

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Simulación del fenómeno electrosísmico
en una dimensión usando diferencias
finitas.**

por

Ana Milena Nemocón Romero

dirigido por

José Daniel Muñoz Castaño, Dr.Rer.Nat.

Trabajo de grado presentado en cumplimiento parcial para optar
al grado de magister en ciencias

en la

Facultad de ciencias
Departamento de Física

enero de 2014

Aprobación

Los suscritos miembros del jurado aprueban este trabajo de grado titulado, *SIMULACION DEL FENÓMENO ELECTROSÍSMICO EN UNA DIMENSIÓN USANDO DIFERENCIAS FINITAS*, elaborado por Ana Milena Nemocón Romero.

Firman:

Patricia Gauzellino
Grupo de geofísica aplicada
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

Carlos Alberto Vargas
Grupo de geofísica
Departamento de Geociencias
Universidad Nacional de Colombia.

Jhon Morales
Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia.

La ciencia es el mejor escape a momentos poco afortunados de la humanidad... ¡Si la estudias y le dedicas tiempo, te recompensará siempre! Con ella, logras conocer cada vez más como funciona la vida y de esta manera tendrás opciones para salvarla...

AMNR.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Resumen

Facultad de ciencias
Departamento de Física

Magister en ciencias

por [Ana Milena Nemocón Romero](#)

La electrosísmica es una reciente técnica de prospección geofísica que, a diferencia de otras, puede llegar a distinguir entre varios fluidos como agua e hidrocarburos. La técnica consiste en la generación de una onda mecánica a partir de un pulso electromagnético aplicado en la superficie terrestre, al atravesar el material, actúa de manera diferente sobre la superficie cargada de los granos (capa Stern) y sobre la capa inducida en el fluido que satura el suelo (capa difusa), produciendo en consecuencia un desplazamiento relativo (sólido-fluido) y una onda sísmica de respuesta, ésta es detectada utilizando geófonos. Las ecuaciones que rigen el fenómeno combinan la electrodinámica de Maxwell con la propagación de ondas en medios porosos de Biot, y se conocen como ecuaciones de Pride. El objetivo de este trabajo es explorar si un esquema de diferencias finitas en el dominio natural del problema, frecuencia, reproduce el fenómeno. La fuente electromagnética está dada por la ondícula de Ricker con una frecuencia central de 20Hz. El método numérico escogido consiste en transformar a frecuencia el pulso de entrada, trasladar a diferencias finitas las ecuaciones de Pride, hallar con este esquema la respuesta al pulso de entrada para cada frecuencia, combinarlas y trasladar el resultado al dominio del tiempo, todo esto para cada profundidad de estudio. El esquema arroja datos de aceleración que reproducen la aparición de ondas sísmicas inducidas por el fenómeno electrosísmico en la interfaz de distintos parámetros electrocinéticos y poroelásticos del subsuelo, con velocidades del orden de las esperadas para el medio. Por su parte, la perturbación inducida por la propagación vertical de la señal de la onda electromagnética se atenúa como se espera respecto a las características del suelo. Este trabajo constituye un primer paso en Colombia para la búsqueda de esquemas numéricos que puedan reproducir correctamente este fenómeno.

Palabras clave (Electrosísmica, prospección, esquema, ondas, medio.)

Abstract

In contrast to other geophysical prospecting techniques, electroseismic is able to discriminate between different fluids such as water and hydrocarbons. In this technique, a mechanical wave is produced from an electromagnetic pulse applied on the earth surface, when it passes through the material acts differently on the adsorbed layer (Stern layer) and double layer induced in the fluid to saturate the soil (diffused layer). As a consequence, a relative displacement (solid-fluid) is produced and then, a seismic wave response can be detected using geophones. The equations governing the electroseismic effect combine Maxwell's electrodynamics and Biot's wave propagation in porous media, and are known as equations of Pride. In this work, we explore whether a finite difference scheme in the natural domain of the problem, frequency, attain reproduce this phenomenon. The electromagnetic source is given by a Ricker wavelet with a central frequency equal to 20Hz. The numerical method consists in transforming to frequency the input pulse, discretize finite difference equations of Pride to solve with this scheme the answer to input pulse for each frequency, combine and translate the results into the time domain, and apply this to each depth of study. The scheme sheds acceleration data that reproduce the appearance of seismic waves induced by electroseismic effect on the interface of several distinct electrokinetic and poroelastic parameters of the underground, with velocities of the order of those expected for the medium. Meanwhile, the perturbation induced by the vertical propagation of the electromagnetic wave signal is attenuated, as expected, respect to characteristics of the soil. This work is a first step in Colombia in order to find numerical schemes that can reproduce this phenomenon correctly.

Keywords (Electroseismic, prospecting, schema, waves, media.)

Agradecimientos

A mi maestro el profesor José Daniel por su excelente orientación durante todo este proceso, su paciencia, sus sabios consejos y su espíritu noble me demostraron lo valioso que es ser una buena persona por encima de obtener un título.

A Patricia G. y Fabio Z. de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata, por su valioso y desinteresado apoyo, además de su ánimo para la culminación de este trabajo.

A quienes me rodean y están conmigo siempre, a mis padres por sus oraciones y bendiciones, a mis hermanos y a mis tres sobrinas: Juana, Sara y Mafe.

Y para aquellos que llegan a mi vida para hacerla aún mejor...

Contenido

Aprobación	I
Resumen	III
Agradecimientos	V
Lista de Figuras	VIII
Lista de Tablas	X
1. Mecánica de medios continuos	4
1.1. Deformación (Strain)	4
1.2. Vector de desplazamientos infinitesimales y tensor de deformación	6
1.3. Esfuerzo (Stress)	8
1.4. Tensor de Elasticidad	10
1.5. Propagación de ondas en medios elásticos	12
1.5.1. Ecuación de Navier	12
1.5.2. Descomposición de Helmholtz, ondas P y ondas S	13
1.6. Propagación de ondas en medios viscoelásticos	16
1.6.1. Ecuación de onda en un medio viscoelástico	17
2. Fenómeno electrosísmico	19
2.1. Doble capa eléctrica y efecto electrocinético	20
2.1.1. Potencial Electrocinético	21
2.2. Mediciones electrosísmicas y sismoeléctricas	22
2.3. Ecuaciones electromagnéticas para medios porosos granulares	24
2.4. Ecuaciones de Biot	24
2.5. Ecuaciones de Pride	26
2.6. Acoplamiento electrocinético	28
2.6.1. Coeficientes de transporte	29
2.7. Modelo Unidimensional de las ecuaciones de Pride	30
2.7.1. Suposiciones	30
2.7.2. Modelo 1D	31

3. Estado del Arte	33
3.1. Antecedentes	33
3.2. Simulación electrosísmica 2D con elementos finitos de SHTE y PSVTM	34
3.2.1. Modelo	35
3.2.2. Resultados Numéricos	35
3.3. Modelado Electrosísmico 1D	37
3.3.1. Condiciones de frontera	38
3.3.2. Resultados numéricos	38
4. Implementación numérica	40
4.1. Diferencias finitas	40
4.2. Ecuaciones a resolver	41
4.3. Condiciones de frontera	43
4.4. Esquema de <i>Diferencias Finitas para el Dominio de la Frecuencia, DFDF</i>	43
4.4.1. Esquema de diferencias finitas para las ecuaciones de Maxwell	43
4.4.2. Esquema de diferencias finitas para las ecuaciones de Biot	46
4.5. El espacio de simulación	50
4.6. Fuente electromagnética, EM	50
4.7. Parámetros de entrada	52
4.8. Parámetros de salida	52
5. Resultados	53
5.0.1. Modelo 1	53
5.0.2. Modelo 2	56
6. Conclusiones	60
Bibliografía	60

Lista de Figuras

1.1.	Deformación compresional (a) y de cizalla (b), rotación pura (c).	5
1.2.	Vector de desplazamiento infinitesimal \vec{u} .	7
1.3.	Esfuerzo sobre un elemento de superficie.	8
1.4.	Relación entre tensión (esfuerzos) y deformación.	10
1.5.	Ondas sísmicas de compresión P y de corte S, UNAM.	14
2.1.	Modelo de doble capa de Gouy - Chapman [36]. X es la distancia en la fase líquida (capa difusa) desde la interfaz cargada (en el modelo unidimensional, se usa una sección de área unitaria perpendicular a la superficie), ψ es el potencial eléctrico el cual varía con X desde un valor (promedio) ψ_0 en la interfaz ($X = 0$) hasta cero.	20
2.2.	Movimiento relativo entre fase sólida y fluida (izquierda). Esquema de doble capa eléctrica responsable del fenómenos electrocinético (derecha), (la línea punteada corresponde al plano de corte). Tomado de Späth [41].	21
2.3.	Fenómenos Electrocinéticos, [37].	21
2.4.	Potencial electrocinético (ζ zeta) en el plano de cizallamiento incipiente [36].	22
2.5.	Fenómeno sismoeléctrico. La onda sísmica cruza una interfaz y genera una onda electromagnética.	23
2.6.	Fenómeno electrosísmico. La onda EM cruza una interfaz y genera una onda sísmica.	23
3.1.	Modelo físico del campo de simulación.	34
3.2.	Comparación de trazas individuales de aceleración para cuatro espesores diferentes de la segunda capa.	36
3.3.	Desplazamiento del sólido. Evolución de los frentes de onda generados por el contraste del coeficiente de acople electrocinético en el medio. El frente de onda a corresponde al viaje hacia arriba originado por la parte superior de la capa de interés (segunda capa, 400m). El b es el frente de onda hacia arriba originado por la parte inferior de la misma capa de interés. Análogamente los frentes c , d son el viaje hacia abajo de la parte superior e inferior de la capa de interés, respectivamente.	37
3.4.	modelo físico de un contacto agua-petróleo [41].	37
3.5.	dominios computacionales y sus límites, tomado de Späth [41].	38
3.6.	desplazamiento del sólido (izq.) y del fluido (Dcha.) registrado en el WOC.	39
3.7.	Variación de la amplitud del desplazamiento máximo registrado en superficie.	39
4.1.	Malla propuesta Kane Yee, tomado de [42].	44

4.2.	modelo físico 1D. En azul se indica la dirección en la que oscila la fuente eléctrica [41].	50
4.3.	Ondícula Ricker en el espectro de tiempo y frecuencia.	51
5.1.	Aceleración del desplazamiento para diferentes espesores, a la izquierda [13] y a la derecha los resultados obtenidos.	54
5.2.	Medida sísmica modelo 1. La guía se encuentra a un lado de la onda, para facilitar su visualización.	55
5.3.	Desplazamiento del sólido U_S	56
5.4.	Aceleración del desplazamiento relativo (izquierda) y Desplazamiento relativo (derecha) para el modelo de este trabajo y abajo desplazamiento para modelo [41]. La guía se encuentra a un lado de la onda, para facilitar su visualización.	57
5.5.	Factor de calidad.	58

Lista de Tablas

4.1. Parámetros de entrada.	52
4.2. Parámetros de entrada de fuente.	52
5.1. Parámetros de las propiedades del suelo para el modelo 1.	53
5.2. Parámetros de la fuente modelo 1.	55
5.3. Parámetros de las propiedades del suelo para el modelo 2.	57
5.4. Parámetros de la fuente para el modelo 2.	58

Introducción

La geofísica es la ciencia encargada del estudio físico de La Tierra. El conocimiento de las capas superficiales de La Tierra tiene tanto un objetivo científico como uno comercial, ya que con ella por ejemplo, se logran conocer las dimensiones de un reservorio de hidrocarburos por prospección sísmica o caracterizar la cámara mágmatica de un volcán a través de métodos gravimétricos. Hoy en día, se utilizan técnicas avanzadas de prospección, en las mediciones sísmicas, electrosísmicas, prospección química de microorganismos e imágenes de satélite, para saber lo que se esconde bajo la superficie de La Tierra. De ellas, la Sísmica de Reflexión es una de las técnicas de prospección más utilizadas en la exploración petrolera, pues genera finalmente una imagen (llamada *sección sísmica*) de la geometría de las estructuras geológicas. Sin embargo, el objetivo fundamental de este método no es distinguir los fluidos en un reservorio, sino en describir la estratigrafía del subsuelo estudiado. En otras palabras, esta técnica no permite distinguir entre agua o petróleo, sino solamente entre fluido y roca. Por esta razón, a partir de los años 90 se ha comenzado a combinar nuevas técnicas, como por ejemplo la prospección electrosísmica.

El método de prospección electrosísmica aprovecha el hecho de que los medios porosos tienen la capacidad de convertir la energía electromagnética (EM) en energía sísmica. En efecto, los materiales del suelo desarrollan una doble capa eléctrica, y un campo eléctrico aplicado puede ser lo suficientemente intenso como para generar el movimiento del material. Este movimiento se propaga como ondas sísmicas que son detectadas por geófonos. El método puede llegar a distinguir contactos de tipo agua-hidrocarburo y agua-gas presentes en el subsuelo. El agua, al ser polar, responde de manera muy diferente al hidrocarburo, que es apolar. Esta propiedad permite, entonces, distinguir entre los dos fluidos. Más aún, las señales de emisión se pueden codificar por medio de un patrón de amplitud variable conocido, de manera que la respuesta en los geófonos se pueda lograr distinguir del ruido estocástico. El ruido coherente se ve reforzado, pero puede ser eliminado mediante filtrado, Späth [41], con lo que se obtienen relaciones de señal a ruido muy buenas, que permiten analizar el subsuelo con precisión.

Desde mediados del siglo pasado se realizan trabajos experimentales, principalmente para evidenciar la conversión de energía sísmica en eléctrica usando explosivos como fuente. No sucede lo mismo con el fenómeno contrario, y la conversión de ondas EM a sísmicas que es menos común. Teóricamente, incluso, no se contempló la posibilidad de que ondas de corte generaran energía electromagnética sino hasta 1994. En esa fecha, Pride incorpora el sistema completo de ecuaciones de Maxwell [29] a las ecuaciones de Biot, y, mediante un promedio volumétrico, obtiene las ecuaciones macroscópicas que describen los fenómenos electrosísmico y sismoeléctrico.

La solución numérica de este sistema de ecuaciones que gobiernan la electrosísmica es el objeto del presente trabajo. En efecto, el modelado computacional es parte fundamental del análisis por electrosísmica, debido al gran número de parámetros involucrados y a las magnitudes tan pequeñas de desplazamiento que se generan por la aplicación de campos electromagnéticos y acústicos a través de un medio. Diversos autores han implementado métodos numéricos para resolver el conjunto de ecuaciones de Pride, todos en el presente siglo. Entre ellos cabe mencionar a Han [17], Pain [28], Haines [16] y White [48], [49], cada uno de los cuales utiliza aproximaciones diferentes para el estudio numérico del problema. Recientemente Späth [41] y Zyserman et al. [13] resolvieron el problema, usando el método de elementos finitos para las ecuaciones electrosísmicas en una y dos dimensiones. Sin embargo, las diferencias finitas pueden aportar a la solución del problema, pues son más fáciles de implementar y requieren menos potencia de cómputo. Sin embargo, su implementación suele estar llena de trucos que son específicos para cada aplicación y que se suele determinar por ensayo y error para cada caso.

El objetivo de este trabajo es implementar el método de diferencias finitas para la simulación del fenómeno electrosísmico en una dimensión. Esto incluye, reducir las ecuaciones de Pride a una dimensión, mediante aproximaciones y suposiciones Späth [41], discretizar el sistema lineal de ecuaciones a resolver junto con sus condiciones de frontera y condiciones iniciales, con una fuente EM usada ampliamente en este campo como lo es la ondícula de Ricker, aplicar diferencias finitas en el dominio de espacio-frecuencia FDFD. Se resuelve el problema para cada frecuencia y luego se aplica transformada inversa fourier para obtener un dominio de resolución espacio-tiempo. Los resultados se validan mediante comparación con los obtenidos por investigadores como Zyserman et al. [13] y Späth [41]. De esta manera, se espera aportar con un primer paso a la aplicación de la técnica de diferencias finitas en prospección electrosísmica.

En el Capítulo 1 se desarrolla el fundamento teórico de la mecánica de medios continuos para continuar con las características principales en la propagación de ondas en medios elásticos y viscoelásticos. En el Capítulo 2 se aborda el fenómeno electrosísmico partiendo de la definición de doble capa eléctrica y el efecto electrocinético para

llegar al acoplamiento de las ecuaciones de Maxwell y Biot y reducirlas en un modelo unidimensional. En el Capítulo 3 se hace referencia al “estado del arte” del fenómeno electrosísmico y se detallan los modelos físicos de otros investigadores con los que se validan los resultados. En el Capítulo 4 se implementa en forma numérica la discretización de las ecuaciones a resolver, el esquema en DFDF y las condiciones de frontera, detallando los parámetros de entrada y salida de la simulación. Finalmente en el Capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos y en el Capítulo 6 se brindan las conclusiones y consideraciones futuras.

Capítulo 1

Mecánica de medios continuos

La mecánica y la electrodinámica de medios continuos estudian el comportamiento de la materia macroscópicamente. Esto es, sin considerar su granularidad (estructura atómica) la cual para modelaciones de fenómenos ondulatorios depende de la relación crítica entre el espectro de longitudes de onda que se propagan y las dimensiones de los objetos explorados.

1.1. Deformación (Strain)

La deformación describe el cambio de las posiciones relativas de las partículas que componen un sólido en la aproximación de medios continuos. Los rangos que existen dependen del sólido y pueden ser: el elástico, donde las partículas recuperan sus posiciones originales al retirar el agente deformante; el plástico, donde las partículas quedan con nuevas posiciones y de fractura, donde el sólido pierde su unidad estructural.

Para describir matemáticamente la deformación de un sólido elástico, es necesario determinar la deformación local en cada punto dentro de él. Esto es posible asignando un conjunto de seis números a cada punto que corresponden a las componentes de un tensor simétrico [40] que se llama tensor de deformación (strain tensor).

Existen dos tipos de deformaciones: compresionales y de cizalla. Las compresionales se presentan cuando el sólido es deformado en una sola dirección a lo largo de uno o más ejes del sistema de referencia. Dado que tenemos un sólido elástico lineal de longitud L , y siendo sometido a una tensión σ que le produce una elongación por unidad de longitud¹

¹En el caso de la dilatación por unidad de volumen, $\Theta \equiv \frac{\Delta V}{V}$, representada por $\Theta = e_{ii}$.

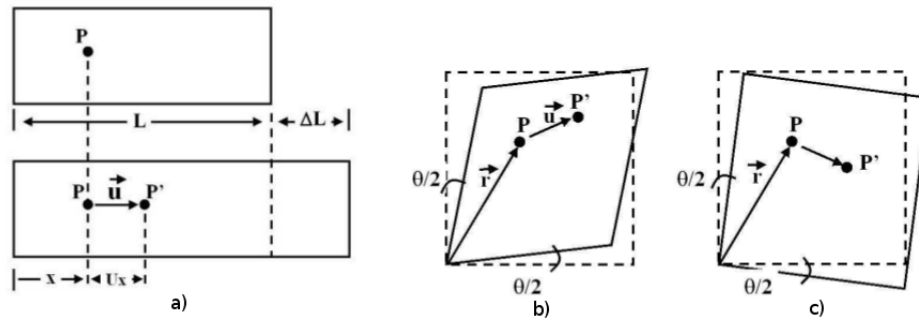


Figura 1.1: Deformación compresional (a) y de cizalla (b), rotación pura (c).

hasta ΔL , (parte (a), Figura 1.1) se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{u_x}{x} &= \frac{\Delta L}{L}, \\ u_x &= \varepsilon_{xx} x,\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\text{alargamiento}}{\text{long.inicial}} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

generalizando tenemos que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Las deformaciones tipo cizalla (shear strain) ocurren cuando los cambios de posición de las partículas son diagonales respecto a su posición original y existen ángulos involucrados (parte (b), Figura 1.1). Estas deformaciones son proporcionales entre los ejes angulares, para visualizarlo se introduce los ángulos α y β de la siguiente manera

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \alpha + \beta,\tag{1.2}$$

donde

$$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)}\tag{1.3}$$

y

$$\tan\beta \approx \beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{\left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)}. \quad (1.4)$$

Dado que, para este tipo de deformación la contribución de $\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ es nula frente a la unidad, se obtiene

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (1.5)$$

generalizando

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

En el caso de una rotación pura donde $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ y $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ son iguales y opuestos, no ocurre deformación alguna (parte (c), Figura 1.1)

1.2. Vector de desplazamientos infinitesimales y tensor de deformación

Definir este vector \vec{u} es necesario ya que describe el movimiento de las partículas en un cuerpo por el que viaja una perturbación ondulatoria y es el objeto cinemático $\vec{u}(r, t)$ fundamental de la ecuación de una onda elástica.

Considerando un sólido y un punto P en su interior. Sea \vec{r}_P su posición antes de la deformación y \vec{r}'_P su posición después de la deformación (Figura 1.2). El vector de desplazamientos infinitesimales se define como

$$\vec{u}_P = \vec{r}'_P - \vec{r}_P. \quad (1.7)$$

Si asignamos a cada punto del sólido coordenadas referidas a un sistema cartesiano fijo, el conjunto de los vectores \vec{u}_P constituye un campo vectorial, que en el caso de una deformación dinámica depende además del tiempo, dando como resultado el campo de desplazamiento

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}(x, y, z); t) = \vec{u}(x, y, z; t). \quad (1.8)$$

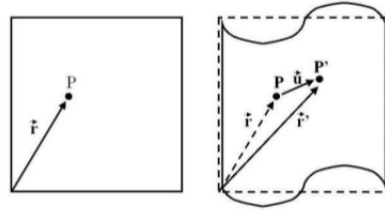


Figura 1.2: Vector de desplazamiento infinitesimal \vec{u} .

Considerando dos puntos cercanos entre sí, $P(x, y, z)$ y $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$, al ocurrir una deformación el cambio de posición entre los mismos es

$$\delta\vec{u} = \vec{r}'_Q - \vec{r}'_P = \vec{u}(x + dx, y + dy, z + dz; t) - \vec{u}(x, y, z; t), \quad (1.9)$$

realizando una aproximación lineal

$$\delta\vec{u} = \mathbf{J}d\vec{r}, \quad (1.10)$$

donde \mathbf{J} es la matriz de Jacobi del vector \vec{u} . Puede representarse como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{w} + \mathbf{e}, \quad (1.11)$$

donde la matriz \mathbf{w} es un tensor antisimétrico y corresponde con las rotaciones rígidas (sin deformación) del sólido completo, éste no contribuye al campo de deformaciones. Mientras que \mathbf{e} es el tensor simétrico que representa la deformación.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}[\partial_i u_j - \partial_j u_i] = \partial_{[ij]}, \quad (1.12)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}[\partial_i u_j + \partial_j u_i] = \partial_{(ij)}, \quad (1.13)$$

Finalmente se concluye que la aproximación de pequeñas deformaciones dadas, son la suma de dos componentes, uno de deformación y otro de rotación. Entonces el campo de deformación dentro del cuerpo solo está dado por el segundo término bien conocido como *tensor de deformación*. Usando (1.1) y (1.6) en notación matricial se escribe

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

1.3. Esfuerzo (Stress)

Una vez definido el tensor de deformación e_{ij} y el vector de desplazamiento \vec{u} para un sólido elástico, es necesario conocer las fuerzas restauradoras entre las partículas vecinas al paso de una perturbación con el tensor de esfuerzos σ_{ij} .

Las fuerzas externas existentes sobre los cuerpos pueden ser de superficie y de volumen. Las segundas actúan sobre todo el volumen y son fuerzas de largo alcance como la acción de la gravedad, las fuerzas magnéticas, las fuerzas de inercia de cuerpos animados de movimiento acelerado, etc. Las primeras por el contrario, ejercen su acción sobre la superficie de los cuerpos, su efecto no se produce de una vez sobre todas las partículas del sólido, sino que se transmite progresivamente gracias a los esfuerzos (fuerzas de superficie internas entre partículas vecinas). Ejemplos de estas fuerzas son la presión hidrostática, la presión del viento, etc. Cuando la fuerza se ejerce sobre una superficie muy reducida, se conocen como fuerzas puntuales.

En general en un cuerpo suelen diferenciarse acciones constantes como el propio peso y acciones variables como sobrecargas, acciones del viento, acciones sísmicas, etc. Estas acciones provocan tensiones, o fuerzas internas al obligar a las estructuras a que realicen determinados desplazamientos.

En un sólido, a diferencia de un líquido [10], toda fuerza interna tiene componentes compresionales y de cizalla, por lo que se considera sus componentes a lo largo de todos los ejes.

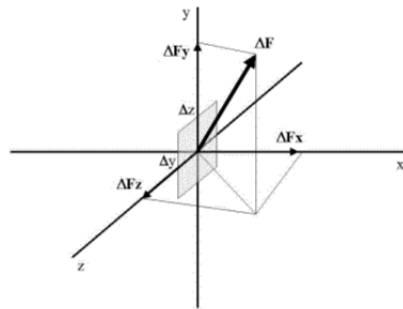


Figura 1.3: *Esfuerzo sobre un elemento de superficie.*

Sea un elemento de superficie $\Delta y \Delta z$ perpendicular al eje x como se muestra en la Figura 1.3 y sea ΔF una fuerza aplicada al mismo, cuyas componentes son ΔF_x , ΔF_y , ΔF_z . Definimos

$$\sigma_{xx} = \frac{\Delta F_x}{\Delta y \Delta z}, \quad \sigma_{yx} = \frac{\Delta F_y}{\Delta y \Delta z}, \quad \sigma_{zx} = \frac{\Delta F_z}{\Delta y \Delta z},$$

donde el índice i está relacionado con la componente de fuerza y el j al eje coordenado perpendicular al elemento de área. Análogamente para elementos de área perpendicular al eje z y al eje y , al descomponer estas fuerzas tendremos

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{\Delta F_x}{\Delta x \Delta y}, & \sigma_{yz} &= \frac{\Delta F_y}{\Delta x \Delta y}, & \sigma_{zz} &= \frac{\Delta F_z}{\Delta x \Delta y}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\Delta F_x}{\Delta x \Delta z}, & \sigma_{yy} &= \frac{\Delta F_y}{\Delta x \Delta z}, & \sigma_{zy} &= \frac{\Delta F_z}{\Delta x \Delta z}.\end{aligned}$$

Los esfuerzos internos de un sólido sometido a una deformación pueden entonces ser descritos por un tensor de segundo orden denominado *tensor de esfuerzo*. En forma matricial reasignando la letra τ para las componentes simétricas del tensor se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Un ejemplo claro de tensor de esfuerzos es la presión hidrostática,

$$\vec{F} = \boldsymbol{\sigma}_{hidros} \cdot \vec{A},$$

donde el tensor que representa las fuerzas de contacto sobre las superficies es:

$$\boldsymbol{\sigma}_{hidros} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

para la componente de la fuerza en el eje x , $\vec{A} = (A, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} -pA \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

para el eje y , $\vec{A} = (0, A, 0)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -pA \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

y para el eje z , $\vec{A} = (0, 0, A)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

1.4. Tensor de Elasticidad

Para relacionar el vector de desplazamiento infinitesimal con el tensor de esfuerzos, es necesario introducir las ecuaciones dinámicas de la teoría de elasticidad denominadas ecuaciones de Navier. Sin embargo, estas ecuaciones no son suficientes para encontrar el estado de esfuerzos y deformación de un sólido arbitrario [21]. En efecto, para lograr condiciones de integrabilidad de las ecuaciones, es necesario introducir una relación constitutiva que relacione esfuerzos con deformaciones Figura 1.4.

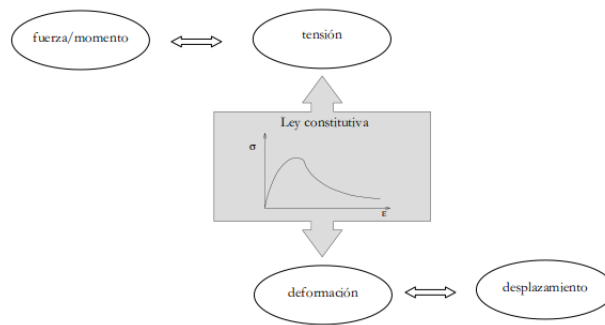


Figura 1.4: *Relación entre tensión (esfuerzos) y deformación.*

Como se menciona en la sección (1.1) un material se considera elástico si regresa a su estado no deformado cuando dejan de actuar sobre él fuerzas externas. Experimentalmente se ha logrado demostrar que para muchos de estos materiales las curvas de esfuerzo-deformación se relacionan proporcionalmente. De esta forma, la Ley de Hooke describe razonablemente el comportamiento físico de los medios continuos en el límite de deformaciones pequeñas, ya que relaciona linealmente cada uno de los componentes del tensor de esfuerzos con los del tensor de deformación [10]. Para el caso de un resorte o muelle ($F = -kx$), relaciona la elongación o alargamiento x con la fuerza aplicada F por medio de la constante elástica del resorte k .

Los coeficientes elásticos que aparecen en la Ley de Hooke son constantes si el medio es homogéneo y no dispersivo y, constituyen componentes de un tensor de cuarto orden describiendo totalmente las propiedades elásticas del medio². Un tensor de cuarto orden tiene $3^4 = 81$ componentes independientes, pero debido a la simetría del tensor de

²En forma análoga, los elementos de la matriz de permitividad ε_{ij} describen las propiedades eléctricas.

deformaciones y de esfuerzos implica que el tensor de elasticidad tiene $6 \times 6 = 36$ componentes independientes, que relacionan los componentes del tensor de esfuerzos con el tensor de deformaciones,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{xy} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{zx} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Como las propiedades para un material isótropo se describen sin referencia a las direcciones. La relación constitutiva para un material elástico, lineal e isótropo es

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij} * Tr(\epsilon),$$

o en notación matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{xy} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{zx} \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

de este modo el número de componentes constantes elásticas independientes se reduce a 2 y corresponden a las conocidas constantes de Lamé λ y μ definidas por

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda, \quad \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \mu. \quad (1.22)$$

Por lo tanto, la relación constitutiva (1.21) se convierte en

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 2e_{xy} \\ 2e_{yz} \\ 2e_{zx} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

1.5. Propagación de ondas en medios elásticos

1.5.1. Ecuación de Navier

En la sección anterior se definieron las cuatro cantidades fundamentales de la mecánica de medios continuos: deformación, vector de desplazamiento, esfuerzo y tensor de elasticidad, en esta sección se detalla la ecuación de movimiento que gobierna la propagación de ondas en un medio infinito linealmente elástico, isótropo y homogéneo.

La segunda ley de Newton de la mecánica para un medio continuo $F_{ext}^{\vec{}} + F_{int}^{\vec{}} = \int \rho \vec{r} dV$, se puede expresar de acuerdo con Euler como

$$\int_V \vec{F} dV + \int_S \vec{T} dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV, \quad (1.24)$$

donde \vec{F} representa a las fuerzas por unidad de volumen, \vec{v} es la velocidad y \vec{T} es el vector de esfuerzos que puede expresarse en función del tensor de esfuerzos σ de acuerdo con la ecuación de Cauchy $\vec{T}_i = \sigma_{ij} \nu_j$. Si aplicamos ΔV , teniendo el momentum $\vec{p} = m \vec{v}$, entonces para un elemento de volumen sin acciones constantes (1.3) las únicas fuerzas que actúan sobre cada elemento de masa Δm son el campo de deformaciones de la siguiente manera para x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_x &= \sigma_x(x+dx, y, z) dydz + \tau_{xy}(x, y+dy, z) dx dz + \tau_{xz}(x, y, z+dz) dx dy, \\ &- \sigma_x(x, y, z) dydz - \tau_{xy}(x, y, z) dx dz - \tau_{xz}(x, y, z) dx dy, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\frac{d}{dt} (\Delta m \nu_x) = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \Delta V, \quad (1.26)$$

según la ley de conservación de masa

$$\rho \frac{d\nu_x}{dt} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right).$$

Retomando (1.23), con el tensor de esfuerzos (1.15) se obtiene

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\nu_x}{dt} &= \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{d\nu_y}{dt} &= \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \rho \frac{d\nu_z}{dt} &= \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),\end{aligned}\tag{1.27}$$

que en notación vectorial se convierte en

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{d\vec{\nu}}{dt},\tag{1.28}$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.\tag{1.29}$$

Finalmente se obtiene la ecuación de Navier (1.29), donde ρ es la densidad del medio, \mathbf{u} es el desplazamiento producido por la deformación y λ y μ los coeficientes de Lamé. Ésta, representa un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales que describen la dinámica de un medio continuo. Son la forma natural de las ecuaciones de Newton para un medio continuo, y describen el movimiento relativo de los puntos del medio provocado por los esfuerzos internos y las fuerzas de volumen aplicadas al mismo [1].

1.5.2. Descomposición de Helmholtz, ondas P y ondas S

El teorema de Helmholtz es solución de la ecuación (1.29), establece que cualquier campo vectorial confinado al interior de una región limitada por una superficie queda determinado si se especifica la divergencia y el rotacional en todos sus puntos. Es decir, un campo vectorial cualquiera, limitado por una superficie *simplemente conexa*³, puede ser descrito como la suma de dos componentes: una con rotacional cero y otra solenoidal

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{S},\tag{1.30}$$

ya que tanto su divergencia como su rotacional se definen como sus fuentes escalares y vectoriales respectivamente. Usando $\mathbf{I} = \nabla \phi$ y $\mathbf{S} = \nabla \times \varphi$ se demuestra

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{I} &= \nabla \times \nabla \phi = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{S} &= \nabla \cdot \nabla \times \varphi = 0,\end{aligned}\tag{1.31}$$

³Una región simplemente conexa cumple que para cualquier pareja de puntos existe un camino de longitud mínima.

donde el campo escalar ϕ es el potencial escalar de \mathbf{I} y el campo vectorial φ el potencial vectorial de \mathbf{S} , \mathbf{u} es por tanto

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \varphi. \quad (1.32)$$

En un medio continuo las ondas que representan el movimiento de las partículas en La Tierra son las ondas sísmicas de volumen *ondas de compresión (ondas P)* y *ondas de corte (ondas S)* que se propagan por el interior de La Tierra. ver Figura 1.5.

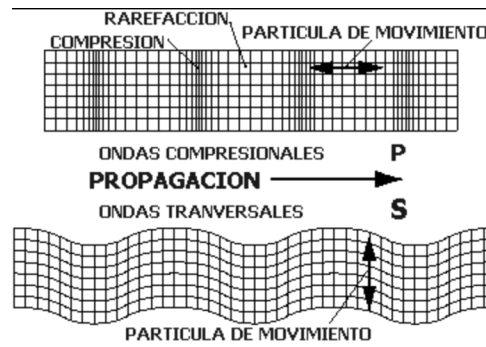


Figura 1.5: *Ondas sísmicas de compresión P y de corte S, UNAM.*

Las ondas P son denominadas primarias o longitudinales ya que la dirección de propagación es la misma que la dirección del desplazamiento de las partículas. Éstas corresponden con perturbaciones elásticas de cambios de volumen sin cambios de forma [46]. Las ondas S llamadas secundarias o transversales son aquellas en que la dirección de propagación es perpendicular con el desplazamiento de las partículas del volumen y representan cambios de forma sin cambios de volumen [46].

Entonces, tomando a $\nabla\phi$ y $\nabla \times \varphi$ como \mathbf{u}_P y \mathbf{u}_S respectivamente, la ecuación (1.32) se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S, \quad (1.33)$$

que cumplen las propiedades de potenciales (1.31):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u}_P &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_S &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times \mathbf{u}_S, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u}_P. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Al aplicar la identidad del laplaciano

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (1.35)$$

en la ecuación de movimiento (1.29), se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (1.36)$$

y adoptando la descomposición de Helmholtz (1.33) se obtiene

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S)) - \mu \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S)) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S) = 0. \quad (1.37)$$

Aplicando el operador divergencia para \mathbf{u}_P

$$\nabla \cdot \left((\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{u}_P)) - \mu \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_P)) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_P) \right) = 0, \quad (1.38)$$

como $\nabla \times \mathbf{u}_P = 0$, el segundo término dentro del paréntesis en (1.38) es cero y de la identidad (1.35) se tiene que $\nabla^2 \mathbf{u}_P = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_P)$. Entonces (1.38) se convierte en

$$\nabla \cdot \left((\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_P - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_P \right) = 0, \quad (1.39)$$

se cumple que el campo se anula al infinito, probando que es igual a cero en todo el espacio [14], es decir

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_P - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_P = 0. \quad (1.40)$$

De manera análoga para \mathbf{u}_S

$$\nabla \cdot \left((\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{u}_S)) - \mu \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}_S)) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_S) \right) = 0, \quad (1.41)$$

al aplicar $\nabla \cdot \mathbf{u}_S = 0$ y teniendo que la identidad (1.35), \mathbf{u}_S es $\nabla^2 \mathbf{u}_S = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_S$, se obtiene

$$\nabla \times \left(\mu \nabla^2 \mathbf{u}_S - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (1.42)$$

donde la divergencia de la expresión entre paréntesis es cero

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}_S - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} = 0. \quad (1.43)$$

Al dividir (1.40) y (1.43) por ρ , se tienen las ecuaciones de onda:

$$c_P^2 \nabla^2 \mathbf{u}_P - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_P = 0 \quad \text{y} \quad (1.44)$$

$$c_S^2 \nabla^2 \mathbf{u}_S - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} = 0, \quad (1.45)$$

donde la velocidad de propagación para el desplazamiento \mathbf{u}_P es $c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ y corresponde a ondas compresionales, como el sonido; por otro lado para el desplazamiento \mathbf{u}_S la velocidad es $c_S^2 = \frac{\mu}{\rho}$ y este tipo de ondas, en cambio, es transversal o de corte.

En general el campo irrotacional \mathbf{u}_P y el campo solenoidal \mathbf{u}_S , son entonces soluciones de la ecuación de onda (1.44) y (1.45).

$$c\nabla^2 u_p = \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}. \quad (1.46)$$

Finalmente, para el modelo acústico es de interés solo la componente compresional del desplazamiento u_p . En efecto, la ecuación vectorial (1.44) se simplifica a una ecuación escalar.

1.6. Propagación de ondas en medios viscoelásticos

Las ecuaciones de Navier son insuficientes para describir un sistema continuo, razón por la cual deben complementarse con un conjunto de relaciones constitutivas entre los esfuerzos y el objeto cinemático que describe al movimiento relativo de los puntos del medio [10].

Cuando las deformaciones son pequeñas, en casos simples de un medio homogéneo, es suficiente utilizar relaciones constitutivas sencillas como la Ley de Hooke permitiéndole que el sistema de ecuaciones total se linealice y obtener soluciones ondulatorias sin pérdidas⁴. Sin embargo, para casos más complejos como fenómenos de pérdida de energía no pueden ser descritos por esta Ley, y se hace necesario modificar las relaciones constitutivas.

Para un medio viscoelástico lineal las relaciones constitutivas incluyen un término que involucra la derivada temporal del tensor de deformaciones. Un material viscoelástico es aquel que tiene la capacidad de almacenar energía mecánica de acuerdo con las leyes de sólidos elásticos y simultáneamente tener la capacidad de disipar energía mecánica según las leyes de fluidos⁵[11].

En los fluidos normales se cumple la Ley de Newton

$$\sigma = \eta\gamma, \quad (1.47)$$

⁴Además si el medio es isotropo se evidencia dos modos de propagación independientes que corresponden con las llamadas ondas longitudinales y transversales (P y S, respectivamente).

⁵Para mayor información sobre este tipo de materiales se encuentra en la literatura investigadores importantes como Findley et al. (1976), Christensen (1982) entre otros.

donde σ es el tensor de esfuerzos, η la viscosidad ordinaria y

$$\gamma = (\nabla V + \nabla V^T)/2, \quad (1.48)$$

es el tensor de velocidad de variación de las deformaciones.

Para fluidos más complejos se necesita de una relación más general entre los esfuerzos y las deformaciones. El tensor de esfuerzos viscosos para el fluido viscoelástico irrotacional del tipo *Oldroyd A*⁶ que contiene como casos particulares al fluido de Maxwell con $\lambda_2 = 0$, $d_0 = 2\eta$ y al fluido Newtoniano con $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $d_0 = 0$, $\hat{d} = 0$ [38].

$$\sigma = 2\eta\nabla V + (\hat{d} - d_0)\nabla V, \quad (1.49)$$

donde

$$d_0 = 2\eta\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right),$$

λ_1, λ_2 corresponden con los tiempos de relajación de los esfuerzos y deformación y

$$\hat{d} = d_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{T-t}{\lambda_1}\right) \lambda_1 dT,$$

es el operador de viscoelasticidad de cizalladura.

1.6.1. Ecuación de onda en un medio viscoelástico

El estado hidrodinámico de un fluido queda definido por la ecuación de movimiento, la conservación de masa o continuidad y la ecuación del estado que relaciona ρ . Entonces el movimiento está dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma + \mathbf{g}, \quad (1.50)$$

el lado izquierdo representa la aceleración del fluido, el lado derecho las fuerzas por unidad de masa de presión y tensión. Siendo $p = p(\rho, s)$ es la presión del fluido, ρ su densidad, s su entropía específica y \mathbf{g} fuerza por unidad de masa. Y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0. \quad (1.51)$$

En general este sistema es válido para cualquier tipo de fluido, para un tipo concreto, dependerá de la forma del tensor de esfuerzos viscosos σ [38]. Para el fluido viscoelástico el tensor está dado por (1.49).

⁶Modelo viscoelástico simple. James Gardner Oldroyd (1921-1982).

Considerando oscilaciones pequeñas de la presión y la densidad respecto a la posición de equilibrio y que la velocidad del fluido en la onda es mucho menor que la velocidad de fase de la onda, después de un tratamiento matemático sencillo, (véase desarrollo en [38]), se pueden despreciar términos no lineales y usando (1.49) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{V} + M \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \hat{d} \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (1.52)$$

donde

$$c^2 = c_0^2 + \frac{d_0}{\lambda_1 \rho_0}, \quad (1.53)$$

$$M = \frac{1}{\rho_0} (2(\lambda_2/\lambda_1) + \alpha). \quad (1.54)$$

Esta ecuación describe las oscilaciones lineales de velocidad en un fluido viscoelástico irrotacional del tipo Oldroyd A.

Capítulo 2

Fenómeno electrosísmico

Un medio poroso saturado corresponde a un sólido que contiene una red interconectada o no, de espacio poral saturado por uno o varios fluidos. Se asumen continuos tanto a la fase sólida (matriz) como al espacio poral. Las rocas saturadas con agua, petróleo y/o gas pueden describirse como medios porosos saturados. Estos medios son muy heterogéneos a nivel microscópico, estas heterogeneidades inducen un comportamiento físico a nivel macroscópico muy complejo y sensible a pequeñas variaciones en el contenido de fluido o en la estructura sólida.

El interés en incluir propiedades microscópicas en las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas elásticas a través de estos medios se debe a que su respuesta sísmica refleja el comportamiento a escala poral de las distintas fases (sólida y fluida). Este hecho condujo a Biot a plantear la teoría de propagación de ondas en medios porosos saturados, donde la matriz porosa es considerada como un agregado homogéneo e isótropo de partículas elásticas, cuyos poros se encuentran completamente saturados por un fluido viscoso compresible.

La deformación que resulta del paso de una onda sísmica a través del medio se debe al movimiento acoplado de ambas fases, y con base a este hecho Biot predijo la existencia de un modo de propagación adicional, generado por la interacción de las ondas compresional y de corte¹ con las heterogeneidades del medio, haciendo un proceso de conversión de energía entre la onda incidente y las perturbaciones originadas. A este nuevo modo de propagación, en la teoría de Biot se le denomina onda lenta o tipo II de Biot, ésta es una onda tipo P de carácter difusivo con alta atenuación. Resulta del movimiento a contrafase entre el sólido y el fluido, esto hace que muestre un comportamiento muy distinto a las ondas típicas.

¹Correspondientes a los modos fundamentales hallados por Poisson en 1830.

2.1. Doble capa eléctrica y efecto electrocinético

Para medios porosos o no saturados por un electrolito, como el subsuelo terrestre Figura 2.2, existe un acoplamiento entre los campos electromagnéticos y el campo de ondas sísmicas [41]. Considerando un cuerpo cargado que se encuentra en contacto con un fluido. Los iones del fluido de signo contrario se adsorben en la superficie del cuerpo, produciendo una primera capa de carga superficial. Esta capa atrae a los iones de signo contrario, que forman la segunda capa, pero éstos están a merced del movimiento browniano, y su densidad decae a medida que nos alejamos de la superficie [36]. Las dos capas, adsorbida y difusa, actúan como un condensador plano cuyas armaduras están separadas una distancia λ . Esta separación de cargas hace que el cuerpo y el fluido se muevan por aplicación de campos eléctricos externos, y es el origen del efecto electrocinético.

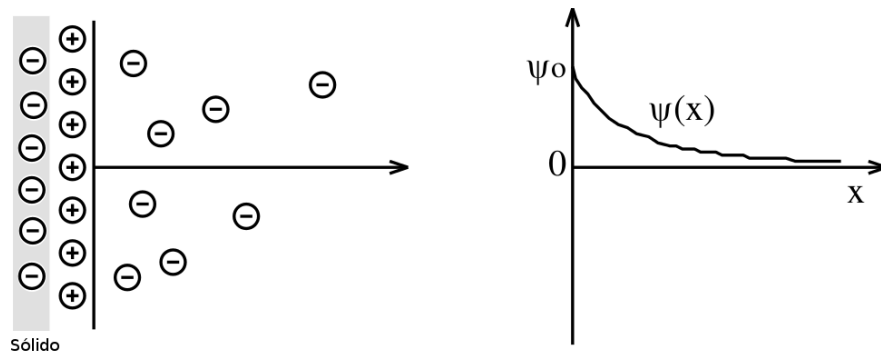


Figura 2.1: Modelo de doble capa de Gouy - Chapman [36]. X es la distancia en la fase líquida (capa difusa) desde la interfaz cargada (en el modelo unidimensional, se usa una sección de área unitaria perpendicular a la superficie), ψ es el potencial eléctrico el cual varía con X desde un valor (promedio) ψ_0 en la interfaz ($X = 0$) hasta cero.

Para calcular el efecto electrosísmico se necesita describir la doble capa con cierto detalle. Uno de los primeros modelos de doble capa, propuesto por Helmholtz, la asemeja a un condensador plano. Este modelo permite calcular de manera sencilla la fuerza aplicada sobre el fluido dieléctrico por la acción de un campo paralelo externo. Sin embargo el modelo de Helmholtz tiene inconvenientes serios y se considera mejor el modelo de doble capa de Stern-Gouy-Chapman. Este segundo modelo Figura 2.1 supone un potencial bajo, una concentración iónica baja y una constante dieléctrica del medio igual a la del solvente. En este caso, la concentración de iones de la capa difusa resulta decaer exponencialmente a medida que nos alejamos de la primera capa. La capa adsorbida tiene típicamente 2 a 3 Å , y la difusa puede extenderse entre 10 a 1000 Å , según el caso. La posición de la capa difusa queda determinada por un balance entre la atracción electrostática de la capa adsorbida y la difusión hacia la zona neutra del electrolito [41].

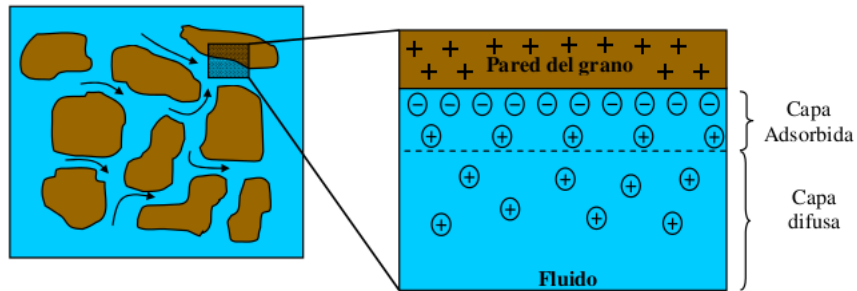


Figura 2.2: *Movimiento relativo entre fase sólida y fluida (izquierda). Esquema de doble capa eléctrica responsable del fenómeno electrocinético (derecha), (la línea punteada corresponde al plano de corte). Tomado de Späth [41].*

Al aplicar un campo eléctrico paralelo a la interfaz (Figura 2.3), se produce una fuerza neta sobre el fluido de la doble capa, que mueve efectivamente el fluido, en un fenómeno electrocinético denominado *electro-osmosis*. Inversamente, si se fuerza un movimiento del fluido de la doble capa, la deslocalización resultante de la carga induce un campo eléctrico, en un fenómeno conocido como *potencial de flujo* [37]. Estos dos fenómenos electrocinéticos corresponden al caso de una interfaz estacionaria cerca de la cual puede moverse el fluido, por ejemplo un medio poroso o un tubo capilar. En cualquier caso, la magnitud del movimiento relativo del electrolito con el sólido se considera mayor que el espesor de la doble capa eléctrica².

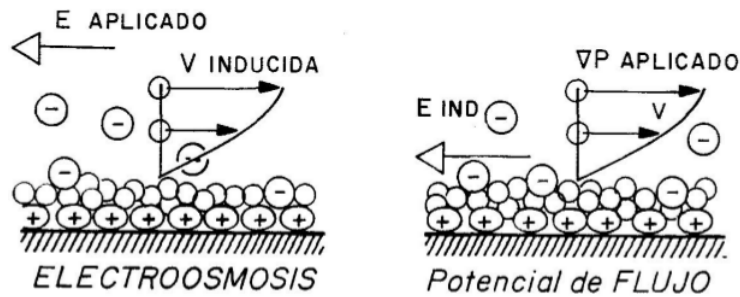


Figura 2.3: *Fenómenos Electrocinéticos, [37].*

2.1.1. Potencial Electrocinético

A la superficie que separa la capa difusa de la capa adsorbida se le denomina *plano de corte* S_w (línea punteada de separación, Figura. 2.2). Esa superficie se encuentra a un potencial eléctrico estático ζ . Este potencial electrocinético ζ (Figura. 2.4) es aquel que

²El espesor λ de la doble capa es de magnitud despreciable en cualquier problema macroscópico de dinámica de fluido, incluso aquellos que involucran medios porosos de tipo arenisca petrolera (diámetro de poro 10 – 100 μm).

corresponde a la superficie de cizallamiento incipiente, es decir donde la velocidad de corte es cero, pero donde su gradiente no es nulo [37]. El potencial depende por una parte del potencial de la capa adsorbida y por otra del espesor de la doble capa λ . Si existe poca adsorción o si λ es mucho mayor que la distancia entre la superficie y el punto de cizallamiento, el potencial ζ es aproximadamente igual al potencial de la superficie adsorbida.

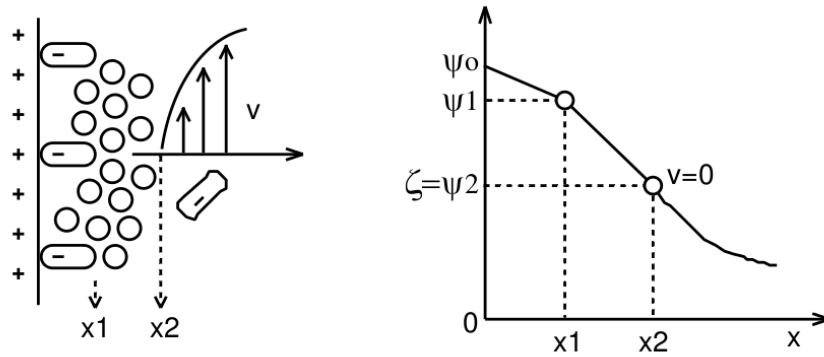


Figura 2.4: Potencial electrocinético (ζ zeta) en el plano de cizallamiento incipiente [36].

Si se induce un campo electromagnético en un medio poroso saturado, se produce un movimiento relativo entre los iones de la capa difusa y los iones fijos de la capa adsorbida que se manifiesta como un gradiente de presión ∇p en el fluido (fenómeno electrosísmico, ES). De forma recíproca, cualquier perturbación mecánica que produzca movimiento relativo entre la fase sólida y el electrolito producirá movimiento entre los iones de la capa difusa y los iones fijos de la capa adsorbida, generando, por lo tanto, un campo eléctrico variable (fenómeno sismoeléctrico, SE) [41]. Como la respuesta del fluido depende de su composición química y de sus propiedades de carga (como, por ejemplo, de su polaridad) por lo que las ondas detectadas difieren de un fluido a otro. Esta es la clave para distinguir, por ejemplo, entre agua y petróleo.

2.2. Mediciones electrosísmicas y sismoeléctricas

Las mediciones sismoeléctricas inician de manera similar a las mediciones sísmicas, generando explosiones o vibraciones en superficie. Las ondas mecánicas producidas de esta manera viajan a través de las capas superficiales de La Tierra e inducen perturbaciones electromagnéticas (efecto SE). El potencial eléctrico generado se propaga a su vez como una onda y puede ser detectado en superficie por antenas diseñadas para tal fin. En la Figura. 2.5, que ilustra el proceso, una onda sísmica P se propaga entre dos medios, creando una separación de cargas, un dipolo eléctrico, debido al desequilibrio de

las corrientes del flujo inducido por la onda en los lados opuestos de la interfaz. Se genera así, un campo electromagnético que puede ser detectado en la superficie por antenas distribuidas.

En el proceso opuesto, o electrosísmico (Figura. 2.6), la fuente electromagnética en superficie puede ser de diferentes tipos, por ejemplo: una línea infinita de corriente (modo SHTE) que actúa horizontalmente sobre las capas de La Tierra, y un dipolo magnético infinito o un solenoide infinito([47]) (modo PSVTM). La onda electromagnética de la fuente se propaga hasta la interfaz y genera un movimiento del suelo. Esta oscilación mecánica se propaga como ondas sísmicas que se pueden detectar mediante geófonos³.

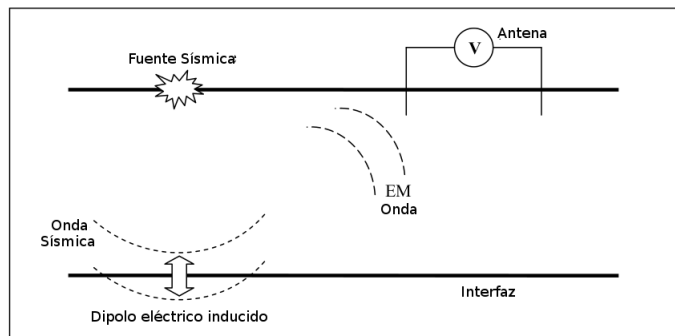


Figura 2.5: Fenómeno sismoeléctrico. La onda sísmica cruza una interfaz y genera una onda electromagnética.

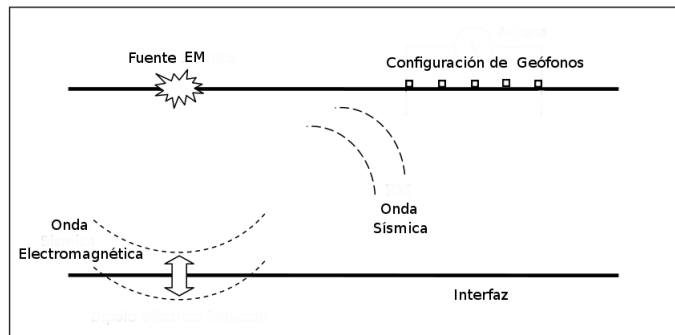


Figura 2.6: Fenómeno electrosísmico. La onda EM cruza una interfaz y genera una onda sísmica.

Los dos fenómenos se han evidenciado experimentalmente, demostrando que la interacción de ondas sísmicas con el material de las capas superficiales, induce perturbaciones electromagnéticas suficientes para ser detectadas en la superficie, y que recíprocamente pueden medirse perturbaciones mecánicas en la superficie inducidas por un campo electromagnético. Esta información se amplía en la sección Antecedentes 3.1 del siguiente capítulo.

³Los geófonos son transductores de desplazamiento, velocidad o aceleración que convierten el movimiento del suelo en una señal eléctrica. Así se registra el movimiento del suelo generado por una fuente energética como son los explosivos y camiones vibradores.

2.3. Ecuaciones electromagnéticas para medios porosos granulares

Las ecuaciones de Maxwell gobiernan los fenómenos electromagnéticos. La variación temporal del campo eléctrico influye en el campo magnético y viceversa. La representación en el dominio de la frecuencia de estas ecuaciones es útil ya que permite hacer un análisis armónico del campo además de relacionar los parámetros del medio y la fuente.

Se asume que los granos sólidos están eléctricamente aislados, mientras que el electrolito fluido posee especies iónicas. Para los sólidos, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{D}_s &= 0 \quad , \\
 \nabla \cdot \mathbf{B}_s &= 0 \quad , \\
 \nabla \times \mathbf{E}_s &= -\dot{\mathbf{B}}_s \quad , \\
 \nabla \times \mathbf{H}_s &= \dot{\mathbf{D}}_s \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

y para los fluidos

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{D}_f &= \sum_{l=1}^L e z_l N_l \quad , \\
 \nabla \cdot \mathbf{B}_f &= 0 \quad , \\
 \nabla \times \mathbf{E}_f &= -\dot{\mathbf{B}}_f \quad , \\
 \nabla \times \mathbf{H}_f &= \dot{\mathbf{D}}_f + \mathbf{J}_f \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

donde \mathbf{J}_f es la densidad de corriente iónica, con contribuciones de la difusión, electromigración y conexión de iones; \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{D} , el campo de desplazamiento, \mathbf{H} , el campo magnético y \mathbf{B} , el campo inducido magnético. Además, L es el número de especies iónicas contenidas en el electrolito, $e z_l$ representa la carga neta sobre cada especie- l iónica y N_l es el número de especies- l iónicas por unidad de volumen.

2.4. Ecuaciones de Biot

La teoría de Biot describe matemáticamente la propagación de perturbaciones mecánicas en medios porosos saturados por un fluido viscoso. La teoría predice la existencia de un modo de propagación transversal y dos longitudinales, denominadas onda rápida y lenta de Biot, que se deben al movimiento entre el sólido y el fluido a través del medio. Tanto las ondas de presión como la de corte pueden producir movimiento relativo entre el sólido

y el fluido al atravesar una interfaz del subsuelo, y por lo tanto generar allí una corriente eléctrica.

El comportamiento mecánico del material queda definido si podemos establecer la relación constitutiva entre los esfuerzos (o su derivada temporal) y las deformaciones y velocidades de deformación. Las leyes poroelásticas constitutivas en la teoría de Biot son las ecuaciones (2.3) y (2.4). La expresión (2.3) corresponde a la ley de Hooke para medios porosos saturados e isotrópicos. El primer término de la derecha relaciona el tensor promedio de las tensiones τ_{ij} con el tensor promedio de las deformaciones ϵ_{ij} a través de G , que es el módulo de corte de la matriz de granos en ausencia de fluido. El segundo término representa las tensiones producidas por los desplazamientos del sólido u_s y los desplazamientos relativos grano-fluido $\vec{w} = \phi(\vec{u}_f - \vec{u}_s)$, donde ϕ es la porosidad de la roca y u_f el desplazamiento del fluido.

$$\tau_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \delta_{ij}(K_G\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s + C\vec{\nabla} \cdot \vec{w}), \quad (2.3)$$

$$-p = C\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s + M\vec{\nabla} \cdot \vec{w} \quad . \quad (2.4)$$

La respuesta mecánica también se caracteriza por la presión del fluido p (presión intersticial), que depende también de u_s y \vec{w} (Ec. (2.4)). Los parámetros poroelásticos K_G , C y M pueden ser escritos en función del módulo de bulk de la matriz de granos en ausencia de fluidos, K_{fr} , y de los módulos de bulk del sólido, K_s , y del fluido, K_f , como

$$K_G = \frac{K_{fr} + \phi K_f + (1 + \phi)K_s\Delta}{1 + \Delta} \quad , \quad (2.5)$$

$$C = \frac{K_f + K_s\Delta}{1 + \Delta} \quad , \quad (2.6)$$

$$M = \frac{1}{\phi} \frac{K_f}{1 + \Delta} \quad , \quad (2.7)$$

donde Δ es un parámetro adimensional equivalente a

$$\Delta = \frac{K_f}{\phi K_s^2} [(1 - \phi)K_s - K_{fr}] \quad . \quad (2.8)$$

Si la roca estuviera saturada por dos fases líquidas, como es el caso de una roca saturada por agua y petróleo, el módulo de bulk efectivo del fluido será

$$K_f = \left[\frac{S_w}{K_w} + \frac{(1 - S_w)}{K_{g,o}} \right]^{-1} \quad , \quad (2.9)$$

donde S_w corresponde a la saturación de agua (fracción volumétrica del espacio poral ocupado por el agua) y K_w su módulo de bulk. Similarmente, $K_{g,o}$ es el módulo de bulk

de la otra fase del fluido, que puede ser tanto gas, g , como petróleo, o .

La ecuación dinámica de Biot es la ecuación de movimiento (o la ecuación de conservación del momentum lineal), que se obtiene al sumar todas las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen e igualarlas al producto de su masa por su aceleración (segunda ley de Newton). La representación de dicha ecuación en el dominio de la frecuencia hace posible establecer la siguiente relación:

$$\vec{\nabla} \cdot \tau_b = -\omega^2(\rho_B \vec{u}_s + \rho_f \vec{w}) + \vec{F} \quad . \quad (2.10)$$

Aquí, el tensor de esfuerzos promedio o de bulk, τ_b , se define como $\tau_b = \tau_f \phi + (1 - \phi)\tau_s$, donde τ_s y τ_f son los tensores de esfuerzos promedio en los granos y en el fluido, respectivamente. La densidad bulk del medio es $\rho_b = \phi \rho_f + (1 - \phi)\rho_s$, donde ρ_f es la densidad del fluido y ρ_s , la densidad del sólido (la densidad interna de los granos que constituyen la roca). El vector \vec{F} representa las fuerzas externas sobre el fluido. Si una fuente mecánica ejerce una densidad de fuerza promedio \vec{F}^f sobre la fase fluida y una densidad de fuerza promedio \vec{F}^s sobre la fase sólida, entonces el término \vec{F} en la Ec. (2.10) se define como $\vec{F} \equiv \phi \vec{F}^f + (1 - \phi)\vec{F}^s$ [31]. Para algunas fuentes (como las explosivas) se puede asumir que la fuerza aplicada al sólido es la misma que la aplicada al fluido, por lo que $\vec{F} = \vec{F}^f$.

Las ondas mecánicas, al comprimir el material, pueden generar flujos de los líquidos que lo saturan. El movimiento de los fluidos está regido por la ley de Darcy,

$$\nabla^T k(-\nabla p - \rho_f \ddot{u} + \rho_f db) + m\dot{\varepsilon} + \frac{\dot{p}}{Q} = 0 \quad , \quad (2.11)$$

donde k es la matriz de permeabilidades, p es la presión de poro, u es el vector de desplazamiento del material, b , el vector de fuerzas por unidad de volumen, ε , el vector de deformaciones, Q , la rigidez volumétrica y m es el vector definido como $m = [1 \ 1 \ 0]^T$ [5]. Las ecuaciones constitutivas, junto con la ecuación de movimiento y la ley de Darcy constituyen las ecuaciones acopladas que conforman el modelo de Biot⁴ [3, 4].

2.5. Ecuaciones de Pride

Para una formulación matemática del fenómeno electrosísmico es necesario vincular las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones de Biot. Steve Pride en 1994 [29] dedujo el

⁴Para estudiar el desarrollo completo de la teoría de Biot y ley de Darcy consultar [50].

conjunto de ecuaciones que describen el fenómeno a nivel macroscópico a partir de las leyes microscópicas que representan la interacción entre el electrolito y la matriz de la roca. En estas ecuaciones logra vincular las leyes de Maxwell a las de Biot mediante el llamado coeficiente de acoplamiento electrocinético.

Las ecuaciones macroscópicas de Pride [29], que gobiernan los fenómenos electrosísmico y sismoeléctrico, realizan un promedio volumétrico de las ecuaciones mecánicas y electromagnéticas que describen el comportamiento de las fases fluida y sólida a escala microscópica. El volumen sobre el cual realiza el promedio es de una escala mayor a la de los granos, pero mucho menor a la longitud de onda de las ondas mecánicas [41].

Los postulados para el acoplamiento electrocinético nos dicen que los granos sólidos poseen una densidad de carga superficial adsorbida a su superficie. En el modelo de Pride se supone que la capa adsorbida tiene un espesor despreciable y que se ubica sobre el plano de corte, y el espesor de la doble capa eléctrica se supone mucho menor que el radio de curvatura de los granos sólidos. Además, la carga neta de un volumen del material poroso saturado por el electrolito se supone nula, previo al arribo de una perturbación. El modelo tiene en cuenta únicamente perturbaciones lineales, ignora los efectos de difusión inducidos por las ondas y desprecia el scattering de las ondas mecánicas producido por los granos del medio poroso. Adicionalmente, el sólido poroso se asume isótropo y saturado por un fluido viscoso compresible, y todos los campos oscilan con una frecuencia fija ω (es decir, con una dependencia temporal $e^{+i\omega t}$).

Con estas restricciones, las ecuaciones que gobiernan el fenómeno electrosísmico son

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \quad , \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega \vec{D} + \vec{J} + \vec{J}^{ext} \quad , \quad (2.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \tau_B = -\omega^2(\rho_b \vec{u}_s + \rho_f \vec{w}) + \vec{F} \quad , \quad (2.14)$$

$$\vec{J} = \sigma(\omega) \vec{E} + L(\omega)(-\vec{\nabla} p + \omega^2 \rho_f \vec{u}_s + \vec{F}^f) \quad , \quad (2.15)$$

$$-i\omega \vec{w} = L(\omega) \vec{E} + \frac{k(\omega)}{\eta} (-\vec{\nabla} p + \omega^2 \rho_f \vec{u}_s + \vec{F}^f) \quad , \quad (2.16)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \left[\frac{\phi}{\alpha_\infty} (\kappa_f - \kappa_s) + \kappa_s \right] \vec{E} \quad (2.17)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad , \quad (2.18)$$

$$\tau_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \delta_{ij}(K_G \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s + C \vec{\nabla} \cdot \vec{w}) \quad , \quad (2.19)$$

$$-p = C\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s + M\vec{\nabla} \cdot \vec{w} \quad . \quad (2.20)$$

Las Ec. (2.15) y (2.16) representan las ecuaciones de transporte. El término α_∞ es la tortuosidad de la roca (cuyo valor es 1 para tubos paralelos y 3 para tubos orientados aleatoriamente [41]), y puede escribirse en función de la porosidad como $\alpha_\infty = 0,5(1 + \frac{1}{\phi})$. Los parámetros $\sigma(\omega)$, $L(\omega)$ y $k(\omega)$ son denominados coeficientes de transporte y corresponden a la conductividad eléctrica, al coeficiente de acople electrocinético y a la permeabilidad dinámica, respectivamente.

Los vectores \vec{F} y \vec{F}^f representan las fuentes de ondas mecánicas. La fuente de campos electromagnéticos es la densidad de corriente, \vec{J}^{ext} , presente en la Ec. (2.13). En la ecuación (2.12) no se incluye una fuente magnética, ya que dicho término siempre puede ser representado de forma exacta por una distribución geométrica particular de corriente aplicada \vec{J}^{ext} [31].

Las Ec. (2.17) y (2.18) son las leyes constitutivas electromagnéticas e involucran la permitividad eléctrica del vacío ε_0 , la permeabilidad magnética del vacío μ_0 y las constantes dieléctricas κ_s y κ_f de sólido y fluido, respectivamente. La permeabilidad magnética del vacío está presente en la Ec. (2.18), ya que se asume que las susceptibilidades magnéticas de las fases sólida y líquida son despreciables (es decir, se supone que ni el hierro, ni el níquel ni el cobalto son constituyentes mayores de estas dos fases [29]).

Las leyes poroelásticas constitutivas corresponden a las ecuaciones (2.19) y (2.20) que se definieron en la sección anterior 2.4.

Todas estas ecuaciones en conjunto relacionan el campo eléctrico \vec{E} , el campo magnético \vec{H} , la inducción magnética \vec{B} , el campo de desplazamiento \vec{D} y la densidad de corriente \vec{J} con los desplazamientos del sólido \vec{u}_s y con los desplazamientos relativos grano-fluido $\vec{w} = \phi(\vec{u}_f - \vec{u}_s)$. La respuesta mecánica también está caracterizada por la presión del fluido p , y por esfuerzos descritos por el tensor de esfuerzos promedio o bulk τ_B .

2.6. Acoplamiento electrocinético

El acoplamiento entre las ecuaciones de Biot y las de Maxwell está cuantificado por el coeficiente de acople $L(\omega)$. En ausencia de acoplamiento ($L(\omega) = 0$) y para sólidos estacionarios ($\vec{u}_s = 0$), las ecuaciones de transporte se reducen a la ley de Ohm para densidad de corriente eléctrica y la ley de Darcy para fluidos viscosos en un medio poroso. Partiendo de las ecuaciones de Pride [29] se deduce que el acoplamiento electrocinético puede manifestarse de dos formas:

1. Si un campo eléctrico \vec{E} es inducido en un medio poroso completamente saturado por un electrolito, no sólo producirá corrientes de conducción $\sigma\vec{E}$, como predice la Ec. (2.15); sino que el campo también actuaría sobre el exceso de cargas de la capa difusa, que por tracción viscosa, arrastrará al resto del fluido. Esto resulta en un movimiento relativo fluido-sólido cuantificado por $L(\omega)\vec{E}$ en la Ec. (2.16). Esta generación de movimiento relativo a partir de la aplicación de un campo eléctrico se denomina electro-ósmosis, y es la responsable del fenómeno electrosísmico.
2. También es posible el fenómeno inverso. Al propagarse las ondas sísmicas, generan una fuerza volumétrica $(-\vec{\nabla}p + \omega^2\rho_f\vec{u}_s)$ que no sólo se manifiesta como un movimiento relativo \vec{w} entre las fases fluida y sólida, como lo predice la ley de Darcy, Ec.(2.16), sino que también produce un movimiento de las cargas de la capa difusa relativo a las cargas adsorbidas, lo que resulta en una densidad de corriente eléctrica $L(\omega)(-\vec{\nabla}p + \omega^2\rho_f\vec{u}_s)$, tal como predice la Ec. (2.15). La generación de una corriente eléctrica a partir de un gradiente de presiones aplicado sobre el fluido se denomina electrofiltración y es la responsable del fenómeno sismoeléctrico.

2.6.1. Coeficientes de transporte

Las expresiones de los coeficientes de transporte, en el rango reducido de las frecuencias de interés⁵ son

$$k(\omega) = k_0 = \frac{1}{m} \frac{\phi}{\alpha_\infty} \Lambda^2 \quad , \quad (2.21)$$

$$L(\omega) = L_0 = -\frac{\varepsilon_0\kappa_f\zeta}{\eta F} \quad , \quad (2.22)$$

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 = \frac{\sigma_f}{F} \quad , \quad (2.23)$$

donde el parámetro geométrico $F = \frac{\alpha_\infty}{\phi}$ se denomina *factor de formación*. La constante Λ en la Ec. (2.21) es un factor geométrico proporcional al cociente entre el volumen poral y la superficie del grano, σ_f es la conductividad del fluido y m es un número adimensional que depende de la geometría poral y se define como

$$m = \frac{\phi}{\alpha_\infty k_0} \Lambda^2 \quad . \quad (2.24)$$

Existe evidencia numérica y de laboratorio de que, para una gran variedad de materiales porosos, m se encuentra en el intervalo $4 \leq m \leq 8$ [29].

El potencial ζ , visto anteriormente, es una medida de las cargas disponibles para transporte en la capa difusa en el límite grano-fluido. Cumple un rol importante en el fenómeno

⁵Para rocas típicas $\frac{\omega_t}{2\pi} > 10^5 \text{ Hz}$, por lo que la frecuencia de transición se encuentra muy por encima del ancho de banda sísmico que nos es de interés ($10 \text{ Hz} - 100 \text{ Hz}$).

electrocínético ya que el coeficiente de acople $L(\omega)$, que determina la existencia y magnitud de las ondas mecánicas inducidas, depende de él.

Debido a la complejidad de la capa adsorbida, que fue simplificada en el modelo de doble capa eléctrica de la Figura. 2.2, una determinación teórica de ζ es problemática. Su valor puede ser calculado a partir de la molaridad C_0 (concentración de sales en mol/litro) y del pH del electrolito mediante la siguiente ley empírica [30]:

$$\zeta_{[mV]} = (0,01 + 0,025 \log_{10} C_0) \left(\frac{PH - 2}{5} \right) . \quad (2.25)$$

Cuando la capa difusa contiene un exceso de cargas positivas y su concentración de iones Hidronio⁶ es neutra, $PH = 7$, el valor de ζ es $\zeta_{[mV]} = (0,01 + 0,025 \log_{10} C_0)$ negativo; y su valor es positivo cuando la capa difusa contiene un exceso de cargas negativas. Los suelos con PH bajo, son ácidos y poseen una carga superficial positiva por lo que tienen mayor capacidad de adsorber aniones, en consecuencia el exceso de carga en la capa difusa es positivo y su potencial zeta negativo.

2.7. Modelo Unidimensional de las ecuaciones de Pride

Con el fin de simplificar la solución de las ecuaciones completas de Pride mencionadas en la sección 2.5, se realizan los siguientes supuestos [41]:

2.7.1. Suposiciones

1. Para el rango de frecuencias sísmicas, y para los diferentes materiales de interés, las corrientes de desplazamiento $-i\omega\varepsilon\vec{E}$ pueden ser despreciadas, ya que son cuatro órdenes de magnitud menores a las corrientes de conducción $\sigma\vec{E}$. Es decir: $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} < 10^{-4}$.
2. Otra aproximación consiste en suponer que la realimentación por electrofiltración es despreciable. Es decir, supondremos que la generación de una corriente eléctrica debida al gradiente de presión inducido representado por el término $L(\omega)(-\vec{\nabla}p + \omega^2\rho_f\vec{u}_s)$ en la ecuación de transporte (2.15), es despreciable frente a la corriente de conducción $\sigma\vec{E}$. La amplitud de este efecto de realimentación puede ser estimada suponiendo un campo eléctrico inducido en un medio homogéneo. Para ese caso, la filtración del fluido $L(\omega)\vec{E}$ en la Ec. (2.16) es compensada por la filtración del

⁶La concentración de iones Hidronio [H_3O^+] en una sustancia indica su nivel de PH .

fluido de Darcy $\frac{k(\omega)}{\eta} \left(-\vec{\nabla}p + \omega^2 \rho_f \vec{u}_s \right)$, lo que resulta en que no haya flujo,

$$L(\omega) \vec{E} + \frac{k(\omega)}{\eta} \left(-\vec{\nabla}p + \omega^2 \rho_f \vec{u}_s \right) = 0 \quad . \quad (2.26)$$

Reemplazando (2.26) en (2.15), se obtiene

$$\vec{J} = \sigma(\omega) \vec{E} \left(1 - \frac{\eta L^2(\omega)}{k(\omega) \sigma(\omega)} \right) \quad . \quad (2.27)$$

El término correctivo satisface $\eta L^2(\omega) < 10^{-5}$ para todos los materiales de interés, por lo que puede ser despreciado frente a la unidad. Por lo tanto, la respuesta poroelástica se desacopla de los campos eléctricos generados.

3. También se asume que para el rango de las frecuencias sísmicas $L(\omega) \approx L_0$, donde L_0 es el valor del coeficiente de acople para $\omega = 0$. Esta es una buena aproximación para las frecuencias en estudio (Ec. 2.22).

2.7.2. Modelo 1D

Las suposiciones realizadas y la consideración del problema como unidimensional conducen a que el campo EM tenga un comportamiento difusivo, ya que fueron despreciadas las corrientes de desplazamiento y no tienen contribuciones (vía el L) de desplazamientos mecánicos. La polarización de las ondas mecánicas generadas por una fuente con estas simetrías corresponde a ondas de corte SH, ya que el desplazamiento relativo entre el fluido y el sólido sólo es posible a lo largo del eje x .

De esta manera, las ecuaciones de Pride (2.12) a (2.20) que gobiernan la electrosísmica, simplificadas para una dimensión, se convierten en

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}(z, \omega) + i\omega \mu_0 H_y(z, \omega) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad , \quad (2.28)$$

$$\sigma E_x(z, \omega) + \frac{\partial H_y}{\partial z}(z, \omega) = J^{ext} \quad \text{en } \Omega \quad , \quad (2.29)$$

$$-\omega^2 \rho_b u_x^s(z, \omega) - \omega^2 \rho_f u_x^f(z, \omega) - \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial u_x^s(z, \omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega^B \quad , \quad (2.30)$$

$$-\omega^2 \rho_f u_x^s(z, \omega) - \omega^2 g_0 u_x^f(z, \omega) + i\omega \frac{\eta}{k_0} u_x^f(z, \omega) = \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x(z, \omega) \quad \text{en } \Omega^B \quad . \quad (2.31)$$

El símbolo Ω hace referencia al dominio computacional completo, mientras que Ω^B es la porción del dominio z donde deben ser resueltas las ecuaciones de Biot, es decir, el subsuelo.

El coeficiente de acople de masas para $\omega = 0$ es

$$g_0 = \frac{3}{2} \frac{\rho_f \alpha_\infty}{\phi} \quad , \quad (2.32)$$

que representa los efectos inerciales asociados a las interacciones dinámicas entre las fases sólida y fluida del medio poroso.

Capítulo 3

Estado del Arte

3.1. Antecedentes

Los primeros trabajos experimentales en sismoelectricidad son de los años 30 al 50 del siglo pasado. En 1936, Blau y Statham [6] patentaron un método de prospección sismoeléctrica y realizaron mediciones de conversión de energía sísmica en eléctrica, y su fenómeno inverso, que fueron implementadas posteriormente por otros investigadores. Años más tarde, Ivanov registró conversiones sismoeléctricas utilizando explosivos como fuente y antenas como receptores. Además, detectó un fenómeno de naturaleza no lineal que denominó *electrosísmica de segunda especie* [19]. Las conversiones de segunda especie también fueron observadas por Martner y Sparks[22], quienes las asociaron a respuestas de interfaces en zonas del subsuelo que presentan un marcado contraste en ciertas propiedades del fluido o de la roca. En 1939, Thompson realizó experiencias de campo empleando el método de Blau y Statham y, aunque también registró conversión sismoeléctrica, no construye una fundamentación teórica de la fenomenología [43].

Desde estos primeros trabajos y hasta la fecha, son numerosos los autores que observaron conversiones sismoeléctricas e implementaron metodologías para detectar con ellas objetivos someros, como acuíferos o el nivel freático [9, 20, 23, 44]. No ocurre lo mismo con las conversiones electrosísmicas. La única implementación en campo de una metodología electrosísmica con fines exploratorios, en la que se generaron ondas acústicas a partir de una fuente electromagnética (EM), fue llevada a cabo por Exxon Mobil y patentada en un año tan reciente como 1999 [45]. La técnica se implementó en tres escenarios diferentes, y permitió detectar areniscas saturadas con gas hasta casi 1000m de profundidad. Exxon Mobil también implementó y patentó el uso de señales de emisión codificadas como fuente electromagnética de emisión [18].

Los primeros trabajos teóricos sobre electrosísmica y sismoeléctrica [15, 24, 25] no fueron del todo generales y, por ejemplo, no contemplaban la posibilidad de que ondas de corte generaran energía electromagnética. Como se mencionó anteriormente, el primer trabajo teórico que incorpora el sistema completo de ecuaciones de Maxwell corresponde a Pride, en 1994 [29]. Éste, mediante promedio volumétrico, obtiene las ecuaciones macroscópicas que describen los fenómenos electrosísmico y sismoeléctrico, siendo la solución numérica de este sistema de ecuaciones que gobiernan la electrosísmica el objeto de este trabajo.

Diversos autores han implementado métodos numéricos para resolver el conjunto de ecuaciones de Pride, todos en el presente siglo. Entre ellos vale la pena mencionar a Han [17], Pain [28], Haines [16] y White [48, 49], cada uno de los cuales utiliza aproximaciones diferentes para el estudio numérico del problema. Recientemente Späth [41] y Zyserman et al. [13] solucionaron, usando el método de elementos finitos, las ecuaciones electrosísmicas en una y dos dimensiones, respectivamente. Estos trabajos y sus resultados se detallan en las secciones siguientes.

3.2. Simulación electrosísmica 2D con elementos finitos de SHTE y PSVTM

Zyserman et al. [13] simularon el fenómeno electrosísmico en dos dimensiones utilizando elementos finitos. En su trabajo, el suelo igualmente se modela como un conjunto de capas horizontales de medios porosos lineales e isotropos, modelo físico Figura 3.1, pero utilizan dos clases de fuentes electromagnéticas, una da lugar a campos eléctricos transversos (TE) y la otra a campos magnéticos transversos (TM) dando lugar a ondas de corte polarizadas horizontalmente (SH, por *Shear-Horizontal*) y a ondas de presión con corte polarizado vertical (PSV, por *pressure and Shear-Vertical*), respectivamente.

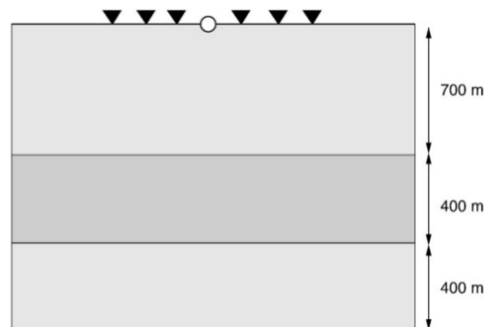


Figura 3.1: *Modelo físico del campo de simulación.*

3.2.1. Modelo

Las condiciones para el modelo consideran únicamente pequeñas perturbaciones que satisfacen el principio de superposición lineal. El fluido es un electrolito ideal y las leyes constitutivas macroscópicas se suponen isotrópicas. Se resuelven las ecuaciones de Pride [29] en dos dimensiones:

$$\begin{aligned}
-J_e^{ext} &= (\sigma + i\epsilon\omega) E - \nabla \times H + L(\omega) \eta \kappa^{-1} [i\omega u_f - L(\omega)E] \quad , \\
-J_m^{ext} &= \nabla \times E + i\omega \mu H \quad , \\
F^{(s)} &= -\omega^2 \rho_b u_s - \omega^2 \rho_f u_f - \nabla \cdot \tau(u) \quad , \\
F^{(f)} &= -\omega^2 \rho_f u_s + \eta \kappa^{-1} [i\omega u_f - L(\omega)E] + \nabla \rho_f \quad , \\
\tau_{lm}(u) &= 2G \varepsilon_{lm}(u_s) + \delta_{lm} (\lambda_c \nabla \cdot u_s + \alpha K_{av} \nabla \cdot u_f) \quad , \\
p_f(u) &= -\alpha K_{av} \nabla \cdot u_s - K_{av} \nabla \cdot u_f \quad ,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\alpha_c = K_c - \frac{2G}{3}$, K_c es el módulo de bulk para el material saturado, K_{av} es el coeficiente de fluido almacenado, $\alpha = 1 - \frac{K_{fr}}{K_s}$. Los tensores τ_{lm} y ε_{lm} de tensión y esfuerzo, respectivamente.

3.2.2. Resultados Numéricos

Modelo 1. La Figura 3.1 representa el esquema del espacio de simulación. El suelo se supone compuesto de una capa de arenisca saturada con agua muy permeable, inmersa entre dos capas de arenisca saturada con agua de menor porosidad (*ver parámetros en la Tabla 5.1*), representa un espacio de 3km de largo por 1.5km de profundidad con un dominio computacional de 2233 x 1117 celdas. La fuente eléctrica se coloca en el centro de la superficie, y la intensidad de su señal en el tiempo reproduce la forma de una onda Ricker, con una frecuencia central de 20Hz. La respuesta del suelo a esta señal se resuelve en el dominio espacio-frecuencia sobre un conjunto de 100 frecuencias, calculando con ellas la amplitud de la respuesta en cada celda, de acuerdo con las ecuaciones de Pride. Luego, estas respuestas a frecuencia fija se combinan mediante una transformada de Fourier inversa para reconstruir las respuestas temporales de cada celda. Los sensores sísmicos se ubican cada 25m, a ambos lados de la fuente emisora. La respuesta de los acelerómetros para espesores diferentes en la segunda capa del modelo se encuentran representados en la Figura 3.2.

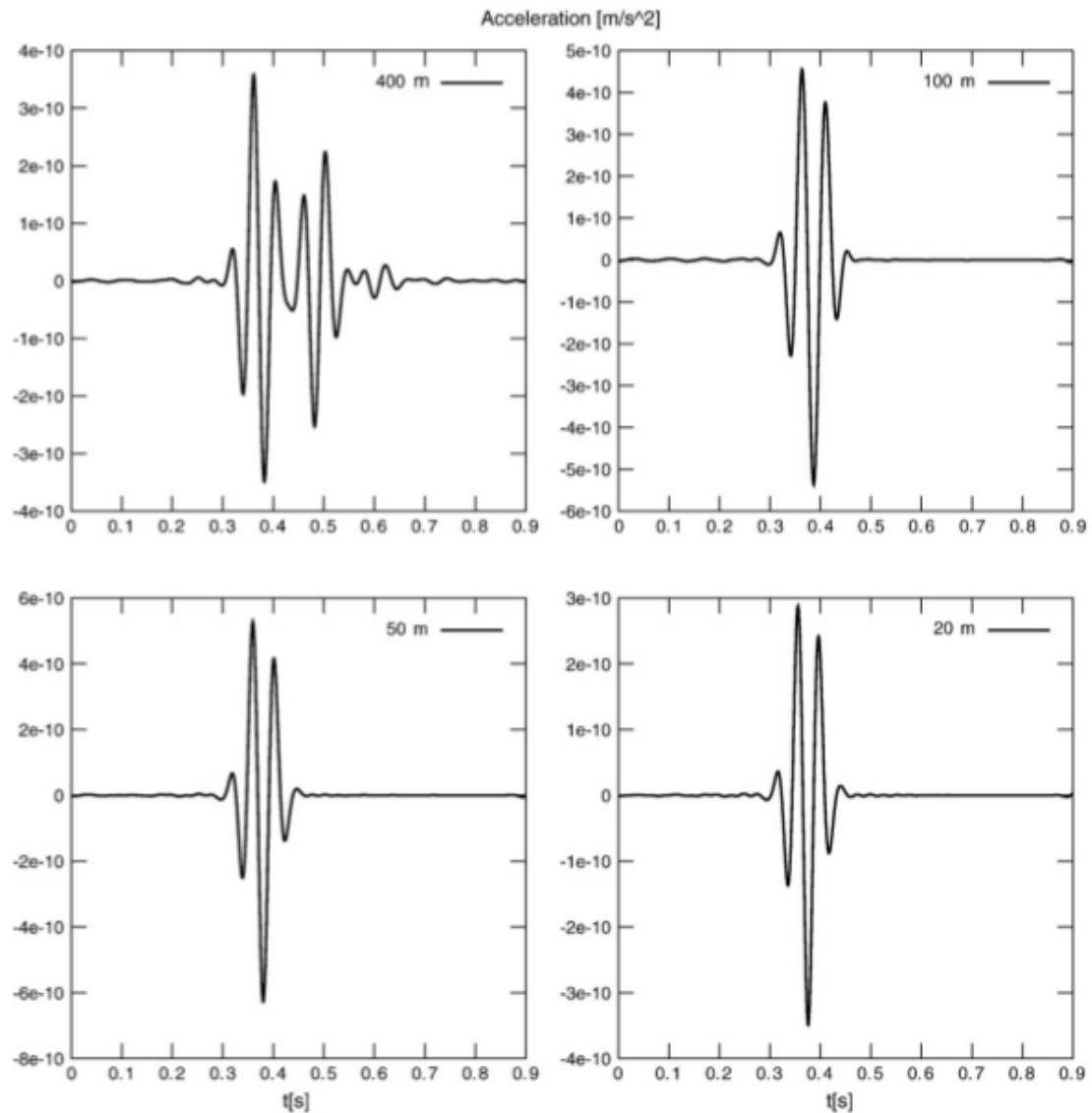


Figura 3.2: Comparación de trazas individuales de aceleración para cuatro espesores diferentes de la segunda capa.

Cuando las antenas generan campos eléctricos, el suelo responde con patrones de desplazamiento como los que se observan en la Figura 3.3. Estos desplazamientos corresponden a ondas SH. Se puede observar en estos desplazamientos que los frentes de onda sísmicos se generan de forma simultánea desde las fronteras entre los dos tipos de suelo. Como las corrientes de desplazamiento se ignoran en las ecuaciones de Maxwell simplificadas del modelo de Pride, el campo eléctrico aparece instantáneamente en todo el dominio.

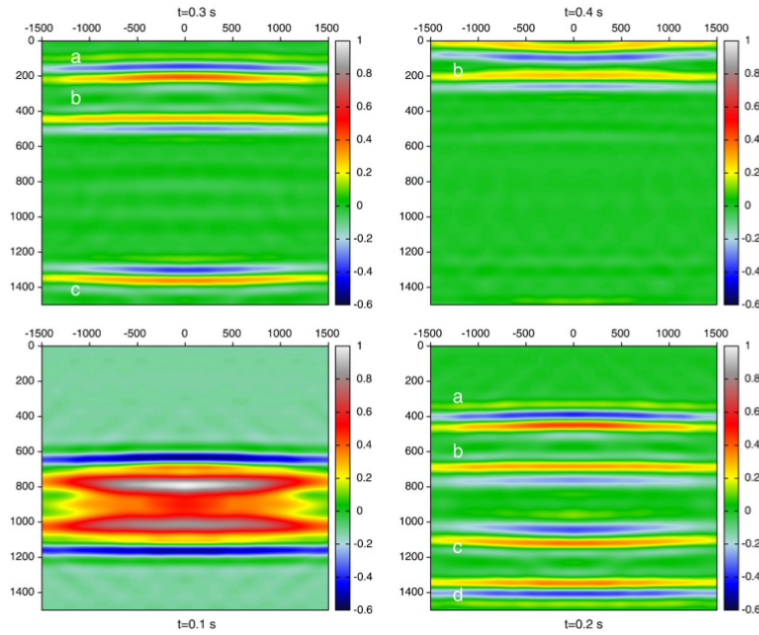


Figura 3.3: *Desplazamiento del sólido. Evolución de los frentes de onda generados por el contraste del coeficiente de acople electrocinético en el medio. El frente de onda **a** corresponde al viaje hacia arriba originado por la parte superior de la capa de interés (segunda capa, 400m). El **b** es el frente de onda hacia arriba originado por la parte inferior de la misma capa de interés. Análogamente los frentes **c**, **d** son el viaje hacia abajo de la parte superior e inferior de la capa de interés, respectivamente.*

3.3. Modelado Electrosísmico 1D

Este trabajo [41], se desarrolló en la Universidad Nacional de la Plata, Argentina en noviembre de 2008, en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. En él se realiza la resolución numérica de las ecuaciones de Pride reducidas a una dimensión por elementos finitos. El modelo planteado por Späth considera las suposiciones ya mencionadas (2.7.1).

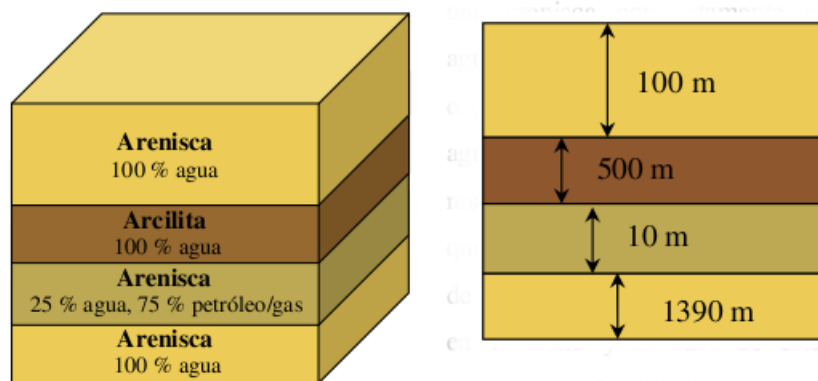


Figura 3.4: *modelo físico de un contacto agua-petróleo [41].*

3.3.1. Condiciones de frontera

Las condiciones de borde para los desplazamientos son absorbentes para el límite inferior ($\Gamma^{i,B}$) y de superficie libre para el superior ($\Gamma^{s,B}$). Ver Figura 3.5. Una condición de borde absorbente lo hace transparente para las ondas que inciden de forma normal (como si no existiera la frontera). Sin embargo, el límite superior es una superficie libre, pues coincide con la superficie terrestre. Para los campos electromagnéticos se imponen condiciones de frontera absorbentes en ambos límites ($\Gamma^{i,M}$ y $\Gamma^{s,M}$), pues las ondas electromagnéticas se radían por igual fuera del suelo que dentro de él.

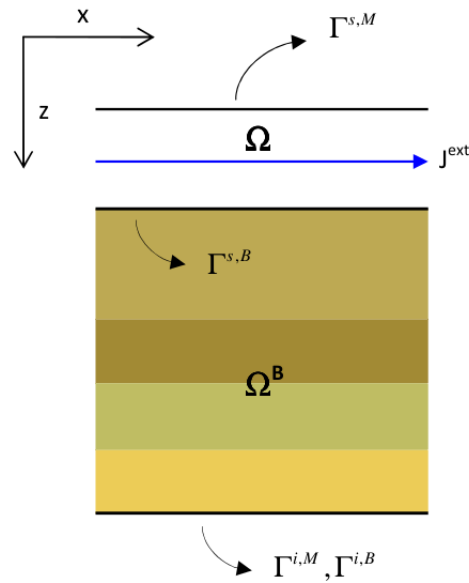


Figura 3.5: dominios computacionales y sus límites, tomado de Späth [41].

3.3.2. Resultados numéricos

Onda lenta de Biot. El objetivo de este primer ejemplo numérico fué estudiar la importancia de modelar adecuadamente la difusión de la presión del fluido en zonas del subsuelo que presenten contraste de sus propiedades electrosísmicas [41]. Para ello, el autor realiza dos simulaciones: en una de ellas las ondas lentas de Biot no son tenidas en cuenta, y en la otra se incorporan adecuadamente en el modelado. El modelo físico usado está esquematizado en la Figura 3.4 con un WOC(Water-Oil Contact) a 600m de profundidad. Las Figuras 3.6 presentan las variaciones de los desplazamientos del sólido y del fluido respectivamente, registrados por un receptor situado en la interfaz agua-petróleo, donde se generan los eventos sísmicos. En rojo se muestran las curvas obtenidas con el modelo que no incluye las ondas lentas de Biot, y en azul se muestran los resultados de modelar adecuadamente estas ondas.

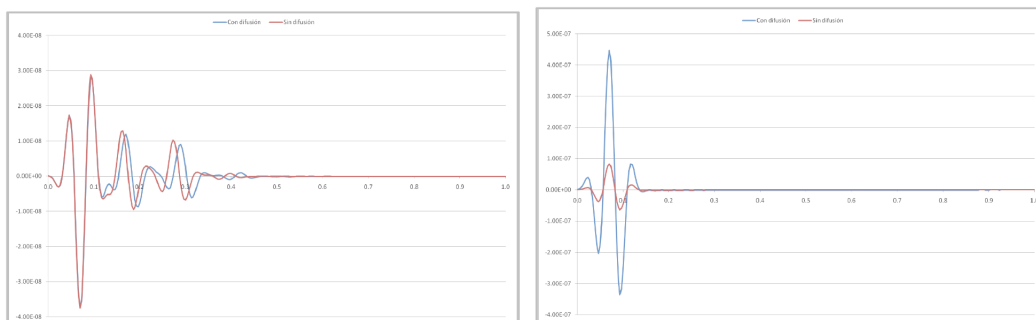


Figura 3.6: *desplazamiento del sólido (izq.) y del fluido (Dcha.) registrado en el WOC.*

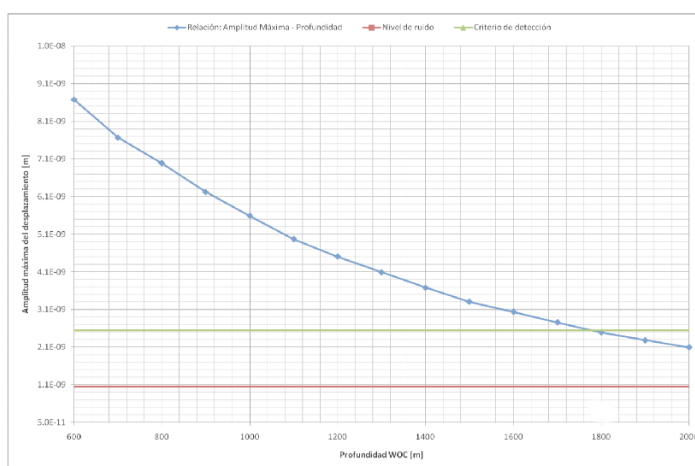


Figura 3.7: *Variación de la amplitud del desplazamiento máximo registrado en superficie.*

Se puede observar que la principal diferencia entre las ondas de desplazamiento del sólido con y sin ondas lentas de Biot es un desfase en las señales de los geófonos, en tanto que las diferencias de amplitud entre los dos casos no son demasiado significativas. Por el contrario, para el caso de los campos de desplazamiento en el fluido, se observa que las amplitudes en el caso que incluye la onda lenta de Biot son mayores en más de un orden de magnitud a aquellos en el caso que no las incluye. Lo que significa que para la fase sólida el desplazamiento con y sin ondas lentas de Biot no altera la amplitud solo produce un desfase. Mientras que para el fluido si existe cambio en amplitud al considerarlas.

Respuesta electrosísmica de un contacto agua-petróleo. Con este segundo resultado numérico, Figura 3.7, se realiza un análisis de sensibilidad de la respuesta sísmica registrada en superficie. Donde la variación de la amplitud del desplazamiento muestra la máxima profundidad de detección en superficie para este contacto agua-gas que es alrededor de los 1200m.

Capítulo 4

Implementación numérica

4.1. Diferencias finitas

En el método de diferencias finitas, el espacio se divide en una grilla discreta de puntos, separados por una distancia h , y el tiempo avanza en pasos discretos de duración Δt . El método consiste en reemplazar las derivadas del campo en la ecuación diferencial parcial por diferencias entre valores del campo en los puntos discretos de la grilla y a instantes discretos del tiempo [26].

Consideremos, por ejemplo, la expansión en series de Taylor de $f(x)$ sobre x_0 con un offset de $+/- h/2$

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (4.1)$$

$$f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = f(x_0) - \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots. \quad (4.2)$$

Restando las expansiones y dividiendo por h se obtiene

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h} = f'(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f'''(x_0) + \dots, \quad (4.3)$$

que corresponde a una aproximación de segundo orden en h para la derivada de primer orden de la función f . Decimos que esta aproximación es de segundo orden en h porque el término dominante de aquéllos que se desprecian en la aproximación es proporcional a h^2 y, por lo tanto, el error sistemático que se comete en la aproximación es también

proporcional a h^2 .

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right)}{h} + O(h^2). \quad (4.4)$$

De forma similar, la derivada de segundo orden se puede aproximar sumando los desarrollos de las expansiones de Taylor 4.2 y despejando $f''(x_0)$.

4.2. Ecuaciones a resolver

Para resolver numéricamente el conjunto de ecuaciones que gobierna el fenómeno electrosísmico en una dimensión (2.28-2.31) es común descomponer los campos \vec{E} y \vec{H} de las ecuaciones de Maxwell en primarios y secundarios, siendo los segundos perturbaciones de los iniciales:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^s + \vec{E}^p, \\ \vec{H} &= \vec{H}^s + \vec{H}^p. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Del mismo modo, la conductividad se descompone en

$$\sigma^c(z) = \sigma^p + \sigma^s(z), \quad (4.6)$$

donde σ^p corresponde a la conductividad constante de fondo y σ^s es la anomalía de conductividad. Con esta idea, Ward [47] deduce las ecuaciones para los campos primarios y secundarios en un modelo físico de capas planas, paralelas y horizontales. Las ecuaciones para los campos secundarios resultan ser

$$\frac{\partial E_x^s}{\partial z}(z, \omega) = -i\omega\mu_0 H_y^s(z, \omega), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial H_y^s}{\partial z}(z, \omega) = \sigma^c E_x^s(z, \omega) + \sigma^s E_x^p(z, \omega), \quad (4.8)$$

donde la fuente de los campos es una corriente de conducción que involucra tanto la anomalía de conductividad como el campo eléctrico primario [41].

Al incluir la descomposición de los campos en las ecuaciones de Maxwell, el sistema completo de ecuaciones a resolver por el método numérico es

$$\frac{\partial E_x^s}{\partial z}(z, \omega) + i\omega\mu_0 H_y^s(z, \omega) = 0 \text{ en } \Omega, \quad (4.9)$$

$$-\sigma^c E_x^s(z, \omega) + \frac{\partial H_y^s}{\partial z}(z, \omega) = \sigma^s E_x^p(z, \omega) \text{ en } \Omega, \quad (4.10)$$

$$-\omega^2 \rho_b u_x^s(z, \omega) - \omega^2 \rho_f u_x^f(z, \omega) - \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial u_x^s(z, \omega)}{\partial z} \right) = 0 \text{ en } \Omega^B, \quad (4.11)$$

$$-\omega^2 \rho_f u_x^s(z, \omega) - \omega^2 g_0 u_x^f(z, \omega) + i\omega \frac{\eta}{k_0} u_x^f(z, \omega) = \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x(z, \omega) \text{ en } \Omega^B. \quad (4.12)$$

$$a E_x^s - v \cdot H_y^s = 0 \text{ en } \Gamma, \quad (4.13)$$

$$-G \frac{\partial u_x^s}{\partial z} \cdot v = i\omega \hat{\alpha} \sqrt{G/\hat{\alpha}} u_x^s \text{ en } \Gamma^{i,B}. \quad (4.14)$$

Como se mencionaba anteriormente, una de las suposiciones asumidas en el modelo es que la realimentación por electrofiltración es despreciable. Esto hace posible resolver de manera independiente el conjunto de ecuaciones de Maxwell (4.9), (4.10) y (4.13). Sin embargo, antes de resolverlas numéricamente es necesario hallar de forma analítica el campo primario E^p . Para ello se toma la solución general para un medio lineal, isótropo, homogéneo,

$$\vec{e} = \vec{e}_0^+ e^{-i(kz-\omega t)} + \vec{e}_0^- e^{i(kz+\omega t)}, \quad (4.15)$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0^+ e^{-i(kz-\omega t)} + \vec{h}_0^- e^{i(kz+\omega t)}, \quad (4.16)$$

donde el número de onda es complejo, $k = \alpha - i\beta$, siendo

$$\alpha = \omega \left[\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right]^{1/2} \quad (4.17)$$

y

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right]^{1/2}, \quad (4.18)$$

que para el caso de prospección eléctrica cumple $\alpha = \beta$. En efecto, como se mencionó en la sección 2.7.1, la corriente de conducción $\sigma \vec{E}$ es mucho mayor que la corriente de desplazamiento $-i\omega\varepsilon \vec{E}$. Entonces, $\omega\varepsilon/\sigma < 10^{-4}$, por lo que (4.17) y (4.18) resultan ser iguales,

$$\alpha = \beta = \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2} \right)^{1/2}. \quad (4.19)$$

Por lo tanto, la solución del campo eléctrico y magnético de 4.16 es de la forma

$$\vec{e} = \vec{e}_0^+ e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\beta z}, \quad (4.20)$$

$$\vec{h} = \vec{h}_0^+ e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\beta z}. \quad (4.21)$$

Como β es real, $e^{(-\beta z)}$ se vuelve pequeño cuando z aumenta. Esto representa una atenuación de la onda a medida que penetra en el medio, a lo largo del eje z . La solución analítica de las ecuaciones de Maxwell representa el campo primario \vec{E}^p que se requiere en la ec. 4.10 para resolver numéricamente \vec{E}^s en cada z para todas las frecuencias. Para nuestro

caso, este campo primario resulta ser

$$\vec{E}_x^p = \vec{E}_0^+ e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\beta z}, \quad (4.22)$$

donde \vec{E}_0^+ es la amplitud de la señal de la fuente eléctrica que produce la descarga inicial.

4.3. Condiciones de frontera

Las condiciones de borde empleadas para los límites inferior ($\Gamma^{i,M}$) y superior ($\Gamma^{s,M}$) en las ecuaciones de Maxwell y en el límite inferior ($\Gamma^{i,B}$) de Biot son absorbentes, lo que indica que el borde para esos límites computacionales se hace transparente para las ondas que inciden de forma normal al mismo [41]. En cambio, para el límite superior de Biot ($\Gamma^{s,B}$) se considera la condición de borde libre, ya que este coincide con la superficie terrestre.

Entonces, para las ecuaciones de Biot (2.30) y (2.31) las condiciones de borde son:

$$-G \frac{\partial u_x^s}{\partial z} \cdot v = i\omega \hat{\alpha} \sqrt{G/\hat{\alpha}} u_x^s \quad \Gamma^{i,B}, \quad (4.23)$$

$$0 \quad \Gamma^{s,B}, \quad (4.24)$$

donde v es la normal exterior al límite computacional y su valor es $v = -1$ en $\Gamma^{i,B}$, y $\hat{\alpha} = \rho_b - \rho_f^2/g_0$. De forma similar, las condiciones de frontera para las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones (2.28) y (2.29)) resultan ser

$$aE_x^s - v \cdot H_y^s = 0 \quad \Gamma = \Gamma^{s,M} \cup \Gamma^{i,M}, \quad (4.25)$$

donde $v = 1$ en $\Gamma^{s,M}$, y $v = -1$ en $\Gamma^{i,M}$, y $a = (1 - i)\sqrt{\sigma(\omega)/(2\mu_0\omega)}$. La deducción completa de estas condiciones se encuentra en Santos y Sheen [34, 35] y Sheen [39].

4.4. Esquema de *Diferencias Finitas para el Dominio de la Frecuencia, DFDF*

4.4.1. Esquema de diferencias finitas para las ecuaciones de Maxwell

La malla empleada para resolver las ecuaciones por diferencias finitas fué propuesta por Kane Yee en 1966, Figura 4.1. Consiste en utilizar dos mallas intercaladas: una para el campo eléctrico y otra para el campo magnético, de manera que los nodos de una malla se encuentran en los puntos medios entre los nodos de la otra. Como las ecuaciones de

Maxwell calculan la derivada temporal del campo eléctrico en función de la derivada espacial del campo magnético, y viceversa, esta escogencia de los nodos garantiza una precisión de segundo orden en las derivadas [42].

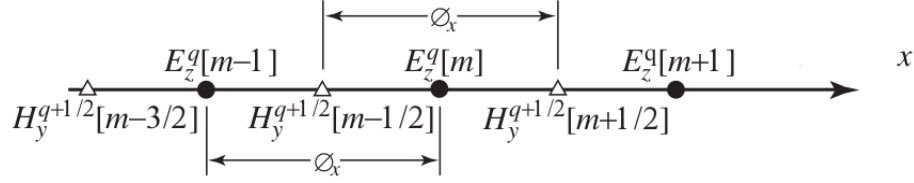


Figura 4.1: Malla propuesta Kane Yee, tomado de [42].

A partir del conjunto de ecuaciones a resolver (4.9- 4.12) y el tipo de malla, se plantea el siguiente esquema de diferencias finitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x^s}{\partial z}(z, \omega) &= -i\omega\mu_0 H_y^s(z, \omega), & (4.26) \\ \frac{E_x^{z+1}(z, \omega) - E_x^z(z, \omega)}{\Delta z} &= -i\omega\mu_0 H_y^z(z, \omega), \\ E_x^{z+1} - E_x^z + i\omega\mu_0 \Delta z H_y^z &= 0, \quad z = 0, 1, \dots, z_{max-1}, \end{aligned}$$

para el campo magnético secundario $H^s(z, \omega)$, y

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y^s}{\partial z}(z, \omega) &= \sigma^s E^p(z, \omega) + \sigma^c E_x^s(z, \omega), & (4.27) \\ \frac{H_y^z(z, \omega) - H_y^{z-1}(z, \omega)}{\Delta z} - \sigma^c E_x^z(z, \omega) &= \sigma^s E^{p, (z+1/2)\Delta z}(z, \omega), \\ H_y^z - H_y^{z-1} - \sigma^c \Delta z E_x^z &= \sigma^s \Delta z E^{p, (z+1/2)\Delta z}, \quad z = 0, 1, \dots, z_{max-1}. \end{aligned}$$

para el campo eléctrico secundario $E^s(z, w)$.

Sus condiciones de frontera correspondientes (4.25) resultan ser: para la superficie en $z = 0$,

$$H_y^{z=0} = a E_x^{z=0}, \quad (4.28)$$

$$H_y^{z=0} = a E_x^{z=superficie0}, \quad (4.29)$$

$$H_y^{z=0} = 0, \quad (4.30)$$

donde $E_x^{superficie}$ corresponde al campo eléctrico secundario inicial el cuál es cero en la superficie ya que la fuente se encuentra implícita sólo en el campo primario que se

calculó analíticamente; y para la superficie en $z = L$,

$$aE_x^{z=L} = -H_y^{z=L}, \quad (4.31)$$

$$a \frac{(E_x^{zmax} + E_x^{zmax-1})}{2} = -H_y^{zmax-1}, \quad (4.32)$$

$$E_x^{zmax} = -\frac{2}{a}H_y^{zmax-1} - E_x^{zmax-1}, \quad (4.33)$$

donde fue necesario interpolar $E_x^{z=L}$. Reemplazando estas condiciones de frontera en las ecuaciones del esquema de diferencias finitas (4.27) y (4.26), se obtienen:

$$H^0 - H^{-1} - \sigma^c \Delta z E_s^z = \sigma^s \Delta z E^{p,(\Delta z/2)}, \quad (4.34)$$

$$H^0 - \sigma^c \Delta z E_s^0 = \sigma^s \Delta z E^{p,(\Delta z/2)} + H^{-1},$$

$$H^0 - \sigma^c \Delta z E_s^0 = \sigma^s \Delta z E^{p,(\Delta z/2)} + aE_x^{superficie0}, \quad (4.35)$$

$$H^0 - \sigma^c \Delta z E_s^0 = \sigma^s \Delta z E^{p,(\Delta z/2)}$$

y

$$E_x^{zmax} - E_x^{zmax-1} + i\omega\mu_0 \Delta z H_y^{zmax-1} = 0, \quad (4.36)$$

$$i\omega\mu_0 \Delta z H_y^{zmax-1} - E_x^{zmax-1} = -E_x^{zmax}, \quad (4.37)$$

$$i\omega\mu_0 \Delta z H_y^{zmax-1} - E_x^{zmax-1} = \frac{2}{a}H_y^{zmax-1} + E_x^{zmax-1}, \quad (4.38)$$

$$\left(i\omega\mu_0 \Delta z - \frac{2}{a}\right) H_y^{zmax-1} - 2E_x^{zmax-1} = 0. \quad (4.39)$$

Finalmente se obtiene un sistema de $2(zmax)$ ecuaciones con $2(zmax)$ incógnitas

$$H_y^z - H_y^{z-1} - \sigma^c \Delta z E_x^z = \sigma^s \Delta z E^{p,(z+1/2)\Delta z}, \quad z = 0, 1, \dots, z_{max-1}, \quad (4.40)$$

$$E_x^{z+1} - E_x^z + i\omega\mu_0 \Delta z H_y^z = 0, \quad z = 0, 1, \dots, z_{max-1}, \quad (4.41)$$

que se completa con las condiciones de frontera para E_0 y H_{zmax-1} ,

$$H^0 - \sigma^c \Delta z E_s^0 = \sigma^s \Delta z E^{p,(\Delta z/2)}, \quad (4.42)$$

$$\left(i\omega\mu_0 \Delta z - \frac{2}{a}\right) H_y^{zmax-1} - 2E_x^{zmax-1} = 0. \quad (4.43)$$

Si se reemplaza este resultado en (4.11), se obtiene

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \rho_s u_x^s(z, \omega) + \omega^2 \rho_f \left(\left[\frac{\omega^2 g_0 + i\omega \frac{\eta}{k_0}}{\omega^4 g_0^2 + \omega^2 \frac{\eta^2}{k_0^2}} \right] \left(\omega^2 \rho_f u_x^s + \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total} \right) \right) &= G \left[\frac{\partial^2 u_x^s(z, \omega)}{\partial z^2} \right], \\
 \rho_f \left[\frac{\omega^2 g_0 + i\omega \frac{\eta}{k_0}}{\omega^2 g_0^2 + \frac{\eta^2}{k_0^2}} \right] &= A(w), \\
 -\omega^2 \rho_s u_x^s(z, \omega) + A(w) \omega^2 \rho_f u_x^s + A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total} &= G \left[\frac{\partial^2 u_x^s(z, \omega)}{\partial z^2} \right], \\
 (A(w) \omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s) u_x^s + A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total} &= G \left[\frac{\partial^2 u_x^s(z, \omega)}{\partial z^2} \right],
 \end{aligned}$$

y al aplicar diferencias finitas, se convierte en

$$\begin{aligned}
 (A(w) \omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s) u_x^s + A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total} &= G \left[\frac{u_x^{s,n+1} - 2u_x^{s,n} + u_x^{s,n-1}}{(\Delta z)^2} \right], \\
 \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w) \omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s) u_x^s + \frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total} &= u_x^{z+1} - 2u_x^z + u_x^{z-1}, \\
 -u_x^{z-1} + \left(2 + \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w) \omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s) \right) u_x^z - u_x^{z+1} &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total}.
 \end{aligned}$$

La condición de frontera para la superficie ($z \leq 0$) es $u_x^{z-1} = 0$

$$\begin{aligned}
 -u_x^{z-1} + \left(2 + \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w) \omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s) \right) u_x^0 - u_x^1 &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_0^{total}, \\
 \left(2 + \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w) \omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s) \right) u_x^0 - u_x^1 &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_0^{total}
 \end{aligned}$$

y la condición de frontera para $z_{max} - 1$ es

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots, \quad (4.46)$$

$$f(x_0 - 2\Delta x) = f(x_0) - 2\Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (2\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} (2\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (4.47)$$

Multiplicando 4.47 por -4 y sumando este resultado a (4.46), obtenemos

$$\begin{aligned}
 f(x_0 - 2\Delta x) - 4f(x_0 - \Delta x) &= -3f(x_0) + 2\Delta x f'(x_0) + -4 \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots, \\
 f'(x_0) &= \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - 4f(x_0 - \Delta x) + 3f(x_0)}{2\Delta x} + 2 \frac{1}{3!} (\Delta x)^2 f'''(x_0) \dots
 \end{aligned}$$

Entonces, la condición de von Neumann resulta ser

$$\left. \frac{df(u^s)}{dz} \right|_{z^{max}=L} = \frac{u_{z^{max}-3}^s - 4u_{z^{max}-2}^s + 3u_{z^{max}-1}^s}{2\Delta z} + O(h^2) \quad . \quad (4.48)$$

Reemplazando en la (4.23), aquella toma la forma

$$G \left(\frac{u_{z^{max}-3}^s - 4u_{z^{max}-2}^s + 3u_{z^{max}-1}^s}{2\Delta z} \right) = i\omega \hat{\alpha} \sqrt{G/\hat{\alpha}} u_{z^{max}-1}^s \quad , \quad (4.49)$$

Despejando,

$$\begin{aligned} u_{z^{max}-3}^s - 4u_{z^{max}-2}^s + 3u_{z^{max}-1}^s &= (2\Delta z) i\omega \frac{\hat{\alpha}}{G} \sqrt{G/\hat{\alpha}} u_{z^{max}-1}^s, \\ u_{z^{max}-1}^s &= \frac{4u_{z^{max}-2}^s - u_{z^{max}-3}^s}{3 - \left(2\Delta z i\omega \sqrt{\hat{\alpha}/G}\right)} \quad . \end{aligned}$$

Este resultado se reemplaza en la ecuación centrada en $u_{z^{max}-2}^s$,

$$\begin{aligned} -u_x^{z^{max}-3} + \left(2 + \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w)\omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s)\right) u_x^{z^{max}-2} - u_x^{z^{max}-1} &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_{z^{max}-2}^{total}, \\ -u_x^{z^{max}-3} + \left(2 + \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w)\omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s)\right) u_x^{z^{max}-2} - \left[\frac{4u_{z^{max}-2}^s - u_{z^{max}-3}^s}{3 - (2\Delta z i\omega \sqrt{\hat{\alpha}/G})} \right] &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_{z^{max}-2}^{total}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Renombrando términos,

$$\begin{aligned} a(w) &= \left(2 + \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w)\omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s)\right), \\ d(w) &= 3 - \left(2\Delta z i\omega \sqrt{\hat{\alpha}/G}\right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} -u_x^{z^{max}-3} + a(w)u_x^{z^{max}-2} - \frac{4}{d(w)}u_{z^{max}-2}^s + \frac{1}{d(w)}u_{z^{max}-3}^s &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_{z^{max}-2}^{total}, \\ \left[\frac{1}{d(w)} - 1 \right] u_x^{z^{max}-3} + \left[a(w) - \frac{4}{d(w)} \right] u_x^{z^{max}-2} &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_{z^{max}-2}^{total}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones a resolver es de $z^{max} - 1$ ecuaciones por $z^{max} - 1$ incógnitas,

$$\begin{aligned} -u_x^{z-1} + \left(2 + \frac{(\Delta z)^2}{G} (A(w)\omega^2 \rho_f - \omega^2 \rho_s)\right) u_x^z - u_x^{z+1} &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total}, \\ -u_x^{z-1} + a(w)u_x^z - u_x^{z+1} &= -\frac{(\Delta z)^2}{G} A(w) \frac{\eta}{k_0} L_0 E_x^{total}, \end{aligned}$$

longitud de onda mínima, por ejemplo:

$$\lambda_{min} = V_{onda}/f_{max} = \frac{2000 \text{ m/s}}{40 \text{ Hz}} = 50 \text{ m} \quad , \quad (4.54)$$

para una frecuencia central 20Hz y velocidad de 2000m/s, se puede tomar $h = 4$.

4.5. El espacio de simulación

1. El modelo físico elegido para el subsuelo corresponde a un semiespacio tridimensional estratificado en diferentes capas planas, paralelas y homogéneas, distribuidas a lo largo del eje z (Figura. 4.2). En consecuencia, presenta variaciones únicamente en la dirección del eje z es decir, es unidimensional (1-D).

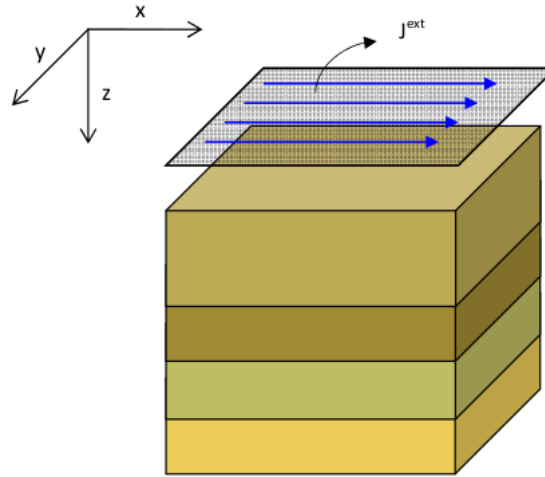


Figura 4.2: modelo físico 1D. En azul se indica la dirección en la que oscila la fuente eléctrica [41].

2. La fuente electromagnética EM, corresponde a un plano de corriente eléctrica dependiente del tiempo que oscila en la dirección del eje x (Figura. 4.2). La simetría de esta fuente es tal, que la variación de los campos magnéticos y eléctricos depende únicamente de la coordenada z . Por lo tanto, la fuente electromagnética, al igual que el medio físico, es unidimensional.

4.6. Fuente electromagnética, EM

En diferentes estudios se ha demostrado que La Tierra tiene un espectro de absorción para las ondas elásticas que atenúa más las ondas de alta frecuencia, y que cada una viaja con una velocidad de propagación diferente. Por lo tanto, la onda se atenúa y se

dispersa a medida que se propaga por la corteza terrestre. Los mecanismos naturales que afectan la forma de la ondícula son de fase mínima o cercana a ella. Una ondícula de fase mínima es aquella que tiene concentrada su energía en la parte inicial. Las ondículas de fase cero son simétricas y el centro de la ondícula indica el tiempo de arribo.

Norman Ricker propuso una ondícula teórica para representar el pulso de velocidad de una onda que se propaga por el subsuelo, y se conoce como el pulso de Ricker. La ondícula Ricker es una de las más usadas en Sísmica, y es equivalente a la segunda derivada de una función gaussiana. La ondícula de Ricker se define como

$$f(t) = [1 - 2\pi^2\nu_0^2 t^2] \exp(-\pi^2\nu_0^2 t^2) \quad , \quad (4.55)$$

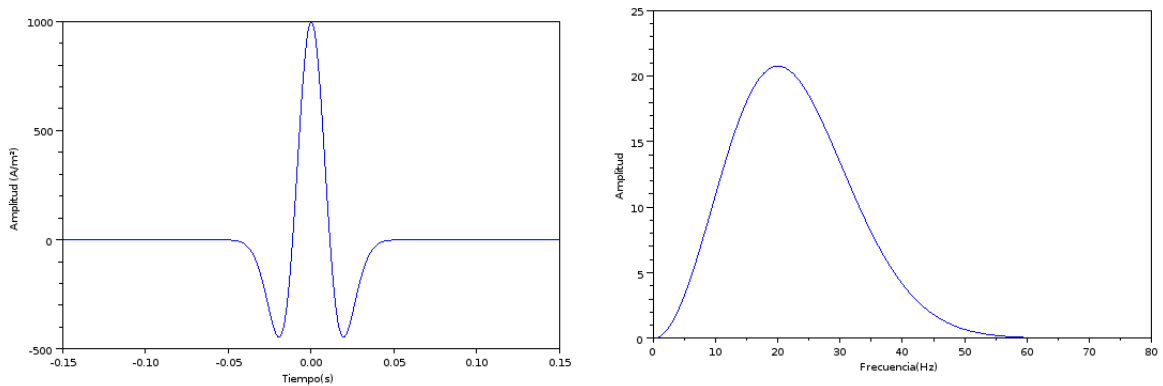


Figura 4.3: Ondícula Ricker en el espectro de tiempo y frecuencia.

donde ν_0 corresponde a la frecuencia central. En el espectro de las frecuencias, la ondícula de Ricker toma la forma

$$f(\omega) = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right] \left[\frac{\omega^2}{\nu_0^3} \right] \exp^{-\omega^2/\nu_0^2}. \quad (4.56)$$

Para la simulación utilizaremos la siguiente forma de escalada de la ondícula de Ricker:

$$fr(m, q) = \left[1 - 2\pi^2 \left(\frac{Scq \pm m}{N_p} - Md \right)^2 \right] \exp \left(-\pi^2 \left(\frac{Scq \pm m}{N_p} - Md \right)^2 \right), \quad (4.57)$$

donde $d_r = M_d \frac{1}{f_p} = Md \frac{N_p \Delta t}{Sc}$ es el retraso múltiple, $Sc = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ el número de Courant, q el índice temporal y m el espacial, y N_p el número de puntos por longitud de onda mínima, lo que garantiza la resolución espectral correcta a la salida de la transformada de Fourier.

En la simulación, la fuente electromagnética se ubica sobre la superficie terrestre en $z = 0$, con una amplitud de $1000 A/m^2$ y frecuencia central de $20 Hz$, ésta, al igual que el medio físico, es unidimensional sin discontinuidades laterales. Por ser el modelo a resolver un sistema lineal de ecuaciones ante la conversión electrosísmica, el rango de frecuencias se mantendrá a lo largo de la evolución temporal en la banda sísmica de 10 a $100Hz$ [41].

4.7. Parámetros de entrada

Los parámetros necesarios para nuestra simulación corresponden a las propiedades del suelo Tabla 4.1 y de los parámetros de la fuente 4.2

Símbolo	Parámetro	Unidades
σ	Conductividad	Siemens/m
ϕ	Porosidad	—
ρ_s	Densidad del sólido	Kg / m^3
V_s	Velocidad sísmica de la onda transversal	m/s
k	Permeabilidad	m^2
L_0	Coefficiente de acople electrocinético	A / (Pa.m)
Q	Factor de calidad	—
ρ_w	Densidad del agua	Kg/ m^3
η_f	Viscosidad del fluido	Pa.s
$\epsilon_0\kappa_0$	Permeabilidad eléctrica en el vacío	m^2
S_w	Saturación del agua	—

Cuadro 4.1: *Parámetros de entrada.*

Parámetro	
$f_p(Hz)$	Frecuencia principal
N_p	Pasos por longitud de onda
Δt (s)	Paso temporal
Sc	Número de Courant

Cuadro 4.2: *Parámetros de entrada de fuente.*

4.8. Parámetros de salida

Las matrices de salida contienen la información de los desplazamientos relativos $\vec{w}(z, \omega)$ del grano-fluido para cada profundidad z en todas las frecuencias ω , así como los desplazamientos independientes U_f y U_s del fluido y del sólido, respectivamente. De la misma forma el algoritmo calcula las matrices de aceleraciones del desplazamiento relativo $\vec{a}_w(z, \omega)$.

Capítulo 5

Resultados

El modelo descrito en el capítulo anterior se implementó desarrollando un programa orientado a objetos en lenguaje C++ para tal fin que consta de 875 líneas de código.

5.0.1. Modelo 1

Para la primera implementación numérica del modelo unidimensional, se utilizaron los parámetros de la simulación del modelo físico de tres capas homogéneas descrito en el Capítulo 3, modelo 3.1, que es usado para la implementación en 2D realizada con elementos finitos por P. Gauzellino, F. Zyzerman y E. Santos del Grupo Geofísica Aplicada de la Universidad Nacional de La Plata [13]. Los parámetros de entrada se encuentran consignados en la Tabla 5.1.

Parámetro	Modelo 1	
	Capa 1	Capa 2
σ (<i>Siemens/m</i>)	0.001	0.1
$\phi(-)$	0.2	0.25
V_p (<i>m/s</i>)	3900	4800
V_s (<i>m/s</i>)	2130	2800
ρ_s (<i>Kg/m³</i>)	2600	2600
K_0 (<i>m²</i>)	10^{-16}	10^{-11}
L_0 (<i>A/Pa.m</i>)	10^{-14}	$8,16 \times 10^{-9}$
$Q(-)$	90	90
ρ_{bulk} (<i>Kg/m³</i>)	1000	1000
η_{bulk} (<i>Pa.s</i>)	1×10^{-3}	1×10^{-3}
κ_f (<i>m²</i>)	$2,25 \times 10^9$	$2,25 \times 10^9$
$S_w(-)$	1	1

Cuadro 5.1: *Parámetros de las propiedades del suelo para el modelo 1.*

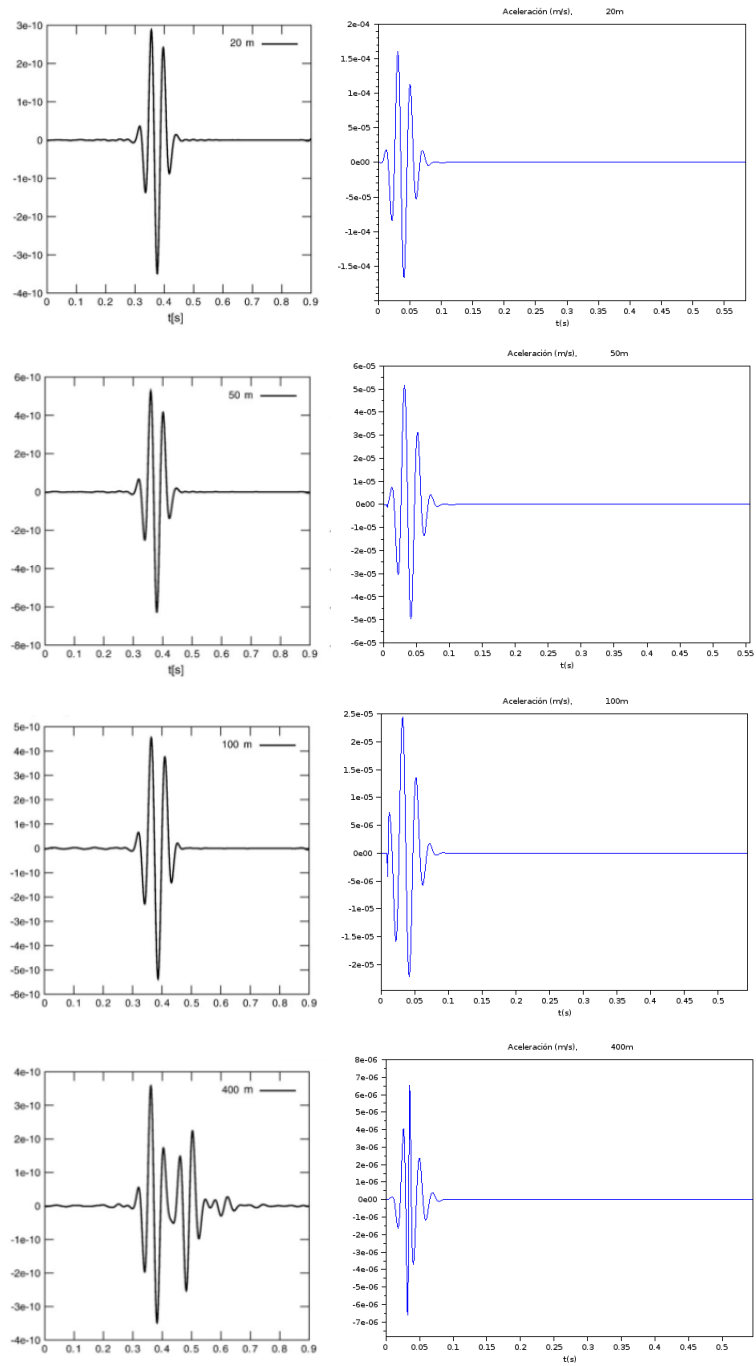


Figura 5.1: Aceleración del desplazamiento para diferentes espesores, a la izquierda [13] y a la derecha los resultados obtenidos.

Parámetro	
f_p (Hz)	20
N_p	14
Δt (s)	0.0035
S_c	0.98

Cuadro 5.2: *Parámetros de la fuente modelo 1.*

Además, se escala la fuente EM en el dominio temporal, previo a transformarla al dominio de la frecuencia, con los datos de la Tabla 5.2.

El dominio computacional es de 150 nodos, y las señales se discretizan sobre 214 valores de frecuencia. La fuente es la ondícula Ricker actuando uniformemente sobre toda la superficie, representada por el nodo a $z = 0$. Los receptores sísmicos, que para este caso son acelerómetros, se encuentran uniformemente distribuidos en un pozo inicial separados a 10m de distancia.

La respuesta del acelerómetro inducida por el desplazamiento sólido-fluido generado por la capa del segundo medio a diferentes espesores 20, 50, 100 y 400m se evidencia en la Figura 5.1 y se observa que a medida que se aumenta el espesor de la capa la perturbación de la señal incrementa.

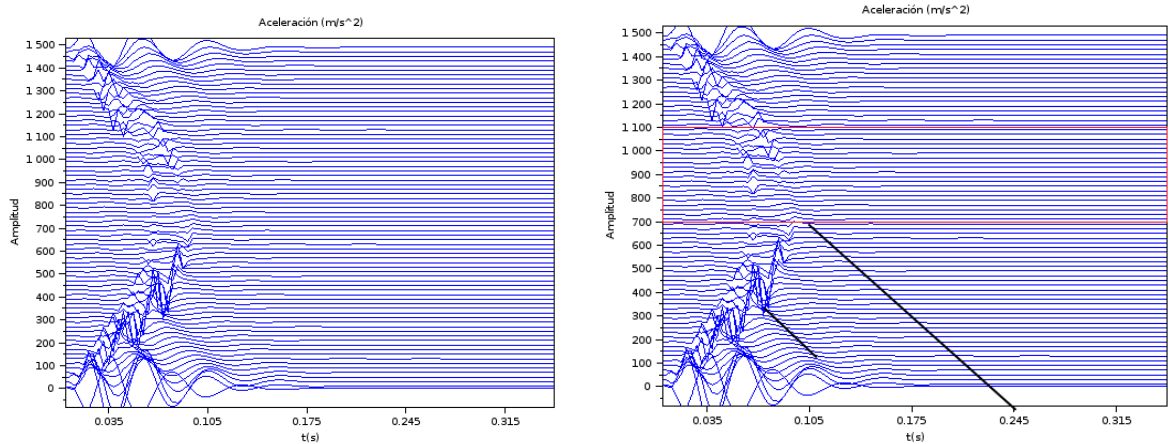


Figura 5.2: *Medida sísmica modelo 1. La guía se encuentra a un lado de la onda, para facilitar su visualización.*

La Figura 5.2 muestra la evolución temporal de la aceleración para las 138 trazas en profundidad simuladas. En primer lugar, se observa claramente una fuerte atenuación de la onda sísmica en la capa intermedia, de menor conductividad, como se esperaba. Se observan, además, dos frentes de onda propagándose en direcciones opuestas (hacia arriba y hacia abajo) a partir de las fronteras del dominio de simulación. Cada uno de ellos está formado por varias crestas que se propagan en paralelo, que corresponden a las varias crestas inducidas por la oscilación de la ondícula de Ricker. Se logra evidenciar unas ondas muy débiles que parten de la frontera entre los dos primeros materiales, a

una profundidad de 400m, y se propagan hacia la superficie (línea gruesa). Al medir la velocidad de estas ondas se recupera la velocidad de propagación de las ondas sísmicas para este primer material, que es de 2800m/s. Esto significa que la simulación permite reproducir el fenómeno estudiado.

La Figura 5.3 corresponde al desplazamiento del sólido, para este mismo modelo. En esta

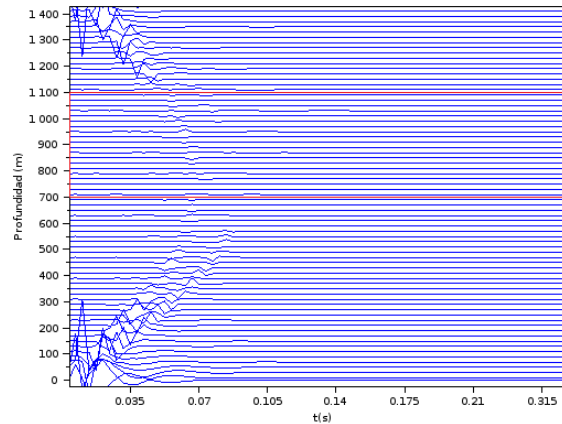


Figura 5.3: Desplazamiento del sólido U_S .

figura no se observan claramente ondas producidas en las interfaces por el fenómeno electrosísmico. Aparecen las ondas generadas por el campo electromagnético, que se propagan a partir de los bordes del dominio de simulación con velocidades mayores a la velocidad del medio para el desplazamiento del sólido. Estas velocidades reflejan el efecto de que las condiciones de estabilidad fueron escogidas para las ondas sísmicas y no para las electromagnéticas.

La resolución vertical del modelo para este caso (según el criterio de Rayleigh, [12]) es

$$R_z = \frac{0,715 * V_s}{2 * f_{max} * 0,9} = 27,805 \quad m \quad , \quad (5.1)$$

es decir que para espesores de capa menores a este valor la respuesta de la onda no se alcanza a detectar correctamente.

5.0.2. Modelo 2

La segunda implementación numérica corresponde a un modelo físico semejante al de cuatro capas descrito en el Capítulo 3, modelo 3.4, que fue modelado con elementos finitos en dos dimensiones, trabajo hecho por G. Späth, P. Gauzellino y F. Zyzerman del Grupo de Geofísica Aplicada de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) [41]. Los parámetros de entrada se listan en la Tabla 5.3. El espacio de simulación tiene 1100m de profundidad. El suelo se divide en cuatro capas, de espesores (sucesivos)

Parámetro	Modelo 2			
	Capa 1	Capa 2	Capa 3	Capa 4
σ (Siemens/m)	0.001	0.1	0.001	0.001
ϕ (-)	0.2	0.25	0.20	0.2
ρ_s (Kg/m ³)	2600	2600	2600	2600
V_s (m/s)	2000	2000	2000	2000
k_0 (m ²)	1×10^{-13}	1×10^{-16}	1×10^{-13}	1×10^{-13}
L_0 (A/Pa.m)	$4,25 \times 10^{-10}$	$6,36 \times 10^{-10}$	$2,66 \times 10^{-11}$	$4,25 \times 10^{-10}$
Q (-)	30	50	30	30
ρ_{bulk} (Kg/m ³)	1000	1000	800	1000
η_{bulk} (Pa.s)	1×10^{-3}	1×10^{-3}	8×10^{-4}	1×10^{-3}
$\epsilon_0 \kappa_0$	40	40	2	40
S_w (-)	1	1	0.25	1

Cuadro 5.3: Parámetros de las propiedades del suelo para el modelo 2.

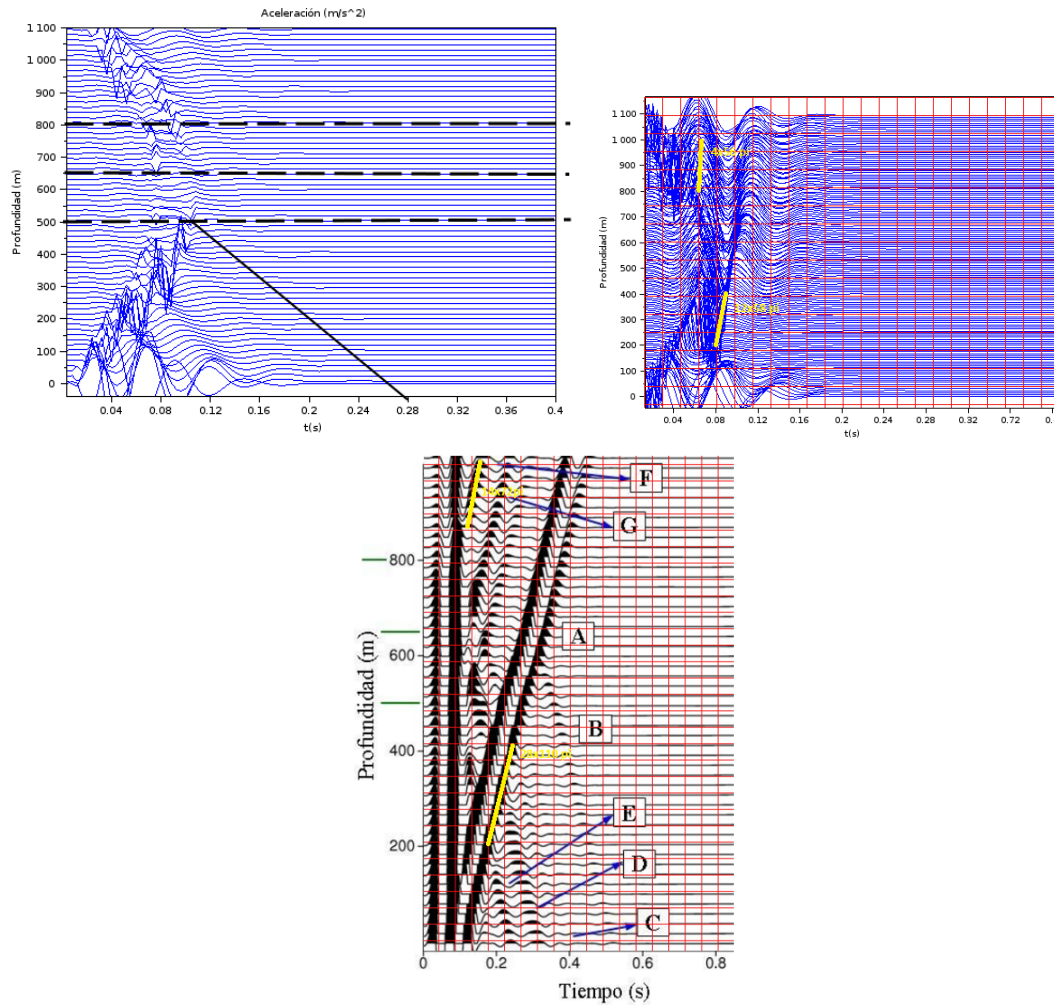


Figura 5.4: Aceleración del desplazamiento relativo (izquierda) y Desplazamiento relativo (derecha) para el modelo de este trabajo y abajo desplazamiento para modelo [41]. La guía se encuentra a un lado de la onda, para facilitar su visualización.

Parámetro	
$f_p(Hz)$	20
N_p	12.5
$\Delta t (s)$	0.004
Sc	1

Cuadro 5.4: Parámetros de la fuente para el modelo 2.

500m, 150m, 150m y 300m en orden de profundidad creciente. La implementación del modelo divide este espacio en 138 nodos, con un espaciado de los acelerómetros de 8m y cuyas señales se analizan en 128 frecuencias en el rango de 0 a 125 Hz. La duración de la simulación para calcularla fué menor a 3min. La fuente es la misma para las dos implementaciones, y sus parámetros se consignan en la Tabla 5.4.

La Figura 5.4 muestra la aceleración (arriba derecha) y el desplazamiento sólido-fluido W_r (arriba izquierda) en función del tiempo para diferentes profundidades, junto con el desplazamiento obtenido por Zyberman et al.,(abajo). Ésta gráfica muestra, el desplazamiento instantáneo inducido por la onda electromagnética y la respuesta de frentes de onda sísmicos al cambio del coeficiente electrocinético en el medio. Al igual que en el modelo 1 los receptores, en este caso acelerómetros, espaciados cada 8m muestran ténue-mente la generación de ondas sísmicas. En esta figura se puede observar a $t = 0,27s$ el arribo a la superficie de una onda sísmica **1** generada por el paso de la capa a 500m de profundidad, que puede compararse con el tiempo de arribo a $t = 0,25s$ para la onda identificada con la letra **E**, visible en la gráfica de Zyberman et al. Más aún, comparando las pendientes de estas dos ondas, se mide una velocidad aproximada de 3465m/s para la onda **1** y de 2910(m/s) para la onda **E**. En contraste, la velocidad de propagación de las ondas sísmicas en este medio es de 2000m/s para los dos casos.

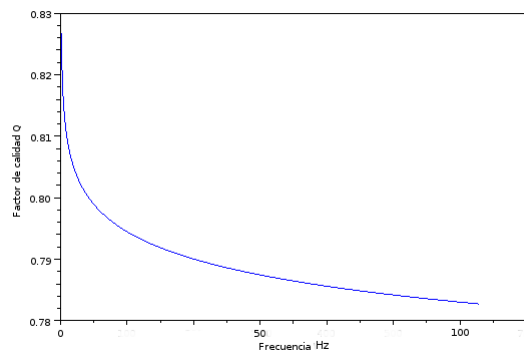


Figura 5.5: Factor de calidad.

Se verifica que para frecuencias entre 0 y 100Hz , el factor de calidad se mantiene entre 73-83, que son valores aceptables ya que permanece prácticamente constante. (Figura 5.5).

La resolución vertical del modelo para este caso es

$$R_z = \frac{0,715 * V_s}{2 * f_{max} * 0,9} = 19,8611 \quad m \quad , \quad (5.2)$$

que para este caso es aceptable ya que los espesores de las capas no son menores a este valor.

Capítulo 6

Conclusiones

- El esquema propuesto en este trabajo permite obtener datos de aceleración que reproducen la aparición de ondas sísmicas inducidas por el fenómeno electrosísmico en las interfaces del medio, con velocidades del orden de las esperadas.
- La perturbación inducida por la propagación vertical de la señal de la onda electromagnética se atenúa como se espera de acuerdo a las propiedades del medio.
- El costo computacional es extremadamente bajo (*procesador Intel Core 2 Duo E8400 2 Cores x 3.0Ghz 6MB L2, Intel 64bit, 1333MHz FSB, bajo la distribución Debian de Linux*). Además, la implementación y documentación realizada, hace accesible un avance en el estudio de este fenómeno por primera vez en Colombia.
- En el desarrollo de este proyecto se logró el diseño de un esquema de diferencias finitas a segundo orden para las ecuaciones de Pride, la implementación correcta de la transformada discreta de Fourier y la solución de un sistema de ecuaciones en variable compleja, entre otros. Todos estos pasos fueron programados de cero en lenguaje C++ dentro de la elaboración de un código propio, específico para esta tesis con la intención que sirva de orientación para trabajos futuros.
- El esquema podría mejorarse aumentando el mallado para que la aparición de las ondas sísmicas inducidas por el fenómeno electrosísmico en las interfaces sea más definida y agregando filtros de pasa banda, para usar rangos mayores de frecuencia.

Este trabajo constituye un nuevo paso en la búsqueda de esquemas numéricos adecuados para la simulación de la propagación de ondas inducidas por el fenómeno electrosísmico. Esperamos que esta experiencia ayude a futuros investigadores a encontrar esquemas cada vez más adecuados para la modelación de este fenómeno de tanta trascendencia en el campo de la exploración de hidrocarburos y en la geofísica en general.

Bibliografía

- [1] AULD, B. A., *Acoustic Fields and Waves in Solids.*, Robert E. Krieger Publishing Co, 1990.
- [2] BIOT, M. A., *Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid.*, Appl. Phys., 27:459 -467, 1956.
- [3] BIOT, M. A., *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range.*, Journal of the Acoustical Society of America, 28(2):161-178, 1956.
- [4] BIOT, M. A., *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. High frequency range.*, Journal of the Acoustical Society of America, 28:179-191, 1956.
- [5] BIOT, M. A., *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media*, J. Appl. Phys., 33:1482 a 1498, 1962.
- [6] BLAU, L. W. AND STATHAM, L., *Method and apparatus for seismic-electric prospecting.*, US Patent No. 2,054,067, 1936.
- [7] BLOCK, G. I. AND HARRIS, J. G., *Conductivity dependence of seismoelectric wave phenomena in fluid-saturated sediments*, J. Geophys. Res., 111(B01304) :doi:10.1029/2005JB003798, 2006.
- [8] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., *Análisis numérico*, Edición 7, 660, 2009.
- [9] BUTLER, K. E., RUSSELL, R. D., KEPIC, A. W. AND MAXWELL, M., *Measurement of the seismoelectric response from a shallow boundary*, Geophysics, 61: 1769, 1996.
- [10] CAICEDO, M. I., MORA, P. J., *Temas de propagación de ondas*, Universidad Simón Bolívar, Venezuela, 2004.
- [11] CHAVES, E. W., *Mecánica del medio continuo.*, Cap. 5, pag. 297, 2009.

- [12] CORDSEN, A., GALBRAITH, M. AND PEIRCE, J., *Planning Land 3-D Seismic Surveys*, Geophysical Developments Series No. 9. Society of Exploration Geophysicists, 2000.
- [13] FABIO I. ZYSERMAN, PATRICIA M. GAUZELLINO, JUAN E. SANTOS., *Finite element modeling of SHTE and PSVTM electroseismics.*, Journal of Applied Geophysics, 72(2010) 79-91, 2010.
- [14] FEYNMAN, RICHARD P., *Lectures on Physics.*, California Institute of Technology, 1963.
- [15] FRENKEL, J., *On the Theory of seismic and Seismoelectric Phenomena in Moist Soils.*, Journal Phys. U.S.S.R. 8,230, 1994.
- [16] HAINES, S.S., PRIDE, S.R., *Seismoelectric numerical modeling on a grid.*, Geophysics, 71(6):57-65, 2006.
- [17] HAN, Q., WANG,Z., *Time-domain simulation of SH-wave-induced electromagnetic field in heterogeneous porous media: A fast finite element algorithm.*, Geophysics, 66(2):448-461, 2001.
- [18] HORNBOSTEL, S.C., THOMPSON, A.H., HALSEY, T.C., RASCHKE, R.A., DAVIS, C.A., *Nonlinear electroseismic exploration.*, US Patent N. 6,664,788 B2, 2003.
- [19] IVANOV, A., *Effect of electrization of earth layers by elastic waves passing through them.*, Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de L'URSS, 24:42-45, 1939.
- [20] LONG, L.T., RIVERS, W.K., *Field measurement of the electroseismic response.*, Geophysics, 40(2):233-245, 1975.
- [21] LANDAU, L.D. Y LIFSHITZ, E.M., *Elasticity Theory.* Pergamon Press, 1982.
- [22] MARTNER, S.T., SPARKS, N.R., *The electroseismic effect.*, Geophysics, 24(2):297-308, 1959.
- [23] MAXWELL, M.T., RUSELL, R.D., KEPIC, A.W., BUTLER, K.E., *Electromagnetic responses from seismically excited targets B: non-piezoelectric phenomena.*, Expl. Geophys, 23, 201-208, 1992.
- [24] NEEV, J. AND YEATTS, F. R., *Electrokinetic effects in fluid-saturated poroelastic media.*, Phys. Rev. B 40, 9135-9141, 1989.
- [25] NOURBEHECHT, B., *Irreversible thermodynamic effects in inhomogeneous media and their applications in certain geoelectric problems.*, Ph.D. thesis, Mass. Inst. Tech., Cambridge, 1963.

- [26] PRESS WILLIAM H. , TEUKOLSKY SAUL A., VETTERLING WILLIAM T. Y FLANNERY BRIAN P. , *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing.*, Cambridge University, 1988-1992.
- [27] PASTOR, M., O.C. ZIENKIEWICZ, AND A.C. CHAN., *Generalized Plasticity and the Modelling of Soil Behavior.*, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 14, pp. 151-190, 1990.
- [28] PAIN, C.C., SAUNDERS, J.H., WORTHINGTON, M.H., SINGER, J.M., STUART-BRUGES, W., MASON, G. AND GODDARD, A., *A mixed finite-element method for solving the poroelastic Biot equations with electrokinetic coupling.*, Geophys. J. Int, 160:592-608, 2005.
- [29] PRIDE, S.R., *Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media.*, Physical Review B, 50:15678 a 15696, 1994.
- [30] PRIDE, S.R., MORGAN, F.D., *Electrokinetic dissipation induced by seismic waves.*, Geophysics, 56(7): 914-925, 1991.
- [31] PRIDE, S.R., HAARTSEN, M.W., *Electroseismic wave properties.*, Journal of the Acoustical Society of America, 100(3):1301-1315, 1996.
- [32] WILLIAM H. PRESS, SAUL A. TEUKOLSKY, WILLIAM T. VETTERLING AND BRIAN P. FLANNERY, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, (Sep 10, 2007)
- [33] RUBINO, J.G., *Atenuación y dispersión de ondas sísmicas en medios porosos saturados altamente heterogéneos.*, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, 2008.
- [34] SANTOS J.E., SHEEN D., *Global an domain.decomposed mixed methods for the solution of Maxwell's equation with application to magnetotellurics.*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 14:263-280,1998.
- [35] SANTOS J.E., SHEEN D., *Finite element methods for the simulation of waves in composite saturated poroviscoelastic materials.*, SIAM J. Number. Anal., 45(1):389-420, 2007.
- [36] SALAGER J.L., *Doble Capa Eléctrica Interfacial.*, Cuaderno FIRP N° S610A, Universidad de lo Andes, Mérida, Venezuela , 1987.
- [37] SALAGER J.L., *Fenómenos Electrocinéticos.*, Cuaderno FIRP N° S611A, Universidad de lo Andes, Mérida, Venezuela , 1988.
- [38] SOTOLONGO, O., VÁSQUEZ, A., LÓPEZ, E. ANTUÑA J. M., *Influencia de las propiedades viscoelásticas en la propagación de ondas sonoras de pequeña amplitud.*, Revista Cubana de Física, Vol. 14, 1996.

- [39] SHEEN, D., *Approximation of electromagnetic fields: Part I. Continuous problems.*, RIMGARC Preprint series, 95-97, Department of Mathematics, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea, submitted to SIAM J. Appl. Math.
- [40] SOKOLNIKOFF., *Análisis Tensorial.*
- [41] SPÄTH, G. E., *Modelado Electrosísmico 1-D.*, Tesis Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas Universidad Nacional de la Plata, Noviembre de 2008.
- [42] TAFLOVE, A., HAGNESS, S.C., *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, London Norwood MA, Artech House, 2000.
- [43] THOMPSON, R.R., *A note on the seismic-electric effect.*, Geophysics, 4:102-105, 1939.
- [44] THOMPSON, A.H., GIST, G.A., *Geophysical applications of electrokinetic conversion.*, The Leading Edge, 12:1169-1173, 1993.
- [45] THOMPSON, A.H., GIST, G.A., *Geophysical prospecting.*, US Patent N. 5,877,995. 1999.
- [46] UDIAS, A. AND MEZCUA, J., *Fundamentos de geofísica.*, Editorial Alhambra Colombiana, Ltda., Bogotá, D.C., 1986.
- [47] WARD, S., HOHMANN, G.W., *Electromagnetic theory for geophysical applications.*, Nabighian, M.N. (Ed.), Electromagnetic Methods in Applied Geophysics. Investigations in Geophysics, vol. 3. SEG, pp. 131-311, 1987.
- [48] WHITE, B.S., *Asymptotic theory of electroseismic prospecting.*, SIAM J. Appl. Math., 65(4):1443-1462, 2005.
- [49] WHITE, B.S., ZHOU, M., *Electroseismic prospecting in layered media.*, SIAM J. Appl. Math., 67(1):69-98, 2006.
- [50] XU, L., *Seismic Wave Propagation and Modelling in Poro-Elastic Media with Mesoscopic Inhomogeneities.*, Department of Physics The University of Adelaide, SA 5005, Australia
- [51] ZIENKIEWICZ, O.C., SHOMI T. , *Dynamic Behaviour of saturated porous media: The generalized Biot formulation and its numerical solutions.*, Int. J. Num. Anal Geomech., 8, 71-96, 1984.