un "*spark-gap*" similar al del generador de pulsos que se quiere simular. Para ello se modificó el circuito anterior, haciendo un pequeño espacio en el cable que conecta el condensador con la resistencia, como se muestra en la Figura.5.5, se cambió el valor de la resistencia a 100Ω y el valor de la conductividad de los metales a $\sigma_c = 3X10^6 S/m$. Adicionalmente, simular un "*spark-gap*" en las condiciones de prueba del generador de impulsos requiere la construcción de una fuente de voltaje. Este cambio se hizo sencillamente manteniendo la imposición del campo eléctrico entre las placas del condensador, con lo que éste se convierte efectivamente en una fuente de voltaje. El voltaje del gap se calculó sumando de un electrodo a otro el campo eléctrico paralelo al camino que une los gaps. La corriente de Gap se calculó sumando la densidad de corriente a través de la sección transversal del gap.

El "*spark-gap*" se modeló de la siguiente manera. Cuando el voltaje del gap supera el voltaje de ruptura, que para este caso se fijó en $V_p = 20$kV, se activa el disparo. Con ello, se fija el valor inicial de la corriente del gap en $I_{\text{gap}} = 10\mu$A. De ahí en adelante (mientras el disparo esté activado), la conductividad en el gap se calcula en todo instante de tiempo a partir del modelo utilizado para simular la resistencia de arco propuesto por Kushner [28] :

$$\sigma_{\text{gap}} = 1 + \frac{1}{K}\frac{I_{\text{gap}}^{1.2}}{(A_{\text{gap}}P_0)^{0.6}} \quad , \tag{5.6}$$

donde A_{gap} es el área de la sección transversal del gap, P_0 es la presión del gas en el gap y K es una constante arbitraria, que para nuestro caso se fijó en 1. Como resultado, la corriente comienza a aumentar y el voltaje a disminuir, hasta que llega prácticamente

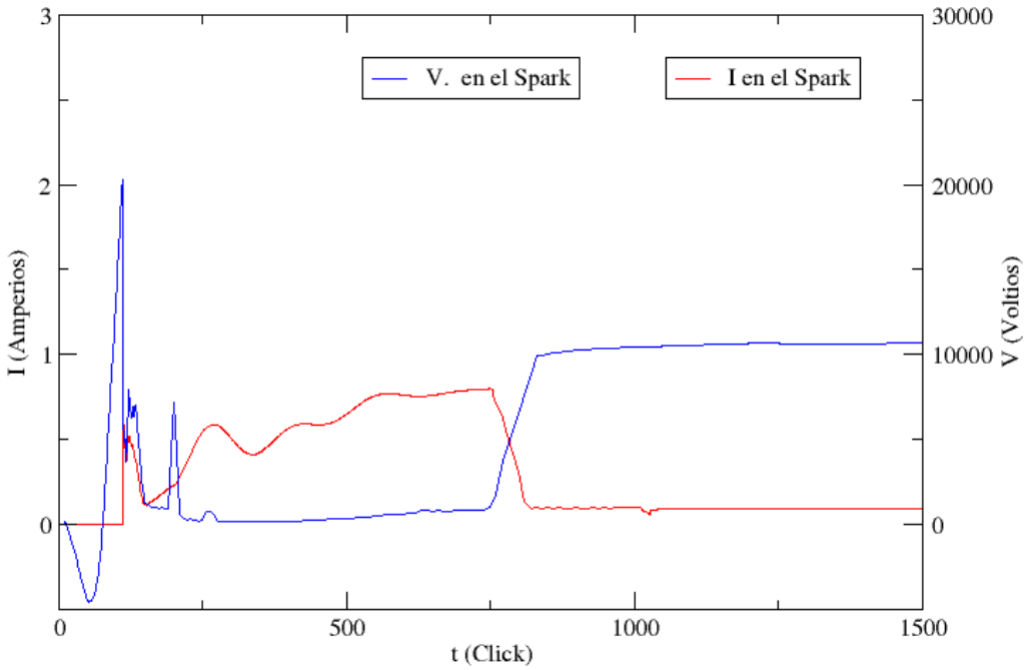

FIGURA 5.6. Tensión vs corriente, en el "*spark*" inicial.

a cero. Asumimos que el disparo se apaga cuando la corriente del gap alcanza $0.8A$, momento en el cual asumimos que el gas se calienta demasiado y rompe el arco, con lo que $\sigma_{\text{gap}} = 0$. Los resultados del disparo de la corriente y la tensión en el "*spark*" se muestran la Figura.5.6.

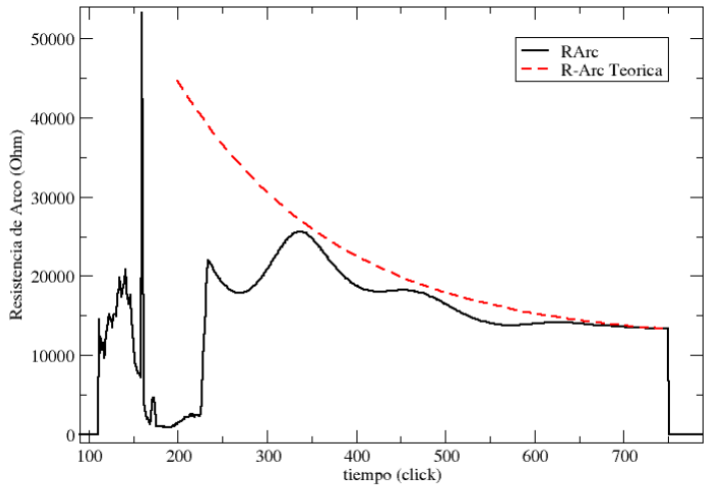

FIGURA 5.7. Grafica el valor de la resistencia de arco medida en el "*spark*"

Adicionalmente, la Figura.5.7, grafíca el valor de la resistencia de arco, calculada como $R_{arc} = V_{gap}/I_{gap}$ (en negro), y la compara con el valor teórico que se obtiene del modelo de Kuffel (Ec. 5.6) (en rojo). El tiempo para cada simulación de 1500 pasos de tiempo es de 90 minutos

5.3. Simulación de Generador de Impulsos tipo Román

Para reproducir el generador de impulsos (ver figura 5.8), se utilizó un arreglo tridimensional de $50X400X50$ celdas de tamaño $\Delta x = 4mm$. La construcción de cada uno de los elementos del generador se desarrolló realizando cambios en el valor de la conductividad eléctrica σ, como se muestra en el corte axial (ver Figura 5.9), doende se muestra además la fuente de voltaje desarrollada a partir de un condensador de placas paralelas. La figura muestra también las condición de suavizado con tres capas en el valor de σ, que se implementa para reducir las inestabilidades numé ricas. La figura 5.10 muestra, además, un detalle del corte en el eje xy de la construcción de los electrodos del generador. Además se muestra los cambios en la conductividad en otros elementos como la fuente (ver Figura 5.11) y el detalle del corte en el eje xz del electrodo (ver Figura5.12) y de la tapa del cilindro (ver Figura 5.13).

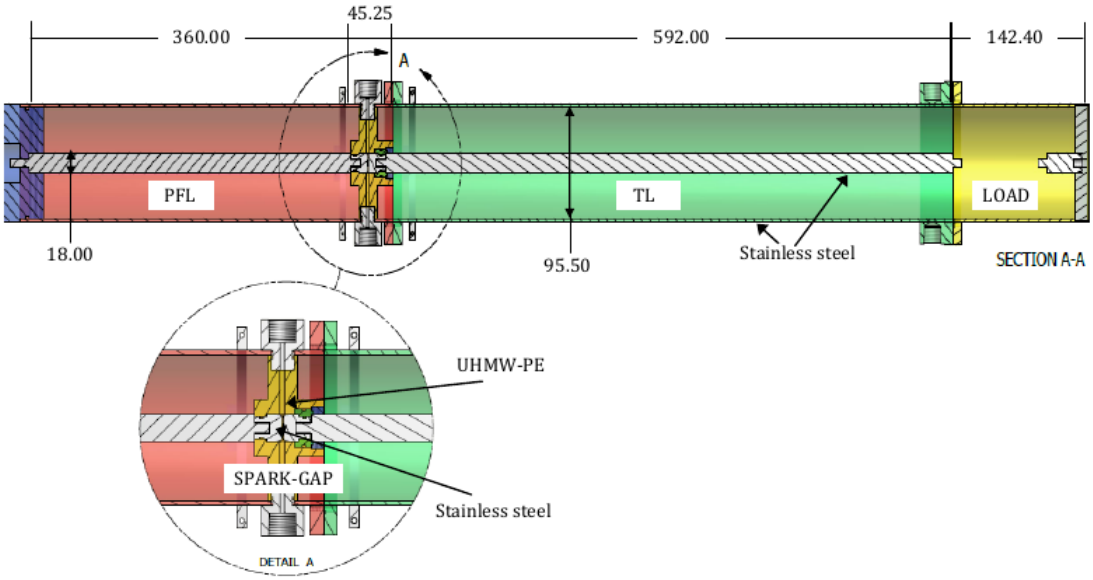

FIGURA 5.8. Diagrama esquemático del diseño del generador de impulsos. Todas las medidas en mm [41].

Las dimensiones de la geometría se muestran en la tabla(5.2). La distancia entre los electrodos es la única que no se pudo realizar con exactitud, debido a que el tamaño del lattice no logra ser tan pequeño. Aumentar la resolución justo en ese punto es un tema interesante de trabajo futuro.

La simulación se realizó de la misma manera que en el caso anterior (Eq.5.1). La fuente se carga exponencialmente por 3500 pasos hacia un valor final de voltaje $V_{final} = 50$kV (que corresponde a un campo eléctrico $E_o = 12000$) con el mismo tiempo característico $\tau = 25.4$ps (10 clicks). Por su parte, el "*spark-gap*" se simuló con un voltaje de ruptura $V_p = 40$kV y una corriente máxima de 50A. Los resultados de la simulación se muestran en la figura 5.14. El disparo ocurre a $t = 2273$ pasos de tiempo, cuando el voltaje de gap alcanca el valor de ruptura. Las corrientes se grafícan en la Figura(5.15): en la resistencia de carga (línea negra), en medio del "*spark*" (línea roja) y en la resistencia limitadora (línea verde).

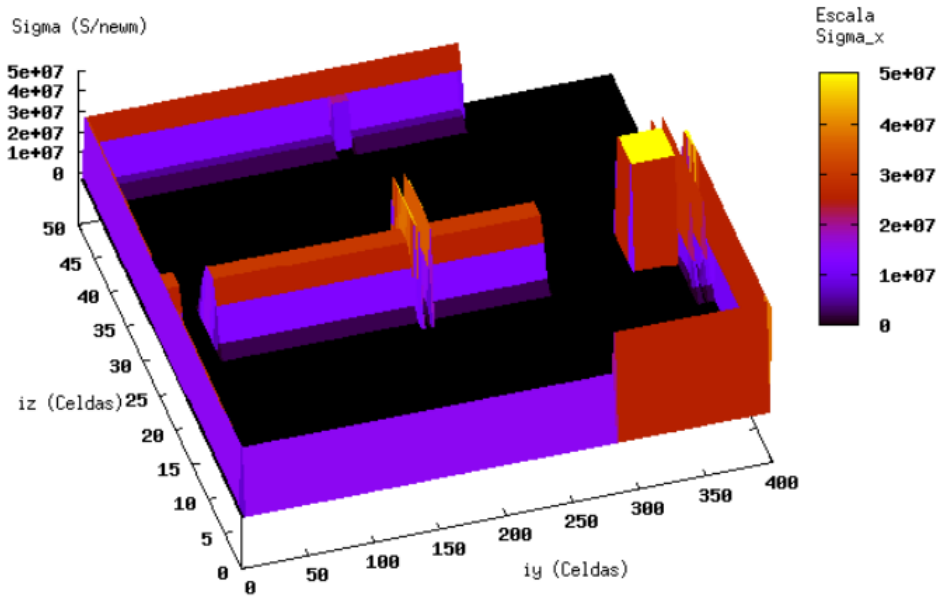

FIGURA 5.9. Plano de corte en Lx/2 de la geometría del generador de impulsos tipo Román.

TABLA 5.2. Longitudes utilizadas en el desarrollo de la simulación del generador de impulsos

Parametro	**Longitud real en** mm	**Longitud en celdas**
Longitud PFL	360	90
TL	592	148
R. Carga	142	35
Distancia entre D.dot	45	11
Distancia entre electrodos	16	4
Radio del cilindro externo	95	24
Radio del cilindro interno	18	4
Longitud total	1140	284

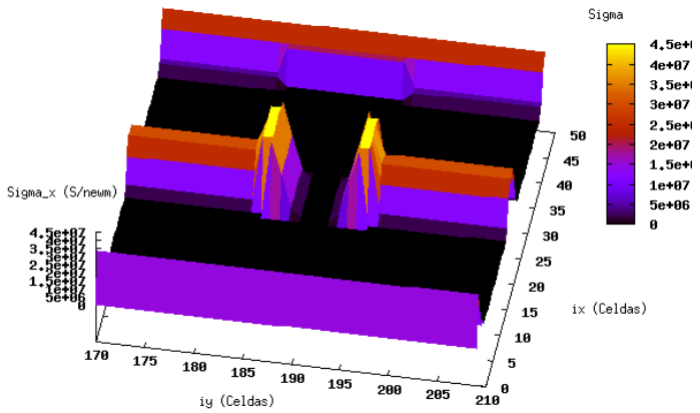

FIGURA 5.10. Fuente desarrollada a través placas paralelas, donde se coloca campo eléctrico E en la dirección perpendicular de las placas

Para corroborar los valores medidos por Santamaría, se realizó la medición del campo eléctrico en dirección radial en sitios similares a donde se encontraban los medidores de

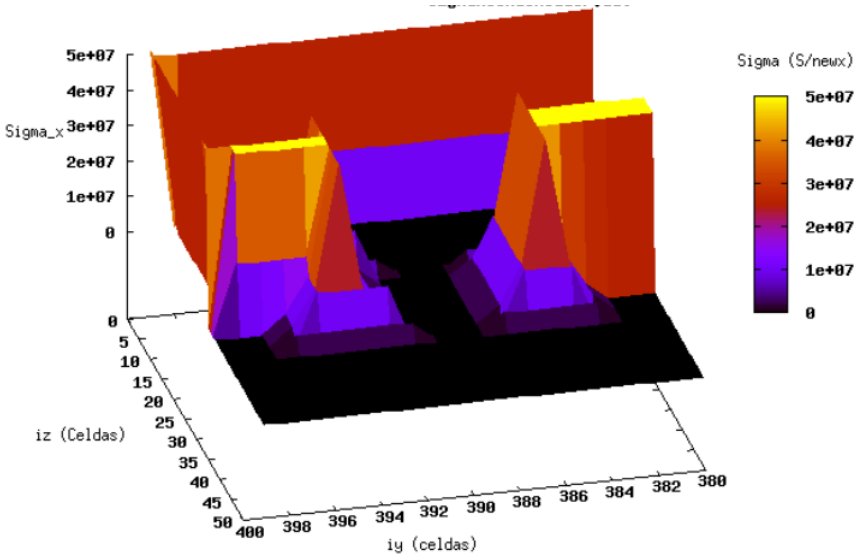

FIGURA 5.11. Detalle de los valores de conductividad del condensador de placas paralelas, utilizado como fuente para el generador de impulsos

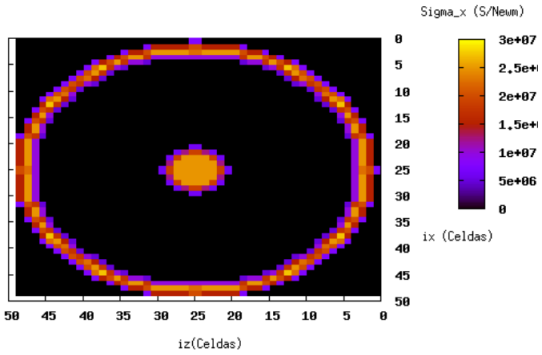

FIGURA 5.12. Detalle de los valores de conductividad del electrodos

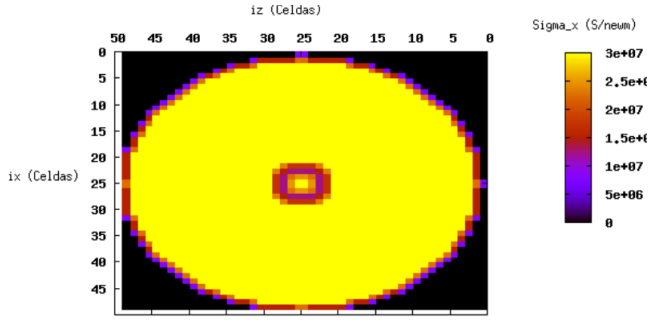

FIGURA 5.13. Detalle del corte vertical de la tapa y el cilindro interior del generador de impulsos

campo eléctrico $D - dot$ en el experimento (celdas 180 y 198). Los resultados se muestran en la figura (5.16). Las curvas de voltaje reproducen muy bien el comportamiento cualitativo de las curvas experimentales. Las diferencias cuantitativas se pueden justificar en la diferencia existente entre la distancia de separación de los electrodos en el modelo de lattice-Boltzmann y en el generador real. Los voltajes y las corrientes en el gap también reproducen cualitativamente las medidas indirectas realizadas por Santamaría (ver Figura 5.17).

En conclusión, el modelo de lattice-Boltzmann captura el comportamiento cualitativo del sistema. Las diferencias cuantitativas se pueden deber (muy posiblemente) a la resolución de la grilla en el "*spark-gap*". El tiempo para cada simulación completa hasta llegar a 3500 pasos ha sido de 14 horas.

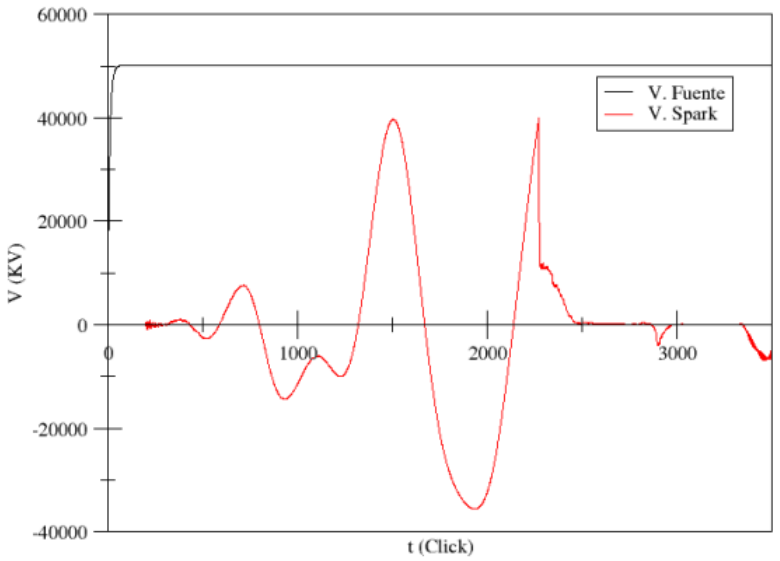

FIGURA 5.14. Resultados de la tensión en la simulación en la fuente (línea negra) y en el "*spark*" (línea roja)

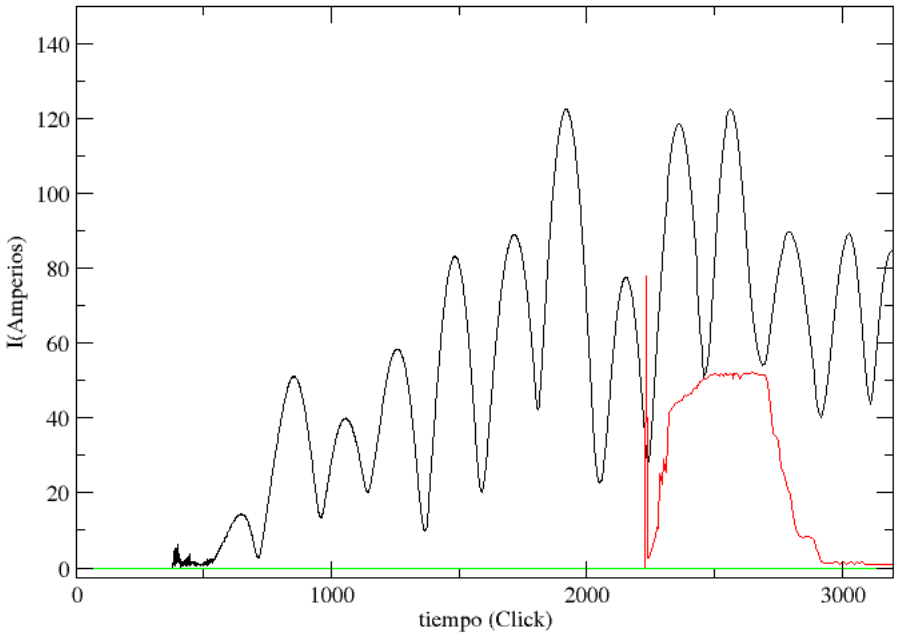

FIGURA 5.15. Corrientes en la resistencia de carga (negro), en el "*spark*" (rojo) y en la resistencia limitadora (verde)

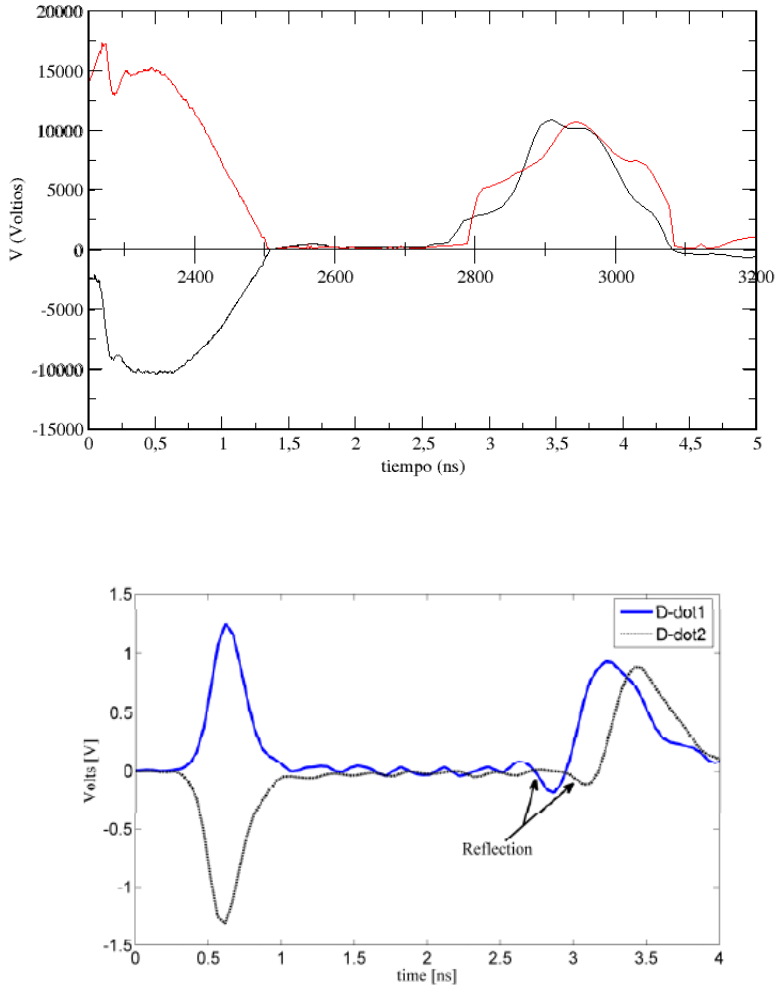

FIGURA 5.16. Medición de la tensión en los medidores D-dot, La gráfica superior corresponde a la simulación desarrollada, la gráfica inferior corresponde a los resultados desarrollados por Santamaría()

TABLA 5.3. Unidades de lattice normalizadas

Unidades de lattice	**Valor**	**Unidad**
Longitud [L]	4	mm
Tiempo [T]	9,42	ps
Carga eléctrica [q]	5,80	e^-
Masa [m]	4,36	m_e
Voltaje [V]	1	$Voltio$
Corriente [I]	1	Amperio
Resistencia [R]	1	Ω
Conductividad [σ]	250	$1/\Omega newm$
Campoe eléctrico [$\vec{E}$]	250	$V/newm$

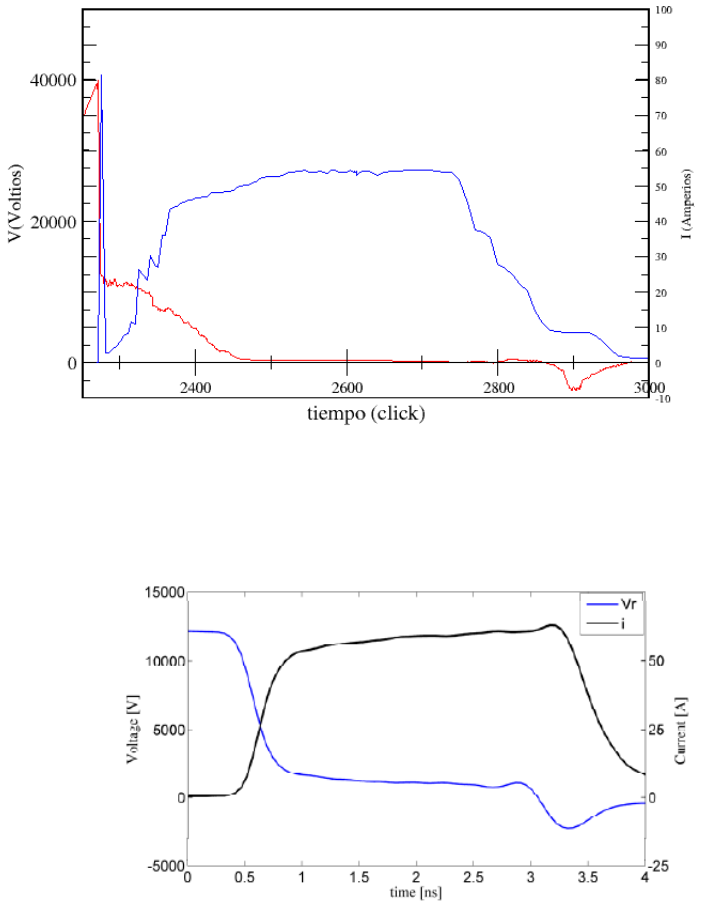

FIGURA 5.17. Comparación entre las gráficas de voltaje y corriente en la simulación y los datos obtenidos por Santamaría en el generador de impulsos

Conclusiones

Los métodos de lattice Boltzmann son una alternativa novedosa para la simulación numérica, que han mostrado ser muy exitosos en la simulación de fluidos. Sus características los hacen ideales para ser implementados sobre tarjetas gráficas, donde resultan ser de 100 a 1000 veces más rápidos que los métodos tradicionales implementados sobre procesadores multipropositos. Recientemente los métodos de lattice Boltzmann han sido extendidos a la simulación de campos electromagnéticos en medios materiales, reproduciendo con éxito sistemas sencillos [1]. El objetivo de este trabajo fue utilizarlos para simular el funcionamiento del generador de impulsos tipo Román, desarrollado por Francisco Santamaría, bajo el grupo del profesor Francisco Román para la producción de picos de corriente de tantos amperios con duración de tantos ns. Para lograr esta simulación fue necesario construir modelos de una fuente de voltaje y del spark gap utilizando el método de lattice Boltzmann, lo que se implemento con éxito en sistemas pequeños antes de encarar la simulación de impulsos completo. La simulación de este generador de impulsos necesito desarrollar modelos para la fuente de voltaje y el disparo del interruptor de plasma que funcionaron correctamente y que podrían ser utilizados en simulaciones futuras. Para la simulación final del generador de impulsos, se construyo la geometría del sistema completo, incluyendo la fuente de alimentación, en un arreglo tridimensional de $50X400X50$ celdas cubicas que reproducían los valores de conductividad del sistema real. El tamaño de celda fue de $4mm$, que aunque fue insuficiente para modelar la separación entre los electrodos, permitió reproducir con éxito el comportamiento cualitativo de las corrientes y los voltajes medidos experimentalmente en el sistema real.

La limitación más importante para la reproducción cuantitativa de los resultados, se encuentra en la resolución. Cada celda, maneja 50 variables de punto flotante, y un sistema $50X400X50$ celdas cubicas esta en el límite de la memoria RAM del computador utilizado. La resolución. que se obtiene con este numero de celdas es insuficiente para modelar la distancia entre electrodos, que es el corazón del proceso de disparo. Esta dificultad se puede resolver de diferentes maneras. La más sencilla consiste en aumentar la resolución. en la zona que rodea los electrodos, dividiendo las celdas en unas más pequeñas, que intercambian valores con las grandes a traves del calculo de valores promedio y de calcular valores promedio por interpolación, siguiendo un procedimental sugerido recientemente por Chopard [36]. La segunda consiste en aprovechar la geometría cilíndrica del generador de impulsos. Para lograr esto se requiere expresar el modelo de lattice Boltzmann de campos electromagnéticos en coordenadas cilíndricas, algo que no se ha desarrollado hasta el momento, pero que permitiría utilizar la misma cantidad de memoria RAM en un arreglo bidimensional de $3000X350$ celdas, lo que incrementaría la resolución. 10 veces, afortunadamente existen actualmente trabajos muy recientes [25] que construyen mode-

los de lattice Boltzmann para fluidos en coordenadas ortogonales generalizadas. El reto consiste entonces, en realizar este trabajo para el caso del campo electromagnético, lo que constituye a todas luces un tema muy valioso de investigación futura. por otra parte, esta simulación fue desarrollada en un computador usual, pero la principal ventaja de utilizar un método de lattice Boltzmann con tarjetas gráficas. Implementarlo requiere reescribir el modelo en CUDA. Este es también un tema importante para futuros trabajos.

Este trabajo final realiza una de las primeras aplicaciones del método de lattice Boltzmann para un elemento real, los resultados muestran que el método es una alternativa promisoria para la modelación de dispositivos electromagnéticos.

APÉNDICE

Expansión de Chapman-Enskog para Ondas

Para su solución se inicia haciendo una expansión en serie de Taylor al lado izquierdo de la ecuación de evolución de Boltzmann, Ec. 3.1, hasta términos de segundo orden en las coordenadas espaciales y en la coordenada temporal, obteniendo

$$\begin{aligned} f_i(\vec{x}+\vec{v}_i, t+1) - f_i(\vec{x}, t) = \\ \delta t\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}\right) f_i + \frac{(\delta)^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}\right)^2 f_i = \\ \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} v_{i\alpha} + \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} v_{i\alpha} v_{i\beta} \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\alpha \partial t} v_{i\alpha} = -\frac{1}{\tau}(f_i - f_i^{\mathrm{eq}}) \quad , \end{aligned} \tag{7}$$

donde los subíndices α y β representan las componentes de los vectores. Ahora, hacemos una expansión en series perturbativas a primer orden en el espacio y a segundo orden de las funciones de distribucion y en el tiempo, haciendo

$$f_i = \sum_{n=0} f_i^{(n)} \epsilon^n \tag{8a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum_{n=1} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial x_{\alpha n}} \tag{8b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=1} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n} \tag{8c}$$

donde el parámetro perturbativo es $\epsilon = \delta x/L$ con δx la longitud de una celda y L la longitud característica de la zona de simulación. Entonces, reemplazando la Ec.(8) en la

Ec. (7) y teniendo en cuenta hasta los términos de segundo orden en ϵ, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 2}}\right)\left(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)}\right)v_{i\alpha}+\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\left(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 2}}\right)\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial x_{\beta 1}}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_{\beta 2}}\right)\left(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)}\right)v_{i\alpha}v_{i\beta}\\
&\quad+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 2}}\right)\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)\left(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)}\right)v_{i\alpha}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^2\left(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)}\right)\\
&\quad=-\frac{1}{\tau}(f_i^{(0)}+\epsilon f_i^{(1)}+\epsilon^2 f_i^{(2)}-f_i^{\mathrm{eq}})\quad .
\end{aligned}\tag{9}$$

Agrupando los los términos a orden cero en ϵ obtenemos $f_i^{(0)}=f_i^{\mathrm{eq}}$. A primer orden en ϵ, se obtiene:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{\alpha 1}}v_{i\alpha}+\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1}=-\frac{f_i^{(1)}}{\tau}\tag{10}$$

A segundo orden en ϵ, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x_{\alpha 1}}v_{i\alpha}+\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_2}+\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_1}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial x_{\alpha 1}\partial x_{\beta 1}}v_{i\alpha}v_{i\beta}\\
&\qquad+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{\alpha 2}}v_{i\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial t_1^2}+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial x_{\alpha 1}\partial t_1}v_{i\alpha}=-\frac{f_i^{(2)}}{\tau}\quad ,
\end{aligned}\tag{11}$$

Al reemplazar la Ec.(10) en la Ec.(11) y utilizamos el valor de $\tau=\frac{1}{2}$, reescribiendo

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_{\alpha 2}}v_{i\alpha}+\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_2}=-\frac{f_i^{(2)}}{\tau}\quad .\tag{12}$$

Entonces, para el orden cero en ϵ en las Ecs. (10) y (12) se obtiene,

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_i^{\mathrm{eq}}}{\partial x_{\alpha 2}}v_{i\alpha}+\frac{\partial f_i^{\mathrm{eq}}}{\partial t_2}=-\frac{f_i^{(2)}}{\tau}\quad ,\tag{13a}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial f_i^{\mathrm{eq}}}{\partial x_{\alpha 1}}v_{i\alpha}+\frac{\partial f_i^{\mathrm{eq}}}{\partial t_1}=-\frac{f_i^{(1)}}{\tau}\quad .\tag{13b}$$

Para obtener las ecuaciones de las cantidades macroscópicas en el límite continuo se calculan solo con los órdenes cero de las funciones de distribución, y que esas mismas cantidades calculadas con cualquier otro orden dan cero.

$$\psi=\sum_i f_i^{\mathrm{eq}}\quad ,\quad \vec{V}=\sum_i f_i^{\mathrm{eq}}\vec{v}_i\quad .\tag{14a}$$

y

$$\sum_i f_i^{(n)} = 0 \quad , \quad \sum_i f_i^{(n)} \vec{v}_i = 0 \quad , \quad \forall n > 0 \quad . \tag{15a}$$

Ahora, haciendo la suma sobre el índice i de las Ecs. (13), se obtiene las relaciones

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial \vec{V}_\alpha}{\partial x_{\alpha 2}} + \frac{\partial \psi}{\partial t_2} = 0 \quad , \tag{16a}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial \vec{V}_\alpha}{\partial x_{\alpha 1}} + \frac{\partial \psi}{\partial t_1} = 0 \quad . \tag{16b}$$

Usando el parámetro perturvativo ϵ y multiplicando la Ec.(16a) por su cuadrado (ϵ^2) y la Ec.(16b) por ϵ, para luego sumarlas se tiene que:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial \vec{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad . \tag{17}$$

Ahora, si se multiplican las Ec.(10) y(12) por el vector $\vec{v}_i$ se obtiene

$$\frac{\partial (c^2 \psi)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} = 0 \quad \alpha = 1, 2 \quad , \tag{18}$$

De aquí, las ecuaciones macroscópicas que el modelo cumple son:

$$\nabla \cdot \vec{V} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad , \tag{19}$$

$$\nabla (c^2 \psi) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad . \tag{20}$$

Sacando divergencia a ambos lados de la Ec.20 obtenemos la ecuación de onda:

$$\nabla^2 (c^2 \psi) + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{V})}{\partial t} = 0 \quad , \tag{21}$$

$$\nabla^2 (c^2 \psi) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad , \tag{22}$$

APÉNDICE

Expansión de Chapman-Enskog. Electrodinámica

Para hacer la expansión de Chpaman-Enskog comenzaremos por hacer una expansión en series de Taylor de estas ecuaciones hasta segundo orden en las coordenadas espaciales y en la coordenada temporal,

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_i^p \cdot \vec{\nabla} G_{ij}^{p(r)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 G_{ij}^{p(r)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(v_{i\alpha}^p v_{i\beta}^p) \\
&+ \frac{\partial G_{ij}^{p(r)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}_i^p \cdot \vec{\nabla} G_{ij}^{p(r)} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_{ij}^{p(r)}}{\partial t^2}\delta t^2 = -\frac{1}{\tau_2}(G_{ij}^{p(r)} - G_{ij}^{p(r)\mathrm{eq}}) \quad ,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{\partial G_0^{(r)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_0^{(r)}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tau_2}(G_0^{(r)} - G_0^{(r)\mathrm{eq}}) \quad . \tag{24}$$

donde $\alpha, \beta = x, y, z$ denotan las componentes x, y and z.

Luego, vamos a expandir las funciones de distribución y las derivadas espaciales y temporales en potencias de un pequeño parámetro, *epsilon*,

$$G_{ij}^{p(r)} = G_{ij}^{p(r)(0)} + \lambda G_{ij}^{p(r)(1)} + \lambda^2 G_{ij}^{p(r)(2)} + ... \quad , \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial t_1} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + ... \quad , \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}} + ... \quad . \tag{27}$$

donde vamos a suponer que solo el término de orden cero en λ de las funciones de distribución contribuyen a las variables macroscópicas, así, para $n > 0$ tenemos

$$\sum_{i,j,p} G_{ij}^{p(r)(n)} \vec{e}_{ij}^p = 0 \quad , \tag{28a}$$

$$\sum_{i,j,p} G_{ij}^{p(r)(n)} \vec{b}_{ij}^{p} = 0 \quad . \tag{28b}$$

La densidad de corriente media $\vec{J'}$ es de orden λ [**?**], de esta forma, podemos escribir $\vec{J'} = \lambda \vec{J'}_1$. Debido a que $G_{ij}^{p\mathrm{eq}}$ es ahora función de $\vec{J'}$, también necesitamos desarrollar una expansión de Chapman-Enskog de la función de equilibrio:

$$G_{ij}^{p(r)\mathrm{eq}} = G_{ij}^{p(r)(0)\mathrm{eq}} + \lambda G_{ij}^{p(r)(1)\mathrm{eq}} + \lambda^2 G_{ij}^{p(r)(2)\mathrm{eq}} \quad . \tag{29}$$

Así, reemplazando estos resultados en las Ecs.(23) y (24), obtenemos para el orden cero en λ

$$G_{ij}^{p(r)(0)\mathrm{eq}} = G_{ij}^{p(r)(0)} \quad . \tag{30a}$$

$$G_{0}^{(r)\mathrm{eq}} = G_{0}^{(r)(0)} \quad . \tag{30b}$$

Para el primer orden en λ de la función de distribución tenemos

$$\begin{aligned} \vec{v}_i^p \cdot \vec{\nabla}_1 G_{ij}^{p(r)(0)} + \frac{\partial G_{ij}^{p(r)(0)}}{\partial t_1} = \\ - \frac{1}{\tau_2}(G_{ij}^{p(r)(1)} - G_{ij}^{p(r)(1)\mathrm{eq}}) \quad , \end{aligned} \tag{31a}$$

$$\frac{\partial G_{0}^{(r)(0)}}{\partial t_1} = -\frac{1}{\tau_2}(G_{0}^{(r)(1)} - G_{0}^{(r)(1)\mathrm{eq}}) \quad , \tag{31b}$$

y para el segundo orden en λ obtenemos

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2\tau_2}\right)\left(\vec{v}_i^p \cdot \vec{\nabla}_1 + \frac{\partial}{\partial t_1}\right) G_{ij}^{p(r)(1)} \\ &+ \frac{\partial G_{ij}^{p(r)(0)}}{\partial t_2} + \frac{1}{2\tau_2}\left(\vec{v}_i^p \cdot \vec{\nabla}_1 + \frac{\partial}{\partial t_1}\right) G_{ij}^{p(r)(1)\mathrm{eq}} = \\ &- \frac{1}{\tau_2}(G_{ij}^{p(r)(2)} - G_{ij}^{p(r)(2)\mathrm{eq}}) \quad , \end{aligned} \tag{32a}$$

$$\frac{\partial G_{0}^{(r)(0)}}{\partial t_2} = -\frac{1}{\tau_2}(G_{0}^{(r)(2)} - G_{0}^{(r)(2)\mathrm{eq}}) \quad . \tag{32b}$$

Los términos de primer y segundo orden para la función de equilibrio de los campos electromagnéticos se obtienen reemplazando la Ec. (**??**) en la Ec.(**??**). De este resultado, podemos obtener agrupando en potencias de λ

$$G_{ij}^{p(r)(0)\mathrm{eq}}(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon^{1-r}}{4} \vec{E} \cdot e_{ij}^{p} + \frac{\mu^{r-1}}{8} \vec{B} \cdot b_{ij}^{p} \quad , \tag{33a}$$

$$G_{ij}^{p(r)(1)\mathrm{eq}}(\vec{x}, t) = \frac{\lambda}{16} \vec{v}_i^p \cdot \vec{J'}_1 - \frac{\lambda \mu_0 \lambda_2 \tau_2}{8} \vec{J'}_1 \cdot e_{ij}^{p} \quad , \tag{33b}$$

$$G_{ij}^{p(r)(2)\mathrm{eq}}(\vec{x},t) = 0 \quad , \tag{33c}$$

$$G_{0}^{(r)(0)\mathrm{eq}}(\vec{x},t) = \rho_c \quad , \tag{33d}$$

$$G_{0}^{(r)(1)\mathrm{eq}}(\vec{x},t) = G_{0}^{(r)(2)\mathrm{eq}}(\vec{x},t) = 0 \quad . \tag{33e}$$

Ahora, estamos listos para determinar las ecuaciones que el modelo satisface en el límite continuo. Primero, vamos a tomar $\tau_2 = 1/2$, $\lambda_2 = 1$. Si hacemos la suma en las Ecs. (31a), (31b), (32a) y (32b) sobre i, j y p, obtenemos

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t_1} = 0 \quad , \tag{34}$$

y

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t_2} + \nabla \cdot \vec{J'}_1 = 0 \quad . \tag{35}$$

Si sumamos estas dos ecuaciones obtenemos la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J'} = 0 \quad . \tag{36}$$

Ahora bien, vamos a multiplicar las ecuaciones (31a), (31b), (32a) y (32b) por $\vec{e}_{ij}^{\,p}$ y luego hacemos las sumas sobre los índices i, j y p. Así, para $r = 0$ obtenemos

$$\frac{\partial(\epsilon\vec{E})}{\partial t_1} - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = -\frac{1}{2}\mu_0 \vec{J'}_1 \quad , \tag{37}$$

y

$$\frac{\partial(\epsilon\vec{E})}{\partial t_2} - \frac{\mu_0}{4}\frac{\partial \vec{J'}_1}{\partial t_1} = 0 \quad . \tag{38}$$

Si nosotros sumamos estas dos ecuaciones, y teniendo en cuenta la Ec. (**??**), llegamos a la primera ecuación de Maxwell,

$$\frac{\partial(\epsilon\vec{E'})}{\partial t} - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = -\mu_0 \frac{1}{2}\vec{J'} \quad . \tag{39}$$

De forma similar, multiplicando las Ecs. (31a) y (32a) por $\vec{b}_{ij}^{\,p}$ y haciendo las sumas sobre i, j y p, obtenemos para $r = 1$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t_1} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad , \tag{40}$$

y

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t_2} - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{2}\mu_0 \vec{J'}_1\right) = 0 \quad . \tag{41}$$

Si sumamos estas dos ecuaciones, obtenemos la segunda ecuación de Maxwell,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E}' = 0 \quad . \tag{42}$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell pueden ser obtenidas de las Ecs.(39) y (42) como se muestra en [28]. Si aplicamos la divergencia a estas ecuaciones obtenemos

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}')}{\partial t} = -\frac{1}{2}\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}' \quad , \tag{43}$$

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}{\partial t} = 0 \quad . \tag{44}$$

y debido a la ecuación de continuidad Ec.(36), llegamos a que

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}')}{\partial t} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \quad . \tag{45}$$

Finalmente, obtenemos

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}' - \frac{1}{2}\mu_0 \rho_c)}{\partial t} = 0 \quad . \tag{46}$$

Así, si las condiciones iniciales de los campos electromagnéticos satisfacen las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \tag{47}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = \frac{1}{2}\mu_0 \rho_c = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad . \tag{48}$$

estas ecuaciones serán reproducidas correctamente para todo tiempo.

Resumiendo, las ecuaciones (39), (42) (47) y (48) determinan la evolución de los campos electromagnéticos. Estas son las ecuaciones de la electrodinámica, y esto completa la prueba.

Bibliografía

[1] M Mendoza and JD Munoz, *Three-dimensional lattice boltzmann model for magnetic reconnection*, Physical Review E **77** (2008), no. 2, 026713.

[2] K. Yee, *Numerical solutions of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation **AP-14** (1966), 302–307.

[3] Lehr J.M. C.E. Baum W.D. Prather F.J. Agee, *Aspects of ultrafast spark gap switching for uwb hpm generation.*, Proceedings of the 11th IEEE Pulsed Power Conference **2** (1997), 1033–1041.

[4] Liliana Arevalo, *Estudio de la física del efecto corona*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (2002).

[5] P. Luthi y J. Wagen B. Chopard, *Proc. microwaves, antennas and propag*, IEEE **144** (1997), 251.

[6] E. P. Bhatnagar, P. Gross and M. K. Krook, *A model for collision process in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component system*, Phys. Rev **94** (1954), 511.

[7] H. Chen and W. H. Matthaeus, *New cellular automaton model for magnetohydrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987), 1845.

[8] H. Chen, W. H. Matthaeus, and L. W. Klein, *An analytic theory and formulation of a local magnetohydrodynamic lattice gas model*, Phys. Fluids **31** (1988), 1439.

[9] S. Chen, H. Chen, D. Martinez, and W. Matthaeus, *Lattice boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 3776.

[10] S. Chen, D. O. Martinez, W. H. Matthaeus, and H. Chen, *Magnetohydrodynamics computations with lattice gas automata*, J. Stat. Phys. **68** (1992), 533.

[11] Bastien Chopard and Michel Droz, *Cellular automata modeling of physical systems*, vol. 24, Cambridge University Press Cambridge, 1998.

[12] Jackson John David, *Electrodinámica clásica*, first ed., Editorial Alhambra S.A., 1966.

[13] D. d'HumÃ©res, M'hamed Bouzidi, and Pierre Lallemand, *Thirteen-velocity three-dimensional lattice boltzmann model*, Physical Review E **63** (2001), 066702.

[14] William C. Elmore and Mark A. Heald, *Physics of waves*, Dover Publications, 1969.

[15] M. Mendoza et al.E. N. Parker, *Relativistic lattice boltzmann model with improved dissipation.*, Physical Rev. D **87** (2013), 065027.

[16] Jonathan Florez Giraldo et al., *Simulación de los patrones de profundidad, velocidad y salinidad del agua de la ciénaga grande de santa marta por el método lattice boltzmann*, Ph.D. thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2013.

[17] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau, *Lattice-gas for navier-stokes equation*, Physical Review Letters **56** (1986), no. 14, 1505.

[18] Walter Giménez, *Modelización de interruptores eléctricos de potencia*, Ph.D. thesis, Doctoral Thesis, Universität Politénica de Catalunya, Barcelona, Spain, 1999.

[19] E. Hantzsche, *G. a. mesyats, d. i. proskurovsky: âpulsed electrical discharge in vacuumâ springer-verlag berlin, heidelberg 1989*, Contributions to Plasma Physics **30** (1990), no. 5, 586–586.

[20] Xiaoyi He, Shiyi Chen, and Gary D. Doolen, *A novel thermal model for the lattice boltzmann method in incompressible limit*, J. Comput. Phys. **146** (1998), no. 1, 282–300.

[21] W.S. Zaengl J. Kuffel Kuffel, E., *High Voltage Engineering.*, Newnes Breat Britain, 2000.

[22] M.J. Kushner, W.D. Kimura, and S.R. Byron, *Arc resistance of laser 2010;triggered spark gaps*, Journal of Applied Physics **58** (1985), no. 5, 1744–1751.

[23] B. Lembège and R. Pellat, *Stability of a thick two-dimensional quasineutral sheet*, Phys. Fluids **25** (1982), 1995–2004.

[24] A. Guenther M. Kristiansen (editors) Martin, T., *Martin on Pulsed Power.*, vol. 3, lenum Press, Advances in Pulsed Power Technology, 1996.

[25] JD. Succi S. Herrmann HJ. Mendoza, M. Debus, *Lattice kinetic scheme for generalized coordinates and curved spaces*, International Journal of Modern Physics C (2014).

[26] M. Mendoza and J.D. Mu noz, *3d lattice-boltzmann model for magnetic reconnection*, Tech. report, Universidad Nacional de Colombia, 2005.

[27] S. Succi y H.J. Herrmann M.Mendoza, B. Bogoshian, *Fast lattice-boltzmann solver for relativistic hydrodynamics*, Phys.Rev.Lett. **105** (2010), 014502.

[28] V. Cooray M. Rahman P. Liyanage Montaño, R. Becerra, *Resistance of spark channels*, IEEE Trans. on plasma science **34** (2006), 1610–1619.

[29] N. Mora, *Electrical model of the Roman Generator*, Trabajo de grado de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2009.

[30] M.S. V. Kamaraju Naidu, *High Voltage Engineering.*, McGrawâHill, 1996.

[31] E. Nasser, *Fundamentals of Gaseous Ionization and Plasma Electronics.*, WileyâInterscience, Wiley Series in Plasma Physics, 1971.

[32] H Hakimi Pajouh, MR Rouhani, H Abbasi, F Kazeminejad, and S Rouhani, *A computational fluid model for investigation of plasma waves and instabilities*, arXiv preprint physics/0503043 (2005).

[33] Y. H. Qian, D. d'Humieres, and P. Lallemand, *Lattice bgk models for navier-stokes equation*, Europhysics Letters **17** (1992), 479–484.

[34] YH Qian, Dominique d'Humières, and Pierre Lallemand, *Lattice bgk models for navier-stokes equation*, EPL (Europhysics Letters) **17** (1992), no. 6, 479.

[35] Zhaoli Guo Qin Lou and Chuguang Zheng, *Some fundamental properties of lattice boltzmann equation for two phase flows*, CMES-Comput. Mod. Eng. Sci **76** (2011), 175–188.

[36] ———, *Some fundamental properties of lattice boltzmann equation for two phase flows*, CMES-Comput. Mod. Eng. Sci **76** (2011), 175–188.

[37] Mcnamara R. and Zanetti G., *Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata.*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 23–23.

[38] F. Román, *Method and apparatus using a floating electrode to extract energy from an electric field*, aug -17"1999, US Patent 5,939,841.

[39] F. Roman, *Repetitive and constant energy impulse current generator*, jul -13"1999, US Patent 5,923,130.

[40] Francisco Roman, Vernon Cooray, and Viktor Scuka, *Corona from floating electrodes*, Journal of electrostatics **37** (1996), no. 1, 67–78.

[41] F. Santamaría, *Experimental research work on a sub-millimeter Spark-Gap for sub-nanosecond gas breakdowne.*, Propuesta de Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[42] James D. Sterling and Shiyi Chen, *Stability analysis of lattice-boltzmann methods*, Journal of Computacional Physics **123** (1996), 196–206.

[43] S. Succi and R. Benzi, *Lattice boltzmann equation for quantum mechanics*, Physica D **69** (1993), 327.

[44] S Succi, S Palpacelli, M Mendoza, and HJ Herrmann, *Majorana returns: the dirac-boltzmann connection*, Electronic Journal of Theoretical Physics **11** (2014), no. 30, 9–26.

[45] P. A. Sweet, *Electromagnetic phenomena in ionized gases*, IAU Symposium no. 6, 1958, p. 123.

[46] M. Turner, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aeronaut. Sci. **23** (1956), 805–823.

[47] D. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models.*, Springer, 2005.

[48] Y. An y Y. Chen Y. Wang, Y. Wang, *Aerodynamic simulation of high-speed trains based on the lattice-boltzmann methodt*, Science in China Series E-Tech Sci **51** (2008), 773–783.