Sobre el Buen Planteamiento de una Ecuación del Tipo r-BO Bidimensional

José Israel Merchán Herrera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2015

Sobre el Buen Planteamiento de una Ecuación del Tipo r-BO Bidimensional

José Israel Merchán Herrera

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.d.,Doctor. Matemática. Guillermo Rodríguez Blanco

Linea de Investigación:
Análisis Matemático
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

Resumen

En este trabajo tratamos el buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ del problema de Cauchy asociado a la ecuación del tipo r-BO bidimensional

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + \varepsilon \mathcal{H}^x u_{xt} + \mathcal{H}^y u_{xy} + u u_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

donde $u(x,y,t)$ es real si x, y, $t \in \mathbb{R}$. También, estableceremos resultados sobre la continuación única, para esta ecuación.

Palabras clave: **Problema de Cauchy, Transformada de Hilbert, Ecuación r-BO, Buen planteamiento local.**

Abstract

In this work we treat the well-posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$ of the Cauchy problem associated to the r-BO type equation

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + \varepsilon \mathcal{H}^x u_{xt} + \mathcal{H}^y u_{xy} + u u_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

where $u(x,y,t)$ is real if x, y, $t \in \mathbb{R}^2$. Also, we establish results over unique continuation, for this equation.

Keywords: **Cauchy problem, Hilbert Transformation, r-BO equation, Local and well-posedness.**

Contenido

Resumen **III**

Abstract **IV**

Introducción **VI**

1. Preliminares **1**

2. El Problema Local **8**
2.1. Existencia 14
2.2. Dependencia continua 16
2.3. Unicidad 17
2.4. Cantidades Conservadas 18

3. Teoría en espacios de Sobolev con pesos **20**

Bibliografía **36**

Introducción

En este trabajo trataremos con el buen planteamiento tanto local como global en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación r-BO

$$u_t + \varepsilon \mathcal{H}^x u_{xt} + \mathcal{H}^y u_{xy} + u u_x = 0$$

Específicamente, estudiaremos el buen planteamiento del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)) \\ u_t + \varepsilon \mathcal{H}^x u_{xt} + \mathcal{H}^y u_{xy} + u u_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{0.1}$$

donde $u(x,y,t)$ es una función a valor real con x, y, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}^x$ y $\mathcal{H}^y$ en (0.1) denotan las transformadas de Hilbert en la variable x y y respectivamente y se definen a través de la transformada de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{H}^x f}(\xi,\eta) := -isgn(\xi)\widehat{f}(\xi,\eta), \ \widehat{\mathcal{H}^y f}(\xi,\eta) := -isgn(\eta)\widehat{f}(\xi,\eta)$$

$$\xi, \eta \in \mathbb{R}$$

donde

$$sgn(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi = 0 \\ -1, & \xi < 0, \\ 1, & \xi > 0. \end{cases}$$

Con el fin de tratar el buen planteamiento de (0.1) usaremos una ecuación integral equivalente y el teorema del punto fijo de Banach en un espacio adecuado, lo que nos permitirá obtener el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 1$, posteriormente analizaremos el comportamiento de las soluciones en espacios con peso. Recientemente Iorio ([11]), Ponce-Fonseca ([7]) han obtenido resultados interesantes de continuación única para la BO, por tal razón esperamos obtener resultados similares para esta ecuación.

La ecuación en (0.1) es una regularización de la ecuación del tipo Benjamin-Ono bidimensional ($\varepsilon = 0$), la cual modela fenomenos físicos que ocurren en la teoría de fluidos ([5],[16]) y el problema del buen planteamiento fue tratado por Milanes en [15]. Introduciremos el término regularizado con el fin de analizar el comportamiento de las soluciones en ciertos espacios con peso.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Notación

En este capítulo se introducirán algunas notaciones básicas, además de algunas definiciones y resultados útiles para el desarrollo del trabajo. Las demostraciones serán omitidas, sin embargo se dará una referencia donde se puedan encontrar.

- $\mathscr{B}(X,Y)$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y.
- $\mathscr{B}(X)$=$\mathscr{B}(X,X)$.
- $C([0,T],X)$ es el espacio de Banach de las funciones continuas de $[0,T]$ en el espacio de Banach X, dotado de la norma $\|u\|_{X,\infty} = \sup_{[0,T]}\|u(t)\|_X$
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice.
- Si α es un multi-índice y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

  a) $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

  b) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$

  c) $\partial^\alpha = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$

- $\Lambda^s = (1 - \triangle)^{\frac{s}{2}}$
- $L^p_s = L^p_s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s} L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\| \quad \|_{L^p_s} = | \quad |_{s,p}$

Definición 1.1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función $\mathscr{F} f = \widehat{f}$ definida por*

$$(\mathscr{F} f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ y

$$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$$

es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2. *El espacio de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las $f \in \mathscr{P}$ tales que*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

El espacio de Schwartz es también conocido como el espacio de decrecimiento rápido de las funciones en $\mathscr{P}$.

Proposición 1.1. *Con la métrica,*

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}{1 + \|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}$$

el espacio de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio métrico completo.

Teorema 1.1. *La transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.*

Demostración. Véase [11] Teorema 7.42. ■

Definición 1.3. *Se define $\mathscr{S}'$, el espacio de las distribuciones temperadas, como el dual topológico de $\mathscr{S}$.*

Teorema 1.2. *Un funcional lineal f en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pertenece a $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existen constantes $C \geq 0$ y $l \in \mathbb{N}$, tal queda*

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq l} \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Véase [11] Teorema 7.7. ■

Observación 1.1. *En el caso de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, las funciones en L^p definen distribuciones en el sentido usual, es decir, dada una función en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, la fórmula*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

define un elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Por supuesto, no todas las distribuciones se definen de esta forma y la δ_x, es un ejemplo de ello. Por simplicidad se escribe $T_f = f$.

Definición 1.4. *La transformada de Fourier $\widehat{f}$ de una distribución temperada $f \in \mathscr{S}'$ es definida por*

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.3. *La transformada de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.*

Demostración. Véase [11] Teorema 7.48. ■

Definición 1.5. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sobolev (del tipo L^2) en $\mathbb{R}^n$ son los siguientes subconjuntos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,/\, (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Teorema 1.4. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno*

$$(f \,|\, g)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

Además se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s \geq r$, *donde* $\hookrightarrow$ *denota contenencia continua y densa.*

2. $\left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)'$, *el dual topológico de* $H^s(\mathbb{R}^n)$, *es isométricamente isomorfo a* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$.

3. $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, *si y solo si* $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *para todos los multi-índices* α *tales que* $|\alpha| \leq m$. *En este caso, las normas*

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \quad y \quad |||f|||_s = \left(\sum_{j=0}^{m} \|\partial^\alpha f\|_0^2\right)^{1/2}$$

   son equivalentes.

4. *El Lema de Sobolev se cumple, es decir,* $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s > \frac{n}{2}$, *donde* $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ *denota el conjunto de todas las funciones continuas que tienden a cero en el infinito.*

Demostración. Véase [11] Teorema 7.75. ■

Teorema 1.5. $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es un álgebra de Banach para todo* $s > \frac{n}{2}$. *En particular, existe una constante* $c_s \geq 0$ *tal que*

$$\|f\, g\|_s \leq c_s \|f\|_s \|g\|_s \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Véase [11] Teorema 7.77. ■

Definición 1.6. *Sea* H *un espacio de Hilbert. Un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en* H *es una aplicación* $t \in \mathbb{R} \longmapsto U(t) \in \mathscr{B}(H)$ *tal que:*

1. U *es unitario para todo* $t \in \mathbb{R}$,

2. $U(t+t') = U(t)U(t')$, *para todo* $t, t' \in \mathbb{R}$,

3. $\lim_{t \to t'} \|U(t)\phi - U(t')\phi\|_H = 0$, *para todo* $t, t' \in \mathbb{R}$, *y* $\phi \in H$.

Definición 1.7. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una Contracción es una aplicación* $T : X \longrightarrow X$ *tal que:* $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$ *y* $\lambda \in [0, 1]$. *Si* $\lambda < 1$ *se dice que* T *es una contracción estricta.*

Teorema 1.6 (**Teorema del punto fijo de Banach**). *Sea X un espacio métrico completo y $T : X \longrightarrow X$ es una contracción estricta, entonces T tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$.*

Teorema 1.7 (**Desigualdad de Gronwall**). *Sea $k \in L^1([a,b])$ con $k \geq 0$ y $f, g \in C([0,T],\mathbb{R})$ tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)f(s)ds, \quad a \leq t \leq b$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)e^{\left[\int_a^s k(r)dr\right]}g(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

En particular si g es constante, se tiene:

$$f(t) \leq g(t)e^{\left[\int_a^t k(s)ds\right]}, \quad a \leq t \leq b.$$

Teorema 1.8 (**Desigualdad de Young**). *Sean $a, b \geq 0$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces se cumple*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.9 (**Kato-Ponce**). *Sean $s > 0$ y $1 < p < \infty$, entonces $L^p_s \cap L^\infty$ es un álgebra de Banach. Además*

$$|fg|_{s,p} \leq c\big(\|f\|_{L^\infty}|g|_{s,p} + |f|_{s,p}\|g\|_{L^\infty}\big).$$

Demostración. Ver [12] ■

Observación 1.2. *Dado que $\|\Lambda^s u^n\|_0 = \|\Lambda^s u^{n-1}u\|_0 = |u^{n-1}u|_{0,2}$, si hacemos $f = u^{n-1}$ y $g = u$ en el teorema anterior, y lo aplicamos sucesivas veces se obtiene*

$$\|\Lambda^s u^{n-1}u\|_0 \leq c\|u\|^{n-1}_{L^\infty}\|\Lambda^s u\|_0. \tag{1.1}$$

Definición 1.8. *Una función positiva $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ es llamada un peso admisible si cumple las siguientes condiciones:*

1. *$\rho(x,y) \geq 1$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;*

2. *Si* $|(x,y)| \to \infty$ *entonces* $|\rho(x,y)| \to \infty$

3. $|\nabla\rho(x,y)| \leq c\rho^2(x,y)$, *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Observación 1.3. *Es facil ver que las fuciones* ρ *definidas por* $\rho(x,y) = (1+x^2+y^2)^{\frac{r}{\nu}}$ *y* $\rho(x,y) = (1+x^{2r_1}+y^{2r_2})^{\frac{1}{\nu}}$, *con* $\nu > 0$, $r > 0$, $r_j > 0$, $j = 1,2$ *son pesos admisibles.*

En lo que sigue ρ denotará un peso adimisible y escribiremos $H^s = H^s(\mathbb{R}^2)$. Consideremos

$$H^s(\rho^\nu) = H^s \cap L^2(\rho^\nu), s \geq 0, v > 0$$

donde $L^2(\rho^\nu)$ denota el espacio de todas las funciones medibles a valor real tales que

$$\|f\|_{L^2(\rho^\nu)} = \left(\int f^2(x,y)\rho^\nu(x,y)dxdy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Estos espacios de Hilbert estan provistos con el producto interno

$$(f,g)_{H^s(\rho^\nu)} = (f,g)_s + (f,g)_{L^2(\rho^\nu)}$$

y estos poseen la siguiente propiedad de interpolación:

Teorema 1.10. *Sean* $s \geq 0$, $\nu \geq 2s$, $0 \leq j \leq s$, $j \in \mathbb{Z}$ *y* $\chi_j = \nu(1 - \frac{j}{s})$. *Entonces existe un numero positivo* c *tal que para toda* $f \in H^s(\rho^\nu)$

$$\sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^2, |\alpha|=j} \int \rho^{\chi_j}(x,y)|D^\alpha f(x,y)|^2 dxdy \leq c\|f\|^2_{H^s(\rho^\nu)}.$$

Demostración. Ver [18] Capitulo 3 ■

En el caso de $\rho^\nu(x,y) = (1+x^2+y^2)^r$ escribiremos $H^s(\rho^\nu) = \Im_{s,r}$, con $\|\cdot\|_{H^s(\rho^\nu)} = \|\cdot\|_{s,r}$. De manera similar para $\rho^\nu(x,y) = (1+x^{2r_1}+y^{2r_2})$ escribiremos $H^s(\rho^\nu) = \Im_{s,r_1,r_2}$, con $\|\cdot\|_{H^s(\rho^\nu)} = \|\cdot\|_{s,r_1,r_2}$.
Las siguientes proposiciones son consecuencia del teorema anterior

Proposición 1.2. *Sean* $\mathbf{x} = (x,y)$, $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}^+)^2$, $|\alpha| + |\beta| \leq k$, $k \in \mathbb{N}$ *y* $\varphi \in \Im_{k,k}$, *entonces*

$$\|\mathbf{x}^\beta D^\alpha \varphi\| \leq c(|\alpha|)\|\varphi\|_{k,k}$$

Demostración. Se obtiene como consecuencia del teorema anterior, en efecto

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}^{\beta}D^{\alpha}\varphi\|^2 &= \int \mathbf{x}^{\beta}|D^{\alpha}\varphi(x,y)|^2dxdy\\ &\leq \int (1+x^2+y^2)^k|D^{\alpha}\varphi(x,y)|^2dxdy\\ &= \int \rho^{\nu}(x,y)|D^{\alpha}\varphi(x,y)|^2dxdy\\ &\leq c(|\alpha|)\|\varphi\|^2_{k,k}\end{aligned}$$

■

Proposición 1.3. *Sean* $\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^2$, $\beta \in \mathbb{Z}^+$, $|\alpha|+\beta \leq k$, $k \in \mathbb{N}$ *y* $\varphi \in \Im_{k,1,k}$, *entonces*

$$\|y^{\beta}D^{\alpha}\varphi\| \leq c(|\alpha|)\|\varphi\|_{k,1,k}$$

Demostración. Se obtiene como consecuencia del teorema anterior, en efecto

$$\begin{aligned}\|y^{\beta}D^{\alpha}\varphi\|^2 &= \int y^{\beta}|D^{\alpha}\varphi(x,y)|^2dxdy\\ &\leq \int (1+x^2+y^{2k})|D^{\alpha}\varphi(x,y)|^2dxdy\\ &= \int \rho^{\nu}(x,y)|D^{\alpha}\varphi(x,y)|^2dxdy\\ &\leq c(|\alpha|)\|\varphi\|^2_{k,1,k}\end{aligned}$$

■

CAPÍTULO 2

El Problema Local

En este capítulo consideraremos el buen planteamiento local del problema de Cauchy asociado a la ecuación (0.1), en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$

Los resultados que se obtienen a continuación serán necesarios para crear las condiciones adecuadas para el buen planteamiento local de la ecuación. Para comenzar nótese que la ecuación en (0.1) es equivalente a

$$u_t = -\left(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x\right)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}u - \frac{1}{2}\left(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x\right)^{-1}\partial_x u^2. \tag{2.1}$$

Por comodidad escribiremos

$$A = -(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy} \text{ y } f(u) = -\frac{1}{2}(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\partial_x u^2 \tag{2.2}$$

Lema 2.1. *Para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\frac{\xi^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$*

Demostración. Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon|\xi| &\leq 1+\varepsilon|\xi| \\
\varepsilon^2\xi^2 &\leq (1+\varepsilon|\xi|)^2 \\
\frac{1}{(1+\varepsilon|\xi|)^2} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2\xi^2} \\
\frac{\xi^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^2} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.1. *Si $\varepsilon > 0$, $s > 1$ y $u^2 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ entonces, $f(u) \in H^s(\mathbb{R}^2)$*

Demostración. Sea $f(u) = -\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x\right)^{-1}\partial_x u^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f(u)\|_s^2 &= \left\|\left(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x\right)^{-1}\partial_x u^2\right\|_s^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}\left(1+\xi^2+\eta^2\right)^s \left|\widehat{u^2}(\xi,\eta,t)\right|^2 d\xi d\eta \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(1+\xi^2+\eta^2\right)^s \left|\widehat{u^2}(\xi,\eta,t)\right|^2 d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|u^2\right\|_s^2 \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\|u\|_s^2\|u\|_s^2 \\
\|f(u)\|_s^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\|u\|_s^2\|u\|_s^2
\end{aligned}$$

Como $H^s(\mathbb{R}^2)$ es un álgebra de Banach para $\varepsilon > 0$, $s > 1$, $u^2 \in H^s$ y como probamos $\|f(u)\|_s^2 < \infty$.

Se define la función $f : H^s \to H^s$ como $f(u) = -\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x\right)^{-1}\partial_x u^2$, se observa que para $u \in H^s$, $f(u) \in H^s$, si $s \geq 1$.

■

Proposición 2.2. *La función f(u) definida en (2.2) satisface la condición de Lipschitz local*

Demostración. Para efectos de la demostración se tienen en cuenta dos hechos importantes

(*i*) si $s > 1$, entonces el Teorema 1.4−(4) implica que

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{L^1} \leq c\|f\|_s, \quad f \in H^s.$$

(*ii*) Si $s > 1$, entonces el Teorema 1.5 implica que existe $c_s \geq 0$ constante tal que

$$\|fg\|_s \leq c_s\|f\|_s\|g\|_s, \quad \forall f, g \in H^s.$$

Entonces si $u, v \in H^s$ y $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\|u^2 - v^2\|_s &= \|(u-v)(u+v)\|_s \\ &\leq c_s\|u-v\|_s\|u+v\|_s \\ &\leq c_s\|u-v\|_s\big(\|u\|_s + \|v\|_s\big)\end{aligned}$$

Sea $K = c_s$, entonces

$$\|u^2 - v^2\|_s \leq c_s\|u-v\|_s\big(\|u\|_s + \|v\|_s\big).$$

Sea

$$\big(L(\|u\|_s, \|v\|_s)\big)^{1/2} = K \sup_{t\in[0,T]} (\,\|u\|_s + \|v\|_s),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|f(u) - f(v)\|_s &= \|\partial_x(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}(u^2 - v^2)\|_s \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\|u^2 - v^2\|_s \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}L(\|u\|_s, \|v\|_s)\|u - v\|_s. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Nótese que $L(\cdot,\cdot)$ es no decreciente respecto a cada uno de sus argumentos, teniéndose de (2.3) la condición de Lipschitz local. ■

Proposición 2.3. *Sea* $A = -(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}$, *entonces la aplicación* $t \in \mathbb{R} \longmapsto E(t) = e^{tA}$ *es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro en* $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. La aplicación $E(t)$ también puede expresarse de la siguiente manera

$$E(t)\varphi = e^{tA}\varphi = \left(e^{-\frac{i\xi|\eta|t}{1+\varepsilon|\xi|}}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}, \quad \varphi \in H^s, t \in \mathbb{R}$$

sea $b(\xi,\eta) = \dfrac{-i\xi|\eta|}{1+\varepsilon|\xi|}$ entonces

$$E(t) = e^{tA}\varphi = \left(e^{b(\xi,\eta)t}\widehat{\varphi}\right)^{\vee},$$

$E(t)$ cumple con las siguientes condiciones:

1. $E(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\|e^{tA}\varphi\|_s = \left\|\left(e^{b(\xi,\eta)t}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}\right\|_s = \|\varphi\|_s \tag{2.4}$$

2.

$$\begin{aligned} E(t+t')\varphi &= e^{(t+t)A'}\varphi \\ &= e^{tA+t'A}\varphi \\ &= e^{tA}e^{t'A}\varphi \\ &= E(t)E(t')\varphi \end{aligned}$$

entonces $E(t+t') = E(t)E(t')$.

3. Dado $\mu > 0$ la aplicación $t \in [\mu,\infty) \longmapsto E(t)\varphi$ es uniformemente continua con respecto a la norma H^s.

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^s|e^{tb(\xi,\eta)} - e^{t'b(\xi,\eta)}|^2|\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^s|e^{(t-t')b(\xi,\eta)} - 1|^2|\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por el teorema del valor medio se tiene

$$|e^{(t-t')b(\xi,\eta)} - 1| = |b(\xi,\eta)e^{\tau b(\xi,\eta)}||t-t'| = \frac{|\xi||\eta|}{1+\varepsilon|\xi|}|t-t'| \leq \frac{|\eta|}{\varepsilon}|t-t'|.$$

Entonces

$$|e^{(t-t')b(\xi,\eta)} - 1|^2 \leq \frac{\eta^2}{\varepsilon^2}|t-t'|^2.$$

La ecuación (2.5) queda

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^s |t-t'|^2 |\widehat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \\ &\leq \frac{\eta^2}{\varepsilon^2}|t-t'|^2\|\varphi\|_s^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

haciendo $t \to t'$ en (2.6) se tiene que $\|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s \to 0$. En particular

$$\lim_{t\to t'} \quad \|E(t)\varphi - E(t')\varphi\|_s = 0.$$

■

Por comodidad, el problema de Cauchy dado por la ecuación (0.1), lo escribiremos de la siguiente forma

$$\begin{cases} \quad u_t = Au + f(u) \\ u(0) = \varphi \in H^s. \end{cases} \tag{2.7}$$

Por el método de variación de parámetros se puede identificar una posible solución para $s > 1$, dada por

$$u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau, \tag{2.8}$$

en la cual por (2.2) y (2.4) se tiene que $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\big)$.

Proposición 2.4. *Sea $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\big)$ con $s > 1$, una solución de (2.7), entonces u satisface (2.8). Recíprocamente, si $u \in C\big([0,T], H^s(\mathbb{R}^2)\big)$ es una solución de (2.8), entonces $u \in C^1\big([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^2)\big)$ y satisface (2.7) con derivada*

$$\lim_{h\to 0} \quad \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - Au - f(u) \right\|_{s-1} = 0 \tag{2.9}$$

Demostración. Si u satisface (2.7), en $s-1$ variación de parámetros implica que u satiface (2.8).

Recíprocamente, sea u tal que satisface (2.8). Derivando a ambos lados con respecto al tiempo se tiene

$$\partial_t u(t) = Ae^{tA}\varphi + \partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau. \tag{2.10}$$

donde la derivada es tomada en la topología de $s-1$.
Consideremos la integral de el lado derecho de (2.10)

$$\begin{aligned}\partial_t \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau = \lim_{h\to 0} \quad & \frac{1}{h}\Big\{\int_0^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \quad - \\ & \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau\Big\} \\ = \lim_{h\to 0} \quad & \frac{1}{h}\Big\{\int_0^t \Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau \quad + \\ & \int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau\Big\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por un lado se tiene el valor principal de una función continua, es decir

$$\lim_{h\to 0} \quad \Big\| \int_t^{t+h} e^{(t+h-\tau)A} f(u(\tau))d\tau - f(u(t)) \Big\|_{s-1} = 0. \tag{2.12}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \quad & \frac{1}{h}\int_0^t \Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau \\ & = \int_0^t \lim_{h\to 0} \quad \frac{1}{h}\Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau \\ & = \int_0^t \partial_t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \\ & = \int_0^t Ae^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau \\ & = A\int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si de la ecuación (2.8) despejamos la integral, se obtiene

$$\lim_{h\to 0} \quad \frac{1}{h}\int_0^t \Big[e^{(t+h-\tau)A} - e^{(t-\tau)A}\Big] f(u(\tau))d\tau = A\big(u(t) - e^{tA}\varphi\big). \tag{2.14}$$

De las ecuaciones (2.11),(2.12) y (2.14), la ecuación (2.10) queda

$$\begin{aligned}\partial_t u(t) &= Ae^{tA}\varphi + A\big(u(t) - e^{tA}\varphi\big) + f(u(\tau))\\ \partial_t u(t) &= Au(t) + f(u(t)).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Haciendo $t = 0$ en (2.8), se tiene que $u(0) = \varphi$. Se concluye entonces que u satisface (2.7).

■

2.1. Existencia

Proposición 2.5. *Para $T > 0$ y $M > 0$ definimos el conjunto*

$$\mathfrak{X}_s(T, M) = \{u \in C\big([0, T], H^s(\mathbb{R}^2)\big) \;\big|\; \|u(t) - e^{tA}\varphi\|_s \leq M\},$$

dotado de la métrica

$$d_{s,T}(u, v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\| = \|u(t) - v(t)\|_{s,\infty}.$$

Entonces, $(\mathfrak{X}_s, d_{s,T})$, es un espacio métrico completo.

Demostración. El conjunto $\mathfrak{X}_s(T, M)$ es un subconjunto cerrado de $C([0, T], H^s(\mathbb{R}^2))$ el cual es completo con la métrica $d_{s,T}$, que es precisamente la inducida por la norma $\|u\|_{s,\infty}$. Por lo tanto $(\mathfrak{X}_s, d_{s,T})$ es un espacio métrico completo. ■

Teorema 2.1. *La función definida por*

$$F(u)(t) := u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau, \tag{2.16}$$

es una contracción y además existe al menos una solución al problema (2.7).

Demostración. La idea es aplicar el principio de contracción de Banach a la función definida en (2.16) en el espacio de la proposición 2.5. Con esto en mente, sean $M \geq 0$, y $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\begin{aligned}\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s &\leq \int_0^t \|e^{(t-\tau)A} f(u)\|_s d\tau\\ &\leq \int_0^t \|f(u)\|_s d\tau\\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t L(\|u\|_s, 0)\,\|u(\tau)\|_s d\tau \quad \text{, por (2.3)}\end{aligned}$$

si $u \in \mathfrak{X}_s(T, M)$, por (2.4)

$$\|u(\tau)\|_s \leq \|u(\tau) - e^{\tau A}\varphi\|_s + \|e^{\tau A}\varphi\|_s \leq M + \|\varphi\|_s$$

Luego, si $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s &\leq \frac{1}{\varepsilon} L(\|u\|_s, 0)\,(M + \|\varphi\|_s)t \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)T\end{aligned}$$

Sea $\alpha(M,\, \|\varphi\|_s) = [\frac{1}{\varepsilon}\, L(M + \|\varphi\|_s, 0)(M + \|\varphi\|_s)\,]^{-1} M$. Si $0 < T < \alpha(M,\, \|\varphi\|_s)$, entonces se tiene

$$\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_s \leq M \tag{2.17}$$

es decir, $F(u)(t) \in \mathfrak{X}_s(T, M)$.

Veamos ahora que F es una contracción. Dados $u, v \in \mathfrak{X}_s$

$$\begin{aligned}\|F(u)(t) - F(v)(t)\|_s &\leq \int_0^t \|e^{(t-\tau)A}(f(u) - f(v))\|_s d\tau \\ &\leq \int_0^t \|f(u) - f(v)\|_s d\tau \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} L(\|u\|_s,\, \|v\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, d_{S,T}(u, v)\, T\end{aligned}$$

Sea $\beta(M,\, \|\varphi\|_s) = [\frac{1}{\varepsilon}\, L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\,]^{-1}$. Si se tienen las opciones

$$0 < T < \alpha(M,\, \|\varphi\|_s) < \beta(M,\, \|\varphi\|_s) \quad \text{ó}$$

$$0 < T < \beta(M,\, \|\varphi\|_s) < \alpha(M,\, \|\varphi\|_s)$$

en cualquier caso se cumple que

$$0 < \frac{1}{\varepsilon} L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, T < 1.$$

Si hacemos $\lambda = \frac{1}{\varepsilon} L(M + \|\varphi\|_s\,, M + \|\varphi\|_s)\, T$ y $\widetilde{T} = \widetilde{T}(M,\, \|\varphi\|_s) = \min(\alpha, \beta)$, se cumple que

$$d_{s,\widetilde{T}}\,(F(u)(t), F(v)(t)) \leq \lambda\, d_{s,\widetilde{T}}\,(u, v), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Por lo tanto F es una contracción. Aplicando el Teorema del punto fijo de Banach, existe $u \in \mathfrak{X}_s$ tal como lo indica en la ecuación (2.8), es decir

$$u(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(u(\tau))d\tau.$$

Esto garantiza la existencia de soluciones para el problema de Cauchy (2.7). ■

2.2. Dependencia continua

Teorema 2.2. *La función $\varphi \longmapsto u$ es continua.*

Demostración. Sea $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que cada φ_n es una condición inicial del problema de Cauchy (2.7) y además $\varphi_n \xrightarrow{H^s} \varphi$. Sea también $u_n \in C([0, \widetilde{T}_n), H^s(\mathbb{R}^2))$ la solución correspondiente a φ_n, donde $\widetilde{T}_n = \widetilde{T}(M, \|\varphi_n\|_s)$.
Sea $\widetilde{T}_\infty = \widetilde{T}(M, \|\varphi\|_s)$ tal que $0 < T < \widetilde{T}_\infty$. Sabemos que $\widetilde{T}$ depende tanto de α como de β y estas a su vez de $L(\cdot|\cdot)$, la cual es continua, por tanto $\widetilde{T}$ lo es también, luego, si $n \to \infty$, $\widetilde{T}_n \to \widetilde{T}_\infty$, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < T < \widetilde{T}_n$, para todo $n \geq N$.
Esto indica que $u_n \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^2))$, para todo $n \geq N$ y además por (2.17) $u_n \in \mathfrak{X}_s(T, M)$, cumpliéndose también que

$$\|u_n(\tau)\|_s \leq M + \|\varphi_n\|_s \leq M + K, \quad \text{donde} \quad K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_s, \quad 0 < \tau < T.$$

ahora, sea u_∞ la solución correspondiente a φ. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s + \int_0^t \|f(u_n(\tau)) - f(u_\infty(\tau))\|_s d\tau \\
\leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s + \frac{1}{\varepsilon} L(\|u_n\|_s, \|u_\infty\|_s) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau \\
\leq & \|\varphi_n - \varphi\|_s + \frac{1}{\varepsilon} L(M_s(u_n, u_\infty), M_s(u_n, u_\infty)) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau
\end{aligned}$$

donde

$$M_s(u_n, u_\infty) = \text{máx}\left\{\sup_{[0,T]} \|u_n(t)\|_s, \sup_{[0,T]} \|u_\infty(t)\|_s\right\} \leq M + K$$

por tanto

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s \leq \|\varphi_n - \varphi\|_s + \frac{1}{\varepsilon} L(M+K, M+K) \int_0^t \|u_n - u_\infty\|_s d\tau$$

si aplicamos ahora la desigualdad de Gronwall

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s \, e^{\frac{1}{\varepsilon} L(M+K, M+K)t} \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s \, e^{\frac{1}{\varepsilon} L(M+K, M+K)T} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \sup_{n \in N} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_s \, e^{\frac{1}{\varepsilon} L(M+K, M+K)T} \\ \lim_{n \to \infty} \sup_{n \in N} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_s &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

se concluye entonces la dependencia continua. ■

2.3. Unicidad

Teorema 2.3. *La función definida en (2.8) es la única solución al problema (2.7).*

Demostración. Supóngase que u y v son soluciones del problema de Cauchy (2.7) con condiciones iniciales φ y ψ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_s &\leq \|\varphi - \psi\|_s + \int_0^t \|f(u(\tau)) - f(v(\tau))\|_s d\tau \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_s + \frac{1}{\varepsilon} L(\|u\|_s, \|v\|_s) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_s d\tau \end{aligned}$$

luego por la desigualdad de Gronwall

$$\|u(t) - v(t)\|_s \leq \|\varphi - \psi\|_s \, e^{\frac{1}{\varepsilon} L(\|u\|_s, \|v\|_s)t}. \tag{2.19}$$

Entonces si $\varphi = \psi$ se tiene que $u = v$ y por tanto la unicidad.

■

Corolario 2.1. *Para $s > 1$, el problema de Cauchy (2.7) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración: Es consecuencia de los teoremas 2.1, 2.2 y 2.3. ■

2.4. Cantidades Conservadas

Proposición 2.6. *Suponga $\varphi \in H^s$ con $s > 1$ y sea $u \in C([-T,T], H^s)$ la correspondiente solución del problema de Cauchy (0.1) entonces*

$$\|(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u\|_0^2 = \|(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)\varphi\|_0^2$$

Demostración. De la ecuación 0.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u_t + \mathcal{H}^y\partial_{xy}u &= -\frac{1}{2}\partial_x u^2 \\
(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u_t u + (\mathcal{H}^y\partial_{xy}u)u &= -\frac{1}{2}\partial_x u^2 u \\
\int (1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u_t u + \langle \mathcal{H}^y\partial_{xy}u, u\rangle &= -\frac{1}{2}\int \partial_x u^2 u \\
\int (1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u_t u &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u_t u &= \int (1+\varepsilon|\xi|)\widehat{u}_t(\xi,\eta,t)\overline{\widehat{u}(\xi,\eta,t)}d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2}\partial_t \int (1+\varepsilon|\xi|)^{\frac{1}{2}}\widehat{u}(\xi,\eta,t)(1+\varepsilon|\xi|)^{\frac{1}{2}}\overline{\widehat{u}(\xi,\eta,t)}d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2}\partial_t \|(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u\|_0^2
\end{aligned}$$

Así tenemos

$$\frac{1}{2}\partial_t \|(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u\|_0^2 = 0$$

por lo tanto

$$\|(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u\|_0^2 = \|(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)\varphi\|_0^2$$

$$\|(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)u\|_0^2 \approx \|u\|_0^2 + \|D_x^{\frac{1}{2}}u\|_0^2$$

■

Proposición 2.7. *Suponga $\varphi \in H^s$ con $s > 1$ y sea $u \in C([-T,T], H^s)$ la correspondiente solución del problema de Cauchy (0.1) entonces*

$$\|u(t)\|_{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\frac{1}{2}}$$

Demostración. De la ecuación (0.1) se tiene que

$$u_t = -(1+\varepsilon\mathcal{H}^x\partial_x)^{-1}\partial_x\left[\mathcal{H}^y\partial_y u + \frac{1}{2}u^2\right] \tag{2.20}$$

Ahora tomemos

$$I'(u) = \mathcal{H}^y\partial_y u + \frac{1}{2}u^2$$

$$I'(u) = D_y u + \frac{1}{2}u^2$$

donde, $D_y u = (|\eta|\widehat{u})^\vee$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I(u) &= \int \frac{(D_y^{\frac{1}{2}}u)^2}{2} + \frac{1}{6}u^3 \\
\frac{d}{d\delta}I(u+\delta v)\mid_{\delta=0} &= \frac{d}{d\delta}\Big(\int \frac{(D_y^{\frac{1}{2}}u + \delta D_y^{\frac{1}{2}}v)^2}{2} + \frac{1}{6}(u+\delta v)^3\Big)\mid_{\delta=0} \\
&= \Big(\int (D_y^{\frac{1}{2}}u + \delta D_y^{\frac{1}{2}}v)D^{\frac{1}{2}}v + \frac{1}{2}(u+\delta v)^2 v\Big)\mid_{\delta=0} \\
&= \int D_y^{\frac{1}{2}}u D_y^{\frac{1}{2}}v + \frac{1}{2}u^2 v \\
&= \int (D_y u + \frac{1}{2}u^2)v \\
&= \langle I'(u), v\rangle
\end{aligned}$$

■

CAPÍTULO 3

Teoría en espacios de Sobolev con pesos

En este capítulo estudiaremos el problema (0.1) en los espacios de Sobolev con pesos $\Im_{s,r} = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2_r(\omega_r^2 dxdy)$, donde $\omega_r(x,y) = (1+x^2+y^2)^{\frac{r}{2}}$ pues las normas de estos espacios forman un sistema fundamental de seminormas para $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$.

Lema 3.1. *Sea* $F(t,\xi,\eta) = e^{b(\xi,\eta)t}$ *donde* $b(\xi,\eta) = \dfrac{i\xi|\eta|}{1+\varepsilon|\xi|}$. *Entonces,*

$$\partial_\xi F(t,\xi,\eta) = \frac{i|\eta|t}{(1+\varepsilon|\xi|)^2} F(t,\xi,\eta) \tag{3.1}$$

$$\partial_\xi^2 F(t,\xi,\eta) = \frac{(i|\eta|t)^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^4} F(t,\xi,\eta) - \frac{2\varepsilon(i|\eta|t)\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^3} F(t,\xi,\eta) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3 F(t,\xi,\eta) =& \frac{(i|\eta|t)^3}{(1+\varepsilon|\xi|)^6} F(t,\xi,\eta) - \frac{6\varepsilon(i|\eta|t)^2\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^5} F(t,\xi,\eta) \\ &+ \frac{6\varepsilon^2(i|\eta|t)}{(1+\varepsilon|\xi|)^4} F(t,\xi,\eta) - 4\varepsilon(i|\eta|t)\delta_\xi\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^4 F(t,\xi,\eta) =& \frac{(i|\eta|t)^4}{(1+\varepsilon|\xi|)^8} F(t,\xi,\eta) - \frac{12\varepsilon(i|\eta|t)^3\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^7} F(t,\xi,\eta) \\ &+ \frac{36\varepsilon^2(i|\eta|t)^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^6} F(t,\xi,\eta) - \frac{24\varepsilon^3(i|\eta|t)\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^5} F(t,\xi,\eta) \\ &- 12\varepsilon(i|\eta|t)^2\delta_\xi - 4\varepsilon(i|\eta|t)\delta'_\xi\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^5 F(t,\xi,\eta) =& \frac{(i|\eta|t)^5}{(1+\varepsilon|\xi|)^{10}}F(t,\xi,\eta) - \frac{20\varepsilon(i|\eta|t)^4\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^9}F(t,\xi,\eta)\\ &+ \frac{120(i|\eta|t)^3\varepsilon^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^8}F(t,\xi,\eta) - \frac{240\varepsilon^3(i|\eta|t)^2\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^7}F(t,\xi,\eta)\\ &+ \frac{120\varepsilon^4(i|\eta|t)}{(1+\varepsilon|\xi|)^6}F(t,\xi,\eta) - 24\delta_\xi\left[\varepsilon(i|\eta|t)^3 + 2\varepsilon^3(i|\eta|t)\right]\\ &- 12\varepsilon(i|\eta|t)^2\delta_\xi' - 4\varepsilon(i|\eta|t)\delta_\xi''\end{aligned} \tag{3.5}$$

Además, para $j \geq 5$ la j-ésima derivada de $F(t,\xi,\eta)$ tiene la forma:

$$\begin{aligned}\partial_\xi^j F(t,\xi,\eta) =& -4\varepsilon(i|\eta|t)\delta^{(j-3)} + 12\varepsilon(i|\eta|t)^2\delta^{(j-4)}\\ &+ \sum_{k=0}^{j-5} p_k(i|\eta|t,\varepsilon)\delta^k\\ &+ \sum_{k=1}^{j}(i|\eta|t)^k\varepsilon^{j-1}a_k(sgn(\xi))^{j+k}(1+\varepsilon|\xi|)^{-j-k}F(t,\xi,\eta)\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde δ es la función delta de Dirac, $p_k(i|\eta|t,\varepsilon)$, es un polinomio, a_k y b_k son constantes que dependen de k

Demostración. Un cálculo directo prueba (3.2)-(3.5). El principio de inducción nos permite obtener (3.6). ■

Lema 3.2. *Sea $F(t,\xi,\eta) = e^{b(\xi,\eta)t}$ donde $b(\xi,\eta) = \dfrac{i\xi|\eta|}{1+\varepsilon|\xi|}$. Entonces,*

$$\partial_\eta F(t,\xi,\eta) = \left[\frac{(i\xi t)}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\ sgn(\eta)F(t,\xi,\eta) \tag{3.7}$$

$$\partial_\eta^2 F(t,\xi,\eta) = \left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^2 F(t,\xi,\eta) + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\delta_\eta \tag{3.8}$$

$$\partial_\eta^3 F(t,\xi,\eta) = \left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^3 sgn(\eta)F(t,\xi,\eta) + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\delta_\eta' \tag{3.9}$$

$$\partial_\eta^4 F(t,\xi,\eta) = \left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^4 F(t,\xi,\eta) + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^3 \delta_\eta + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right] \delta_\eta'' \tag{3.10}$$

$$\partial_\eta^5 F(t,\xi,\eta) = \left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^5 sgn(\eta) F(t,\xi,\eta) + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^3 \delta_\eta' + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right] \delta_\eta''' \tag{3.11}$$

De donde se deduce las siguientes fórmulas

$$\partial_\eta^{2k} F(t,\xi,\eta) = \left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^{2k} F(t,\xi,\eta) + 2\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^{2k-2j+1} \delta_\eta^{2j-2}$$

$$\partial_\eta^{2k+1} F(t,\xi,\eta) = \left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^{2k+1} sgn(\eta) F(t,\xi,\eta) + 2\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^{2k-2j+1} \delta_\eta^{2j-1} \tag{3.12}$$

Demostración. Un cálculo directo prueba (3.7)-(3.11). El principio de inducción nos permite obtener (3.12). ■

Teorema 3.1. *Si $E(t) = e^{tA}$ para $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ $s \geq r$ y para toda $\phi \in \Im_{s,r}$ satisface:*

1. *Si $r = 0, 1$*

$$\|E(t)\phi\|_{\Im_{s,r}} \leq P_r(t)\|\phi\|_{\Im_{s,r}} \tag{3.13}$$

donde $P_r(t)$ es un polinomio de grado r con coeficientes positivos.

2. *Si $r \geq 2$ y $\phi \in \Im_{s,r}$, $\quad E \in C([0,\infty); \Im_{s,r})$, si y sólo si,*

$$(\partial_\xi^j \widehat{\phi})(0,\eta) = 0, \qquad j = 0, 1, 2....r-3 \quad y \tag{3.14}$$

$$(\partial_\eta^j \widehat{\phi})(\xi,0) = 0, \qquad j = 0, 1, 2....r-3. \tag{3.15}$$

En este caso, también se tiene una estimación como la de (3.13)

Para $s \in \mathbb{R}$, $r = 1, 2, ...$, el espacio $\Im_{s,r}(\mathbb{R}^2) := H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\omega_r^2 dxdy)$, donde $L^2(\omega_r^2 dxdy) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | \omega_r f \in L^2(\mathbb{R})\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_{s,r} = \|f\|_s + \|f\|_{L^2_r}$

Demostración. Para efectos de la demostración se usa la regla de Leibniz y el Lema 3.1

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi\|_{s,0} =&\|E(t)\varphi\|_s + \|E(t)\varphi\|_{L^2_0}\\ =&\|\varphi\|_s + \|\varphi\|_0\end{aligned} \tag{3.16}$$

Definamos $u = E(t)\varphi$.
Si $r = 1$ entonces
Para ξ se tiene

$$\begin{aligned}\partial_\xi \widehat{u} =&\partial_\xi(F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})\\ =&\partial_\xi F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi}\\ =&\frac{i|\eta|t}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi}\\ \|xu\|_0 =&\|\partial_\xi\widehat{u}\|_0\\ =&\|\frac{i|\eta|t}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0\\ \leqslant&\|\frac{i|\eta|t}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi}\|_0 + \|F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0\\ =&|t|\|\eta\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial\xi\widehat{\varphi}\|_0\\ \|xu\|_0 \leq&|t|\|\partial_y\varphi\|_0 + \|x\varphi\|_0\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para η se tiene

$$\begin{aligned}\partial_\eta \widehat{u} =&\partial_\eta(F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})\\ =&\partial_\eta F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi}\\ =&\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\ sgn(\eta)F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi}\\ \|yu\|_0 =&\|\partial_\eta\widehat{u}\|_0\\ =&\|\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\ sgn(\eta)F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0\\ \leqslant&\|\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\ sgn(\eta)F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi}\|_0 + \|F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0\\ =&\frac{|t|}{\varepsilon}\|\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial\eta\widehat{\varphi}\|_0\\ \|yu\|_0 \leq&\frac{|t|}{\varepsilon}\|\varphi\|_0 + \|y\varphi\|_0\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi\|_{s,1} \leq & \|u\|_s + \|u\|_{0,1} \\ \leq & \|\varphi\|_s + \|u\| + \|xu\| + \|yu\| \\ \leq & \|\varphi\|_s + \|\varphi\|_0 + |t|\|\partial_y\varphi\|_0 + \|x\varphi\|_0 + \frac{|t|}{\varepsilon}\|\varphi\|_0 + \|y\varphi\|_0 \\ \leq & C(|t|,\varepsilon)\|\varphi\|_{s,1}\end{aligned}$$

Si $r = 2$ tenemos:

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2\widehat{u} =& \partial_\xi\left(\frac{i|\eta|t}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi}\right) \\ =& \frac{(i|\eta|t)^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^4}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} - \frac{2\varepsilon(i|\eta|t)\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^3}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} \\ & + 2\frac{i|\eta|t}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\xi^2\widehat{\varphi} \\ \|x^2u\|_0 =& \|\partial_\xi^2\widehat{u}\|_0 \\ \leq & t^2\|\eta\widehat{\varphi}\|_0 + 2\varepsilon|t|\|\eta\widehat{\varphi}\|_0 + 2|t|\|\eta\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\|_0 \\ \|x^2u\|_0 \leq & t^2\|\partial_y\varphi\|_0 + 2\varepsilon|t|\|\partial_y\varphi\|_0 + 2|t|\|x\partial_y\varphi\|_0 + \|x^2\varphi\|_0 \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Si $\widehat{\varphi}(\xi,0) = 0; \quad \forall\xi \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\partial_\eta^2\widehat{u} =& \partial_\eta\left(\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\ sgn(\eta)F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi}\right) \\ =& \left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^2 F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\delta_\eta\widehat{\varphi}(\xi,0) \\ & + 2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\ sgn(\eta)F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\eta^2\widehat{\varphi} \\ \|y^2u\|_0 =& \|\partial_\eta^2\widehat{u}\|_0 \\ \leq & \frac{t^2}{\varepsilon^2}\|\widehat{\varphi}\|_0 + \frac{2|t|}{\varepsilon}\|\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\eta^2\widehat{\varphi}\|_0 \\ =& \frac{t^2}{\varepsilon^2}\|\varphi\|_0 + \frac{2|t|}{\varepsilon}\|y\varphi\|_0 + \|y^2\varphi\|_0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi\|_{s,2} =&\|u\|_s + \|u\|_{L^2_2}\\ \leq&\|u\|_s + \|u\| + \|x^2u\| + \|y^2u\|\\ \leq&\|\varphi\|_s + \|\varphi\|_2 + t^2\|\partial_y\varphi\|_0 + 2\varepsilon|t|\|\partial_y\varphi\|_0 + 2|t|\|x\partial_y\varphi\|_0 + \|x^2\varphi\|_0\\ &+\frac{t^2}{\varepsilon^2}\|\varphi\|_0 + \frac{2|t|}{\varepsilon}\|y\varphi\|_0 + \|y^2\varphi\|_0\end{aligned}$$

Si $r = 3$ entonces
Si $\widehat{\varphi}(0,\eta) = 0 \ \ \forall\eta \in \mathbb{R}$ para ξ se tiene

$$\begin{aligned}\partial^3_\xi\widehat{u} =&\partial_\xi(\frac{(i|\eta|t)^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^4}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} - \frac{2\varepsilon(i|\eta|t)\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^3}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi}\\ &+2\frac{i|\eta|t}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial^2_\xi\widehat{\varphi})\\ =&\frac{(i|\eta|t)^3}{(1+\varepsilon|\xi|)^6}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} - \frac{6\varepsilon(i|\eta|t)^2\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^5}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + \frac{6\varepsilon^2(i|\eta|t)}{(1+\varepsilon|\xi|)^4}F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi}\\ &+\frac{3(i|\eta|t)^2}{(1+\varepsilon|\xi|)^4}F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi} - \frac{6\varepsilon(i|\eta|t)\ sgn(\xi)}{(1+\varepsilon|\xi|)^3}F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi}\\ &+\frac{3(i|\eta|t)}{(1+\varepsilon|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\partial^2_\xi\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial^3_\xi\widehat{\varphi} - 4\varepsilon(i|\eta|t)\delta_\xi\widehat{\varphi}(0,\eta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x^3u\|_0 =& \|\partial^3_\xi\widehat{u}\|_0\\ \leq& t^3\|\eta^3\widehat{\varphi}\|_0 + 6t^2\varepsilon\|\eta^2\widehat{\varphi}\|_0 + 6t\varepsilon^2\|\eta\widehat{\varphi}\|_0 + 3t^2\|\eta^2\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0 + 6t\varepsilon\|\eta\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_0\\ &+ 3t\|\eta\partial^2_\xi\widehat{\varphi}\|_0 + \|\partial^3_\xi\widehat{\varphi}\|_0\\ =& t^3\|\partial^3_y\varphi\|_0 + 6t^2\varepsilon\|\partial^2_y\varphi\|_0 + 6t\varepsilon^2\|\partial_y\varphi\|_0 + 3t^2\|x\partial^2_y\varphi\|_0 + 6t\varepsilon\|x\partial_y\varphi\|_0\\ &+ 3t\|x^2\partial_y\varphi\|_0 + \|x^3\varphi\|_0\end{aligned}$$

Si $\widehat{\varphi}'(\xi,0)=0 \ \ \forall \xi\in\mathbb{R}$ para η se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_\eta^3\widehat{u} =&\partial_\eta^3(F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})\\
=&\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^3 sgn(\eta)F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi}+2\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\delta'_\eta\widehat{\varphi}\\
&+3\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]^2 F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi}+6\left[\frac{i\xi t}{1+\varepsilon|\xi|}\right]\delta_\eta\partial_\eta\widehat{\varphi}\\
&3\left[\frac{(i\xi t)}{1+\varepsilon|\xi|}\right] sgn(\eta)F(t,\xi,\eta)\partial_\eta^2\widehat{\varphi}+F(t,\xi,\eta)\partial_\eta^3\widehat{\varphi}\\
\|y^3u\|_0 =&\|\partial_\eta^3\widehat{u}\|_0\\
\leq&\frac{t^3}{\varepsilon^3}\|\widehat{\varphi}\|_0+\frac{3t^2}{\varepsilon^2}\|\partial_\eta\widehat{\varphi}\|_0+\frac{3t}{\varepsilon}\|\partial_\eta^2\widehat{\varphi}\|_0+\|\partial_\eta^3\widehat{\varphi}\|_0\\
\leq&\frac{t^3}{\varepsilon^3}\|\varphi\|_0+\frac{3t^2}{\varepsilon^2}\|y\varphi\|_0+\frac{3t}{\varepsilon}\|y^2\varphi\|_0+\|y^3\varphi\|_0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|_{s,3}^2 &= \|u\|_s+\|u\|_{L^2_3}\\
&\leq \|u\|_s+\|u\|+\|x^3u\|+\|y^3u\|\\
&\leq \|\varphi\|_s+\|\varphi\|_0+t^3\|\partial_y^3\varphi\|_0+6t^2\varepsilon\|\partial_y^2\varphi\|_0+6t\varepsilon^2\|\partial_y\varphi\|_0\\
&+3t^2\|x\partial_y^2\varphi\|_0+6t\varepsilon\|x\partial_y\varphi\|_0+3t\|x^2\partial_y\varphi\|_0+\|x^3\varphi\|_0\\
&+\frac{t^3}{\varepsilon^3}\|\varphi\|_0+\frac{3t^2}{\varepsilon^2}\|y\varphi\|_0+\frac{3t}{\varepsilon}\|y^2\varphi\|_0+\|y^3\varphi\|_0
\end{aligned}$$

Procediendo de esta manera y aplicando el principio de inducción se tiene el resultado requerido. ■

Proposición 3.1. *Sea $r_1=0,1,2$, $s\geq r_1$, $t\geq 0$, $\varepsilon\geq 0$ y $\varphi\in\Im_{s,r_1,0}$ donde $\Im_{s,r_1,0}=H^s(\mathbb{R}^2)\cap L^2(x^{2r_1}dxdy)$ entonces $\|E(t)\varphi\|_{\Im_{s,r_1,0}}\leq P_{r_1}(t)\|\varphi\|_{\Im_{s,r_1,0}}$ donde $P_{r_1}(t)$ es un polinomio de grado r_1 con coeficientes positivos.*

Demostración. Se obtiene de manera inmediata a partir de 3.16, 3.17 y 3.19. ■

Proposición 3.2. *Sea $r_2=0,1$, $s\geq r_2$, $t\geq 0$, $\varepsilon\geq 0$ y $\varphi\in\Im_{s,0,r_2}$ donde $\Im_{s,0,r_2}=H^s(\mathbb{R}^2)\cap L^2(y^{2r_2}dxdy)$ entonces $\|E(t)\varphi\|_{\Im_{s,0,r_2}}\leq P_{r_2}(t)\|\varphi\|_{\Im_{s,0,r_2}}$ donde $P_{r_2}(t)$ es un polinomio de grado r_2 con coeficientes positivos.*

Demostración. Se obtiene de manera inmediata a partir de 3.16 y 3.18. ■

Proposición 3.3. *Sean* $r_1 = 0, 1, 2$, $r_2 = 0, 1$ $s \geq r_1 + r_2$, $t \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ *y* $\varphi \in \Im_{s,r_1,r_2}$ *donde* $\Im_{s,r_1,r_2} = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + x^{2r_1} + y^{2r_2})dxdy)$ *entonces* $\|E(t)\varphi\|_{\Im_{s,r_1,r_2}} \leq P_r(t)\|\varphi\|_{\Im_{s,r_1,r_2}}$
donde $P_r(t)$ *es un polinomio de grado* r *con coeficientes positivos.*

Demostración. Se obtiene de manera inmediata a partir de las proposiciones 1.2 y 3.2. ■

Proposición 3.4. *El operador* $A = \partial_x(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1} \in \mathscr{B}(\Im_{s,1})$ *y además* $A(u^2) \in \Im_{s,1}$ *para todo* $u \in \Im_{s,1}$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u\|_{s,1}^2 &= \|\partial_x(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u\|_s^2 + \|\partial_x(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u\|_{L_1^2}^2 \\
&\leq \|u\|_s^2 + \int_{\mathbb{R}^2} |x\partial_x(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u|^2 dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} |y\partial_x(1 + \varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u|^2 dxdy \\
&\leq \|u\|_s^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \left|\partial_\xi \left(\frac{-i\xi}{1 + \varepsilon|\xi|}\widehat{u}\right)\right|^2 d\xi d\eta \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \left|\partial_\eta \left(\frac{-i\xi}{1 + \varepsilon|\xi|}\widehat{u}\right)\right|^2 d\xi d\eta \\
&\leq \|u\|_s^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{-i}{(1 + \varepsilon|\xi|)^2}\widehat{u}\right|^2 d\xi d\eta \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{-i\xi}{1 + \varepsilon|\xi|}\partial_\xi\widehat{u}\right|^2 d\xi d\eta + \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{-i\xi}{1 + \varepsilon|\xi|}\partial_\eta\widehat{u}\right|^2 d\xi d\eta \\
&\leq \|u\|_s^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{u}\right|^2 d\xi d\eta + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^2} \left|\partial_\xi\widehat{u}\right|^2 d\xi d\eta + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}^2} \left|\partial_\eta\widehat{u}\right|^2 d\xi d\eta \\
&\leq \|u\|_s^2 + \|u\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|xu\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|yu\|_0^2 \\
&\leq 4C_\varepsilon\|u\|_{s,1}^2
\end{aligned}
$$

Como $s > 1$ se tiene que $\Im_{s,1}$ es un álgebra de Banach (vea Iório [11] pag 360) y por lo tanto si $u \in \Im_{s,1}$, se tiene que $u^2 \in \Im_{s,1}$ y $\|Au^2\|_{s,1}^2 < \infty$.

■

Teorema 3.2. *Dada $\varphi \in \Im_{s,1}$ entonces existe una única $u \in C([0,\infty);\Im_{s,1})$ solución del problema (0.1) tal que $\partial_t u \in C([0,\infty);L^2(\mathbb{R}^2))$, siempre que $s>1$*

Demostración. Para efectos de la demostración utilizaremos la Proposición 1.2 junto con Teorema 3.1 y la Proposición 3.4.

La unicidad del problema en $\Im_{s,1}$ es una consecuencia de la teoría en $H^s(\mathbb{R}^2)$. Para mostrar la existencia consideremos:

$$F(u)(t) := u(t) = e^{-(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}}\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2(\tau)d\tau \tag{3.20}$$

Veamos que $u \in C([0,T);\Im_{s,1})$ definida en(3.20) esta en el espacio métrico completo $\mathfrak{X}_{s,1} = \{u \in C([0,T);\Im_{s,1}) \mid \|E(t)\varphi - u(t)\|_{\Im_{s,1}} \leq M\}$ con la métrica

$$d_{s,T}(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)-v(t)\|_{s,1}.$$

En efecto, a partir de (3.20) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t) - e^{-(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}}\varphi\|_{s,1} &\leq \int_0^t \|e^{-(t-\tau)(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}}\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2(\tau)\|_{s,1}d\tau \\
&\leq 2C_{s,1}\int_0^t C(t-\tau,\varepsilon)\|u(\tau)\|_{s,1}^2 d\tau \\
&\leq 2C_{s,1}C(t,\varepsilon)\int_0^t \|u(\tau)\|_{s,1}^2 d\tau \\
&\leq 2C_{s,1}C(T,\varepsilon)L(\|u\|_{s,1},0)\int_0^t \|u(\tau)\|_{s,1} d\tau
\end{aligned}$$

si $u \in \mathfrak{X}_{s,1}(T,M)$

$$\|u(\tau)\|_{s,1} \leq \|u(\tau) - e^{\tau A}\varphi\|_{s,1} + \|e^{\tau A}\varphi\|_{s,1} \leq M + P_1(\tau)\|\varphi\|_{s,1}$$

Luego, si $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_{s,1} &\leq 2C_{s,1}C(t,\varepsilon)L(\|u\|_{s,1},0)(M + C(t,\varepsilon)\|\varphi\|_{s,1})T \\
&\leq 2C_{s,1}C(t,\varepsilon)^2 L(\|u\|_{s,1},0)(M+\|\varphi\|_{s,1})T \\
&\leq 2C_{s,1}q(T)L(\|u\|_{s,1},0)(M+\|\varphi\|_{s,1})T.
\end{aligned}$$

Tomando $T \leq \dfrac{M}{2C_{s,1}q(T)L(\|u\|_{s,1},0)(M+\|\varphi\|_{s,1})}$
se obtiene que

$$\|F(u)(t) - e^{tA}\varphi\|_{s,1} \leq M$$

es decir que $F(u)(t) \in \mathfrak{X}_{s,1}$.
El siguiente paso es ver que $F(u)(t)$ es una contracción en $\mathfrak{X}_{s,1}$.

$$\begin{aligned}\|F(u)(t) - F(v)(t)\|_{s,1} &\leq \int_0^t \|e^{-(t-\tau)(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}}\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}(u^2-v^2)\|_{s,1}d\tau \\ &\leq 2C_{s,1}C(t,\varepsilon)\int_0^t \|u^2(\tau)-v^2(\tau)\|_{s,1}d\tau \\ &\leq 2C_{s,1}C(T,\varepsilon)\int_0^t \big(\|u(\tau)\|_{s,1}+\|v(\tau)\|_{s,1}\big)\|u(\tau)-v(\tau)\|_{s,1}d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq 4C_{s,1}C(T,\varepsilon)\int_0^t \big(M+C(t,\varepsilon)\|\varphi\|_{s,1}\big)\|u(\tau)-v(\tau)\|_{s,1}d\tau \\ &\leq 4C_{s,1}C(T,\varepsilon)\big(M+C(T,\varepsilon)\big)\|\varphi\|_{s,1}\big)T\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_{s,1}\end{aligned}$$

Si tomamos $T \leq \dfrac{1}{4C_{s,1}C(T,\varepsilon)\big(M+C(T,\varepsilon)\big)\|\varphi\|_{s,1}\big)}$, se obtiene el resultado deseado.

De lo desarrollado anteriormente se tiene la existencia y unicidad de la solución en $\Im_{s,1}$. ■

El próximo paso es obtener una estimativa apriori para la norma de u en $\Im_{s,1}$.
Para esto debemos obtener estimaciones de $\partial_t\|xu\|_0^2$ y $\partial_t\|yu\|_0^2$ de la siguiente manera:

Para $\partial_t \|xu\|_0^2$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_t \|xu\|_0^2 &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} x^2 (u(x,y,t))^2 dxdy \qquad (3.21)\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^2} x^2 u(x,y,t) u_t(x,y,t) dxdy \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^2} x^2 u(x,y,t) \left[-(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y \partial_{xy} u - \frac{1}{2}\partial_x (1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1} u^2 \right] dxdy \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^2} x^2 u(x,y,t)(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y \partial_{xy} u dxdy \qquad (3.22)\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} x^2 u(x,y,t)\partial_x (1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1} u^2 dxdy
\end{aligned}$$

Ahora obtendremos estimativas para cada uno de las integrales del lado derecho de (3.21)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} x^2 u(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy} u dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} xux(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy} u dxdy \\
&= \langle xu \ , \ x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy} u\rangle_0 \\
&\le \|xu\|_0 \left\| x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy} u\right\|_0 \\
&\le C_1(T)\|u\|_{s,1}^2 \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} x^2 u(x,y,t)\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2 dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} xux\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2 dxdy \\
&\le \|xu\|_0 \|x\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\|_0 \\
&\le C\|u\|_{s,1}\|\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\|_{s,1} \\
&\le 4C_\varepsilon\|u\|_{s,1}\|u^2\|_{s,1} \\
&\le 4C_\varepsilon\|u\|_{s,1}\alpha_1(T)\|u\|_{s,1} \\
&\le 4C_\varepsilon\alpha_1(T)\|u\|_{s,1}^2 \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

por lo tanto de (3.23) y (3.24) se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_t \|xu\|_0 &\le C_1(T)\|u\|_{s,1}^2 + 4C_\varepsilon\alpha_1(T)\|u\|_{s,1}^2 \\
&\le \beta_1(T)\|u\|_{s,1}^2 \\
&\le \beta_1(T)\left(\|u\|_s^2 + \|u\|_{L_1^2}^2\right) \\
&\le \gamma_1(T) + \beta_1(T)\|u\|_{L_1^2}^2 \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

donde $\gamma_1(T)$, $\beta_1(T)$ son constantes que se obtienen de las cotas para las normas $\|u\|_\infty$ y de $\|u\|_s$. La desigualdad de Gronwall y (3.25) implican el resultado.
Para $\partial_t \|yu\|_0^2$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_t \|yu\|_0^2 &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} y^2(u(x,y,t))^2 dxdy \qquad (3.26)\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^2} y^2 u(x,y,t) u_t(x,y,t) dxdy \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^2} y^2 u(x,y,t)\left[-(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}u - \frac{1}{2}\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\right] dxdy \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^2} y^2 u(x,y,t)(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}u dxdy \qquad (3.27)\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} y^2 u(x,y,t)\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2 dxdy
\end{aligned}$$

Ahora obtendremos estimativas para cada uno de las integrales del lado derecho de (3.21)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} y^2 u(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}u dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} yuy(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}u dxdy \\
&= \langle yu\ ,\ y(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}u\rangle_0 \\
&\le \|yu\|_0 \left\|y(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}u\right\|_0 \\
&\le C_2(T,\varepsilon)\|u\|_{s,1}^2 \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} y^2 u(x,y,t)\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2 dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} yuy\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2 dxdy \\
&\le \|yu\|_0 \|y\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\|_0 \\
&\le C_\varepsilon\|u\|_{s,1}\|\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2\|_{s,1} \\
&\le 4C_\varepsilon\|u\|_{s,1}\|u^2\|_{s,1} \\
&\le 4C_\varepsilon\|u\|_{S,1}\alpha(T)\|u\|_{s,1} \\
&\le 4C_\varepsilon\alpha(T)\|u\|_{s,1}^2 \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

por lo tanto de (3.28) y (3.29) se tiene

$$\begin{aligned}\partial_t \|yu\|_0^2 &\leq C_2(T,\varepsilon)\|u\|_{s,1}^2 + 4C\alpha_2(T)\|u\|_{s,1}^2 \\ &\leq \beta_2(T)\|u\|_{s,1}^2 \\ &\leq \beta_2(T)\left(\|u\|_s^2 + \|u\|_{L_1^2}^2\right) \\ &\leq \gamma_2(T) + \beta_2(T)\|u\|_{L_1^2}^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde $\gamma_2(T)$, $\beta_2(T)$ son constantes que se obtienen de las cotas para las normas $\|u\|_\infty$ y de $\|u\|_s$. La desigualdad de Gronwall y (3.30) implican el resultado.
En conclusión por (3.25) y (3.30) tenemos:

$$\partial_t \|u\|_{L_1^2}^2 = \partial_t \|xu\|_0^2 + \partial_t \|yu\|_0^2 \tag{3.31}$$

$$\leq (\gamma_1(T) + \beta_1(T) + \gamma_2(T) + \beta_2(T))\|u\|_{L_1^2}^2 \tag{3.32}$$

Teorema 3.3. *Sea $T > 0$ y supóngase que $u \in ([0,T]\ ,\ \Im_{s,2})$ es solución de (0.1) entonces $u \equiv 0$ para todo $t \in [0,T]$*

Demostración. Dado que u es la solución de (0.1) se sigue que

$$u(t) = e^{-(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\mathcal{H}^y\partial_{xy}}\partial_x(1+\varepsilon\mathcal{H}\partial_x)^{-1}u^2(\tau)d\tau \tag{3.33}$$

para $t \in [0,T]$. Sea $v = u^2$. Entonces tomando la transformada de Fourier a (3.33) obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t,\xi,\eta) &= e^{\frac{-i\xi|\eta|t}{1+\varepsilon|\xi|}}\hat{\varphi} - \frac{1}{2}\int_0^t e^{\frac{-(t-\tau)i\xi|\eta|}{1+\varepsilon|\xi|}}\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\Big)\widehat{v}(\tau,\xi,\eta)d\tau \\ &= F(t,\xi,\eta)\hat{\varphi} - \frac{1}{2}\int_0^t F(t-\tau,\xi,\eta)\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\Big)\widehat{v}(\tau,\xi,\eta)d\tau. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Derivando dos veces con respecto a η en el sentido distribucional y la ecuación (3.8) se sigue que $\partial_\eta^2\widehat{u}(t,\xi,\eta)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\partial_\eta^2\widehat{u}(t,\xi,\eta) &= \big(\partial_\eta^2 F(t,\xi,\eta)\big)\widehat{\varphi} + 2\partial_\eta F(t,\xi,\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\eta^2\widehat{\varphi} \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \big(\partial_\eta^2 F(t-\tau,\xi,\eta)\big)\,\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\widehat{v}(\tau,\xi,\eta) \\ &\quad + 2\partial_\eta F(t-\tau,\xi,\eta)\partial_\eta\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\widehat{v}(\tau,\xi,\eta)\Big) \\ &\quad + F(t-\tau,\xi,\eta)\partial_\eta^2\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\widehat{v}(\tau,\xi,\eta)\Big)d\tau \qquad (3.35)\end{aligned}$$

De donde se obtiene que $\partial_\eta^2\widehat{u}(t,\xi,\eta)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\partial_\eta^2\widehat{u}(t,\xi,\eta) &= \Big(\frac{it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\Big)^2 F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} + \frac{2it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\delta_\eta\widehat{\varphi} \\ &\quad + \frac{2it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}F(t,\xi,\eta)sgn(\eta)\partial_\eta\widehat{\varphi} + F(t,\xi,\eta)\partial_\eta^2\widehat{\varphi} \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\int_0^t\Big[\Big(\frac{i\xi(t-\tau)}{1+\varepsilon|\xi|}\Big)^2 F(t-\tau,\xi,\eta)\widehat{v} + \frac{2i\xi(t-\tau)}{1+\varepsilon|\xi|}\delta_\eta\widehat{v} \\ &\quad + \frac{2i\xi(t-\tau)}{1+\varepsilon|\xi|}F(t-\tau,\xi,\eta)sgn(\eta)\partial_\eta\widehat{v} + F(t-\tau,\xi,\eta)\partial_\eta^2\widehat{v}\Big]d\tau \\ &= \frac{2it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\delta_\eta\widehat{\varphi}(\xi,\eta) - \frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\int_0^t\frac{i\xi(t-\tau)}{1+\varepsilon|\xi|}\delta_\eta\widehat{v}(\tau,\xi,\eta)d\tau + f(t,\xi,\eta) \\ &= \frac{2it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi,0) - \Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\Big)^2\int_0^t\left[t\widehat{v}(\tau,\xi,0) - \tau\widehat{v}(\tau,\xi,0)\right]d\tau + f(t,\xi,\eta)\end{aligned} \qquad (3.36)$$

Pero

$$\int_0^t\widehat{v}(\tau,\xi,0)d\tau = \int_0^t\widehat{u^2}(\tau,\xi,0)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\|u(\tau)\|_0^2 d\tau \qquad (3.37)$$

entonces, la ecuación (3.36) se transforma en

$$\begin{aligned}\partial_\eta^2\widehat{u}(t,\xi,\eta) &= \frac{2it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi,0) - \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\Big)^2\left[t\int_0^t\|u(\tau)\|_0^2 d\tau - \int_0^t\tau\|u(\tau)\|_0^2 d\tau\right] \\ &\quad + f(t,\xi,\eta).\end{aligned} \qquad (3.38)$$

Así que (3.38) implica que

$$\frac{2it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi,0)-\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\Big)^2\left[t\int_0^t\|u(\tau)\|_0^2d\tau-\int_0^t\tau\|u(\tau)\|_0^2d\tau\right]=0.$$

ya que $\partial_\eta^2\widehat{u}(t,\xi,\eta)$ y $f(t,\xi,\eta)$ son funciones integrables para todo $t\geq 0$.
Es decir que

$$\frac{2it\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi,0)-\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\Big)^2\left[t\int_0^t\|u(\tau)\|_0^2d\tau-\int_0^t\tau\|u(\tau)\|_0^2d\tau\right]=0,\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{3.39}$$

Derivando (3.39) con respecto a t se obtiene

$$\frac{2i\xi}{1+\varepsilon|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi,0)-\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\Big)^2\left[\int_0^t\|u(\tau)\|_0^2d\tau\right]=0,\quad\forall t\in[0,T]. \tag{3.40}$$

en consecuencia

$$\int_0^t\|u(\tau)\|_0^2d\tau=4\pi\Big(\frac{i\xi}{1+\varepsilon\,|\xi|}\Big)^{-1}\widehat{\varphi}(\xi,0);$$

si derivamos de nuevo con respecto al tiempo obtenemos

$$\|u(t)\|_0^2=0\ \ \forall t\in[0,T].$$

Por lo tanto se debe tener que $u\equiv 0$. ■

Bibliografía

[1] A. A. Alazmani, J. P. Albert, J. L. Bona, M. Chen and J. Wu, *Comparisons between the BBM equation and a boussinesq system*. Adv. Differential Equations 11 (2006), no. 2, 121-166.

[2] J. Angulo, M. Scialom, C. Banquet *The regularized Benjamin Ono and BBM equations: Well-posedness and nonlinear stability*, Journal of Differential Equations, Volume 250, issue 11, 1 June, Pages 4011-4036.

[4] J. L. Bona, Hongqiu Chen, *Local and global well-posedness results for generalized BBM-type equations*. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 234, Dekker, New York, 2003.

[5] T. B. Benjamin *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluids Mech. 26, 559-592, 1989.

[6] H. Brézis, T. Gallouet, *Nonlinear Schrdinger evolution equations*, Nonlinear Anal. 4 (4) (1980) 677–681.

[7] G. Fonseca, G. Ponce, *The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces*. J. Funct. Anal. 260 (2011), no. 2, 436-459

[8] R. J. Iório, *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*, communications in P.D.E. 11(10), (1986), Pages 1031-1081

[9] R. J. Iório, Jr., V. de Magalhães Iório, *Equações diferenciais parciais: Uma introdução*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, (1988)

[10] R. J. Iório, W. V. L. Nunes *Introdução às equações de Evolução não Lineares*. 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

[11] R. J. Iório, Jr., Valéria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[12] T. Kato, G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations* , Comm. Pure App. Math. (1988), 41, 891-907.

[13] F. Linares. G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Springer-Verlag, 2009.

[14] Y. Mammeri, *Long time bounds for the periodic Benjamin-Ono-BBM equation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 71, issue 10, 15 November 2009, Pages 5010-5021

[15] A. B. Milanes, *On some bidimensionals versions of the generalized Benjamin-Ono equation*, IMPA, CEP 22460-323 Rio de Janeiro Brazil.

[16] H. Ono, *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, Jr.Phys.Soc.Japan 39, 1082-1091, 1975.

[17] G. Ponce, *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Eqs. 4, (1991), 527-542.

[18] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Mathematical Library, 18. North-Holland Publishing Co., Amsterdan-New York, 1978. 528 pp.

[19] I. D. Vega, *El problema de Cauchy asociado a una Ecuación del tipo ZK-BBM*, Universidad Nacional de Colombia, 2011.