# SECCION 9

## AXIOMA DEL PRODUCTO CARTESIANO.

### 9.1 Par ordenado formado por dos objetos.

Sean x, y dos objetos ó elementos. Sabemos por el axioma de agrupación que podemos garantizar la existencia de un conjunto: $\{x, y\} = \{z / z = x \text{ ó } z = y\}$. Además sabemos que este conjunto es igual al conjunto $\{y, x\}$ es decir, es indiferente el orden en que se tomen sus elementos al agruparlos. Se trata ahora de producir un nuevo conjunto en el cual interese el orden en que aparecen sus elementos, y además, este conjunto dependa de estos elementos.

A este nuevo conjunto se le llama par ordenado y la definición se hace de tal modo que resulte que el par ordenado x, y sea diferente del par ordenado y, x.

Definición 1.

Dados dos objetos x, y se llama par ordenado x, y; denotado por (x, y) al conjunto definido por:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

al primer elemento x se le designa "primera coordenada" y al segundo, y, se le llama "segunda coordenada".

Ejemplo: En el plano cartesiano, el par (4, 5) es un punto diferente del punto representado por el par (5, 4).

Observación:

1) $(x, y) \neq \{x, y\}$
2) $(x, y) \neq (y, x) \Longleftrightarrow x \neq y$

Definición 2.

Dos pares ordenados son iguales si y solo si tienen las primeras componentes iguales y además las segundas coordenadas también iguales. Es decir:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Nota: En una construcción más rigurosa de la teoría de conjuntos esta propiedad se puede demostrar.

Ejemplo: Se dice que la pareja $\big((x - 1), (y - 2)\big)$ es igual a la pareja $(0, 0)$ si y solo si $x = 1 \wedge y = 2$.

9.2 Axioma del producto cartesiano.

Sean A, B conjuntos. Existe un único conjunto C, cuyos elementos son parejas ordenadas tales que: la primera componente de cada pareja pertenece a A y la segunda coordenada pertenece al conjunto B. Es decir: si $z \in C$ quiere decir que $z = (a, b)$ donde $a \in A \wedge b \in B$. El conjunto C se le llama "producto cartesiano de A por B" y se le escribe $A \times B$.

Entonces: $A \times B = \{z / z = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B\}$

o más simplemente:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Nota: $(x, y) \in A \times B \Longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

$(x, y) \notin A \times B \Longleftrightarrow x \notin A$ ó $y \notin B$

Ejemplos: Sea $A = \{0, 1, 2\}$

$B = \{5, 6\}$

$$A \times B = \{(0, 5), (0, 6), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$$

Nótese que $A \times B$ tiene $m \times n$ elementos, siendo m el número de elementos de A y n el número de elementos de B.

EJERCICIOS.

1) $A \times \emptyset = \emptyset$

2) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B \Longrightarrow A \times B \neq B \times A$

3) $A = B \Longleftrightarrow A \times B = B \times A$

4) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$, si $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset$

Es decir, el producto cartesiano no es asociativo.

5) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

6) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

7) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

8) Si $A \subset E \wedge B \subset E$ se tiene entonces que:

$$\complement_{E \times E} A \times B = (\complement_E A \times \complement_E B) \cup (\complement_E A \times B) \cup (A \times \complement_E B)$$

A manera de ejemplo se demostrará la propiedad emunciada en el ejercicio 6. Demostraremos que:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

<u>dm:</u> i) Veamos que $(A \cap B) \times C \subset (A \times C) \cap (B \times C)$

Sea $(x, y) \in (A \cap B) \times C$

$\Longrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C$

$\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C$

$\Longrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times C$

$\Longrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

ii) Veamos que $(A \times C) \cap (B \times C) \subset (A \cap B) \times C$

Sea $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times C$

$\Longrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$

$\Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$

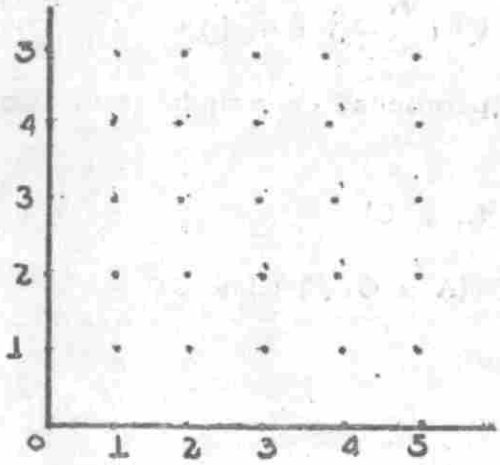
$\Longrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C$

$\Longrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times C.$

Vamos ahora a "ilustrar" por medio de ejemplos unos productos cartesianos sobre los que volveremos en adelante con más detalles:

a) Sea el conjunto de los números naturales. Consideremos ahora el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Según hemos visto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) / x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$

Podemos representar gráficamente dicho conjunto como se ve enseguida:



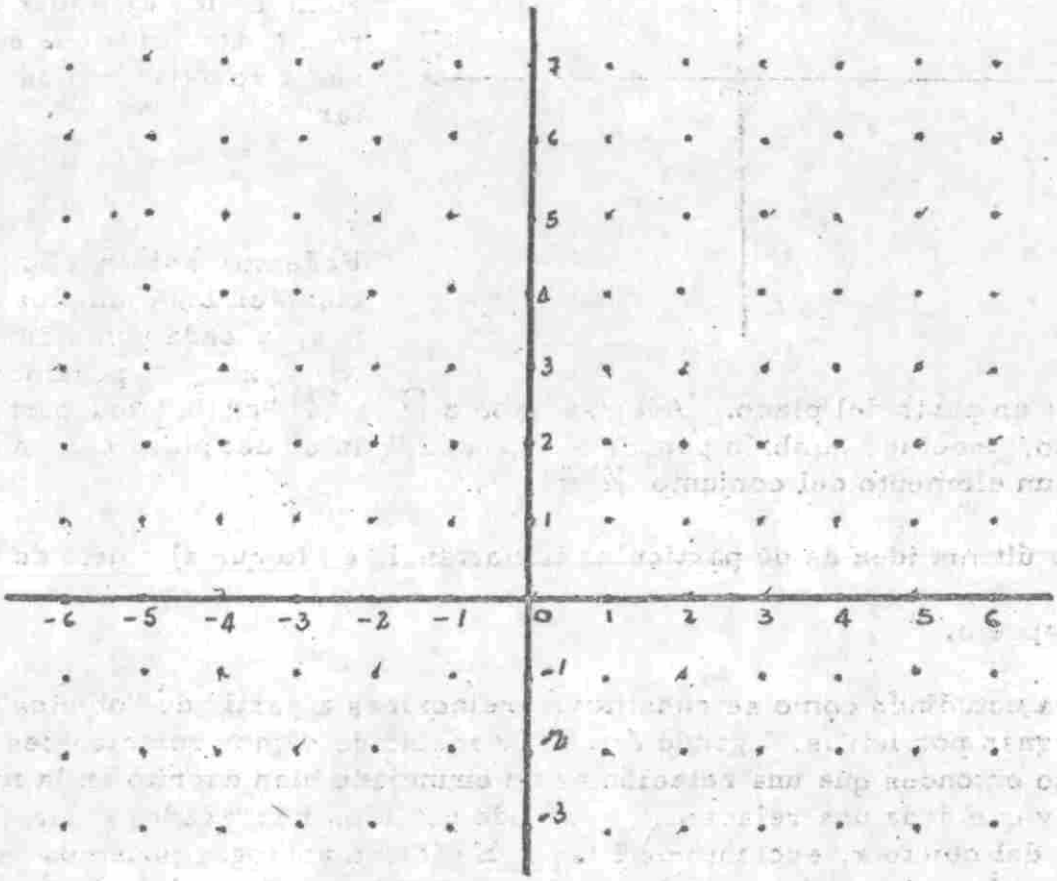

Como era de esperarse, estamos en la imposibilidad de representar gráficamente la totalidad del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En todo caso los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ están representados aquí por "puntos". Nótese además que a cada elemento del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podemos asignarle un "punto" en nuestra gráfica.

<u>Nota</u>: El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ puede representarse por extensión, aunque de manera incompleta, así:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \left\{ \begin{array}{ccccc} (0, 0), & (0, 1), & (0, 2), & \ldots\ldots\ldots\ldots & (0, n) \ldots \\ (1, 0), & (1, 1), & (1, 2), & \ldots\ldots\ldots\ldots & (1, n) \ldots \\ (2, 0), & (2, 1), & (2, 2), & \ldots\ldots\ldots\ldots & (2, n) \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n, 0), & (n, 1), & (n, 2), & \ldots\ldots\ldots\ldots & (n, n) \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right\}$$

b) Consideremos ahora el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ; siendo $\mathbb{Z}$ como de costumbre el conjunto de los números enteros.
Tal como vimos: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) / x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\}$

Tratemos ahora de representar, aunque solo sea en parte, el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

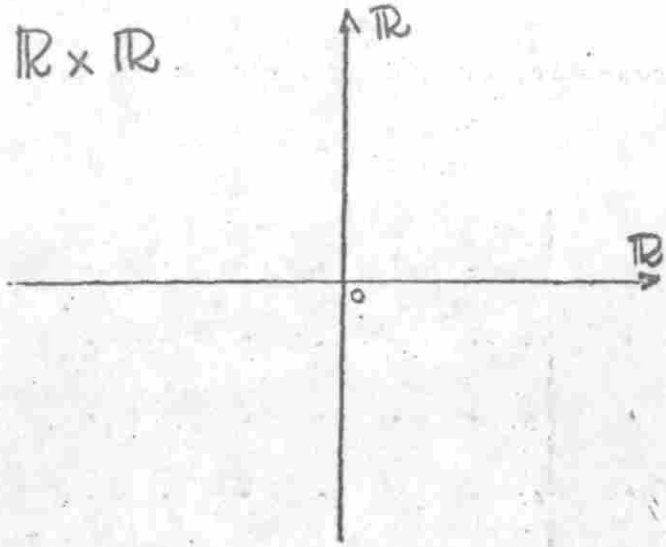



De nuevo, como en el primer caso, los "puntos" de la figura representan el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Podemos también observar que dado un elemento cualquiera del conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es posible "dibujar" un punto en el plano que lo represente.

c) Tomemos ahora el conjunto de los números reales que denotaremos por $\mathbb{R}$ (no se asuste el lector con ésto, pues como ya advertimos, estas propiedades serán discutidas más adelante con todo rigor).

El conjunto: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ puede también representarse gráficamente.

La representación gráfica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ puede verse en la figura como si fuera "todo el plano" y éste es el sentido que tiene.




Efectivamente, el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ "agota" los puntos del plano, en el sentido que, si quisiéramos representarlo como en los ejemplos anteriores, tendríamos que semeternos a no dejar puntos sin "pintar".

Podemos así apreciar que, como en los ejemplos anteriores, a cada punto del conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le podemos "asignar" un punto del plano. Además, como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ "agota" los puntos del plano, podemos también pensar que a cada "punto" del plano podemos asignar un elemento del conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Esta última idea es de particular importancia en lo que al objeto de este curso se refiere y como ya dijimos volveremos con menos premura sobre este aspecto.

9.3 Se ha estudiado como se constituyen relaciones a partir de "objetos" que se designan por letras, ligando éstas por medio de signos relacionales. Hemos dicho entonces que una relación es un enunciado bien escrito en la matemática, y que dada una relación , cuando estamos interesados en la figuración del objeto x, escribimos $R\{x\}$. En forma análoga, podemos escribir $R\{x, y\}$ cuando estamos interesados en la figuración de los objetos x y y.

Ejemplos:

1) $x + y = 10 \wedge x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}$

2) $x^2 + y^2 = 25 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$

3) $(x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B$

4) "x paralelo a y" $(x \parallel y)$ ; $x \perp y$ ; $x \equiv y(n)$

Veamos ahora como podemos formular el concepto de relación en el lenguaje de la teoría de conjuntos:

Sea E un conjunto, sea $x \in E$, sea $y \in E$ ; es decir: x y y son elementos de E. Sea R una relación entre los elementos de E.

Sabemos que el conjunto:

$$\left\{ (x, y) \in E \times E / R\{x, y\} \right\}$$

existe y es único (axioma de especificación).

Denotemos este conjunto por la letra R. Entonces, este conjunto R es un subconjunto de E x E; es decir, está formado por parejas ordenadas (x, y) para las cuales la primera coordenada x está "ligada" a la segunda coordenada y, en la forma que R lo especifique.

Ejemplo: Dados: $\mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$

$$R\{x, y\} : x + y = 3$$

En este caso: $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + y = 3 \right\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

O sea que: $R = \left\{ (0, 3), (3, 0), (2, 1), (1, 2) \right\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Toda relación determina de manera <u>única</u> al conjunto de aquellas parejas ordenadas en las cuales la primera coordenada mantiene la relación R con la segunda. Es decir, si conocemos la relación, conocemos el conjunto; y si conocemos el conjunto, sabemos cual es la relación. Por lo anterior, al conjunto $\left\{ (x, y) \in E \times E / R\{x, y\} \right\}$ se le denota por R.

En base a lo dicho algunos autores también definen relación así:

<u>Definición.</u>

Sea E un conjunto. Un subconjunto de E x E es una relación R. Entonces, cada elemento de R es una pareja ordenada. Esto significa que si $z \in R$, entonces existen x y y en E tales que $z = (x, y)$. Ahora bien, si R es una relación entonces $(x, y) \in R$. Esto se expresa así: x R y que se lee: "x está en relación R con y".

<u>Nota</u>: (1) $z \in R \Longrightarrow z = (x, y)$

(2) $(x, y) \in R \Longleftrightarrow x R y$

Ejemplo: Dados: $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$$C\{x, y\} : x^2 + y^2 = 25$$

Entonces: $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 25 \right\}$

También: $x\,C\,y \Longleftrightarrow (x, y) \in C$

$$(x, y) \in C \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Es decir: Si el punto (x, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertenece a la circunferencia de radio 5 se cumple la relación $x^2 + y^2 = 25$ y si el par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cumple la relación $x^2 + y^2 = 25$, (x, y) pertenece a la circunferencia de radio 5.

Dada una condición, expresada mediante una relación $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, un punto satisface la relación si y solo si el punto pertenece al lugar geométrico asociado a la condición dada.