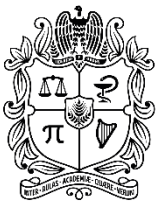


UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Secuencia didáctica para trabajar los logaritmos con estudiantes de grado décimo del colegio Ave María. Aplicación a la escala de pH.

Rubén Darío Torres García

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2018

Secuencia didáctica para trabajar los logaritmos con estudiantes de grado décimo del colegio Ave María. Aplicación a la escala de pH.

Rubén Darío Torres García

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Matemática, MSc. Martha Cecilia Moreno Penagos

Codirectora:

Química, DSc. Liliam Alexandra Palomeque Forero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2018

Dedicatoria

A mi madre y hermana, quienes me motivan a seguir adelante día a día.

Agradecimientos

A la rectora, Hna. Amparo Loaiza, y estudiantes de grado décimo del Colegio Ave María, quienes ayudaron al desarrollo del trabajo de grado, permitiendo los espacios y tiempos para su desarrollo.

Agradezco también a las profesoras Martha Moreno, del departamento de Matemáticas, y Liliam Palomeque, del departamento de Química, de la Universidad Nacional de Colombia, quienes enriquecieron las actividades y escritura de cada elemento del presente trabajo; agradezco su dedicación y esfuerzo para llevar a buen término este escrito.

Resumen

Una problemática que se ha observado, en el colegio Ave María, es que los estudiantes de grado décimo no reconocen los logaritmos como un objeto matemático, no utilizan sus propiedades y se les hace difícil aplicarlo a problemas en un contexto real; por lo cual, se hace imprescindible buscar estrategias que permitan la apropiación y uso del concepto matemático (los logaritmos).

En este trabajo se presenta una secuencia didáctica que permite el desarrollo del concepto "logaritmo" y su aplicación a la escala de pH, teniendo en cuenta el proceso histórico del desarrollo del concepto. Además, se busca promover que los estudiantes construyan el conocimiento (en primera instancia) y, posteriormente, realicen una construcción formal de lo trabajado.

Palabras clave: Logaritmos, pH, secuencia didáctica.

Abstract

A problematic situation that has been observed at Colegio Ave Maria is that tenth grade students don't recognize logarithms as a mathematical object, they don't use its properties and for them is difficult to apply it to a real life situation. Due to that it is necessary to look for strategies that allow students to take possession of knowledge and use of this mathematical concept.

In this work is presented a didactic sequence that allows the development of the concept of "logarithm" and its application to pH scale, taking into account the historic process of the development of the concept. Additionally, it tries to promote that students built their own knowledge (in the first instance) of all the things related to logarithms, and later they do a formal construction with what they have worked.

Keywords: Logarithms, pH, didactic sequence.

Contenido

Pág.

Resumen IX

Lista de figuras XIII

Lista de tablas XIV

Introducción 15

1. Aspectos históricos y epistemológicos 17
1.1 Noción de logaritmo, definición y propiedades 17
1.1.1 Mesopotamia y las tablillas babilónicas 17
1.1.2 Arquímedes 18
1.1.3 Chuquet y Stifel 19
1.1.4 Bürgi 20
1.1.5 Napier 20
1.1.6 Briggs 27
1.2 Relación del logaritmo con curvas y series, y función logarítmica 27
1.3 Logaritmo de números negativos 28
1.4 Aspectos relevantes de la historia de los logaritmos en la secuencia de actividades 29
1.5 pH 29
1.5.1 Sören Sörensen 29

2. Aspectos disciplinares 31
2.1 El logaritmo como operación 31
2.1.1 Propiedades de los logaritmos a partir de la relación entre una sucesión aritmética y otra geométrica 32
2.1.2 Demostración de las propiedades de los logaritmos 34
2.2 El logaritmo como función inversa a la función exponencial 35
2.2.1 Función Exponencial 35
2.2.2 Funciones inversas 37
2.2.3 Función logarítmica 38
2.3 El logaritmo como integral 40
2.3.1 Función logaritmo natural 41
2.3.2 Propiedades de la función logaritmo natural 43
2.3.3 Otras bases de la función logarítmica 44
2.3.4 Función exponencial como inversa de la función logarítmica 45
2.4 El logaritmo como relación entre dos distancias 46
2.5 pH y escala de pH 47

2.6 Factores relevantes 49

3. Aspectos didácticos y metodológicos 50
3.1 Modelo pedagógico constructivista 50
3.2 Aprendizaje significativo 51
3.3 Aprendizaje colaborativo 52
3.4 Investigación/Acción 53

4. Secuencia de actividades 55
4.1 Prueba diagnóstico 55
4.1.1 Análisis de resultados: 58
4.2 Actividad 0: Nivelación 60
4.2.1 Análisis de resultados 63
4.3 Actividad 1: Definición de logaritmación, a partir de su relación con la potenciación 64
4.3.1 Análisis de resultados 74
4.4 Actividad 2: Propiedades de la logaritmación 75
4.4.1 Análisis de resultados 78
4.5 Actividad 3: Función logarítmica y su relación con la función exponencial 79
4.5.1 Análisis de resultados 89
4.6 Actividad 4: Aplicación de los logaritmos a la escala de pH 90
4.6.1 Análisis de resultados 95

5. Conclusiones y recomendaciones 97
5.1 Conclusiones 97
5.2 Recomendaciones 98

A. Anexo: Actividad – Indagación en las propiedades de los logaritmos 99

Bibliografía 101

Lista de figuras

Pág.

Ilustración 1-1. “Construcción de la idea de Napier”. 21
Ilustración 2-1. Función Exponencial Creciente. 36
Ilustración 2-2. Función exponencial decreciente. 37
Ilustración 2-3. Relación gráfica entre una función y su función inversa. 38
Ilustración 2-4. Función logarítmica creciente. 39
Ilustración 2-5. Función logarítmica decreciente. 40
Ilustración 2-6. Relación de Napier. 46
Ilustración 2-7. Escala de pH – Recuperado el 1 de noviembre de 2018 de http://www.aprenderdevino.es/ph-y-vino/. 48
Ilustración 4-1. Uso de propiedades de la logaritmación al pH. 95
Ilustración 4-2. Error - Indistinción entre pH y pOH. 95
Ilustración 4-3. Error en la conversión. 96
Ilustración 4-4. Error en las predicciones 1. 96
Ilustración 4-5. Error en las predicciones 2. 96

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1-1. Relación de Arquímedes. 18
Tabla 1-2. Relación de Bürgi. 20
Tabla 1-3. “Idea, adaptada, de Logaritmos de Napier” Tomado de Historia de las Matemáticas (Ríbnikov, pág. 144). 23
Tabla 1-4. "Idea original de los Logaritmos de Napier. 23
Tabla 1-5. “Diferencias en las propiedades de los logaritmos”. 24
Tabla 2-1. Relación extendida, base 2. 32

Introducción

Los estudios realizados acerca de la enseñanza y aprendizaje del concepto de logaritmo en secundaria han sido escasos, sin considerar la relevancia que tiene dicho concepto en el desarrollo de habilidades matemáticas de un estudiante, inclusive en la educación superior (Vargas, Pérez y González, 2011).

Además, algunos estudios en didáctica de la matemática han demostrado que los logaritmos son un concepto matemático de difícil comprensión escolar, por ejemplo: “En Ferrari (2001) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos…” (Ferrari y Farfán, 2007, p. 497).

Esta realidad no es lejana a los estudiantes del Colegio Ave María, el poco tiempo dedicado al concepto de logaritmo dificulta su comprensión (Ferrari y Farfán, 2007), así como la limitación del entendimiento de logaritmo, al oprimir una tecla de una calculadora, la idea de función inversa como una reflexión respecto a la recta $y = x$, o incluso a la idea de función logarítmica a partir de una tabulación (muchas veces sin sentido alguno) o su construcción gráfica a partir de un programa (Vargas, Pérez y González, 2011).

Se observa entonces poca coherencia en la construcción histórica del concepto y su desarrollo y tratamiento escolar; y si a esto sumamos las preguntas (sin respuesta en muchas ocasiones) que hacen los estudiantes sobre el tema: “¿de dónde vienen? ¿Por qué funcionan?” (Ferrari y Farfán, 2007, p. 498) o incluso la pregunta ¿para qué sirven? tan usual en nuestro día a día, es importante que el docente tenga claridad sobre lo que está trabajando, no solo desde el concepto matemático, sino también desde los elementos históricos, epistemológicos y didácticos.

Por otro lado, un valor agregado a la función logarítmica es su multiplicidad de aplicaciones; recordemos que Ramírez (2007) planteó que una de las tres fases en la enseñanza del concepto de función (lo cual aplica perfectamente a lo que se está abordando) es la **asimilación del concepto**, y que una de las acciones que debe realizar el alumno dentro de esta fase es la de **aplicar el concepto**. Por lo anterior, es importante abordar una aplicación de los logaritmos, pero no cualquiera, una que genere inquietudes en el aprendizaje de los estudiantes; al respecto, el docente de química manifestó tener dificultades en la compresión, por parte de los estudiantes, del concepto pH, manifestado en los trabajos y evaluaciones que le propuso a sus alumnos; además, teniendo que Lefort (2001) plantea que la pH-metría no habría surgido sin la ayuda de los logaritmos, es coherente pensar en el pH como el concepto aplicable de los logaritmos en el cual se centrará la propuesta.

A partir de lo anterior, surge el interrogante: ¿Cuál puede ser una propuesta didáctica apropiada para que los estudiantes de grado décimo del Colegio Ave María trabajen los logaritmos mediante el análisis de su aplicación a un tema específico de otra área, como la escala de pH usada en química?

En este documento, se pretende diseñar una secuencia apropiada para trabajar el concepto de logaritmo, a partir del desarrollo histórico, teniendo en cuenta las propiedades y aplicaciones, por lo cual se tuvo en cuenta las diversas perspectivas o miradas de los precursores de los logaritmos; cabe resaltar que todas las maneras de trabajar el concepto no se tendrán en cuenta en la secuencia, pero son de especial relevancia para el docente que la implemente (no sólo para el autor), ya que del buen manejo del objeto matemático depende la claridad con la que se aborda. Dicha secuencia se propone para los estudiantes de grado décimo del Colegio Ave María; colegio de carácter privado ubicado en la localidad 4 (San Cristóbal); con una población de 652 estudiantes de estratos 2, 3 y 4; el Colegio Ave María es mixto y administrado por la comunidad de misioneras de la Madre Laura.

1. Aspectos históricos y epistemológicos

La historia de la matemática constituye una base importante en la comprensión del conocimiento; entender el contexto en el cual se desarrolló cierto tema posiblemente pueda ayudar a generar un mejor aprendizaje en los estudiantes.
En este capítulo se realiza un recorrido histórico del desarrollo y evolución del concepto de los logaritmos, así como los principales actores involucrados en el desarrollo de dicho concepto.

1.1 Noción de logaritmo, definición y propiedades

Los logaritmos son un objeto matemático que fue inventando a lo largo de la historia, y requirió de aportes de diferentes personajes a lo largo de la historia, algunos de los aportes se enuncian a continuación.

1.1.1 Mesopotamia y las tablillas babilónicas

Según Boyer (1968), la civilización mesopotámica fue, posiblemente, la primera civilización establecida en la Tierra, hacia el año 4.000 a.C. Dicha civilización surgió entre los ríos Eufrates y Tigris, de ahí viene su nombre (Mesopotamia significa “región entre ríos”).
Durante la civilización Mesopotámica se destacaron cuatro pueblos: Sumerios, Acadios, Babilonios y Asirios. Los Sumerios, por ejemplo, desarrollaron la escritura cuneiforme que fue, probablemente, la primera forma de escritura.
Por otro lado, gracias a tablillas que datan entre el año 1.800 y 1.600 a.C., se ha observado que la civilización mesopotámica tenía un sistema de numeración completamente desarrollado, el sistema sexagesimal, o sea en base 60; gracias al sistema de numeración posicional podían trabajar con fracciones sexagesimales (con denominador 60).

En la colección de Yale, en la tablilla 7.289 (de la época babilónica antigua, 1792 – 1595 a.C.), se incluye el cálculo de la raíz cuadrada de dos con tres cifras sexagesimales; los babilonios podían calcular raíces cuadradas, tenían tablas de multiplicación, inversos, cuadrados, cubos y raíces cúbicas, todas en base sexagesimal, además resolvían divisiones con un método parecido al nuestro.

Adicionalmente, se ha encontrado tablas que contienen potencias sucesivas de un número (es decir, tablas exponenciales) y, más allá, había problemas en los que planteaban buscar el exponente al cual debía elevarse cierto número para obtener otro (equivalente, hoy en día, a calcular el logaritmo de un número en una base dada). Dichas tablas eran utilizadas para resolver ciertos problemas específicos y no para simplificar cálculos.

1.1.2 Arquímedes

Arquímedes (aprox. 287 – 212 a.C.) vivió y murió en Siracusa, sin embargo, parece que estudió en Alejandría, ciudad que fue el centro de la actividad matemática de toda la época Helenística, según Boyer (1968).

Arquímedes fue un gran inventor en la época, debido (posiblemente) a las guerras que se afrontaban por esos días, porque le llevaron a crear instrumentos que les permitiera (en Siracusa) defenderse y atacar tropas enemigas; sin embargo, él murió cuando Siracusa cayó por los romanos, a manos de uno de los soldados.

Trabajó en torno a la ley de la palanca, el principio hidrostático, relaciones entre sucesiones aritméticas y geométricas (una idea de logaritmos), trisección del ángulo (uno de los tres problemas clásicos de la geometría), entre muchos otros temas de matemáticas. En particular, respecto al tema del presente trabajo, Arquímedes comparó dos sucesiones, una aritmética y otra geométrica; a la sucesión aritmética se le llamará logaritmo y a la sucesión geométrica antilogaritmo (Tapia, 2003). Básicamente la idea era la siguiente:

1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	16	32	64	128

Tabla 1-1. Relación de Arquímedes.

En la tabla, la sucesión de arriba es la sucesión aritmética (llamada logaritmo) y la de abajo es la geométrica (llamada antilogaritmo). Según Hoeben, citado por Tapia (2003), la regla de Arquímedes dice que:

> para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de

> aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado. (p.6).

1.1.3 Chuquet y Stifel

Nota histórica, previa a Chuquet y Stifel: Ibn-Yunus, quien vivió en Egipto entre los años 950 y 1009 (aproximadamente), introdujo la fórmula $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$, la cual (antes de los logaritmos) ayudaba a convertir productos en sumas; dicha fórmula, según Boyer (1968)

> *es una de las cuatro fórmulas de transformación (de productos a suma) que se utilizaron en Europa durante el siglo XVI, antes de que se inventaran los logaritmos, para convertir productos en sumas por el método conocido como "prostaphairesis" (término griego para la suma y la resta). (p.311)*

El término prostaphairesis se dice en español prostafairesis. Las cuatro fórmulas que constituyen el método de prostafairesis fueron utilizadas, aparentemente, por Werner para simplificar cálculos astronómicos.

¿Si los logaritmos se hubiesen inventado primero, y en esa zona, le hubieran colocado ese nombre?

Nicolás Chuquet nació en París, alrededor del año 1450 (no se tiene una fecha exacta, y el año es incierto) y murió en Lyon, al parecer en 1500. Estudió medicina y la ejerció en Lyon, sin embargo, hizo aportes importantes a la matemática con su obra "*Triparty*"; En el *Triparty* de Chuquet se evidencian algunas propiedades de la potenciación, que pudieron incurrir en que la suma de los exponentes corresponde al producto de las potencias, esto daba pie a una idea de los logaritmos. Es importante aclarar que Chuquet trabajó con potencias de 2 desde 0 hasta 20.

Por su lado Michael Stifel (1487-1567 d.C.), quien fue un matemático alemán (pero dedicó gran parte de su vida a la religión), en su *Arithmetica integra* extendió la idea entre progresiones aritméticas y geométricas a exponentes negativos de 2, sin usar la notación exponencial.

1.1.4 Bürgi

Jobst Bürgi (1552-1632), quien era un fabricante de relojes, trabajó en la invención de los logaritmos, posiblemente, antes de Napier, sin embargo, publicó sus resultados después. La idea de Bürgi era independiente a la de Napier, sin embargo, no estaban tan alejadas; los logaritmos de Bürgi tenían las mismas desventajas que los de Napier: no cumplían con las propiedades que conocemos hoy en día.

Podríamos situar los orígenes de la idea de Bürgi hacia la época en la que trabajó con Kepler en el observatorio astronómico de Praga, donde le ayudaba en las observaciones y cálculos. Él trabajó alrededor de 8 años en la construcción de una tabla de logaritmos, teniendo en cuenta una base del tipo de Stevin: $a(1+r)^n$; Bürgi tomó $r = \frac{1}{10^4}$, para que su tabla fuera lo más precisa posible, y para no trabajar con fracciones colocó $a = 10^8$, por lo cual su progresión geométrica era de la forma $10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^k$ (con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Además, Bürgi hizo corresponder los términos de su progresión geométrica con $0, 10, 20, 30, \ldots$ de lo cual obtuvo dos sucesiones:

10^8	$10^8(1+10^{-4})$	$10^8(1+10^{-4})^2$	$10^8(1+10^{-4})^3$
0	10	20	30

Tabla 1-2. Relación de Bürgi.

La primera serie de la tabla la imprimió en color negro (se denominaban los negros) y la segunda en color rojo (se denominaban los rojos). Los rojos constituían los logaritmos de los negros divididos entre 10^8 y con base $A = \sqrt[10]{1{,}0001}$ (Ríbnikov, 1987). Sin embargo, Bürgi no publicó sus resultados hasta el año 1620.
Para ilustrar la tabla con la notación que usamos, tendríamos, por ejemplo:
$20 = \log_A \frac{10^8(1+10^{-4})^2}{10^8}$, ya que $\left(\sqrt[10]{1{,}0001}\right)^{20} = (1+10^{-4})^2$.

1.1.5 Napier

John Napier nació en Merchiston (Edinburgo), Escocia, en 1550 y murió el 4 de abril de 1617 en Edinburgo, Escocia. Napier no era un matemático profesional y se dice que estuvo

alrededor de 20 años trabajando en la invención de los logaritmos, antes de publicar sus resultados en 1614 en su obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (“Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos).

Posiblemente Napier conocía los trabajos de Arquímedes y Stifel (y posiblemente los de Chuquet, aunque Stifel recoge y amplía el trabajo de él); en las sucesiones trabajadas por ellos se notaba que el exponente del producto de las potencias correspondía con la suma de los exponentes de las potencias, y el exponente del cociente de las potencias correspondía con la resta de los exponentes.

Otro factor importante es el hecho de que Napier conoció sobre el método de prostafairesis, el cual se llevaba a cabo en Dinamarca por esa época, esto pudo conllevar a que Napier tratara de terminar rápidamente su invención de los logaritmos. Napier relacionó dos distancias para sus logaritmos y además fue quien acuñó el término logaritmo (logos [razón] y arithmos [número], dos palabras griegas), lo cual sugiere que las tablas de Napier fueron calculadas numéricamente y no geométricamente; teniendo en cuenta la idea moderna de la versión de Napier, tomando como referencia a Boyer (1968) y Ríbnikov (1987) (de manera simplificada; para una descripción exacta se sugiere revisar “The construction of logarithms with a catalogue of Napier’s Works”) se tiene:

Sea $\overline{AB}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$, supongamos que se mueven los puntos M y m (desde A y A_1, respectivamente), pasando por los puntos $M_1, M_2, M_3, \ldots$ y $m_1, m_2, m_3, \ldots$ como lo muestra la siguiente imagen:

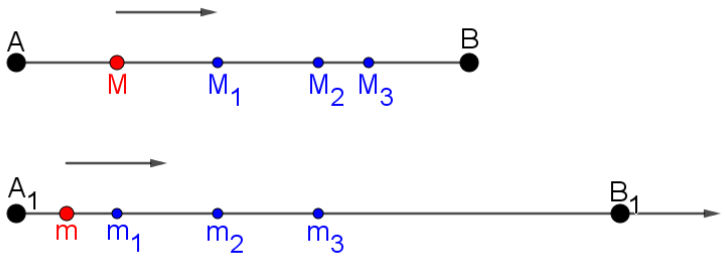


Ilustración 1-1. “Construcción de la idea de Napier”.

Supongamos que la velocidad inicial de ambos puntos es la misma e igual a 10^7, pero cuando inicia el desplazamiento m se mueve con velocidad constante (10^7) y M se mueve con una velocidad decreciente y proporcional a la distancia restante hasta B; tomemos

$AB = 10^7$, Velocidad inicial de $M = 10^7$, $M_k B = x$ y $A_1 m_k = y$. En notación actual, tendríamos:

$$\frac{dx}{dt} = -x \qquad \frac{dy}{dt} = 10^7$$
$$AB = 10^7 = x_0 \qquad y_0 = 0$$

De lo que se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{10^7}{-x} = \frac{-10^7}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-10^7}{x}$$

Resolviendo la ecuación diferencial, por variables separables tendríamos:

$$dy = \frac{-10^7}{x}dx \rightarrow \int dy = \int \frac{-10^7}{x}dx \rightarrow y = -10^7 \ln(c \cdot x)$$

Calculando el valor de c, a partir de los valores iniciales se tiene:

$$0 = -10^7 \ln(10^7 c) \rightarrow \ln(10^7 c) = 0 \rightarrow 10^7 c = e^0 \rightarrow c = \frac{1}{10^7}$$

Por lo cual, tenemos

$$y = -10^7 \ln\left(\frac{1}{10^7}x\right) \rightarrow \frac{y}{10^7} = \ln\left(\frac{1}{10^7}x\right)^{-1} \rightarrow \frac{y}{10^7} = \log_e\left(\frac{1}{10^7}x\right)^{-1}$$

Utilizando que $\log_p(b)^{-1} = \log_{\frac{1}{p}} b$, se obtiene que

$$\frac{y}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{10^7}x\right)$$

Por lo cual, aunque Napier no usó una base en particular para sus logaritmos, por sus cálculos, se puede inferir que si las distancias se dividen entre 10^7, la base era $\frac{1}{e}$.

Sin embargo, para entender la idea de Napier se tomará como referencia a Ríbnikov (1987), teniendo en cuenta la Ilustración 1-1, además de los siguientes datos:

Suponiendo que $AB = 1$, $v_0 = 1$, v_m constante y velocidad de M proporcional a la distancia restante hasta B, supongamos que AB se divide en 10^7 partes, recorriéndola en 10^7 instantes de tiempo; se tendría:

$$BM_1 = 1 - \frac{1}{10^7}; M_1M_2 = \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$$

$$\rightarrow M_2B = M_1B - M_1M_2 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) - \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2; etc$$

Lo cual es una progresión geométrica, donde $r = 1 - \frac{1}{10^7}$, de ahí se forman dos sucesiones de valores:

$\boldsymbol{M_kB}$	1	$1 - \frac{1}{10^7}$	$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2$	$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3$	…
$\boldsymbol{A_1m_k}$	0	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{2}{10^7}$	$\frac{3}{10^7}$	…

Tabla 1-3. “Idea, adaptada, de Logaritmos de Napier” Tomado de Historia de las Matemáticas (Ríbnikov, pág. 144).

Sin embargo, Napier tomó $AB = 10^7$, con el fin de evadir los decimales, por lo cual la tabla 1-3 quedaría como:

$\boldsymbol{M_kB}$	10^7	$10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$	$10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2$	$10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3$	…
$\boldsymbol{A_1m_k}$	0	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{2}{10^7}$	$\frac{3}{10^7}$	…

Tabla 1-4. "Idea original de los Logaritmos de Napier.

Donde los números de la segunda fila es a los que Napier llamó logaritmos de los números de la primera fila.

Podemos observar la relación entre las tablas 1-2 y 1-4 (“Relación de Bürgi” e “Idea original de los Logaritmos de Napier”, respectivamente); ambos trabajaron con una progresión geométrica y una progresión aritmética, el término general de la progresión geométrica de Bürgi era $10^8(1 + 10^{-4})^{n-1}$ y el de Napier era $10^7(1 - 10^{-7})^{n-1}$ cuya similitud es fácilmente detectable, la razón de ambas progresiones es muy cercana a 1, la razón de la primera progresión geométrica es $1{,}0001$ y la razón de la segunda progresión geométrica es 0,9999999. Además, podemos observar que el término general de la progresión aritmética de Bürgi es $10 \cdot (n - 1)$ y el de Napier es $10^{-7} \cdot (n - 1)$, los cuales difieren entre

sí, sin embargo, es relevante observar que ambos se comportan de manera similar, observemos:

Supongamos que tenemos una progresión geométrica cuyo término general es $a_1 \cdot r^{n-1}$ y una progresión geométrica cuyo término general es $(n-1) \cdot d$, podemos relacionar ambas progresiones (de acuerdo a la idea de Bürgi y Napier) mediante la siguiente igualdad (para determinada posición n):

$$(n-1) \cdot d = \log_{\sqrt[d]{r}} \frac{a_1 \cdot r^{n-1}}{a_1}$$

Dicha igualdad es cierta porque

$$(n-1) \cdot d = \log_{\sqrt[d]{r}} \frac{a_1 \cdot r^{n-1}}{a_1} \rightarrow \left(\sqrt[d]{r}\right)^{(n-1)d} = r^{n-1}$$

$$\rightarrow \left(r^{\frac{1}{d}}\right)^{(n-1)d} = r^{n-1}$$

Lo cual nos sirve como base para poder crear infinidad de tablas similares a las de Bürgi y Napier.

Por otro lado, podemos observar qué sucede con las propiedades de los logaritmos de Napier, a partir de la tabla 1-4, y teniendo en cuenta las propiedades que actualmente conocemos (y utilizamos) de los logaritmos:

$\boldsymbol{M_k B}$	10^7	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$	…
$\boldsymbol{A_1 m_k}$	0	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{2}{10^7}$	$\frac{3}{10^7}$	…

Propiedades de Napier	**Propiedades actuales**
$\log_A N_1 + \log_A N_2 = \log_A \frac{N_1 \cdot N_2}{10^{-7}}$	$\log N_1 + \log N_2 = \log(N_1 \cdot N_2)$
$\log_A N_1 - \log_A N_2 = \log_A \left(10^{-7} \frac{N_1}{N_2}\right)$	$\log N_1 - \log N_2 = \log\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$
$p \cdot \log_A N = \log_A \left(\frac{N^p}{10^{7(p-1)}}\right)$	$p \cdot \log N = \log(N^p)$

Tabla 1-5. “Diferencias en las propiedades de los logaritmos”.

Verifiquemos la veracidad de la tabla 1-5, teniendo en cuenta que A es la base de los logaritmos de Napier:

Propiedad 1. En la tabla 1-4 observamos que (teniendo en cuenta que las igualdades serían las relaciones establecidas por Napier):

$$10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})$$
$$2\cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$

Ahora, tratando de verificar que se cumpla la propiedad que conocemos en la actualidad, se obtiene:

$$10^7 + 2\cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7}) + \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$
$$3\cdot 10^{-7} = \log_A[10^7(1-10^{-7})\cdot 10^7(1-10^{-7})] = \log_A[(10^7)^2(1-10^{-7})^3]$$

Lo cual es falso, ya que $3\cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^3$, por lo cual (en los logaritmos de Napier), si $L_1 = \log_A N_1$ y $L_2 = \log_A N_2$, entonces $L_1 + L_2 = \log_A \frac{N_1\cdot N_2}{10^{-7}}$.

Propiedad 2. En la tabla 1-4 observamos que (teniendo en cuenta que las igualdades serían las relaciones establecidas por Napier):

$$2\cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$
$$3\cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^3$$

Ahora, tratando de verificar que se cumpla la propiedad que conocemos en la actualidad, se obtiene:

$$3\cdot 10^7 - 2\cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^3 - \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$
$$10^{-7} = \log_A\left[\frac{10^7(1-10^{-7})^3}{10^7(1-10^{-7})^2}\right] = \log_A[1-10^{-7}]$$

Lo cual es falso, ya que $10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})$, por lo cual (en los logaritmos de Napier), si $L_1 = \log_A N_1$ y $L_2 = \log_A N_2$, entonces $L_1 - L_2 = \log_A\left(10^{-7}\frac{N_1}{N_2}\right)$.

Propiedad 3. En la tabla 1-4 observamos que (teniendo en cuenta que las igualdades serían las relaciones establecidas por Napier):

$$2\cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$

Supongamos un $p = 3$, tratando de verificar que se cumpla la propiedad que conocemos en la actualidad, se obtiene:

$$3\cdot 2\cdot 10^{-7} = 3\cdot \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$
$$6\cdot 10^{-7} = \log_A[10^7(1-10^{-7})^2]^3 = \log_A[(10^7)^3(1-10)^6]$$

Lo cual es falso, ya que $6 \cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^6$, por lo cual deberíamos dividir entre $(10^7)^2$ el argumento del logaritmo; como la propiedad no es tan evidente, utilizaremos un segundo ejemplo que la clarifique.

Ejemplo 2:

$$2 \cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$

Supongamos un $p = 2$, tratando de verificar que se cumpla la propiedad que conocemos en la actualidad, se obtiene:

$$2 \cdot 2 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot \log_A 10^7(1-10^{-7})^2$$

$$4 \cdot 10^{-7} = \log_A[10^7(1-10^{-7})^2]^2 = \log_A[(10^7)^2(1-10)^4]$$

Lo cual es falso, ya que $4 \cdot 10^{-7} = \log_A 10^7(1-10^{-7})^4$, por lo cual deberíamos dividir entre $(10^7)^1$ el argumento del logaritmo.

Por lo cual (en los logaritmos de Napier), si $L = \log_A N$ y p es un número natural, entonces $p \cdot \log_A N = \log_A\left(\frac{N^p}{10^{7(p-1)}}\right)$.

Se podrían establecer, de una manera similar, las propiedades de los logaritmos construidos por Bürgi; cabe señalar que además de tener unos resultados similares (Napier y Bürgi), también fue similar la motivación para realizar dichos trabajos, ambos **querían encontrar una manera de expresar multiplicaciones (y divisiones) en sumas (y restas)**, que podríamos tomar como la propiedad fundamental de los logaritmos, pero **de una manera más ágil que la prostafairesis**; Además, y a pesar, de que los logaritmos de Napier llevaban implícita la idea de función logarítmica no fue desarrollada esta idea, ya que él no estaba interesado en el aspecto funcional. Dos años después de que Napier muriera aparece su segundo tratado sobre logaritmos, en el cual expone los métodos que utilizó para construir sus tablas. Para comprender la importancia del descubrimiento de los logaritmos, observemos el siguiente ejemplo:

Se requiere multiplicar $8{,}3908$ con $3{,}768$. Teniendo en cuenta que en la época de Napier no había calculadoras, es una operación algo extensa, sin embargo, teniendo una tabla de logaritmos (en este caso supondré que tenemos una tabla de logaritmos, cuya base es 10), por lo cual tendríamos

$$\log 8{,}3908 \approx 0{,}923803$$

$$\log 3{,}768 \approx 0{,}576111$$

Utilizando las propiedades que conocemos actualmente de los logaritmos, tenemos

$$\log(8{,}3908 \times 3{,}768) = \log 8{,}3908 + \log 3{,}768 \approx 0{,}923803 + 0{,}57611$$

$$\log(8{,}3908 \times 3{,}768) \approx 1{,}499914$$

Por lo cual, al buscar el número cuyo logaritmo (en base 10) dé $1{,}499914$ tenemos que dicho valor es, aproximadamente, $31{,}61651521$. El resultado de $8{,}3908 \times 3{,}768$ es $31{,}6165344$; ambos valores difieren a partir de su quinta cifra decimal, lo cual es un resultado significativamente cercano.

1.1.6 Briggs

Según Boyer (1986) y Cajori (1919), Henri Briggs (1551-1630) fue un matemático inglés que visitó a Napier en 1615 para discutir algunas modificaciones sobre los logaritmos, él proponía trabajar con potencias de 10, a lo cual Napier aseguró estar de acuerdo e incluso ya lo había pensado. Napier quería trabajar sus tablas con las igualdades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 10^{10}$ (la segunda igualdad no es válida, de acuerdo a las relaciones que conocemos actualmente, pero era una simple idea de Napier), sin embargo, llegaron al acuerdo de que el logaritmo de uno fuese 0 (efectivamente) y que el logaritmo de diez fuese uno.

Después de la muerte de Napier, Briggs continuó la tarea de construir tablas logarítmicas para la base 10, dichos logaritmos fueron llamados logaritmos vulgares o de Briggs. Los cuales cumplían las propiedades que hoy en día conocemos. Al mismo tiempo que Briggs trabajaba las tablas de logaritmos vulgares, John Speidell (1600-1634), quien fue un matemático inglés, calculaba los logaritmos naturales (o neperianos, llamados así por la base en la que trabajaba Napier) publicando sus resultados en su obra “Nuevos logaritmos”.

1.2 Relación del logaritmo con curvas y series, y función logarítmica

González y Vargas (2007), y Boyer (1986), plantean que Descartes descubrió la espiral logarítmica o equiangular como posible trayectoria de caída de un cuerpo a través de la tierra en rotación, sin embargo, él rechazaba las curvas no-geométricas, y por ende Torricelli fue quien estudió la rectificación de dicha curva. Posteriormente, Jacques Bernoulli (1654-1705) siguió el estudio de la espiral logarítmica, encontrando ciertas propiedades que no habían sido descritas anteriormente.

Por otro lado, matemáticos como James Gregory (1638-1675), William Brouncker (1620-1684) y Nicolaus Mercator (1620-1687) descubrieron series infinitas para expresar logaritmos, sin embargo, el trabajo de Mercator era más simple y por ende es el que se reconoció en aquel momento.

Euler por su parte también estuvo trabajando en el desarrollo (en series) del $\ln \frac{1}{1-x}$, poniendo especial atención en el caso que $x = 1$.

Además, Evangelista Torricelli (1608-1647) fue el primero en representar gráficamente la función logarítmica, 30 años después de la muerte del inventor de los logaritmos; además calculó el área limitada por la curva, su asíntota y el volumen de ésta, al hacerla girar respecto al eje x.

1.3 Logaritmo de números negativos

González y Vargas (2007), y Boyer (1986), exponen que Jean Bernoulli creía, equívocamente, que $\log(-n) = \log(n)$, ya que pensaba que la curva logarítmica debía ser simétrica respecto al eje y; Leibniz, quien sostenía correspondencia al respecto con Bernoulli, pensaba que los números negativos no tenían logaritmo en los números reales. D'Alembert (1717-1783) defendía que $\log(-x) = \log(x)$, lo cual surgió de pensar erróneamente que: como $\log(-1)^2 = \log(1)^2$, pensaban que, al aplicar las propiedades de los logaritmos $2\log(-1) = 2\log(1)$, y multiplicando por el inverso multiplicativo de 2 se obtiene que $\log(-1) = \log(1)$ y de ahí deducen la generalidad, lo cual es una falacia.

Euler demostró que Jean Bernoulli y D'Alembert estaban equivocados al pensar que la solución del logaritmo de un número negativo era real, por el contrario, son imaginarios; además demostró que un número real (positivo o negativo) tiene infinitas soluciones.

1.4 Aspectos relevantes de la historia de los logaritmos en la secuencia de actividades

En la secuencia de actividades sólo se tendrán en cuenta algunos de los elementos anteriormente citados, entre los que se encuentran las preguntas que se hacían los babilónicos, las relaciones que estableció Arquímedes y fueron trabajadas posteriormente por Chuquet y Stifel, las igualdades establecidas por Napier y Bürgi, algunos resultados de Briggs (como la base en la que trabajó), gráficas de funciones logarítmicas como lo vio Torricelli y el hecho de que el logaritmo de los números negativos no estén definidos en el conjunto de los números reales (como lo demostró Euler), según Boyer (1986).

1.5 pH

Recio del Bosque (2012, p. 166) se refiere al pH como "una escala matemática en la que se expresa la concentración de los iones hidronio $(H_3O)^{1+}$ de una solución, como un número que va desde 0 hasta 14", además advierte que "La escala de pH es una forma conveniente para describir la concentración de iones hidronio"; adicionalmente, Brown, LeMay, Burdge y Bursten (2004), plantean que el $\boldsymbol{pH}$ se calcula como "el logaritmo negativo de base 10 de $[H^+]$", donde $[H^+]$ representa la concentración de hidrógenos que se encuentran en disolución acuosa. La noción y la escala de lo que conocemos como pH surgió de considerar que el agua se disocia dejando libres iones H^+ (hidronios) e iones OH^- (hidroxilos).

Sin embargo, hay toda una construcción histórica que conllevó al descubrimiento del pH, que no se abordará en este trabajo de grado, pero se puede consultar en el trabajo de grado, para optar por el título de Magister en Docencia de la Química (en la Universidad Pedagógica Nacional): "pH, HISTORIA DE UN CONCEPTO. ANÁLISIS EN TEXTOS DE EDUCACIÓN SUPERIOR" de Adriana Alméciga y Maryluz Muñoz (2013).

1.5.1 Sören Sörensen

"El danés Sören Peter Lauritz Sörensen (1868-1939), centró su trabajo científico en el campo de la bioquímica al dirigir los laboratorios químicos de la fábrica de cervezas Carlsberg. Su invención sobre la incidencia de la acidez en el funcionamiento de las

enzimas de fermentación, lo llevó en 1909 a proponer el concepto pH como respuesta a la necesidad de una medida clara y precisa de la acidez.” (Alméciga y Muñoz, 2013).

Sin embargo, en 1919 y con ayuda del científico Linderström, Sörensen propone una nueva definición de pH (a partir de los logaritmos); un aspecto importante en la historia es el por qué se escribe así pH, lo cual según Alméciga y Muñoz (2013) sucedió al realizarse la traducción del trabajo de Sörensen al alemán, en la cual los tipógrafos consideraron que era más cómodo escribirlo de esa manera y no P_H como inicialmente estaba.

2. Aspectos disciplinares

En la prueba diagnóstico se observó que los estudiantes, en su mayoría, reconocen el concepto de logaritmo como operación, aunque algunos tienen falencias; por lo cual, se reconoce la importancia de que el docente maneje las diferentes formas de presentar los logaritmos que dependen del nivel o grado de escolaridad de los estudiantes, es un hecho claro que para lograr que los estudiantes entiendan un concepto, el profesor debe tener un manejo profundo de éste, por tal razón en las secciones de este capítulo se presentan cuatro formas diferentes de abordar los logaritmos: 1. Una operación aritmética, relacionándola con la potenciación; 2. Como función inversa de la función exponencial; 3. Como integral, y; 4. Como relación entre dos distancias. La idea es que, dependiendo del grado de escolaridad o nivel, el docente seleccione la más adecuada.
Posteriormente, se tendrá en cuenta la aplicación de los logaritmos a la escala de pH.

2.1 El logaritmo como operación

Los primeros en hacerse preguntas sobre el logaritmo como operación fueron los babilónicos, teniendo en cuenta la palabra logaritmo como el exponente al cual debe elevarse un número para obtener otro número (establecido con antelación), es decir, pensaron el logaritmo como operación inversa a la potenciación; posiblemente la pregunta fue ¿cuántas veces debe multiplicarse un número para conseguir otro?
Por ejemplo,

- ¿Cuántas veces debemos multiplicar el número 9 para obtener 729?

La respuesta es 3; es decir, $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$

- ¿Cuántas veces debemos multiplicar el número 4 para obtener 256?

La respuesta es 4; es decir $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

Por lo cual, observamos que la pregunta ¿cuántas veces debe multiplicarse el número a para obtener el número b?, equivale a preguntarnos ¿a qué exponente debo elevar el número a para obtener el número b?, teniendo en cuenta la idea de potenciación; en la notación que conocemos se tendría:

$$\log_a b = n \leftrightarrow a^n = b$$

En la notación $\log_a b = n$, a se llama base del logaritmo (en relación con la potenciación, a debe ser un número positivo diferente de 1), b se llama argumento y n logaritmo (que es el exponente de la forma equivalente en potenciación); así, las preguntas que se realizaron anteriormente (pensando como los babilónicos), son equivalente a escribir: $\log_9 729 = 3$ y $\log_4 256 = 4$; por lo cual, una estrategia para abordar logaritmos, introductoria y como opción en el cálculo (siempre y cuando el resultado dé un número natural), es preguntarle al estudiante cuántas veces debe multiplicar un número (base del logaritmo) para obtener cierto resultado (lo cual se tuvo en cuenta, implícitamente, en la actividad 1 de la secuencia didáctica propuesta).

2.1.1 Propiedades de los logaritmos a partir de la relación entre una sucesión aritmética y otra geométrica

Arquímedes estableció una relación entre la sucesión aritmética de los números naturales y la sucesión geométrica de potencias de dos, de tal forma que la segunda es el resultado de una potencia con base 2 y la primera un logaritmo con base 2; Chuquet y Stifel ampliaron la idea, el primero con potencias mayores de 2 a las que consideró Arquímedes y el segundo considerando potencias negativas.

Potenciación con base 2

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Logaritmación en base 2

Tabla 2-1. Relación extendida, base 2.

Teniendo en cuenta los valores de cada fila (x y y), se pueden establecer algunas de las propiedades de la potenciación y logaritmación, por ejemplo:

- $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$
- $-2 + 1 = -1$

En la primera relación, $\frac{1}{4} \cdot 2 = 2^{-2} \cdot 2^1 = 2^{-2+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, se observa una de las propiedades de la potenciación ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$).

En la segunda relación, $\log_2\left(\frac{1}{4}\cdot 2\right) = \log_2\frac{1}{4} + \log_2 2 = -2 + 1 = -1$, se observa una de las propiedades de la logaritmación ($\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$).

Cabe resaltar que el trabajo anterior (establecer propiedades basados en la tabla de Arquímedes) es sencillo y útil para que los estudiantes observen patrones, establezcan conjeturas respecto a las propiedades de la logaritmación, y posteriormente las puedan demostrar, haciendo uso de la definición de logaritmación (como operación inversa a la potenciación). Por tal razón, en una de las actividades propuestas (como Anexo) se incluye un ejercicio de este tipo.

Además, de manera similar, se pueden establecer más propiedades de la potenciación y logaritmación; se utilizará la Tabla 1-1 para deducir algunas de las otras relaciones (propiedades) que conocemos actualmente, de los logaritmos:

1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	16	32	64	128

Propiedad 1: Sabemos, por ejemplo, que $2 = \log_2 4$ y $3 = \log_2 8$, además $2 + 3 = 5$, y $5 = \log_2 32$, por lo cual $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$, y sabiendo que $4 \cdot 8 = 32$, deducimos que $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 4 \cdot 8 = \log_2 32$. De manera general, se tiene:

$$\boldsymbol{\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)}$$

Propiedad 2: De la tabla, tenemos: $7 = \log_2 128$ y $5 = \log_2 32$, y como $7 - 5 = 2$ y $2 = \log_2 4$, tendría que pasar que $\log_2 128 - \log_2 32 = \log_2 4$, lo cual se consigue si $\log_2 128 - \log_2 32 = \log_2\frac{128}{32} = \log_2 4$. De manera general, se tiene:

$$\boldsymbol{\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Propiedad 3: De la tabla, tenemos que $2 = \log_2 4$, ahora, multiplicando por un número natural tenemos (por ejemplo 3), tenemos: $3 \cdot 2 = 3 \cdot \log_2 4$, como $3 \cdot 2 = 6$, y $6 = \log_2 64$, entonces $3 \cdot \log_2 4 = \log_2 64$, por lo cual $3 \cdot \log_2 4 = \log_2 4^3 = \log_2 64$. De manera general, se tiene:

$$\boldsymbol{p \cdot \log_a x = \log_a(x^p)}$$

Algunas de dichas propiedades fueron utilizadas de manera implícita, es Oughtred (en el año 1650) el primero en hacerlas explícitas; Según González y Vargas (2007), Oughtred enunció las tres propiedades anteriores.

2.1.2 Demostración de las propiedades de los logaritmos

A continuación, se demostrarán las tres propiedades de los logaritmos enunciadas en la sección anterior, las cuales son de especial importancia en el manejo operacional y en algunos problemas de aplicación, así como la propiedad del cambio de base y una propiedad utilizada en el capítulo histórico:

En primera instancia, tenemos que tener en cuenta que $\log_a(a^n) = n$, lo cual es evidente al utilizar la definición de logaritmo como operación inversa a la potenciación; recordemos que la igualdad anterior es equivalente a escribir $a^n = a^n$.

A continuación, se demuestran las propiedades enunciadas en la sección 2.1.1:

Propiedad 1: Sean $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Demostración: Como $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, y siendo $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$, donde $m, n \in \mathbb{R}$, entonces $a^m = x$ y $a^n = y$, por lo que tenemos:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^m \cdot a^n) = \log_a(a^{m+n}) = m + n = \log_a x + \log_a y$$

Propiedad 2: Sean $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Demostración: Como $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, y siendo $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$, donde $m, n \in \mathbb{R}$, entonces $a^m = x$ y $a^n = y$, por lo que tenemos:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = \log_a(a^{m-n}) = m - n = \log_a x - \log_a y$$

Propiedad 3: Sean $a, x \in \mathbb{R}^+$ y $p \in \mathbb{R}$, entonces $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a x$

Demostración: Como $a, x \in \mathbb{R}^+$ y $p \in \mathbb{R}$, y siendo $\log_a x = m$, donde $m \in \mathbb{R}$, entonces $a^m = x$, por lo que tenemos:

$$\log_a(x^p) = \log_a[(a^m)^p] = \log_a(a^{m \cdot p}) = m \cdot p = p \cdot m = p \cdot \log_a x$$

Nota: En todas las demostraciones fue necesario el uso de la igualdad $\boldsymbol{\log_a(a^n) = n}$, que fue enunciado con antelación.

Posteriormente, Euler (en 1748) enuncia la propiedad de cambio de base de los logaritmos, a saber:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Propiedad del cambio de base: Sean $a, b, x \in \mathbb{R}^+$, entonces $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Demostración: Como $a, b, x \in \mathbb{R}^+$, y siendo $\log_a x = m$, donde $m \in \mathbb{R}$, entonces $a^m = x$, aplicando logaritmo en base b a ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$\log_b(a^m) = \log_b x \to m \cdot \log_b a = \log_b x \to m = \frac{\log_b x}{\log_b a} \to \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dicha propiedad es fundamental en el cálculo de logaritmos de base diferente a 10 y e, ya que la mayoría de las calculadoras sólo utilizan dichas bases.

Por último, una propiedad que se utilizó en el capítulo anterior es:

$$\log_{\frac{1}{p}} b = \log_p b^{-1}$$

La propiedad es cierta para $b,\ p \in \mathbb{R}^+$, ya que:

$\log_{\frac{1}{p}} b = z$, se puede expresar (a partir de su relación con la potenciación) como $\left(\frac{1}{p}\right)^z = b$.

Luego, por propiedades de la potenciación $p^{-z} = b$, elevando ambos miembros de la igualdad a la -1 obtenemos $(p^{-z})^{-1} = b^{-1} \to p^z = b^{-1}$, por lo cual $z = \log_p b^{-1}$.

2.2 El logaritmo como función inversa a la función exponencial

En primera instancia, se hablará de la función exponencial, sus propiedades y representación gráfica; posteriormente se explicará qué es la inversa de una función y qué condición se necesita para que una función tenga inversa, además de la relación entre la representación gráfica de una función y la de su inversa; por último, se abordará la función logarítmica como inversa de la exponencial, sus propiedades y representación gráfica.

2.2.1 Función Exponencial

Stewart, Redlin y Watson (2012) afirman que: “La función exponencial con base a está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.” (p. 302). Dicha definición será utilizada en esta sección.

Dominio y Rango:

La función exponencial está definida para todo x en el conjunto de los números reales, es decir: $Dom_f = (-\infty, \infty)$. Como la base es un número positivo (diferente de 1), al reemplazar x por cualquier número real, siempre se obtendrá un número positivo, por lo cual: $Ran_f = (0, \infty)$.

Propiedades que cumple la función exponencial:

i. f es monótona. En efecto, la función es creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$. Veámoslo en detalle:

a) Si $a > 1$ y $x < y$, $f(x) = a^x$ y $f(y) = a^y$. Como $x < y$, entonces existe algún $c \in \mathbb{R}$, tal que $x + c = y$ (Nótese que $c > 0$). Ahora, como $a > 1$ y $c > 0$, $a^c > 1^c$[1] (recordemos que $1^c = 1$); ahora, multiplicando a ambos lados de la desigualdad $a^c > 1$ por a^x (recordado que $a^x > 0$), tenemos que $a^c \cdot a^x > a^x$, y, por propiedad de la potenciación, tenemos $a^{c+x} > a^x \rightarrow a^y > a^x$, por lo cual $f(x) < f(y)$. (La función es creciente).

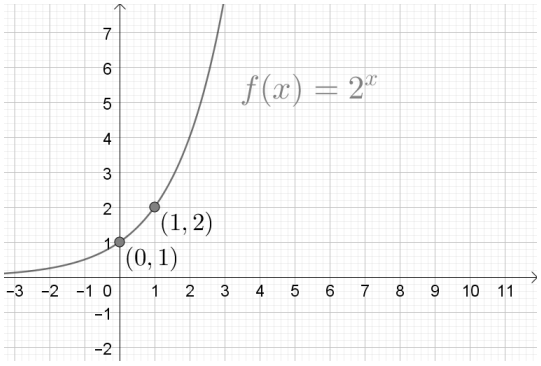


Ilustración 2-1. Función Exponencial Creciente.

b) Si $0 < a < 1$ y $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$. Como $x < y$, entonces existe algún $c \in \mathbb{R}$, tal que $x + c = y$ (Nótese que $c > 0$). Ahora, como $0 < a < 1$ y $c > 0$, $0 < a^c < 1^c$[2]; ahora, multiplicando a ambos lados de la desigualdad $a^c < 1$ por a^x (recordado que $0 < a^x < 1$, a^x es positivo), tenemos que $a^c \cdot a^x < a^x$, y, por propiedad de la potenciación, tenemos $a^{c+x} < a^x \rightarrow a^y < a^x$, por lo cual $f(x) > f(y)$. (La función es decreciente).

[1] Como $a > 1$, y suponiendo c un número natural, podemos multiplicar por a y 1 a cada lado de la desigualdad (a al lado izquierdo y 1 al lado derecho), y se tendría $a^2 > 1$; si dicho proceso se repite c, tendríamos $a^c > 1$, y extendiendo la idea para c racional o irracional, de acuerdo a como lo plantean Stewart, Redin y Watson (2012), se tiene que la propiedad es cierta para $c \in \mathbb{R}^+$.

[2] Para entender ésta desigualdad, pensemos en el $\lim_{c\to\infty} a$, como $0 < a < 1$ existe un número $b \in \mathbb{R}$, tal que $b = \frac{1}{a}$ (Nótese que $b > 1$), por lo cual $\lim_{c\to\infty} a = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{b}$, el cual tiende a 0.

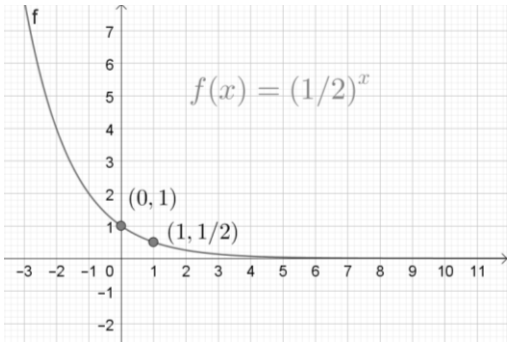


Ilustración 2-2. Función exponencial decreciente.

ii. f es inyectiva; es decir, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$

Suponiendo que el consecuente es falso (demostración por contradicción), es decir, $x \neq y$, tendríamos cuatro casos para evaluar:

a) $x < y$ y $a > 1$; sin embargo, dicho caso se revisó en el ítem i., en el cual se demostró que $f(x)$ es creciente, y se tendría que $f(x) < f(y)$, lo cual contradice el antecedente.

b) $x < y$ y $0 < a < 1$; sin embargo, dicho caso se revisó en el ítem i., en el cual se demostró que $f(x)$ es decreciente, y se tendría que $f(x) > f(y)$, lo cual contradice el antecedente.

c) $x > y$ y $a > 1$; análogo al caso a)

d) $x > y$ y $0 < a < 1$; análogo al caso b)

Por contradicción (y una comprobación exhaustiva de casos), queda demostrado que $x = y$.

iii. Puntos importantes: Toda función exponencial (que no haya sufrido alguna transformación) pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.

1: El punto $(0, 1) \in f$, donde $f(x) = a^x$.

Si $x = 0$, entonces $f(0) = a^0 = 1$.

2: El punto $(1, a) \in f$, donde $f(x) = a^x$.

Si $x = 1$, entonces $f(1) = a^1 = a$.

2.2.2 Funciones inversas

Reddy y Rasmussen (1990), y Muñoz (2002), nos dicen que f^{-1} es una relación inversa que asigna a cada elemento del rango de f un elemento del dominio de f, de tal manera

que, si f^{-1} es una función, nos "devuelve" al valor inicial, es decir, $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$; sin embargo, f^{-1} no siempre es una función, será una función si f es inyectiva.

La función exponencial es inyectiva, por lo cual posee función inversa; a continuación, indicaremos cuál es la función inversa a la exponencial:

Sea $y = f(x) = a^x \rightarrow \log_a y = \log_a a^x \rightarrow \log_a y = x$, intercambiando la variable dependiente e independiente se tiene:

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

Por lo cual $f^{-1}(x) = \log_a x$, que llamaremos función logarítmica. La función logarítmica es, entonces, la función inversa a la exponencial.

Una propiedad gráfica interesante entre una función y su inversa es que se reflejan respecto a la función $f(x) = x$, que llamamos función identidad, y se consigue de la composición entre la función y su inversa:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

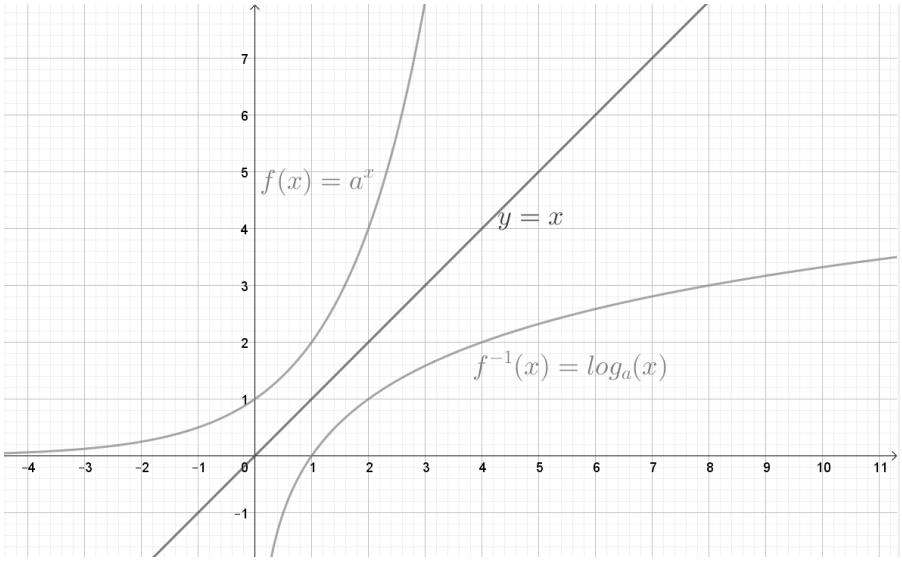


Ilustración 2-3. Relación gráfica entre una función y su función inversa.

2.2.3 Función logarítmica

La función logarítmica con base a está definida para todos los números reales positivos x por

$$f(x) = \log_a x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Dominio y Rango:

Dado que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial, el dominio de la función logarítmica es igual al rango de la función exponencial (ya que será nuestro conjunto de partida) y el rango de la función logarítmica es igual al dominio de la función exponencial, por lo cual: $Dom_f = (0, \infty)$ y $Ran_f = (-\infty, \infty)$.

Propiedades que cumple la función logarítmica:

i. f es inyectiva, es decir, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$

En efecto, como $f(x) = f(y) \rightarrow \log_a x = \log_a y$, suponiendo que el resultado de los logaritmos da z, y por definición de logaritmación (como operación inversa de la potenciación), tenemos que $a^z = x$ y $a^z = y$, por lo cual $x = y$.

ii. f es sobreyectiva, ya que el rango es el conjunto de los números reales.

Nota: Como $f(x)$ es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva.

iii. f es monótona. En efecto, la función es creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$. Veámoslo en detalle:

a) Si $a > 1$ y $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$

Supongamos que $\log_a x = m \rightarrow a^m = x$ y $\log_a y = n \rightarrow a^n = y$

Como $x < y$, entonces $a^m < a^n$, y como $a > 1$, se tiene que $m < n$; reemplazando $\log_a x < \log_a y \rightarrow f(x) < f(y)$. (La función es creciente).

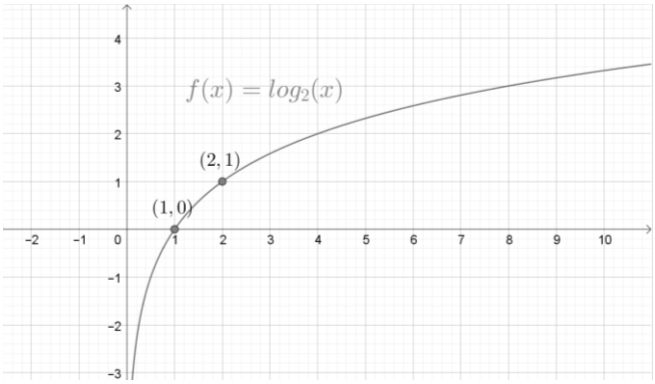


Ilustración 2-4. Función logarítmica creciente.

b) Si $0 < a < 1$ y $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$

Supongamos que $a = \frac{1}{b}$, donde $b > 1$, y que $\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} x = m \rightarrow \left(\frac{1}{b}\right)^m = x$ y $\log_a y = \log_{\frac{1}{b}} y = n \rightarrow \left(\frac{1}{b}\right)^n = y$

Como $x < y$, entonces $\left(\frac{1}{b}\right)^m < \left(\frac{1}{b}\right)^n \rightarrow b^{-m} < b^{-n}$, y como $b > 1$, se tiene que $-m < -n \rightarrow m > n$; reemplazando $\log_a x > \log_a y \rightarrow f(x) > f(y)$. (La función es decreciente).

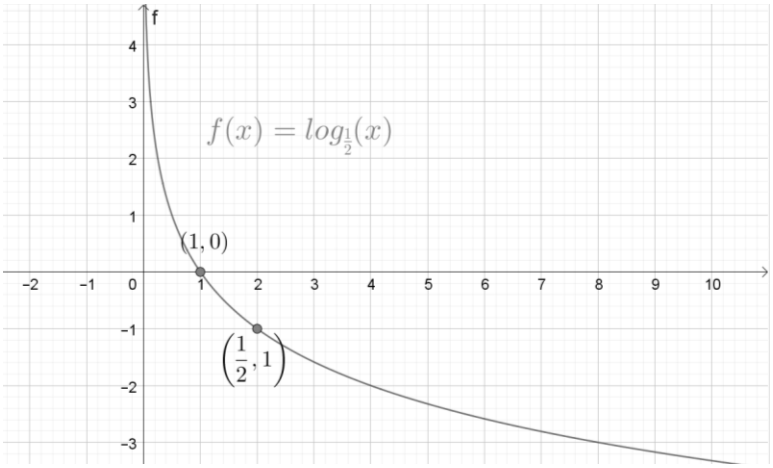


Ilustración 2-5. Función logarítmica decreciente.

iv. Puntos importantes: Toda función logarítmica (que no haya sufrido alguna transformación) pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Si $x = 1$, entonces $f(1) = \log_a 1 = 0$.

Si $x = a$, entonces $f(a) = \log_a a = 1$.

2.3 El logaritmo como integral

Apóstol (2001) explica de manera clara y completa el por qué conviene definir los logaritmos desde integrales; pensemos en la definición:

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

La cual es utilizada en la sección 2.1 y 2.2, si y es un número natural, entero o hasta racional, la definición tiene mucho sentido, y tendríamos cómo calcularlo; sin embargo, si y es un número irracional, los cálculos resultan complejos, en especial para un estudiante de grado décimo.

En esta sección, el logaritmo no se tomará como operación (inversa a la potenciación), ni como función inversa a la exponencial. El punto de partida será la propiedad que esperamos cumpla (la que nos permite expresar productos como sumas), y así encontraremos la función logarítmica, que posteriormente dará vida a la función exponencial.

2.3.1 Función logaritmo natural

Se quiere construir una función $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que cumpla con lo enunciado en el apartado 2.3 (que esté definido tanto para racionales como para irracionales, de una forma "sencilla"), de tal manera que inicialmente cumpla la siguiente propiedad:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

donde x, y, xy pertenezcan al dominio de la función. Recordemos que la idea principal que dio lugar a los logaritmos fue el hecho de poder expresar multiplicaciones como sumas, de ahí necesitamos que cumpla la propiedad enunciada.

La ecuación anterior recibe el nombre de ecuación funcional; una ecuación funcional puede tener muchas soluciones, y en ocasiones es difícil identificar algunas de ellas.

Por ejemplo, la función nula:

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, evidentemente es solución de la ecuación; ahora, si en la ecuación hacemos $y = 0$, tenemos:

$$f(x \cdot 0) = f(x) + f(0) \to f(0) = f(x) + f(0)$$

Concluimos que $f(x) = 0$, esto nos permite pensar que si queremos una función que satisfaga la ecuación, y además no sea constante, entonces dicha función no puede estar definida en 0, es decir $0 \notin Dom_f$.

Ahora, suponiendo que $Dom_f = \{-x, -1, 1, x\}$, y:

- $x = y = 1$, tenemos:

$$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \to f(1) = 2f(1)$$

Por lo cual, $f(1) = 0$.

- $x = y = -1$, se tiene:

$$f\big((-1) \cdot (-1)\big) = f(-1) + f(-1) \to f(1) = 2f(-1) \to 0 = 2f(-1)$$

Por lo que $f(-1) = 0$.

- $y = -1$, se tendrá:

$$f\big(x \cdot (-1)\big) = f(x) + f(-1) \to f(-x) = f(x) + f(-1)$$

entonces:

$$f(-x) = f(x)$$

Por lo cual, toda función que sea solución de la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$ debe ser una función par.

Además, suponiendo que la función que queremos encontrar tiene derivada en todo su dominio (recordemos que 0 no pertenece al dominio), y dejando y fijo (considerándolo constante) y derivando ambos miembros respecto a x, se obtiene:

$$f(xy) = f(x) + f(y\ ) \qquad \rightarrow \qquad yf'(xy) = f'(x)$$

Si $x = 1$, entonces

$$yf'(1 \cdot y) = f'(1) \qquad \rightarrow \qquad f'(y) = \frac{f'(1)}{y} \quad , \qquad y \neq 0$$

Como la función $f'(y)$ es continua en todo intervalo que no contenga a 0, es integrable en cada intervalo cerrado que no contenga dicho punto; podemos aplicar, además, el segundo teorema fundamental del cálculo:

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)dt = \int_c^x \frac{f'(1)}{t} dt = f'(1) \int_c^x \frac{1}{t} dt$$

Si $x > 0$, la ecuación es válida para cada $c > 0$. Si $x < 0$, la ecuación es válida para cada $c < 0$.

Además, como $f(1) = 0$, eligiendo $c = 1$ tenemos:

$$f(x) = f'(1) \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad si\ x > 0$$

Si x es negativa, $-x$ es positiva y como f es par, se tiene:

$$f(x) = f'(1) \int_1^{-x} \frac{1}{t} dt \qquad si\ x < 0$$

Podemos simplificar las dos expresiones anteriores en una sola:

$$f(x) = f'(1) \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt \qquad si\ x \neq 0$$

Como $f'(1) \neq 0$ cuando f no es idénticamente nula, y para nuestro propósito f no es idénticamente nula, podemos dividir entre $f'(1)$ a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{f(x)}{f'(1)} = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt \qquad si\ x < 0$$

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{f'(1)}$, tenemos:

$$g(x) = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt \qquad si\ x < 0$$

Por lo que $g(x)$ puede ser una solución de la ecuación funcional, en caso de que haya solución que no sea idénticamente nula, y además sea una solución diferenciable en todos los puntos del dominio (recordemos que $0 \notin Dom(f)$). Con lo cual definimos el logaritmo natural como sigue:

Definición: Si x es un número real positivo, entonces $\mathrm{L}(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Una definición que restringe el dominio a los números reales positivos, aunque, basados en la explicación, podríamos definir la función para todos los reales, excepto 0, como: $\mathrm{L}\,|x| = \int_1^{|x|} \frac{1}{t} dt$.

2.3.2 Propiedades de la función logaritmo natural

Sin importar que estemos abordando la función logarítmica desde otra de las maneras que tiene para definirse las propiedades encontradas son las mismas. La función logaritmo cumple lo siguiente:

i. $\mathrm{L}(1) = 0$, es decir, el punto $(1, 0)$ pertenece a la función

Demostración: Por el teorema fundamental del cálculo, y la definición de la sección anterior, sabemos que:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \mathrm{L}(x) - \mathrm{L}(1) = \mathrm{L}(x)$$

Por lo que $\mathrm{L}(1) = 0$.

ii. $L'(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$

Demostración: Como L es la integral indefinida de la función $\frac{1}{x}$, y $\frac{1}{x}$ es continua para todo $x > 0$, entonces por el teorema fundamental del cálculo $\frac{1}{x} = L'(x)$.

iii. $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$. Es decir, $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$, con $x, y > 0$. Recordemos que ésta fue la propiedad con la que iniciamos a buscar la función, sin embargo, no se ha demostrado que la cumpla; además dicha propiedad es fundamental en los inicios del logaritmo.

Demostración: Por definición tenemos

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt$$

Ahora, gracias a una de las propiedades de linealidad de las integrales (propiedad aditiva de la integral) tenemos:

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt$$

Sabemos, nuevamente por definición, que $\int_1^x \frac{1}{t}dt = L(x)$.

Por otro lado, tenemos $\int_x^{xy} \frac{1}{t}dt$; haciendo $u = \frac{t}{x} \rightarrow du = \frac{dt}{x}$, además, los nuevos límites de integración al hacer la sustitución serían 1 y b, ya que si $t = x \rightarrow u = 1$ y si $t = xy \rightarrow u = y$, por lo cual tenemos:

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{y} \frac{du}{u}$$

Y por la definición de función logarítmica tendríamos que

$$\int_1^{y} \frac{du}{u} = L(y)$$

Por lo tanto,

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

Nótese que la función logarítmica definida hasta ahora tiene por base el número e, y se conocen como logaritmos naturales o logaritmos neperianos; además, se escribe $\log_e x$ o $\ln x$.

2.3.3 Otras bases de la función logarítmica

Recordemos que en la sección 2.3.1 nos encontramos con la ecuación

$$f(x) = f'(1)\int_1^{|x|} \frac{1}{t}dt \qquad si\ x \neq 0$$

Donde $f'(1)$ es una constante, cambiémosla (por comodidad) por la letra c, reescribiendo la ecuación así (sin pérdida de generalidad, y teniendo en cuenta los valores de x que nos interesan):

$$f(x) = c\int_1^{x} \frac{1}{t}dt \qquad si\ x > 0$$

Por la definición en la sección anterior, y la notación propuesta al inicio de ésta, tenemos:

$$f(x) = c \cdot \ln x$$

La función anterior, representa la función f más general derivable en el eje real, que es solución de la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Ahora, como c es una constante, tenemos dos opciones: $c = 0$ o $c \neq 0$. Si $c = 0$, tendríamos que f es idénticamente nula y no tiene interés dicho caso.
En el segundo caso, si $c \neq 0$, existe un número $a > 0$ tal que $f(a) = 1$. Podemos observar que c y a están relacionadas mediante la igualdad:

$$c \cdot \ln a = 1$$

Como $a \neq 1$ (recordemos que $\ln 1 = 0$, y como c es una constante al multiplicarla con 0 no daría 1), tenemos:

$$c = \frac{1}{\ln a}$$

Por lo cual,

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x$$

Recordando, y demostrando, la propiedad enunciada por Euler. De ahí tenemos una función logarítmica de base a, con $a > 0$, y $a \neq 1$. Cabe recalcar que cumple con todas las propiedades previamente demostradas.

2.3.4 Función exponencial como inversa de la función logarítmica

Como en esta sección el punto de partida fue la función logarítmica, y la función logarítmica es inyectiva, se puede encontrar la función inversa; básicamente, la función inversa a la función logarítmica es la exponencial.

Según Apóstol (2001) “Para cualquier x real, definimos $E(x)$ como aquel número y cuyo logaritmo es x. Esto es, $y = E(x)$ significa $L(y) = x$”. Lo cual escribimos como: $y = a^x \leftrightarrow \log_a y = x$.

Tenemos que, el dominio de la función exponencial será todo el eje x, y el recorrido serán los valores positivos del eje y.
Propiedades de la función exponencial:

i. $a^0 = 1$

Como $\log_a 1 = 0 \rightarrow a^0 = 1$.

ii. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Demostración: Supongamos que $m = a^x, n = a^y$ y $p = \log_a(mn)$, tendríamos

$$\log_a m = x, \quad \log_a n = y, \quad a^p = mn$$

Como $p = \log_a(mn) = \log_a m + \log_a n = x + y$. Por lo cual, $p = x + y \rightarrow a^p = a^{x+y}$, pero $a^p = mn = a^x a^y$, por lo cual $a^{x+y} = a^x a^y$.

2.4 El logaritmo como relación entre dos distancias

Napier consideró el logaritmo a partir de una definición geométrica, en la cual relacionaba dos distancias:

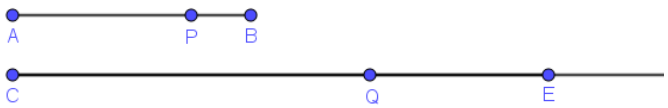


Ilustración 2-6. Relación de Napier.

Donde el punto P ($P \in \overline{AB}$), que parte de A, se mueve con una velocidad variable que decrece proporcionalmente a su distancia con B, y el punto Q ($Q \in \overrightarrow{CE}$), con una velocidad uniforme igual a la velocidad inicial de P. Entonces Napier llama a la distancia CQ el logaritmo de la distancia PB.

Veamos, mediante un ejemplo, la relación de Napier:

Suponiendo que $AB = 1$, $PB = x$ y $CQ = y$ (y teniendo en cuenta lo trabajado en la sección), se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = -x \qquad \frac{dy}{dt} = 1$$

Por lo cual,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \rightarrow \int dy = -\int \frac{1}{x} dx \rightarrow y = -\ln x + C$$

Como $x_0 = 1$ y $y_0 = 0$, al calcular el valor de C nos encontramos con que $C = 0$.

Con lo cual $y = -\ln x = -\log_e x = \log_e x^{-1} = \log_{\frac{1}{e}} x \rightarrow y = \log_{\frac{1}{e}} x$; que está acorde a lo que nos refería Napier, la distancia CQ (y) es el logaritmo de la distancia PB (x), en el cual nos

encontramos con la base $\frac{1}{e}$ para los logaritmos de Napier (mencionada en el componente histórico).

2.5 pH y escala de pH

Una sustancia muy abundante sobre la tierra es el agua; sus características físicas y su estructura química implican que se encuentre involucrada una gran variedad de procesos químicos que suceden espontáneamente en la naturaleza. Es una molécula polar que forma puentes de hidrógeno entre sus moléculas y con otros solutos, propiciando que otras moléculas polares o sustancias cargadas se disuelvan fácilmente en ella; permite además el transporte de moléculas. Henderson (1878-1942) definió al agua como un constituyente esencial de todas las formas de vida conocidas.

De Brown, LeMay, Bursten y Burdge (2004) se puede inferir que una característica importante del agua es su capacidad anfotérica que le permite actuar como ácido o como base según el equilibrio que se establece en su autoionización. En algunos casos se ha planteado un modelo en el que se asume que cuando entran en contacto dos moléculas de agua, (H_2O), la carga positiva de una de las moléculas toma para si uno de los H^+ de la otra molécula de agua, dando como resultado, una molécula de *Hidronio* (H_3O^+) y una molécula de *Hidroxilo* (OH^-) que funcionan como ácido y base, respectivamente. Lo anterior, revela el concepto establecido por J.N Brönsted y T.M Lowry sobre la dinámica Ácido-Base, que muestra la aceptación de protones en el caso de una molécula básica y la donación de protones para la molécula ácida. La formación de los dos iones mencionados se representa como se muestra a continuación:

$$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$$

Se ha establecido que la concentración de los iones hidronio y del hidroxilo en 1 L de agua pura a temperatura de 25°C es de 1×10^{-7} para cada uno, por lo tanto, el producto iónico *(k_w)* es 1×10^{-14}, según la siguiente representación:

$$kw = (1 \times 10^{-7}) \cdot (1 \times 10^{-7}) = 1 \times 10^{-14}$$

Se dice que el agua es *neutra* cuando las concentraciones de los iones son iguales, sin embargo, cuando se solubilizan sustancias en ella para tener disoluciones, se puede

propiciar un aumento de la concentración de hidronios o hidroxilos, lo que dará a la disolución un carácter ácido o básico (Morales, 2014).

Ahora bien, para lograr establecer si una solución es ácida o básica en función a la concentración de hidronios, el bioquímico (Sörensen) en 1909, diseñó la escala de pH (Potencial de Hidrógeno) definiendo que es la expresión logarítmica negativa en base 10 de los iones de hidronio expresada en molaridad (mol/Litro). Este manejo dio origen a una escala de variación en números enteros de mayor orden de magnitud. Así, un cambio de una unidad de pH equivale a una variación de 10 veces de unidades de protones. La siguiente ecuación muestra cómo se calcula lo que se conoce como pH (Rizzotto, 2007).

$$pH = \log_{10}\frac{1}{[H^+]} = -\log_{10}[H^+]$$

Al determinar la concentración de H^+ en números entre 1 y 14 se tiene que en tanto mayor sea la concentración de H^+, menor será el valor de pH y se dice entonces que se trata de sustancias ácidas (pH menor de 7); las sustancias básicas muestran valores de pH altos debido a que las especies pueden aportar, por ejemplo, iones $(OH)^-$. Finalmente se espera que una solución neutra tenga la misma concentración de H^+ y OH^- por lo que su valor de pH se mantiene en 7.

La siguiente figura muestra la escala de pH y los colores asociados al uso de lo que se conoce como indicador universal de pH (una mezcla de compuestos químicos que cambia de coloración según la acidez o basicidad del medio en el que se adicione).

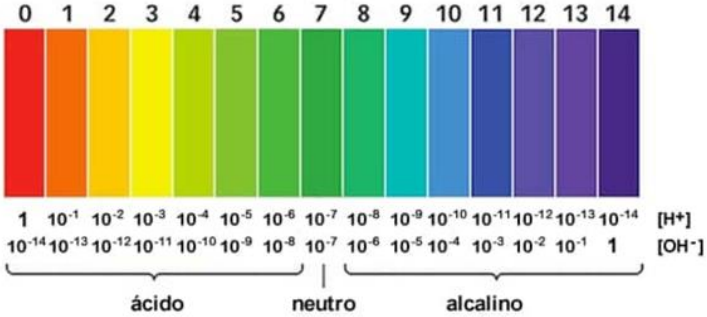


Ilustración 2-7. Escala de pH – Recuperado el 1 de noviembre de 2018 de http://www.aprenderdevino.es/ph-y-vino/.

2.6 Factores relevantes

De los aspectos disciplinares del concepto logaritmo se tuvieron en cuenta para el desarrollo de la unidad didáctica los siguientes: Relación entre una sucesión aritmética y otra geométrica, como exponente de una potencia y operación inversa a la potenciación, propiedades de los logaritmos y función logarítmica. Con respeto al tema pH, se tendrá en cuenta su definición con ayuda de logaritmos y la constante de equilibrio del agua.

3. Aspectos didácticos y metodológicos

El presente trabajo se pretende desarrollar bajo un modelo constructivista, tomando como referencia a Toledo (s.f.). Además, se pretende hacer explícitas, dentro del modelo, las teorías de aprendizaje:

1. Aprendizaje significativo, teniendo en cuenta las características mencionadas por Dávila (2000).
2. Aprendizaje colaborativo, basado en las características y requisitos mencionados por Collazos y Mendoza (2006).

La secuencia didáctica se desarrollará por grupos; buscando realizar retroalimentación al curso en general y, en la medida de lo posible, por grupos de trabajo e individualmente.

Adicionalmente, este trabajo se enmarca en el método de investigación: **Investigación/Acción**. Munarriz (s.f.) planteó la I/A como una forma de estudio de realidades sociales con el fin de intervenir en las situaciones para mejorar la acción; luego, dicho método de investigación da cuenta apropiada del trabajo que se quiere realizar.

3.1 Modelo pedagógico constructivista

Es importante entender que el estudiante no es una caja vacía de conocimientos, cada uno trae consigo pre conceptos (que pueden o no ser erróneos); el modelo constructivista trae consigo la idea de construcción del conocimiento, partiendo de los pre conceptos de cada estudiante y tratando de generar cambio en aquellos que no son correctos, esto da píe a la aplicación de la prueba diagnóstico, cuyo objetivo es indagar sobre los conocimientos previos de cada estudiante.

Según Toledo (s.f.), la acción constructivista posee cuatro características esenciales, a saber:

1. Se apoya en la estructura conceptual de cada estudiante: parte de las ideas o conocimientos previos de cada uno de los estudiantes.
2. Anticipa el cambio conceptual que se espera en la construcción activa del nuevo concepto y tiene en cuenta los cambios que traerá consigo en la estructura mental del alumno.
3. Confronta las ideas previas afines al tema de enseñanza con el nuevo concepto científico que se enseña.
4. Aplica el nuevo concepto a situaciones concretas y lo relaciona con otros conceptos de la estructura cognitiva.

Además, plantea algunas condiciones necesarias para potenciar la enseñanza constructivista, de las que destaco:

- Que el nuevo concepto muestre aplicabilidad a situaciones reales; es por eso que se decidió que la secuencia didáctica trajera consigo una aplicación a un concepto de la vida cotidiana, como lo es el pH.
- Que el nuevo concepto genere nuevas preguntas y expectativas; es por eso que se buscaba que el estudiante fuera generando el conocimiento a partir de preguntas orientadoras.
- Crear un ambiente para la libre expresión, sin temor a equivocarse; por eso se formaron grupos homogéneos para la actividad 0 y actividad 1, teniendo en cuenta que los conocimientos previos de cada estudiante (indagados con ayuda de la prueba diagnóstico) fueran similares, promoviendo así un ambiente de participación y rechazo hacia el miedo a la equivocación. Muchos estudiantes, cando trabajan en grupo, no aportan por miedo a la burla de los otros compañeros.

Además, una de las características más importantes, según Frida Díaz Barriga (2005), de un profesor constructivista es que promueva aprendizajes significativos, lo cual se explicará a continuación.

3.2 Aprendizaje significativo

“El trabajo del docente no es enseñar, el trabajo del docente es propiciar que sus alumnos aprendan” (Dávila, 2000, p. 3). Bajo la perspectiva de la frase anterior se observa la

importancia de generar espacios de construcción del conocimiento por parte del alumno, a partir de la mediación del docente, y no de transmisión del conocimiento, como erróneamente piensan algunas personas.

Dávila (2000) plantea 5 concepciones erróneas o inexactas (él las llama mitos) de lo que es el aprendizaje significativo:

1. El aprendizaje significativo se da cuando el alumno se divierte aprendiendo.
2. El aprendizaje significativo se da cuando los contenidos se ofrecen adaptados a los intereses de los alumnos.
3. El aprendizaje significativo se da cuando el alumno quiere aprender.
4. El aprendizaje significativo se da cuando el alumno aprende por sí mismo aquello que ha de aprender.
5. El aprendizaje significativo se da cuando el alumno puede aplicar lo aprendido.

Dávila (2000) plantea que el aprendizaje significativo conlleva algunos aspectos anteriores, pero la relación no es biunívoca, es decir, que el hecho de que los aspectos anteriores se den no garantiza que haya un aprendizaje significativo.
Ausubel plantea dos tipos de aprendizaje, uno de calidad (llamado significativo) y otro de baja calidad (llamado memorístico o repetitivo); Ausubel se refiere al aprendizaje significativo como aquel que permite en el estudiante que el nuevo conocimiento se incorpore sustantivamente en la estructura cognitiva del alumno, logrando así que el estudiante relacione el nuevo concepto con sus conocimientos previos, y esto se da porque el estudiante considera valioso aquello que está aprendiendo.

3.3 Aprendizaje colaborativo

Collazos y Mendoza (2006) se refieren al aprendizaje colaborativo como: “situación en la cual se espera que ocurran formas particulares de interacción, que producirán mecanismos de aprendizaje, que posiblemente conduzcan al logro de un aprendizaje, pero que no hay una garantía total de que estas condiciones se presenten efectivamente”, por lo cual se deben considerar diferentes aspectos que permitan garantizar un alto porcentaje de éxito en la intervención, como se verá posteriormente.

Deben diseñarse tareas que conecten a los integrantes del grupo, más como personas que como aprendices, además debe generarse espacio para trabajo individual y grupal dentro del aprendizaje colaborativo; el tiempo que se emplee depende de la actividad, pude ser durante una o más sesiones dependiendo de lo que se pretende lograr y la actividad que se diseñó. Es importante tener en cuenta que no siempre debe utilizarse el aprendizaje colaborativo, éste puede mezclarse con aprendizaje individual, por pares u otros métodos.

Otro aspecto importante es cómo se organizan los grupos, se deben formar (en lo posible) grupos de no más de cuatro personas y variar las formas de escogencia de los grupos, además se dice que se deben formar grupos heterogéneos (que los integrantes tengan diferentes capacidades), sin embargo, es bueno considerar grupos homogéneos (en cuanto a pre conceptos se refiere) en las primeras actividades, buscando una nivelación apropiada y mínima para el posterior trabajo que se pueda realizar.

Si algún grupo termina antes se pueden realizar actividades de verificación, revisar si efectivamente cumplieron con las actividades propuestas; si dos o más grupos terminaron antes que los demás podrían revisar los resultados entre ellos o proponer algunas actividades de corta duración que estén relacionadas con la actividad principal, o que ayude reforzar los objetivos previstos a cumplir con la actividad.

3.4 Investigación/Acción

Básicamente, la investigación es un apoyo para encontrar soluciones viables a los problemas que emergen del análisis e interpretación de los datos conseguidos de una población. Recordemos que la investigación se divide en investigación cuantitativa e investigación cualitativa; en el presente trabajo nos concierne la investigación cualitativa como método de análisis para los datos recogidos a partir de las actividades propuestas a los estudiantes. A su vez, la investigación cualitativa posee dos métodos centrales o más utilizados para su desarrollo, el estudio de casos y la investigación/acción.

Munarriz (s.f., p. 8) define la investigación/acción como el “método de investigación que relaciona la práctica educativa con la reflexión compartida sobre la práctica”. Se observa entonces gran relevancia en la auto reflexión del docente en la práctica educativa.

Además, Munarriz (s.f., p. 9) enlista tres características, que dice son más sobresalientes, identificadas en la investigación/acción, de acuerdo a los estudios llevados a cabo:

- Analiza situaciones y acciones relacionadas con problemas prácticos para intentar resolverlos.
- Considera la acción desde el punto de vista de los participantes.
- Las modificaciones llevadas a la práctica son evaluadas continuamente dentro de la situación y por los propios participantes. Existe una evaluación crítica de su acción.

Se observa cómo las diversas modificaciones propuestas de forma general, como política educativa, no funcionan, ya que el docente es quien sabe qué debe cambiar dentro de su práctica educativa y no entes o personas externas. Además, dos de las técnicas para recoger datos que más se recomiendan son la observación participante y la entrevista.

En la observación participante el investigador observa a la población investigada, siendo uno más de la población, tratando de analizar las respuestas de cada uno de los investigados, adentrándose en cada grupo trabajado; por otro lado, la entrevista puede utilizarse para indagar o profundizar en los aspectos que se observaron con el método anterior, o sencillamente como método único, encontrándose en varias ocasiones con cada persona sobre la cual se está indagando; para los fines del presente trabajo se utilizará la observación participante y la entrevista como apoyo en el proceso de la observación.

4. Secuencia de actividades

En la secuencia didáctica se tuvieron en cuenta aspectos disciplinares acordes al nivel educativo de los estudiantes, y que, además, estén en concordancia con las necesidades académicas de los estudiantes.

Por otro lado, se tienen en cuenta aspectos históricos como el de Arquímedes (relacionar sucesiones aritméticas y geométricas), preguntas implícitas como las de la civilización babilónica (cuántas veces debo multiplicar un número para que dé otro) y la propiedad que dio lugar a los logaritmos de Napier y Bürgi (expresar productos como sumas); además se busca que los estudiantes lleguen a la construcción del conocimiento, y posteriormente se realiza una conceptualización de lo que están trabajando.

4.1 Prueba diagnóstico

Objetivo: Indagar acerca de los preconceptos de cada estudiante y posteriormente formar grupos diferenciados a partir de los resultados, de tal forma que los preconceptos entre los estudiantes sean comunes. **Actividad para desarrollar de forma individual.**

PRUEBA DIAGNÓSTICA

1. Calcular las siguientes potencias:

a. 4^3 b. $(-15)^2$ c. $(3{,}8)^{-2}$ d. $\left(-\frac{6}{5}\right)^4$

2. En cada caso, hallar el valor de n:

a. $12^n = 144$ b. $(-3)^n = -27$ c. $7^n = \frac{1}{343}$ d. $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{81}{16}$

3. En cada caso, hallar el valor de n:

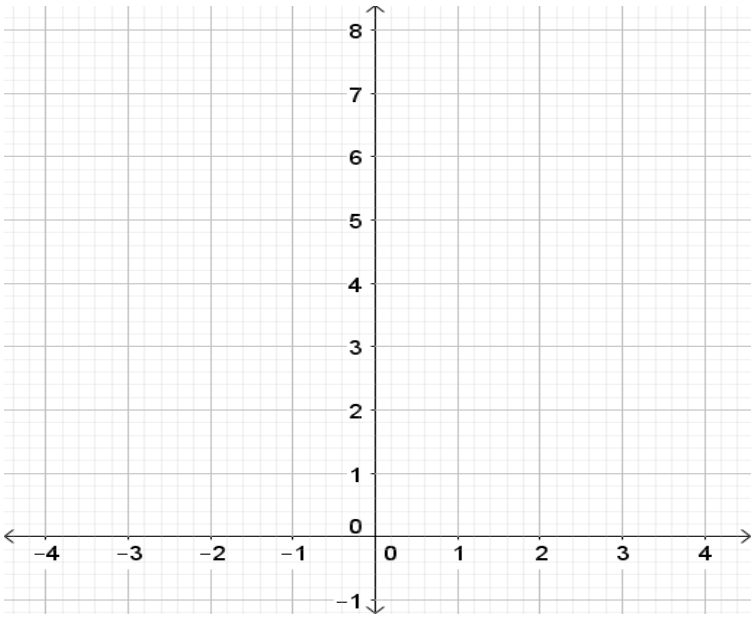
$a. n^2 = 64$ $b. n^3 = -27$ $c.\ n^{-3} = \frac{1}{8}$ $d. n^3 = -\frac{1}{32}$

4. Relacionar los resultados equivalentes entre las columnas I y II:

Columna I	**Columna II**
A. $\frac{7^6}{7^2}$	a. 7^3
B. 7^0	b. 1
C. $7^2 \cdot 7$	c. 7^4
D. 7^1	d. $\frac{1}{7^2}$
E. 7^{-2}	e. 7

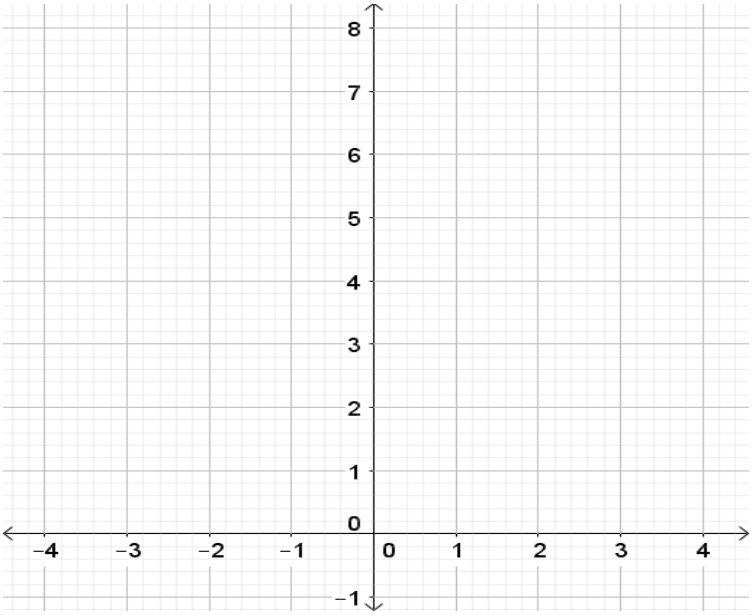
5. Completar la tabla y ubicar los puntos (x, y) en el plano cartesiano:

x	y
-3	$2^{-3} =$
-2	$2^{-2} =$
-1	$2^{-1} =$
0	$2^0 =$
1	$2^1 =$
2	$2^2 =$
3	$2^3 =$



6. Completar la tabla y ubicar los puntos (x, y) en el plano cartesiano:

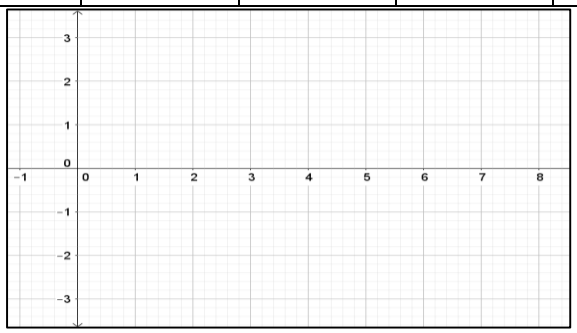
x	y
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} =$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} =$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} =$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} =$



7. ¿Qué relaciones y diferencias encuentra entre el conjunto de puntos graficados en el ejercicio 5 y en el ejercicio 6?

8. Completar la tabla y graficar los puntos en el plano cartesiano:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	$2^y = \frac{1}{8}$ $\rightarrow y =$	$2^y = \frac{1}{4}$ $\rightarrow y =$	$2^y = \frac{1}{2}$ $\rightarrow y =$	$2^y = 1$ $\rightarrow y =$	$2^y = 2$ $\rightarrow y =$	$2^y = 4$ $\rightarrow y =$	$2^y = 8 \rightarrow y =$



9. ¿Qué relación o diferencia observa entra las gráficas de los ejercicios 5 y 8?

4.1.1 Análisis de resultados:

Campanario y Otero (2000) afirman que para algunos profesores los conocimientos previos de los estudiantes, entre otros factores, son un elemento importante en el fracaso en el aprendizaje de las ciencias, y además culpan de dicho fracaso a los alumnos. Ellos realizan una analogía entre la enfermedad/médicos y enseñanza/docentes; donde un médico debe buscar las causas de la enfermedad de una persona para así recetarle ciertos medicamentos o tratamientos y conseguir así su mejoría, de igual manera un profesor debe buscar las causas de las falencias académicas del estudiante (conocimientos previos, entre otros elementos) y buscar un "tratamiento" para ellos.

Tomando como punto de partida el aporte anterior, se clasifican las dificultades de los estudiantes del Colegio Ave María (observadas en la prueba diagnóstico) en 5 grandes grupos, a saber: Solución de potencias con bases negativas, decimales, fraccionarias y exponentes negativos; se puede notar que sólo se han nombrado cuatro de dichas dificultades, la quinta dificultad hace referencia a la noción de potenciación, y aunque ésta debería ser la primera, se escribe de última porque sólo se observó en una persona, un caso aislado pero que merece toda la atención.

Descripción de las dificultades

1. **Solución de potencias con bases negativas:** 15 de los 35 estudiantes encuestados presentan dificultad al momento de resolver potencias con bases negativas, se observó que muchos de los estudiantes que presentaron dicha dificultad reconocen la definición de potenciación, sin embargo, el problema radica en la multiplicación reiterada de números negativos (se aprecia dificultad en lo que comúnmente se llama ley de signos)
2. **Solución de potencias con bases decimales:** 12 de los 35 estudiantes mostraron dificultades al momento de ubicar la coma en el resultado.
3. **Solución de potencias con bases fraccionarias:** 10 de los estudiantes mostraron algún tipo de dificultad a la hora de resolver potencias con bases fraccionarias, estas dificultades pasan por la propiedad de expresar tanto numerador como denominador a la misma potencia, o multiplicar más o menos veces de las que decía el exponente inicialmente, o multiplicar mal.

4. **Solución de potencias con exponente negativo:** 26 de los 35 estudiantes mostraron dificultades en éste tópico, es decir, la mayoría de los estudiantes no reconocen cómo resolver una potencia con exponente negativo. Dentro de los obstáculos observados están: pensar que el signo del exponente se “multiplica” con el signo de la base y resolver como si fuera una potencia con exponente positivo.
5. **Definición de potenciación:** Uno de los estudiantes no reconoce la definición de potenciación, considera la potenciación como sumas sucesivas de la base de acuerdo al exponente (algo similar a multiplicar la base con el exponente); dicha dificultad se presentó a lo largo de su prueba diagnóstica. Algunos estudiantes presentaron una dificultad similar esporádicamente y sólo en alguno de los ejercicios que resolvieron.

Los porcentajes que expresan la cantidad de estudiantes que cometieron cada error son:

	DIFICULTADES	PORCENTAJE
1	Potencias con bases negativas	42,86
2	Potencias con bases decimales	34,29
3	Potencias con bases fraccionarias	28,57
4	Potencias con exponentes negativos	74,29
5	Pensar la potenciación como multiplicación entre base y exponente	2,86

El análisis anterior sugiere que, previo al trabajo con la secuencia de actividades, se deben trabajar los siguientes conceptos: Definición de potenciación, algunos estudiantes presentaron dificultades aisladas al no reconocer cómo se resolvía una potencia; potenciación con bases negativas, decimales y fraccionarias; potenciación con base negativa, y un repaso rápido por las propiedades de la potenciación. Al evidenciar dichas dificultades se optó por diseñar una actividad de preconceptos, con el fin de suplir los vacíos conceptuales en los conocimientos previos necesarios para abordar la secuencia de actividades.

4.2 Actividad 0: Nivelación

Objetivos:

1. Identificar la potenciación como la operación que condensa multiplicaciones reiteradas en una escritura más sencilla.
2. Reconocer las propiedades de la potenciación.
3. Resolver ejercicios que impliquen el uso de propiedades de la potenciación.

En matemáticas se busca condensar expresiones extensas de una manera más simple, algunas de las operaciones surgen bajo esta idea.

La multiplicación, por ejemplo, es una manera abreviada de expresar sumas reiteradas de un mismo número.

En la potenciación ocurre algo similar.

Observemos cómo utilizar la potenciación:

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ $\qquad$ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

Si, por ejemplo, consideramos el número real a, y lo multiplicamos n veces, la correspondiente notación sería:

$$a \times a \times a \times \ldots \times a = a^n = b$$

En la expresión $a^n = b$:

1. El número real a se denomina ***base*** (es el número que se multiplica por sí mismo)
2. El número real n se denomina ***exponente*** (es el número de veces que se multiplica el número a)
3. El número real b se denomina ***potencia*** (es el resultado de la multiplicación)

Por ejemplo:

$3^4 = 81$ base 3 - exponente 4 - potencia 81

$2^5=32$ base 2 - exponente 5 - potencia 32

Ejercicio #1: Expresar las multiplicaciones con la notación de potenciación, e indicar cuál es la base, cuál es el exponente, y calcular la potencia.

1. $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$
2. $(-12) \times (-12) \times (-12)$
3. $(-83) \times (-83)$
4. $(0{,}3) \times (0{,}3) \times (0{,}3) \times (0{,}3)$
5. $(-1{,}82) \times (-1{,}82)$
6. $\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)$
7. $\left(-\frac{7}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{5}\right)$

Ejercicio #2: Calcular las siguientes potencias.

1.	a. 4^1	b. $\left(-\frac{7}{19}\right)^1$	c. $187{,}5^1$
2.	a. 8^2	b. 8^3	c. 8^5
3.	a. $\left(-\frac{3}{4}\right)^5$	b. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$	c. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$
4.	a. $0{,}37^3$	b. $12{,}2^3$	c. $(0{,}37 \times 12{,}2)^3$
5.	a. 12^4	b. $(-4)^4$	c. $\left(\frac{12}{-4}\right)^4$
6.	a. 6^2	b. 36^3	c. $6^{2\times3}$

1. ¿Qué relación observan en las potencias de la primera fila?
2. Multiplicar las potencias de 8^2 y 8^3. ¿Qué relación hay entre dicho resultado y el resultado obtenido en 8^5?
3. Dividir las potencias de $\left(-\frac{3}{4}\right)^5$ y $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$. ¿Qué relación hay entre dicho resultado y el obtenido en $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$?
4. Multiplicar las potencias de $0{,}37^3$ y $12{,}2^3$. ¿Qué relación hay con el resultado de $(0{,}37 \times 12{,}2)^3$?

5. Dividir la potencia de 12^4 entre la potencia de $(-4)^4$. ¿Qué relación tiene con el resultado de $\left(\frac{12}{-4}\right)^4$?
6. ¿Qué relación pueden establecer entre las potencias de la 6 fila?

Las preguntas anteriores tienen como objetivo que recuerden algunas de las propiedades básicas de la potenciación, las cuales se relacionan a continuación:

$a^0 = 1,\ a \neq 0.$	$a^1 = a$
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$(a^n)^m = a^{n \times m}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Relacionar cada fila de la tabla del ejercicio 3 con la propiedad correspondiente de acuerdo a las respuestas dadas en las preguntas (tenga en cuenta que algunas de las propiedades no se aplican en esos ejercicios)

Ejercicio #3: Proponer un ejemplo que ilustre cada una de las propiedades.

Ejercicio #4: Vamos a justificar las propiedades que no se han trabajado hasta ahora a partir de la propiedad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

- ✓ $a^0 = 1, \quad a \neq 0.$

Como $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n}$ y todo número diferente de cero dividido entre sí mismo da como resultado 1, entonces $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1, \quad a \neq 0.$

- ✓ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0.$

Como $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n}$ por la propiedad anterior, sabemos que $a^0 = 1$, por lo cual $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.

Justificar las siguientes igualdades:

- $ba^{-n} = \frac{b}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

¿Qué restricciones tienen los valores de a y/o b en cada una de las identidades anteriores?

4.2.1 Análisis de resultados

Se observa una mejora significativa en los resultados obtenidos en la actividad de nivelación, respecto a la prueba diagnóstico; cabe aclarar que dicha prueba (a diferencia de la diagnóstica) fue en grupos. Se tomará como errores los que se abordaron en la actividad anterior, para tener un punto de comparación, con la diferencia que en esta ocasión se tendrá en cuenta el número de ejercicios de cada tipo que se resolvieron mal, y no la cantidad de personas que presentan dicha dificultad.

Descripción de las dificultades:

1. **Solución de potencias con bases negativas:** 23 de los 110 ejercicios propuestos (10 por grupo) presentaron error en su solución, en algunos de ellos colocaron el signo negativo en el resultado, cuando el exponente de la potencia era par, y en otros dejaron el resultado positivo, cuando el exponente era impar.
2. **Solución de potencias con bases decimales:** 7 de los 66 ejercicios propuestos (6 por grupo) no fueron resueltos de manera adecuada, ya que ubicaron mal la coma o realizaron alguna multiplicación en forma errada.
3. **Solución de potencias con bases fraccionarias:** 15 de los 77 ejercicios propuestos (7 por grupo) presentaron algún error en su solución, aunque en la mayoría de los casos fueron ejercicios cuya base era negativa y la dificultad estuvo en el signo; la mayoría de los grupos reconocieron cómo resolver un ejercicio de base fraccionaria.
4. **Solución de potencias con exponente negativo:** Este tipo de error no se tendrá en cuenta porque no hubo ejercicios al respecto.
5. **Definición de potenciación:** Todos los grupos reconocieron la definición de potenciación con exponente natural, y cómo era el algoritmo para buscar las potencias

Los porcentajes que expresan la cantidad de estudiantes que cometieron cada error son:

	DIFICULTADES	PORCENTAJE
1	Bases negativas	25,3
2	Bases decimales	4,62
3	Bases fraccionarias	11,55
4	Exponentes negativos	N/A
5	Definición de potenciación	0

El análisis anterior sugiere que, hubo una reducción en todas las dificultades presentes en los estudiantes, debida, posiblemente, al trabajo en equipo.

Por otro lado, se observa que los grupos establecieron de manera adecuada las propiedades de la potenciación, salvo en la pregunta 6 del ejercicio 3, 4 de los 11 grupos pudieron resolverlo, teniendo en cuenta la tabla que seguía a la pregunta.

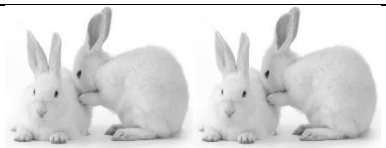
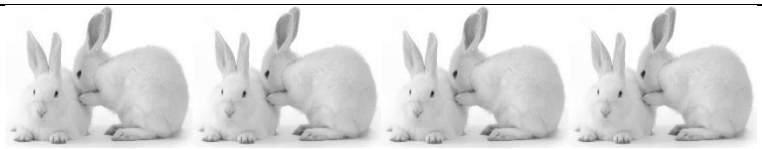
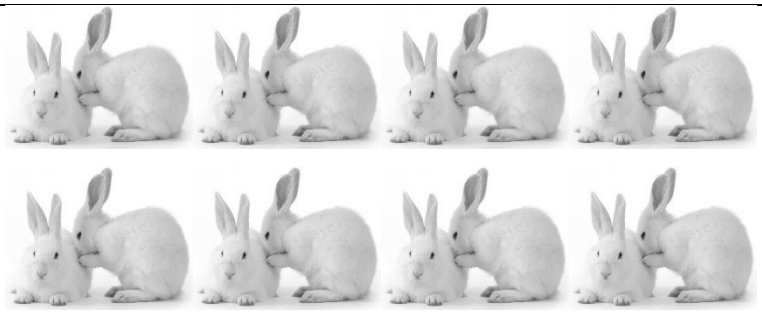
4.3 Actividad 1: Definición de logaritmación, a partir de su relación con la potenciación

Objetivos:

1. Identificar la logaritmación como operación inversa a la potenciación.
2. Calcular logaritmos a partir de la definición (como operación inversa de la potenciación), y haciendo uso de la descomposición en factores primos, siempre y cuando los resultados sean números naturales.
3. Modelar situaciones reales (crecimiento exponencial, desintegración radiactiva, tiempo de vida media, etc) a partir de potencias y logaritmos.

Actividad 1

1. Juan posee un negocio de cría de conejos. La cantidad de conejos que tiene después de un periodo de tiempo es el doble que la que tenía en el periodo anterior. Revisemos el siguiente esquema que nos permite entender la cantidad de conejos que tiene Juan en su negocio:

Periodo	Cantidad de Conejos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
. . .	. . .
n	

Completar la tabla (numéricamente, no con dibujos) y responder:

a. ¿Cuántos conejos tendrá Juan en el segundo periodo de tiempo?
b. ¿Cuántos tendrá en el cuarto periodo de tiempo?
c. ¿Cuántos en el quinto periodo?
d. ¿Cuántos en el periodo n?
e. ¿Cuántos periodos de tiempo deben transcurrir para tener 32 conejos?
f. ¿Cuántos periodos necesita para obtener 256 conejos?

2. Los estudiantes de grado décimo crearon una esfera de un material muy especial. Cuando la esfera se colocaba en el escalón superior de una gradería y se dejaba

caer al siguiente escalón, se dividía en tres esferas que tenían igual tamaño; si dichas esferas caían un segundo escalón se dividía cada una en tres esferas de iguales condiciones, y así sucesivamente. Realizar un dibujo que represente la situación y responder (tener en cuenta que en el primer escalón sólo se coloca una esfera):

a. ¿Cuántas esferas quedarán en el tercer escalón?
b. ¿Cuántas esferas quedarán en el cuarto escalón?
c. ¿Cuántas esferas quedarán en el octavo escalón?
d. ¿Cuántas esferas quedarán en el n-ésimo escalón?
e. ¿Cuántos escalones deben caer para tener 9 esferas?
f. ¿Cuántos escalones son necesarios (en la caída) para que queden 729 esferas?

3. Alexandra desea llenar una alcancía para el regalo de cumpleaños de su mamá; Ella ahorrará dinero durante todo un mes, el primer día colocará 50 pesos en la alcancía, el segundo día 100 pesos, el tercer día 200 pesos, el cuarto día 400 pesos, y así sucesivamente (cada día colocará el doble de plata del día anterior). Responder:

a. ¿Cuánto dinero colocará en la alcancía el cuarto día?
b. ¿Cuánto dinero colocará el sexto día?
c. ¿Cuánto dinero colocará el 10 día?
d. ¿Cuánto dinero colocará el día n?
e. ¿En qué día colocará $ 6.400?
f. ¿Qué día pondrá $102.400 en la alcancía?
g. ¿Cuánto dinero colocará en la alcancía el día 30?

Realizar la siguiente la lectura:

EL DESASTRE DE CHERNÓBIL

El accidente de la central nuclear de Chernóbil se produjo el 26 de abril de 1986. Fue la mayor catástrofe nuclear de la historia. La explosión tuvo lugar en el cuarto bloque de la central nuclear de Chernóbil, situado a solo 120 kilómetros de la capital de Ucrania - Kiev, cerca de la frontera con Bielorrusia.

En aquella época, la central nuclear de Chernóbil era una de las más grandes del mundo. Estaba dedicada a un programa militar estratégico del ejército soviético. El accidente ocurrió debido a la coincidencia de varios factores. Además del hecho de que el reactor no tuviera un sistema de seguridad actualizado, tenía un bajo nivel de automatización. En la fatídica noche del 26 de abril, había un experimento en marcha, el cual debería haber probado la gama inercial de la unidad turbo-generadora. El sobrecalentamiento del combustible causó la destrucción de la superficie del generador.

A las 1:24 de la madrugada, hora local, (entre 40 y 60 segundos después del comienzo del experimento) dos grandes explosiones se produjeron. Según algunos expertos, hubo un fallo en el proceso que pone en marcha el sistema automático de seguridad por tan solo dos segundos. Esto debería haber frenado el sobrecalentamiento del turbo-generador. El vapor liberado por la primera explosión destruyó el techo de hormigón del reactor, que pesaba 1200 toneladas. La segunda explosión tuvo lugar solo entre dos y cinco segundos después de la primera. En el reactor entró el aire del exterior e hizo que el vapor de agua se mezclara con grafito fundido. Según varias investigaciones independientes la primera explosión era de tipo químico, pero la segunda tuvo más bien las características de una explosión atómica de 0.3 kilotones (como si hubieran explotado 300 toneladas de TNT). Esto se debe sobre todo a que los neutrones libres empezaron a arder en el aire exterior. Según los testigos, la primera explosión tuvo un brillo rojo y la otra azul celeste, después de esta se pudo observar el hongo atómico encima de la central nuclear.

La investigación sobre la catástrofe fue concluida con la afirmación que el personal no siguió las normas de seguridad. El accidente nuclear de la central Lenin V.I. tuvo un gran impacto sobre los parámetros de seguridad, no solo en lo que se refiere a las centrales nucleares en otros países sino también a toda la actividad humana. Por desgracia, hoy en día podemos confirmar que desde un reactor roto y sobrecalentado de la unidad 4 de la central de Chernóbil comenzó a filtrarse la radiactividad que desencadenó una inmediata y masiva contaminación de las áreas tanto próximas como lejanas.

El desastre nuclear también fue una coincidencia. El reactor debería haber sido cerrado antes del experimento. Sin embargo, el cierre se aplazó durante nueve horas debido a las próximas celebraciones del día 1 de mayo y a la electricidad necesaria para cumplir con el plan de producción. Este retraso produjo que el experimento se llevase a cabo durante otro turno de trabajadores diferente de aquel que lo había preparado. El turno de noche estaba compuesto por operarios menos preparados para conducir el experimento.

Recuperado de https://www.chernobylwel.com/ES/740/chernobil/

Con base en la lectura anterior, contestar las siguientes preguntas:

1) ¿Qué factores influyeron en el desastre de Chernóbil?
2) ¿Qué comprenden por radiactividad? Consulten que es radiactividad y comparen la información consultada con su respuesta.
3) ¿Un material radiactivo se conserva o se modifica con el paso del tiempo? ¿Por qué cree que esto ocurre?

Realizar la siguiente lectura:

COLOMBIA DEVELA UN IMPRESIONANTE DEPÓSITO DE FÓSILES MARINOS DE HACE MÁS DE 100 MILLONES DE AÑOS

Hasta ahora, Colombia no se había distinguido dentro del campo de la paleontología mundial. De hecho, el país ni siquiera cuenta con una cátedra universitaria de esta profesión. Sin embargo, de un tiempo para acá, algunas localidades han comenzado a revelar importantes recursos fosilíferos que han atraído el interés de expertos internacionales y empiezan a estimular la especialización en el extranjero de varios estudiantes a nivel de doctorado.

Tradicionalmente, la región de Villa de Leyva, una localidad turística a dos horas en automóvil de Bogotá, ha sido conocida entre los colombianos por contener fósiles. Ahora, una combinación de interés académico, nuevas herramientas en materia de preparación de fósiles y experticia para excavar y limpiar los huesos, han abierto los ojos del mundo al valioso depósito que se perfila como una próxima potencia mundial en fósiles del período Cretácico Inferior –o Temprano–, es decir, organismos que vivieron entre hace 100 y 149 millones de años.

En palabras del paleontólogo británico y profesor de geología de la Universidad de Los Andes Leslie Noé, “este es un repositorio no solo de la mejor fauna de reptiles marinos de

América del Sur, sino una de las mejores de su era en el mundo –un sitio que apenas comienza a ser estudiado–".

"Existe un buen récord de fósiles del Jurásico (en Europa) y del Cretácico Superior (en Norteamérica)", explica Noé, quien fue curador de reptiles marinos en el Museo de Sedgwick, uno de los más antiguos de la Universidad de Cambridge, en Inglaterra. "Pero una de las más notables grietas de información a nivel global es la fauna y vegetación de esos mares someros del Cretácico Inferior".

Recuperado de https://www.scientificamerican.com/espanol/noticias/colombia-devela-un-impresionante-deposito-de-fosiles-marinos-de-hace-mas-de-100-millones-de-anos/

Con base en la información anterior, contestar las siguientes preguntas:

1) ¿Por qué es tan importante este descubrimiento en Colombia?
2) ¿Cómo crees que se obtiene la información acerca de la edad de un fósil?
3) Consulta porqué se habla de fósiles marinos y no de fósiles de dinosaurio, en Villa de Leyva.
4) Consulta las principales diferencias entre fósil marino y fósil de dinosaurio.

Consideremos ahora, un concepto muy útil en el estudio de la cinética de una reacción, el **tiempo de vida media**. Este concepto se utiliza en muchos otros campos. El más conocido quizás sea el estudio de los procesos de desintegración radiactiva.

Jordi (2012) define el tiempo de vida media de un reactivo como el tiempo necesario para que haya reaccionado la mitad de su concentración inicial.

4. El carbono 14 es un material presente en los huesos (y otros elementos de la naturaleza), el cual dura 5.730 años en desintegrase a la mitad (**tiempo de vida media**), es decir, después de 5.730 años quedará la mitad de carbono 14 de la que había inicialmente. De acuerdo a lo anterior, podemos inferir su importancia en la datación arqueológica (es decir, la "edad" de un fósil). ¿Después de 11.460 años, qué porcentaje de carbono 14 quedará en los huesos de un fósil? ¿qué fracción representa el porcentaje anterior? ¿Cuántos años transcurrirán para tener $\frac{1}{32}$ de la cantidad inicial de carbono 14?

Parte 2 – CONCEPTUALIZACIÓN

Recordemos el primer problema: En el primer periodo de tiempo Juan tenía dos conejos, en el segundo periodo de tiempo tenía 4 conejos, en el tercer periodo 8 conejos, y así sucesivamente. La siguiente tabla nos ilustra (nuevamente) la situación:

Periodo	Cantidad de Conejos
1	2
2	4
3	8
4	4
5	32
6	64
. . .	. . .
n	2^n

Notemos que:

En el primer periodo de tiempo se tiene que $2^1 = 2$, donde el exponente representa el periodo, la potencia representa la cantidad de conejos en ese periodo.

En el segundo periodo de tiempo se tiene que $2^2 = 4$, como se puede observar la base es igual al periodo anterior; **¿Por qué la base es 2?**

En el tercer periodo de tiempo se tiene que $2^3 = 8$. Y Así sucesivamente.

La pregunta e. (del punto 1) nos decía: ¿Cuántos periodos de tiempo deben transcurrir para tener 32 conejos?

Reemplazando en una expresión similar a la anterior tendríamos:

$$2^n = 32$$

Donde 32 es la cantidad de conejos y n el periodo de tiempo para que se cuente con los 32 conejos. Para encontrar el valor de n, que es el periodo de tiempo, buscamos en qué fila, de la tabla anterior, aparece 32 (en la cantidad de conejos) y qué periodo de tiempo le corresponde. Encontramos, así, que el periodo es 5, por ende $n = 5$; es fácil comprobar que $2^5 = 32$, si se multiplica el número 2 cinco veces da como resultado 32.

De la misma forma se puede contestar la pregunta f. y darnos cuenta que es equivalente a escribir $2^n = 256$. Estamos buscando cuántas veces debo multiplicar el 2 para obtener 256.

La operación en la cual conocemos la base y la potencia, y nos pide hallar el exponente se conoce como logaritmación.

$2^5 = 32$ equivale a decir $\log_2 32 = 5$. Un procedimiento para el cálculo de algunos logaritmos se apoya en la descomposición en factores primos, así:

32	2	(1)
16	2	(2)
8	2	(3)
4	2	(4)
2	2	(5)
1		

Si observamos bien, en la descomposición aparece 5 veces el número 2 (al lado derecho); la idea es formar grupos iguales que multiplicados den la base, la cantidad de grupos que se forman es el resultado del logaritmo.

Ejemplo 2: Calcular $\log_6 1296$

1296	2
648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Debemos formar grupos iguales que multiplicados den la base (6), en total salen 4 grupos, cada uno formado por un 2 y 3 ($2 \times 3 = 6$), por lo cual el resultado del logaritmo es 4.

Es decir

$$\log_6 1296 = 4 \iff 6^4 = 1296$$

Ejemplo 3: Calcular $\log_{12} 1728$

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Debemos formar grupos iguales que multiplicados den la base (12), en total salen 3 grupos, cada uno formado por dos veces el número 2 y una vez el número 3 ($2 \times 2 \times 3 = 6$), por lo cual el resultado del logaritmo es 3.

Es decir:

$$\log_{12} 1728 = 3 \iff 12^3 = 1728$$

En general, el método consiste en encontrar la descomposición en factores primos del número al cual se le quiere hallar el logaritmo, agrupar los factores de tal manera que cada grupo dé (multiplicados) el número que se encuentra en la base, y la cantidad de grupos que salen es el resultado del logaritmo; si los grupos no quedan iguales (realizando bien las descomposiciones) es porque el logaritmo no tiene resultado natural.

Ejercicio: Utilizar el método anterior para calcular $\log_2 256$. Además, resuélvelo por multiplicaciones reiteradas del 2 hasta que dé 256 y comprueba si los resultados son o no iguales.

Nota 1: El método de descomposición en factores primos funciona siempre y cuando el exponente sea un número natural.
Nota 2: Se observa que la base es 2 porque los conejos se van duplicando, o sea, multiplicando por dos.

Ejercicio: Resolver los puntos 2.e. y 2.f. de acuerdo a la información anterior (expresándolos como logaritmos y utilizando el método de descomposición en factores primos).

Por otro lado, observemos qué sucede con el ejercicio 3. Como Alexandra empieza colocando $50 en la alcancía y ese valor es el que se va duplicando, llamemos k a ese valor, es decir, $k = 50$. La base es 2 (dado que se va duplicando). Escribamos, en primera instancia, una tabla que nos ayude a evidenciar lo sucedido:

Día	Plata para la alcancía
1	\$50 = $50 \cdot 1 = 50 \cdot 2^0$
2	\$100 = $50 \cdot 2 = 50 \cdot 2^1$
3	\$200 = $50 \cdot 4 = 50 \cdot 2^2$
4	\$400 = $50 \cdot 8 = 50 \cdot 2^3$
5	\$800 = $50 \cdot 16 = 50 \cdot 2^4$
6	\$1600 = $50 \cdot 32 = 50 \cdot 2^5$
.	.

. .	. .
n	
. . .	. . .
30	

Escriba en la fila n-ésima la expresión que le permitiría calcular la cantidad de plata que debería colocar en la alcancía el día n y utilízala para determinar cuánta plata debe colocar en la alcancía el día 30.

Reta tu ingenio: ¿Cuánta plata ahorró Alexandra durante los 30 días?

Sugerencia: Consultar sobre series geométricas.

Solucionemos el punto 3.e. ¿En qué día colocará $ 6.400? Tengamos en cuenta que:

$$50 \cdot 2^{k-1} = 6.400 \rightarrow 2^{k-1} = 128$$

Pero $2^{k-1} = \frac{2^k}{2^1} = \frac{2^k}{2}$, de lo cual:

$$\frac{2^k}{2} = 128 \rightarrow 2^k = 256 \rightarrow k = 8$$

Sin embargo, la expresión anterior es equivalente con:

$$\log_2 256 = 8 \iff 2^8 = 256$$

De lo cual sabemos que $k = 8$; como el día está relacionado con k, de tal forma que el día es 1 menos que k. Por ende, el día en el cual Alexandra ahorra $ 6.400 es el día 7.

Ejercicio: Resolver el punto 3.f.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

El logaritmo de un número representa el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número. Tenga en cuenta que:

$$a^n = b \leftrightarrow \log_a b = n$$

5. Completar la siguiente tabla, primero debes resolver la potencia o el logaritmo (según el ejercicio) y luego expresarlo con la operación contraria:

Notación Exponencial	Notación Logarítmica
7^3	
	$\log_7 343$
	$\log_{\frac{1}{2}} 16$
4^6	
$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	
	$\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$
$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}$	
	$\log_8 64$
17^2	

4.3.1 Análisis de resultados

En las dos actividades previas se realizó un análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados, ya que era necesario ver los pre conceptos y, posteriormente, el avance logrado en la actividad de nivelación; sin embargo, en las actividades restantes (incluida ésta) se realizará un análisis exclusivamente cualitativo, y centrado en el cumplimiento de los objetivos planteados al inicio.

Se observa, en la mayoría de grupos, que asocian de manera adecuada los elementos de la logaritmación con su significado en notación exponencial; sin embargo, cometen algunos errores cuando la base del logaritmo (o base de la escritura exponencial) es fraccionaria, y cuando el resultado del logaritmo (o exponente de notación exponencial) es un número negativo.

Por otro lado, resuelven (adecuadamente) logaritmos cuyo resultado es un número natural, a partir de multiplicaciones reiteradas de la base para obtener el argumento del logaritmo, y con el uso de la descomposición en factores primos.

Por último, algunos grupos modelaron de manera adecuada los problemas planteados; sin embargo, se observa que la dificultad presente en los grupos que no lo consiguieron radica en su la comprensión de los enunciados, especialmente en el punto 4 de la actividad.

4.4 Actividad 2: Propiedades de la logaritmación

Objetivos:

1. Identificar qué propiedad de los logaritmos se debe aplicar en cada ejercicio.
2. Reconocer la importancia de la importancia de la propiedad del cambio de base en la solución de logaritmos.

RECORDEMOS:

- ✓ **Si n es un número natural y a es un número real:**

$a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (Es decir, a se multiplica n veces).

- ✓ **Las propiedades de la potenciación son:**

$a^0 = 1,\ a \neq 0.$	$a^1 = a$
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$(a^n)^m = a^{n \times m}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.$

- ✓ **La definición de logaritmo es:**

$\log_a b = n$, con $a > 0$, si y sólo si $a^n = b$

$\boldsymbol{a}$ se denomina base, $\boldsymbol{b}$ potencia y $\boldsymbol{n}$ logaritmo

Ejercicio #1

Calcular los siguientes logaritmos (verifica los resultados de las columnas 1 y 2 con el significado del logaritmo) y a partir de la fila 4 intenta establecer una relación entre los resultados.

1	a. $\log_3 9 =$	b. $\log_3 81 =$	c. $\log_3(9 \times 81) =$
2	a. $\log_7 1 =$	b. $\log_9 1 =$	c. $\log_{15} 1 =$

3	a. $\log_{17} 17 =$	b. $\log_{100} 100 =$	c. $\log_6 6 =$
4	a. $\log_2(2^3)=$	b. $\log_8(8^7) =$	c. $\log_5(5^{10}) =$
5	a. $\log_{25} 625$	b. $2 \cdot \log_{25} 25 =$	c. $\log_{25}(25^2) =$
6	a. $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) =$	b. $\log_2 4 =$	c. $\log_2\left(\frac{1}{2} \times 4\right) =$
7	a. $\log_5 625 =$	b. $\log_5 125 =$	c. $\log_5\left(\frac{625}{125}\right) =$
8	a. $\log_{1/3} \frac{1}{27} =$	b. $\log_{1/3} 81 =$	c. $\log_{1/3}\left(\frac{81}{1/27}\right) =$
9	a. $\log_7 49 =$	b. $\log_7 2401 =$	c. $2 \times \log_7 49$
10	a. $\log_2 128 =$	b. $\log_2 2 =$	c. $\log_2\left(\frac{128}{2}\right) =$
11	a. $\log_{1/4} \frac{1}{4} =$	b. $\log_{1/4} 16 =$	c. $\log_{1/4}\left(\frac{1}{4} \times 16\right) =$

Ejercicio #2

Observar con atención las propiedades de los logaritmos contenidas en la siguiente tabla, y analizar en cada uno de los ejercicios que acabas de resolver cuál de estas propiedades se podría utilizar para encontrar los respectivos resultados. Relacionar cada una de las filas anteriores con dichas propiedades:

Propiedades de la logaritmación:

1. El logaritmo solo está definido para números positivos.	2. $\log_a 1 = 0, a > 0.$
3. $\log_a a = 1,\ a > 0.$	4. $\log_a(a^n) = n$
5. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y\,;$ $x, y > 0$	6. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y\,;$ $x, y > 0$
7. $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x\,; x > 0$	8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejercicio #3

Aplicando las propiedades anteriores, calcular:

1. $\log_{2005} 2005$
2. $\log_{653}(653^{100})$
3. $\log_9(81 \cdot 9)$

4. $\log_4\left(\frac{64}{1024}\right)$
5. $\log_4 24 - \log_4 6$
6. $\log_8 2 + \log_8 256$
7. $\log_5(125^4)$
8. $\log_6(216 \cdot 6^{10})$
9. $\log_{16}(16^5 \cdot 16)$
10. $\log_7\left(\frac{49^2 \cdot 7^3}{7}\right)$

BASES IMPORTANTES EN LOS LOGARITMOS:

Las dos bases más utilizadas en los logaritmos, la base 10 y la base e. El número e es un número irracional que es aproximadamente igual a 2.71828, y el logaritmo con base e suele llamarse logaritmo natural o neperiano.

El logaritmo con base 10 suele llamarse logaritmo común o solamente logaritmo.

La notación usada, respectivamente, es:

$$\log_e a = \ln a$$
$$\log_{10} a = \log a$$

OBSERVEMOS:

Si revisan el teclado de la calculadora notarán que solo aparecen dos teclas para el cálculo de logaritmos: **log** y **ln**.

Si, por ejemplo, queremos encontrar el valor de: $\log_7 40$ tendríamos inconvenientes ya que sabemos que al elevar 7 a la 1 el resultado es 7 y si lo elevamos a la 2 obtenemos 49, esto nos permite afirmar que el resultado de este logaritmo es algún número real entre 1 y 2, pero ¿cuál? La calculadora tampoco nos permite obtener el valor directamente ya que las dos teclas que aparecen manejan la base 10 y la base e. Piensen si alguna de las propiedades anteriores nos permitiría hacerlo, ¿cuál? y ¿por qué?

Si pensaron en la propiedad 8 (del ejercicio 2), tienen razón; se conoce como la propiedad del cambio de base. Usémosla, y la calculadora, para resolver nuestro problema

Ejemplo: Calculemos $\log_7 40$. Tenemos la posibilidad de calcularlo usando la base 10 o la base e. Verifiquemos que de ambas formas el resultado es el mismo.

Forma 1:

$$\log_7 40 = \frac{\log_{10} 40}{\log_{10} 7} = \frac{\log 40}{\log 7} \approx \frac{1{,}60206}{0{,}84510} \approx 1{,}8957$$

Forma 2:

$$\log_7 40 = \frac{\log_e 40}{\log_e 7} = \frac{\ln 40}{\ln 7} \approx \frac{3{,}68888}{1{,}94591} \approx 1{,}8957$$

Ejercicio #4

Calcular los siguientes logaritmos con ayuda de la calculadora y la propiedad 8 (propiedad del cambio de base). Redondear a cuatro cifras decimales:

1. $\log_{13} 89$
2. $\log_4 3$
3. $\log_{12} 89023$
4. $\log_6 129$
5. $\log_7 16807$
6. $\log_3 1$
7. $\log_5 15625$
8. $\log_{17} 17$
9. $\log_{1/8} 0{,}25$
10. $\log_{0,15} 83$

4.4.1 Análisis de resultados

Se observa que los estudiantes tuvieron un buen manejo de los logaritmos, en el sentido operacional (que es la base de esta actividad); además, la propiedad de cambio de base la utilizaron de buena manera en el cálculo de logaritmos.

4.5 Actividad 3: Función logarítmica y su relación con la función exponencial

Objetivos:

1. Reconocer la representación gráfica de las funciones logarítmicas y exponenciales.
2. Identificar las propiedades de las funciones logarítmicas y exponenciales, ya sea a partir de su representación gráfica o algebraica (o ambas).
3. Establecer la representación algebraica de la función exponencial o logarítmica que modela un problema.

RECORDEMOS:

- ✓ Una **función** es una relación que asocia elementos de dos conjuntos, de tal forma que a cada elemento del primer conjunto (llamémoslo x) le corresponde exactamente un elemento del segundo conjunto (llamémoslo y).
- ✓ Una función es **creciente** si se cumple que: cuando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Es decir, cuando los valores de x aumentan, entonces sus respectivas imágenes también aumentan.

Una función es **decreciente** si se cumple que: cuando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Es decir, cuando los valores de x aumentan, entonces sus respectivas imágenes disminuyen.

1. Retomemos uno de los ejercicios de la actividad 1: Juan posee un negocio de cría de conejos. La cantidad de conejos que tiene después de un periodo de tiempo es el doble de la que tenía anteriormente.

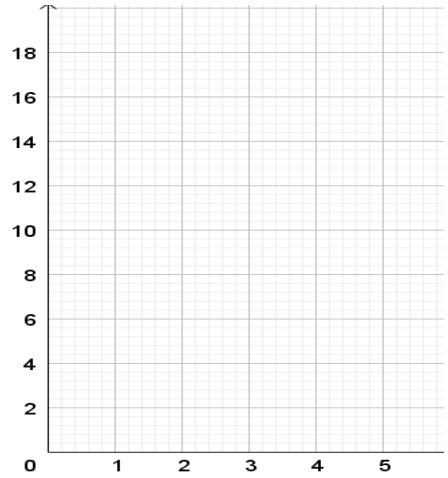
Recuerda que concluimos que en el periodo x el número de conejos y está dado por:

$$y = 2^x$$

Completar la siguiente tabla y ubicar en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (x, y) obtenidos:

x	1	2	3	4
$y = 2^x$	$2^1 =$	$2^2 =$	$2^3 =$	$2^4 =$

GRÁFICA 1



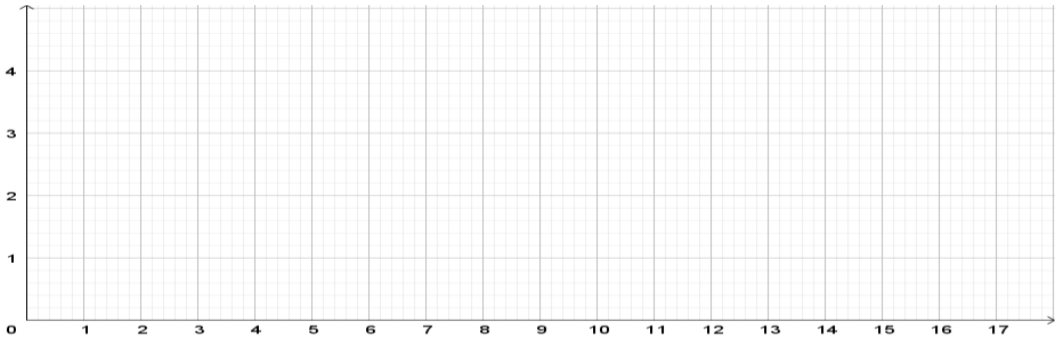
a. ¿Qué sucede con los valores de y cuando aumenta el valor de x?
b. ¿Los valores x y y tienen que ser números naturales, de acuerdo al problema?

Analicemos ahora el problema en forma inversa, es decir, consideremos como variable independiente (x) el número de conejos y como variable dependiente (y) el periodo de tiempo:

Completar la tabla y ubicar en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (x, y):

x	2	4	8	16
y				

GRÁFICA 2



a. ¿Qué sucede con los valores de y cuando aumenta el valor de x?
b. ¿Los valores x y y tienen que ser números naturales, de acuerdo al problema?
c. ¿Qué relación existe entre las dos gráficas? ¿Qué características comunes tienen?

Si analizamos la situación, en el segundo plano, hemos graficado la función:

$$y = \log_2 x$$

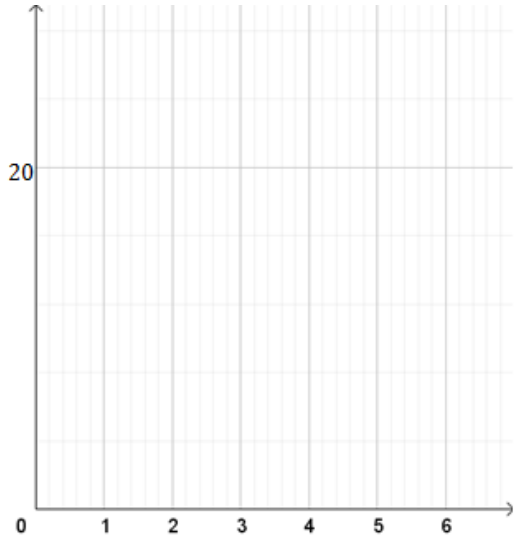
2. La **vida media** es un concepto muy utilizado en diferentes contextos como, por ejemplo, la farmacología; con seguridad todos tenemos claro que, si ingerimos o nos inyectan un medicamento, nuestro organismo lo va eliminando poco a poco; el termino **vida media** de un medicamento se define como el tiempo que debe transcurrir para que eliminemos la mitad del medicamento que nos suministraron.

Consideremos la siguiente situación: A un estudiante le administraron 20 mg del medicamento XXXX el cual tiene una vida media de 1 día. Considerando la información dada, completar la siguiente tabla:

Día (x)	0	1	2	3
Cantidad de medicamento mg (y)	20			

a. Escribir la expresión matemática que permite determinar la cantidad de medicamento que queda en el cuerpo (y), en función del número de días transcurridos (x), y graficar en el plano.

GRÁFICA 1



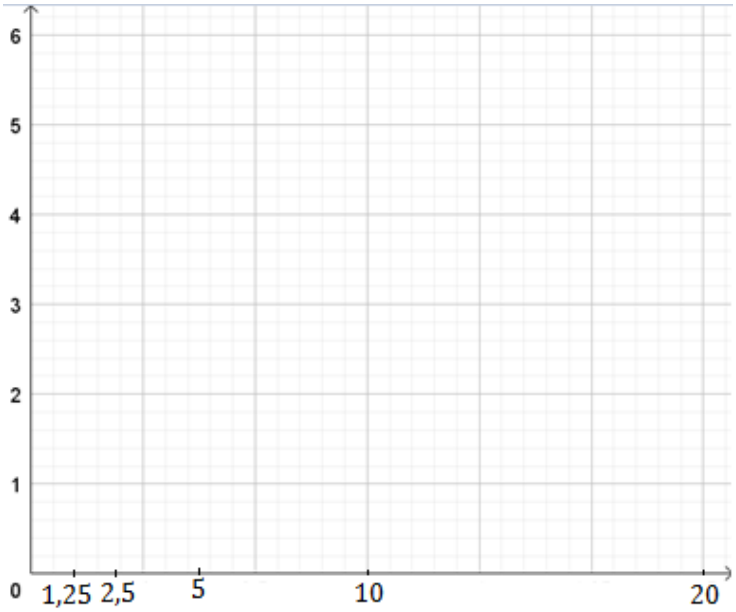
a. ¿Qué sucede con los valores de y cuando aumenta el valor de x?
b. ¿Los valores x y y tienen que ser números naturales, de acuerdo al problema?
c. ¿Cuál es la expresión matemática que modela el problema?

Nuevamente analicemos la situación de forma inversa, es decir, pensemos en que conocemos la cantidad de medicamento en el cuerpo, y queremos determinar cuántos días han pasado desde que fue inyectado (mantenemos constante la vida

media y la cantidad de medicamento suministrado). Completar la tabla y graficar en el plano:

Cantidad de medicamento mg (x)	20	10	5	2,5	1,25
Día (y)					

GRÁFICA 2



a. ¿Qué sucede con los valores de y cuando aumenta el valor de x?
b. ¿Qué relación existe entre las dos gráficas? ¿Qué características comunes tienen?

Si analizamos la situación, en el segundo plano, hemos graficado la función:

$$y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{20}\right)$$

3. Completar la siguiente tabla y graficar los puntos en el plano cartesiano:

x	-2	-1	0	1	2
y	$2^{-2} =$	$2^{-1} =$	$2^{0} =$	$2^{1} =$	$2^{2} =$

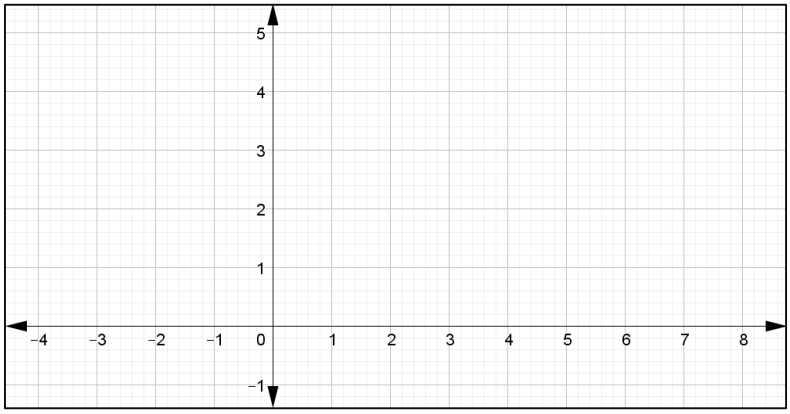
Con ayuda del curvígrafo, unir los puntos del plano cartesiano.

Responder:

a. ¿La gráfica anterior tiene un comportamiento similar con algún conjunto de puntos del ejercicio 1 o 2 (cría de conejos o vida media)? ¿con cuál?
b. ¿La gráfica anterior es una función? ¿Por qué?
c. En caso de ser función: ¿corresponde a una función creciente o decreciente?
d. ¿La gráfica corta al eje x? ¿En qué valor o valores?
e. ¿La gráfica corta al eje y? ¿En qué valor o valores?
f. ¿Qué expresión algebraica nos permite hallar cualquier pareja de puntos de la gráfica anterior?

4. Completar la siguiente tabla y graficar los puntos en el plano cartesiano:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} =$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} =$



Con ayuda del curvígrafo, unir los puntos del plano cartesiano.

Responder:

a. ¿La gráfica anterior tiene un comportamiento similar con algún conjunto de puntos del ejercicio 1 o 2 (cría de conejos o vida media)? ¿con cuál?
b. ¿La gráfica anterior es una función? ¿Por qué?
c. En caso de ser función: ¿corresponde a una función creciente o decreciente?
d. ¿La gráfica corta al eje x? ¿En qué valor o valores?
e. ¿La gráfica corta al eje y? ¿En qué valor o valores?
f. ¿Qué expresión algebraica nos permite hallar cualquier pareja de puntos de la gráfica anterior?

ANÁLISIS DE LAS GRÁFICAS – EJERCICIOS 3 Y 4:

Estas gráficas corresponden a funciones exponenciales:

$$y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$

1) ¿Cuál es el dominio de una función exponencial?
2) ¿Cuál es el rango de una función exponencial?
3) ¿Cuál de las funciones es creciente y cuál decreciente? ¿Podrían determinar la condición que debe tener una función exponencial para ser creciente? ¿Qué condición se necesita para que sea decreciente?
4) ¿Ambas gráficas tienen algún punto en común? ¿Cuál?
5) ¿Observan alguna particularidad para el valor de y cuando $x = 1$?
6) ¿Cuántos valores de x están asociados para cada valor de y?

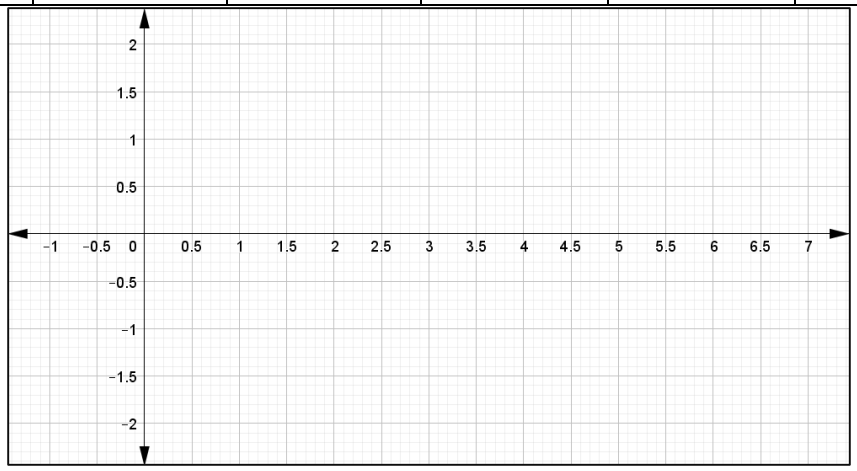
7) ¿Existe algún punto de corte de las gráficas con el eje x? En caso de existir, ¿es el mismo punto? ¿Cuál?
8) ¿Existe algún punto de corte de las gráficas con el eje y? En caso de existir, ¿es el mismo punto? ¿Cuál?

Recordemos: Una función es **inyectiva** si elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes. Podríamos reconocerlas gráficamente si al trazar un recta paralela al eje x ésta corta la curva en un solo punto, lo que equivale a afirmar que cada y es imagen de un sólo valor x.

9) ¿Alguna de las gráficas anteriores corresponde a una función inyectiva? ¿por qué?

5. Completar la siguiente tabla y graficar los puntos en el plano cartesiano:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\log_2 \frac{1}{4} =$	$\log_2 \frac{1}{2} =$	$\log_2 1 =$	$\log_2 2 =$	$\log_2 4 =$



Con ayuda del curvígrafo, unir los puntos del plano cartesiano.

Responder:

a. ¿La gráfica anterior tiene un comportamiento similar a algún conjunto de puntos del ejercicio 1 o 2 (cría de conejos o vida media)? ¿con cuál?
b. ¿La gráfica anterior es una función? ¿Por qué?
c. En caso de ser función: ¿corresponde a una función creciente o decreciente?
d. ¿La gráfica corta al eje x? ¿En qué valor o valores?
e. ¿La gráfica corta al eje y? ¿En qué valor o valores?

f. ¿Qué expresión algebraica nos permite hallar cualquier pareja de puntos de la gráfica anterior?

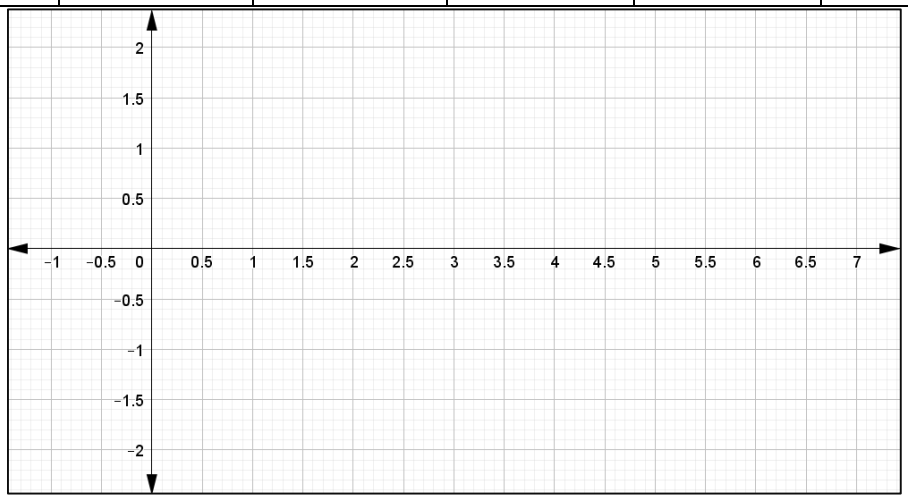
Ejercicio: Determinar si cada una de las siguientes funciones logarítmicas es creciente o decreciente.

Realizar un bosquejo de la gráfica en hoja milimetrada, para verificar las respuestas anteriores.

a. $y = \log_{\frac{1}{5}} x$
b. $y = \log_8 x$
c. $y = \log_{\frac{3}{4}} x$
d. $y = \ln x$
e. $y = \log x$

6. Completar la siguiente tabla y graficar los puntos en el plano cartesiano:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$\log_{1/2} \frac{1}{4} =$	$\log_{1/2} \frac{1}{2} =$	$\log_{1/2} 1 =$	$\log_{1/2} 2 =$	$\log_{1/2} 4 =$



Con ayuda del curvígrafo, unir los puntos del plano cartesiano.

Responder:

a. ¿La gráfica anterior tiene un comportamiento similar con algún conjunto de puntos del ejercicio 1 o 2 (cría de conejos o vida media)? ¿con cuál?
b. ¿La gráfica anterior es una función? ¿Por qué?
c. En caso de ser función: ¿corresponde a una función creciente o decreciente?

d. ¿La gráfica corta al eje x? ¿En qué valor o valores?
e. ¿La gráfica corta al eje y? ¿En qué valor o valores?
f. ¿Qué expresión algebraica nos permite hallar cualquier pareja de puntos de la gráfica anterior?

ANÁLISIS DE LAS GRÁFICAS – EJERCICIOS 5 Y 6:

Estas gráficas corresponden a funciones logarítmicas:

$$y = f(x) = \log_a x\,, a > 0, a \neq 1$$

1) ¿Qué condición debe tener una función logarítmica para ser creciente? ¿qué condición debe tener para ser decreciente?
2) ¿Cuál es el dominio de una función logarítmica?
3) ¿Cuál es el rango de una función logarítmica?
4) ¿Ambas gráficas tienen algún punto en común? ¿Cuál?
5) ¿Observan alguna particularidad para el valor de x cuando $y = 1$?
6) ¿Cuántos valores de x están asociados para cada valor de y?
7) ¿Alguna de las gráficas anteriores corresponde a una función inyectiva? ¿por qué?
8) ¿Existe algún punto de corte de las gráficas con el eje x? En caso de existir, ¿es el mismo punto? ¿Cuál?
9) ¿Existe algún punto de corte de las gráficas con el eje y? En caso de existir, ¿es el mismo punto? ¿Cuál?

Parte 2 – CONCEPTUALIZACIÓN

Función Exponencial:

Una función es exponencial si es de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Características:

1. $Dom_f = \mathbb{R}$
2. $Rango_f = \mathbb{R}^+$
3. Es creciente si $a > 1$; Es decreciente si $0 < a < 1$.

7. Graficar en tu celular, con el programa Geogebra, las siguientes funciones:

- ✓ $f(x) = 3^x$
- ✓ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- ✓ $f(x) = 4^x$
- ✓ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- ✓ $f(x) = \left(\frac{9}{2}\right)^x$
- ✓ $f(x) = \left(\frac{2}{9}\right)^x$

- ¿Las funciones son crecientes o decrecientes?
- ¿Qué condición se necesita para que una función exponencial sea creciente o decreciente?
- ¿Tiene algún punto de corte con el eje x? ¿Cuál?
- ¿Tiene algún punto de corte con el eje y? ¿Cuál?
- ¿Cuál es la ordenada para $x = 0$?
- ¿Cuál es la ordenada para $x = 1$?
- Escribe el dominio y el rango de cada función. ¿El dominio y el rango dependen de la base? Escriban las conjeturas que tengan al respecto.

Función Logarítmica:

Una función logarítmica tiene la forma $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Características:

1. $Dom_f = \mathbb{R}^+$
2. $Rango_f = \mathbb{R}$
3. Es creciente si $a > 1$; Es decreciente si $0 < a < 1$.

8. Graficar en tu celular, con el programa Geogebra, las siguientes funciones:

- ✓ $f(x) = \log_3 x$
- ✓ $f(x) = \log_{1/3} x$
- ✓ $f(x) = \log_4 x$
- ✓ $f(x) = \log_{1/4} x$

- ✓ $f(x) = \log_{9/2} x$
- ✓ $f(x) = \log_{2/9} x$

- ¿Las funciones son crecientes o decrecientes?
- ¿Qué condición se necesita para que una función logarítmica sea creciente o decreciente?
- ¿Tiene algún punto de corte con el eje x? ¿Cuál?
- ¿Tiene algún punto de corte con el eje y? ¿Cuál?
- ¿Cuál es la ordenada para $x = 1$?
- ¿Cuál es la ordenada para $x = a$?
- Escribe el dominio y el rango de cada función. ¿El dominio y el rango dependen de la base? Escriban las conjeturas que tengan al respecto.

Función Inversa: La inversa de una función existe si y sólo si dicha función es inyectiva. Las funciones exponenciales y logarítmicas (con igual base) son inversas entre sí, es decir, $f(x) = a^x$ (con $a > 0$ y $a \neq 1$) y $f(x) = \log_a x$ (con $a > 0$ y $a \neq 1$) son funciones inversas. $\log_a a^x = x, x \in \mathbb{R}$ y $a^{\log_a x} = x, x > 0$.

9. Graficar con tu celular (al mismo tiempo) cada terna de funciones y responder: ¿Qué relación observan entre las dos primeras funciones, respecto a la tercera?

a. $f(x) = 3^x$, $f(x) = \log_3 x$ y $f(x) = x$

b. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ y $f(x) = x$

Nota: La tercera función de cada terna ($f(x) = x$) se conoce como función identidad.

4.5.1 Análisis de resultados

A los estudiantes se les facilitó reconocer la representación gráfica de las funciones logarítmicas y exponenciales crecientes, con las decrecientes tuvieron algo de dificultad, y pasó algo similar a la hora de buscar la representación algebraica; a lo largo de la secuencia didáctica se observan dificultades referentes a las bases fraccionarias y exponentes negativos.

Por otro lado, en su mayoría, identifican las diferentes propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas, sin importar la representación (algebraica o gráfica).

4.6 Actividad 4: Aplicación de los logaritmos a la escala de pH

Objetivos:

1. Evidenciar la importancia de las matemáticas (en especial los logaritmos) en el desarrollo de otras áreas del conocimiento.
2. Aplicar las propiedades de los logaritmos en la solución de problemas de escala de pH.

RECORDEMOS:

El **pH** se define como el logaritmo decimal de la concentración de hidrógenos que se encuentran en disolución acuosa. La noción y la escala de lo que conocemos como pH surgió de considerar que el agua se disocia dejando libres iones H^+ (hidronios) e iones OH^- (hidroxilos); según lo que se muestra en la siguiente representación:

$$H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$$ (Ecuación que representa la disociación del agua)

Las flechas de la anterior ecuación significan que la disociación se da en el sentido izquierda-derecha y que las especies se pueden asociar otra vez de derecha a izquierda.

Se habla también de la constante de equilibrio (K_w) del agua pura. Esta constante tiene que ver con la velocidad con la que se da la disociación. Su valor se ha calculado a 25°C y es: 1×10^{-14}.

La constante K_w es igual a la concentración de los hidronios multiplicada por la concentración de hidroxilos y se puede escribir de la siguiente forma:

$$K_w = [H^+][OH^-] = 1 \times 10^{-14}$$

Para entender que se habla de la ***concentración de los iones expresada en la unidad molaridad (M)***, se escriben los iones entre unos corchetes cuadrados. El agua neutra posee la misma concentración de hidronios que de hidroxilos, así que la concentración de estos iones debe ser igual a 1×10^{-7} para que su producto sea 1×10^{-14}.

La cantidad de hidronios y de hidroxilos puede cambiar si al agua se le adicionan sustancias que contribuyan con iones. Según las teorías más sencillas, se considera que un *ácido* puede liberar iones H^+ y que una *base* puede liberar iones OH^-. La presencia de otras sustancias en el agua hace entonces que la concentración de los iones hidronio e hidroxilo cambie, pero debemos tener en cuenta que siempre el producto de las concentraciones debe ser igual a 1×10^{-14}.

Como el valor de la constante (1×10^{-14}) y también la concentración de los iones son números tan pequeños, en 1909, se quiso facilitar su manejo de los números y se propuso aplicar logaritmos. De esta idea surge que:

$$pH = -\log[H^+]$$

Es decir, el pH es el inverso aditivo del logaritmo de la concentración de hidronios.

Por otro lado, el pOH se define así:

$$pOH = -\log[OH^-]$$

El pOH es igual al inverso aditivo del logaritmo de la concentración de hidroxilos.

Si el $pH = -\log[H^+]$ podemos demostrar, a partir de la función exponencial con base 10 (ya que es la función inversa al logaritmo en base 10), que $H^+ = 10^{-pH}$; así, teniendo el pH podríamos calcular la concentración de hidronios. De manera similar podemos establecer que $OH^- = 10^{-pOH}$ y así poder calcular la concentración de hidroxilos, al tener el pOH.

Ejercicio 1: Demostrar, a partir de la definición de pH, pOH, k_w y las propiedades de los logaritmos que $pH + pOH = 14$.

A partir del ejercicio anterior, y de saber que la escala de pH es inversamente proporcional a la concentración de hidronios (en soluciones acuosas), se puede establecer que el pH del agua pura a 25° es 7.

Se dice que los valores de pH que están en el intervalo $(0\ a\ 7)$ corresponden a sustancias ácidas y que los pH que están en el intervalo $(7\ a\ 14)$ se dice que están en un medio básico, y el pH igual a 7 se dice que es neutro y es el que corresponde también al agua sin adición de sustancias .

Ejercicio 2: Consultar qué son ácidos y bases fuertes.

Ejercicio 3: Calcular el pH para cada sustancia (Todas son ácidos o bases fuertes), e indique cuáles de las sustancias son ácidas y cuáles básicas:

a. Una disolución 0,125 M (es la concentración) de HCl.
b. Una disolución 0,33 M de NaOH.
c. HBr a una concentración de $8{,}5 \times 10^{-3}$ M (Utilice las propiedades de los logaritmos para resolver este ejercicio).
d. 2,34 g HNO_3 en 895 mL de disolución (Primero debe pasar a Molaridad).
e. 3,16 g NaOH en 700 mL de disolución.
f. Una mezcla de 10 mL de HBr 0,1 M con 20 mL de HCl 0,25 M.

Ejercicio 4: Calculen $[H^+]$ y $[OH^-]$ para las siguientes sustancias e indiquen cuáles son ácidas y cuáles básicas:

a. KOH, pH=8,6
b. $HClO_4$, pH=3,8
c. HCl, pH=1,2
d. NaOH, pH=13,1

1. Escriban en el formato[3], las predicciones individuales y grupales de la hoja anterior (en las columnas correspondientes).

MUESTRA	PREDICCIÓN INDIVIDUAL	PREDICCIÓN GRUPAL	MEDICIÓN	CÁLCULO	CONCENTRACIÓN DE HIDRONIOS	CONCENTRACIÓN DE HIDROXILOS	OBSERVACIONES
COCINA							
NARANJA NATURAL	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	
LECHE FRESCA	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	
AGUA DE LA LLAVE	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	
SAL DE COCINA SÓLIDA	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	
SAL DE COCINA EN AGUA	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	

[3] Formato adaptado del utilizado por el taller de pH de la asignatura "Taller Experimental" – Módulo de Química – Prof. Liliam Palomeque - Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia (2016).

AZÚCAR EN AGUA	pH	pH	pH	**pOH**	$[H^+]$	$[OH^-]$	
MUESTRA	**PREDICCIÓN INDIVIDUAL**	**PREDICCIÓN GRUPAL**	**MEDICIÓN pH**	**CÁLCULO pOH**	**CONCENTRACIÓN DE HIDRONIOS**	**CONCENTRACIÓN DE HIDROXILOS**	**OBSERVACIONES**
ASEO							
JABÓN EN POLVO	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	
JABÓN EN AGUA	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	
LIMPIAVIDRIOS	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	
CHAMPÚ	pH	pH	pH	pOH	$[H^+]$	$[OH^-]$	

2. Ubique el pH medido con el pH-metro en la columna correspondiente. Además, complete la tabla de acuerdo a lo trabajado en la parte 1 de esta actividad. En la columna “OBSERVACIONES” escriba, después de la experimentación, si la sustancia es ácida o básica.
3. ¿Se pudo medir el pH en todas las sustancias? En caso de no poderse medir en alguna, ¿por qué creen que no se pudo medir en esa(s) sustancia(s)? ¿Qué condiciones debe tener una sustancia para que podamos medir su pH con el pH-metro.

4.6.1 Análisis de resultados

Como se puedo observar, la actividad involucró conceptos de química y matemáticas, fue una actividad transversal que promovió un aprendizaje conjunto y significativo para el estudiante, utilizando elementos cercanos a su entorno.

Se observó que los estudiantes participaron de manera activa, utilizando las propiedades de los logaritmos para explicar algunos razonamientos en química. Como lo muestran las siguientes imágenes:

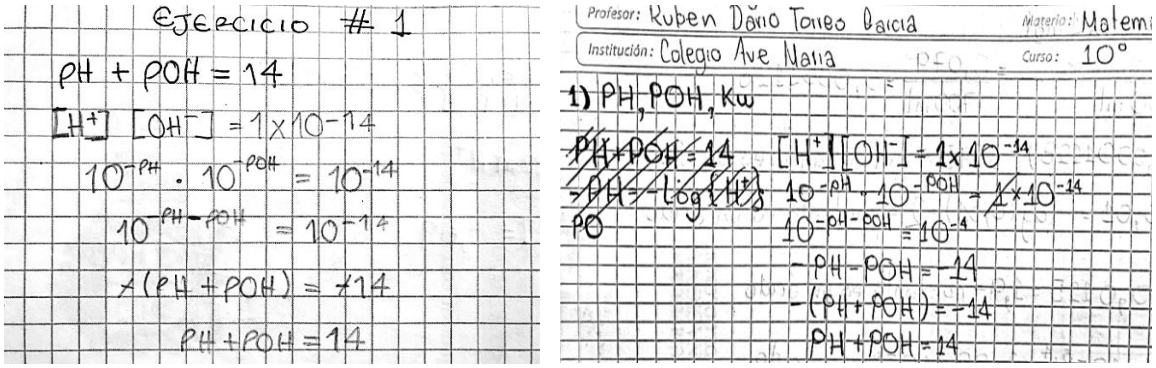


Ilustración 4-1. Uso de propiedades de la logaritmación al pH.

Además, los estudiantes presentaron dificultades en el manejo de ácidos y bases fuertes, y su importancia en la disociación completa, por lo cual, fue necesaria una explicación de la temática y algunos ejemplos que llevaron a que los estudiantes resolvieran de la mejor manera los ejercicios; sin embargo, algunos estudiantes presentaban dificultades para entender qué estaban calculado (pH o pOH), y algunos no recordaban como realizar conversiones a molaridad, por ejemplo:

1. Calcular el pH, e indicar si la sustancia es ácida o básica: Una disolución de 0,33 M de NaOH (Punto 3.b de la actividad #4 de la secuencia)

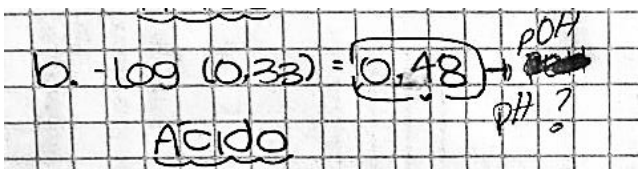


Ilustración 4-2. Error - Indistinción entre pH y pOH.

2. Calcular el pH, e indicar si la sustancia es ácida o básica: 2,34 g HNO_3 en 895 mL de disolución (Punto 3.d de la actividad #4 de la secuencia)

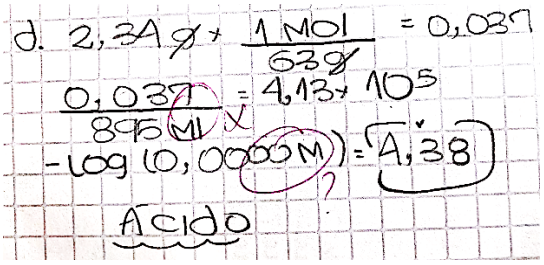


Ilustración 4-3. Error en la conversión.

Por otro lado, en las predicciones grupales (no se tendrán en cuenta las individuales, sino el fruto de la discusión grupal), hubo errores por parte de los estudiantes, clasificaron de manera errónea algunas de las sustancias (entre ácida, neutra o básica), por ejemplo:

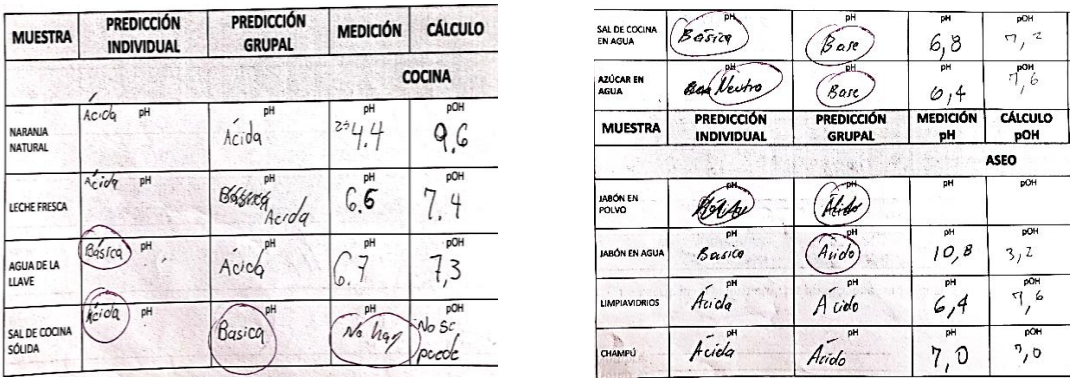


Ilustración 4-4. Error en las predicciones 1.

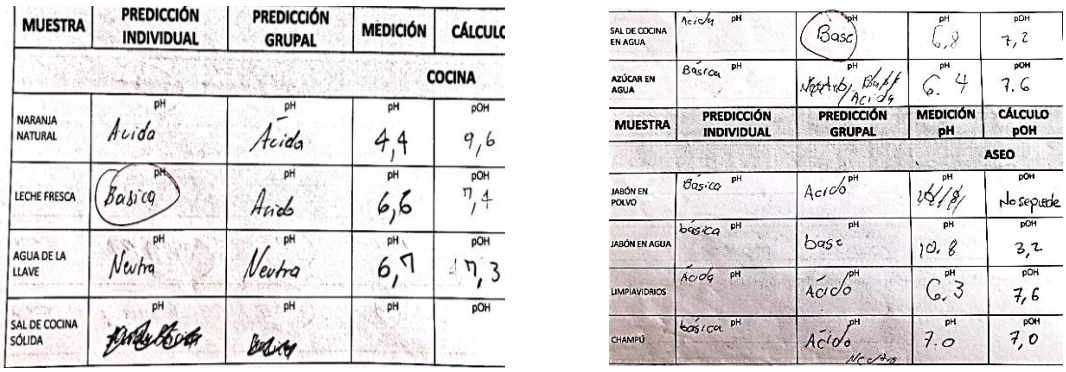


Ilustración 4-5. Error en las predicciones 2.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Se presenta una secuencia didáctica que permite el afianzamiento del concepto logaritmo (su definición, propiedades operacionales y propiedades funcionales), así como su aplicación a un problema cercano a los estudiantes (la escala de pH).

Se observó que algunos estudiantes tenían dificultades en la potenciación y sus propiedades, por lo cual se diseñó una actividad de refuerzo de pre conceptos, en la cual los estudiantes lograron suplir sus necesidades educativas, con ayuda del aprendizaje colaborativo.

Los logaritmos son un concepto matemático que surgió a lo largo de la historia, y en el cual participaron varios autores. Es importante tener en cuenta el establecimiento de las propiedades de los logaritmos a partir de la visualización de la tabla compuesta por una sucesión aritmética y otra geométrica, las propiedades de la función logarítmica, y el uso de los logaritmos en la escala de pH.

Se diseñaron las actividades de la secuencia didáctica de tal manera que facilitaran la apropiación del conocimiento y su aplicación, por lo cual: se abordó la evaluación de preconceptos (potenciación y sus propiedades); actividad 0, para que los estudiantes superaran sus vacíos pre conceptuales; actividad 1, en la cual se trabajó la definición de logaritmo, como operación inversa a la potenciación; actividad 2, que tenía como objetivo establecer las propiedades de los logaritmos; actividad 3, para observar las representaciones gráficas de las funciones exponencial y logarítmica, y sus propiedades; y la actividad 4, en la cual se busca la aplicación de los logaritmos a la escala de pH.

Posteriormente, se aplicó la secuencia, y se analizaron los resultados de los estudiantes; dichos análisis se hicieron actividad por actividad, y se escribieron en las Secciones 4.1.1,

4.2.1, 4.3.1, 4.4.1, 4.5.1 y 4.6.1 (para la prueba diagnóstico, Actividad 0, Actividad 1, Actividad 2, Actividad 3 y Actividad 4, respectivamente). Se observó que la manera en la cual se desarrollaron las actividades permitieron el apropiamiento conceptual y aplicativo de la secuencia didáctica propuesta.

5.2 Recomendaciones

La secuencia didáctica propuesta debe ser abordada con el tiempo suficiente, permitiéndose revisar, actividad por actividad, el avance de los estudiantes, y así poder replantear o reorganizar algunas actividades. Recordemos que cada grupo de estudiantes es diferente, y no porque haya dado resultados con un grupo quiere decir que siempre se obtendrán buenos resultados, y viceversa.

Por otro lado, es importante tener en cuenta el manejo de los estudiantes y del docente en qué es un ácido y base fuerte, y qué es una disociación completa, lo cual ayuda al desarrollo de las actividades propuestas en los ejercicios 2, 3 y 4 de la actividad 4; por lo cual, sería fundamental que el profesor de química (o el que esté aplicando la secuencia didáctica) realice un refuerzo en dichos temas.

A. Anexo: Actividad – Indagación en las propiedades de los logaritmos

La construcción del conocimiento es fundamental en el afianzamiento del mismo, y se aleja del "aprendizaje memorístico". Teniendo en cuenta la construcción de las propiedades realizada en el componente histórico y disciplinar, se buscará que el estudiante realice el mismo proceso. Esta actividad se plantea para trabajarla entre la actividad 1 (que finaliza con la definición de logaritmo, como operación inversa a la potenciación) y la actividad 2 (que indica cuáles son las propiedades, y les pide utilizarlas); ya que busca que el estudiante se dé cuenta de algunas de las propiedades sin necesidad de enunciarlas.

1. Completa la siguiente la siguiente tabla:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	A
		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27				

2. Estableciendo que

$$\log_3 G = A$$

G es la sucesión geométrica (la segunda fila) y A es la sucesión aritmética (la primera fila)

Escribe, utilizando la tabla, el resultado de cada igualdad:

a. $\log_3 9 =$
b. $\log_3 81 =$
c. $\log_3 \frac{1}{9} =$
d. $\log_3 \frac{1}{81} =$

Para calcular $\frac{1}{9} \times 3$, basta con saber que:

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \qquad \log_3 3 = 1$$

Ahora, sabemos que $-2 + 1$ (que son los resultados de los logaritmos anteriores) da como resultado -1, pero -1 es el resultado de $\log_3 \frac{1}{3}$, por lo cual $\frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 3: Utilice la idea anterior para resolver 9×81 y $81 \times \frac{1}{9}$.

Por otro lado, para calcular $81 \div \frac{1}{3}$, basta con saber que:

$$\log_3 81 = 4 \qquad \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Ahora, sabemos que $4 - (-1)$ (que son los resultados de los logaritmos anteriores) da como resultado 5, pero 5 es el resultado de $\log_3 243$, por lo cual $81 \div \frac{1}{3} = 243$.

Ejercicio 4: Utiliza la idea anterior para calcular $\frac{1}{27} \div \frac{1}{9}$ y $27 \div 729$.

Además, si queremos calcular 9^3, podemos hacer lo siguiente:

$$\log_3 9 = 2$$

Ahora, multiplicamos la base (el número 3 en este ejemplo) con el resultado anterior, por lo cual tenemos $3 \times 2 = 6$, como 6 es el resultado de $\log_3 729$, entonces $9^3 = 729$.

Ejercicio 5: Utiliza la idea descrita para calcular $9^{-2}, 27^2$ y 3^{-4}.

Bibliografía

Alméciga, A. & Muñoz, M. (2013). *pH, Historia de un concepto. Análisis en textos de educación superior*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional.

Apóstol, T. (2001). *Calculus* Vol. 1. Barcelona: Editorial Reverté.

Caamaño, A., & Irazoque, G. (2009). *La enseñanza y el aprendizaje de la terminología química: magnitudes y símbolos*. *Educació Química*, 46-55.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brown, T., LeMay, H., Bursten, B. & Burdge, J. (2004). *Química. La ciencia central* Novena edición. México: Pearson educación.

Chernobylwel.come (s.f.). *Historia de Chernóbil y riesgo de radiación actual*. Recuperado el 16 de octubre de 2017 de https://www.chernobylwel.com/es/la-historia-de-chernobil#

Cajori, F. (1919). *A History of Mathematics*. Londres: Macmillan & Co Ltda.

Cajori, F. (1993). *A history of Mathematical Notations, Two volumes Bound as one.* New York: Dover Publications.

Collazos, A., & Mendoza, J. (2006). *Cómo aprovechar el "aprendizaje colaborativo" en el aula.* Educación y educadores *Vol*. 9, Número 2, p. 61-76.

Dávila, S. (2000). *El aprendizaje significativo: Esa extraña expresión*. Recuperado el 8 de mayo de 2017 de https://www.researchgate.net/publication/28076295_El_aprendizaje_significativo_Esa_extrana_expresion

Feito, R. (2004). *La enseñanza en grupos homogéneos y heterogéneos*. Recuperado el 10 de mayo de 2017 de https://www.researchgate.net/publication/267832960_LA_ENSENANZA_EN_GRUPOS_HOMOGENEOS_Y_HETEROGENEOS

Ferrari, M., & Farfán, R. (2007). *UNA RED DE MODELOS Y LA CONSTRUCCIÓN DE LOS LOGARITMOS*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa *Vol.20*, 789.

Gacharná, O. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media*. Trabajo de grado de maestría. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

González, M., & Vargas, J. (2007). *Segmentos de la historia: la función logarítmica*. Matemáticas: Enseñanza universitaria, 129-144.

Jordi (2012). *Vida Media. Fisicoquimica.* Recuperado el 16 de octubre de 2017 de http://www.quimicafisica.com/node/147

Lefort, X. (2001). *Historia de los logaritmos: Un ejemplo del desarrollo de un concepto en matemáticas.* Recuperado el 2 de septiembre de 2017 de I.E.S. Albéniz: https://albeniz-1bachcienciasmatematicas.wikispaces.com/file/view/Historia+de+los+Logaritmos.pdf

Mesa Garcia, F. M. (2008). *Quimica onceno grado.* Cuba: Pueblo y educacion.

Morales, A. (2014). *Propuesta de un objeto virtual de aprendizaje como herramienta para la enseñanza de los ácidos y las bases.* Trabajo de grado de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.

Munarriz, B. (s.f.). *Técnicas y métodos en investigación cualitativa.* Recuperado el 30 de marzo de 2017 de Repositorio da UDC: http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/8533/CC-02art8ocr.pdf;jsessionid=04F115EFD2F0BFC6F7B0D52D51E2B4B4?sequence=1

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos.* Cuarta edición. Bogotá D.C.: Panamericana, Formas e Impresos S.A.

Padrós, N. (2009). *La teoría de la inclusión: entre el desarrollo científico y la casualidad cotidiana*. Recuperado el 2 de septiembre de 2017 de https://www.researchgate.net/publication/28299995_La_teoria_de_la_inclusion_entre_el_desarrollo_cientifico_y_la_casualidad_cotidiana

Ramírez García, E. C. (2007). *TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LAS FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE*: *PROCESO DE MODELACIÓN*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.20*, 789.

Recio del Bosque , F. (2012). *Quimica general.* México: Mc Graw Hill Interamericana.

Reddy, J., & Rasmussen, M. (1990). *Análisis matemático avanzado con aplicaciones a ingeniería y ciencias*. México D.F.: Editorial Limusa.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Rizzotto, M. (2007). *Diccionario de quimica general e inorganica .* Argentina: Corpus.

Rudin, W. (1980). *Principios de Análisis Matemático*, Tercera Edición. México: Libros McGraw-Hill.

Scientific American (s.f.). *Colombia devela un impresionante depósito de fósiles marinos de hace más de 100 millones de años*. Recuperado el 23 de octubre de 2017 de https://www.scientificamerican.com/espanol/noticias/colombia-devela-un-impresionante-deposito-de-fosiles-marinos-de-hace-mas-de-100-millones-de-anos/

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal*, Segunda Edición. Barcelona: Editorial Reverté.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo,* Sexta Edición. México, D.F.: Cengage Learning Editores.

Tapia, F. (2003). *Historia de los logaritmos*. Apuntes de historia de las matemáticas, 5-22.

Toledo, A. (s.f.). *El Constructivismo Pedagógico*. Recuperado el 8 de mayo de 2017 de http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/El%20Constructivismo%20Pedag%C3%B3gico.pdf

Vargas, J., Pérez, M., & González, M. T. (2011). *EL LOGARITMO: ¿CÓMO ANIMAR UN PUNTO QUE RELACIONE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA Y UNA ARITMÉTICA?.* Memoria del 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pág. 10). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.