SOBRE EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y SU RELACIÓN CON EL ÁREA DE ALGUNAS FIGURAS Y SU VISUALIZACIÓN USANDO CABRI II PLUS

Dídimo Vera Barrios
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Código: 01186881

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, D.C.
Junio del 2013

SOBRE EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y SU RELACIÓN CON EL ÁREA DE ALGUNAS FIGURAS Y SU VISUALIZACIÓN USANDO CABRI II PLUS

Dídimo Vera Barrios
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Código: 01186881

Trabajo de tesis para optar al título de
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director
Cesar Gómez S., Ph.D.
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, D.C.
Junio del 2013

Título en español

Sobre el estudio de la función cuadrática y su relación con el área de algunas figuras y su visualización usando Cabri II Plus.

Title in English

On study of cuadratic function and its relation with the area of some figures and the visualization by using Cabri II Plus.

Resumen: Se realiza una propuesta didáctica en donde se presentan algunas actividades dinámicas usando Cabri II Plus con el fin de relacionar algunos aspectos que tienen que ver con el área de algunas figuras y la función cuadrática.

Abstract: By using Cabri II Plus we give a didactica proposal with some activities presented with the aim to give a relation between the area of some figures and the cuadratic function.

Palabras clave: Cabri II Plus, función, función cuadrática, parábola, área.

Keywords: Cabri II Plus, function, cuadratic function, parabola, area.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis
Aprobado

"Mención Meritoria"

Jurado

Jurado

Director
Cesar Gómez S.

Bogotá, D.C., Junio de 2013

Dedicado a

A mis padres María y Dídimo,
quienes siempre han estado brindándome
su apoyo para continuar mi formación
profesional y personal.
Este nuevo objetivo cumplido
es muestra de la constancia,
responsabilidad y deseo de superación
que siempre me ha sido inculcado por ellos.

A mis amigos docentes con quienes he compartido
a lo largo de estos últimos años,
y de una u otra forma me incentivan
para continuar en esta formación y profesión.

Agradecimientos

A Dios por seguir recibiendo sus bendiciones a lo largo de mi vida, brindándome esta oportunidad de crecimiento.

A mi familia por su apoyo, dedicación, esfuerzo y comprensión durante el tiempo requerido.

Al profesor Cesar Gómez por su tiempo, colaboración, orientación y apoyo durante la realización de este trabajo.

A los docentes del Colegio Llano Oriental IED que me brindaron sus conocimientos, apoyo y ayuda en la realización de mis deberes durante este tiempo.

A mis amigos más cercanos por su compañía, apoyo y ayuda en el desarrollo de este trabajo, y ante todo por la certeza de poder seguir contando con ellos.

Bogotá, D.C., Junio 2013.

Dídimo Vera

Índice general

Índice general **I**

Índice de tablas **IV**

Índice de figuras **V**

Introducción **VII**

1. Aspectos históricos y epistemológicos **1**

1.1. Los Babilonios y los Egipcios 1

1.2. Los Griegos 5

1.3. Los Hindúes 7

1.4. En la Edad Media 9

1.5. Siglo XVI 10

1.6. Siglos XVII y XVIII 12

1.7. Siglo XIX 13

1.8. Siglo XX 14

2. Aspectos disciplinares y teóricos **16**

2.1. Conceptos preliminares 16

2.1.1. Puntos, rectas, rayos y segmentos 16

2.1.2. Ángulos 17

2.1.3. Triángulos 18

2.1.4. Cuadriláteros 19

2.1.5. Circunferencia y círculo 21

2.2. El plano cartesiano 21

2.2.1. Distancia entre dos puntos 22

2.2.2. Distancia de un punto a una recta 24

2.2.3. Punto medio 25

2.3. Gráfica de una ecuación en dos variables . . . 25
2.3.1. Interceptos con los ejes . . . 26
2.3.2. Simetría . . . 27
2.3.2.1. Simetría con respecto al eje Y . . . 27
2.3.2.2. Simetría con respecto al eje X . . . 28
2.3.2.3. Simetría con respecto al origen . . . 29
2.4. La parábola . . . 29
2.4.1. Ecuaciones de la parábola . . . 30
2.4.1.1. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje Y . . . 30
2.4.1.2. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje X . . . 31
2.4.1.3. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje Y . . . 32
2.4.1.4. Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje X . . . 32
2.5. La función cuadrática . . . 33
2.5.1. Función incompleta de la forma $y = ax^2$ . . . 34
2.5.2. Función incompleta de la forma $y = ax^2 + bx$ . . . 34
2.5.3. Función incompleta de la forma $y = ax^2 + c$ . . . 35
2.5.4. Función completa de la forma $y = ax^2 + bx + c$ . . . 36
2.6. Ceros de la función cuadrática . . . 36
2.7. Problemas relacionados con funciones cuadráticas . . . 37
2.7.1. Dado f y x hallar $f(x)$ . . . 37
2.7.2. Problemas de encontrar x conociendo f y $f(x)$ . . . 37
2.7.3. Problemas de encontrar una función cuya gráfica contenga los puntos dados . . . 38
2.7.4. Problemas de máximos y mínimos . . . 40
2.7.5. Problemas de inecuaciones cuadráticas . . . 42

3. Aspectos Didácticos 45

3.1. El pensamiento variacional . . . 46
3.2. Los sistemas de representación . . . 46
3.3. El pensamiento geométrico . . . 48
3.4. La geometría dinámica y las funciones . . . 50
3.5. Algunos obstáculos y errores en la enseñanza de funciones . . . 50
3.6. Estrategias de evaluación en matemáticas . . . 51
3.7. La integración de las Tics en matemáticas . . . 53

3.8. Acerca de Cabri II Plus 55
3.8.1. Qué es Cabri II Plus 55
3.8.2. Construcciones básicas 56
3.8.3. Aplicaciones en clase 57
3.8.4. Valoración didáctica 58
3.8.5. Metodología de uso 58

4. Propuesta de actividades **59**
4.1. Acerca de la propuesta 59
4.2. Medología de las actividades 61
4.3. Actividad No. 01 62
4.4. Actividad No. 02 67
4.5. Actividad No. 03 71
4.6. Actividad No. 04 76
4.7. Actividad No. 05 81
4.8. Actividad No. 06 86
4.9. Actividad No. 07 91

Conclusiones **97**

Trabajo futuro **98**

Bibliografía **99**

Anexos **102**

Índice de tablas

1.1. Valores recíprocos en sistema sexagesimal 2
1.2. Solución de: “Hallar el lado de un cuadrado si el área menos un lado es 14,30” . 3
1.3. Solución de: “La suma de dos lados de un rectángulo es 29, su producto es 3,30. Hallar las longitudes” 3
1.4. Valores de $n^3 + n^2$ 3
1.5. Ternas pitagóricas 4

2.1. Deducción de la ecuación de la parábola en ecuaciones cuadráticas 34
2.2. Deducción de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas 37
2.3. Aproximación a un punto máximo 40

3.1. Sistemas de representación 48

4.1. Sobre el pensamiento matemático y componentes del pensamiento matemático en grado 9. 59
4.2. Sobre las estrategias de evaluación. 60

Índice de figuras

1.1. $a(b+c+d)$ . . . 6
1.2. $(a+b)^2$ . . . 6
1.3. $(a+b)(a-b)$ . . . 6
1.4. Raíz cuadrada: $AB = 1$; $PB = \sqrt{BC}$ . . . 6
1.5. Método de exhausión en la parábola . . . 7
1.6. Solución geométrica de $x^2 + 10x = 39$ . . . 8
1.7. Solución geométrica de $x^2 + 21 = 10x$ . . . 9
1.8. Representación de Oresme . . . 9
1.9. Producto de segmentos . . . 11
1.10. Solución geométrica de $z^2 = az + b^2$ . . . 11
1.11. Representación de Fermat . . . 11
1.12. Método de Leibniz . . . 12

2.1. Triángulo . . . 18
2.2. Alturas en un triángulo . . . 18
2.3. Clasificación de triángulos por lados . . . 19
2.4. Clasificación de triángulos por ángulos . . . 19
2.5. Cuadrilátero . . . 20
2.6. Paralelogramo . . . 20
2.7. Rombo . . . 20
2.8. Rectángulo . . . 21
2.9. Cuadrado . . . 21
2.10. Trapecio . . . 21
2.11. Circunferencia . . . 21
2.12. Círculo . . . 21
2.13. Plano cartesiano . . . 22
2.14. Distancia entre dos puntos . . . 23
2.15. Distancia de un punto a una recta . . . 24

2.16. Coordenadas del punto medio 25
2.17. Interceptos con los ejes 26
2.18. Simetría por una recta 27
2.19. Simetría por un punto 27
2.20. Simetría por el eje Y 28
2.21. Simetría por el eje X 28
2.22. Simetría por el Origen 29
2.23. La parábola 30
2.24. Parábola de vértice $(0,0)$ y eje de simetría el eje Y 30
2.25. Parábola de vértice $(0,0)$ y eje de simetría el eje X 32
2.26. Parábola de vértice (h,k) y eje de simetría paralelo al eje Y 32
2.27. Parábola de vértice (h,k) y eje de simetría paralelo al eje X 33
2.28. Funciones de la forma $y = ax^2$ 34
2.29. Funciones de la forma $y = ax^2 + bx$ 35
2.30. Funciones de la forma $y = ax^2 + c$ 35
2.31. Funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ 36
2.32. Parábolas dados 3 puntos 40
2.33. Ejemplo de punto máximo 40
2.34. Máximo relativo 41
2.35. Mínimo relativo 41
2.36. Punto mínimo en $f(x) = x^2 - 4x + 5$ 41
2.37. Solución de $x^2 - 10x + 21 > 0$ 43
2.38. Gráfica de $x^2 - 10x + 21 > 0$ 43
2.39. Solución de $3x^2 - 10x + 2 \leq 0$ 44
2.40. Gráfica de $3x^2 - 10x + 2 \leq 0$ 44
2.41. Gráfica de $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$ 44
2.42. Gráfica de $-5x^2 + 7x - 6 > 0$ 44

3.1. Convergencia de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ a 2 48

Introducción

La siguiente propuesta está diseñada para estudiantes de grado noveno del Colegio Llano Oriental IED de la localidad de Bosa de estratos 1, 2 y 3 donde la falta de intensificación en conceptos algebraicos y geométricos ha sido preocupante en los últimos años. Precisamente los resultados de las pruebas *Saber* han dejado ver deficiencias muy grandes relacionados con este aspecto. Con la propuesta se espera contribuir a mejorar algunos procesos en la enseñanza de algunos tópicos tanto geométricos como algebraicos, en particular aquellos que están intimamente relacionados con funciones cudráticas.

El Colegio desea estimular y reforzar el pensamiento matemático de los estudiantes desde actividades recreativas como ajedrez y calendarios matemáticos. Como apoyo a dichas actividades es importante crear espacios para el uso de programas interactivos. Este trabajo aborda como herramienta didáctica el programa Cabri II Plus esperando que los estudiantes de noveno grado enriquezcan sus conocimientos en particular del concepto de función cuadrática desde el planteamiento y la solución de problemas geométricos teniendo como perspectiva actividades más dinámicas.

Si en la vida diaria percibimos los fenómenos como actividades variantes y las funciones como entes dinámicos, los estudiantes entenderían mejor los procesos y los resultados que les permitirían plantear y resolver problemas en el ámbito escolar: *"el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos a cambio, donde las funciones encontrarían una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos"* [1]. Además, con el avance científico y tecnológico se hace necesario actualizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas con el uso de tecnologías.

Así, el estudio de las funciones y en particular las cuadráticas son importantes para el desarrollo del pensamiento variacional considerando que estas *"cumplen un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas"* [2]. Por ello, es necesario involucrar actividades en el aula para el reconocimiento y relación entre las variables por medio de tablas y gráficas, a la vez que permitan la reversibilidad de extraer información de las gráficas para escribir las respectivas ecuaciones que permitirán predecir futuros valores. Investigaciones como la de Emma Castelnuovo (1981) muestran que un trabajo dinámico de la geometría puede acercar a los estudiantes al concepto de función, cuando se pone a variar alguno de sus elementos.

El siguiente trabajo está configurada en cuatro capítulos: En el capítulo 1, se presenta una revisión histórica del concepto de función desde sus interpretaciones mediante sistemas de representación (verbal, tabular, gráfica) como de su relación con las ecuaciones (expresiones algebraicas). En el capítulo 2, se retoman los principales conceptos geométricos y algebraicos para la construcción e interpretación de las parábolas en el plano cartesiano y de su asociación con las funciones cuadráticas. El capítulo 3 consiste en una revisión de elementos pedagógicos y didácticos relacionados con la construcción del concepto de función y de procedimientos de

tipo geométricos y algebraicos. Se enfatiza en la propuesta de Emma Castelnuovo [3]. En el capítulo 4 presentamos la propuesta didáctica.

CAPÍTULO 1

Aspectos históricos y epistemológicos

Los problemas y estudios en torno a la variación comienzan de forma retórica con los egipcios y los babilonios, donde sus tablas de cálculo servían para resolver problemas astronómicos o geométricos relacionados con la distribución de tierras o construcciones de altares. Posteriormente aparece el álgebra geométrica por los griegos donde se debe hallar longitudes o áreas que satisfagan condiciones dadas. Con Diofanto (siglo III a.C.) se empiezan a usar algunos símbolos especiales para representar objetos matemáticos siendo la proporcionalidad el modelo funcional más explorado y aplicado. Al-Khwarizmi (aprox. 780-850) escribió cuatro libros: dos de cálculo, uno de aritmética y otro de álgebra. Los términos algoritmo y álgebra son debido a este autor. En la Edad Media, Oresme (aprox. 1323-1382) utilizó representaciones geométricas para la dependencia entre las magnitudes. En la Edad Moderna se aprecia la simbología actual del álgebra y el surgimiento del cálculo con la intervención de nuevos elementos como el plano cartesiano, la velocidad instantánea, el área bajo las curvas entre otros.

A continuación, se da a conocer las interpretaciones históricas de la noción de función con los aportes geométricos y algebraicos más influyentes por las principales culturas.

1.1. Los Babilonios y los Egipcios

Las culturas babilónicas y egipcias representaban las relaciones entre magnitudes a través de arreglos numéricos en tablillas sin embargo, no se ha encontrado información explicita de las reglas para su formación.

Varios autores como Kline [4] y Boyer [5], afirman que los babilonios sumaban, restaban multiplicaban y dividían en un sistema de numeración sexagesimal carente de un símbolo para el cero, por lo que multiplicaban usando la propiedad distributiva y dividían multiplicando por el recíproco del divisor involucrando así el uso de fracciones y posteriormente las tablas de cálculo.

La Tabla 1.1 tomada de Sánchez [6], corresponde a ciertos valores y sus recíprocos. Puede notarse que el producto de los números con su recíproco siempre es 60 (sistema sexagesimal). Se puede ver que los recíprocos de 7 y 11 no están en la tabla, debido a que estos recíprocos son números "irregulares" y no se pueden determinar de forma sexagesimal, sólo en nuestro sistema decimal los recíprocos de 3, 6, 7 y 9 tienen escritura decimal infinita.

n	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{1}{n}$
2	30	8	7; 30
3	20	9	6; 40
4	15	10	6
5	12	12	5
6	10		

Tabla 1.1: Valores recíprocos en sistema sexagesimal

En Kline [4], encontramos que los babilonios también hicieron tablas de cuadrados, raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas. Las raíces cuadradas aparecen en cálculos de la diagonal d de un rectángulo de altura h y anchura w. Un problema pide hallar la diagonal de una puerta rectangular conociendo la altura y la anchura. La respuesta se da sin ninguna explicación y las cantidades son aproximadas al usar la fórmula para la diagonal d,

$$d \approx h + \frac{w^2}{2h}.$$

La fórmula es una buena aproximación de d para $h > w$. En este caso podemos ver que la expresión es razonable dado que

$$d = \sqrt{h^2 + w^2} = h\sqrt{1 + \frac{w^2}{h^2}} = h\left(1 + \frac{w^2}{h^2}\right).$$

En cuanto al desarrollo del álgebra, Boyer [5] menciona que los babilonios usaron expresiones equivalentes como $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$ para resolver ecuaciones cuadráticas cuyas incógnitas hacían referencia a longitudes, anchuras o áreas, además de algunas ecuaciones cúbicas que hacían referencia a volúmenes. De las tablillas babilónicas se encontró que los tipos de problemas geométricos que resolvían con ecuaciones cuadráticas eran:

(a) Dados el área x^2 y la diferencia del área con su lado $x^2 - x$ en un cuadrado, hallar las longitudes.

(b) Dados el área xy y la suma o diferencia de los lados $x \pm y$ en un rectángulo, hallar las longitudes.

(c) Dados la diagonal $\sqrt{x^2 + y^2}$ y la suma o diferencia de los lados $x \pm y$ en un rectángulo, hallar las longitudes.

(d) Dados un lado x y la suma o diferencia de la diagonal con el otro lado $\sqrt{x^2 + y^2} \pm y$ en un rectángulo, hallar las longitudes.

Un ejemplo de problema tipo (a) (descrito en [5] y solucionado en la Tabla 1.2) es: *"Hallar el lado de un cuadrado si el área menos un lado es 14,30"*.

De forma retórica	Simbólicamente
1) Se halla la mitad de 1.	$0;30$
2) Se halla el cuadrado de esa mitad.	$(0;30)^2 = 0;15$
3) Se suma el cuadrado con $14,30$.	$0;15 + 14,30 = 14,30;15$
4) Se halla la raíz cuadrada de la suma.	$\sqrt{14,30;15} = 29;30$
5) Se suma la mitad de 1 con la raíz cuadrada.	$0;30 + 29;30 = 30$
El lado del cuadrado es 30.	

Tabla 1.2: Solución de: "Hallar el lado de un cuadrado si el área menos un lado es 14,30"

Un ejemplo de problema tipo (b) (descrito en [7] y solucionado en la Tabla 1.3) es: *"La suma de dos lados de un rectángulo es 29, su producto es 3,30. Hallar las longitudes"*.

De forma retórica	Simbólicamente
1) Se halla la mitad de la suma.	$\frac{x+y}{2} = \frac{29}{2} = 14;30$
2) Se halla el cuadrado de esa mitad.	$(14;30)^2 = 3,30;15$
3) Como el cuadrado excede al producto inicial, se halla la diferencia.	$3,30;15 - 3,30 = 0;15$
4) Se halla la raíz cuadrada de la diferencia.	$\sqrt{0;15} = 0;30$
5) La raíz cuadrada se suma a la semisuma de los lados, para hallar el lado largo.	$14;30 + 0;30 = 15$
6) Y la raíz cuadrada se resta a la semisuma de los lados, para hallar el lado corto.	$14;30 - 0;30 = 14$
Los lados del rectángulo son 15 y 14.	

Tabla 1.3: Solución de: "La suma de dos lados de un rectángulo es 29, su producto es 3,30. Hallar las longitudes"

Ambas soluciones babilónicas son equivalentes a las fórmulas $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} + \frac{p}{2}$, $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \pm \frac{p}{2}$ respectivamente, muy similares a la fórmula actual para resolver ecuaciones cuadráticas.

La Tabla 1.4 corresponde a valores de $n^3 + n^2$ para valores enteros de n, quizá usada por los babilonios para resolver ecuaciones cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 = c$ que son reducidas al multiplicar la ecuación por $\frac{a^2}{b^3}$ a una ecuación cúbica de tipo estándar $\frac{ax}{b}^3 + \frac{ax}{b}^2 = \frac{ca^2}{b^3}$, donde la incógnita es de la forma $\frac{ax}{b}$.

n	n^3+n^2	n	n^3+n^2	n	n^3+n^2	n	n^3+n^2
1	2	7	392	13	2366	19	7220
2	12	8	576	14	2940	20	8400
3	36	9	810	15	3600	30	27900
4	80	10	1100	16	4352	40	65600
5	150	11	1452	17	5202	50	127500
6	252	12	1872	18	6156		

Tabla 1.4: Valores de $n^3 + n^2$

La Tabla 1.5 corresponde a ternas pitagóricas donde c representa la hipotenusa, a y b los dos catetos de un triángulo rectángulo:

a	b	c		a	b	c	
120	119	169	1	600	481	769	9
3456	3367	4825	2	6480	4961	8161	10
4800	4601	6649	3	60	45	75	11
13500	12709	18541	4	2400	1679	2929	12
72	65	97	5	240	161	289	13
360	319	481	6	2700	1771	3229	14
2700	2291	3541	7	90	56	106	15
960	799	1249	8				

Tabla 1.5: Ternas pitagóricas

Diversos hallazgos muestran que los babilonios calculaban el área de un cuadrilátero como el producto de la media aritmética del par de lados opuestos (siendo una aproximación) y el volumen de una pirámide truncada de base cuadrada con la fórmula $V = (\frac{a+b}{2})^2 h$ o una equivalente a $V = h(\frac{a+b}{2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{a-b}{2})^2$. También comparaban las áreas y el cuadrado del lado en polígono regulares de 3, 4, 5, 6, y 7 lados. Por ejemplo, la razón del área del pentágono con el cuadrado de su lado está dada por $\frac{5}{3}$, en un hexágono la razón es $\frac{21}{8}$ y en un heptágono la razón es $\frac{221}{60}$.

Varios investigadores (ver [8]), consideran que los babilonios poseían un verdadero instinto de funcionalidad, dado que en las tablillas de cálculo que construyeron está presente una relación general por la que asocian elementos de dos conjuntos. Sin embargo, existe una distancia muy grande entre "instinto de funcionalidad" y la noción de función.

En los papiros de Ahmes y Rhind del antiguo Egipto, se han encontrado algunas tablillas de cálculo referentes a las fracciones unitarias e información de problemas aritméticos y algebraicos de las formas $x + ax = b$ y $x + ax + bx = c$. Las únicas ecuaciones cuadráticas que resolvían eran de las formas $ax^2 = b$ e incluso algunas con dos incógnitas como $x^2 + y^2 = 100$ donde $y = \frac{3}{4}x$. De modo que al eliminar y, la ecuación se reduce al primer tipo en términos de x.

Los egipcios estaban familiarizados con el teorema de Pitágoras, y en el papiro de Ahmes se encuentran problemas relacionados con el cálculo de áreas de triángulos isósceles, que consistía en hallar la mitad de lo que llamamos base y multiplicarla por su altura. Ahmes justificó su método para encontrar el área al sugerir que los triángulos isósceles pueden ser considerados como dos triángulos rectángulos, y al cambiar uno de posición, los dos triángulos forman un rectángulo. Otros problemas les permitieron establecer que:

- Para hallar el área de un trapecio isósceles se procede de forma similar que para al triángulo isósceles, se construye un rectángulo.
- Para encontrar el área de cualquier cuadrilátero se toma el producto de la media aritmética de los lados opuestos.
- El área de un triángulo es la semi-suma de sus dos lados multiplicada por la mitad del tercer lado.

- El volumen de una pirámide truncada de base cuadrada es igual a $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

1.2. Los Griegos

En [8], Higueras expresa que: *"las ideas de cambio y de cantidad variable estaban presentes en el pensamiento griego, se consideraba al cambio y al movimiento como algo externo a la matemática. El considerar los entes matemáticos como algo estático llevó a los matemáticos de esa época a expresarse en términos de ecuaciones y proporciones más que en términos de variables."*

Para Higueras el significado geométrico que tenían los griegos sobre las magnitudes variables, solo permitía establecer en forma homogénea sus proporciones, comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas y volumenes con volumenes. *"Esta homogeneidad que conducía a comparar magnitudes de la misma naturaleza pudo ser un obstáculo al desarrollo de la noción de función puesto que impedía encontrar en forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, concepto fundamental en toda relación funcional."* [8]

La matemática de la antigua Grecia (ver [5]) inicia con un sistema de numeración en base 10, que inicialmente era de carácter multiplicativo y luego paso a ser aditivo. Los pitagóricos clasificaron los números (naturales) en amigos, primos, perfectos, abundantes, deficientes, figurados, piramidales, etc. Entre los números figurados encontramos los triangulares, que se originan por la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, los oblongos, pentagonales, los hexagonales cuyas fórmulas son $n(n+1)$, $\frac{n(3n-1)}{2}$ y $2n^2 - n$ respectivamente.

Pero, los pitagóricos fueron sorprendidos y perturbados por el descubrimiento de que algunas proporciones no pudieran ser expresadas por números naturales (ver [4] y [5]), por ejemplo, la relación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles y un cateto, o la relación de la diagonal y el lado de un cuadrado, llamando a este tipo de relaciones razones inconmensurables.

De la geometría griega aparecen los tres problemas clásicos: la construcción de un cuadrado igual en área a un círculo dado, la construcción de un cubo de el doble de volumen que un cubo dado y la trisección de un ángulo, los cuales debían ser resueltos sólo con regla y compás.

En [6], encontramos que para resolver estos problemas se usaron aproximaciones y otras curvas. Hipócrates de Quíos (aprox. 470-410 a.C.) encontró que si era posible cuadrar lúnulas debería ser posible cuadrar el círculo, la cuadratriz por Hipías de Elis (siglo V a.C.) fue la curva usada para trisecar el ángulo y posteriormente cuadrar el círculo. Con el descubrimiento y uso de las cónicas por Menecmo de Atenas (aprox. 380-320 a.C.) se logró la duplicación del cubo. Posteriormente, Arquímedes de Siracusa (aprox. 285-212 a.C.) realizó la cuadratura de la parábola y da solución a los tres problemas con el uso de la espiral que lleva su nombre.

Los griegos, con la teoría de proporciones relacionaron los problemas algebraicos con el uso de la geometría, estableciendo así soluciones visuales y de razonamiento deductivo.

Algunos aportes de los griegos al álgebra, expuestos en Boyer [5] son:

- Solución geométrica de ecuaciones lineales de la forma $ax = bc$, que básicamente era hallando la cuarta proporcional. Resolver $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.
- Construcciones geométricas de la ley distributiva $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, y de las identidades $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (ver figuras 1.1, 1.2 y 1.3)

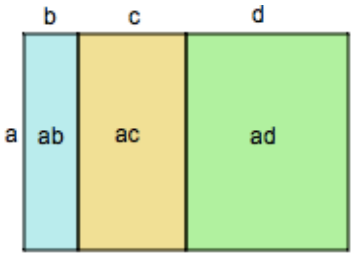


Figura 1.1: $a(b+c+d)$

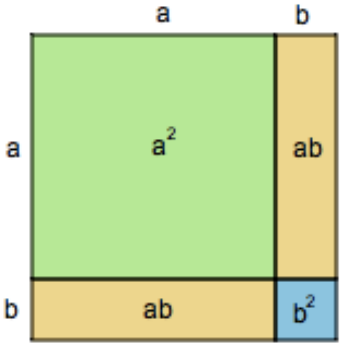


Figura 1.2: $(a+b)^2$

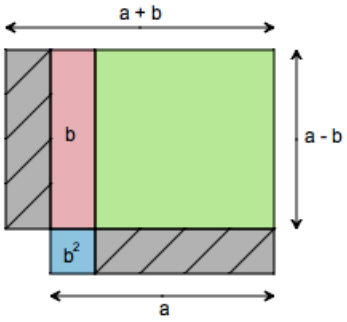


Figura 1.3: $(a+b)(a-b)$

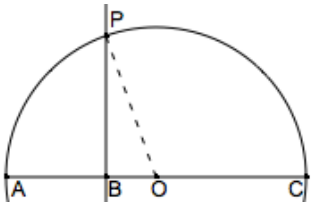


Figura 1.4: Raíz cuadrada: $AB = 1; PB = \sqrt{BC}$

- Solución con regla y compás de $ax - x^2 = b^2$ siempre que $a > 2b$.
- Construcción geométrica para hallar la raíz cuadrada (ver figura 1.4).

Para Boyer [5], los Elementos de Euclides (aprox. 325-265 a.C.) son 13 libros que recopilaron conocimientos matemáticos de aritmética (teoría de números), de geometría (puntos, líneas, planos, círculos y esferas) y de álgebra (no con la simbología moderna, sino un equivalente con figuras geométricas). Las principales construcciones de su álgebra geométrica las podemos encontrar en el libro II y VI.

Por otra parte, los Elementos fueron el primer texto de estudio, pero no el único. Después otros autores empezaron a publicar sus hallazgos siguiendo una estructura similar a la de los elementos (definiciones, axiomas y proposiciones). Otro autores de libros relacionados con el álgebra geométrica de ecuaciones cuadráticas o con el estudio de parábolas son:

- Arquímedes de Siracusa (aprox. 285-212 a.C.) y su obra De la cuadratura de la parábola: donde utiliza el método de exhausión para hacer la cuadratura de una parábola concluyendo que el área del segmento parabólico $APBQC$ es igual a $\frac{4}{3}$ del área del triángulo ABC que tiene misma base y altura (ver figura 1.5).

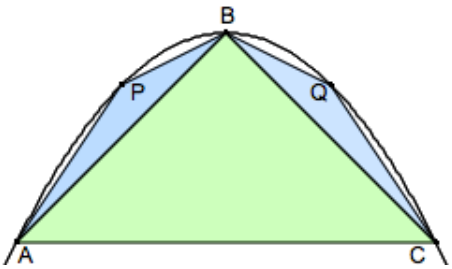


Figura 1.5: Método de exhausión en la parábola

- Apolonio de Perga (aprox. 262-190 a.C.) y su obra Tratado de las Cónicas: donde aparecen los nombres elipse (que significa una deficiencia y se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado u otra figura dada), hipérbola (que significa exceso) y parábola (que significa sin exceso ni deficiencia).

- Diofanto de Alejandría (aprox. 200-284) y su obra Aritmética: donde inicia el divorcio de los problemas con los métodos geométricos y el uso de símbolos especiales para representar algunas cantidades o incógnitas, por ejemplo, el cuadrado es Δ^γ, el cubo K^γ, la cuarta potencia $\Delta^\gamma\Delta$, la quinta potencia ΔK^γ y la sexta potencia $K^\gamma K$. Su álgebra era abstracta y no hacía referencia a media de dimensiones o unidades monetarias como en el caso del álgebra egipcia o mesopotámica, logrando dar soluciones más exactas a ecuaciones determinadas e indeterminadas, por ejemplo, encontrar dos números tales que uno añadido al cuadrado del otro de un cuadrado perfecto, o dividir un cuadrado dado en dos cuadrado.

1.3. Los Hindúes

Las matemáticas hindúes estaban más inspiradas en los trabajos con operaciones aritméticas básicas de números o en la solución de ecuaciones determinadas o indeterminadas (ver [5]). Los matemáticos hindúes más importantes son Aryabhata (476-c. 550), Brahmagupta (598-668) y Bhaskara (1114- c. 1185).

Según Kline [4], los hindúes reconocieron que las ecuaciones de segundo grado tienen dos raíces incluyendo las que son negativas y las que son irracionales. Las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$, con a, b, c positivos, tratadas por Diofanto de forma separada, fueron tratadas por los hindúes en un sólo caso $px^2 + qx + r = 0$, al considerar algunos coeficientes negativos. Ellos usaron el método de completar cuadrados, que no era nada nuevo para ellos. Sin embargo, por no reconocer las raíces cuadradas de números negativos, no pudieron resolver todas las ecuaciones cuadráticas.

Al-Khwarizmi escribió el libro Hisob al-jabr wa'l muqabalah, de donde se derivan las palabras algoritmo y álgebra para la versión europea. El álgebra de Al-Khwarizmi consta de seis cortos capítulos donde muestra seis tipos diferentes de ecuaciones cuadráticas compuestos de tres tipos de cantidades: raíces, cuadrados y números.

- Capítulo I: Cuadrados iguales a raíces. Por ejemplo, $x^2 = 5x$, $\frac{1}{3}x^2 = 4x$, $5x^2 = 10x$.

- Capítulo II: Cuadrados iguales a números.

- Capítulo III: Raíces iguales a números.

Donde las soluciones son un "recetario" de reglas para "completar el cuadrado" aplicadas a casos concretos.

- Capítulo IV: Cuadrados y raíces iguales a números. Son dados tres ejemplos, $x^2+10x = 39$, $2x^2+10x = 48$, $\frac{1}{2}x^2+5x = 28$.

- Capítulo V: Cuadrados y números iguales a raíces. Sólo es dado un ejemplo, $x^2+21 = 10x$.

- Capítulo VI: Raíces y números iguales a cuadrados. Sólo es usado un ejemplo, $3x+4 = x^2$.

Las demostraciones geométricas presentadas por Al-Khwarizmi comparten elementos con las matemáticas griegas clásicas. Para la ecuación $x^2 + 10x = 39$ Al-Khwarizmi dibujó un cuadrado ab, para representar x^2, y en los cuatro lados del cuadrado colocó los rectángulos c, d, e y f de $2\frac{1}{2}$ unidades de lado (fracción dada por $\frac{10}{4}$). Para completar el cuadrado mayor, se deben añadir cuatro pequeños cuadrados en las esquinas (ver Figura 1.6), cada uno con área de $6\frac{1}{4}$ unidades. Por lo tanto, para "completar el cuadrado" añadimos 4 veces $6\frac{1}{4}$ unidades, o 25 unidades, obteniendo así un cuadrado de área total de $39 + 25 = 64$ unidades. El lado del cuadrado grande por lo tanto debe ser de 8 unidades, de las cuales restamos 2 veces $2\frac{1}{2}$, o 5 unidades para encontrar que $x = 3$.

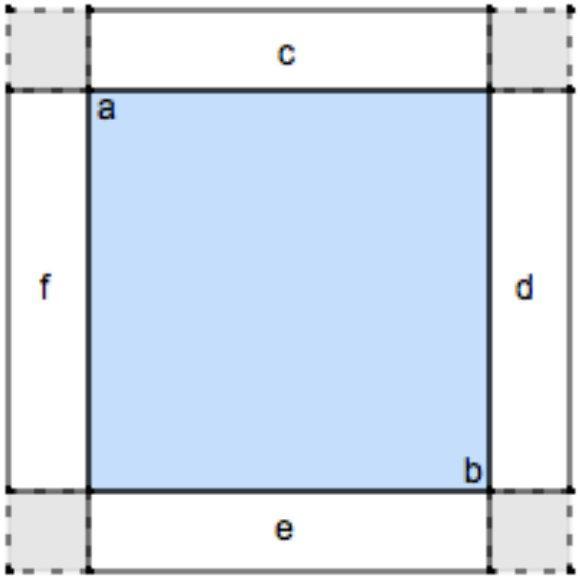


Figura 1.6: Solución geométrica de $x^2 + 10x = 39$

Para la ecuación $x^2+21 = 10x$ se dibuja el cuadrado ab para representar x^2 y el rectángulo bg para representar las 21 unidades. Entonces el rectángulo grande ad, que comprende el cuadrado ad y el rectángulo bg, debe tener un área igual a $10x$, de modo que el lado ag o hd debe ser de 10 unidades. Sobre la bisección de hd que es e se traza la perpendicular et a hd, y se prolongan te hasta c, así $tc = tg$, y se completan los cuadrados $tclg$ y $cmne$ (ver Figura 1.7). El área tb es igual al área md. Pero el cuadrado tl es 25, y el gnomon[1] $tenmlg$ es 21 (porque el gnomon es igual al rectángulo bg). Por lo tanto, el cuadrado nc es 4, y su lado ec es 2. Como $ec = be$ y $he = 5$, vemos que $x = hb = 5 - 2$ o 3.

[1]Para Herón de Alejandría el gnomon es una figura que añadida a otra, hace la figura entera semejante a aquella que ha sido añadida (tomado de Libro II Elementos de Euclides).

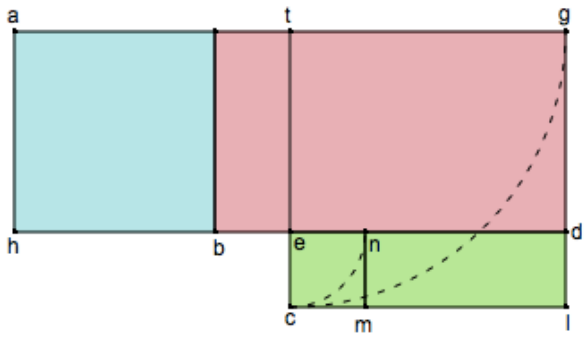


Figura 1.7: Solución geométrica de $x^2 + 21 = 10x$

1.4. En la Edad Media

El cambio más significativo del concepto de función ocurrido durante la Edad Media se dio por el acercamiento entre la matemática y las ciencias de la naturaleza. Para Higueras [8], los principales centros de desarrollo fueron las escuelas de Oxford y Paris. El principal representante de la escuela francesa fue Nicolás Oresme (c. 1323-1382), quien utilizó el grafismo para representar los cambios y así describirlos y compararlos.

Oresme proporcionó a la noción de forma y su variación, lo que él llama "la intensidad", apoyándose en la representación geométrica de las magnitudes y su variabilidad: *"Todo lo que varía, se sepa medir o no lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo"* [6].

Oresme se valió de segmentos para representar las intensidades de una cualidad de una determinada magnitud continua que depende de otra magnitud continua (ver [8]). Estas gráficas (ver Figura 1.8) representan las relaciones desde lo cualitativo más que desde lo cuantitativo, pues los gráficos se consideraban como modelos geométricos de las relaciones y no necesitaban representar fielmente dichas relaciones. Las gráficas consistían en trazar un segmento horizontal cuyos puntos representaban los sucesivos instantes y para cada instante trazó un segmento perpendicular cuya longitud representaba la velocidad en ese instante.

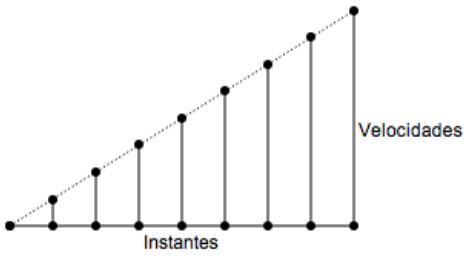


Figura 1.8: Representación de Oresme

Según Boyer [5], los términos "latitud" y "longitud" utilizados por Oresme son equivalentes a nuestros ejes de ordenadas y abscisas, y su representación gráfica es similar a nuestra geometría analítica. Su uso de coordenadas no era, por supuesto, algo nuevo, Apolonio y otros antecesores habían utilizado sistemas de coordenadas, pero la representación gráfica de Oresme de una cantidad variable fue lo innovador. Parece haber captado el principio esencial de que una función de lo variable puede ser representada como una curva, pero fue incapaz de hacer un uso eficaz de esta observación, excepto en el caso de la función lineal.

El significado histórico de estas ideas de Oresme, cuyo objetivo es el análisis de la relación entre magnitudes variables, residen en (ver [6]):

- La introducción de la medición de algunas magnitudes físicas mediante segmentos de recta.
- El reconocimiento de la importancia del estudio de las relaciones funcionales entre estas magnitudes.
- El estudio de estas relaciones mediante la representación gráfica y el uso de coordenadas.

Durante este período se distinguen dos direcciones fundamentales de desarrollo de la matemática: un perfeccionamiento del simbolismo algebraico y la formación de la trigonometría como una rama particular. Si bien no se produjeron grandes transformaciones científicas, estos adelantos favorecieron el desarrollo del concepto de función.

1.5. Siglo XVI

Uno de los científicos influido sin duda por estas ideas medievales fue Galileo Galilei (1564-1642), quien vio en ellas las bases de una nueva ciencia: la cinemática. Contrariamente al punto de vista estático, que fue casi exclusivo en el tratamiento de las curvas en Grecia, ahora se va a iniciar un nuevo punto de vista, el cinemático: se considerará una curva como la trayectoria de un punto móvil.

"Galileo sustituyó las vagas ideas con que especulaban lo filósofos medievales por conceptos susceptibles de medición, y para estas medidas podían encontrarse relaciones matemáticas. Este nuevo enfoque determinó un cambio metodológico radical: la expresión de los fenómenos de la naturaleza mediante relaciones matemáticas expresadas por fórmulas" [6].

Inspirados en el trabajo de Viète (1540-1603), Fermat (1601-1665) y Descartes (1596-1650) descubren el mundo de la representación analítica al conectar los problemas de dos ramas de la matemática: la Geometría y el Álgebra. La geometría analítica comienza a formarse como un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas.

Descartes comienza su obra La Geometría definiendo las operaciones algebraicas con segmentos de rectas. Mantiene las expresiones cuadrado y cubo para a^2 y a^3 pero, a diferencia de los antiguos que las interpretaban como área y volumen respectivamente, consideró que podían representar también segmentos de recta. Esta idea resultará crucial para el perfeccionamiento de la metodología algebraica, pues eliminará el requerimiento de la homogeneidad en las fórmulas.

Por el método de las proporciones Descartes multiplicó geométricamente dos segmento b y c, introduciendo un segmento a considerado como la *unidad de medida*. El producto x de la multiplicación de b y c será el segmento encontrado de aplicar la cuarta proporcional (ver Figura 1.9), luego x está dado por $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, de donde se tiene que $ax = bc$.

El libro I de La Geometría de Descartes incluye instrucciones detalladas sobre la solución de ecuaciones de segundo grado, no en el sentido algebraico de los antiguos babilonios, sino geométricamente, un poco a la manera de los antiguos griegos (ver [5]). Para resolver la ecuación $z^2 = az + b^2$, por ejemplo, Descartes procedió de la siguiente manera. Dibujó un segmento de línea LM de longitud b (ver Figura 1.10) y en L trazó un segmento NL igual a $\frac{a}{2}$ y perpendicular a LM. Con centro N construyó un círculo de radio $\frac{a}{2}$ y dibujó la recta

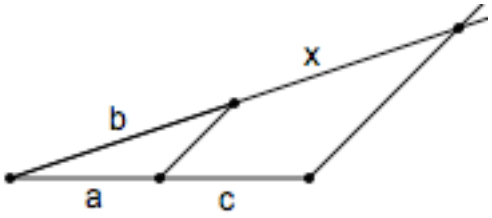


Figura 1.9: Producto de segmentos

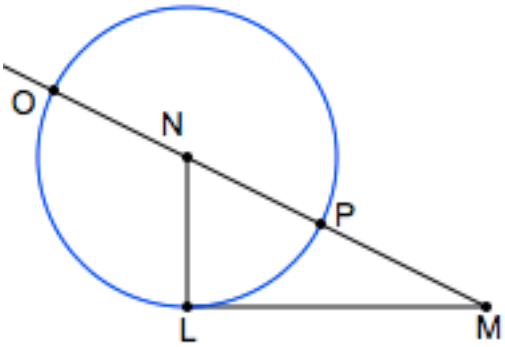


Figura 1.10: Solución geométrica de $z^2 = az + b^2$

que pasa por M y N que corta a la circunferencia en O y P. Entonces, $z = OM$ es la línea deseada. (Descartes ignoró la raíz PM de la ecuación, ya que es "falsa", es decir, negativa.) Construcciones similares se dan para $z^2 = az - b^2$ y para $z^2 + az = b^2$, las únicas otras ecuaciones cuadráticas con raíces positivas.

A lo largo de los libros I y III de La Geometría, Descartes se refirió principalmente a problemas geométricos en el que la ecuación algebraica final podía contener sólo una cantidad desconocida (ver [5]). Descartes era consciente de que el grado de la ecuación algebraica resultante era la que determinaba los significados geométricos para que una construcción geométrica requerida pudiera llevarse a cabo.

Fermat complementa las ideas de Descartes describiendo: *"Siempre que en una ecuación finalmente aparezcan dos cantidades incógnitas, tendremos un lugar geométrico al describir el extremo de una ellas una línea, recta o curva. [...] Cuando el punto final de la cantidad desconocida describe una línea recta o círculo, tenemos un lugar plano; cuando describe una parábola, hipérbola o elipse, entonces tenemos un lugar sólido; si aparece otra curva, entonces es un lugar lineal"* [6].

En Kline [4], vemos que Fermat consideraba una curva y un punto J sobre ella (ver Figura 1.11). La posición de J se fija por una longitud A, medida desde un punto O en la base de una línea a un punto Z, y la longitud E desde Z a J. Por lo tanto, Fermat utilizó lo que llamamos coordenadas oblicuas, aunque no aparecen de manera explícita son usados el eje y y coordenadas negativas. Sus A y E son nuestras x y y tradicionales hoy.

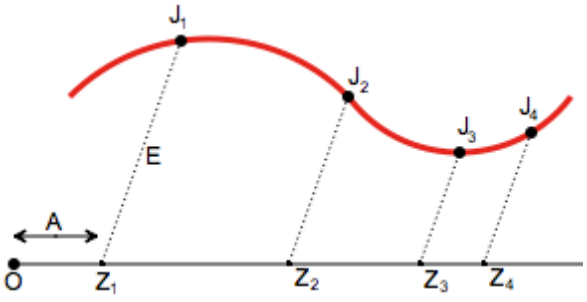


Figura 1.11: Representación de Fermat

Según Sánchez [6], Descartes y Fermat veían en los lugares geométricos un medio auxiliar para la resolución gráfica de ecuaciones. Pero mientras que el objetivo de Descartes era la resolución de problemas geométricos difíciles, Fermat estudió sistemáticamente los lugares geométricos sencillos. De forma semejante a los cursos actuales de geometría analítica, Fermat

comienza con el estudio de la ecuación lineal y muestra que representa una línea recta.

En esta época se sostiene por primera vez la idea de que una ecuación en "x" e "y" es un medio para introducir la dependencia entre dos cantidades variables. Sin embargo, la concepción de la función como curva, genera el segundo obstáculo en la evolución de la noción de función, cuando se asocia la gráfica con la trayectoria de puntos en movimiento y no con conjuntos de puntos que satisfacen condiciones en una relación funcional.

1.6. Siglos XVII y XVIII

En los siglos XVII y XVIII se pensaba que las únicas funciones dignas de estudio eran las que podían ser descritas por expresiones algebraicas para resolver problemas de la física (ver [8]). Permanecía la idea de asignar la variación a las *cantidades*. Aparece la idea de función no-continua.

El Cálculo de Isaac Newton (1643-1727) está íntimamente ligado a sus concepciones mecanicistas, basadas en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el concepto de *fluente* como cantidad que varía con el tiempo y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (ver [6]). Newton considera la trayectoria del punto móvil como una curva, susceptible de ser expresada por medio de un desarrollo en potencias de la variable independiente, como si fuera un polinomio de grado infinito, y esa suma infinita de potencias que la representa es también un instrumento de trabajo, una forma expedita de manejas las curvas.

Para Newton las ecuaciones son expresiones de cálculos aritméticos y correctamente no tienen lugar en Geometría. Por lo tanto, las secciones cónicas y todas las demás figuras deben ser expulsadas de la geometría plana, a excepción de la línea recta y el círculo. Por lo tanto, todas estas descripciones de las cónicas en el plano, son ajenas a la geometría.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) consideraba que la clave fundamental para entender su método de cálculo de diferenciales era la concepción de una curva como un polígono de infinitos lados, la longitud de los cuales era infinitamente pequeña. Supongamos que el polígono $ABCD$ aproxima la curva y tiene sus vértices sobre ella (ver Figura 1.12). Entonces dicho polígono da lugar a dos sucesiones de variables: las abscisas x_1, x_2, x_3 y las ordenadas y_1, y_2, y_3 de los vértices. Si escogemos el polígono de modo que las abscisas de sus vértices difieran en una unidad, entonces la suma de las ordenadas da una aproximación del área bajo la curva, es decir de su cuadratura. Por otra parte, la diferencia de las ordenadas sucesivas constituye una aproximación de la pendiente de la tangente en los correspondientes puntos de la curva.

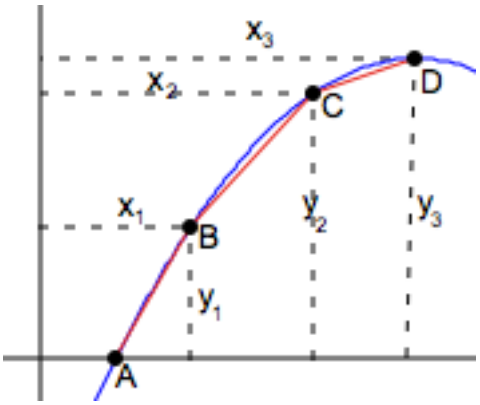


Figura 1.12: Método de Leibniz

En un manuscrito de 1673 Leibniz utiliza a palabra *función* para referirse a cualquier cantidad que varía punto a punto en una curva, por ejemplo, la longitud de la tangente, la normal, la subtangente, y la ordenada. En sí la curva estaba dada por una ecuación. Leibniz también introdujo las palabras *constante*, *variable* y *parámetro*, estos últimos utilizados en relación con una familia de curvas.

En un trabajo de Johann Bernoulli (1667-1748), aparece el concepto de función definido con un significado próximo al actual *"Se llama función de una magnitud variable a una cantidad, que se compone de cualquier forma de esta magnitud variable y de constantes"* [6].

El paso decisivo para considerar a las funciones no solo como herramientas de resolución de problemas, sino como un ente matemático digno de estudio por sí mismo, lo dio Leonhard Euler (1707-1783) en la primera parte del libro Introducción al Análisis de los Infinitos (1748): *"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes"* [6].

En el segundo tomo de su libro, hay algunas ideas de Euler sumamente interesantes, sobre la noción de curva y su relación con el concepto de función. Explica detalladamente como, dada una función, puede trazarse la curva correspondiente y señala que *"... cada función de x ... dará una línea recta o curva, cuya naturaleza dependerá de la función y"*. Más adelante se refiere al problema inverso: *"Como quiera que muchas líneas curvas se pueden describir mecánicamente por el movimiento continuo de un punto, que presenta ante los ojos a la curva en su totalidad, aquí las consideraremos principalmente como el resultado de funciones; esta manera de examinarlas es más analítica, más general y más propia del cálculo. Así una función cualquiera de x dará una cierta línea recta o curva; de donde sigue que recíprocamente se podrán describir las líneas curvas mediante las funciones"* [6]. Así que Euler hace corresponder una curva a cada función y las curvas las considera generadas por funciones.

La ecuación de Euler $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_n y^{(0)} = f(x)$ (donde los exponentes incluidos dentro de los paréntesis indican órdenes de diferenciación) se reduce fácilmente, por sustitución $x = e^t$, a una ecuación lineal con coeficientes constantes.

Lagrange (1736-1813) en las primeras páginas de su libro Teoría de las Funciones Analíticas (1797) comienza con la siguiente definición de función: *"Llamamos función a toda expresión matemática de una o varias cantidades en la cual éstas aparecen de cualquier manera, relacionadas o no con algunas otras cantidades que son consideradas como constantes, mientras las cantidades de la función pueden tomar todos los valores posibles" [6].*

La concepción de función como expresión analítica, se constituye en obstáculo para la evolución de la noción de función en relación con sus ideas de dependencia y variabilidad. Predominó el aspecto puramente formal más que el de relación entre variables; se entiende que una función es una combinación de operaciones dada por una expresión analítica.

1.7. Siglo XIX

En los últimos trabajos de Euler sobre "funciones arbitrarias" en el siglo XVIII aparece la noción de función como aplicación, continuando con los trabajos de Fourier sobre series trigonométricas y en el siglo XIX con los de Cauchy, Dedekind y otros sobre números reales.

En Sánchez [6], encontramos que Fourier (1768-1830) solo trató funciones con un número finito de discontinuidades en un intervalo finito, pero su obra revolucionó la convicción tradicional de que las funciones algebraicas y las trascendentes elementales eran el prototipo de funciones arbitrarias y solo ellas las auténticas del análisis matemático.

Al final de su obra, Memoria sobre la propagación del calor, Fourier expresa una definición

de función que se acerca a la concepción moderna del concepto: *"Ante todo debe notarse que la función $f(x)$ para la cual esta prueba se presenta, es enteramente arbitraria, y no está sujeta a una ley de continuidad .... En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores dados para las abscisas x .... No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden una a la otra de cualquier manera, y cada una de ellas está dada como si fuera una sola igualdad"* [6].

Cauchy (1789-1857) da en su curso de análisis (1821) una definición general de función: *"Cuando las cantidades variables están relacionadas entre sí, de modo que, dado el valor de una de éstas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se concibe a estas cantidades diversas expresadas por medio de una entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de una variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esta variable"* [6].

Dirichlet (1805-1859) poseía una noción muy amplia de función: *"Designemos por a y b dos valores fijos y por x una magnitud variable, situada entre a y b. Si a todo x corresponde un valor finito $y = f(x)$ que varía de manera continua cuando x varía también de manera continua de a a b, diremos que y es una función continua para este intervalo. Aquí no es en absoluto necesario que y se exprese en función de x según una misma ley sobre todo el intervalo; no es necesario incluso que se posea una expresión algebraica explicita entre x e y"* [6].

Esta definición de función por Dirichlet será modificada por Hankel (1839-1873) en un ensayo histórico sobre el tema publicado en 1870. La definición que Hankel atribuye a Dirichlet es la siguiente: *"Se dice que y es función de x si a cada valor de x de un cierto intervalo corresponde un valor bien definido de y, pero sin que esto exija que y sea definida sobre todo el intervalo por la misma ley de función de x, ni tampoco que y sea definida por una expresión matemática explicita de x"* [6].

Con el surgimiento de la teoría de conjuntos en la década de los 70 del siglo XIX se abrió la posibilidad de expresar la relación funcional entre dos conjuntos abstractos no necesariamente numéricos. La primera formulación clara de tal noción abstracta de función fue dada, aparentemente, por Dedekind (1831-1916) en 1887 en una breve monografía titulada "¿Qué son y para qué sirven los números?" Dedekind llama sistema a lo que hoy llamamos conjuntos, a la función la denomina representación y precisa: *"Por una representación ϕ de un sistema dado entendemos a una ley, de acuerdo a la cual a cada elementos determinado s del sistema se le asocia un determinado objeto que se denomina imagen de s y se denota por el símbolo $\phi(s)$; es posible decir que $\phi(s)$ corresponde al elemento s, o que s es transformado en $\phi(s)$ por la representación ϕ"* [6].

El término función se corresponde con la expresión $f(x)$, y más tarde se representará como $f : X \to Y$, o $x \to f(x)$. Continúa el uso de los ejes cartesianos y aparece una nueva representación: los diagramas de Venn.

1.8. Siglo XX

En 1911 Peano (1858-1932) en una nota Sobre la definición de función aparecida en las actas de la Academia Nacional de Ciencia Italiana, da una nueva definición donde la noción primitiva indefinida es la de conjunto.

Para llegar a la definición abstracta de función, Peano define primero el producto cartesiano de conjuntos: $X \times Y = [(x, y) : x \in X, y \in Y]$; después el de relación como un subconjunto determinado del producto cartesiano $R \subset X \times Y$ y entonces el de función como una relación especial: *"Si dos pares ordenados (x, y) y (x, z) con el mismo primer elemento están en la*

relación funcional f entonces necesariamente $y = z$" [6].

Esta definición abstracta se repite en varios textos y en particular en el primer fascículo de los Elementos de matemática que publica el grupo Bourbaki en 1939: *"Sean X y Y dos conjuntos, diferentes o no. Una relación entre una variable x de E y una variable y de F se dice relación funcional de E hacia F, si, cualquiera que sea x de E, existe un elemento y de F, y uno solo, que esté en la relación considerada con x. Se da el nombre de función a la operación que asocia así a todo elemento x de E el elemento y de F que se encuentra en la relación dada con x; se dice que y es el valor de la función para el elemento x, y que la función está determinada por la relación funcional considerada"* [6].

Las representaciones utilizadas en esta época son las de la teoría conjuntista y se concibe que: *"Una relación funcional está formada por pares de elementos así como un conjunto está formado por elementos individuales. En esta descripción clara, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a las cantidades que fluyen engendrando magnitudes variables, ni la menor referencia a puntos moviéndose sobre curvas, ni aparece la vieja y sugestiva idea de variabilidad"* [8].

Esta concepción de función es considerada como un obstáculo ya que, con la intención de lograr precisión y rigor matemático, se pone de relieve una concepción estática. Se oculta el carácter dinámico de la asignación entre variables. Higueras [8], manifiesta que la constante evolución hacia definiciones cada vez más abstractas evidencia una transformación progresiva de esta noción, tanto en la forma (diferentes definiciones) como en el fondo (los conceptos y elementos que modeliza).

CAPÍTULO 2

Aspectos disciplinares y teóricos

El estudio de las ecuaciones y de las funciones como lugares geométricos permitirá el reconocimiento de los interceptos y de la simetría con los ejes coordenados, como herramientas analíticas y gráficas para la construcción del concepto de función cuadrática en contextos continuos.

Desde las diferentes formas de la parábola se puede clasificar la función cuadrática en las formas completa o incompleta dependiendo de su ecuación y de su respectiva gráfica en el plano cartesiano por ello, el razonamiento visual es un elemento clave en cualquier proceso geométrico para el aprendizaje de función centrado en la descripción del comportamiento de la curva asociada al plano cartesiano.

A continuación, se darán a conocer algunas definiciones y conceptos preliminares de geoemtría plana para el desarrollo de la propuesta y para las posteriores nociones de geometría analítica que se ven involucradas en el trabajo como: el plano cartesiano, la distancia entre dos puntos, la distancia de un punto a una recta y la gráfica de ciertas ecuaciones que representan lugares geométricos. En particular, se aborda el estudio de la parábola y su relación con las funciones cuadráticas. El capítulo finaliza con ejemplos de problemas asociados a las funciones cuadráticas.

2.1. Conceptos preliminares

Las siguientes nociones y definiciones son tomadas de Acevedo y otros [9] donde se presentan más detallamente y con las respectivas demostraciones para su comprensión.

2.1.1. Puntos, rectas, rayos y segmentos

Desde objetos físicos se pueden construir las nociones intuitivas de punto, recta, plano y sus posibles descripciones, dado que *"El punto, la recta, el plano son términos indefinidos"* [9].

En la geometría plana o euclidiana se plantean los siguientes postulados que hacer más clara la descripción de punto, recta y plano:

- Dos puntos determinan una recta.
- Una recta contiene infinitos puntos.

- Dada una recta en un plano, existe por lo menos un punto en el plano que no está en la recta.
- Dos rectas diferentes se intersectan a lo más en un punto.
- Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.
- Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está contenida en el mismo plano.
- Tres puntos cualesquiera están al menos en un mismo plano y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un mismo plano.

Los términos de punto, recta y plano son usados en los siguientes elementos geométricos:

- Figura: Es un conjunto de puntos. Pueden estar en un mismo plano (llamadas bidimensionales) o en tres dimensiones (tridimensionales).
- Puntos colineales: Son aquellos puntos que están sobre la misma recta.
- Rectas paralelas: Dos rectas en un mismo plano son paralelas s si no tienen puntos en común.
- Distancia: A cada par de puntos diferentes le corresponde un único número positivo.
- Segmento: Es el conjunto formado por dos puntos extremos y todos los puntos ubicados entre ellos.
- Rayo: Es el conjunto de todos los puntos sobre una línea recta que se localizan hacia uno de los sentidos de un determinado punto llamado origen.

2.1.2. Ángulos

"Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo punto inicial. Los dos rayos se llaman los lados opuestos del ángulo y el extremo común se llama vértice" [9].

La medida de un ángulo indica la abertura del interior del ángulo y su unidad de medida inicial es el grado.

En geometría se suele considerar los ángulos que estén entre 0 y 180 grados. De acuerdo a su medida se pueden clasificar en:

- Ángulo agudo: Si la medida del ángulo es mayor a 0 grados y menor a 90 grados.
- Ángulo recto: Si la medida del ángulo es igual a 90 grados.
- Ángulo obtuso: Si la medida del ángulo es mayor a 90 grados y menor a 180 grados.
- Ángulo llano: Si la medida del ángulo es igual a 180 grados.

2.1.3. Triángulos

"Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no colineales, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama un triángulo y se simboliza ΔABD. Los puntos A, B y C se llaman vértices y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman lados. Los ángulos del triángulo son $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$" [9] (Ver figura 2.1).

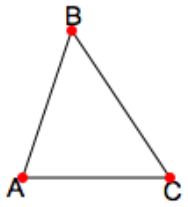


Figura 2.1: Triángulo

Tomando como base la figura 2.1, en todo triángulo se cumple:

- La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180 grados.

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^{o}.$$

- La suma de las medidas de dos lados es mayor que la medida del tercer lado.

$$AB + AC > BC.$$

$$AB + BC > AC.$$

$$AC + BC > AB.$$

- A mayor ángulo se opone mayor lado y recíprocamente a mayor lado se opone mayor ángulo.
- El perímetro P corresponde a la suma de las medidas de sus lados.

$$P = AB + AC + BC.$$

- Una altura es un segmento perpendicular de un vértice a la recta que contiene el lado opuesto. En la figura 2.2 se presentan las tres alturas de un triángulo:

$$h_1 = \overline{AH} \qquad h_2 = \overline{BI} \qquad h_3 = \overline{CJ}$$

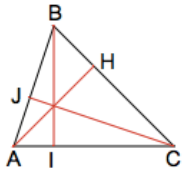


Figura 2.2: Alturas en un triángulo

- El área[1] A es la mitad del producto de la longitud de un lado (llamado base) por la longitud de la altura a ese lado. Es decir, $A = \frac{1}{2}b \cdot h$. En la figura 2.2 tenemos:

$$A = \frac{1}{2}AC \cdot BI$$

De acuerdo a la medida de sus lados un triángulo puede clasificarse en (ver figura 2.3):

- Equilátero: Es aquel que tiene sus tres lados congruentes[2].
- Isósceles: Es aquel que tiene al menos dos de sus lados congruentes.

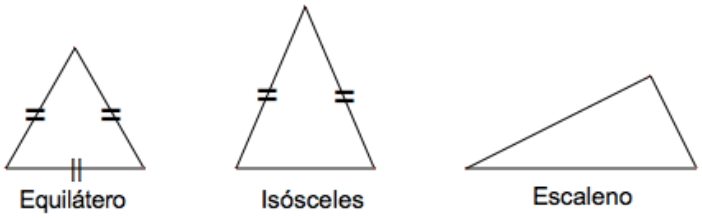


Figura 2.3: Clasificación de triángulos por lados

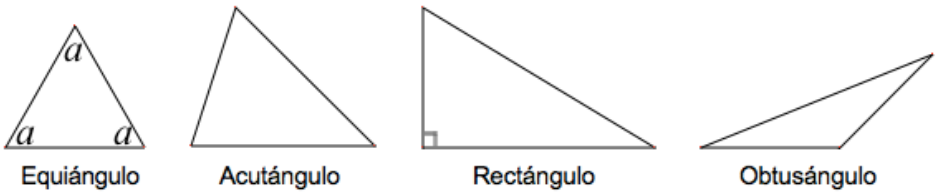


Figura 2.4: Clasificación de triángulos por ángulos

- Escaleno: Es aquel que no tiene un par de lados congruentes.

De acuerdo a la medida de sus ángulos un triángulo puede clasificarse en (ver figura 2.4):

- Equiángulo: Es aquel que tiene sus tres ángulos congruentes.
- Acutángulo: Es aquel que tiene sus tres ángulos agudos.
- Rectángulo: Es aquel que tiene un ángulo recto.
- Obtusángulo: Es aquel que tiene un ángulo obtuso.

2.1.4. Cuadriláteros

Un cuadrilátero es la unión de cuatro segmentos en un mismo plano tales que cada segmento intersecta exactamente a otros dos, a cada uno de ellos en uno de sus puntos extremos.

"Los segmentos con los que se determina un cuadrilátero son sus lados, los puntos extremos de los lados son los vértices del cuadrilátero" [9].

En todo cuadrilátero se cumple:

- La suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es 360 grados. En la figura 2.5:
$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^{o}$$
- Una diagonal D es un segmento que conecta vértices no adyacentes, es decir, vértices no consecutivos. En el cuadrilátero de la figura 2.5 hay dos diagonales:
$$D_1 = \overline{AC} \qquad y \qquad D_2 = \overline{BD}$$
- El perímetro es la suma de las longitudes de sus lados. En la figura 2.5:
$$P = AB + BC + CD + DA$$

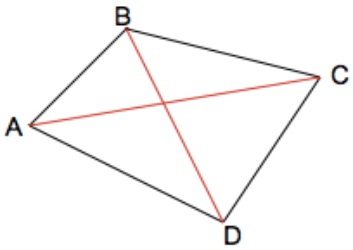


Figura 2.5: Cuadrilátero

Un cuadrilátero puede clasificarse en:

- Paralelogramo: Tienen sus pares de lados opuestos paralelos. Su área es el producto de la longitud de un lado (llamado base) por la longitud de la altura a ese lado. Es decir, $A = b \cdot h$. En la figura 2.6:
$$A = AD \cdot BH.$$

- Rombo: Tiene sus cuatro lados congruentes. Su área es la mitad del producto de la longitud de sus dos diagonales. Es decir, $A = \frac{1}{2}D \cdot d$. En la figura 2.7:
$$A = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

- Rectángulo: Tiene sus cuatro ángulos rectos. Su área es el producto de la longitud de un lado (llamado base) por la longitud de la altura a ese lado. Es decir, $A = b \cdot h$. En la figura 2.8:
$$A = AD \cdot AB.$$

- Cuadrado: Tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos rectos. Su área es el cuadadrado de la longitud de su lado. En la figura 2.9:
$$A = AD \cdot AD = (AD)^2.$$

- Trapecio: Al menos un par de lados son paralelos. Su área es la mitad del producto entre la suma de la longitud de los dos lados paralelos (llamados bases) por la longitud de su altura. En la figura 2.10:
$$A = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

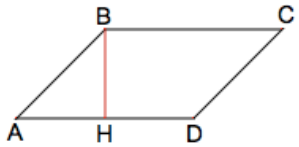


Figura 2.6: Paralelogramo

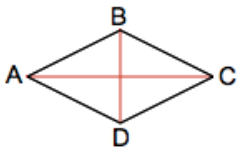


Figura 2.7: Rombo

[1] *"El área se puede interpretar como la medida del espacio ocupado por una región bidimensional. Usualmente, la unidad de medida es un cuadrado cuyo lado es una unidad lineal y por eso se afirma que el área está medida en las mismas unidades cuadradas" [9].*

[2] *"Se dice que los segmentos son congruentes si tienen la misma medida" [9].*

Figura 2.8: Rectángulo

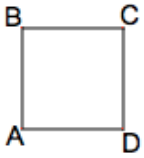


Figura 2.9: Cuadrado

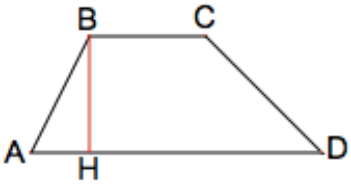


Figura 2.10: Trapecio

2.1.5. Circunferencia y círculo

"Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que se encuentran a una distancia fija, su radio, desde un cierto punto, su centro".

En la figura 2.11 la circunferencia con centro en O y radio r es el conjunto de todos los puntos en el plano con $PO = r$.

El radio es pues la distancia del centro a un punto de la circunferencia y el diámetro es la longitud del segmento que une dos puntos sobre la circunferencia y contiene al centro, la longitud de este segmento es entonces el doble del radio $(2r)$.

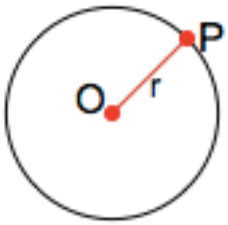


Figura 2.11: Circunferencia

"El círculo es la superficie plana limitada por la circunferencia. Incluye los puntos que están sobre la circunferencia y los puntos que están en el interior, es decir todos los puntos cuya distancia al centro es menor o igual que el radio r" [9].

En la figura 2.12 aparece sombreado el interior de la circunferencia.

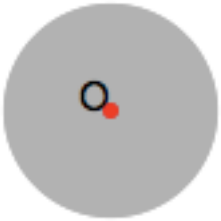


Figura 2.12: Círculo

En toda circunferencia se cumple que:

- El perímetro o longitud C de una circunferencia de radio r o diámetro $d = 2r$, es $C = \pi \cdot d$ o $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.
- El área A de un círculo de radio r es $A = \pi \cdot r^2$.

2.2. El plano cartesiano

El sistema de representación más usado para graficar funciones es el *sistema coordenado rectangular* o *plano cartesiano* introducido por Descartes en el siglo XVI, y cuya noción inicia con la correspondencia biunívoca de los números reales con puntos de una recta.

En libros de álgebra y de geometría analítica como el de Lehmann [10], encontramos que geométricamente se representa el conjunto de los números reales mediante los puntos de una recta horizontal llamada *recta real*. Para ello, se escoge un punto de la recta que representará el número 0 y otro punto a la derecha de este para representar al número 1. La longitud del segmento determinado por los puntos marcados 0 y 1 se selecciona como unidad de distancia. Utilizando esta unidad de distancia se representan los números enteros positivos a la derecha del 0 y los números enteros negativos a la izquierda del 0.

Para representar los números racionales positivos $\frac{p}{q}$ se divide la unidad de distancia en q partes iguales y se le asigna el punto determinado por p de estas partes a la derecha. Para representar los números racionales negativos $-\frac{p}{q}$ se divide la unidad de distancia en q partes iguales y se le asigna el punto determinado por p de estas partes a la izquierda.

Sin embargo, es imposible indicar de que forma se puede representar cualquier número irracional sobre la recta, pero se acepta como un axioma que *"a cada número real le corresponde exactamente un punto sobre la recta y que recíprocamente, cada punto de la recta corresponde a exactamente un número real. Una correspondencia como esta se llama un sistema de coordenadas"* [9].

Si consideramos ahora un sistema coordenado en el cual un punto puede moverse en todas direcciones manteniéndose siempre en un plano, observamos que *"a una pareja ordenada* (a, b) *de números reales se hace corresponder un punto del plano y a cada punto del plano, una pareja ordenada, de manera que se establece un: sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas en un plano"* [9].

Este sistema de coordenadas rectangulares consta de dos rectas reales llamadas *ejes de coordenadas*, que son perpendiculares entre sí (una horizontal y una vertical). Su punto de corte, llamado *origen del sistema*, se denota por O. La recta horizontal es el *eje* X, eje de las x o abscisas y la recta vertical es el *eje* Y, eje de las y u ordenadas.

Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*, usualmente numerados como se indica en la figura 2.13. La dirección positiva del eje X es hacia la derecha y la dirección positiva del eje Y es hacia arriba.

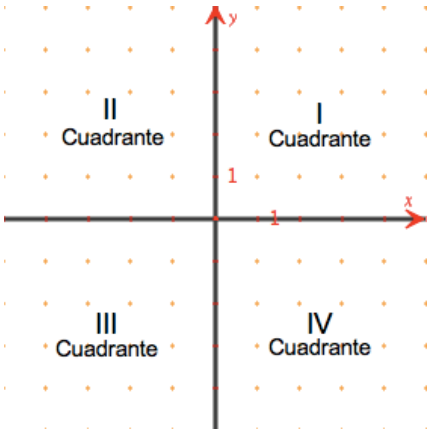


Figura 2.13: Plano cartesiano

Dado un punto P del plano, una recta perpendicular al eje X que pase por P corta el eje X en un punto de coordenada a y una una recta perpendicular al eje Y que pase por P corta el eje Y en un punto de coordenada b. Al punto P se le asocia la pareja ordenada (a, b). a es llamada abscisa de P y b la ordenada. Se dice que P tiene coordenadas (a, b) y se escribe $P(a, b)$.

2.2.1. Distancia entre dos puntos

"En un sistema de coordenadas rectángulares, se puede hallar la distancia entre dos puntos usando el Teorema de Pitágoras, enunciado de la siguiente forma: En cualquier triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa" [9].

Consideremos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia entre ellos es la hipotenusa

del triángulo rectángulo cuyos vértices están en los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_2, y_1)$. El vértice R corresponde al ángulo recto.

En la figura 2.14 se muestra el triángulo rectángulo y sus copias congruentes.

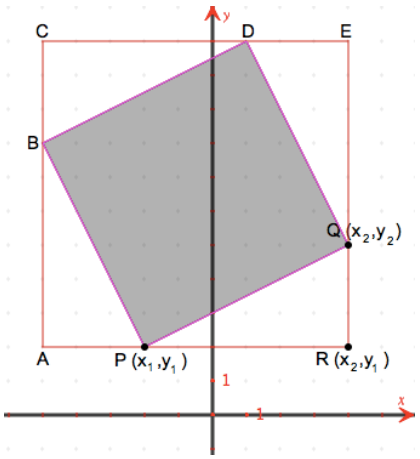


Figura 2.14: Distancia entre dos puntos

El cuadrilátero exterior $ACER$ es un cuadrado porque cada uno de los lados tiene longitud $[(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)]$ y tiene cuatro ángulos rectos. El cuadrilátero sombreado también es un cuadrado porque cada lado tiene longitud $\overline{PQ}$ y cada uno de sus ángulos es recto. Como los cuatro triángulos son congruentes, por lo tanto sus áreas son iguales.

Entonces, el área del cuadrado sombreado es

$$\text{Área}(\square PQDB) = \text{Área}(\square ACER) - 4\text{Área}(\triangle PQR)$$

Como $AR = (x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)$ se tiene que

$$(PQ)^2 = [(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)]^2 - 4\left(\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\right)$$

Solucionando y simpificando se tiene que

$$(PQ)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$(PQ)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Luego, la distancia entre P y Q es entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

pero, al tratarse de cuadrados de números reales, se tiene que

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad \text{y} \quad (y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$$

así que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

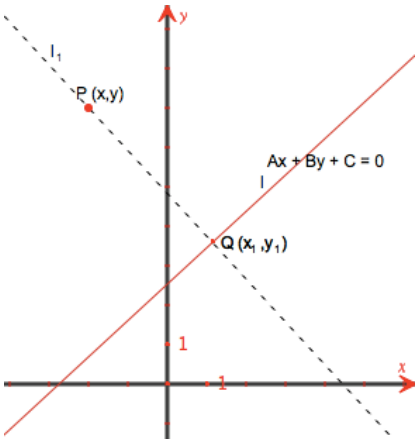


Figura 2.15: Distancia de un punto a una recta

2.2.2. Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P(x, y)$ a una recta l es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto [10].

Consideremos una recta l, cuya ecuación asociada es de la forma $Ax_1 + By_1 + C = 0$ y un punto $P(x, y)$ fuera de ella, por el que trazamos una recta l_1 perpendicular a l (ver figura 2.15).

Despejando la pendiente en la recta l, se tiene que es igual a $m = -\frac{A}{B}$, y la pendiente para la recta l_1 será $m_1 = \frac{B}{A}$ [3]

Por la forma *punto pendiente* se tiene que la recta l_1 está dada por $(y_1 - y) = \frac{B}{A}(x_1 - x)$ y simplificando se obtiene que la ecuación de la recta l_1 es de la forma $-Bx_1+Ay_1+Bx-Ay = 0$.

Como el punto $Q(x_1, y_1)$ corresponde a la intersección de las rectas l y l_1, se pueden calcular sus coordenadas al resolver el sistema

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ -Bx_1 + Ay_1 + Bx - Ay = 0 \end{cases}$$

Solucionando y simplificando por un método algebraico se obtiene que

$$x_1 = \frac{B^2x-ABy-AC}{A^2+B^2} \quad \text{y} \quad y_1 = \frac{A^2y-ABx-BC}{A^2+B^2}$$

Luego, la distancia entre los puntos P y Q es igual a

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

donde reemplazando x_1 y y_1 para este caso se tiene que

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{B^2x - ABy - AC}{A^2 + B^2} - x\right)^2 + \left(\frac{A^2y - ABx - BC}{A^2 + B^2} - y\right)^2}.$$

Solucionando y simplificando obtenemos

$$d(P, Q) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

[3] Recordemos que *"Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$"* [9].

2.2.3. Punto medio

Las coordenadas (x_M, y_M) del punto medio M entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se obtiene por semejanza de triángulos rectángulos (ver figura 2.16)

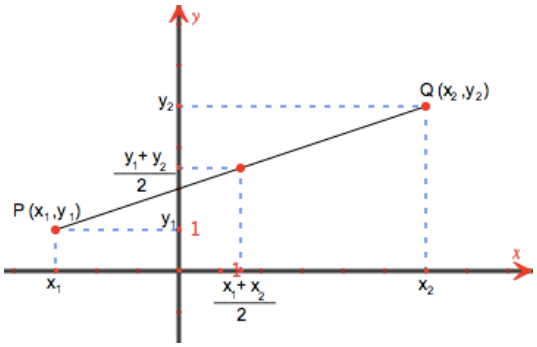


Figura 2.16: Coordenadas del punto medio

En el triángulo rectángulo PQR, donde $x_2 > x_1$, se tiene que la base es igual a $x_2 - x_1$. Al trazar una perpendicular al eje X por el punto M, esta corta al eje X en el punto A y a la base en el punto A', luego los triángulos PQR y PMA' son semejantes por congruencia de ángulos.

Por consiguiente, las razones entre sus lados son proporcionales

$$\frac{|\overline{PM}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{PA'}|}{|\overline{PR}|}$$

pero, como M es el punto medio se tiene que $d(P, M) = \frac{d(P,Q)}{2}$, y $d(P, A') = \frac{d(P,R)}{2}$. Luego, $d(P, A') = \frac{x_2 - x_1}{2}$.

Para conseguir la coordenada x_M del punto medio M, se debe sumar a la coordenada x_1 la distancia de $d(P, A')$, es decir

$$x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De forma análoga se obtiene que la coordenada y_M del punto medio M está dada por

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

En consecuencia, *"el punto medio entre P y Q es el punto de coordenadas* $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

2.3. Gráfica de una ecuación en dos variables

En Lehmann [10], encontramos que una ecuación de dos variables, x e y, se puede escribir en la forma $f(x, y) = 0$, donde hay un número infinito de pares de valores de x e y que satisfacen esta ecuación. Cada uno de esos pares de valores reales se toma como las coordenadas (x, y) de un punto en el plano. En las gráficas se debe tener en cuenta que:

- Se llama *gráfica de la ecuación* $f(x, y) = 0$ o su *lugar geométrico* al conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfagan una ecuación dada.

- Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, pertenece a la gráfica de la ecuación.

Generalmente, en álgebra se estudia el trazado de gráficas dando diversos valores a x y calculando los valores correspondientes de y en una ecuación dada. Cada par de valores correspondientes tomado como las coordenadas de un punto nos permite trazar varios puntos. El procedimiento consiste en trazar un cierto número de puntos y dibujar una línea continua que pase por todos ellos.

Pero, al hacer esto, se supone que la gráfica entre dos puntos sucesivos cualesquiera tiene la forma de la curva continua que se dibuja uniendo los puntos, lo que no es verdadero para las gráficas de todas las ecuaciones. Por tanto, bajo este supuesto, podemos introducir muchos errores en el trazado de la gráfica entre dos de sus puntos.

Para evitar errores de este tipo, se debe hacer una investigación preliminar de la ecuación para ciertas características antes de proceder al trazado de la curva como son los interceptos con los ejes x e y y la simetría.

2.3.1. Interceptos con los ejes

Se llama intercepción de una curva con el eje X a la abscisa del punto de intersección de la curva con el eje. Análogamente, la intercepción con el eje Y es la ordenada del punto de intersección de la curva con dicho eje (ver figura 2.17).

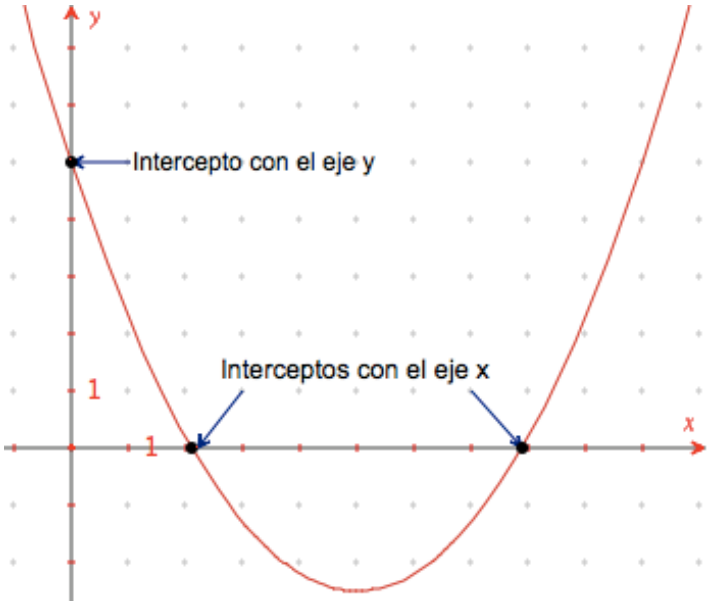


Figura 2.17: Interceptos con los ejes

El método para obtener las intercepciones es evidente a partir de la definición. Como la intercepción con el eje X es la abscisa de un punto que está sobre el eje de las X, la ordenada de ese punto es cero. Por tanto, haciendo $y = 0$ en la ecuación de la curva, las soluciones reales de la ecuación resultante en x nos darán las intercepciones con el eje de las X. Análogamente, haciendo en la ecuación $x = 0$, las soluciones reales de la ecuación resultante en y nos darán las intercepciones con el eje Y.

Para ese caso se describirá la relación de la parábola con las ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

2.3.2. Simetría

- Se dice que los puntos son simétricos con respecto a una recta si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio. La recta con respecto a la cual son simétricos los dos puntos se llama *eje de simetría*. Así, en la figura 2.18, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al eje de simetría l si la recta l es perpendicular al segmento AB en su punto medio M.

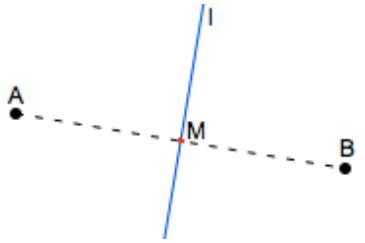


Figura 2.18: Simetría por una recta

- Se dice que dos puntos son simétricos respecto a un punto O si O es el punto medio del segmento que los une. El punto O se llama *centro de simetría*. Así, en la figura 2.19, los dos puntos A y B son simétricos con respecto al centro de simetría O siempre que O sea el punto medio del segmento AB.

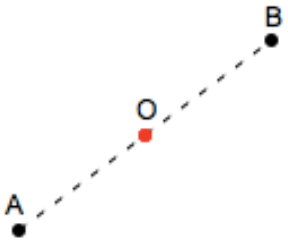


Figura 2.19: Simetría por un punto

- Se dice que una curva es simétrica con respecto a un eje (llamado eje de simetría) cuando para cada punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto al eje.
- Se dice que una curva es simétrica con respecto a un centro de simetría O cuando para cada punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto a O.

A continuación, observaremos la simetría de las gráficas desde el plano cartesiano, usando los ejes coordenados como ejes de simetría y el origen como centro de simetría[4].

2.3.2.1. Simetría con respecto al eje Y

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (ver figura 2.20). Si esta curva es simétrica con respecto al eje Y, es porque debe existir otro punto $Q(a, b)$ sobre la curva, tal que el segmento PQ queda bisecado perpendicularmente por el eje Y. Sea M el punto medio de PQ; sus coordenadas son, evidentemente $(0, y)$.

Entonces, por las fórmulas del punto medio

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

en este caso se tiene

$$0 = \frac{a + x}{2} \quad , \quad y = \frac{b + y}{2}$$

de donde $a = -x$ y $b = y$. Por tanto, las coordenadas de Q son $(-x, y)$. Pero, como Q está sobre la curva, se deduce que sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación de la curva. Es decir, una ecuación $f(x, y) = 0$ que se satisface para las coordenadas (x, y) de P se satisface

[4]En el desarrollo de la propuesta no se consideraran ejes de simetría oblicuos a los ejes del plano cartesiano.

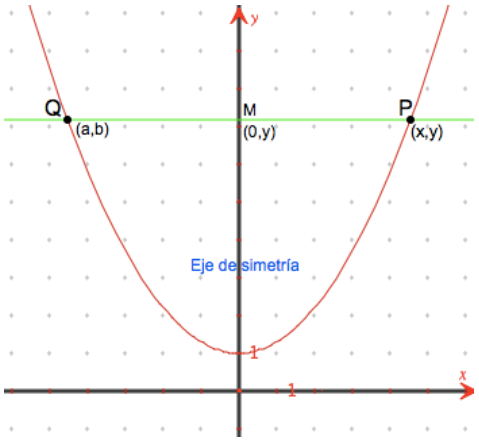


Figura 2.20: Simetría por el eje Y

también para las coordenadas $(-x, y)$ de Q siempre que la curva sea simétrica respecto al eje Y. Este resultado se enuncia como sigue:

"Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por $-x$, la curva es simétrica con respecto al eje Y, y recíprocamente" [10].

En álgebra este tipo de curvas son propias de las funciones pares, las cuales cumplen que: *"$f(-x) = f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$"* (ver [11]).

2.3.2.2. Simetría con respecto al eje X

Se verifica de forma análoga a la simetría con respecto al eje Y. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (ver figura 2.21). Si esta curva es simétrica con respecto al eje X, es porque debe existir otro punto $Q(a, b)$ sobre la curva, tal que el segmento PQ queda bisecado perpendicularmente por el eje X. Sea M el punto medio de PQ; sus coordenadas son, evidentemente $(x, 0)$.

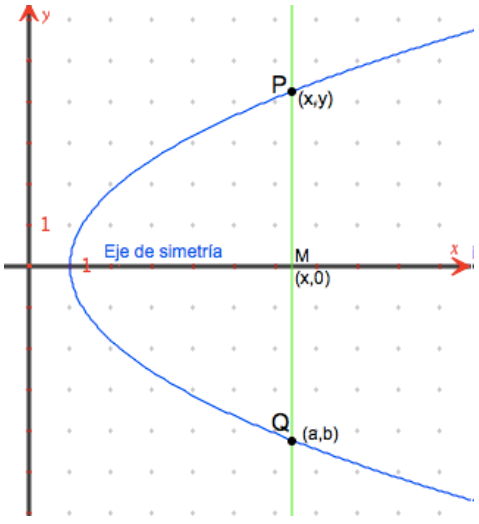


Figura 2.21: Simetría por el eje X

Entonces, por las fórmulas del punto medio

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

en este caso se tiene

$$x = \frac{a+x}{2} \quad , \quad 0 = \frac{b+y}{2}$$

de donde $a = x$ y $b = -y$. Por tanto, las coordenadae de Q son $(x, -y)$. Pero, como Q está sobre la curva, se deduce que sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación de la curva. Este resultado se enuncia como sigue:

"Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es reemplazada por $-y$, la curva es simétrica con respecto al eje X" [10].

En álgebra este tipo de curvas no son consideradas funciones, pues se tendría que la imagen para un elemento de x del dominio no es única.

2.3.2.3. Simetría con respecto al origen

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de una curva (ver figura 2.22). Para que esta curva sea simétrica con respecto al origen O, debe existir otro punto $Q(a, b)$, sobre la curva, tal que O sea el punto medio del segmento PQ. Por las fórmulas del punto medio

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

en este caso se tiene

$$0 = \frac{x+a}{2} \quad , \quad 0 = \frac{y+b}{2}$$

de donde $a = -x$ y $b = -y$, de manera que las coordenadas de Q son $(-x, -y)$. Como Q está sobre la curva, sus coordenadas $(-x, -y)$ deben satisfacer la ecuación de la curva. Por tanto, para que haya simetría con respecto al origen, la ecuación del lugar geométrico no debe alterarse al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$. El recíproco de este enunciado también es verdadero y puede demostrarse. Estos resultados se enuncian así:

"Si la ecuación de una curva no se altera al reemplazar las variables x y y por $-x$ y $-y$, respectivamenle, la curva es simétrica con respecto al origen; y recíprocamente" [10].

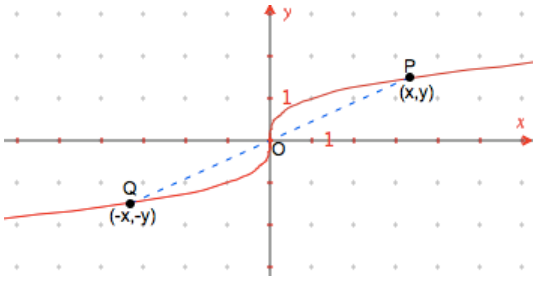


Figura 2.22: Simetría por el Origen

En álgebra este tipo de curvas son propias de las funciones impares, definidas como: *"$f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$"* (ver [11]).

2.4. La parábola

Una *parábola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama *foco* y la recta fija *directriz* de la parábola.

Designemos por F y l (ver figura 2.23), el foco y la directriz de una parábola, respectivamente.

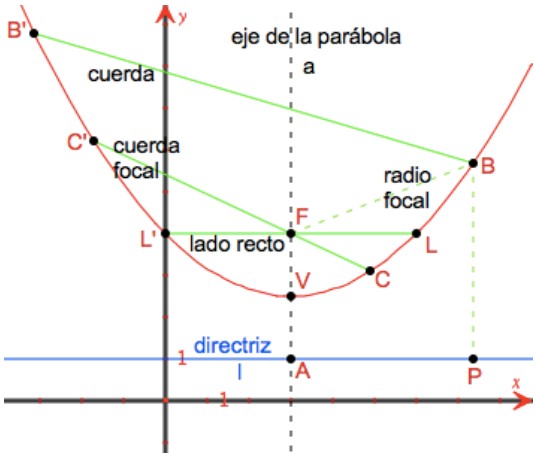


Figura 2.23: La parábola

La recta a que pasa por F y es perpendicular a l se llama *eje* de la parábola.

Sea A el punto de intersección del eje y la directriz. El punto V, punto medio del segmento AF, está, por definición, sobre la parábola; este punto se llama *vértice*.

El segmento de recta, tal como BB', que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama *cuerda*; en particular, una cuerda que pasa por el foco como CC', se llama cuerda focal; y la cuerda focal LL' perpendicular al eje se llama *lado recto*.

Si P es un punto cualquiera de la parábola, la recta FP que une el foco F con el punto P se llama *radio focal* de P, o *radio vector*.

2.4.1. Ecuaciones de la parábola

2.4.1.1. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje Y

Si la parábola tiene vértice en el origen y su eje coincide con el eje Y (ver figura 2.24), entonces el foco F está sobre el eje Y, sean $(0, p)$ sus coordenadas.

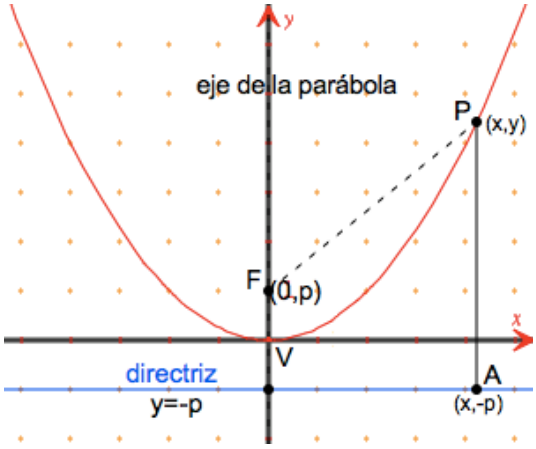


Figura 2.24: Parábola de vértice $(0, 0)$ y eje de simetría el eje Y

Por definición de parábola, la ecuación de la directriz D es $y = -p$. Sea $P(x, y)$ un punto

cualquiera de la parábola. Por P se traza el segmento PA perpendicular a D. Entonces, por la definición de parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$\left|\overline{FP}\right| = \left|\overline{PA}\right|$$

Y calculando las longitudes por la fórmula de distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

se tiene que $\left|\overline{FP}\right|$ es igual a

$$d(F, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2}$$

y la longitud $\left|\overline{PA}\right|$ es igual a

$$d(P, A) = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

Por lo tanto, la condición geométrica de $\left|\overline{FP}\right| = \left|\overline{PA}\right|$ está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

y simplificando, se obtiene

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

2.4.1.2. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría el eje X

Si la parábola tiene vértice en el origen y el eje coincide con el eje X (ver figura 2.25), entonces de forma análoga al caso anterior, se tiene que el foco F es un punto de la forma $(p, 0)$, y la ecuación de la directriz D es $x = -p$.

Sea $Q(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola, por el que se traza un segmento QB perpendicular a D. Entonces, por la definición de parábola, el punto Q debe satisfacer la condición geométrica

$$\left|\overline{FQ}\right| = \left|\overline{QB}\right|$$

Y calculando las longitudes de $\left|\overline{FQ}\right|$ y $\left|\overline{QB}\right|$, por la fórmula de distancia entre dos puntos, se tiene que

$$d(F, Q) = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}$$
$$d(Q, B) = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2}$$

Por lo tanto, la condición geométrica está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \sqrt{(x + p)^2}$$

y simplificando, se obtiene

$$y^2 = 4px$$

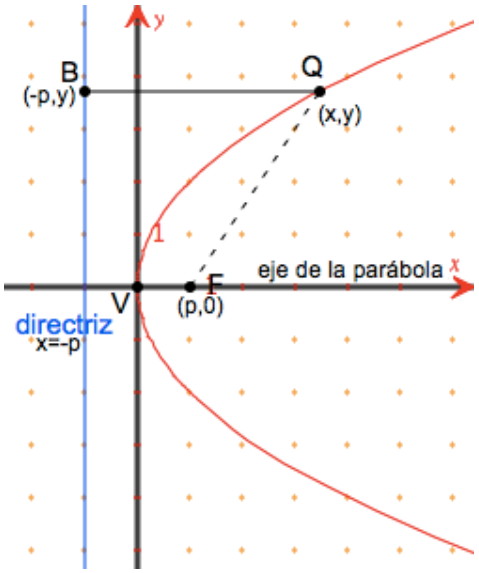


Figura 2.25: Parábola de vértice $(0,0)$ y eje de simetría el eje X

2.4.1.3. Ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje de simetría paralelo al eje Y

Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h,k) (ver figura 2.26), se tiene que la ecuación de la parábola, con referencia a los nuevos ejes X' y Y', está dada por

$$x'^2 = 4py'$$

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la parábola. Entonces, se tiene que

$$x = x' + h \quad , \quad y = y' + k$$

de donde,

$$x' = x - h \quad , \quad y' = y - k$$

y sustituyendo estos valores de x' y y' en la ecuación $x'^2 = 4py'$, se obtiene

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

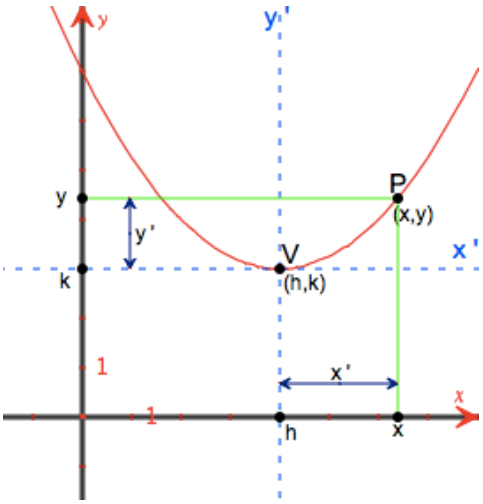


Figura 2.26: Parábola de vértice (h,k) y eje de simetría paralelo al eje Y

2.4.1.4. Ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje de simetría paralelo al eje X

Se verifica de forma análoga que para la ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje paralelo al eje Y. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h,k) (ver figura 2.27), se tiene que la ecuación de la parábola, con referencia a los nuevos ejes X' y Y', está dada por

$$y'^2 = 4px'$$

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Entonces, se tiene que

$$x = x' + h \quad , \quad y = y' + k$$

de donde,

$$x' = x - h \quad , \quad y' = y - k$$

y sustituyendo estos valores de x' y y' en la ecuación $y'^2 = 4px'$, se obtiene

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

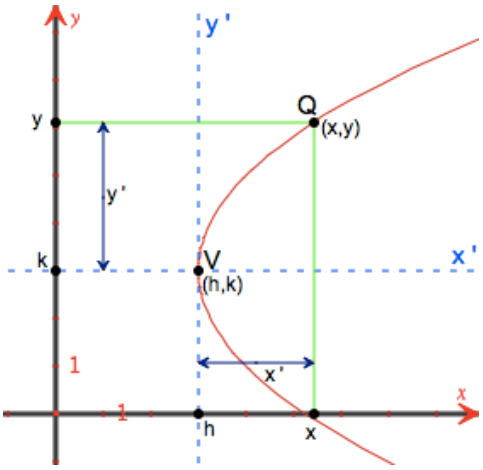


Figura 2.27: Parábola de vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje X

2.5. La función cuadrática

Cuando cada valor de una variable x está asociado con un valor determinado de otra variable y, se dice que y es función de x y se escribe $y = f(x)$. Esta notación es la que simboliza una función cualquiera f. A x se le llama *variable independiente* y a y se le llama *variable dependiente* [3].

La gráfica de la función dada por la ecuación $y = f(x)$ se puede definir como el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyas coordenadas cumplen la ecuación.

En libros de cálculo (tal como [11]) y de texto para grado noveno (como [12]) definen la función cuadrática como todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, cuyos valores están dados por una ecuación o polinomio de la forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$, que toman el nombre de *funciones polinómicas de segundo grado* o simplemente de *funciones cuadráticas*.

Estas ecuaciones se representan gráficamente por una parábola cuyo eje es paralelo al (o coincide con el) eje Y. Por tanto, las propiedades analíticas de la función cuadrática pueden estudiarse convenientemente por medio de las propiedades geométricas de la parábola. Reducimos la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ a la ecuación de la parábola $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, completando el cuadrado en x (Ver Tabla 2.1), teniendo que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

que es la ecuación de una palábola cuyo eje es paralelo al (o coincide con el) eje Y, y cuyo vértice es el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.

Descripción	Simbólicamente
Dividimos la ecuación entre a.	$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$
Transponemos el valor constante.	$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$
Completamos para obtener un trinomio cuadrado perfecto en términos de x, para ello se agrega la expresión $\frac{b^2}{4a^2}$.	$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$
Operamos y despejamos el binomio al cuadrado.	$\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Tabla 2.1: Deducción de la ecuación de la parábola en ecuaciones cuadráticas

De acuerdo con la definición de función cuadrática [12], esta puede tener una, dos o tres términos. Lo anterior quiere decir que existen formas incompletas y una forma completa, clasificándose así en:

2.5.1. Función incompleta de la forma $y = ax^2$

Las gráficas de estas funciones cumplen las siguientes características (ver figura 2.28):

- El eje de simetría coincide con el eje y.
- El vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas, es decir con el punto $(0, 0)$.
- El coeficiente a da el sentido de la parábola, hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.
- El coeficiente a también da la deformación de la parábola, si $-1 < a < 1$ ocurre un tipo de dilatación y para los demás casos un tipo de contracción.

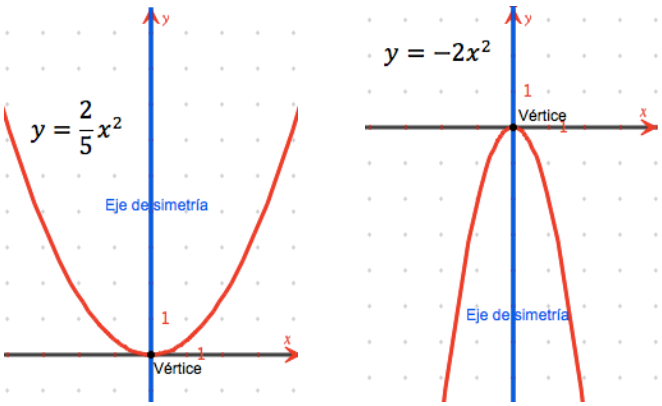


Figura 2.28: Funciones de la forma $y = ax^2$

2.5.2. Función incompleta de la forma $y = ax^2 + bx$

Las gráficas de estas funciones cumplen las siguientes características (ver figura 2.29):

- El eje de simetría es paralelo con el eje y.

- El vértice es de la forma (h, k) y está dado por $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- El punto $(0, 0)$ satisface este tipo de función.
- El coeficiente a da el sentido de la parábola, hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.
- El coeficiente a también da la deformación de la parábola, si $-1 < a < 1$ ocurre un tipo de dilatación y para los demás casos un tipo de contracción.

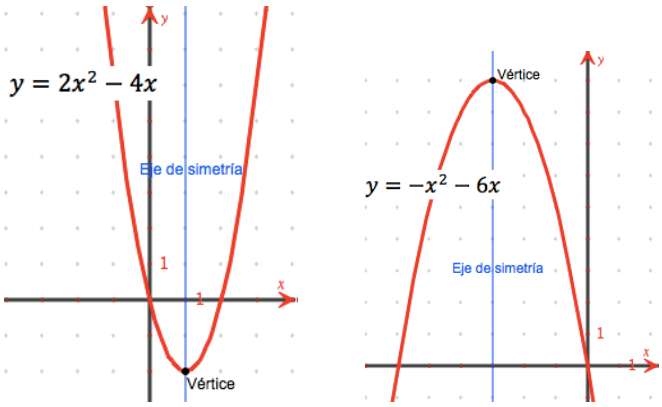


Figura 2.29: Funciones de la forma $y = ax^2 + bx$

2.5.3. Función incompleta de la forma $y = ax^2 + c$

Las gráficas de estas funciones cumplen las siguientes características (ver figura 2.30):

- El eje de simetría coincide con el eje y.
- El vértice está sobre el eje y, y es de la forma $(0, c)$.
- El coeficiente a da el sentido de la parábola, hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.
- El coeficiente a también da la deformación de la parábola, si $-1 < a < 1$ ocurre un tipo de dilatación y para los demás casos un tipo de contracción.

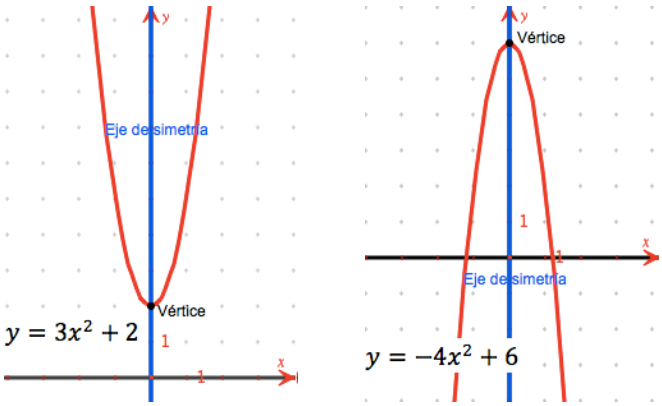


Figura 2.30: Funciones de la forma $y = ax^2 + c$

2.5.4. Función completa de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Las gráficas de estas funciones cumplen las siguientes características (ver figura 2.31):

- El eje de simetría es paralelo con el eje y.
- El vértice es de la forma (h, k) y está dado por $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- El coeficiente a da el sentido de la parábola, hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.
- El coeficiente a también da la deformación de la parábola, si $-1 < a < 1$ ocurre un tipo de dilatación y para los demás casos un tipo de contracción.

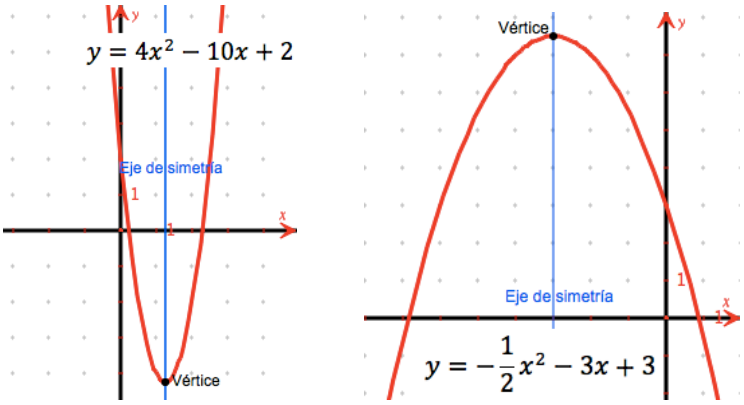


Figura 2.31: Funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$

2.6. Ceros de la función cuadrática

Los ceros o "raíces" de una función representan los valores de x cuya imagen tiene valor cero. En las funciones cuadráticas sólo se obtiene, como máximo dos valores, denominados r_1 y r_2. Estos valores (raíces) cuando son números reales pueden utilizarse para expresar la función cuadrática en forma factorial: $f(x) = a(x + r_1)(x + r_2)$.

Si las ríces son reales, gráficamente serán los puntos de intercepción de la parábola con el eje X.

Para calcular los ceros de una función cuadrática conociendo la ecuación polinómica, se aplica la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, cuya deducción puede verse en la tabla 2.2.

Descripción	Simbólicamente
Como estamos hallando los ceros de la función, igualamos la ecuación a cero.	$ax^2 + bx + c = 0$
Factorizamos a para que x^2 quede sola.	$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$
Por ser un producto hay dos opciones que $a = 0$ ó $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, para nuestro propósito nos quedamos con el polinomio.	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Transponemos el valor constante.	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
Completamos para obtener un trinomio cuadrado perfecto con las expresiones $x^2 + \frac{b}{a}x$.	$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
Operamos y despejamos el binomio al cuadrado.	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
Recordar que al resolver la raíz de un binomio al cuadrado queda el módulo de este. Al sacar el módulo el resultado puede quedar positivo o negativo (para ahorrar espacio se ponen los dos signos juntos "±".	$\left\|x + \frac{b}{2a}\right\| = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Solo que queda despejar x. Esta fórmula se denomina *"fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas"* y es aplicada para hallar los ceros o resolver ecuaciones de segundo grado.	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Tabla 2.2: Deducción de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas

2.7. Problemas relacionados con funciones cuadráticas

2.7.1. Dado f y x hallar $f(x)$

Este tipo de problemas [13], es quizá el más abordado como inicio al concepto de función en la educación secundaria, siendo así una posible causa de ver la función como algo estático.

Por ejemplo, sea f la función "área de un cuadrado". Es decir, $f(x)$ es el área de un cuadrado con lado de longitud x. Como la longitud del lado de un cuadrado es positiva, el dominio de f es el conjunto P de números reales positivos. Así pues, la función f está definida sobre el conjunto P por la fórmula $f(x) = x^2$. Si ahora se nos pide encontrar el área de un cuadrado dada la longitud de un lado, tenemos un problema de este tipo: *conocemos f y x, y queremos hallar $f(x)$.*

Algunos valores son: si $x = 3$ entonces $f(3) = 3^2 = 9$, si $x = \frac{5}{2}$ entonces $f(\frac{5}{2}) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, y así sucesivamente.

2.7.2. Problemas de encontrar x conociendo f y $f(x)$

Supongamos que f está definida sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los número reales por $f(x) = x^2$, tenemos ahora dos soluciones para el problema de tipo 2 de encontrar una x tal que $f(x) = 9$;

$x = 3$ y $x = -3$, ya que $f(3) = 3^2 = 9$ y $f(-3) = (-3)^2 = 9$. Por otra parte, no hay ninguna solución al problema de encontrar una x tal que $f(x) = -4$. Este problema es el de encontrar una x tal que $x^2 = -4$, y sabemos que no hay ningún número real que tenga un cuadrado negativo.

En muchas aplicaciones, un conocimiento del dominio de la función dada nos permite eliminar soluciones "extrañas".

Por ejemplo, si la función f es "el área de un cuadrado", función que ya consideramos, y está descrita por la fórmula $f = x^2$. Pero el dominio de f es ahora el conjunto P de los números reales positivos, ya que la longitud del lado de todo cuadrado es positiva. En este caso, la solución $x = 3$ es única, de encontrar una x tal que $f(x) = 9$, porque la otra solución -3, no está en el dominio de P de la función f que ahora estamos considerando.

2.7.3. Problemas de encontrar una función cuya gráfica contenga los puntos dados

En este tipo de problemas se debe encontrar una función cuya gráfica "contenga" los puntos dados, es decir, que pase por ellos. Los problemas del tipo 3 se denominan con frecuencia problemas de ajuste de curva [13].

Por ejemplo, *"dados los puntos $P(3, 10)$, $Q(2, 3)$ y $R(-1, 6)$ de una parábola, se debe hallar su respectiva función cudrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$"* [12].

Para resolver este tipo de situaciones se empieza reemplazando los respectivos valores de x e y para cada punto en la forma de la función cuadrática, es decir,

Con el punto $P(3, 10)$ se tiene que $10 = a(3)^2 + b(3) + c$, y simplificando $10 = 9a + 3b + c$

Con el punto $Q(2, 3)$ se tiene que $3 = a(2)^2 + b(2) + c$, y simplificando $3 = 4a + 2b + c$

Con el punto $R(-1, 6)$ se tiene que $6 = a(-1)^2 + b(-1) + c$, y simplificando $6 = a - b + c$

Luego, para hallar los valores de a, b y c se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} 10 = 9a + 3b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \\ 6 = a - b + c \end{cases}$$

de donde se obtiene que $a = 2$, $b = -3$ y $c = 1$

Luego, la función cuadrática que pasa por los puntos $P(3, 10)$, $Q(2, 3)$ y $R(-1, 6)$ es (ver figura 2.32)

$$y = 2x^2 - 3x + 1.$$

A continuación veremos que este tipo de problemas se resuelven de forma general por el *"método de diferencias divididas interpolantes de Newton"* [14].

Los polinomios interpolantes de Newton se construyen recursivamente. Sean

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$
$$+a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Observemos que

$$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x1)$$
$$P_3(x) = P_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x1)(x - x2)$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

A este último polinomio se le define como el polinomio de Newton con n centros x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1}.

Por ejemplo, *"dados los punto* $(x_0, y_0) = (-2, 8)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ *y* $(x_2, y_2) = (2, 12)$ *calcular un valor aproximado para* $x = -1$ *y* $x = 0{,}5$*"* [14].

Por el método de Newton, con $n = 3$, el polinomio será de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Como en este ejemplo tenemos que $x_0 = -2$; $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, luego el polinomio correspondiente será de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - (-2)) + a_2(x - (-2))(x - (1))$$
$$P(x) = a_0 + a_1(x + 2) + a_2(x + 2)(x - 1)$$

Para obtener los coeficientes a_0; a_1 y a_2 sustituimos primero los valores de x y $P(x)$ por $(-2, 8)$ en la expresión anterior:

$$8 = a_0 + a_1(-2 + 2) + a_2(-2 + 2)(-2 - 1)$$

y resolviendo obtenemos $a_0 = 8$.

Para hallar a_1, sustituimos a_0 por su valor y ahora x y $P(x)$ por $(1, 2)$ quedando:

$$2 = 8 + a_1(1 + 2) + a_2(1 + 2)(1 - 1)$$

y resolviendo obtenemos $a_1 = -2$.

Por último, sustituimos a_0 y a_1 por sus valores y x y $P(x)$ por $(2, 10)$, resultando:

$$12 = 8 - 2(2 + 2) + a_2(2 + 2)(2 - 1)$$

cuya solución es $a_2 = 3$.

Luego el polinomio interpolador será:

$$P(x) = 8 + (-2)(x + 2) + 3(x + 2)(x - 1)$$
$$P(x) = 8 - 2(x + 2) + 3(x + 2)(x - 1)$$

y para hallar los valores correspondientes a $x = -1$ y $x = 0{,}5$ se resuelve respectivamente (ver figura 2.32)

$$P(-1) = 8 - 2(-1 + 2) + 3(-1 + 2)(-1 - 1) = 0$$

y

$$P(0{,}5) = 8 - 2(0{,}5 + 2) + 3(0{,}5 + 2)(0{,}5 - 1) = -0{,}75$$

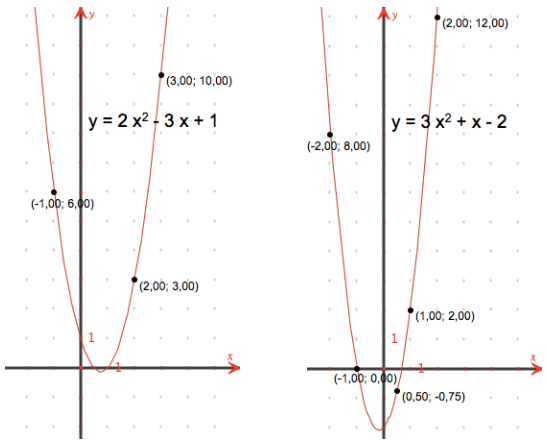


Figura 2.32: Parábolas dados 3 puntos

2.7.4. Problemas de máximos y mínimos

En este tipo de problemas se debe determinar dónde una función cudrática alcanza su *valor máximo* o *mínimo (extremo)*.

Por ejemplo, si consideramos los rectángulos cuyo perímetro es de 24 cm. ¿Para qué valores de la base x y la altura $12 - x$, el área y será máxima? [3].

Para verificar que el valor máximo del área y parece darse cuando la base y la altura son iguales, en este caso para $x = 12 - x = 6$. Sin llegar todavía a utilizar argumentos relacionados con la función cuadrática correspondiente, se puede realizar una tabla de valores próximos a 6 que permita intuir la validez del resultado (ver tabla 2.3 y figura 2.33).

base (x)	$5,8$	$5,9$	$5,95$	6	$6,05$	$6,1$	$6,2$
altura $(12-x)$	$6,2$	$6,1$	$6,05$	6	$5,95$	$5,9$	$5,8$
área $(x(12-x))$	$35,96$	$35,99$	$35,9975$	36	$35,9975$	$35,99$	$35,96$

Tabla 2.3: Aproximación a un punto máximo

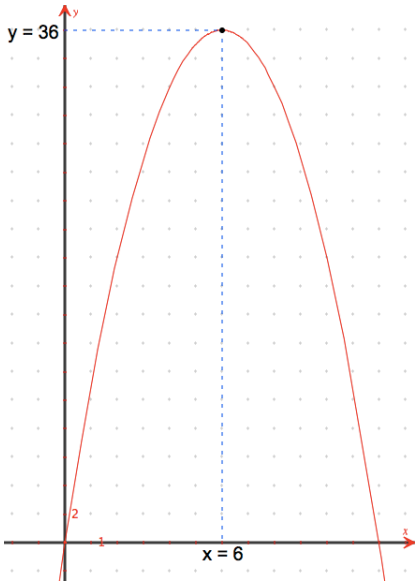


Figura 2.33: Ejemplo de punto máximo

Analíticamente, área es descrita por la función $f(x) = x(12-x) = 12x-x^2$ que representa una parábola que abre hacia abajo, es fácil observar que el área máxima se obtiene en la ordenada del vértice de dicha parábola. Para éste caso se tiene $x = 6$ y $f(x) = 36$, es decir cuando el rectángulo es un cuadrado.

Como un tópico avanzado, mencionaremos que este tipo de problemas son una aplicación importante de la derivada de una función [11].

Consideremos una función f definida en un intervalo $[a, b]$. Luego,

"La función f tiene un valor máximo relativo *en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en ese intervalo."* [11] (ver figura 2.34).

"La función f tiene un valor mínimo relativo *en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en ese intervalo."* [11] (ver figura 2.35)

Si una función tiene un valor máximo relativo o mínimo relativo en c, entonces se dice que la función tiene un *extremo relativo* en c.

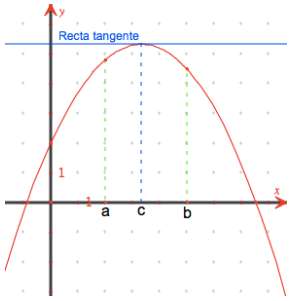


Figura 2.34: Máximo relativo

Para determinar los números posibles en los que una función tiene un extremo relativo, se debe considerar que *"Si $f(x)$ existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y además $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$"*. [11]

Geométricamente, si f tiene un extremo relativo en c, y su $f'(c)$ existe, entonces la gráfica de f debe tener una recta tangente horizontal en el punto donde $x = c$ (ver figuras 2.34 y 2.35).

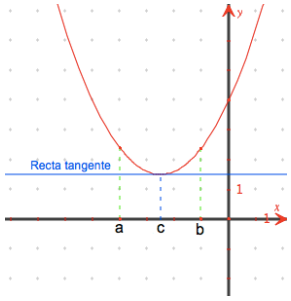


Figura 2.35: Mínimo relativo

Por ejemplo, sea f la función definida por $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Entonces $f'(x) = 2x - 4$. Como $f'(2) = 0$, f puede tener un extremo relativo en 2.

Puesto que $f(2) = 1$ y $1 < f(x)$ cuando $x < 2$ o $x > 2$, luego f tiene un valor mínimo relativo en 2.

La figura 2.36 muestra la gráfica de f, una parábola cuyo vértice está en el punto $(2, 1)$ en donde la gráfica tiene una recta tangente horizontal.

Figura 2.36: Punto mínimo en $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Si aplicamos un procedimiento similar a la función obtenida en el problema inicialmente planteado $f(x) = 12x - x^2$, se tiene entonces $f'(x) = 12 - 2x$ de donde igualando a cero para obtener el punto crítico se llega a que $x = 6$. Sabiendo además que la función representa una parábola que abre hacia abajo, necesariamente dicho punto crítico sera donde está el máximo, obteniendose nuevamente que dicho máximo es 36.

2.7.5. Problemas de inecuaciones cuadráticas

Una inecuación se llama cuadrática si tiene alguna de las formas siguientes:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

con $a \neq 0$.

Recordemos que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ son:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Además, fácilmente se verifica que r_1 y r_2 satisfacen las siguientes relaciones

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad , \qquad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{y} \qquad ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

"La última fórmula proporciona un método para factorizar cualquier trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ en todos los casos posibles" donde las raíces sean reales

Al suponer que $a > 0$ se presentan dos casos de desigualdades cuadráticas.

- ***Caso 1:*** Si $b^2 - 4ac \geq 0$

En este caso, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces reales r_1 y r_2, y la desigualdad se resuelve por factorización.

Por ejemplo, la inecuación $x^2 - 10x + 21 > 0$, es equivalente (por factorización) a $(x - 7)(x - 3) > 0$.

El producto $(x - 7)(x - 3)$ puede cambiar de signo solo en 7 o en 3, que son los puntos donde $x - 7 = 0$ o $x - 3 = 0$. Estos puntos los podemos llamar *puntos de separación* y nos dividen la recta en tres intervalos

$$(-\infty, 3) \qquad , \qquad (3, 7) \qquad \text{y} \qquad (7, \infty)$$

Al elaborar un diagrama de signos, como el de la figura 2.37, donde el signo de $(x-7)(x-3)$ se obtiene aplicando las reglas de los signos.

Vemos que la solucón de la desigualdad es $(-\infty, 3) \cup (7, \infty)$ (ver figura 2.38).

- ***Caso 2:*** Si $b^2 - 4ac < 0$

En este caso, las raíces de la ecuaci'on $ax^2 + bx + c = 0$ no son reales sino complejas y la factorización $a(x - r_1)(x - r_2)$ no sirve para resolver la desigualdad.

Signo de $(x-7)$	$-$	$-$		$+$
Signo de $(x-3)$	$-$		$+$	$+$
Signo de $(x-7)(x-3)$	$+$	$-$		$+$
		3	7	

Figura 2.37: Solución de $x^2 - 10x + 21 > 0$

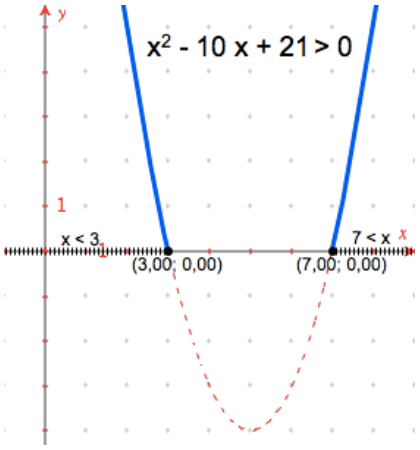


Figura 2.38: Gráfica de $x^2 - 10x + 21 > 0$

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x^2+\tfrac{b}{a}x+c) \\ &= a\left[x^2+\tfrac{b}{a}x+(\tfrac{b}{2a})^2-(\tfrac{b}{2a})^2\right]+c \\ &= a\left[x^2+\tfrac{b}{a}x+(\tfrac{b}{2a})^2\right]+\left(c-\tfrac{b^2}{4a}\right) \\ &= a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

Para resolver la desigualdad en este caso procedemos de la siguiente forma:

Completando el cuadrado tenemos

Por lo tanto, las desigualdades cuadráticas se transforman en su orden en

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 > \frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq \frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq \frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 < \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Como estamos suponiendo que $a > 0$ y sabemos que $b^2 - 4ac < 0$, las dos primeras inecuaciones son válidas para todo número real y las dos últimas para ninguno.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad $3x^2 - 10x + 2 \leq 0$, tenemos que $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(3)(2) = 76 \geq 0$.

Por lo tanto, la ecuación $3x^2 - 10x + 2 = 0$ tiene raíces reales que son

$$r_1 = \tfrac{10+\sqrt{76}}{6} = \tfrac{10+2\sqrt{19}}{6} = \tfrac{5+\sqrt{19}}{3} \quad \text{y} \quad r_2 = \tfrac{10-\sqrt{76}}{6} = \tfrac{10-2\sqrt{19}}{6} = \tfrac{5-\sqrt{19}}{3}$$

Luego, la factorización de $3x^2 - 10x + 2$ es

$$3x^2 - 10x + 2 = 3\left[x - \left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x - \left(\frac{5-\sqrt{19}}{3}\right)\right]$$

y la desigualdad original es equivalente a

$$3\left[x-\left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right)\right]\left[x-\left(\frac{5-\sqrt{19}}{3}\right)\right]\leq 0$$

Observando el diagrama de signos de la figura 2.39, vemos que la solución de la desigualdad es el intervalo

$$\left[\frac{5-\sqrt{19}}{3},\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right]$$

(ver figura 2.40).

	$-\infty$	$\frac{5-\sqrt{19}}{3}$	$\frac{5+\sqrt{19}}{3}$	$+\infty$
Signo de $\left[x-\left(\frac{5+\sqrt{19}}{3}\right)\right]$	$-$	$-$	$+$	
Signo de $\left[x-\left(\frac{5-\sqrt{19}}{3}\right)\right]$	$-$	$+$	$+$	
Signo resultante	$+$	$-$	$+$	

Figura 2.39: Solución de $3x^2-10x+2\leq 0$

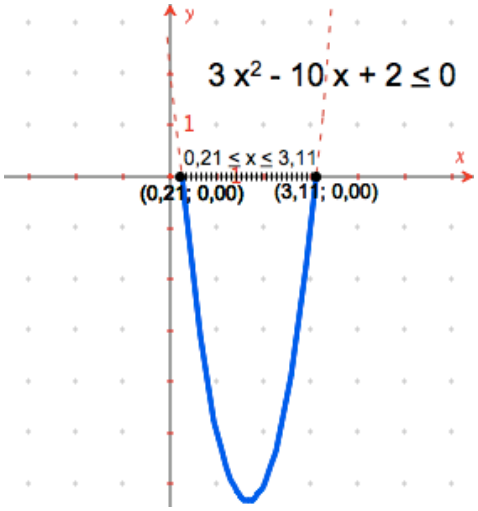


Figura 2.40: Gráfica de $3x^2-10x+2\leq 0$

Cuando $a>0$ y $b^2-4ac<0$, las desigualdades cuadráticas, o tiene como conjunto solución todo $\mathbb{R}$ (ver figura 2.41), o no tienen soluciones reales (ver figura 2.42).

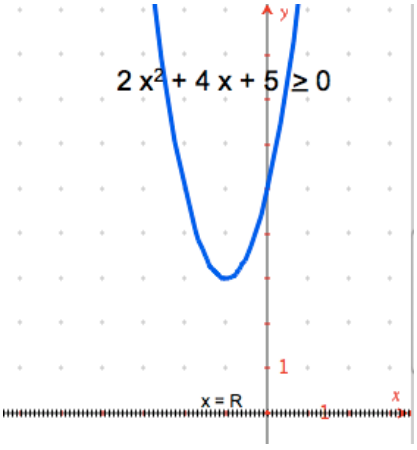


Figura 2.41: Gráfica de $2x^2+4x+5\geq 0$

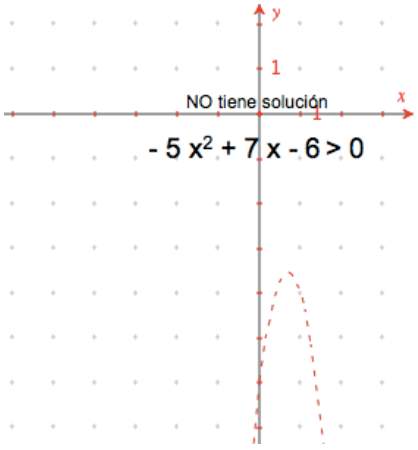


Figura 2.42: Gráfica de $-5x^2+7x-6>0$

CAPÍTULO 3

Aspectos Didácticos

La representación de situaciones de variación que usan la función cuadrática mediante una curva, hace necesario involucrar un contexto continuo para que los estudiantes hagan una reflexión durante su trabajo de *¿Por qué se presentan gráficas continuas?* y *¿Cómo describir el traslado de la gráfica o el lugar en que se orienta el vértice desde la ecuación?* Para ello el contexto geométrico permitirá asociar elementos que dentro de las situaciones con Cabri II Plus faciliten la significación de lo que describe la gráfica. Este proceso se debe ir adquiriendo y mejorando según se tenga variedad de situaciones en las cuales se potencie cada uno de los aspectos.

En muchos casos, primero se enseña las formas de representar una función cuadrática y luego se da aplicaciones en la resolución de ejercicios, construidos exclusivamente, para la aplicación de las representaciones. Higueras [3], expresa que *"Nuestros estudiantes de secundaria manifiestan en general una concepción de la noción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo [...] Podemos decir que sus definiciones no determinan el objeto función, sino las relaciones que han mantenido con él [...] Tanto se ha descompuesto el objeto función en segmentos para su enseñanza que el estudiante no logra unificarlos dándoles una significación global. El estudiante ha visto muchos objetos allí donde sólo debía existir uno."*

El estudio de las relaciones funcionales que pueden aparecer en la vida cotidiana, como las relaciones entre edad y altura de un niño (o entre edad y masa o peso corporal), entre la temperatura a lo largo de un día y la hora que marca un reloj, etc., se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento, porque la variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real), geométricos (plano cartesiano, rectas paralelas, perpendiculares, tangentes, parábolas, lugar geométrico), de medidas (distancia entre dos puntos, de un punto a una recta, entre dos rectas) y de datos (tabulaciones). Todos estos sistemas pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional.

A continuación, se harán consideraciones y reflexiones en los pensamientos variacional y geométrico, en los sistemas de representación y algunas descripciones usando el programa Cabri II Plus por ser las herramientas para sustentar la propuesta.

3.1. El pensamiento variacional

En los Lineamientos Curriculares [15] encontramos que el pensamiento variacional se refiere a la modelación matemática para diversos fenómenos de cambio y variación en diferentes disciplinas y que tiene como fines:

- Permitir que las personas adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones.
- Desarrollar capacidades para representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas.
- Promover el desarrollo para analizar y predecir el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender y representar relaciones cuantitativas.

Luego, el pensamiento variacional es un fuerte componente al abordar situaciones que pueden evidenciar la relación entre la matemática y otras disciplinas haciendo gala de una matemática aplicada.

Para el desarrollo del pensamiento variacional se requiere de aspectos algebraicos que van desde la generalización de patrones aritméticos hasta la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos estos desarrollos propios del pensamiento variacional.

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo.

El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las cuadráticas, las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones. El estudio de las relaciones funcionales permite determinar los cambios de una magnitud "y" con respecto a los cambios de otra magnitud "x".

3.2. Los sistemas de representación

En los Lineamientos Curriculares [15], en Azcárate [3], en Rey [1] y otros, encontramos que el concepto de función puede admitir representaciones en diferentes registros (verbal, gráfico, tabular y simbólico), con diversos alcances y limitaciones. Un registro no está ligado ni a objetos ni a conceptos particulares; está constituido por los signos, en el sentido más amplio

del término: trazos, símbolos, íconos. Los registros son medios de expresión y de representación y se caracterizan precisamente por las posibilidades ligadas a su sistema semiótico. Un registro da la posibilidad de representar un objeto, una idea o un concepto, no necesariamente matemático. Los diferentes sistemas de representación asociados a la variación son:

- Enunciados verbales: Donde la función admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere estudiar un fenómeno utilizando una función como modelo, se cuenta generalmente, en principio, con una descripción de este tipo.
- Representaciones tabulares: Donde una función se representa con una tabla de valores que pone en juego la relación de correspondencia. Este registro tiene limitaciones ya que en una tabla sólo puede incluirse un número finito de pares de valores.
- Gráficas en el plano cartesiano: Donde una función se puede representar por medio de una curva (continua o no) en el plano cartesiano. Se pone en juego la noción de grafo de una función. También presenta limitaciones, ya que como en el caso de la tabla, es necesario imaginar que continúa más allá de lo que es posible observar.
- Representaciones simbólicas: Donde una función se puede representar por una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen $f(x)$ para toda x perteneciente al dominio de la función, por lo tanto esta representación tiene pocas limitaciones y son aquellas que provienen del cálculo.

La articulación entre el registro gráfico y algebraico resulta, en general, la más difícil para los estudiantes. La lectura de representaciones gráficas involucra una interpretación global ya que se trata de discriminar variables visuales y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.

En la enseñanza se suelen proponer actividades de pasar de la representación algebraica de una función a la representación gráfica construida punto por punto y es poco frecuente que se considere el paso inverso. En algún momento del aprendizaje del concepto de función, el estudiante debería poder distinguir la función de sus representaciones. Las actividades de articulación entre registros podrían favorecer dicha distinción.

La tabla 3.1 elaborada por Janvier (1987) [3] contempla las posibles conversiones de una forma de representación a otra, así como las traducciones dentro de la misma forma de representación, que son las de la diagonal.

Para García [16], la problemática de los sistemas de representación radica tanto en las dificultades de la transformación de una a otras, como en la determinación del profesor de si las representaciones que quiere que intervengan (y ¿por qué quiere que intervengan?) en la situación van a permitir el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, ya que si ejerce presión sobre las transformaciones entre sistemas de representación puede llevar al estudiante a errores innecesarios.

De acuerdo a la propuesta de García hay que hacer una consideración sobre la importancia de resaltar que el profesor debe reflexionar sobre qué tipos de representaciones quiere que intervengan en el proceso de instrucción y, sobre todo, por qué quiere que sean éstas y no otras. debido a la relevancia y significado del estudio de las funciones como representaciones de un fenómeno de cambio. De esta forma se pueden proponer situaciones que promuevan unas representaciones que se consideran más convenientes porque brindan mayor información y facilidad de comunicación.

Es fundamental que en cada una de las instituciones educativas se motive una discusión profunda en torno a los fines, que se estudien en el marco del proyecto institucional, para que su filosofía trascienda el documento y se ponga en práctica coherentemente en los diseños, en

Desde \ Hacia	Verbal	Tabla	Gráfica	Expresión
Verbal	Distintas descripciones.	Estimación/ Cálculo de la tabla.	Boceto.	Modelo.
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas.	Modificación de la tabla.	Trazado de la gráfica.	Ajuste numérico.
Gráfica	Interpretación de la gráfica.	Lectura de la gráfica.	Variaciones de la escala, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico.
Expresión simbólica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros).	Cálculo de la tabla dando valores.	Representación gráfica.	Transformaciones de la fórmula.

Tabla 3.1: Sistemas de representación

la organización de los contenidos, en las formas de interpretar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, así como en los criterios que orientaran la evaluación.

Recurriendo al razonamiento visual promovido en las situaciones de cambio y en las representaciones que se hacen al respecto se puede llevar al estudiante a la identificación de funciones cuadráticas desde los procedimientos de tipo geométrico y de tipo analítico.

3.3. El pensamiento geométrico

Según Vinner (1989) [17], en el currículo escolar el énfasis puesto a los procedimientos algorítmicos ha producido una resistencia generalizada, de alumnos y profesores, al uso de consideraciones visuales en sus razonamientos que se pueden lograr con la enseñanza de la geometría. La geometría tuvo un momento en la que fue relegada a la unidad de fin de año y por eso no se desarrollaba, hoy en día las nuevas propuestas para la enseñanza de conceptos geométricos le está volviendo a dar la importancia que tenía en la matemática antigua. Este énfasis impide a muchos estudiantes acercarse a ciertos hechos matemáticos y realizar algunos procesos de razonamiento. Ben Chaim (1989) [17], señala que *"La naturaleza visual de las representaciones permite a la mayoría de los estudiantes entender una presentación informal de una prueba deductiva, mientras que un tratamiento algebraico podría estar muy lejos de su comprensión."*

Uno de los ejemplos que ilustra lo anterior, es la demostración visual (ver figura 3.1) de la convergencia de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ a 2.

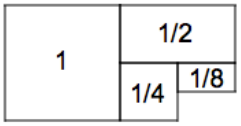


Figura 3.1: Convergencia de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ a 2

Camargo [17], expone que es así como la geometría se convierte en una fuente de expe-

riencias de diversa índole. Por un lado, dado su origen empírico el cual permite ver la estrecha relación con el mundo físico, la geometría provee modelos para interpretar el mundo y resolver problemas. Por otro lado, dada su evolución como disciplina abstracta que constituye objetos ideales y estudia sus propiedades y relaciones, la geometría permite el tratamiento matemático de carácter formal en organizaciones locales, a la vez que se convierte en modelo de la construcción de un sistema axiomático, en donde la única forma de validación es la demostración deductiva. Pero, para llegar a la construcción de dicho sistema, es fundamental la actividad geométrica en donde confluyen diversas formas de razonar. En ocasiones se avanza por procedimientos inductivos, en otras mediante estrategias heurísticas, incluso a veces, por medio de intuiciones. A partir de argumentaciones informales, de carácter conjetural, se van desarrollando formas de razonar propias de la actividad matemática y se va conciliando el universo de referencia que el individuo posee, debido a sus experiencias en el mundo físico, con el sistema formal de la geometría, encontrándonos con tres diferentes tipos de razonamiento:

- El razonamiento visual-espacial que para Clements (1992) integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones mentales de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones. Está en estrecha relación con lo que Duval (1998) llama el proceso de visualización respecto a la representación del espacio, la exploración heurística o la visión sinóptica de una situación compleja.

- El razonamiento intuitivo o informal que tiene que ver con las ideas espontáneas que se emiten en el lenguaje natural, a través de la descripción, la explicación y la formulación de argumentos, producto del establecimiento de asociaciones u oposiciones. Este razonamiento, en geometría, se fomenta a partir de lo que Duval (1998) llama procesos constructivos de configuraciones que sirven como modelo para experimentar propiedades geométricas y a la vez verificar, explicar o aclarar un resultado. A partir de la exploración se sacan conjeturas basadas en la experiencia, de las cuales se obtienen los argumentos para explicar o convencer a otros, o comunicar una idea geométrica.

- El razonamiento inferencial que integra procesos inductivos, abductivos y deductivos y hace referencia a la elaboración de discursos formales encaminados a la construcción de demostraciones para probar la validez de una afirmación; es el que finalmente permite comprender cómo se construye un sistema axiomático formal.

De los razonamientos anteriores los que más interesan para la presente propuesta son el razonamiento visual-espacial y el razonamiento intuitivo o informal. ya que el primero permitirá que los estudiantes modelen las situaciones de cambio desde actividades dinámicas con el progrmaa Cabri II Plus, las cuales involucran cuadrados, rectángulos, cajas, etc., que acompañadas de instrucciones, explicaciones y argumentaciones ayudará a la construcción del concepto de función cuadrática.

En los Lineamientos Curriculares [15], los procedimientos de tipo geométrico son las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. También se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos. También describe unos procedimientos relacionados con gráficas y representación que se desarrollan en los distintos campos de las matemáticas. Cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar una relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una figura se están aplicando procedimientos de tipo gráfico, que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o una relación; y los procedimientos analíticos tienen que ver con "álgebra", "funciones" y "cálculo diferencial e integral".

Algunos ejemplos de procedimientos analíticos son: modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas; traducir de una a otra de las distintas representaciones de una función; resolver ecuaciones; comprender y hallar las tasas de inflación, los intereses en un préstamo, etc.

Al fusionar procedimientos analíticos y variacionales se puede sacar provecho de la propuesta de Castelnuovo (1973) sobre geometría dinámica y funciones, para quien se pueden proponer situaciones de cambio donde se involucren conceptos geométricos.

3.4. La geometría dinámica y las funciones

En Azcárate [3], se hace mención que las nuevas didácticas entorno a la geometría revelan que ésta debe ser menos estática (recordemos que antes se enseñaban los Elementos de Euclides) ya que los conceptos perdían su estado de significación en un mundo que es geométrico, por ello surgió una geometría constructiva donde se hace pleno énfasis en dar significado a los conceptos.

"[...]La llamada geometría constructiva, centrada en la adquisición de conceptos por parte de los alumnos, que permita un conocimiento real del plano y del espacio y que fomente procesos básicos de las matemáticas como clasificar, ordenar, medir, al mismo tiempo que se estimula la intuición, el descubrimiento y la creatividad" [3].

Es aquí donde la propuesta de Castelnuovo (1973) nos dice que una geometría dinámica frente a una geometría estática tradicional, nos lleva a reflexionar sobre cuál es el posible enfoque que se le puede otorgar a los conceptos geométricos para que sean significativos en el aula desde la relación con el pensamiento variacional.

Una síntesis de cómo llegar a esto es que dada una figura geométrica, se trata de tomar uno de sus elementos como variable, y fijar el valor de otros, para estudiar seguidamente qué sucede con el resto de elementos, es decir, cuáles permanecen constantes, cuáles varían y cómo lo hacen en función de la variable inicial. Este trabajo de interrelación entre los distintos elementos de una figura, permite por un lado incidir sobre los propios conceptos geométricos, atacando frecuentes confusiones entre los mismos (por ejemplo entre área y perímetro), y por otro introducir el concepto de función como dependencia entre variables, en este caso geométricas. Al mismo tiempo aparecen los modelos básicos de dependencia, así como algunas situaciones de gran importancia en matemáticas como son los problemas de funciones lineales, cuadráticas o de máximos y mínimos, que se tratan de forma experimental, gráfica o numéricamente, calculando valores próximos.

3.5. Algunos obstáculos y errores en la enseñanza de funciones

Algunos errores expuestos por García [16], en la enseñanza de las funciones son:

- Obstáculos a nivel de creencias y convicciones: Se presentan los entes matemáticos como algo "estático" y se enfoca netamente el trabajo a números concretos y no a las magnitudes continuas, ya que hay un reconocimiento desde la percepción.
- Obstáculos a nivel de esquemas de pensamiento: Se dan desde lo aprendido empíricamente y tienen que ver con la escritura de la proporción, al reconocimiento de magnitudes de la misma naturaleza y al álgebra geométrica.

- Obstáculos a nivel de conocimiento técnico: Este ya es de carácter de profesionalización por lo que involucra la simbolización algebraica y la noción de curva a la hora de representar las funciones.

3.6. Estrategias de evaluación en matemáticas

En los Estándares Curricualres [2], la enseñanza de las matemáticas supone un conjunto de variados procesos mediante los cuales el docente planea, gestiona y propone situaciones de aprendizaje matemático significativo y comprensivo para sus estudiantes y así permite que ellos desarrollen su actividad matemática e interactúen con sus compañeros, docentes y materiales para reconstruir y validar personal y colectivamente el saber matemático. Para comprender de forma más detallada cómo y qué aspectos deben impulsarse, a continuación se describen y analizan algunas maneras de dinamizar estas interacciones.

1. **Partir de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas**

   Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas escolares son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.

   En la comunidad de educadores matemáticos se distingue hoy claramente entre *situación* y *actividad*. Por *situación* se entiende el conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones, instrucciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes. En sus experiencias con el tratamiento de una situación bien preparada, el conocimiento surge en ellos como la herramienta más eficaz en la solución de los problemas relacionados con la misma.

   Por su parte, la *actividad* se refiere al trabajo intelectual personal y grupal de los estudiantes, tales como definir estrategias para interpretar, analizar, modelar y reformular la situación; formular preguntas y problemas, conjeturas o hipótesis; explicar, justificar (y aun demostrar) o refutar sus conjeturas e hipótesis; utilizar materiales manipulativos; producir, interpretar y transformar representaciones (verbales, gestuales, gráficas, algebraicas, tabulares, etc.); calcular con lápiz y papel o emplear calculadoras y hojas de cálculo u otros programas de computador; comparar y discutir resultados producidos con o sin computador; redactar y presentar informes, etc. En este sentido, la actividad estimulada por la situación permite avanzar y profundizar en la comprensión, en las habilidades y en las actitudes de los estudiantes, en una palabra: en las competencias matemáticas.

2. **Diseñar procesos de aprendizaje mediados por escenarios culturales y sociales**

   El aprendizaje se propone como un proceso activo que emerge de las interacciones entre estudiantes y contextos, entre estudiantes y estudiantes y entre estudiantes y docentes en el tratamiento de las situaciones matemáticas.

   Estas formas de interacción tienen importancia capital para la comunicación y la negociación de significados. Por ello se enfatiza en el diseño de situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes tomar decisiones; exponer sus opiniones y ser receptivos a

las de los demás; generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos. Todo ello conlleva a incluir en la organización del aprendizaje matemático el trabajo en equipo y a fomentar la cooperación entre los estudiantes, la cual no excluye momentos de competición sana y leal entre ellos o con otros cursos, grados y colegios.

3. **Fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas**

   El reconocimiento de nociones y conocimientos previos, potencialidades, y actitudes del estudiante pone de manifiesto dos cuestiones importantes: de un lado, el reconocimiento de que el estudiante nunca parte de cero para desarrollar sus procesos de aprendizaje y, de otro, el reconocimiento de su papel activo cuando se enfrenta a las situaciones problema propuestas en el aula de clase. Así al docente le parezca que las concepciones previas son erróneas, las potencialidades mínimas y las actitudes negativas, no dispone de otra base para que el estudiante mismo inicie activamente sus procesos de aprendizaje. Sólo a partir de ellas puede empezar a cuestionar las preconcepciones, a incrementar las potencialidades y a modificar las actitudes para que el progreso en los saberes conceptuales y procedimentales le vaya dando la seguridad y la confianza en que puede avanzar hacia nuevos aprendizajes.

4. **Vencer la estabilidad e inercia de las prácticas de la enseñanza**

   Desarrollar las competencias matemáticas supone organizar procesos de enseñanza y aprendizaje basados en estructuras curriculares dinámicas que se orienten hacia el desarrollo de competencias.

   Es necesario ampliar la visión sobre los textos escolares y las directivas ministeriales como los únicos medios para hacer explicitas las exigencias del cambio. Se trata de generar la necesidad de mirar críticamente la amplia oferta de textos escolares que se encuentra en el mercado, de tal forma que se tenga una vigilancia crítica por parte de los docentes sobre la pertinencia, concordancia y coherencia de éstos con los fines de la educación y las políticas del sistema educativo, en particular con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias. Se trata también de ampliar, profundizar, y por qué no, de trascender los textos escolares y los documentos oficiales a través de una amplia documentación bibliográfica, disponible hoy en día en múltiples formatos (impresos y digitales) que se pueden obtener a través del Ministerio de Educación Nacional, las Secretarías de Educación Departamental y Municipal, las bibliotecas y centros de documentación de las alcaldías y universidades, la consulta en Internet y el intercambio con otros colegas.

5. **Aprovechar la variedad y eficacia de los recursos didácticos**

   Los recursos didácticos, entendidos no sólo como el conjunto de materiales apropiados para la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se estructuran las situaciones problema más apropiadas para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, deben ser analizados en términos de los elementos conceptuales y procedimentales que efectivamente permiten utilizarlos si ya están disponibles, o si no existen, diseñarlos y construirlos.

   Los recursos didácticos pueden ser materiales estructurados con fines educativos (regletas, fichas, cartas, juegos, modelos en cartón, madera o plástico, etc.); o tomados de otras disciplinas y contextos para ser adaptados a los fines que requiera la tarea. Entre estos recursos, pueden destacarse aquellos configurados desde ambientes informáticos como calculadoras, software especializado, páginas interactivas de Internet, etc. Estos ambientes informáticos, que bien pueden estar presentes desde los primeros años de la

Educación Básica, proponen nuevos retos y perspectivas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en tanto que permiten reorganizaciones curriculares, pues no sólo realizan de manera rápida y eficiente tareas rutinarias, sino que también integran diferentes tipos de representaciones para el tratamiento de los conceptos (tablas, gráficas, ecuaciones, simulaciones, modelaciones, etc.). Todo esto facilita a los estudiantes centrarse en los procesos de razonamiento propio de las matemáticas y, en muchos casos, puede poner a su alcance problemáticas antes reservadas a otros niveles más avanzados de la escolaridad.

6. **Refinar los procesos de evaluación**

   La evaluación formativa ha de poner énfasis en la valoración permanente de las distintas actuaciones de los estudiantes cuando interpretan y tratan situaciones matemáticas y a partir de ellas formulan y solucionan problemas. Estas actuaciones se potencian cuando el docente mantiene siempre la exigencia de que los estudiantes propongan interpretaciones y conjeturas; proporcionen explicaciones y ampliaciones argumenten, justifiquen y expliquen los procedimientos seguidos o las soluciones propuestas.

   La evaluación formativa como valoración permanente integra la observación atenta y paciente como herramienta necesaria para obtener información sobre la interacción entre estudiantes, entre éstos y los materiales y recursos didácticos y sobre los procesos generales de la actividad matemática tanto individual como grupal. Además, el registro de las evidencias por parte del docente, complementado con los registros que cada estudiante debe llevar de su propio trabajo ayuda para que los estudiantes se apropien de su propio avance y asuman la responsabilidad conjunta en su aprendizaje.

3.7. La integración de las Tics en matemáticas

La educación básica y media debe tener como propósito que los estudiantes alcancen las "Competencias Matemáticas" necesarias para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos. Que puedan a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, llegar a resultados que les permitan comunicarse y hacer interpretaciones y representaciones; es decir, descubrir que las matemáticas si están relacionadas con la vida y con las situaciones que los rodean, más allá de las paredes de la escuela.

Para lograr este propósito es necesario propiciar un cambio en la forma de enseñar las matemáticas ya que la enseñanza tradicional en esta asignatura ha probado ser poco efectiva [18]. Según los reportes del Consejo Nacional de Docentes de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, por sus siglas en Inglés), los docentes deberían tener en cuenta las mejores prácticas para enseñar matemáticas sugeridas por ellos en el libro "Mejores Prácticas, Nuevos Estándares para la Enseñanza y el Aprendizaje", a saber:

- Ayudar a que todos los estudiantes desarrollen capacidad matemática.
- Ofrecer experiencias que estimulen la curiosidad de los estudiantes y construyan confianza en la investigación, la solución de problemas y la comunicación.
- Realizar actividades que promuevan la participación activa de los estudiantes en hacer matemáticas en situaciones reales.
- Entender y utilizar patrones y relaciones, estos constituyen una gran parte de la habilidad o competencia matemática.
- Propiciar oportunidades para usar el lenguaje con el fin de comunicar ideas matemáticas.

- Ofrecer experiencias en las que los estudiantes puedan explicar, justificar y refinar su propio pensamiento, sin limitarse a repetir lo que dice un libro de texto.
- Desarrollar competencia matemática por medio de la formulación de problemas y soluciones que involucren decisiones basadas en recolección de datos, organización, representación (gráficas, tablas) y análisis.

En cuanto a la integración de las Tics en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, Andee Rubin agrupa en cinco categorías los diferentes tipos de herramientas para crear ambientes enriquecidos por la tecnología: conexiones dinámicas; herramientas avanzadas; comunidades ricas en recursos matemáticos; herramientas de diseño y construcción; y herramientas para explorar complejidad. Los más importantes de los anteriores aspectos, se describen a continuación:

1. Conexiones dinámicas manipulables

   Las Matemáticas están cargadas de conceptos abstractos (invisibles) y de símbolos. En este sentido, la imagen cobra un valor muy importante en esta asignatura ya que permite que el estudiante se acerque a los conceptos, sacándolos de lo abstracto mediante su visualización y transformándolos realizando cambios en las variables implícitas. En los grados de primaria se usan objetos físicos manipulables como apoyo visual y experimental; en secundaria, se utilizan manipulables virtuales cuando no es posible tener objetos físicos. El Software para Geometría Dinámica posibilita ver qué sucede al cambiar una variable mediante el movimiento de un control deslizador (al tiempo que se mueve el deslizador, se pueden apreciar las distintas fases o etapas de los cambios en la ecuación y en su representación gráfica). Las simulaciones son otra herramienta valiosa para integrar las TICs en el currículo, especialmente en matemáticas y física. Estas proveen representaciones interactivas de la realidad que permiten descubrir mediante la manipulación cómo funciona un fenómeno, qué lo afecta y cómo este influye en otros fenómenos.

2. Herramientas avanzadas

   Las hojas de cálculo, presentes en todos los paquetes de programas de computador para oficina, pueden ser utilizadas por los estudiantes en la clase de matemáticas como herramienta numérica (cálculos, formatos de números); algebraica (formulas, variables); visual (formatos, patrones); gráfica (representación de datos); y de organización (tabular datos, plantear problemas). Por otro lado, a pesar de la controversia que genera el uso de calculadoras por parte de los estudiantes, hay mucha evidencia que soporta su uso apropiado para mejorar logros en matemáticas. Las calculadoras gráficas enfatizan la manipulación de símbolos algebraicos, permitiendo graficar funciones, ampliarlas, reducirlas y comparar las gráficas de varios tipos de funciones. Adicionalmente, las herramientas para graficar y analizar datos posibilitan que el estudiante descubra patrones en datos complejos, ampliando de esta forma su razonamiento estadístico. El nivel de tecnología utilizada en las empresas es cada día mayor. Muchos puestos de trabajo incluyen herramientas informáticas (hoja de cálculo, calculadora, calculadora gráfica, software para analizar y graficar datos) y se espera del sistema educativo que prepare a los estudiantes para desenvolverse con propiedad con estas tecnologías.

3. Comunidades ricas en recursos matemáticos

   Los maestros pueden encontrar en Internet miles de recursos para enriquecer la clase de matemáticas, como: simulaciones, proyectos de clase, calculadoras; software para resolver ecuaciones, graficar funciones, encontrar derivadas, elaborar exámenes y ejercicios,

convertir unidades de medida, ejercitar operaciones básicas, construir y visualizar figuras geométricas, etc. El desarrollo profesional es otro aspecto en el cual la internet hace una contribución importante: cientos de cursos en varios campos de la matemática; foros y listas de discusión que se convierten en espacios de conversación e intercambio de información, en los que participan docentes de todo el mundo; descarga de artículos y trabajos académicos escritos por autoridades en esta área; suscripción a boletines y revistas electrónicas, etc.

4. Herramientas para explorar complejidad

   Un desarrollo importante de la tecnología en el campo de las matemáticas consiste en el creciente número de herramientas para el manejo de fenómenos complejos. Se destaca en esta categoría el software para modelado de sistemas específicos que permite, a quienes no sean programadores, crear "agentes" con comportamientos y misiones, enseñar a estos a reaccionar a cierta información y procesarla en forma personalizada. Además, mediante la combinación de varios agentes, se pueden crear sofisticados modelos y simulaciones interactivas. La teoría del caos y los fractales también son campos en los cuales la tecnología impacta las matemáticas. Por otro lado, un conjunto de herramientas del proyecto SimCalc permiten enseñar conceptos de cálculo por medio de micromundos animados y gráficas dinámicas. Los estudiantes pueden explorar el movimiento de actores en estos micromundos simulados, y ver las gráficas de actividad, posibilitando la comprensión de importantes ideas del cálculo. Explorar estos conceptos realizando cálculos manuales es prácticamente imposible dado el número astronómico de operaciones necesarias para poder apreciar algún tipo de patrón. El uso de computadores permite al estudiante concentrarse en el análisis de los patrones y no en las operaciones matemáticas necesarias para que estos aparezcan.

   Las herramientas tecnológicas, agrupadas en estas cinco categorías, ofrecen al docente de matemáticas la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos para que los estudiantes perciban las matemáticas como una ciencia experimental y un proceso exploratorio significativo dentro de su formación.

3.8. Acerca de Cabri II Plus

Como Cabri II Plus es el recurso didáctico usado para el desarrollo de este proyecto, por estar previamente instalado en los ordenadores del colegio Llano Oriental. Además, su versión de evaluación puede ser descargada de la página web: *www.cabri.com/es/descargar-cabri-2-plus*. A continuación se describirá y hará mención a los beneficios que contiene:

3.8.1. Qué es Cabri II Plus

Cabri II Plus [19], es el "CAhier de BRouillon Interactif" (Cuaderno de Borrador Interactivo) diseñado por Jean Marie Laborde y Franck Bellemain en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble (Francia) y experimentado en sus aulas para construir figuras geométricas. Permite construir objetos geométricos, visualizarlos de forma dinámica, manipularlos, transformarlos y realizar medidas sobre ellos. Permite estudiar en el plano todo tipo de propiedades geométricas y lugares geométricos de forma sencilla e intuitiva. Muy fácil de utilizar para los alumnos. Con un despliegue en pantalla idéntico al de los principales programas para oficina actuales, Cabri II Plus ofrece una interfase estructurada utilizable de forma prácticamente intuitiva. Sus principales características son:

- Barra de título: nombre del archivo que contiene la figura.

- Barra de menús: comandos encontrados en los programas usuales (Archivo, Edición, Opciones, Ventana, Ayuda).
- Barra de herramientas: herramientas que permiten construir y manipular la figura (punto, recta, curva, círculo, punto medio, etc.).
- Familia de cursores.

El programa permite realizar con el ordenador todas las construcciones que se pueden realizar con regla, compás y las herramientas habituales de dibujo, pero con este programa se pueden manipular directamente las figuras construidas en la pantalla mediante el arrastre con el ratón de ciertas partes de ellas. De hecho, una vez elaborada una figura geométrica, Cabri II Plus reconoce cuáles son las partes (de dicha figura) que pueden ser arrastradas. Es fundamental señalar que esto ocurre, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura, lo que le convierte en una herramienta muy valiosa para el estudio de invariantes y propiedades geométricas de carácter general de los objetos geométricos. En concreto es un instrumento de primer orden para el estudio dinámico de lugares geométricos.

3.8.2. Construcciones básicas

Las principales construcciones que se pueden realizar son:

- Puntos aislados, sobre un objeto, como intersección.
- Figuras rectilíneas: rectas, semirrectas, segmentos, vectores, triángulos, polígonos y polígonos regulares.
- Figuras curvilíneas: circunferencias, arcos de circunferencia, cónicas.
- Construcciones y herramientas: punto medio, recta perpendicular, recta paralela, mediatriz, bisectriz, suma de vectores, construcciones con compás, transferir medidas, lugares geométricos.
- Movimientos en el plano: simetría central y axial, traslación, rotación, homotecia e inversión.
- Determinación de posiciones relativas: pertenece un punto a un objeto, están alineados tres puntos, es equidistante, son paralelas dos rectas, son perpendiculares.
- Medidas: coordenada, distancia, longitud, área, ángulo, pendiente, ecuación, valores numéricos de expresiones algebraicas, crear tablas. - Elementos de edición: texto sobre objetos, números, expresiones.
- Marcas sobre objetos: ángulos, hacer trazas, animar objetos.
- Elementos de diseño gráfico: color, espesor, llenado, ocultar, mostrar, aspecto, punteado, ejes, cuadrícula.

Cabri II Plus permite desplegar lugares geométricos, de puntos u objetos, de lugares, y también permite las intersecciones con lugares. Eso no es todo, con su herramienta "ecuación", Cabri II Plus permite obtener la ecuación de un lugar en el caso de las curvas algebraicas.

3.8.3. Aplicaciones en clase

El programa Cabri II Plus [20], permite estudiar figuras geométricas en movimiento. Esta facultad nos permitirá:

- Estudio de la rigidez y deformabilidad de una figura.
- Movimientos que conservan algunas propiedades.
- Definición apropiada de figuras en el Cabri II Plus con el fin de que tengan propiedades invariantes si son sometidas a movimientos de sus componentes.
- Definición de una figura mediante movimientos y simetrías y posterior estudio métrico.
- Comprobación de teoremas (Pitágoras, Tales, etc.) en figuras con elementos móviles.

La facilidad de definición de movimientos, semejanzas y simetrías y la posibilidad de ocultar líneas auxiliares nos permiten la búsqueda de elementos notables entre figuras homólogas. En particular se puede realizar:

- Búsqueda por tanteo del centro y ángulo de giro o de ejes de simetría.
- Construcción de vectores de traslación.
- Construcción de figuras mediante movimientos.

Es muy interesante la combinación de elementos fijos y móviles para estudiar cómo cambian algunas relaciones según la distinta posición de algunos elementos:

- Diferencias entre altura, bisectriz y mediana en un triángulo. Relaciones métricas.
- Tangentes, cuerdas y secantes a una circunferencia.
- Cuerda común a dos circunferencias.

La posibilidad de definir macros permitirá a los alumnos mayores sintetizar en pocos elementos la definición de una figura:

- Construcción de paralelogramos mediante traslaciones, ángulos o puntos.
- Dibujo de polígonos regulares mediante giros y simetrías.
- Construcción de figuras nuevas mediante movimientos de otras conocidas.

En concreto para estudiantes de grado noveno el programa se puede utilizar para estudiar los siguientes conceptos:

- Figuras semejantes.
- Teorema de Thales.
- Relación entre las áreas de figuras semejantes.
- Ángulos y áreas.

- Relaciones de dependencia.
- Lugar geométrico.
- Ecuación de la recta.
- Ecuación de la parábola.

3.8.4. Valoración didáctica

El programa Cabri II Plus es de fácil manejo y no requiere de mucho tiempo y esfuerzo para su aprendizaje. Al tratarse de un programa de dibujo se pueden comprobar los aciertos y errores de la construcción de forma automática.

La manipulación directa de los objetos geométricos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el alumno. Además, su conocimiento queda marcado por relación directa entre percepción y conceptualización durante la interacción con el programa y la socialización en el marco de la clase.

Cabri II Plus incorpora herramientas de medida directa de los objetos construidos lo que permite desarrollar no sólo un enfoque sintético de la geometría sino que hace posible abordar problemas métricos sobre objetos geométricos reales, algo poco trabajado en clase hasta ahora.

Dado el control formal del entorno, las experiencias desarrolladas pueden considerarse como genuinas investigaciones geométricas. La visualización y las representaciones externas permiten atender otro problema medular del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas: el problema de la validación de los enunciados matemáticos y de la comprobación de los resultados.

3.8.5. Metodología de uso

Cabri II Plus facilita una metodología activa en la que los alumnos además de construir figuras, pueden experimentar con ellas, comprobar conjeturas, descubrir propiedades y, en definitiva, hacer Geometría. El papel del profesor será fundamentalmente, el de preparar el material impreso de apoyo, observar y ayudar para resolver las dudas particulares de cada equipo, el de motivar para la actividad y promover la reflexión, el intercambio de conjeturas y conclusiones, etc.

Se puede plantear dos posibilidades de uso del programa:

1. El trabajo con toda la clase en el aula de informática con equipos estables de dos alumnos por ordenador con prácticas guiadas y desarrollando auténticas investigaciones geométricas y de descubrimiento de propiedades de los objetos estudiados. En este caso, las actividades han de ser auto-explicativas para que los alumnos vayan teniendo cada vez más autonomía. También serán necesarias explicaciones al grupo (sobre todo al comienzo de cada sesión en que conviene aclarar el sentido de lo que se va hacer y puede que también cómo transcurrió la sesión anterior).
2. El uso como pizarra electrónica en la clase ordinaria por parte del profesor o de los alumnos para poner de manifiesto propiedades de las figuras y cuerpos, relaciones entre los elementos de las figuras, resultados métricos, para mostrar situaciones y realizar comprobaciones. Mediante la aplicación Cabriweb se pueden pasar los modelos a formato html lo que hace posible verlos con un navegador en ordenadores que no tienen el programa Cabri II Plus cargado.

CAPÍTULO 4

Propuesta de actividades

4.1. Acerca de la propuesta

La tabla 4.1 muestra aspectos identificados y esperados sobre el pensamiento matemático en estudiantes de grado noveno del Colegio Llano Oriental IED de la localidad Séptima (Bosa) de la ciudad de Bogotá D.C.

Aspecto	Para la propuesta
Pensamiento numérico y los sistemas numéricos.	Los estudiantes deben reconocer, representar, operar y utilizar las propiedades de manera eficaz de los sistemas numéricos, en especial de los números reales en situaciones de potenciación, radicación, racionalización y ubicación en el plano cartesiano.
Pensamiento espacial y los sistemas geométricos.	Las nociones de punto, de línea recta y curva, de regiones planas y de cuerpos sólidos se han desarrollado desde procesos anteriores usando representaciones en el plano cartesiano.
Pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas.	El pensamiento métrico de los estudiantes está estrechamente relacionado con el cálculo de longitudes, perímetros y áreas; por eso, conviene brindar otros elementos conceptuales matemáticos desde las variaciones y funciones.
Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.	El desarrollo de este pensamiento en estudiantes de grano noveno debe atender al estudio de las actividades algebraicas, pues son éstas las que permiten identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas y de modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.

Tabla 4.1: Sobre el pensamiento matemático y componentes del pensamiento matemático en grado 9.

La tabla 4.2 muestra la forma de abordar en la propuesta las estrategias de evaluación consignadas en los Estándares Curriculares (ver [2]).

Aspecto	Para la propuesta
Partir de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas.	Para este proyecto se trabajará desde el programa Cabri II Plus con actividades que involucran problemas con funciones cuadráticas (gráficas de parábolas y reconocimiento de un máximo y de un mínimo).
Diseñar procesos de aprendizaje mediados por escenarios culturales y sociales.	Las interacciones entre y con los estudiantes de grado noveno son muy importantes para el desarrollo conceptual y procedimental de ellos, para las modificaciones de las actividades y para la evaluación del proyecto en su totalidad, porque contribuirán a mejorar la calidad de las matemáticas en el colegio.
Fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas.	El proyecto busca dar seguridad a los estudiantes para el concepto de función cuadrática desde problemas con situaciones de variación y en el manejo de programas que le servirán para resolver problemas de otras disciplinas y en la Educación Superior.
Vencer la estabilidad e inercia de las prácticas de la enseñanza.	Con la revolución y renovación curricular del Colegio Llano Oriental al trabajo por ciclos exigido por la SED, con la propuesta se busca relacionar las siguientes dos herramientas para la vida: - Profundizar el aprendizaje de las matemáticas y ciencias. - Fomentar el uso pedagógico de la informática y de los medios de comunicación.
Aprovechar la variedad y eficacia de los recursos didácticos.	El principal recurso para la realización de este proyecto será un software especializado para aprender y ejercitar conceptos y procedimientos básicos de la geometría y del álgebra, y ayudará en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos: Cabri II Plus.
Refinar los procesos de evaluación.	La evaluación de los estudiantes y de las actividades busca ser continua, donde los registros sobre el desarrollo de las actividades serán de forma digital, guardadas en medios magnéticos o enviadas por correo electrónico.

Tabla 4.2: Sobre las estrategias de evaluación.

4.2. Medología de las actividades

La propuesta se fundamenta en un trabajo activo desde una secuencia de actividades organizadas por etapas, buscando favorecer progresivamente, desde otra manera de trabajar y razonar en procesos geométricos y variacionales, el concepto de función cuadrática en estudiantes de grado noveno.

Para que las actividades sean orientadas hacia un aprendizaje significativo de la función cuadrática se reconocen los siguientes factores pedagógicos y didácticos a tener en cuenta:

Título:
Se escribe el nombre de la actividad que se pretende desarrollar.

Preconceptos:
Son todos aquellos conceptos que el estudiante ya debe manejar o conocer para poder realizar satisfactoriamente la actividad.

Objetivo:
Es el propósito general (intensión y sentido) de la actividad para el aprendizaje de los estudiantes.

Conceptos a trabajar:
Son las temáticas que se utilizarán o desarrollarán durante la actividad.

Metodología:
En ella se explícita la forma de trabajo que llevarán a cabo los estudiantes y el papel que juega el docente durante dicho proceso.

Descripción:
Se explícita la cantidad de preguntas y la intención de cada una sustentada desde un referente didáctico.

Criterios de evaluación:
Son alcances conceptuales, procedimentales y actitudinales mínimos que se deben reconocer en un estudiante en la implementación de toda actividad.

Resultados esperados:
Son las evidencias asopciadas a los objetivos planteados en toda actividad.

Guía de trabajo:
Estas guías son las que trabajarán los estudiantes. Además, los materiales que se solicitan en cada actividad deben ser diseñados o pedidos con anterioridad a los estudiantes.

Ideas para seguir adelante:
Son sugerencias que invitan a profundizar en temas asociados a las actividades.

4.3. Actividad No. 01

Título:
Explorando Cabri II Plus.

Preconceptos:
- Uso básico del computador.
- Polígono y circunferencia.
- Longitud y área.

Objetivo:
Reconocer y familiarizarse con el programa Cabri II Plus.

Conceptos a trabajar:
- Traslación.
- Áreas.
- Dependencia.

Metodología:
La actividad será desarrollada por pares de estudiantes para que realicen descripciones y construcciones gráficas. Se hará entrega de la guía-taller por medio electrónico para que los estudiantes exterioricen sus nociones geométricas y vayan comunicando las impresiones del momento, y al finalizar la reenvíen para evaluarla. El docente orientará y fomentará la participación y la comunicación de los estudiantes, y de ser necesario intervendrá y aclarará dudas en cuanto al uso de las herramientas que ofrece Cabri II Plus.

Descripción:
Se inicia el desarrollo de la propuesta con un reconocimiento del programa Cabri II Plus; con los puntos del 1 al 3 que indagan sobre la presentación, la barra de menús y las principales herramientas para la construcción de figuras rectilíneas y curvilíneas. La exploración del programa se da porque *"Los recursos didácticos, entendidos no sólo como el conjunto de materiales apropiados para la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se estructuran las situaciones problema más apropiadas para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, deben ser analizados en términos de los elementos conceptuales y procedimentales que efectivamente permiten utilizarlos si ya están disponibles, o si no existen, diseñarlos y construirlos."* [2]

Con los puntos del 4 al 6 se pondrán en juego las nociones geométricas, métricas y variacionales de los estudiantes, como son el reconocimiento de polígonos regulares e irregulares, elementos de las circunferencias y círculos, desplazamiento de puntos, figuras semejantes y comparación de áreas. Además, estos problemas serán el inicio de una participación activa para el desarrollo de la propuesta sobre variaciones y áreas, donde las indicaciones y la comunicación serán primordiales para las otras actividades usando el programa Cabri II Plus.

Con el punto 7 se espera iniciar la discusión sobre la construcción de funciones en el plano cartesianas desde un entorno más geométrico. En el último punto los estudiantes realizarán una evaluación del desarrollo y alcances de la actividad.

Criterios de evaluación:

- Muestra una actitud positiva frente a la actividad de exploración, participando y generando inquietudes de manera individual y/o grupal.

Resultados esperados:
- Los estudiantes percibirán una relación entre la geometría y la variación.

Guía de trabajo:
(Ver página siguiente.)

ACTIVIDAD No. 01: EXPLORANDO CABRI II PLUS

NOMBRE: _____ CURSO: _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Abran el programa Cabri II Plus y realicen una descripción de lo que observan en la ventana principal.

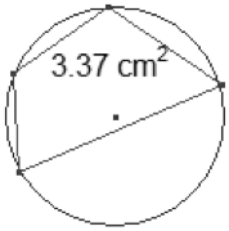
2. Exploren los menús del programa Cabri II Plus y describan cuáles creen son las funciones de cada uno.

   Archivo: _____
   Edición: _____
   Opciones: _____
   Sesión: _____
   Ventana: _____
   Ayuda: _____

3. Exploren la barra de herramientas de Cabri II Plus y clasifiquen en la tabla adjunta las siguientes herramientas de acuerdo a su principal uso.

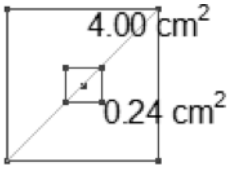
Herramienta para construcción geométrica.
Herramienta para realizar cálculos o mediciones.
Herramienta para cambiar atributos (color, grosor, etc.)
Herramienta para insertar textos, expresiones o tablas.
Herramienta para comparar relaciones entre objetos.

4. Con la herramienta ***Circunferencia*** , construyan una circunferencia y con la herramienta ***Polígono*** un cuadrilátero cuyos vértices estén sobre la circunferencia (ver imagen). A continuación, utilicen la herramienta ***Área*** sobre el cuadrilátero y muevan sus puntos alrededor de la circunferencia para observar cómo varía su área.



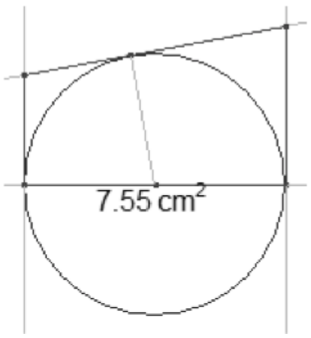
¿Dónde deben ubicar los puntos para que el área del cuadrilátero sea máxima? Explicar.

5. Con ayuda de la herramienta ***Polígono Regular*** construyan un cuadrado y calculen su ***Área***. A continuación con ayuda de la herramienta ***Segmento*** tracen una diagonal del cuadrado y construyan otro cuadrado de manera que uno de sus vértices esté sobre la diagonal. (ver imagen)



¿A qué distancia del centro se debe ubicar el vértice para que el área del cuadrado menor sea la mitad del cuadrado mayor? Explicar.

6. Tracen una ***Recta*** y construyan una ***Circunferencia*** cuyo centro sea un punto de la recta, y hallen los puntos de intersección de la recta y la circunferencia con ayuda de la herramienta ***Punto(s) de intersección***. Por cada uno de los puntos de intersección tracen ***Rectas Perpendiculares*** a la recta inicial. Luego, tracen un radio de la circunferencia que no esté sobre la recta inicial con ayuda de la herramienta ***Segmento*** y tracen una tercera recta perpendicular al segmento por el punto final sobre la circunferencia. Halle los puntos de intersección entre las rectas perpendiculares, y finalmente construya un trapecio rectángulo con ayuda de la herramienta ***Polígono*** que pase por los cuatro puntos de intersección y calculen su área (ver figura)



Al mover el punto del segmento sobre la circunferencia:

   (a) ¿Cuál es el trapecio rectángulo de área mínima? Explicar

   (b) ¿Cuál es el trapecio rectángulo de área máxima? Explicar

7. Respondan: ¿Creen que es posible representar funciones con este programa? ¿Por qué?

8. Marquen con una X su opinión en los siguientes aspectos

De la clase	Pobre	Regular	Aceptable	Buena	Excelente
1. Las indicaciones estuvieron dadas de forma					
2. El contenido abordado fue					
3. El tiempo fue					
4. El estado de los computadores fue					
De los estudiantes	Pobre	Regular	Aceptable	Bueno	Excelente
5. La motivación e interés que generó fue					
6. La interacción con mis compañeros fue					
7. La utilidad del programa fue					
8. ¿Cómo calificaría esta actividad?					
¿Por qué?					

Ideas para seguir adelante:

- En el punto 4 de la guía cambiar el cuadrilátero por un triángulo, hacer la construcción en Cabri II Plus y responder la pregunta.

- En el punto 6 de la guía cambiar el trapecio rectángulo por uno isósceles utilizando Cabri II Plus y determinar el trapecio isósceles de mayor área.

4.4. Actividad No. 02

Título:
Usando el plano cartesiano.

Preconceptos:
- Plano cartesiano
- Polígono y circunferencia.
- Longitud y área.
- Tabulación de datos

Objetivo:
Reconocer el plano como sistema de representación para objetos geométricos y posteriormente para funciones.

Conceptos a trabajar:
- Plano cartesiano
- Circunferencia y radio
- Áreas
- Dependencia

Metodología:
La actividad será desarrollada por pares de estudiantes para que realicen descripciones y construcciones gráficas. Se hará entrega de la guía-taller por medio electrónico para que los estudiantes exterioricen sus nociones geométricas y vayan comunicando las impresiones del momento, y al finalizar la reenvíen para evaluarla. El docente orientará y fomentará la participación y la comunicación de los estudiantes, y de ser necesario intervendrá y aclarará dudas en cuanto al uso de las herramientas que ofrece Cabri II Plus.

Descripción:
La actividad consta de 8 puntos para iniciar el uso del plano cartesiano en Cabri II Plus. El punto 1 busca indagar las nociones de los estudiantes sobre el plano cartesiano. El punto 2 trata de la ubicación de puntos de coordenadas enteras, dado que *"una idea fundamental para el estudio de funciones, fue la de conectar el concepto de función con la representación geométrica de una curva. La representación gráfica más clásica y más común es la de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares que consiste en elegir dos rectas perpendiculares, el eje x de abscisas horizontales y el eje y de ordenadas vertical, y fijar una dirección positiva sobre cada una de ellas. El punto de intersección de las rectas, O, se llama origen de coordenadas. A cada punto del plano le asignamos dos números x e y que son sus coordenadas y que indican la distancia con signo del punto P a los ejes de ordenadas y de abscisas, respectivamente. Las coordenadas de un punto P se escriben $P(x, y)$."* [3]

De los puntos 3 al 5 se refieren a la dependencia entre el radio y el área de una circunferencia, donde los estudiantes de la visualización del cambio deben pasar al registro de datos en una tabla. Y con el punto 6 los estudiantes realizarán una evaluación del desarrollo y alcances de la actividad.

Criterios de evaluación:
- Relaciona la dependencia de dos magnitudes desde las representaciones geométrica y tabular.

- Identifica el fenómeno de variación, lo describe y es capaz de predecir cambios.

Resultados esperados:
- Los estudiantes analizarán una misma variación desde las representaciones geométrica y tabular.

Guía de trabajo:
(Ver página siguiente.)

ACTIVIDAD No. 02: USANDO EL PLANO CARTESIANO

NOMBRE: _____ CURSO: _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Abran el programa Cabri II Plus, activen la herramienta ***Mostrar los ejes*** (ver imagen) y respondan:

   (a) ¿Cómo se llama este sistema de coordenadas?

   _____

   _____

   (b) ¿En qué actividades matemáticas lo han visto o usado? Explicar.

   _____

   _____

   (c) ¿Es posible ubicar dos puntos separados tengan las mismas coordenadas? Explicar.

   _____

   _____

2. Activen la herramienta ***Rejilla*** y luego dar clic sobre uno de los ejes, lo que genera los puntos de coordenadas enteras que sirven de referencia para que usando la herramienta Polígono construyan para cada numeral el polígono cuyos vértices están dados en orden:

   (a) $(0,+9)$; $(+1,+9)$; $(+1,-3)$; $(+4,-3)$; $(+4,-2)$; $(+8,-2)$; $(+8,-4)$; $(+5,-7)$; $(-5,-7)$; $(-8,-4)$; $(-8,-3)$; $(0,-3)$; $(0,+9)$

   (b) $(-5,-4)$; $(-4,-4)$; $(-4,-5)$; $(-5,-5)$; $(-5,-4)$

   (c) $(-2,-4)$; $(-1,-4)$; $(-1,-5)$; $(-2,-5)$; $(-2,-4)$

   (d) $(+1,-4)$; $(+2,-4)$; $(+2,-5)$; $(+1,-5)$; $(+1,-4)$

   (e) $(+4,-4)$; $(+5,-4)$; $(+5,-5)$; $(+4,-5)$; $(+4,-4)$

   (f) $(-1,+9)$; $(-5,+5)$; $(-8,-2)$; $(-1,-2)$; $(-1,+9)$

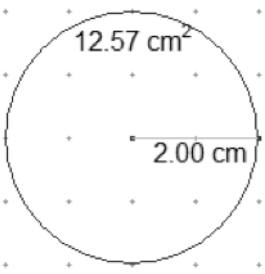
   (g) $(+2,-2)$; $(+7,-1)$; $(+2,+7)$; $(+2,-2)$

   (h) $(0,+9)$; $(+1,+9)$; $(+1,-3)$; $(+4,-3)$; $(+4,-2)$; $(+8,-2)$; $(+8,-4)$; $(+5,-7)$; $(-5,-7)$; $(-8,-4)$; $(-8,-3)$; $(0,-3)$; $(0,+9)$

   ¿A qué objeto se parece? _____

   Con la herramienta ***Rellenar*** coloréenlo y luego guárdenlo en Escritorio.

3. En una nueva ventana de Cabri II Plus activen los ***Ejes*** y la ***Rejilla***. A continuación construyan una ***Circunferencia*** cuyo centro y radio sean puntos de la rejilla (coordenadas enteras), y tracen el radio de la circunferencia con ayuda de la herramienta ***Segmento***. Luego, calculen la distancia del radio con ayuda de la herramienta ***Distancia o longitud*** y el ***Área*** del círculo (ver imagen).



4. Varíen la medida del radio para obtener 8 diferentes áreas y completen la siguiente tabla, donde se relacionan la longitud del radio con la respectiva área del círculo (ver el ejemplo).

Radio en cm	Área en cm^2
Ejemplo: 2	12,57

5. Dado que el área de un círculo con radio $10cm$ es $314,16cm^2$, determinen con ayuda del programa ¿si al disminuir el radio a la mitad ($5cm$) se obtendría la mitad del área? Explicar.

_____

_____

_____

6. Marquen con una X su opinión en los siguientes aspectos

De la clase	Pobre	Regular	Aceptable	Buena	Excelente
1. Las indicaciones estuvieron dadas de forma					
2. El contenido abordado fue					
3. El tiempo fue					
4. El estado de los computadores fue					
De los estudiantes	**Pobre**	**Regular**	**Aceptable**	**Bueno**	**Excelente**
5. La motivación e interés que generó fue					
6. La interacción con mis compañeros fue					
7. La utilidad del programa fue					
8. ¿Cómo calificaría esta actividad?					
¿Por qué?					

Ideas para seguir adelante:

- En el punto 3 de la guía cambiar el círculo por un cuadrado usando la herramienta ***Polígono regular*** de Cabri II Plus, y responder las preguntas 4 y 5 considerando en vez del radio, el lado del cuadrado.

- En el punto 3 de la guía cambiar el círculo por un hexágono regular usando la herramienta ***Polígono regular*** de Cabri II Plus, y responder las preguntas 4 y 5 considerando en vez del radio, el lado del cuadrado.

4.5. Actividad No. 03

Título:
Área de triángulos

Preconceptos:
- Clasificación de triángulos
- Base y área
- Plano cartesiano

Objetivo:
Involucrar a los estudiantes al uso y correlación de las representaciones verbal, geométrica, métrica y gráfica en las relaciones de dependencia e independencia entre longitudes y áreas.

Conceptos a trabajar:
- Área de triángulos
- Semejanza de triángulos
- Dependencia e independencia
- Expresión algebraica
- Función creciente
- Dilatación

Metodología:
La actividad inicialmente se realizará por pares de estudiantes, quienes explorarán, propondrán y argumentarán sus acciones e impresiones que los lleven a solucionar la guía de trabajo. Después de completar los estudiantes las guías, el docente dirigirá la socialización de las diferentes respuestas al análisis de la variación para establecer puntos en común y las acciones para seguir adelante.

Descripción:
Para el desarrollo de la actividad se deben tener preparadas las plantillas interactivas en Cabri II Plus (ver Anexos 1 y 2). Con el punto 1 se indaga sobre la noción de triángulo equilátero de los estudiantes. Con los puntos del 2 al 4 se plantea la búsqueda de una regularidad al observar la dependencia del área de un triángulo equilátero al variar la longitud de su base. Después con los puntos 5 y 6 se da paso a establecer una regularidad entre el área de dos triángulos semejantes a razón 1 a 4 para observar las respectivas dependencias y gráficas.

Esta actividad es necesaria porque *"En el álgebra escolar se incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con ayuda de los símbolos. [...] El concepto de función es una de las principales ideas de la matemática por ello el estudio de ésta deberá centrarse en indagar relaciones en contextos significativos para los alumnos y usando diversos métodos de representación para analizar dichas relaciones. [...] El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas a medida que se desarrolla este razonamiento se vas progresando en el uso del lenguaje y simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones las variables y las funciones."* [16]

Criterios de evaluación:

- Completa la tabla adjudicando un significado de variación entre la base y el área.
- Describe la situación de cambio desde la gráfica.

Resultados esperados:

- Los estudiantes reconocerán que el área se relaciona con el tamaño del triángulo.
- Los estudiantes relacionarán las representaciones tabular y gráfica para la descripción de fenómenos de cambio.

Guía de trabajo:

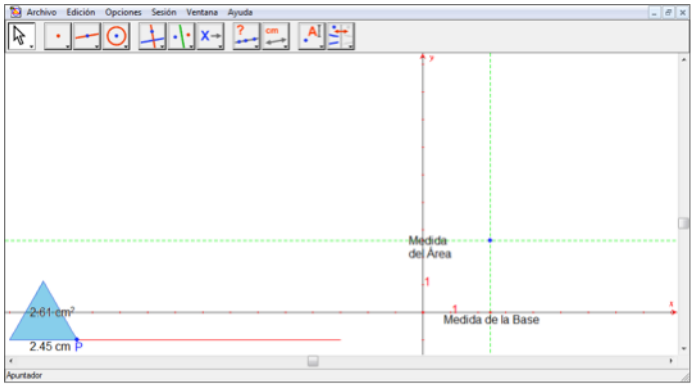
(Ver página siguiente.)

ACTIVIDAD No. 03: ÁREA DE TRIÁNGULOS

NOMBRE: _____ CURSO: _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Abran el archivo **"Triángulos1.fig"** de Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece un triángulo azul con las medidas de su base y su área, y un plano cartesiano.



   ¿Qué tipo de triángulo es? Explicar.

   _____

   _____

2. Con el Cursor muevan el punto P horizontalmente para variar la base del triángulo y observen cómo cambia su área. ¿Cuál es respectivamente el área del triángulo cuando la base tiene las siguientes medidas?

Lado (cm)	1,2	2,5	3,2	3,9	6,7	9,1
Área (cm^2)						

3. Describan la gráfica trazada en el plano cartesiano: ¿qué forma tiene? ¿cómo crece la gráfica? ¿con qué asociarían esta gráfica?

   _____

   _____

   _____

   _____

   _____

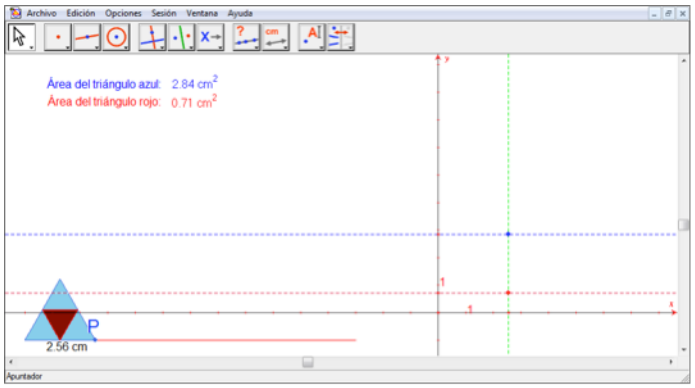
4. ¿Cuál es la fórmula o expresión para calcular el área de este tipo de triángulo? Explicar.

   _____

   _____

   _____

5. Abran el archivo **"Triángulos2.fig"** de Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece el área para dos triángulos (azul y rojo), la medida de la base del triángulo azul y un plano cartesiano.



(a) ¿Qué tipo de triángulo es el rojo? ¿Por qué?

(b) ¿Cómo creen se construyó ese triángulo? Explicar.

(c) ¿Cuál es la razón entre las áreas del triángulo azul y la del triángulo rojo?

6. Con el Cursor muevan el punto P horizontalmente para variar la base del triángulo azul y describan las gráficas obtenidas en el plano cartesiano.

(a) ¿Cuál de las dos gráficas se separa más rápido del eje x (crecer)? ¿Por qué creen pasa eso?

(b) ¿Cuál de las dos gráficas se separada más rápido del eje y (dilatar o expandir)? ¿Por qué creen pasa eso?

(c) ¿Cuáles son las respectivas fórmulas o expresiones para calcular el área del triángulo azul y del triángulo rojo?

(d) ¿Desde las fórmulas o expresiones se podrán determinar cuál de las dos curvas crece más rápido? Explicar.

7. Marquen con una X su opinión en los siguientes aspectos

De la clase	Pobre	Regular	Aceptable	Buena	Excelente
1. Las indicaciones estuvieron dadas de forma					
2. El contenido abordado fue					
3. El tiempo fue					
4. El estado de los computadores fue					
De los estudiantes	**Pobre**	**Regular**	**Aceptable**	**Bueno**	**Excelente**
5. La motivación e interés que generó fue					
6. La interacción con mis compañeros fue					
7. La utilidad del programa fue					
8. ¿Cómo calificaría esta actividad?					
¿Por qué?					

Ideas para seguir adelante:

- Si en el punto 5 cambiamos la construcción de los triángulos azul y rojo por , respondan las preguntas de los puntos 5 y 6.

4.6. Actividad No. 04

Título:
Área de Paralelogramos

Preconceptos:
- Cuadrados y paralelogramos
- Base y área
- Plano cartesiano
- Expresión algebraica

Objetivo:
Presentar de una manera significativa la función cuadrática y su gráfica cartesiana a partir de la manipulación y construcción de paralelogramos.

Conceptos a trabajar:
- Área de paralelogramos
- Dependencia e independencia
- Expresión algebraica
- Lugar geométrico
- Dilatación y contracción

Metodología:
La actividad se realizará por pares de estudiantes quienes deberán describir la dependencia entre las variables base, área y ángulo, y sobre todo mostrar el proceso desde argumentaciones y explicaciones que les brinden los sistemas de representación usados para generar estrategias de representación del cambio del área aun cuando el perímetro de los paralelogramos se mantiene. El docente deberá fomentar los procesos y la discusión que lleven a los estudiantes a reflexionar sobre la importancia de ordenar y relacionar información en los diferentes sistemas.

Descripción:
Para el desarrollo de la actividad se debe tener preparadas las plantillas interactivas en Cabri II Plus (ver Anexos 3 y 4). Con el punto 1 se indaga sobre la noción de cuadrado. Con los puntos del 2 al 5 se plantea la búsqueda de una regularidad al calcular la base de cuadrados dadas algunas áreas, que un problema de reversibilidad con respecto a la actividad anterior. Después con los puntos del 6 al 9 se da paso a establecer una regularidad entre el área de paralelogramos para observar las respectivas gráficas al variar y fijar dos de las tres magnitudes involucradas: perímetro, base o ángulo.

Castelnuovo (1973) sugiere que *"dada una figura geométrica, se trata de tomar uno de sus elementos como variable, y fijar el valor de otros, para estudiar seguidamente qué sucede con el resto de elementos, es decir, cuáles permanecen constantes, cuáles varían y cómo lo hacen en función de la variable inicial. Este trabajo de interrelación entre los distintos elementos de una figura, permite por un lado incidir sobre los propios conceptos geométricos, atacando frecuentes confusiones entre los mismos (por ejemplo entre área y perímetro), y por otro introducir el concepto de función como dependencia entre variables, en este caso geométricas. Al mismo tiempo aparecen los modelos básicos de dependencia, así como algunas situaciones de gran importancia en matemáticas como son los problemas de máximos y mínimos, que se tratan de forma experimental, gráfica o numéricamente, calculando valores próximos"*. [3]

Criterios de evaluación:
- Construye y describe el comportamiento y la continuidad que se presenta en las situaciones de cambio para resolver problemas específicos.

Resultados esperados:
- Los estudiantes identificaran desde las representaciones tabular y gráfica el paralelogramo de mayor área.
- Los estudiantes podrán argumentar las transformaciones realizadas sobre la gráfica.

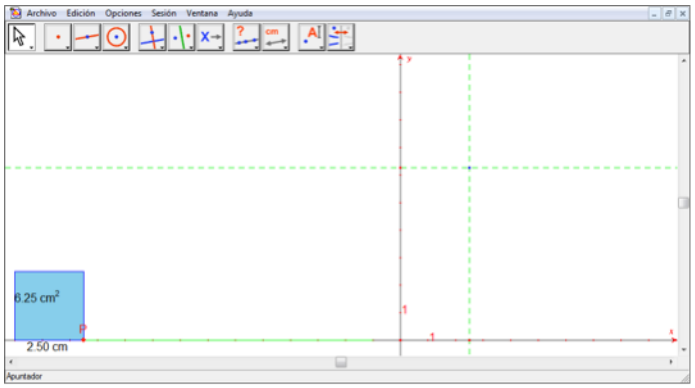
Guía de trabajo:
(Ver página siguiente.)

ACTIVIDAD No. 04: ÁREA DE PARALELOGRAMOS

NOMBRE: _____ CURSO: _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Abran el archivo **"Cuadrados.fig"** en Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece un cuadrado azul con las medidas de su base y su área, y un plano cartesiano.



   ¿Cuáles son las características de un cuadrado?

   _____

   _____

2. Con el Cursor muevan el punto P horizontalmente hacia la derecha para variar la base del cuadrado y observen cómo cambia su área. ¿Cuál es respectivamente la base del cuadrado cuando el área tiene las siguientes medidas?

Área (cm^2)	0,85	1,73	2,41	5,86	16,00	32,31	52,37	116,41
Lado (cm)								

3. Describan la gráfica trazada en el plano cartesiano ¿qué forma tiene?

   _____

   _____

4. ¿Cuál es la fórmula o expresión para calcular el área de un cuadrado? ¿Esa fórmula estará asociada con el comportamiento de la gráfica? Explicar.

   _____

   _____

   _____

5. Comprueben su respuesta anterior utilizando la herramienta ***Lugar*** (primero haga clic sobre el punto que origina la gráfica cartesiana, y luego haga clic sobre el punto P), y después la herramienta ***Coordenada o Ecuación*** (haciendo clic sobre la gráfica de color rojo).

   (a) ¿Qué expresión se asocia a la gráfica?

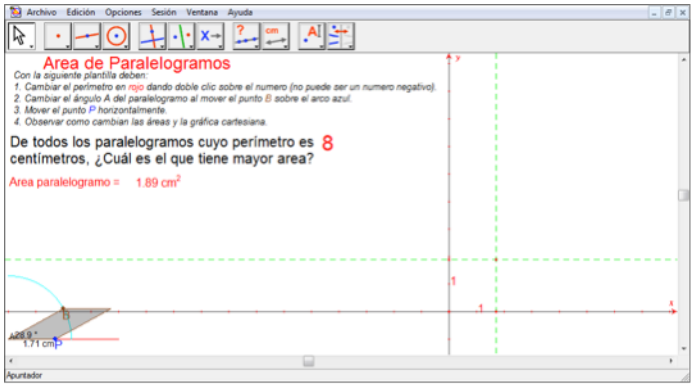
   _____

   (b) ¿Qué representaría la variable x? ¿Qué representaría la variable y?

   x: _____

   y: _____

6. Abran el archivo **"Paralelogramos.fig"** en Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece un paralelogramo gris con las medidas de su base, su área, el ángulo formado por la base y un lado, y un plano cartesiano.



(a) ¿Qué datos se pueden modificar en la construcción?

(b) ¿Cuál es el problema a resolver?

(c) ¿Cuál es el perímetro inicial?

(d) Con el ***Cursor*** muevan el punto P horizontalmente, observen cómo cambia el área y describan la gráfica obtenida.

(e) ¿Cuál es el perímetro final?

7. Con el ***Cursor*** mueven el punto B sobre el arco azul para cambiar el ángulo A, observen cómo cambian los paralelogramos al mover el punto P horizontalmente. A continuación, completen la siguiente tabla (con valores lo más aproximado posible) si el perímetro se fija en $10cm$ (haciendo doble clic sobre el número en rojo y cambiándolo a 10).

Si el ángulo es	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º	90º
¿Cuál es el área mayor que se puede obtener? (cm^2)									
¿Cuál es la base del paralelogramo de área mayor? (cm)									
Nombre del paralelogramo construido									

¿Cuál es el paralelogramo de mayor área si el perímetro es de 10 unidades?

8. Con la herramienta ***Lugar*** (primero haga clic sobre el punto que origina la gráfica cartesiana, y luego haga clic sobre el punto P), y después con la herramienta ***Coor-***

denada o Ecuación (haga clic sobre la gráfica de color rojo), hallen la expresión asociada a la gráfica de perímetro 10 cm.

(a) ¿Qué representaría la variable x? ¿Qué representaría la variable y?
x: _____
y: _____

(b) Si se cambia el perímetro a $8cm$ ¿qué ocurre con la gráfica y con la ecuación? Explicar.

_____

_____

(c) Si el paralelogramo tiene un perímetro de $4cm$ ¿La gráfica entre que valores de x se construye? Explicar. ¿Si el perímetro es de $6cm$ o de $9cm$?

_____

_____

9. Con el ***Cursor*** cambien el valor del perímetro haciendo doble clic sobre el número en rojo y mueven el punto B sobre el arco azul para cambiar el ángulo A.

(a) Si se mantiene un perímetro fijo y el ángulo cambia de 0° a 90° ¿La gráfica se dilata (abre) o contrae (cierra)? ¿Cómo cambia la ecuación de la gráfica? Explicar.

_____

_____

(b) Si se mantiene un ángulo fijo y el perímetro cambia ¿Cómo cambia la gráfica? ¿Cómo cambia la ecuación de la gráfica? Explicar.

_____

_____

10. Marquen con una X su opinión en los siguientes aspectos

De la clase	Pobre	Regular	Aceptable	Buena	Excelente
1. Las indicaciones estuvieron dadas de forma					
2. El contenido abordado fue					
3. El tiempo fue					
4. El estado de los computadores fue					
De los estudiantes	**Pobre**	**Regular**	**Aceptable**	**Bueno**	**Excelente**
5. La motivación e interés que generó fue					
6. La interacción con mis compañeros fue					
7. La utilidad del programa fue					
8. ¿Cómo calificaría esta actividad?					
¿Por qué?					

Ideas para seguir adelante:

- Si tiene la gráfica y la ecuación ¿cómo saber las medidas de la base y del ángulo del paralelogramo correspondiente?

4.7. Actividad No. 05

Título:
Explorando Parábolas

Preconceptos:
- Coeficientes y Expresiones algebraicas
- Plano Cartesiano
- Traslaciones

Objetivo:
Reconocer las translaciones que sufre una parábola cuando se ve afectada su expresión algebraica de acuerdo a unas condiciones dadas.

Conceptos a trabajar:
- Función Cuadrática
- Expresión Algebraica
- Lugar geométrico
- Traslaciones
- Dilatación y contracción
- Sentido

Metodología:
La actividad será desarrollada inicialmente por pares de estudiantes recurriendo a las plantillas en Cabri II Plus y la guía de trabajo, se hará énfasis en la comparación de las gráficas con las expresiones correspondientes. Luego se dará paso a la socialización de instrucciones para el establecimiento de ecuaciones. El docente deberá organizar el desarrollo de la temática en torno a la puesta en común de las respuestas e instrucciones.

Descripción:
La actividad se desarrollará en dos fases y se deben tener preparadas las respectivas plantillas interactivas en Cabri II Plus (ver Anexo 3). Con el punto 1 se indaga sobre el reconocimiento de parábola como la curva generada en las anteriores actividades. Con el punto 2 se da inicio a la exploración y traslación de la parábola dadas algunas ecuaciones. Con los puntos del 3 al 5 se indaga sobre la relación entre los coeficientes y las respectivas traslaciones de la parábola. El punto 6 es para establecer la condición que el primer coeficiente no puede ser cero, de lo contrario da una línea recta (función lineal). De los puntos del 7 al 8 se toma como referencia la gráfica de la función $y = x^2$ para reconocer la traslación correspondiente a la gráfica cuando se le adicionan valores constantes a la función de las siguientes maneras: $y = x^2 \pm c$, para llegar a la conclusión que se produce una traslación vertical y $y = (x \pm c)^2$, para llegar a concluir que se produce una traslación horizontal, lo que permitirá en el punto 9 combinar los dos tipos de traslaciones para generar la respectiva ecuación desde la descripción de las traslaciones.

Según Villegas (1991) *"la geometría euclidiana es la rama de la matemática que se ocupa de las propiedades de las figuras geométricas que son invariantes cuando son trasladadas en el plano, sometidas a simetría axiales, expandidas o contraídas uniformemente. Estudiar la traslación a lo largo de una línea recta horizontal y de una línea recta vertical permite analizar la composición de éstas y las propiedades que cumple cada operación. Llamamos traslación de una figura a la operación que consiste en desplazarla a lo largo de una recta, sin que gire al*

mismo tiempo, la traslación de una figura queda determinada por tres elementos: la magnitud, la dirección y el sentido." [17]

Criterios de evaluación:
- Genera estrategias para la discusión y representación de traslaciones de funciones cuadráticas comparativamente desde las ecuaciones.

Resultados esperados:
- Los estudiantes analizarán visualmente las traslaciones de la parábola correlacionando las representaciones algebraica y simbólica.
- Los estudiantes podrán predecir la gráfica de una función cuadrática desde el análisis de su expresión simbólica y del reconocimiento de punto un máximo o mínimo.

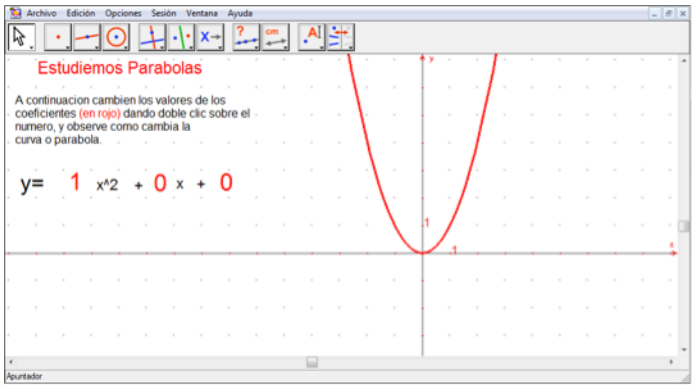
Guía de trabajo:
(Ver página siguiente.)

ACTIVIDAD No. 05: EXPLORANDO PARÁBOLAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Abran el archivo **"Parabolas1.fig"** en Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece una expresión algebraica y su respectiva gráfica en el plano cartesiano.



¿Qué gráfica se muestra? Explicar.

_____

_____

_____

2. Con el ***Cursor*** cambien los valores de los coeficientes haciendo doble clic sobre los números en rojo, observen las parábolas de cada una de las siguientes funciones y completen la siguiente tabla

Función	¿Cómo es el sentido de la parábola? (hacia arriba o hacia abajo)	¿Cómo es la abertura de la parábola? (abierta o cerrada)	¿La parábola tiene un punto máximo o un punto mínimo?	¿Por qué punto(s) la parábola corta con el eje x?	¿Por qué punto la parábola corta con el eje y?
$y = -x^2$					
$y = 4x^2 + 2$					
$y = x^2 - 4$					
$y = -x^2 + 3x$					
$y = x^2 + 4x + 4$					
$y = x^2 + 3x + 3$					
$y = -2x^2 - 3x + 2$					

3. ¿Cuáles parábolas están más contraídas (cerradas) y cuáles más dilatadas (abiertas)? ¿Qué coeficiente afecta la abertura? Explicar.

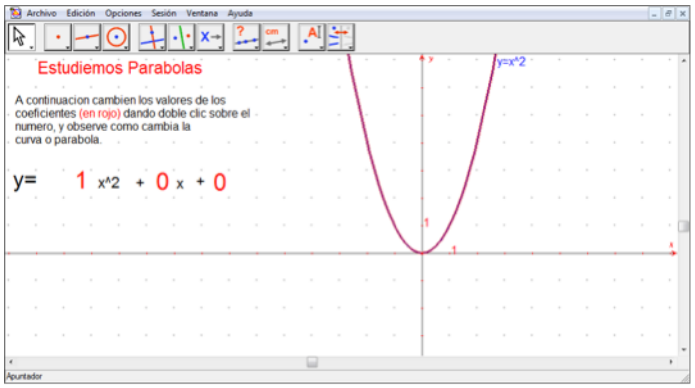
_____

4. ¿Qué coeficiente afecta el sentido de la parábola ("hacia arriba" o "hacia abajo")?

5. ¿Qué coeficiente indica el punto de corte con el eje y?

6. ¿Cómo es la gráfica si el coeficiente de x^2 es 0 y los otros dos coeficientes se cambian? ¿Por qué creen que pasa eso?

7. Abran el archivo **"Parabolas2.fig"** en Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece una expresión algebraica y su respectiva gráfica en el plano cartesiano en rojo, además la gráfica cartesiana de la función $y = x^2$ en azul.



8. Con el ***Cursor*** cambien los valores de los coeficientes haciendo doble clic sobre los números en rojo y tomando como referencia la gráfica de la función $y = x^2$, respondan:

   (a) ¿Cuántas unidades y hacia dónde se desplaza la gráfica de la función $y = x^2 - 8$?

   (b) ¿Qué coeficiente afecta el desplazamiento en este caso? Explicar.

   (c) ¿Cuántas unidades y hacia dónde se desplaza la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 9$?

   (d) ¿Qué coeficiente afecta el desplazamiento en este caso?

(e) ¿Si se factoriza la expresión $x^2 - 6x + 9$ encuentran alguna relación con el desplazamiento? Explicar.

9. Inventen una transformación de la parábola y dé instrucciones para que sus compañeros la realicen sin decirles la expresión algebraica que ustedes usaron.

10. Marquen con una X su opinión en los siguientes aspectos

De la clase	Pobre	Regular	Aceptable	Buena	Excelente
1. Las indicaciones estuvieron dadas de forma					
2. El contenido abordado fue					
3. El tiempo fue					
4. El estado de los computadores fue					
De los estudiantes	**Pobre**	**Regular**	**Aceptable**	**Bueno**	**Excelente**
5. La motivación e interés que generó fue					
6. La interacción con mis compañeros fue					
7. La utilidad del programa fue					
8. ¿Cómo calificaría esta actividad?					
¿Por qué?					

Ideas para seguir adelante:

- Construir una parábola que pase por los puntos $(-1, -2)$, $(0, 3)$ y $(1, 4)$. ¿Cuál es su respectiva ecuación?

4.8. Actividad No. 06

Título:
Sobre Cuadraturas de Polígonos Regulares

Preconceptos:
- Área de polígonos
- Plano Cartesiano

Objetivo:
Usar la parábola para resolver algunos problemas asociados con el estudio de áreas y cuadratura de polígonos regulares.

Conceptos a trabajar:
- Área
- Función cuadrática
- Cuadratura de polígonos

Metodología:
La actividad se desarrolla por pares de estudiantes recurriendo a las plantillas en Cabri II Plus y a la guía de trabajo, se hará énfasis en un problema geométrico de la antigua Grecia, cuadrar polígonos regulares, favoreciendo el razonamiento visual al comparar áreas.

Descripción:
Para el desarrollo de la actividad se deben tener preparadas las plantillas interactivas en Cabri II Plus (ver Anexos 7 y 8). Con el punto 1 se indaga sobre la noción de pentágono regular. Con los puntos del 2 al 4 se observa la dependencia del área de un pentágono regular y del área de un cuadrado al variar sus respectivos lados, aproximando a la cuadratura del pentágono desde la comparación de las respectivas áreas en el plano cartesiano, complementando con el sistema de coordenadas la relación entre las áreas del pentágono regular y del cuadrado. Con el punto 5 dadas unas áreas de pentágonos regulares, se deben tabular diferentes valores para el lado del cuadrado de tal forma que el área del cuadrado sea igual al del pentágono. Con los puntos del 6 al 9 se profundiza la cuadrar desde un hexágono regular.
Las decisiones que se tomen, con base en una figura, requieren hacer un razonamiento. *"El sólo mirar las figuras no es suficiente para ver lo que ellas representan. Por tal razón, hay que aprender a mirarlas matemáticamente, para desentrañar de ellas variada información, dependiendo de lo que se está buscando. Esto significa: - Reconocer las partes constituyentes de una figura, que corresponden a la misma dimensión o a dimensiones menores. - Expresar relaciones geométricas que se evidencian de la figura. - Realizar cambios configúrales para obtener nuevas organizaciones visuales de una figura dada."* [17]

Criterios de evaluación:
- Visualiza y se aproxima a la cuadratura de polígonos en el plano.

Resultados esperados:
- Los estudiantes recurrirán a la gráfica en el plano para resolver problemas de la geometría.

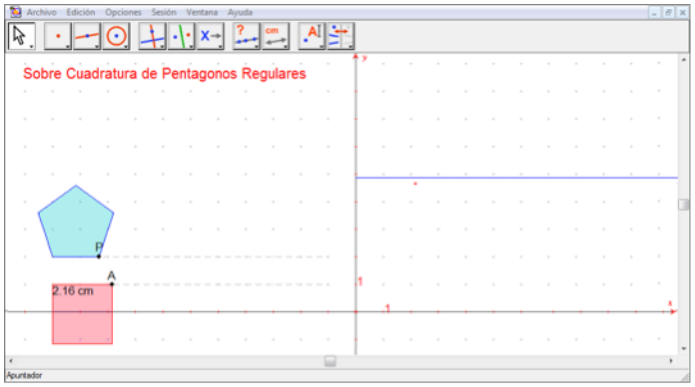
Guía de trabajo:

ACTIVIDAD No. 06: SOBRE CUADRATURAS DE POLÍGONO REGULARES

NOMBRE: _____ CURSO: _____

NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. Abran el archivo **"CuadraturaPentagono.fig"** en Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece un pentágono regular azul, un cuadrado rojo y un plano cartesiano.



¿Cuáles son las características de un pentágono regular?

_____

_____

_____

2. Con el ***Cursor*** muevan el punto P horizontalmente para variar la base del pentágono regular y observen cómo cambia la línea horizontal azul que se le asocia en el plano cartesiano.

3. Con el ***Cursor*** muevan el punto A horizontalmente para variar el lado del cuadrado y observen cómo cambia su área. Y respondan:

   (a) ¿Qué forma tiene la gráfica roja trazada en el plano cartesiano?

   _____

   _____

   _____

   (b) ¿Cuál es la medida aproximada del lado del cuadrado para que su área sea igual al área del pentágono regular? Explicar

   _____

   _____

   _____

4. Comprueben su respuesta anterior utilizando la herramienta ***Lugar*** (primero hacer clic sobre el punto que origina la gráfica cartesiana, y segundo hacer clic sobre el punto A), la herramienta ***Punto(s) de intersección*** (primero hacer clic sobre la gráfica cartesiana en rojo, y segundo hacer clic sobre la línea horizontal azul), y la herramienta ***Coordenadas o ecuación*** (Hacer clic sobre el punto de intersección)

(a) ¿Qué punto obtuvieron?

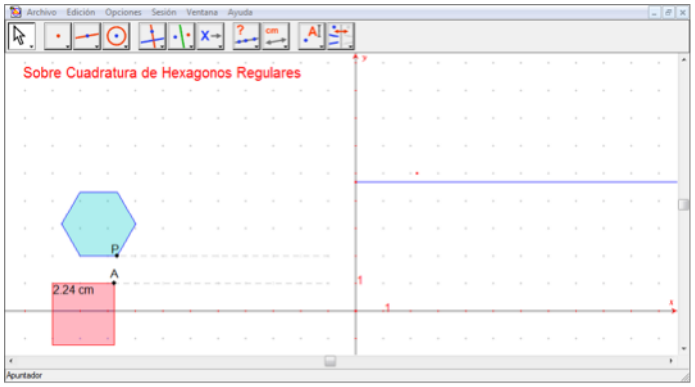
(b) ¿Qué representaría el primer valor o coordenada del punto? Explicar

(c) ¿Qué representaría el segundo valor o coordenada del punto? Explicar

5. Con el ***Cursor*** muevan el punto P horizontalmente para variar la base del pentágono regular y observen cómo cambia las coordenadas del punto de intersección ¿Cuál es respectivamente la base del cuadrado cuando el área del pentágono tiene las siguientes medidas?

Área Pentágono (cm^2)	0,74	1,81	2,20	4,43	6,18	7,06	8,41	9,23
Lado Cuadrado (cm)								

6. Abran el archivo **"CuadraturaHexagono.fig"** en Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece un hexágono regular azul, un cuadrado rojo y un plano cartesiano.



¿Cuáles son las características de un hexágono regular?

7. Con el ***Cursor*** muevan los puntos P y A horizontalmente para variar, respectivamente, la base del hexágono regular y la base del cuadrado. Y respondan:

(a) ¿Qué forma tiene la gráfica roja trazada en el plano cartesiano?

(b) ¿Cuál es la medida aproximada de la base del cuadrado para que su área sea igual al área del hexágono regular? Explicar

8. Comprueben su respuesta anterior utilizando la herramienta ***Lugar*** (primero hacer clic sobre el punto que origina la gráfica cartesiana, y segundo hacer clic sobre el punto A), la herramienta ***Punto(s) de intersección*** (primero hacer clic sobre la gráfica cartesiana en rojo, y segundo hacer clic sobre la línea horizontal azul), y la herramienta ***Coordenadas o ecuación*** (hacer clic sobre el punto de intersección)

   (a) ¿Qué punto obtuvieron?

   (b) ¿Qué representaría el primer valor o coordenada del punto? Explicar

   (c) ¿Qué representaría el segundo valor o coordenada del punto? Explicar

9. Con el ***Cursor*** muevan el punto P horizontalmente para variar la base del hexágono regular y observen cómo cambia las coordenadas del punto de intersección ¿Cuál es respectivamente la base del cuadrado cuando el área del hexágono tiene las siguientes medidas?

Área Hexágono (cm^2)	0,74	1,81	2,20	4,43	6,18	7,06	8,41	9,23
Lado Cuadrado (cm)								

10. Marquen con una X su opinión en los siguientes aspectos

De la clase	Pobre	Regular	Aceptable	Buena	Excelente
1. Las indicaciones estuvieron dadas de forma					
2. El contenido abordado fue					
3. El tiempo fue					
4. El estado de los computadores fue					
De los estudiantes	**Pobre**	**Regular**	**Aceptable**	**Bueno**	**Excelente**
5. La motivación e interés que generó fue					
6. La interacción con mis compañeros fue					
7. La utilidad del programa fue					
8. ¿Cómo calificaría esta actividad?					
¿Por qué?					

Ideas para seguir adelante:

- ¿Cómo establecerían la cuadratura aproximada de un ***Círculo*** ? Describan el procedimiento y completen la siguiente tabla de valores

Área Círculo (cm^2)	0,73	1,35	2,32	3,51	4,73	7,03	8,74	10,96
Lado Cuadrado (cm)								

4.9. Actividad No. 07

Título:
Evaluación

Preconceptos:
- Plano cartesiano
- Expresión algebraica
- Factorización
- Cuadratura de polígonos
- Operaciones con fracciones

Objetivo:
Identificar las habilidades alcanzadas para el reconocimiento de funciones cuadráticas desde gráficas en el plano cartesiano y desde expresiones algebraicas.

Conceptos a trabajar:
- Función cuadrática
- Transformaciones de la parábola
- Ecuación de la función cuadrática
- Cuadratura de parábolas

Metodología:
Inicialmente, será resuelta por pares de estudiantes sin ayuda del programa Cabri II Plus. Luego, se utilizará el programa para resolver la segunda parte del taller relacionado con el área de sectores parabólicos, finalizando con una socialización para priorizar la discusión sobre las ventajas o desventajas qué los estudiantes percibieron al trabajar con el programa Cabri II Plus durante el desarrollo de esta propuesta. El docente deberá revisar el proceso de enseñanza-aprendizaje en su conjunto, es decir, conocer el grado de los aprendizajes que los estudiantes han adquirido hasta el momento y de actualizar o reestructuras las actividades para futuros trabajos.

Descripción:
La actividad por ser de evaluación no perderá su carácter de trabajo grupal (pares), puesto que así se vino realizando la práctica, esperando formalizar el trabajo realizado y llegar a ver como se han consolidado el uso de algunas representaciones; esto ira orientado a partir de una guía-taller que será explorada en lo que se exige y en lo que se cuenta.

La actividad está propuesta porque es necesario analizar las habilidades alcanzadas por los estudiantes hasta cierto momento, ya sea como cierre de la temática o como punto de comparación entre lo que conocen y deberían conocer al iniciar otro tema. Además, las situaciones que presentan una función cuadrática permiten evidenciar en cada estudiante la construcción de representaciones que lleven implícita una relación entre los conceptos que intervienen y el análisis visual, descriptivo, cualitativo o cuantitativo que se puede obtener de ellas. Siguiendo a Cepeda (1997) tenemos que *"Una evaluación debe ser algo más que un examen: debe ser un proceso continuo, dinámico y con frecuencia informal dentro de todo el proceso. La evaluación es cíclica por naturaleza, un proceso de observación, conjeturas y reformulación constante de juicios sobre las estructuras conceptuales de los alumnos, una base para mejorar la calidad de la docencia. [Además] Se concibe la evaluación como un proceso mediante el que se obtiene y*

proporciona la información sobre los procesos de los estudiantes." [16]

Criterios de evaluación:
- Identifica y relaciona los sistemas de representación gráfico y simbólico para comunicar funciones cuadráticas.
- Muestra transformaciones o el proceso de reversibilidad entre los sistemas de representación.
- Identifica el fenómeno de variación, lo describe y es capaz de predecir los máximos y mínimos.

Resultados esperados:
- Los estudiantes identificarán visualmente los elementos que intervienen en la gráfica de una función cuadrática dada.

Guía de trabajo:
(Ver página siguiente.)

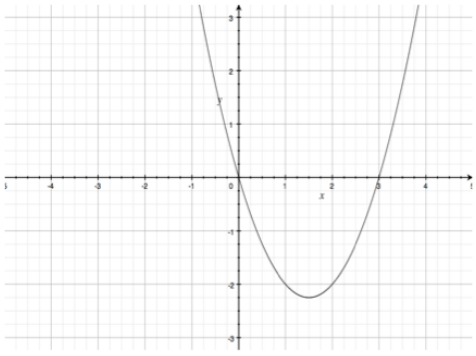
ACTIVIDAD No. 07: EVALUACIÓN

NOMBRE: _____ CURSO: _____

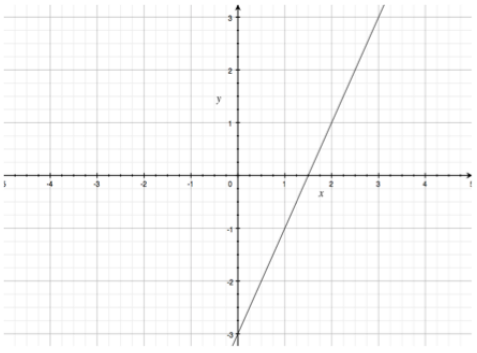
NOMBRE: _____ CURSO: _____

1. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones cuadráticas? Marquen con una **X** y expliquen ¿por qué?

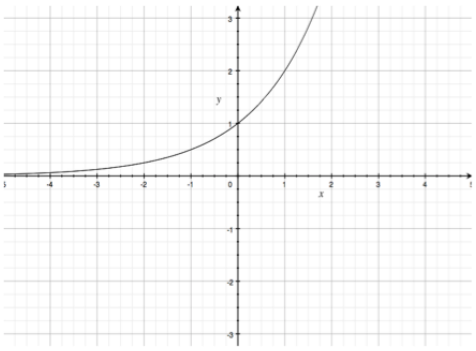
(a)



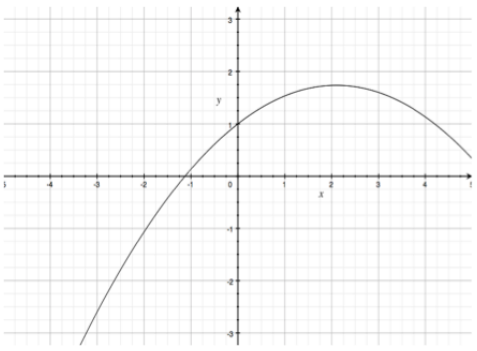
(b)



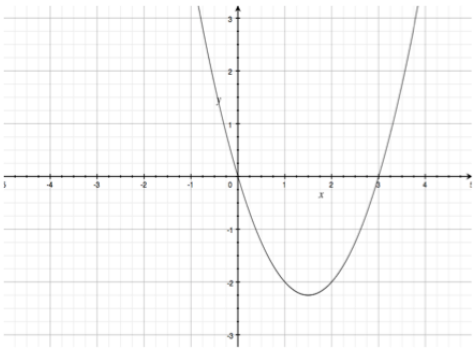
(c)



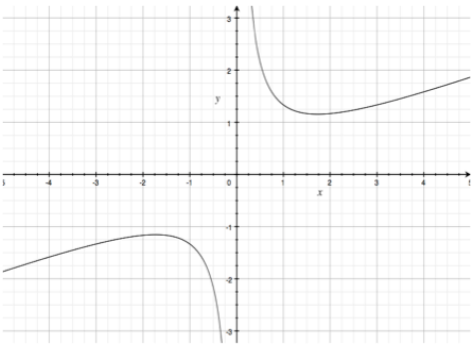
(d)



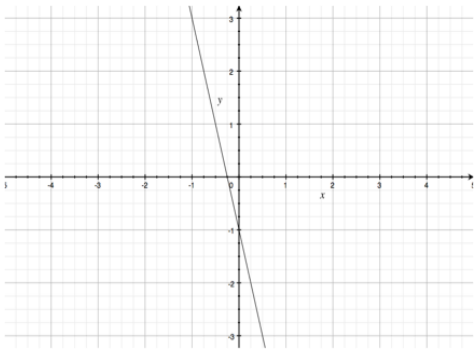
(e)



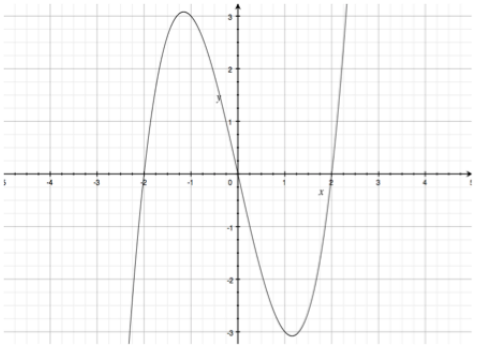
(f)



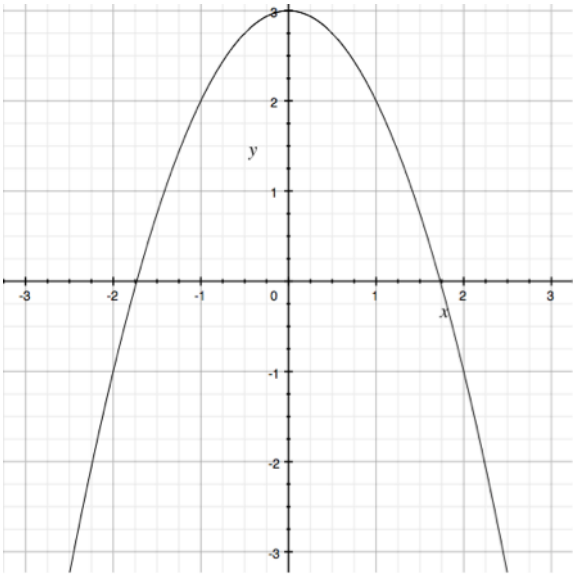
(g)



(h)



2. Si se toma como referencia la siguiente gráfica de la función $y = -x^2 + 3$



   (a) Realicen un desplazamiento de 5 unidades hacia abajo y escriban la nueva ecuación.

   (b) Realicen un desplazamiento horizontal de 2 unidades hacia la derecha y escriban la nueva ecuación.

3. Escriban la ecuación de una parábola pase por el punto $(0, 5)$.

4. Escriban la ecuación de una parábola pase por el punto $(-2, 0)$ y $(4, 0)$.

5. Abran el archivo "AreaParabola.fig" en Cabri II Plus (ver imagen) donde aparece una parábola azul, un triángulo rojo y un plano cartesiano.

6. Con el ***Cursor*** muevan los puntos A y B sobre la parábola y observen cómo cambia el segmento rojo $A'B'$ sobre el eje x y el área del triángulo azul ACB. ¿Cuántos triángulos se podrán construir si la longitud de $A'B'$ debe ser $4cm$? Explicar

7. Con el Cursor muevan el punto P horizontalmente para variar el vértice C del triángulo azul y observen cómo cambia su área. ¿Qué gráfica se obtiene? Explicar

8. Fijando los puntos A y B ¿dónde se debe situar el punto P de tal forma que el triángulo ACB tenga área máxima? Explicar

9. Para comprobar su anterior respuesta utilicen la herramienta ***Lugar*** (primero hacer clic sobre el punto que origina la gráfica cartesiana, y segundo hacer clic sobre el punto P sobre el eje x), hallar el punto medio entre de la cuerda AB con la herramienta ***Punto medio*** (primero hacer clic sobre el punto A, y segundo hacer clic sobre el punto B), trazar una recta paralela al eje y por ese punto medio con la herramienta ***Recta paralela*** , hallar el punto de intersección entre la parábola roja y la recta paralela con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y calcular las coordenadas de ese punto de intersección con la herramienta ***Coordenadas o ecuación*** .

   (a) ¿Qué punto obtuvieron?

   (b) ¿Qué representaría el primer valor o coordenada del punto? Explicar

   (c) ¿Qué representaría el segundo valor o coordenada del punto? Explicar

10. Si el sector parabólico ACB tiene un área igual a cuatro tercios $(\frac{4}{3})$ el área del triángulo ACB con área máxima, completen la siguiente tabla tomando como referencia la longitud del segmento $A'B'$.

Longitud $A'B'$ (cm)	1	1,4	2,32	2,93	3,64	4	5
Área Triángulo (cm^2)							
Área Parábola (cm^2)							

11. Marquen con una X su opinión en los siguientes aspectos

De la clase	Pobre	Regular	Aceptable	Buena	Excelente
1. Las indicaciones estuvieron dadas de forma					
2. El contenido abordado fue					
3. El tiempo fue					
4. El estado de los computadores fue					
De los estudiantes	Pobre	Regular	Aceptable	Bueno	Excelente
5. La motivación e interés que generó fue					
6. La interacción con mis compañeros fue					
7. La utilidad del programa fue					
8. ¿Cómo calificaría esta actividad?					
¿Por qué?					

Ideas para seguir adelante:
Resolver por funciones cuadráticas los siguiente problemas:
- Si los catetos de un triángulo rectángulo suman $12cm$. Hallar la hipotenua del triángulo de mayor área.
- Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de $10cm$ de base y $15cm$ de altura.

Conclusiones

1. Se mostró una alternativa para promover procesos geométricos y algebraicos relacionados con el estudio de funciones cuadráticas desde el uso del programa Cabri II Plus, que permiten a docentes y estudiantes explorar, argumentar, analizar y conjeturar desde situaciones más dinámicas, sugiriendo complementar esta apreciación desde una aplicación en el aula.

2. El explorar y analizar la variación, según una concepción dinámica centrada en el estudio de áreas, requirió de paciencia, de interés y de orden para escoger los elementos a involucrar en las situaciones.

3. Las formas y propiedades relacionadas a las gráficas de funciones cuadráticas se complementan en el conocimiento de parábolas, que permitieron fundamentar situaciones que llevan a profundizar al lector en el análisis y construcción de manifestaciones de este concepto en álgebra y geometría.

4. Es necesario que el docente se esté actualizando en los avances tecnológicos y haga uso de ellos como herramientas didácticas en procesos de enseñanza-aprendizaje y de manera específica en la evaluación, por ello la propuesta es susceptible a aplicaciones para realizar reformas pertinentes en temas de geometría, álgebra y cálculo.

5. El programa Cabri II Plus no es de libre uso como otros, lo que implica un mayor esfuerzo para no privarnos de las bondades de este tipo de programas, mostrando que se pueden crear estrategías para promover un trabajo dinámico, gracias a que en nuestras instituciones es cada vez más común que se respalden las propuestas innovadoras en educación. Sin embargo, como se mencionó en el tercer capítulo hay una versión de prueba que es gratis y se puede descargar en internet.

Trabajo futuro

- Crear una página web como alternativa para compartir, difundir y aplicar las plantillas en Cabri II Plus, usando el aplicativo CabriWeb, contribuyendo en otros escenarios educativos al desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes de noveno grado.
- Diseñar otros tipos de problemas geométricos que involucren la completación de cuadrados y procesos de factorización que permitan resolver ecuaciones de segundo grado.

Bibliografía

[1] Rey G., Boubée C., Sastre P., Cañibano A. Ideas para Enseñar: Aportes didácticos para abordar el concepto de función. En: Revista Unión, Número 20, 2009. [Online]. [descargado el 12 de Agosto de 2012]. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/20/Union_020_019.pdf

[2] Ministerio de Eduación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: MEN, 2006.

[3] Azcárate C., Deulofeu J. *Funciones y Gráficas.* España: Síntesis, 1996.

[4] Kline M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Primera ed. New York: Oxford University Press, 1990. [Online]. [descargado el 25 de Febrero de 2013]. Disponible en: http://libgen.info/view.php?id=64138

[5] Boyer C. B., Merzbach U. C. *A History of Mathematics.* Tercera ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2011. [Online]. [descargado el 25 de Febrero de 2013]. Disponible en: http://libgen.info/view.php?id=617349

[6] Sánchez C., Valdés C. *Las Funciones, un paseo por su historia.* Primera ed. España: Nivola, 2007.

[7] Puig L. *Componentes De Una Historia Del Álgebra: El Texto De Al-Khwarizmi Restaurado.* [Online]. [descargado el 5 de febrero de 2013]. Disponible en: http://www.uv.es/puigl/mexico96revisado03.pdf.

[8] Veleiro M. E. *Estudio didáctico de la noción de función.* [Online]. [consultado el 15 de Enero de 2013]. Disponible en: http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/veleiro/PROYECTO%20FINAL/TRABAJO%20FINAL/principal.htm.

[9] Acevedo M., Campos M., Jiménez L., León B. *Curso libre juvenil de matemáticas.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia; 2007.

[10] Lehmann C. H. *Geometría Analítica.* México: Lumisa; 1989.

[11] Leithold L. *El Cálculo.* Oxford University Press, 1998: Séptima Edición.

[12] Centeno G., Centeno H., Jiménez N., González F., Robayo M. *Nueva Matemática Constructiva 9.* Bogotá: Libros y Libros S.A., 1997.

[13] National Council of Teachers of Mathematics. *Gráficas, relaciones y funciones.* México: Trillas, 1992.

[14] Velásquez J., Obeso F. *Análisis numérico: Notas de clase.* Colombia: Ediciones Uninorte, 2007.

[15] Ministerio de Eduación Nacional. *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá: MEN, 1998.

[16] García G., Acevedo M. *El Pensamiento Numérico-Variacional en la Educación Media.* Memorias XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 2005.

[17] Camargo L., Samper de Caicedo C., Leguizamon C. *Visualización y Razonamiento Visual.* Memorias XVII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 2000.

[18] *La integración de las TICs en Matemáticas.* [Online]. [consultado el 19 de Octubre de 2012]. Disponible en: http://www.eduteka.org/Editorial18.php

[19] *Cabri II Plus.* [Online]. [consultado el 19 de Mayo de 2013]. Disponible en: http://www.cabri.com/es/exploracion-cabri-2-plus.html

[20] *Catálogo de Software de Matemática.* [Online]. [consultado el 19 de Mayo de 2013]. Disponible en: http://platea.pntic.mec.es/aperez4/catalogo/Catalogo-software.htm.

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., 28-06-2013

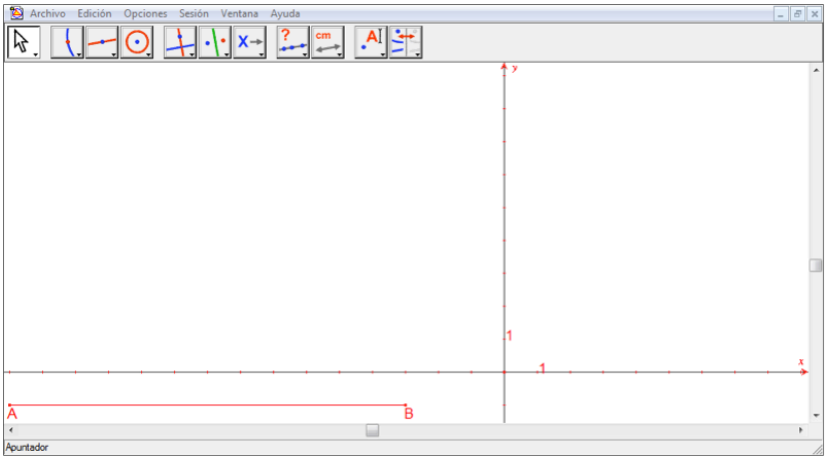
_____

(Dídimo Vera.)

Anexos

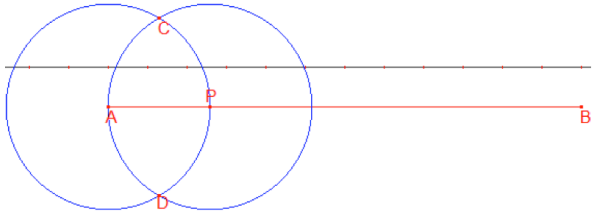
Anexo 1: Crear Plantilla Triángulos1.fig

1. En una nueva ventana de Cabri II Plus activar los ***Ejes*** y la ***Rejilla***.
2. Construir un segmento AB con las herramientas ***Segmento*** y ***Nombrar***.



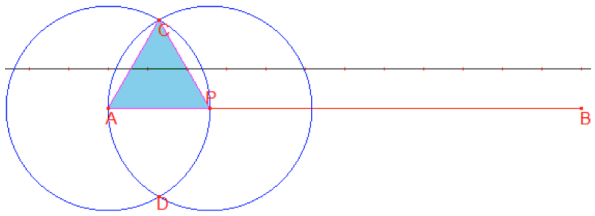
3. Ubicar un punto P sobre el segmento construido con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***.

4. Construir una circunferencia con centro en A y radio AP con la herramienta ***Circunferencia***.
5. Construir una circunferencia con centro en P y radio PA con la herramienta ***Circunferencia***.

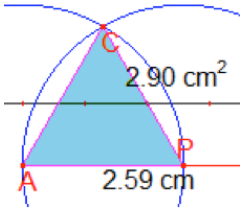


6. Marcar un punto de intersección C entre las dos circunferencias con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** . y ***Nombrar*** .

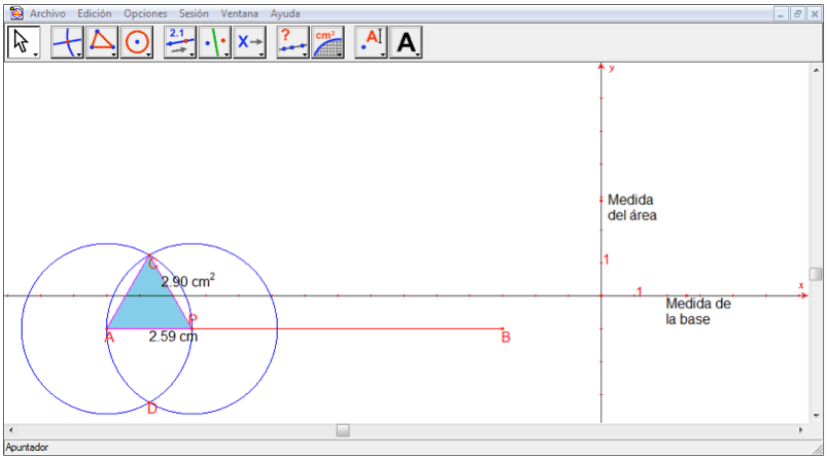
7. Construir un triángulo cuyos vértices sean los puntos ACP con la herramienta ***Triángulo*** y colorearlo con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo de azul).



8. Calcular la longitud de la base AP y el área del triángulo ACP con las herramientas ***Distancia o longitud*** y ***Área*** , respectivamente.



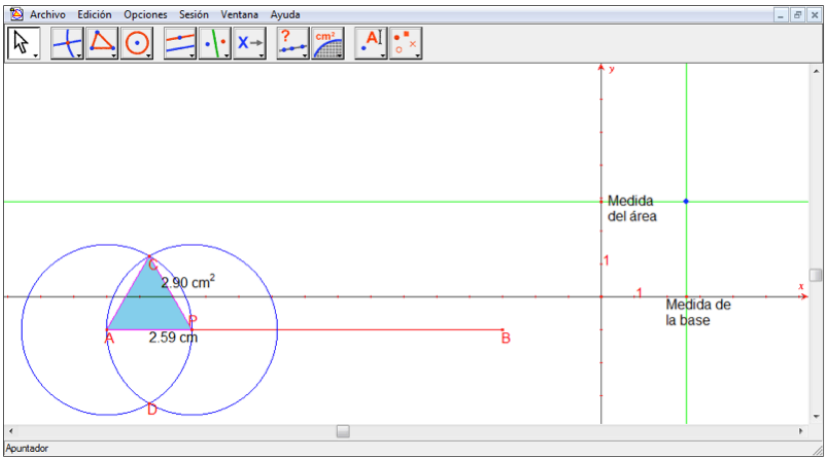
9. Transferir la medida de la base sobre el eje x y la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas*** . (Aparecerán dos puntos respectivamente).



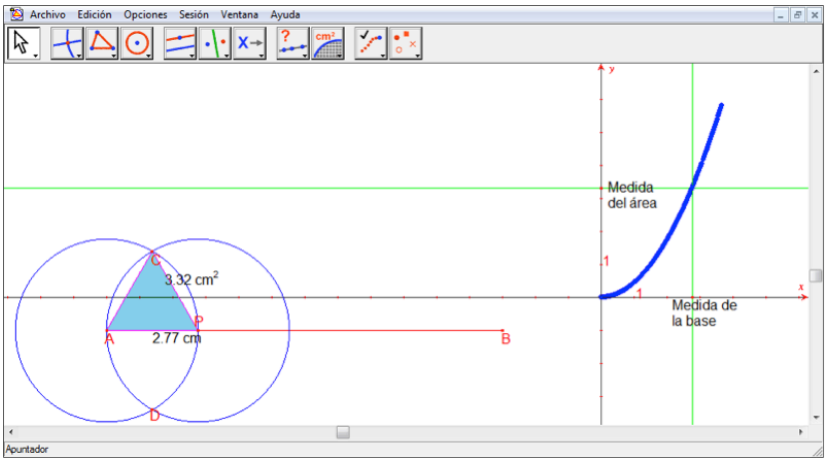
10. Trazar una recta paralela al eje y por el punto que representa la medida de la base sobre el eje x con la herramienta ***Recta paralela*** .

11. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela*** .

12. Hallar el punto de intersección entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a azul).

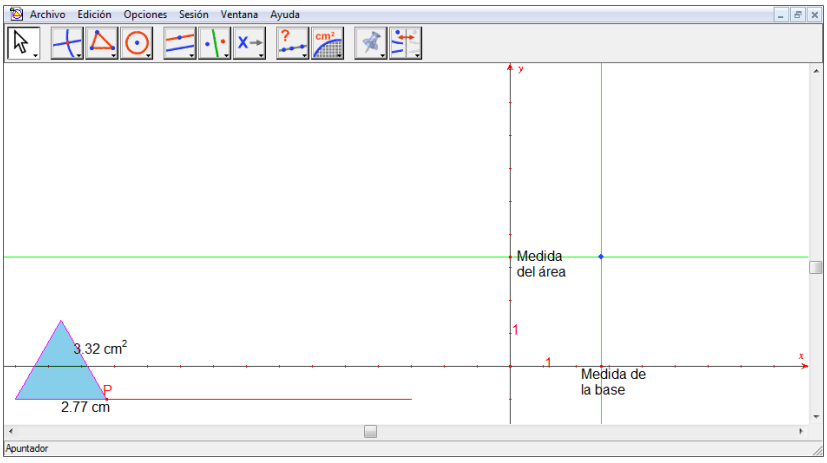


13. Activar el trazo del punto de intersección con la herramienta ***Traza*** . Luego, al mover el punto P se observará la respectiva gráfica cartesiana.



14. Para seguridad de la plantilla fijar los puntos A y B con la herramienta ***Fijar/Liberar*** .

15. Para una mejor presentación ocultar los puntos A, B, C, D y las dos circunferencias con la herramienta ***Ocultar/Mostrar*** .

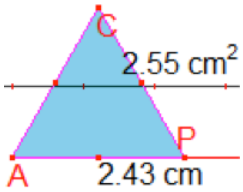


16. Guardar la construcción con el nombre ***"Triángulos1.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

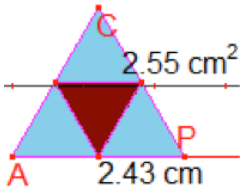
Anexo 2: Crear Plantilla Triángulos2.fig

1. Realizar la plantilla ***"Triángulos1.fig"*** en una nueva ventana de Cabri II hasta el paso 13 (Ver Anexo 1), o tener una copia de la misma con los puntos A y C visibles con la herramienta ***Ocultar/Mostrar*** .

2. Hallar los puntos medios en cada lado del triángulo ACP con la herramienta ***Punto medio*** .



3. Construir un triángulo cuyos vértices sean los tres puntos medios con la herramienta ***Triángulo*** y colorearlo de otro color con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo rojo).

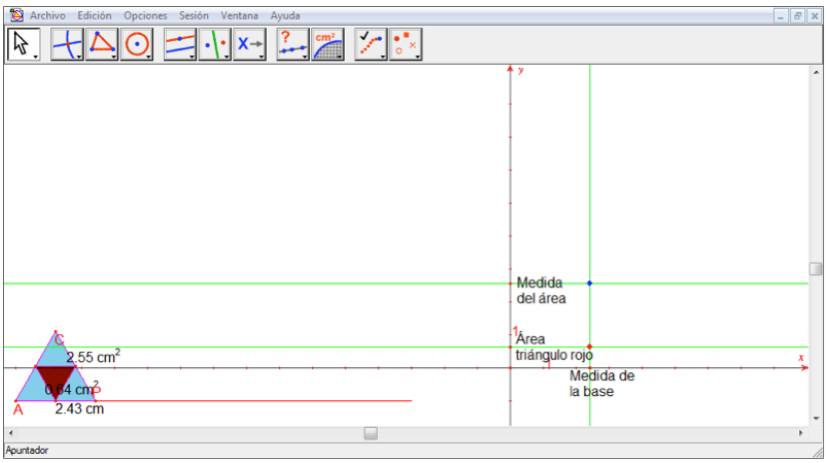


4. Calcular el área del triángulo rojo con la herramienta ***Área*** .

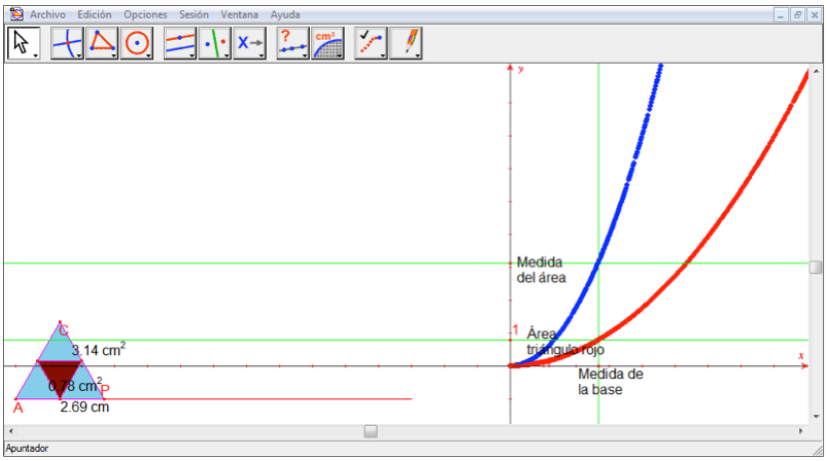
5. Transferir la medida del área del triángulo rojo sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas*** . (Aparecerá un punto).

6. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área del triángulo rojo sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela*** .

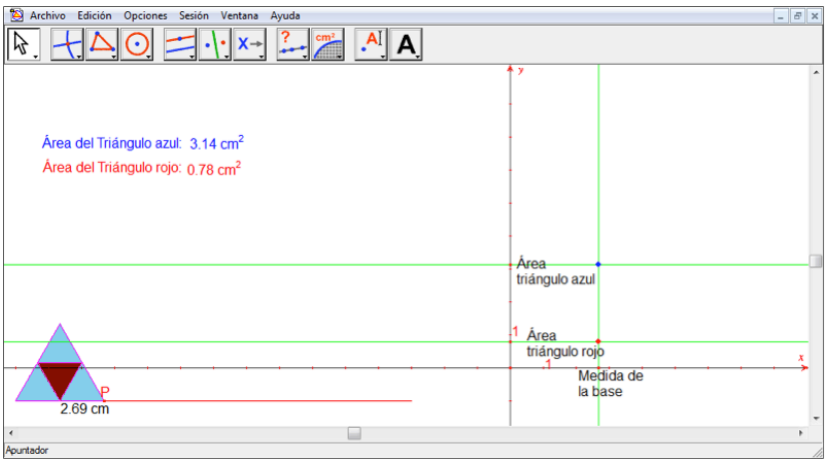
7. Hallar el punto de intersección entre la recta paralela al eje y que pasa por el punto que representa la medida de la base sobre el eje x (Paso 10) y la recta paralela al eje x que pasa por el punto que representa la medida del área del triángulo rojo sobre el eje y (Paso 22), con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** , y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo rojo).



8. Activar el trazo para el nuevo punto de intersección con la herramienta ***Traza*** . Luego, al mover el punto P se observarán las respectivas gráficas cartesianas.



9. Para una mejor presentación ocultar los puntos A, C y los tres puntos medios con la herramienta ***Ocultar/Mostrar*** . Escribir en la parte superior ***"Área del triángulo azul"*** y ***"Área del triángulo rojo"*** con la herramienta ***Texto*** (se puede cambiar el color de texto con la herramienta ***Color de texto...***) y arrastrar con el ***Cursor*** frente a cada texto las respectivas medidas de las áreas.

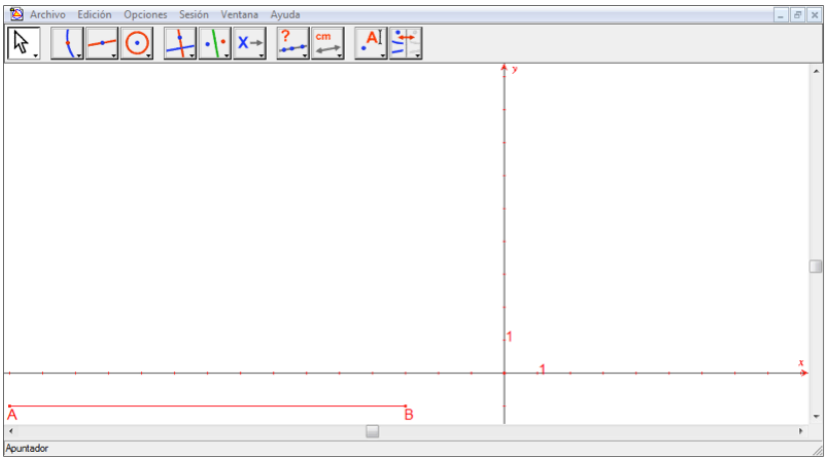


10. Guardar la construcción con el nombre ***"Triángulos2.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

Anexo 3: Crear Plantilla Cuadrados.fig

1. En una nueva ventana de Cabri II Plus activar los ***Ejes*** y la ***Rejilla***.

2. Construir un segmento AB con las herramientas ***Segmento*** y ***Nombrar***.



3. Ubicar un punto P sobre el segmento construido con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***.

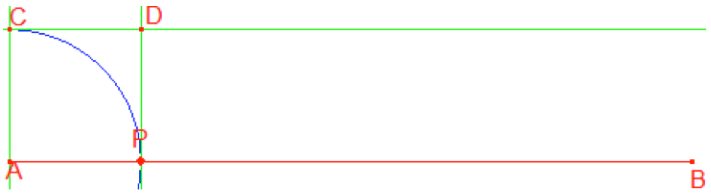
4. Trazar dos rectas perpendiculares al segmento AB por los puntos A y P con la herramienta ***Recta perpendicular***.

5. Construir una circunferencia con centro en A y radio AP con la herramienta ***Circunferencia***.

6. Marcar un punto de intersección C entre circunferencia y la recta perpendicular por el punto A con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

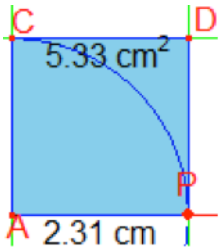
7. Trazar una recta paralela al segmento AB por el punto C con la herramienta ***Recta paralela***.

8. Marcar el punto de intersección D entre la recta paralela y la recta perpendicular por el punto P con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

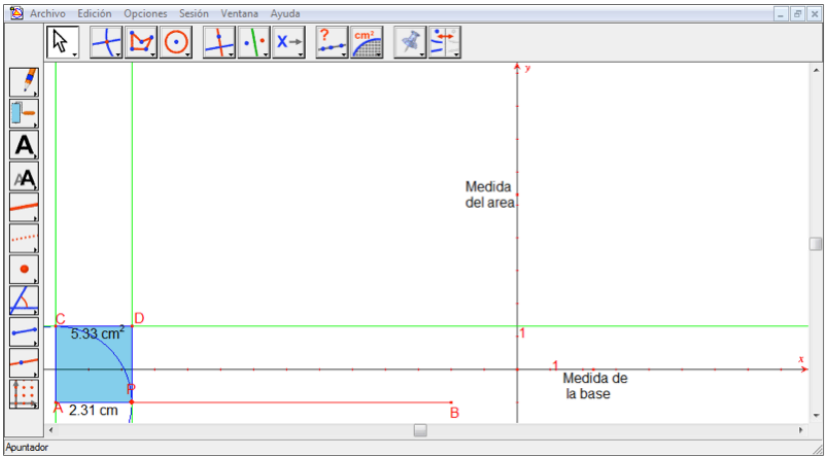


9. Construir un cuadrado cuyos vértices sean los puntos $ACDP$ con la herramienta ***Polígono*** y colorearlo con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo de azul).

10. Calcular la longitud de la base AP y el área del cuadrado $APDC$ con las herramientas ***Distancia o longitud*** y ***Área***, respectivamente.



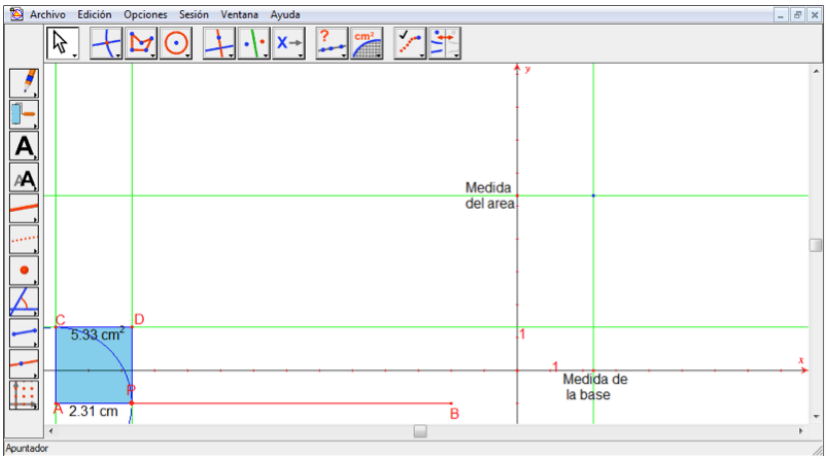
11. Transferir la medida de la base sobre el eje x y la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerán dos puntos respectivamente).



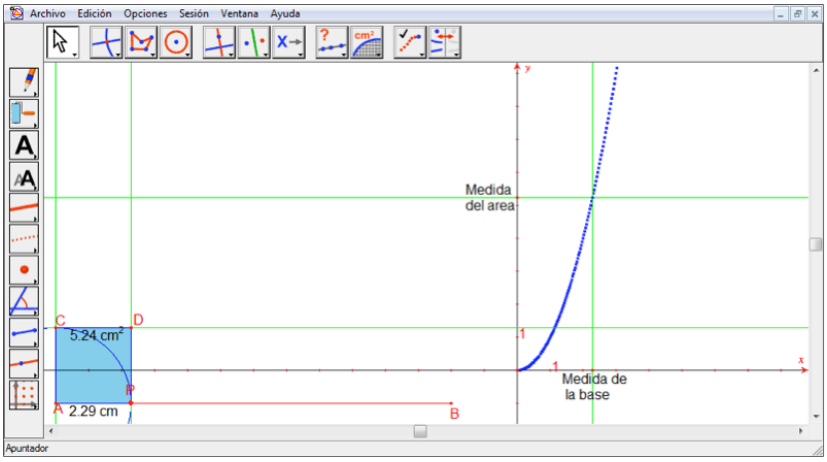
12. Trazar una recta paralela al eje y por el punto que representa la medida de la base sobre el eje x con la herramienta ***Recta paralela***.

13. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela***.

14. Hallar el punto de intersección entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a azul).

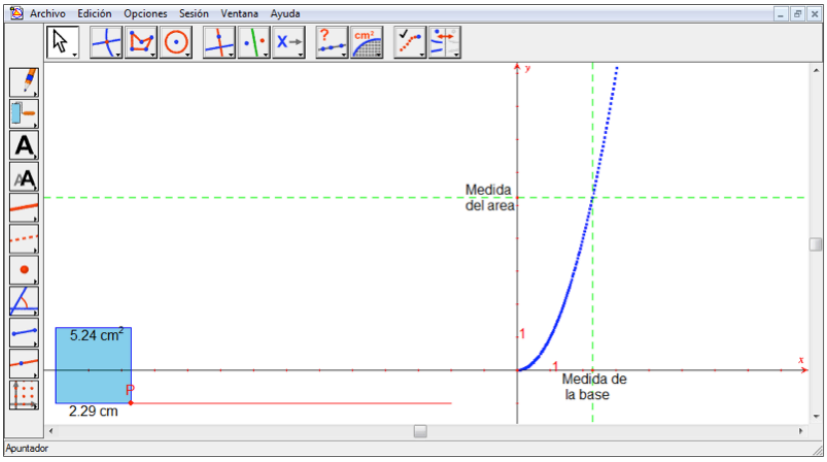


15. Activar el trazo del punto de intersección con la herramienta ***Traza*** . Luego, al mover el punto P se observará la respectiva gráfica cartesiana.



16. Para seguridad de la plantilla fijar los puntos A y B con la herramienta ***Fijar/Liberar*** .

17. Para una mejor presentación ocultar los puntos A, B, C, D, las dos rectas perpendiculares, la circunferencia y la recta paralela con la herramienta ***Ocultar/Mostrar*** .

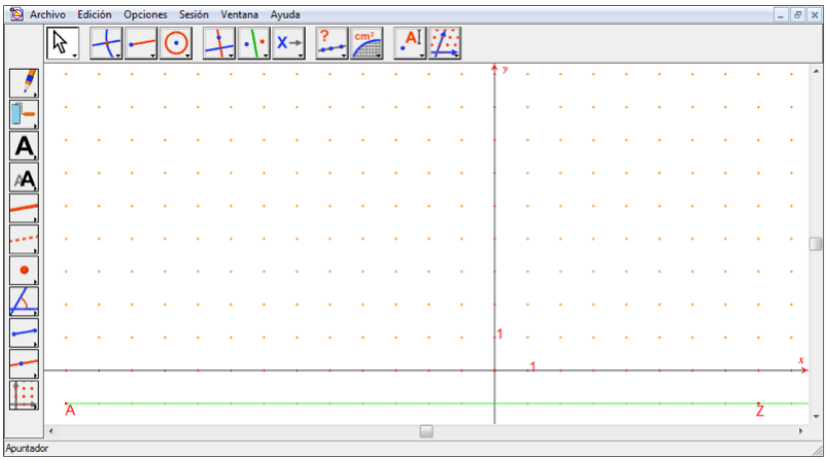


18. Guardar la construcción con el nombre ***"Cuadrados.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

Anexo 4: Crear Plantilla Paralelogramos.fig

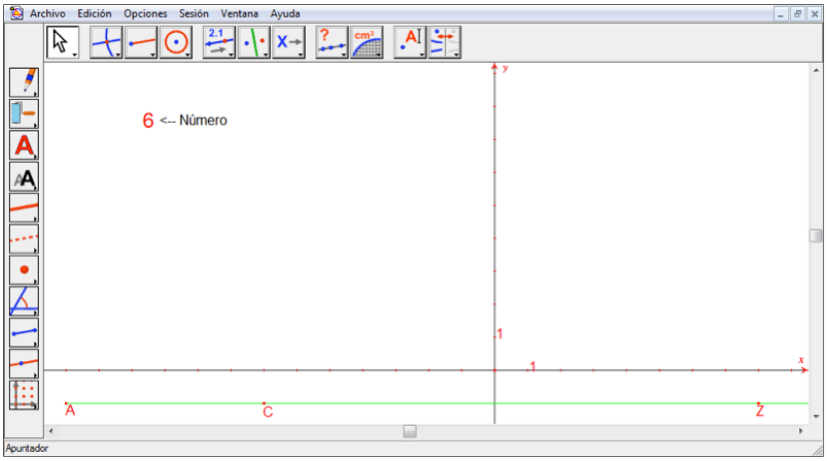
1. En una nueva ventana de Cabri II Plus activar los ***Ejes*** y la ***Rejilla***.

2. Construir una semirrecta AZ con las herramientas ***Semirrecta*** y ***Nombrar***.



3. Colocar un número con la herramienta ***Número*** (se puede cambiar el color de número con la herramienta ***Color de texto...***).

4. Transferir la longitud del número sobre la semirrecta AZ con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerá un punto que nombraremos C).

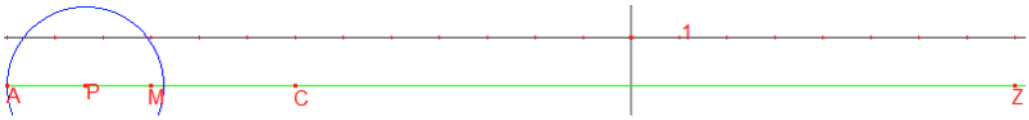


5. Hallar el punto medio M del segmento AC con la herramienta ***Punto medio***.

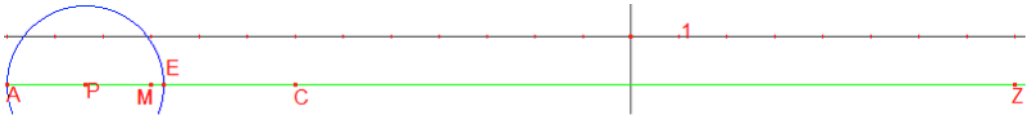
6. Construir un segmento AM con la herramienta ***Segmento***.

7. Ubicar un punto P sobre el segmento construido con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***.

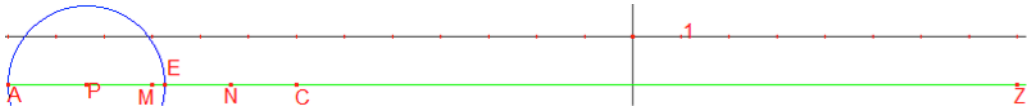
8. Construir una circunferencia con centro en P y radio PA con la herramienta ***Circunferencia***.



9. Hallar el punto de intersección E entre la circunferencia y la semirrecta AZ con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



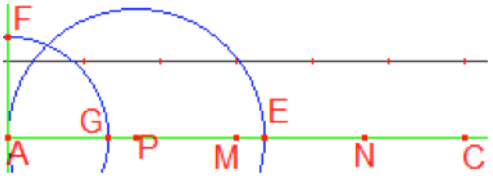
10. Hallar el punto medio N entre los puntos E y C con la herramienta ***Punto medio*** y ***Nombrar***.



11. Trazar una recta perpendicular a la semirrecta AZ por el punto A con la herramienta ***Recta perpendicular***.

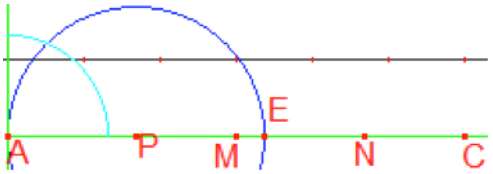
12. Construir una circunferencia con centro en A y radio EN con la herramienta ***Compás***.

13. Hallar los puntos de intersección F y G respectivamente entre la circunferencia y la recta perpendicular, y entre la circunferencia y la semirrecta AZ, con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



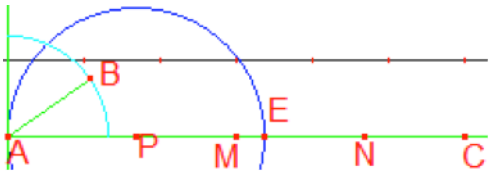
14. Ubicar un punto H sobre el arco FG con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***.

15. Construir un arco FHG con la herramienta ***Arco*** y ocultar la circunferencia y los puntos FHG con la herramienta ***Ocultar/Mostrar***.



16. Ubicar un punto B sobre el arco construido con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***.

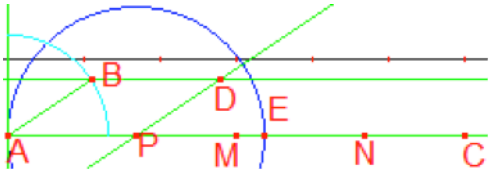
17. Construir el segmento AB con la herramienta ***Segmento***.



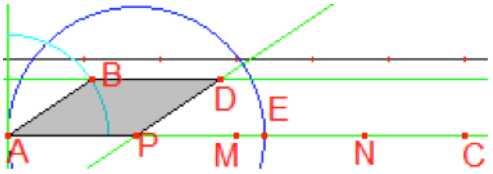
18. Trazar una recta paralela a la semirrecta AZ por el punto B con la herramienta ***Recta paralela*** .

19. Trazar una recta paralela al segmento AB por el punto P con la herramienta ***Recta paralela*** .

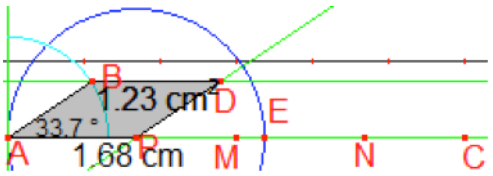
20. Hallar el punto de intersección D entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar*** .



21. Construir un paralelogramo cuyos vértices sean los puntos $APDB$ con la herramienta ***Polígono*** y colorearlo con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo de gris).



22. Calcular la medida del ángulo PAB, la longitud de la base AP y el área del paralelogramo $APDB$ con las herramientas ***Medida de ángulo*** , ***Distancia o longitud*** y ***Área*** , respectivamente.

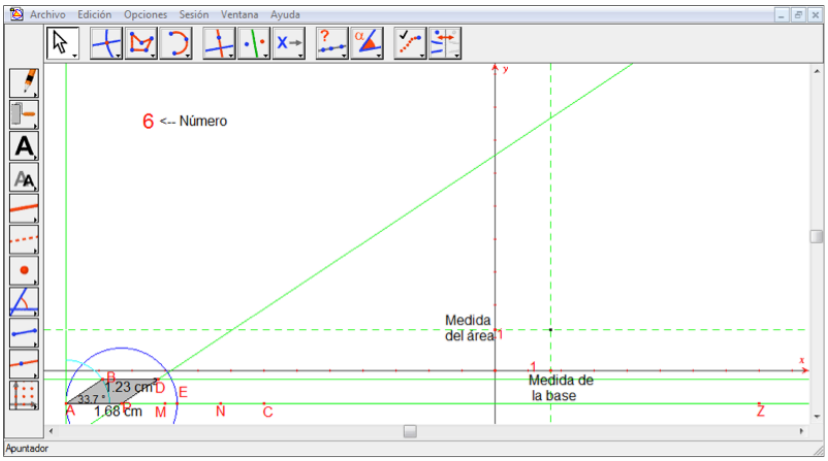


23. Transferir la medida de la base sobre el eje x y la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas*** . (Aparecerán dos puntos respectivamente).

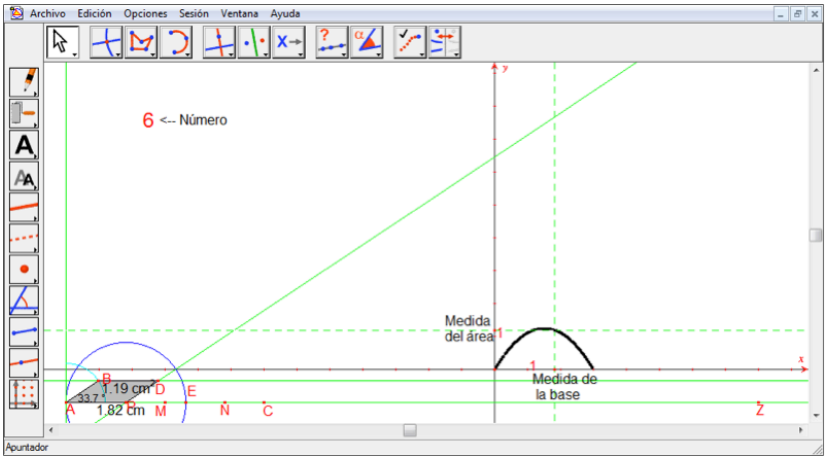
24. Trazar una recta paralela al eje y por el punto que representa la medida de la base sobre el eje x con la herramienta ***Recta paralela*** .

25. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela*** .

26. Hallar el punto de intersección entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a negro).



27. Activar el trazo del punto de intersección con la herramienta ***Traza*** . Luego, al mover el punto P se observará la respectiva gráfica cartesiana.



28. Para seguridad de la plantilla fijar los puntos A y Z con la herramienta ***Fijar/Liberar*** .

29. Para una mejor presentación ocultar los puntos A, M, E, N, C, Z y D, la semirrecta AZ, la circunferencia, la recta perpendicular por el punto A, el segmento AB y las rectas paralelas BD y PD con la herramienta ***Ocultar/Mostrar*** . Escribir en la parte superior ***"Perímetro"*** y ***"Área"*** con la herramienta ***Texto*** (se puede cambiar el color de texto con la herramienta ***Color de texto...***) y arrastrar con el ***Cursor*** frente a ***"Perímetro"*** el número y frente a ***"Área"*** la medida del área.

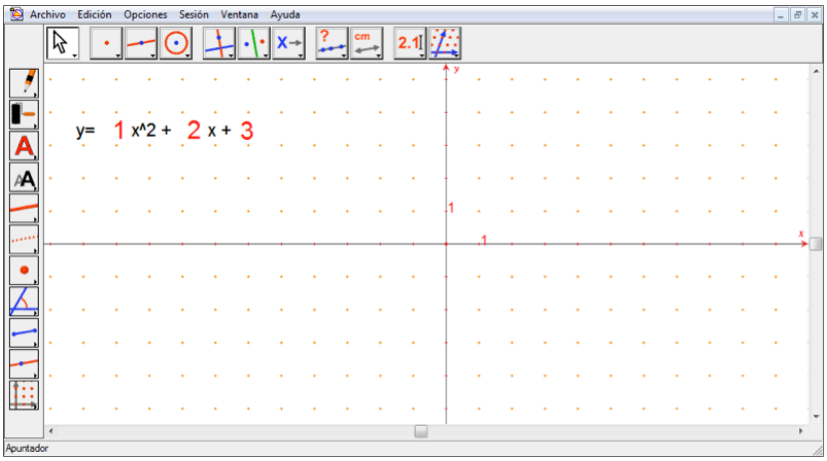
30. Guardar la construcción con el nombre ***"Paralelogramos.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

Anexo 5: Crear Plantilla Parabolas1.fig

1. En una nueva ventana de Cabri II Plus activar los ***Ejes*** y la ***Rejilla***.

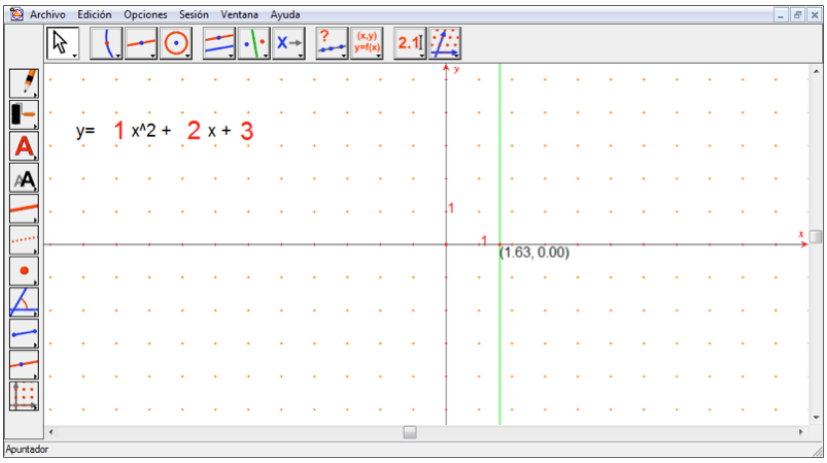
2. Escribir en la parte superior *"y =* ***(mínimo 6 espacios)*** x^2+ ***(mínimo 6 espacios)*** $x+$*"* con la herramienta ***Texto*** (se puede cambiar el color de texto con la herramienta ***Color de texto...***)

3. Colocar tres números con la herramienta ***Número***, dos entre los espacios y el otro al final del texto (se puede cambiar el color de número con la herramienta ***Color de texto...***).

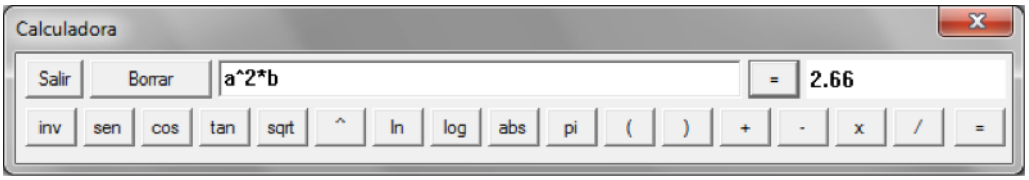


4. Ubicar un punto sobre el eje x con la herramienta ***Punto sobre un objeto*** y calcular su coordenada con la herramienta ***Coordenadas o ecuación***.

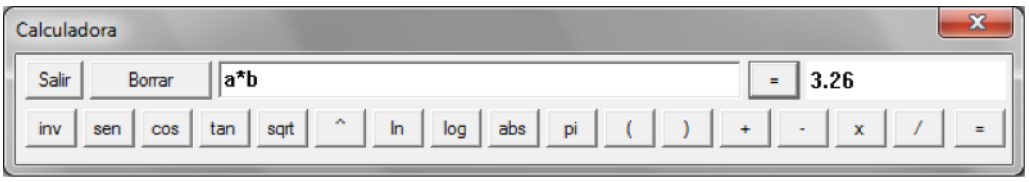
5. Trazar una recta paralela al eje y por el punto sobre el eje x con la herramienta ***Recta paralela***.



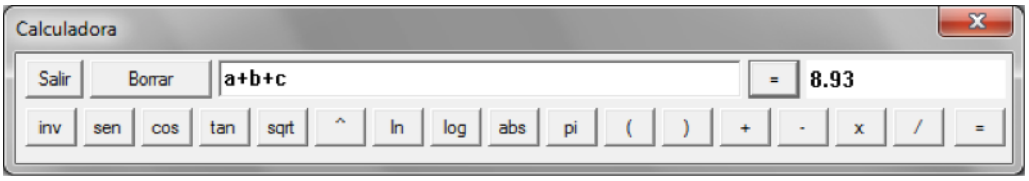
6. Calcular el valor de la función con el valor de x en la coordenada del punto con la herramienta ***Calculadora*** y realizando las siguientes operaciones (haciendo clic en los respectivos números o valores):
- "el cuadrado del valor de x en el punto por el primer número".



- "Valor de x en el punto por el segundo número".



- "Suma de los dos resultados anteriores más el tercer número".

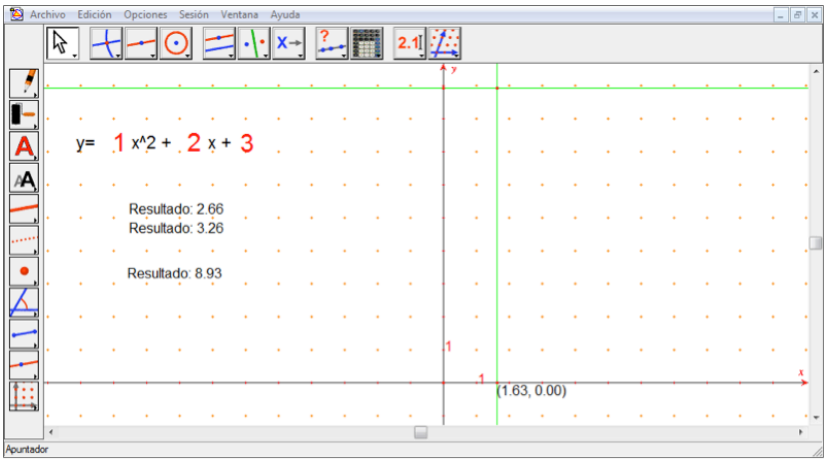


En este ejemplo tenemos:
- $1,63^2 \times 1 = 2,66$
- $1,63 \times 2 = 3,26$
- $2,66 + 3,26 + 3 = 8,93$

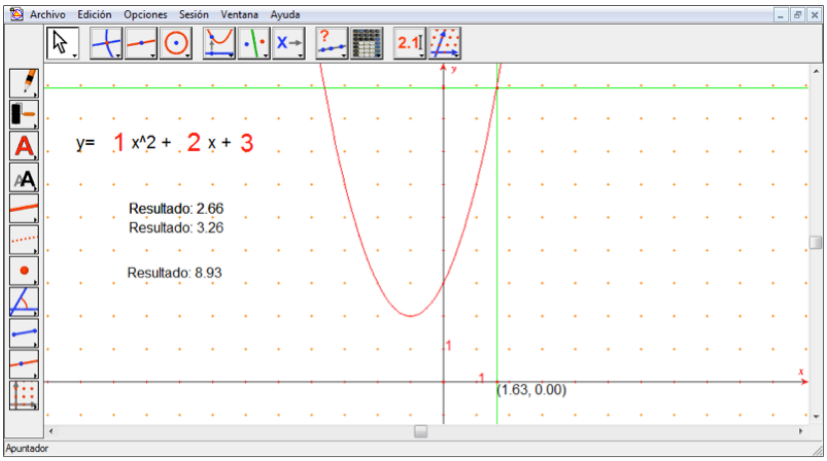
7. Transferir el valor del último resultado sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas*** . (Aparecerá un punto).

8. Trazar una recta paralela al eje x por el punto sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela*** .

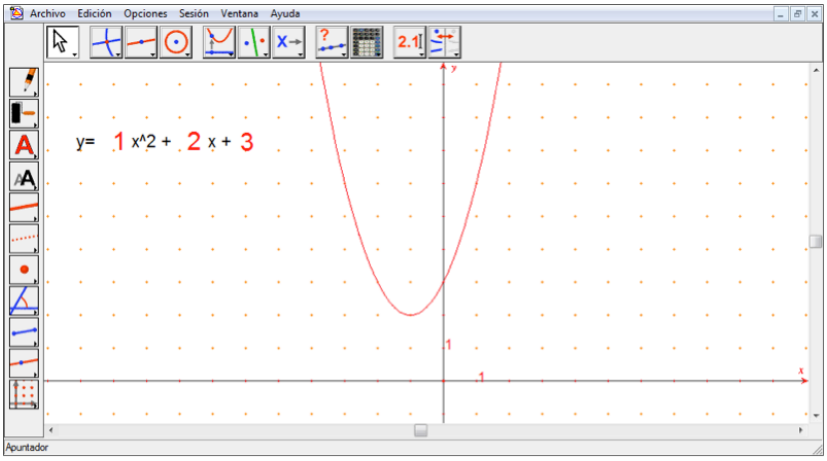
9. Hallar el punto de intersección entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** .



10. Trazar la correspondiente parábola con la herramienta ***Lugar*** (primero hacer clic sobre el punto de intersección de las dos rectas paralelas (Paso 9), y luego hacer clic sobre el punto en el eje x (Paso 4))



11. Para una mejor presentación ocultar el punto sobre el eje x y su coordenada, los resultados de las operaciones, el punto sobre el eje y, las rectas paralelas y el punto de intersección entre ellas con la herramienta ***Ocultar/Mostrar*** .



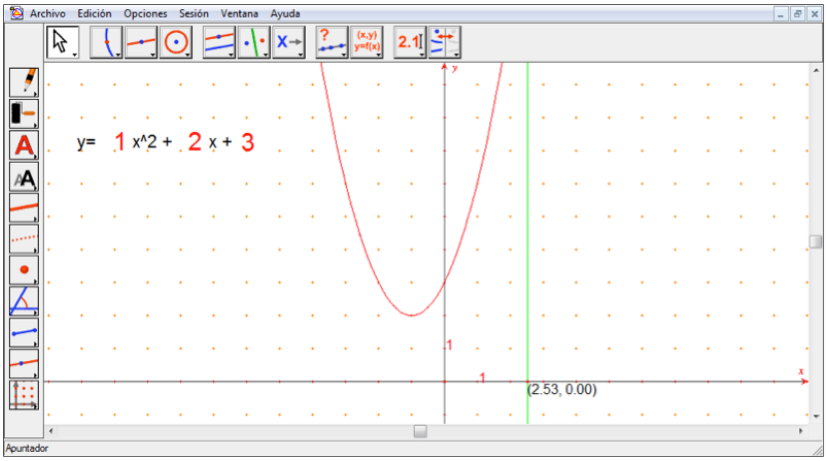
12. Guardar la construcción con el nombre ***"Parabolas1.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

Anexo 6: Crear Plantilla Parabolas2.fig

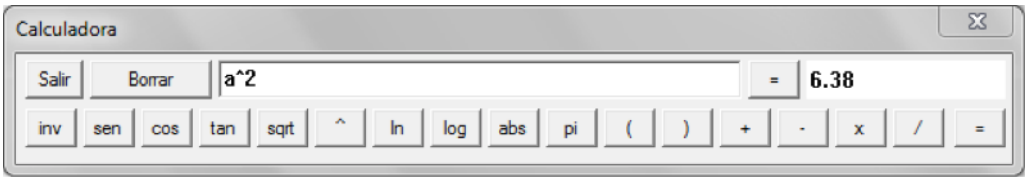
1. Realizar la plantilla ***"Parabolas1.fig"*** en una nueva ventana de Cabri II o tener una copia de la misma.

2. Ubicar un punto sobre el eje x con la herramienta ***Punto sobre un objeto*** y calcular su coordenada con la herramienta ***Coordenadas o ecuación***.

3. Trazar una recta paralela al eje y por el punto sobre el eje x con la herramienta ***Recta paralela***.



4. Con el valor de x en la coordenada del punto realizar la siguiente operación (haciendo clic en el respectivo valor de x) con la herramienta ***Calculadora***:
- "El cuadrado del valor de x en el punto".

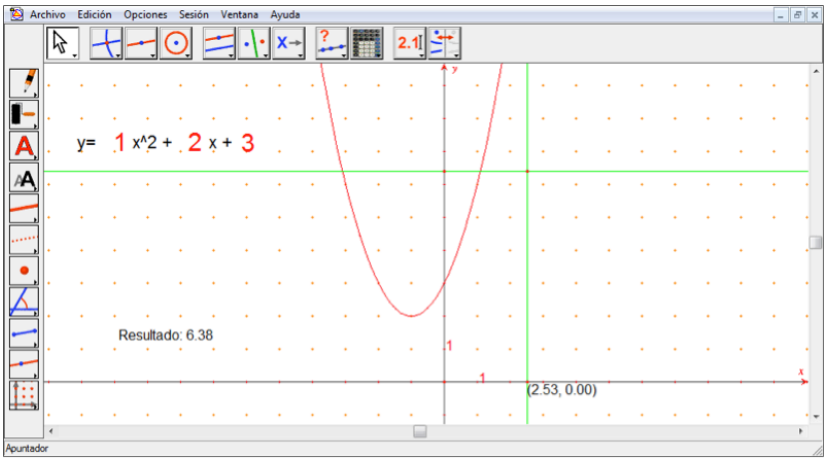


En este ejemplo tenemos:
- $2,53^2 = 6,38$

5. Transferir el valor del último resultado sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerá un punto).

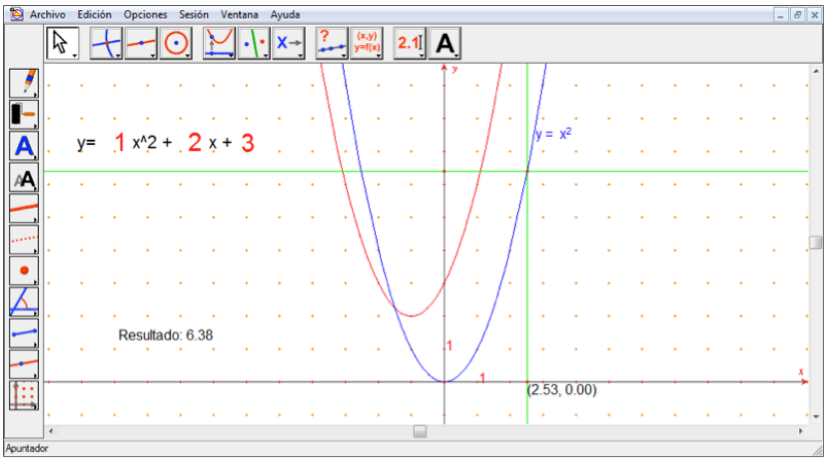
6. Trazar una recta paralela al eje x por el punto sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela***.

7. Hallar el punto de intersección entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección***.

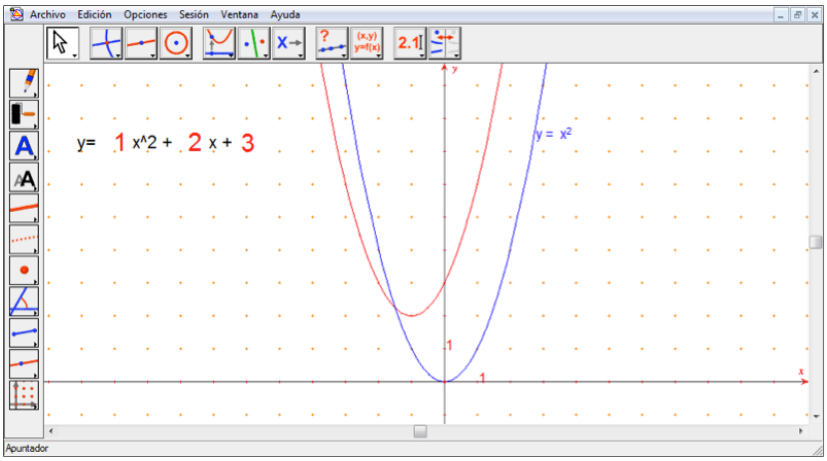


8. Trazar la correspondiente parábola con la herramienta ***Lugar*** (primero hacer clic sobre el punto de intersección de las dos rectas paralelas (Paso 7), y luego hacer clic sobre el punto en el eje x (Paso 2)) y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a azul).

9. Calcular la correspondiente ecuación de la parábola con la herramienta ***Coordenadas o ecuación*** (se puede cambiar el color de texto con la herramienta ***Color de texto...***).



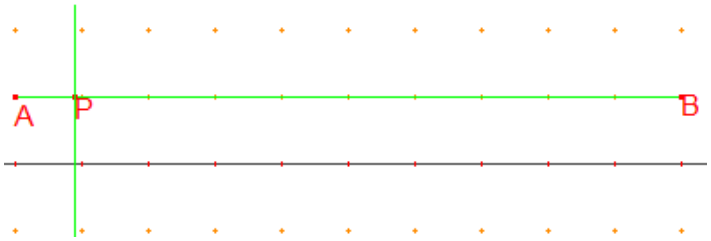
10. Para una mejor presentación ocultar el punto sobre el eje x y su coordenada, el resultado de la operación, el punto sobre el eje y, las rectas paralelas, y el punto de intersección entre ellas con la herramienta ***Ocultar/Mostrar*** .



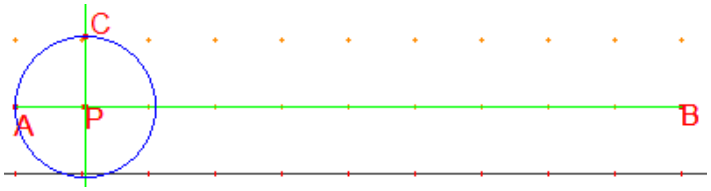
11. Guardar la construcción con el nombre ***"Parabolas2.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

Anexo 7: Crear Plantilla CuadraturaPentagono.fig

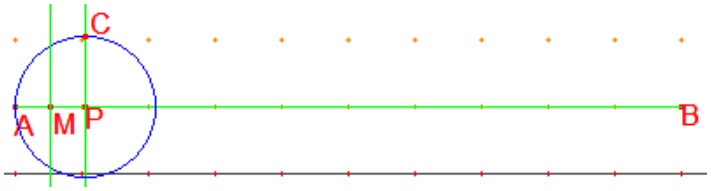
1. En una nueva ventana de Cabri II Plus activar los ***Ejes*** y la ***Rejilla***.
2. Construir una semirrecta AB con las herramientas ***Semirrecta*** y ***Nombrar***.
3. Ubicar un punto P sobre la semirrecta AB con la herramienta ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***. El segmento AP será el lado del pentágono regular.
4. Trazar una recta perpendicular al segmento AB por el punto P con la herramienta ***Recta perpendicular***.



5. Construir una circunferencia con centro en P y radio PA con la herramienta ***Circunferencia***.
6. Hallar el punto de intersección C entre la circunferencia y la recta perpendicular con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



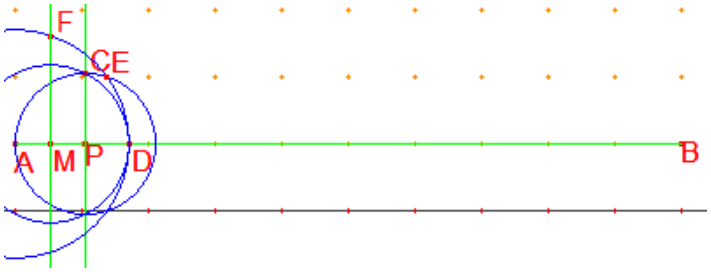
7. Hallar el punto medio M del segmento AP con la herramienta ***Punto medio***.
8. Trazar una recta perpendicular al segmento AB por el punto M con la herramienta ***Recta perpendicular***.



9. Construir una circunferencia con centro en M y radio MC con la herramienta ***Circunferencia***.
10. Hallar el punto de intersección D entre la última circunferencia y el segmento AB con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.
11. Construir una circunferencia con centro en A y radio AD con la herramienta ***Circunferencia***.

12. Hallar el punto de intersección E entre la circunferencia de radio PA (Paso 5.) y la última circunferencia construida (Paso 11.) con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

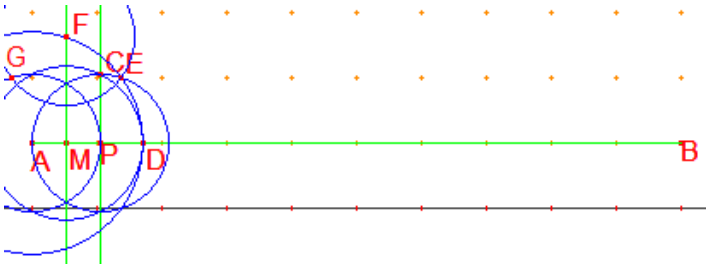
13. Hallar el punto de intersección F entre la mediatriz (Paso 5.) y la última circunferencia construida (Paso 11.) con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



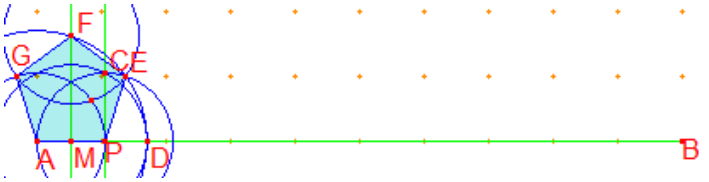
14. Construir una circunferencia con centro en A y radio AP con la herramienta ***Circunferencia***.

15. Construir una circunferencia con centro en D y radio AP con la herramienta ***Compás***.

16. Hallar el punto de intersección G entre la dos últimas circunferencias con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



17. Construir un pentágono cuyos vértices sean los puntos $APEFG$ con la herramienta ***Polígono*** y colorearlo con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo de azul).



18. Ocultar todas las circunferencia y todas las rectas perpendiculares con la herramienta ***Ocultar/Mostrar***.

19. Debajo del pentágono regular construir un segmento JL con las herramientas ***Segmento*** y ***Nombrar***.

20. Ubicar un punto Q sobre el segmento JL con la herramienta ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***. El segmento JQ será el lado del cuadrado.

21. Trazar una recta perpendicular al segmento JL por el punto J con la herramienta ***Recta perpendicular***.

22. Trazar una recta perpendicular al segmento JL por el punto Q con la herramienta ***Recta perpendicular***.

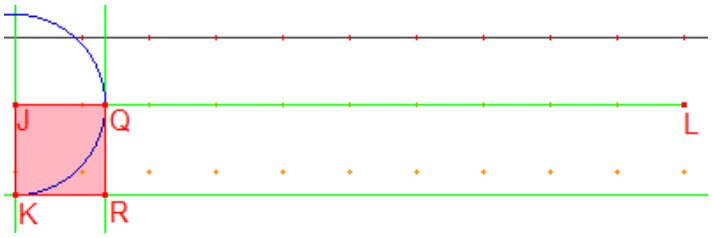
23. Construir una circunferencia con centro en J y radio JQ con la herramienta ***Circunferencia***.

24. Hallar el punto de intersección K entre la circunferencia y la recta perpendicular con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

25. Trazar una recta paralela al segmento JL por el punto K con la herramienta ***Recta paralela***.

26. Hallar el punto de intersección R entre la circunferencia y la recta paralela con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

27. Construir un cuadrado cuyos vértices sean los puntos $JKRQ$ con la herramienta ***Polígono*** y colorearlo con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo de rojo).



28. Ocultar las rectas perpendiculares y la recta paralela las circunferencia con la herramienta ***Ocultar/Mostrar***.

29. Calcular la medida del área del pentágono regular $APEFG$ con la herramienta ***Área***.

30. Transferir la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerán un punto respectivamente).

31. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área del pentágono regular sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a azul). Luego, al mover el punto P se observará el cambio de área en el pentágono regular.

32. Calcular las medidas del lado y del área del cuadrado con las herramientas ***Distancia o longitud*** y ***Área*** respectivamente.

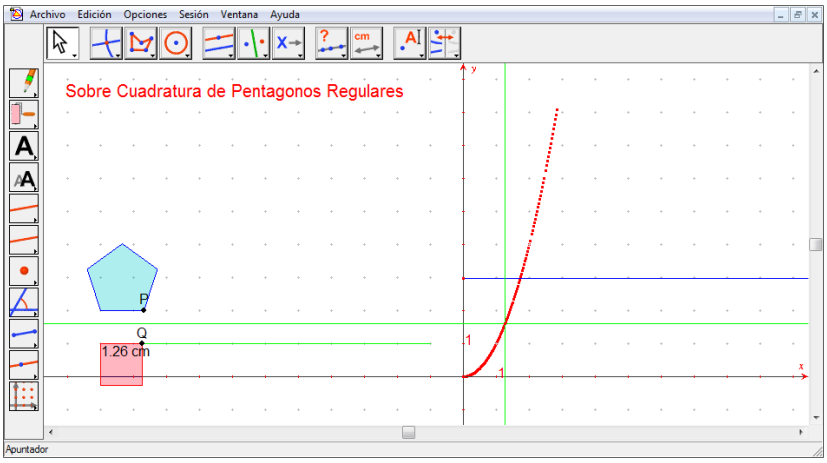
33. Transferir la medida del lado sobre el eje x y la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerán dos puntos respectivamente).

34. Trazar una recta paralela al eje y por el punto que representa la medida del lado sobre el eje x con la herramienta ***Recta paralela***.

35. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela***.

36. Hallar el punto de intersección entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a rojo).

37. Activar el trazo del punto de intersección con la herramienta ***Traza***. Luego, al mover el punto Q se observará la respectiva gráfica cartesiana.



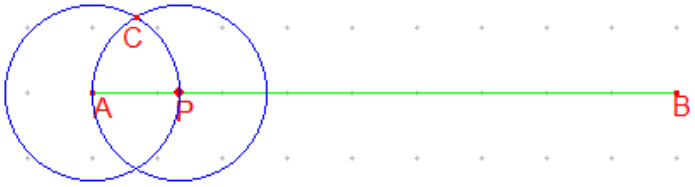
38. Para seguridad de la plantilla fijar los puntos A, B, J y L, con la herramienta ***Fijar/Liberar***.

39. Para una mejor presentación ocultar los puntos A, B, C, D, E, F, G, J, L, K y R, y las medidas de área. Escribir en la parte superior "Sobre Cuadratura de Pentágonos Regulares" con la herramienta ***Texto*** (se puede cambiar el color de texto con la herramienta ***Color de texto...***)

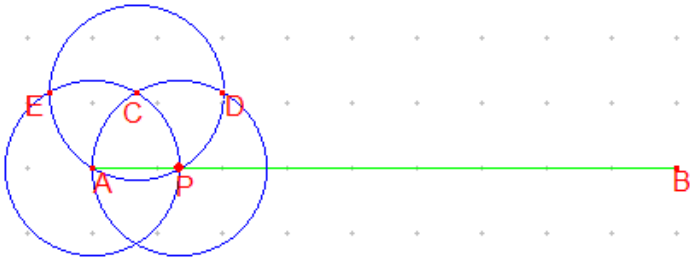
40. Guardar la construcción con el nombre ***"CuadraturaPentagono.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

Anexo 8: Crear Plantilla CuadraturaHexagono.fig

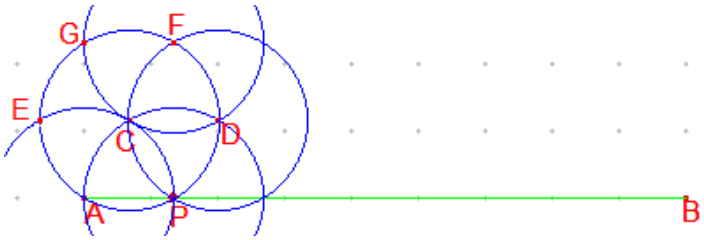
1. En una nueva ventana de Cabri II Plus activar los ***Ejes*** y la ***Rejilla***.
2. Construir un segmento AB con las herramientas ***Segmento*** y ***Nombrar***.
3. Ubicar un punto P sobre el segmento AB con la herramienta ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***. El segmento AP será el lado del hexágono regular.
4. Construir una circunferencia con centro en A y radio AP con la herramienta ***Circunferencia***.
5. Construir una circunferencia con centro en P y radio PA con la herramienta ***Circunferencia***.
6. Hallar el punto de intersección C entre las dos circunferencias con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



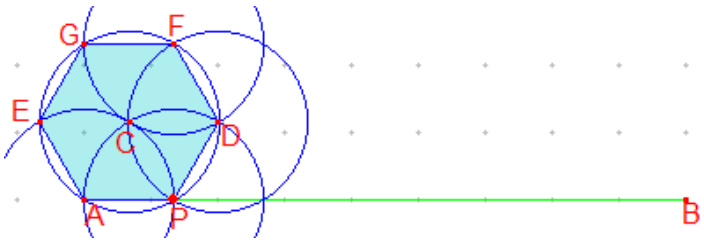
7. Construir una circunferencia con centro en C y radio CP con la herramienta ***Circunferencia***.
8. Hallar los puntos de intersección D y E entre la última circunferencia y las circunferencias de centro A y de centro P (Pasos 4 y 5 respectivamente) con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



9. Construir una circunferencia con centro en D y radio DC con la herramienta ***Circunferencia***.
10. Construir una circunferencia con centro en E y radio EC con la herramienta ***Circunferencia***.
11. Hallar los puntos de intersección F y G entre las últimas circunferencias y la circunferencia de centro C (Paso7) con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



12. Construir un hexágono cuyos vértices sean los puntos $APDFGE$ con la herramienta ***Polígono*** y colorearlo con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo de azul).



13. Ocultar todas las circunferencia con la herramienta ***Ocultar/Mostrar***.

14. Debajo del pentágono regular construir un segmento JL con las herramientas ***Segmento*** y ***Nombrar***.

15. Ubicar un punto Q sobre el segmento JL con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***. El segmento JQ será el lado del cuadrado.

16. Trazar una recta perpendicular al segmento JL por el punto J con la herramienta ***Recta perpendicular***.

17. Trazar una recta perpendicular al segmento JL por el punto Q con la herramienta ***Recta perpendicular***.

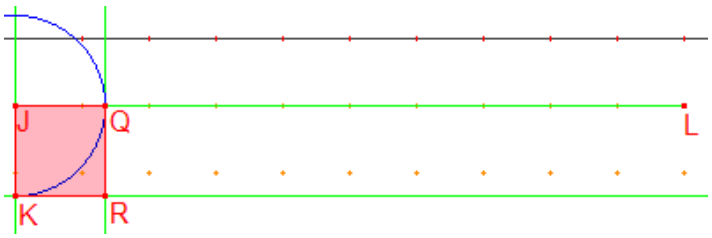
18. Construir una circunferencia con centro en J y radio JQ con la herramienta ***Circunferencia***.

19. Hallar el punto de intersección K entre la circunferencia y la recta perpendicular con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

20. Trazar una recta paralela al segmento JL por el punto K con la herramienta ***Recta paralela***.

21. Hallar el punto de intersección R entre la circunferencia y la recta paralela con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

22. Construir un cuadrado cuyos vértices sean los puntos $JKRQ$ con la herramienta ***Polígono*** y colorearlo con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo de rojo).



23. Ocultar las rectas perpendiculares y la recta paralela las circunferencia con la herramienta ***Ocultar/Mostrar***.

24. Calcular la medida del área del hexágono regular $APDFGE$ con la herramienta ***Área***.

25. Transferir la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerá un punto respectivamente).

26. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área del pentágono regular sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a azul). Luego, al mover el punto P se observará el cambio de área en el hexágono regular.

27. Calcular la medida del lado y área del cuadrado con las herramientas ***Distancia o longitud*** y ***Área*** respectivamente.

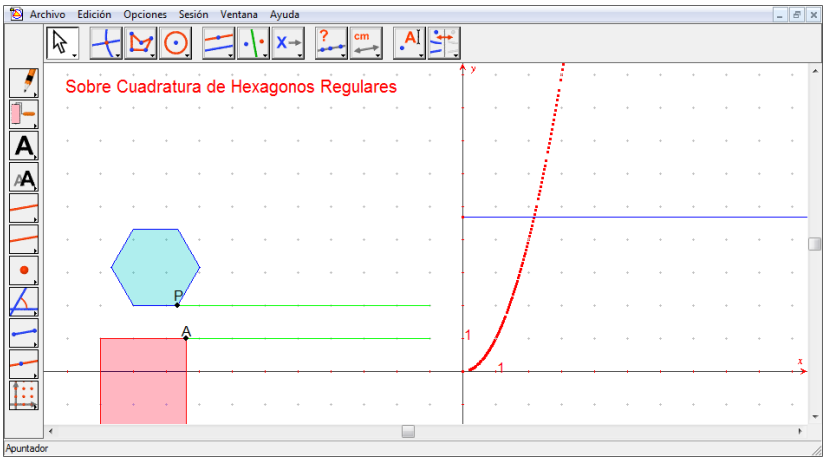
28. Transferir la medida del lado sobre el eje x y la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerán dos puntos respectivamente).

29. Trazar una recta paralela al eje y por el punto que representa la medida del lado sobre el eje x con la herramienta ***Recta paralela***.

30. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela***.

31. Hallar el punto de intersección entre las dos rectas paralelas con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a rojo).

32. Activar el trazo del punto de intersección con la herramienta ***Traza***. Luego, al mover el punto Q se observará la respectiva gráfica cartesiana.



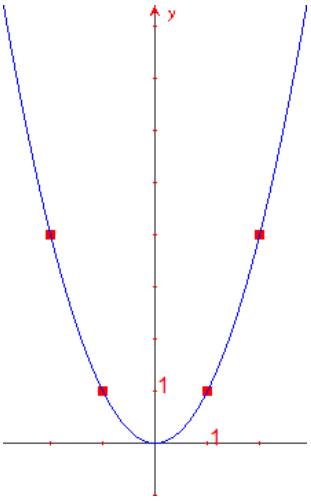
33. Para seguridad de la plantilla fijar los puntos A, B, J y L, con la herramienta ***Fijar/Liberar***.

34. Para una mejor presentación ocultar los puntos A, B, C, D, E, F, G, J, L, K y R, y las medidas de área. Escribir en la parte superior ***"Sobre Cuadratura de Hexágonos Regulares"*** con la herramienta ***Texto*** (se puede cambiar el color de texto con la herramienta ***Color de texto...***)

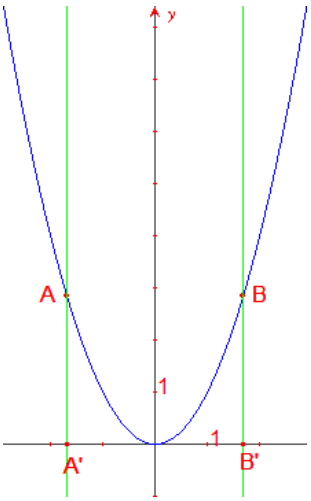
35. Guardar la construcción con el nombre ***"CuadraturaHexagono.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.

Anexo 9: Crear Plantilla AreaParabola.fig

1. En una nueva ventana de Cabri II Plus activar los ***Ejes*** y la ***Rejilla***.
2. Ubicar los siguientes puntos sobre la rejilla con la herramienta ***Punto*** $(-2, 4)$; $(-1, 1)$; $(1, 1)$ y $(2, 4)$.
3. Construir una parábola que pase por los puntos $(-2, 4)$; $(-1, 1)$; $(0, 0)$; $(1, 1)$ y $(2, 4)$ con la herramienta ***Cónica***.



4. Ocultar los puntos sobre la rejilla con la herramienta ***Ocultar/Mostrar***.
5. Ubicar dos puntos A y B sobre la parábola construida con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***.
6. Trazar una recta paralela al eje y por el punto A con la herramienta ***Recta paralela***.
7. Trazar una recta paralela al eje y por el punto B con la herramienta ***Recta paralela***.
8. Hallar los puntos de intersección A' y B' entre cada recta paralela con el eje x usando las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.



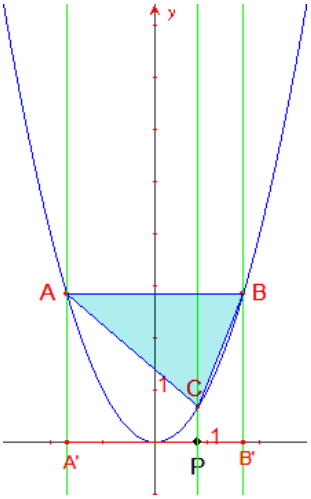
9. Construir un segmento $A'B'$ con la herramienta ***Segmento***.

10. Ubicar un punto P sobre el segmento $A'B'$ con las herramientas ***Punto sobre un objeto*** y ***Nombrar***.

11. Trazar una recta paralela al eje y por el punto P con la herramienta ***Recta paralela***.

12. Hallar el punto de intersección C entre la parábola y la recta paralela con las herramientas ***Punto(s) de intersección*** y ***Nombrar***.

13. Construir un triángulo cuyos vértices sean los puntos ABC con la herramienta ***Triángulo*** y colorearlo de otro color con la herramienta ***Rellenar*** (por ejemplo azul).



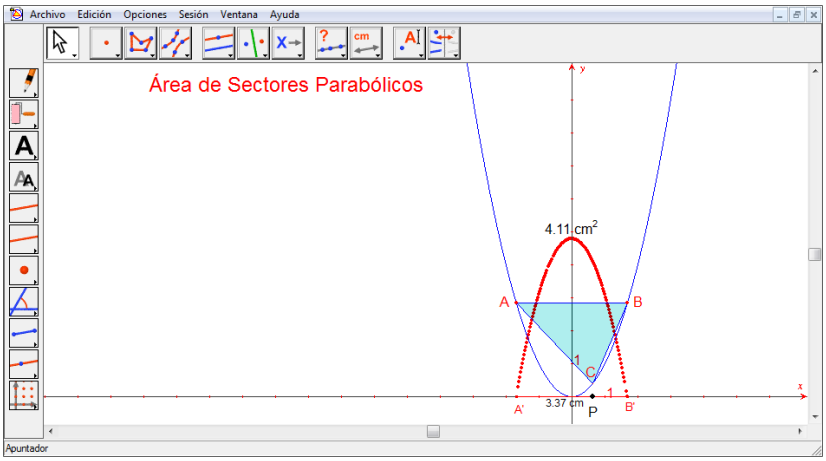
14. Calcular la medida del área del triángulo ABC con la herramienta ***Área***.

15. Transferir la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Transferencia de medidas***. (Aparecerá un punto respectivamente).

16. Trazar una recta paralela al eje x por el punto que representa la medida del área sobre el eje y con la herramienta ***Recta paralela***.

17. Hallar el punto de intersección entre última recta paralela y la recta paralela por el punto P con la herramienta ***Punto(s) de intersección*** y cambiarle el color con la herramienta ***Color*** (por ejemplo a rojo).

18. Activar el trazo del punto de intersección con la herramienta ***Traza***. Luego, al mover el punto P se observará la respectiva gráfica cartesiana.



19. Para una mejor presentación ocultar las rectas paralelas. Escribir en la parte superior ***"Área de Sectores Parabólicos"*** con la herramienta ***Texto*** (se puede cambiar el color de texto con la herramienta ***Color de texto...***).

20. Guardar la construcción con el nombre ***"AreaParabolas.fig"*** (la extensión .fig es automática) desde la opción ***Guardar como...*** del menú ***Archivo***.