Aproximación a una experiencia de aprendizaje de resolución de problemas con la aplicación de la solución de ecuaciones

BEATRIZ GIRALDO VÉLEZ

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín

2013

Aproximación a una experiencia de aprendizaje de resolución de problemas

Con la aplicación de la solución de ecuaciones

BEATRIZ GIRALDO VÉLEZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Magister en Educación, JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín

2013

RESUMEN

Con frecuencia los estudiantes de la *Institución Educativa María Josefa Marulanda*, del Municipio de La Ceja, en el oriente antioqueño, se encuentran con temor cuando se quiere abordar la resolución de diversas situaciones problema; trabajan mecánicamente en la solución de ecuaciones lineales y en la solución de sistemas de ecuaciones por diversos métodos, pero tienen dificultad para modelar y resolver los problemas en los que pueden formular y aplicar las ecuaciones. Es por eso que en este trabajo se busca aproximar una estrategia que le permita a las estudiantes del grado noveno de dicha Institución, abordar sin temor y con éxito la resolución de problemas. Para ello se realiza una prueba diagnóstica en un grupo de muestra, para luego aplicar las guías de comprensión del lenguaje algebraico y de traducción del lenguaje natural al matemático, haciendo énfasis en la utilización de ecuaciones y así mejorar la resolución de problemas. Se culmina con la realización de una prueba final, obteniéndose resultados favorables.

Palabras clave: Resolución de problemas, traducción al lenguaje algebraico, ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

ABSTRACT

Often students of School Josefa María Marulanda, the municipality of La Ceja, in eastern Antioquia, are fearful when they want to address problem solving, mechanical work in the solution of linear equations and solving systems equations by various methods , but have difficulty to model and solve problems in which they can develop and implement the equations. That is why in this paper seeks to approximate a strategy that allows the freshmen that institution, address fearlessly and successfully troubleshooting. This diagnostic test is performed on a sample group, then apply the guidelines of understanding of algebraic language and translation of natural language to mathematics, emphasizing the use of equations and thus improve the resolution of problems. It culminates with the completion of a final exam, obtaining favorable results.

Keywords: Problem solving, language translation algebraic equations and systems of equations.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE DIAGRAMAS

1. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En nuestra labor como docentes del Área de Matemáticas en la Educación Básica, en especial en la secundaria, nos encontramos con una concepción memorística del aprendizaje y una enseñanza algorítmica, basada sólo en solución de ecuaciones y ejercicios mecánicos, alejados de la realidad o de situaciones problema, que llevan a que los estudiantes vean algo estériles los temas y sin interés por el estudio de esta área tan importante y valiosa en la vida cotidiana.

Ahora, las pruebas saber que realiza el Ministerio de Educación Nacional tanto en noveno grado como al finalizar la media vocacional y otras pruebas externas a la Institución, como olimpiadas, hacen ver la importancia de hacer crecer a los estudiantes en la capacidad de enfrentar problemas y de habituarlos en la resolución de problemas en los cuales apliquen los conocimientos aprendidos en la Matemática, la Geometría y la Estadística, componentes del área de las Matemáticas.

Más aún, como afirman los lineamientos curriculares del área de Matemáticas, “podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos”.

Y además, de acuerdo con los lineamientos, “La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas suscitados por una situación problema permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas”

2. EL PROBLEMA

Las mediaciones y acciones para hacer significativo, en los estudiantes del grado 9º de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del Municipio de La Ceja, el aprendizaje de la resolución de situaciones problema, utilizando ecuaciones lineales.

3. PREGUNTA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

3.1 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo hacer significativo, en las estudiantes del grado 9º de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del Municipio de La Ceja, el aprendizaje de la resolución de problemas aplicando la solución de ecuaciones?

3.2 OBJETIVO GENERAL

Hacer significativo, en las estudiantes del grado 9º de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del Municipio de La Ceja, el aprendizaje de *la resolución de problemas aplicando la solución de ecuaciones*.

3.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- *Abordar la resolución de problemas,* aplicando la formulación y solución de ecuaciones, *para aproxim*arnos a aprendizajes significativos en el proceso de construcción del conocimiento matemático.

- Desarrollar habilidades para comunicarse matemáticamente: *expresando ideas, interpretando y, usando consistentemente los diferentes tipos de lenguaje para describir relaciones y modelar situaciones cotidianas*. .

- Reconocer caminos alternos y estrategias diversas, *discutiendo ideas, negociando, especulando sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar las ideas*.

- Realizar procesos de razonamiento y del pensamiento matemático como: *la manipulación*; *la formulación de conjeturas*; *la generalización* y *la argumentación*.

4. MARCO TEÓRICO

Es el maestro quien tiene la capacidad de enfrentar el mundo científico desde el mundo cotidiano o precientífico y, en consecuencia, tiene la misión de enseñar a sus estudiantes a valerse de la matemática para potenciar sus capacidades cognitivas y científicas. Las matemáticas ayudan a interpretar el medio, a argumentar científicamente, a tomar mejores decisiones y a desempeñarse con éxito en el mundo de la vida, de la ciencia y de la tecnología.

Uno de los elementos mediadores en el proceso de aprendizaje, de gran importancia para el avance y comprensión de las matemáticas y fundamental para el desarrollo del pensamiento crítico, es la resolución de problemas. Obtener la solución no debe ser el objetivo central de este proceso, sino el camino que lleva hacia ella. De hecho, los lineamientos curriculares en matemáticas (MEN, 1998) destacan como elemento trascendental en la resolución de problemas el descubrir preguntas interesantes*, anotan que saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones.*

No se puede pensar que sólo el profesor de matemáticas debe enseñar a resolver problemas, máxime si se entiende un problema como toda situación en la cual, dada determinadas condiciones, se plantea determinada exigencia, según anota Alberto LabarrereSarduy. En todas las áreas se plantean situaciones o problemas que demandan actividad cognitiva por parte del escolar.

Si el maestro utiliza adecuada y creadoramente los problemas, y de manera consciente prepara a sus estudiantes para la solución de los mismos, entonces se crean condiciones favorables para la asimilación, a un nivel superior, de los conocimientos y el desarrollo de los hábitos y habilidades necesarios, tanto para las distintas materias escolares como para enfrentar las situaciones que plantea la vida cotidiana, expresa Alberto LabarrereSarduy.

Otras definiciones de problema dadas por expertos son:

Según Roger Garret*, un problema es una situación o conflicto para el que no tenemos una respuesta inmediata, ni algoritmo ni heurístico.*

En 1885, Danilov*, llama problema a la tarea cuyo método de realización y cuyo resultado son desconocidos para el alumno a priori, pero que éste, poseyendo los conocimientos y habilidades, está en condiciones de acometer la búsqueda de ese resultado o del método que ha de aplicar.*

Alexandre R. Luria define problema, como una actividad intelectual de modo organizado que se apoya en un programa lógico de operaciones relacionadas entre sí y determinadas por un objetivo y una pregunta de la que no se tiene respuesta inmediata.

Para Allan Schoenfield, un problema es una tarea en la cual el alumno está interesado o se ha involucrado y para la cual desea obtener una resolución, pero no dispone inmediatamente de un medio matemático accesible para dicha resolución.

Orlando Mesa Betancur afirma que *una situación problema es un espacio de interrogantes frente a los cuales el sujeto está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos para plantear y resolver problemas de tipo matemático.*

En estas definiciones se encuentran tres elementos comunes:

- El problema exige unos conocimientos básicos, operativos, lógicos.
- Quien aborda el problema está comprometido con una actividad intelectual para resolverlo.
- Todo problema exige un proceso, conocido o no, guiado por una pregunta de la cual no se tiene respuesta inmediata.

En la enseñanza de las matemáticas hay necesidad de diferenciar ejercicios y problemas. Un ejercicio es toda situación intelectual que requiere la aplicación de un algoritmo con el fin de adiestrarse en el empleo de procedimientos. El ejercicio no requiere mucha actividad cognoscitiva sino mucha memoria, mientras que el problema requiere de memoria, actividad cognoscitiva y razonamiento.

Los lineamientos curriculares en matemáticas señalan que a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, acercar a los estudiantes a las matemáticas, facilitar el desarrollo de procesos de pensamiento y contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de esta ciencia. Además, afirman que las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje, ya que un buen contexto puede actuar como mediador entre el problema concreto y las matemáticas abstractas.

Existen varias clasificaciones de problemas desde el punto de vista de la estructura del problema y de los requisitos necesarios para su solución:

- Problemas abiertos y cerrados,
- problemas de lápiz y papel,
- problemas prácticos,
- problemas académicos y reales,
- problemas cualitativos y cuantitativos
- pequeñas investigaciones.

Dichas clasificaciones no son excluyentes unas de otras, es probable plantear un problema abierto, cualitativo, bien definido, de lápiz y papel.

Es bueno aclarar que en la resolución de problemas se empieza a entrenarse mucho antes de enfrentar propiamente los problemas. Ocurre cuando se trabaja en la comprensión de lectura, resolviendo situaciones conflictivas de clase, cuando se aprenden nuevos conceptos o se ejercita el pensamiento con pasatiempos como rompecabezas, sopas de letras y crucigramas.

Polya, Schoenfeld y Miguel de Guzmán, entre muchos otros expertos, han trabajado fuertemente en el estudio de estrategias cognitivas y metacognitivas para resolución de problemas, entre ellas:

- Seleccionar y organizar ideas importantes
- Buscar contraejemplos
- Trabajar hacia adelante
- Trabajar hacia atrás
- Reducir el problema a uno conocido

- Confeccionar figuras de análisis
- Descomponer el problema en casos simples
- usar material manipulable
- ensayo y error
- usar tablas y listas ordenadas
- particularizar
- generalizar
- analizar casos extremos

Existen también estrategias metacognitivas.La metacognición se refiere a la interpretación que el estudiante hace de sus propios procesos de pensamiento, al control de proceso y resultado. Mientras un estudiante resuelve un problema debe preguntarse: ¿Qué hago? ¿Por qué lo hago? ¿Cómo lo hago? Ser consciente de la efectividad de la comprensión, el planteo, la ejecución y la verificación.

Entre las principales estrategias metacognitivas están:

- Hacer que los procesos sean significativos
- Socializar el trabajo en el grupo
- Monitorear el proceso de pensamiento
- Controlar los procedimientos y los resultados
- Aplicar un método alternativo cuando el que esté utilizando no resuelve el problema

La resolución efectiva de problemas eleva el amor propio y prepara hacia la vida. El profesor de matemáticas debe jerarquizar los problemas a plantear en el aula, de tal manera que el estudiante no se vea abocado al fracaso al no resolver ninguno, como también garantizar que en los problemas haya ganancia en la media que se aumente el nivel de dificultad.

No hay por qué temerle a los problemas, y esa actitud tiene que formarla el profesor. Los problemas son enunciados que retan el pensamiento, fortalecen los procesos y producen resultados satisfactorios para la sociedad. Resolver problemas es el proceso principal que incluye el currículo escolar porque es reconocido como un procedimiento relevante que faculta a la persona para interpretar la vida, transformarla y justipreciarla como el “producto que produce” y redunda en la búsqueda del bien, la verdad y el amor.

En diferentes propuestas metodológicas recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser el eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que constituya en un tópico aparta del currículo, deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y las herramientas sean aprendidos.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas ganan confianza en el uso de las matemáticas, desarrollan una mente inquisitiva y perseverante, aumentan su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar del área, aspectos como los siguientes:

- Formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas
- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas
- Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original
- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas
- Adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas.

El reconocimiento que se le ha dado a la actividad de resolver problemas en el *desarrollo de las matemáticas ha originado algunas propuestas sobre su enseñanza, entre las cuales las más conocidas son las de los investigadores nombrados anteriormente: GeorgePolya y Alan Schoenfeld.*

Para Polya resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados.

Polya describió cuatro fases para resolver problemas:

- Comprensión del problema
- Concepción de un plan
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva

Para cada fase sugiere una serie de preguntas que el estudiante se puede hacer, o de aspectos que debe considerar para avanzar en la resolución del problema, para utilizar el razonamiento heurístico, el cual se considera como la estrategia para avanzar en problemas desconocidos y no usuales. Se refiere a estrategias como dibujar figuras, introducir una notación adecuada, aprovechar problemas relacionados, explorar analogías, trabajar con problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema, generalizar, especializar, variar el problema, trabajar hacia atrás.

Aunque los matemáticos reconocen en los trabajos de Polya actividades que ellos mismos realizan al resolver problemas, también plantean que las estrategias de pensamiento heurísticos resultan demasiado abstractas y generales para el estudiante.

Alan Schoenfeld propone que para entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas y consecuentemente para proponer actividades que puedan ayudarlos, es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar que en el proceso de resolverlos influyen los siguientes factores:

- El dominio del conocimiento
- Estrategias cognoscitivas
- Estrategias metacognitivas
- Sistema de creencias

Parece que el error en la resolución de problemas pueda derivarse de factores

- lingüísticos (trabajo con el texto)
- procedimentales (desconocimiento de un plan o errores operativos
- cognoscitivos (no saber de qué se habla)

Para favorecer el trabajo con problemas puede crearse un ambiente donde la pregunta dinamice los procesos. Las preguntas deben ser bien redactadas y que eleven las expectativas, convergentes, divergentes y evaluativas. Deben prefijarse en la preparación de clase. Se recomienda no utilizar la pregunta para intimidar al educando, si no invitarlo a que la conteste.

El profesor puede utilizar la técnica de la instigación de manera positiva. Combinar la pregunta con los impulsos o pistas correspondientes. Estimular al estudiante a pensar y no solo a reproducir conocimientos.

Para Juan Ignacio Pozo los siguientes criterios permiten un mejor trabajo con problemas:

- Plantear tareas abiertas
- Diversificar los contextos
- Habituar la toma de decisiones
- Fomentar la cooperación entre los estudiantes
- Fomentar el hábito a preguntarse
- Evaluar más que corregir
- Valorar la reflexión y profundidad y no la rapidez

La resolución de problemas debe considerase el objetivo central de la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, los lineamientos curriculares expresan que en la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Por su parte Miguel de Guzmán plantea que la enseñanza a partir de situaciones problemáticas hace énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido.

Es interesante mencionar que una de las grandes limitaciones iniciales encontradas por el grupo de investigación de la Universidad de Medellín "SUMMA", al implementar la metodología de modelos de situaciones problema para la movilización de competencias matemáticas, fue el reto de romper culturalmente con las estructuras que los estudiantes y profesores, con el tiempo y la tradición, han instalado e incorporado en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, resaltan que para mediar y salvar este proceso fue fundamental el trabajo de sensibilización, la autonomía y libertad en la toma de decisiones otorgadas a profesores y estudiantes.

Además, José Alberto Rúa y Jorge Alberto Bedoya, docentes investigadores, miembros del grupo Summa, manifiestan que pretender implementar esta metodología en una gran cantidad de grupos simultáneamente exige una alta cualificación previa de los docentes en el diseño de situaciones problema y que éstas no surgen por generación espontánea, sino que requieren de un trabajo dispendioso, colaborativo, de construcción y diseño colectivo.

5. METODOLOGÍA – TRABAJO DE CAMPO

La práctica docente se realiza en la Institución Educativa María Josefa Marulanda del Municipio de La Ceja, en los grados Noveno A y B, que tienen en total 86 estudiantes de sexo femenino, pero se toma una muestra de 39 estudiantes, equivalente al 44%.

A todas las estudiantes se les ha explicado los distintos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, y se han realizado ejercicios de aplicación, también en el grado octavo se ha visto cómo traducir del lenguaje natural a un lenguaje matemático y se han resuelto ecuaciones lineales, y también la solución de problemas con ecuaciones enteras, que se han ampliado, al inicio del grado noveno, con la solución de ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios y su aplicación en la resolución de problemas de la vida real.

Se desea lograr mayor incidencia en la aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de problemas utilizando estas ecuaciones lineales, que son formuladas a partir de las situaciones presentadas.

Se nota que les da temor, no comprenden bien los enunciados y no saben cómo formular las ecuaciones adecuadas, se hace una prueba diagnóstica (Anexo 1) que consta de cinco problemas para resolver, en los cuales se les invita a seguir los cuatro pasos que propone Polya: *Comprender el problema, concebir un plan para solucionarlo, ejecutar ese plan y realizar una visión retrospectiva*.

Luego se recuerda y se refuerza la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático y cómo expresar, algunas ecuaciones dadas, en el lenguaje natural, se realizan ejemplos y se realiza una primera actividad preparatoria (Anexo 2), que luego se complementa con una segunda actividad, (Anexo 3) capacitando mejor a las estudiantes para la formulación de ecuaciones a partir del lenguaje natural.

Por último se realiza una prueba final (Anexo 4) que consta de cinco problemas para resolver, en los cuales se les recuerda los cuatro pasos que propone Polya y se les invita a *elegir las incógnitas, formular las ecuaciones, resolver el sistema de ecuaciones y analizar las soluciones.*

6. RESULTADOS Y HALLAZGOS

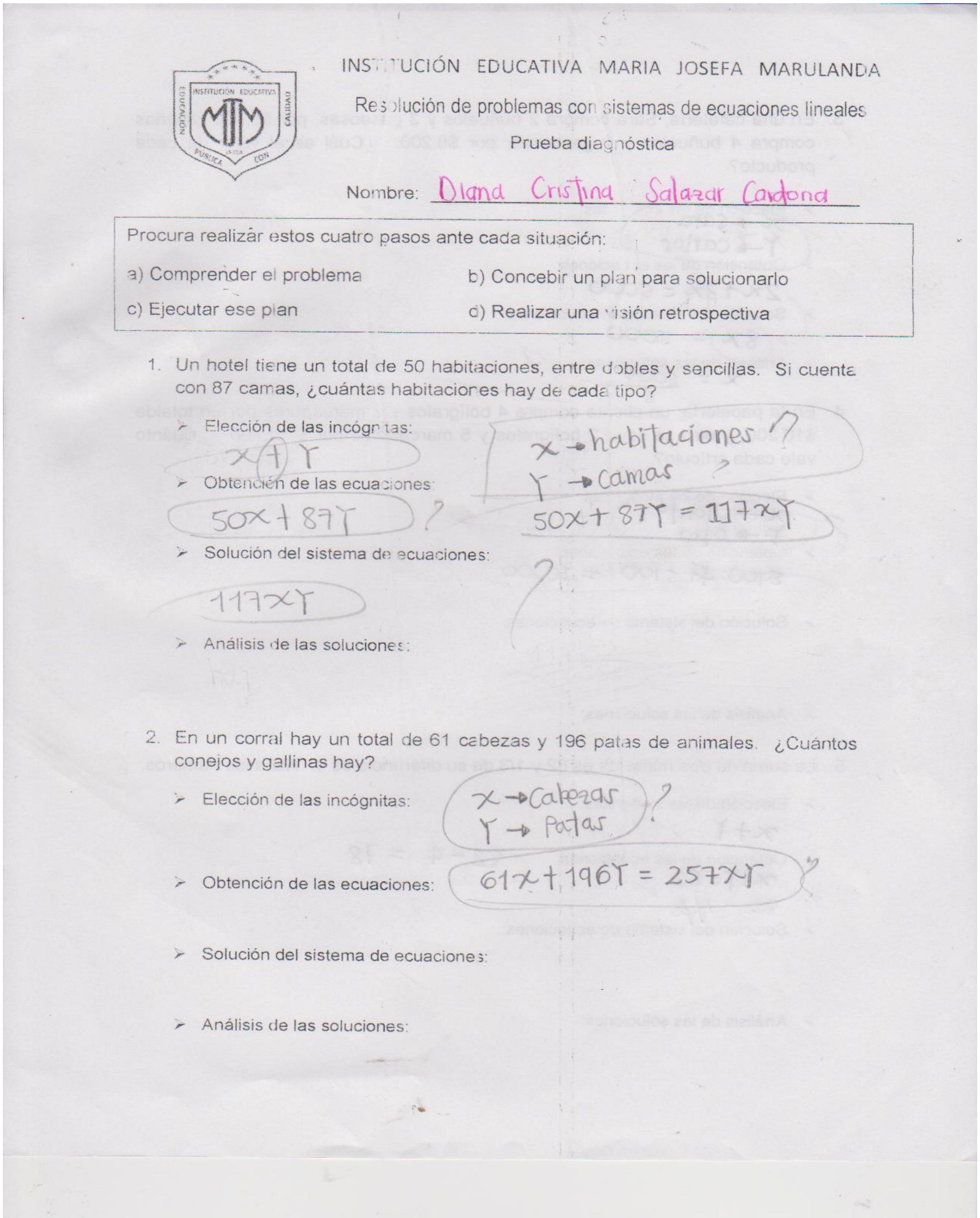
Analizando la prueba diagnóstica (Figuras 6-1 y 6-2 y Anexo 1), se tienen los siguientes resultados:

El primer problema lo resuelven correctamente tres (3) estudiantes, seis (6) no lo resuelven en forma correcta, once (11) lo tienen incompleto y dieciocho (18) lo dejan en blanco. El segundo problema es resuelto correctamente por tres (3) estudiantes, cinco (5) no lo resuelven correctamente, diez (10) lo dejan incompleto y veinte (20) en blanco. El tercer problema es resuelto correctamente por siete (7) estudiantes, ocho (8) no lo tienen correcto, doce (12) incompleto y once (11) lo dejan en blanco. El cuarto problema, es resuelto correctamente por siete (7) estudiantes, cinco (5) no lo tienen correcto, nueve (9) incompleto, de los cuales cuatro (4) tienen bien las ecuaciones, y diecisiete lo dejan en blanco. Y el quinto problema lo resuelven correctamente diez (10), seis (6) no lo tienen correcto, quince (15) incompletos, de los cuales cinco (5) tienen bien las ecuaciones y siete (7) lo dejan en blanco.

	Correcto	No correcto	Incompleto	En blanco
Problema 1	3	6	11	18
Problema 2	3	5	10	20
Problema 3	7	8	12	11
Problema 4	7	5	9	17
Problema 5	10	6	15	7

TablaN. 6-1 Resultados de la prueba diagnóstica

Los resultados de la primera actividad (Figura 6-3 y anexo 2), en la cual se familiarizan con la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático, son: La primera frase es traducida al lenguaje matemático en forma correcta por treinta y seis (36) estudiantes ydos (2) no lo expresan correctamente. La segunda frase la expresan en forma algebraica correctamente treinta y siete (37) estudiantes y una (1) en una forma no correcta. La tercera, la traducen correctamente diecinueve (19) estudiantes, diez (10) en una forma no correcta, ocho (8) lo tienen incompleto y una (1) lo deja en blanco. La cuarta expresión es traducida correctamente por treinta y siete (37) estudiantes y una (1) no lo expresa correctamente, La quinta expresión la traducen correctamente veintiocho (28) estudiantes y diez (10) no lo traducen correctamente. La sexta expresión la traducen correctamente treinta y



INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA

Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales

Prueba diagnóstica

Nombre: Diana Cristina Salazar Cardona

Procura realizar estos cuatro pasos ante cada situación:

a) Comprender el problema

b) Concebir un plan para solucionarlo

c) Ejecutar ese plan

d) Realizar una visión retrospectiva

1. Un hotel tiene un total de 50 habitaciones, entre dobles y sencillas. Si cuenta con 87 camas, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?

   - Elección de las incógnitas:

     $x + y$

     $x \rightarrow$ habitaciones ?

     $y \rightarrow$ camas ?

   - Obtención de las ecuaciones:

     $50x + 87y$?

     $50x + 87y = 117xy$

   - Solución del sistema de ecuaciones:

     $117xy$?

   - Análisis de las soluciones:

2. En un corral hay un total de 61 cabezas y 196 patas de animales. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?

   - Elección de las incógnitas:

     $x \rightarrow$ Cabezas ?

     $y \rightarrow$ Patas

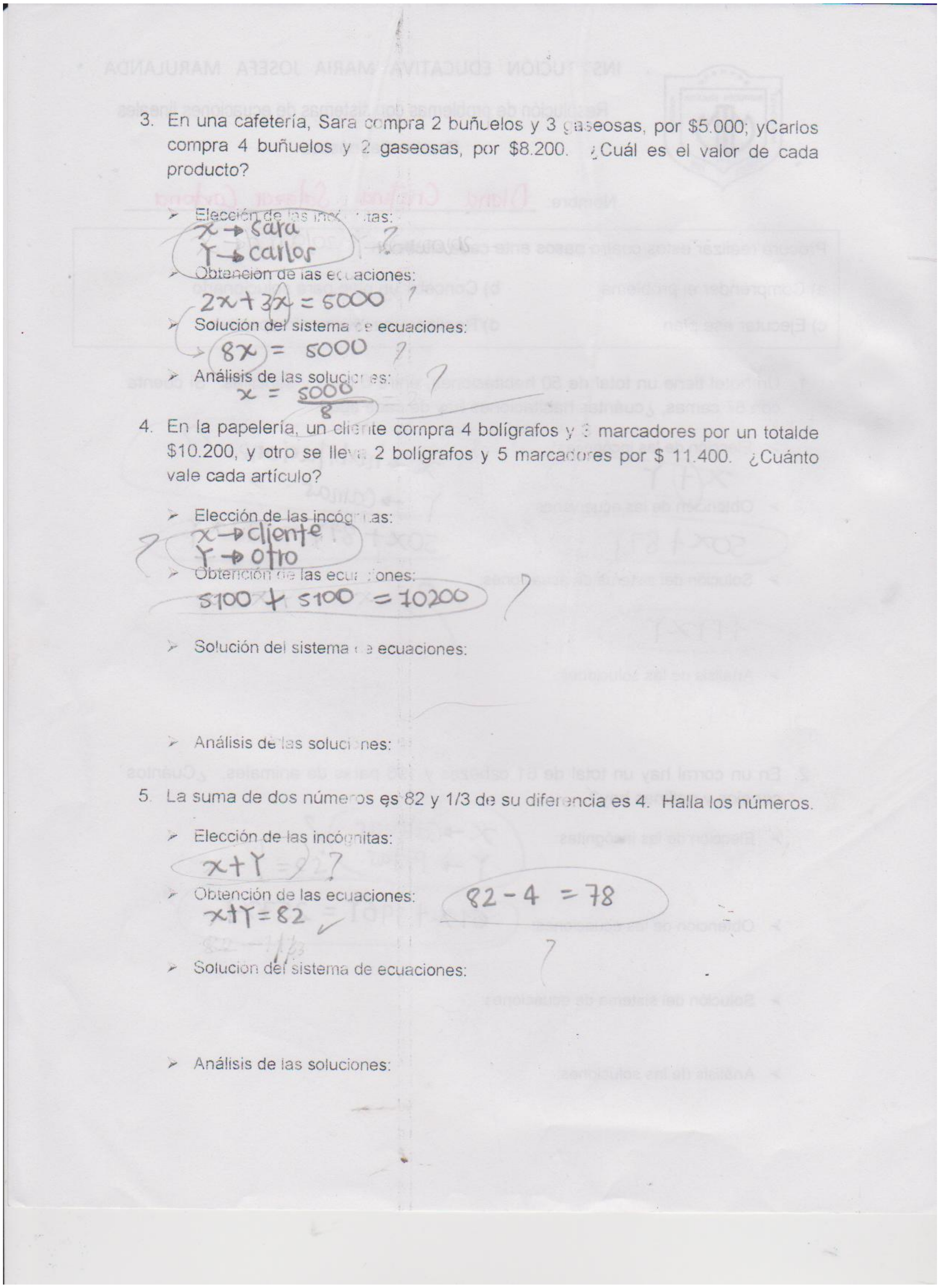
   - Obtención de las ecuaciones:

     $61x + 196y = 257xy$?

   - Solución del sistema de ecuaciones:

   - Análisis de las soluciones:

Figura 6-1: Prueba diagnóstica, Página 1



3. En una cafetería, Sara compra 2 buñuelos y 3 gaseosas, por $5.000; yCarlos compra 4 buñuelos y 2 gaseosas, por $8.200. ¿Cuál es el valor de cada producto?

- Elección de las incógnitas:
  $x \to$ Sara
  $Y \to$ carlos ?
- Obtención de las ecuaciones:
  $2x + 3x = 5000$?
- Solución del sistema de ecuaciones:
  $8x = 5000$?
- Análisis de las soluciones: ?
  $x = \frac{5000}{8}$

4. En la papelería, un cliente compra 4 bolígrafos y 3 marcadores por un totalde $10.200, y otro se lleva 2 bolígrafos y 5 marcadores por $ 11.400. ¿Cuánto vale cada artículo?

- Elección de las incógnitas:
  ? $x \to$ cliente
  $Y \to$ otro
- Obtención de las ecuaciones:
  $5100 + 5100 = 10200$?
- Solución del sistema de ecuaciones:
- Análisis de las soluciones:

5. La suma de dos números es 82 y 1/3 de su diferencia es 4. Halla los números.

- Elección de las incógnitas:
  $x + Y$?
- Obtención de las ecuaciones: $82 - 4 = 78$?
  $x + Y = 82$
- Solución del sistema de ecuaciones:
- Análisis de las soluciones:

Figura 6- 2: Prueba Diagnóstica. Página 2 cuatro (34) estudiantes, tres (3) en una forma no correcta y una (1) la deja incompleta. La séptima expresión la traducen correctamente veintiséis (26) estudiantes, en forma no correcta once (11) y una (1) la deja en blanco. La octava expresión la traducen correctamente treinta y seis (36) estudiantes y dos (2) no lo traducen correctamente, La novena expresión la traducen correctamente veintiuna (21) estudiantes y diecisiete (17) no lo traducen correctamente.

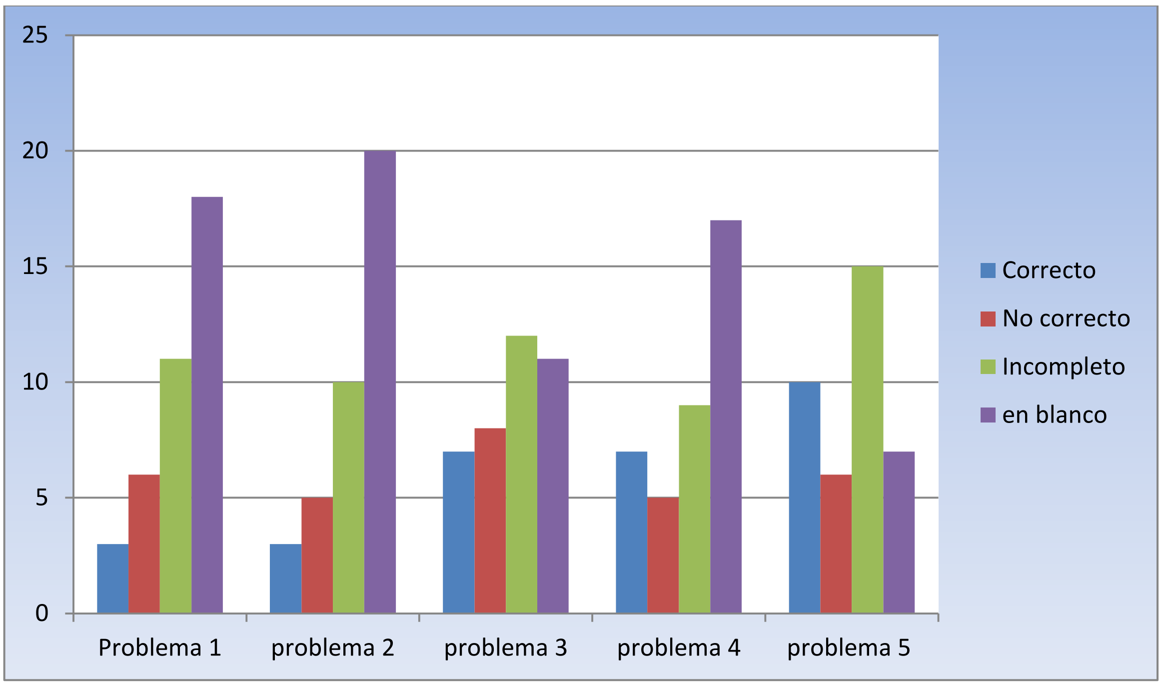


Diagrama No. 6-1 Estadística de los resultados de la prueba diagnóstica

Luego, en la parte que son expresiones algebraicas para traducirlas en las palabras del lenguaje natural, la primera es expresada en forma adecuada por treinta (30) estudiantes y ocho (8) no la expresan adecuadamente. La segunda es expresada adecuadamente por doce (12) estudiantes, en forma no adecuada por veinticuatro (24) y dos (2) lo dejan en blanco. La tercera, treinta y dos (32) lo expresan en forma adecuada, dos (2) no lo expresan adecuadamente, dos (2) lo dejan incompleta y dos (2) en blanco. La cuarta, la expresan adecuadamente treinta y tres (33) estudiantes y cinco (5) en forma no adecuada.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA

Comprensión del lenguaje matemático

Nombre: Diana cristina Salazar Cardona.

Escribe cada enunciado del lenguaje natural en el lenguaje algebraico:

- El cuadrado de la suma de dos números: $(x+y)^2$
- Un número disminuido en el doble de otro: $x-2y$
- Tres veces un número más su mitad: $3x+\frac{x}{2}$
- La cuarta parte de un número: $\frac{x}{4}$
- El doble de la resta de dos números: $2(x-y)$
- La quinta parte de un número más tres: $\frac{x}{5}+3$
- La suma de los cuadrados de dos números: $7x^2+6y^2$
- Un número disminuido en el doble del otro: $x-2y$
- La edad de una persona hace 7 años, si la actual es x: $x-7$

Escribe el enunciado para las siguientes expresiones algebraicas:

- $2x+8$: El doble de un numero, mas ocho
- $8(x+3)$: la suma de dos numeros multiplicada por ocho
- $X+y=4$: La suma de dos numeros igual a cuatro
- $(x+y)^2$: El cuadrado de la suma de dos numeros

Figura 6-3 : Primera actividad de comprensión del Lenguaje algebraico

	Correcta	No correcta	Incompleta	En blanco
Primera frase	36	2	0	0
Segunda frase	37	1	0	0
Tercera frase	19	10	8	1
Cuarta frase	37	1	0	0
Quinta frase	28	10	0	0
Sexta frase	34	3	1	0
Séptima frase	26	11	0	1
Octava frase	36	2	0	0
Novena frase	21	17	0	0

Tabla No. 6-2 Resultados de la primera parte de la Actividad 1

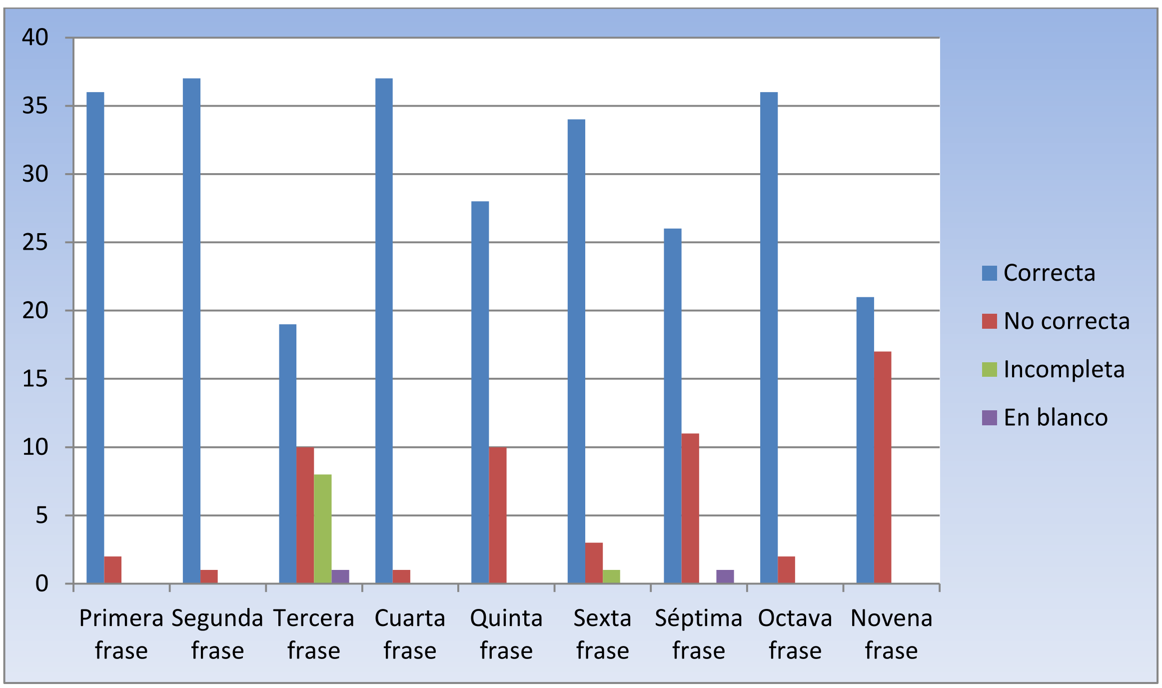


Diagrama No. 6-2: Estadística de la primera parte de la Actividad 1.

	Adecuada	No adecuada	Incompleta	En blanco
Primera expresión	30	8	0	0
Segunda Expresión	12	24	0	2
Tercera Expresión	32	2	2	2
Cuarta Expresión	33	5	0	0

Tabla No. 6-3: Resultados de la Segunda Parte de la Actividad 1.

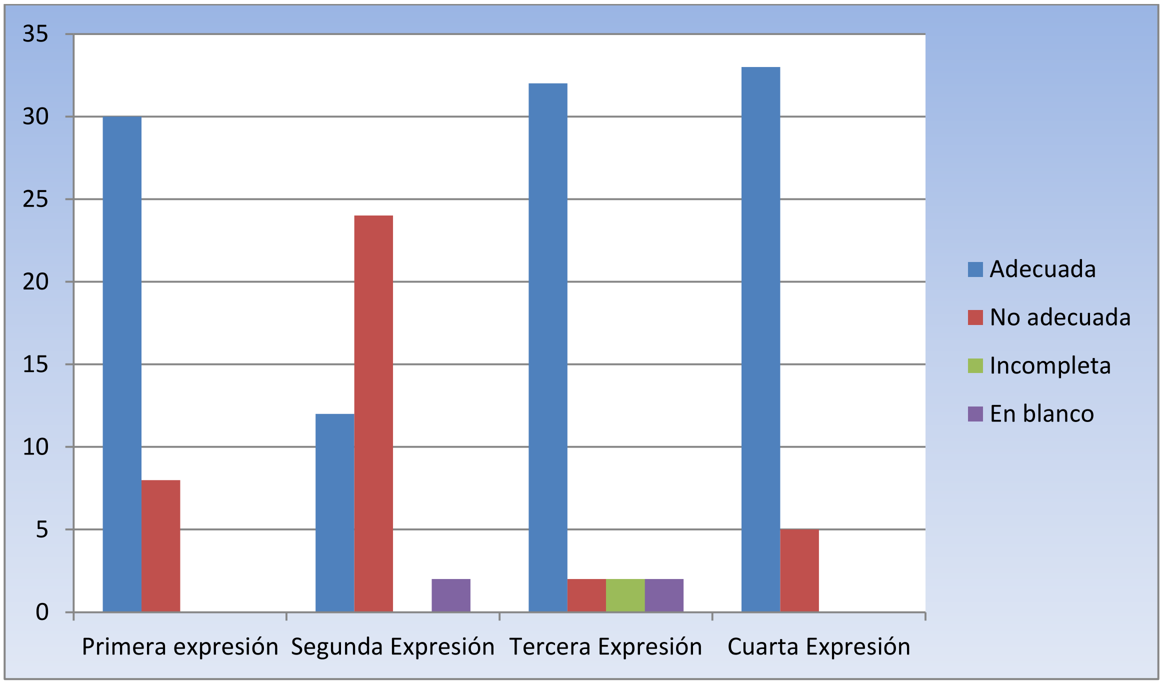
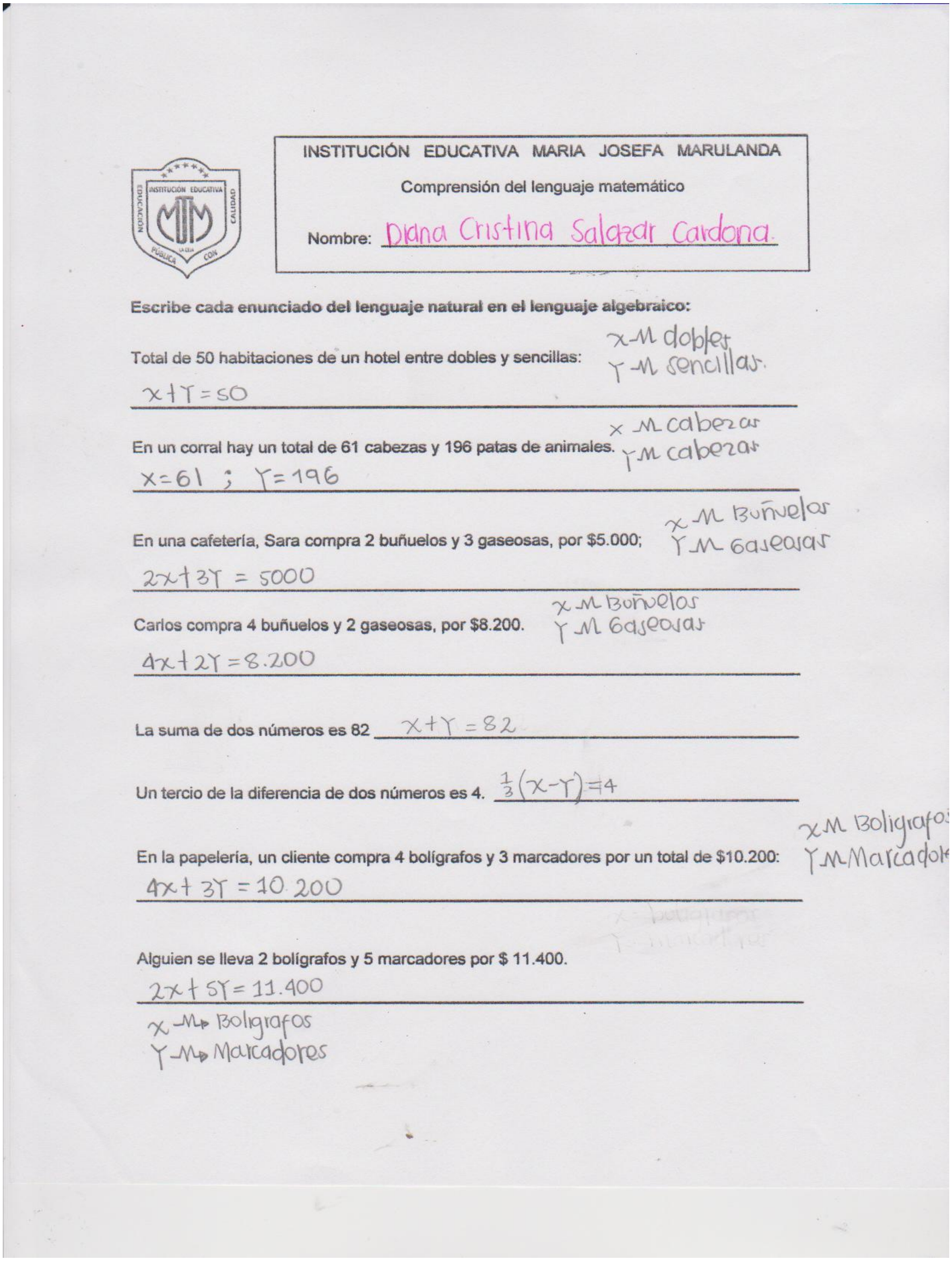


Diagrama No. 6-3 Estadística de la segunda parte de la Actividad 1.

En la segunda actividad (Figura 6-4 y Anexo 3), de elaboración de ecuaciones a partir de la traducción de expresiones del lenguaje natural, se tienen los siguientes resultados: La primera expresión es traducida correctamente al lenguaje matemático por diecisiete (17) estudiantes y veintiuna (21) no la escriben correctamente. La segunda es traducida correctamente por once (11) estudiantes, cuatro (4) no la traducen correctamente, veintidós (22) la dejan incompleta y una (1) la deja en blanco. Pero la tercera y cuarta expresiones son traducidas correctamente a ecuaciones algebraicas por las treinta y ocho (38) estudiantes. La quinta expresión es formulada en una ecuación correctamente por treinta y siete (37) estudiantes y una (1) no la traduce correctamente. La sexta expresión es escrita en una ecuación correctamente por veintinueve (29) estudiantes y nueve (9) escriben una ecuación que no es correcta. Y por último, la séptima y octava expresiones son traducidas correctamente en ecuaciones algebraicas adecuadas por las treinta y ocho (38) estudiantes.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA

Comprensión del lenguaje matemático

Nombre: Diana Cristina Salazar Cardona.

Escribe cada enunciado del lenguaje natural en el lenguaje algebraico:

Total de 50 habitaciones de un hotel entre dobles y sencillas: $x \to$ dobles, $Y \to$ sencillas.

$x+Y=50$

En un corral hay un total de 61 cabezas y 196 patas de animales. $x \to$ cabezas, $Y \to$ cabezas

$x=61$; $Y=196$

En una cafetería, Sara compra 2 buñuelos y 3 gaseosas, por \$5.000; $x \to$ Buñuelos, $Y \to$ Gaseosas

$2x+3Y = 5000$

Carlos compra 4 buñuelos y 2 gaseosas, por \$8.200. $x \to$ Buñuelos, $Y \to$ Gaseosas

$4x+2Y=8.200$

La suma de dos números es 82 $x+Y=82$

Un tercio de la diferencia de dos números es 4. $\frac{1}{3}(x-Y)=4$

En la papelería, un cliente compra 4 bolígrafos y 3 marcadores por un total de \$10.200: $x \to$ Bolígrafos, $Y \to$ Marcadores

$4x+3Y=10.200$

Alguien se lleva 2 bolígrafos y 5 marcadores por \$ 11.400.

$2x+5Y=11.400$

$x \to$ Bolígrafos

$Y \to$ Marcadores

Figura 6- 4: Segunda actividad de comprensión del lenguaje matemático

	Correcta	No correcta	Incompleta	En blanco
Primera Frase	17	21	0	0
Segunda Frase	11	4	22	1
Tercera Frase	38	0	0	0
Cuarta Frase	38	0	0	0
Quinta Frase	37	1	0	0
Sexta Frase	29	9	0	0
Séprtima Frase	38	0	0	0
Octava Frase	38	0	0	0

Tabla No. 6-4: Resultados de la Segunda Actividad

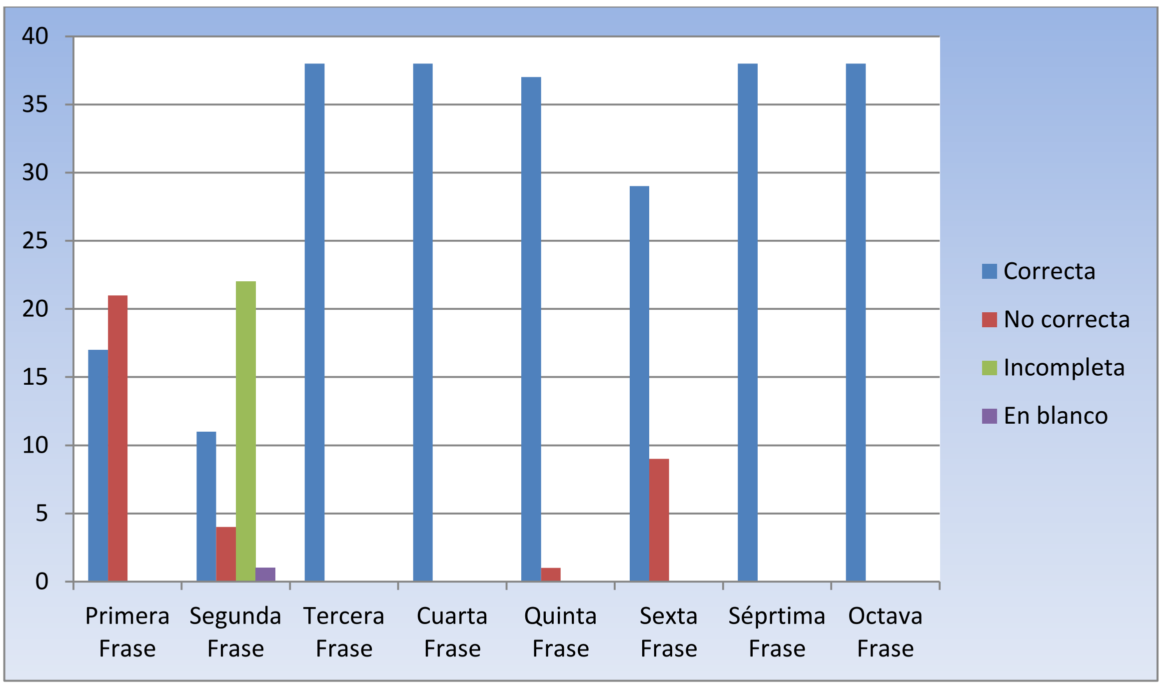


Diagrama No. 6-4: Estadística de la Segunda Actividad

Y los resultados de la prueba final (Figuras 6-5 y 6-6 y anexo 4), son: El primer problema fue resuelto correctamente por treinta y seis (36) estudiantes y dos (2) en forma no correcta. El segundo problema fue resuelto correctamente por veintiséis (26) estudiantes, en forma no correcta cuatro (4), siete (7) lo dejan incompleto, aunque formularon bien las ecuaciones y una (1) lo deja en blanco. El tercero lo solucionan correctamente diecisiete (17) estudiantes, cuatro (4) en forma no correcta, ocho (8) lo dejan incompleto, aunque tres (3) han formulado bien las ecuaciones y nueve (9) lo dejan en blanco. El cuarto problema lo resuelven correctamente diez (10) estudiantes, una (1) en forma no correcta, dos (2) lo dejan incompleto, de los cuales una (1) formuló bien las ecuaciones y en blanco, lo dejan veinticinco (25). Y el último ninguna logra resolverlo correctamente, una (1) en forma no correcta, dos (2) incompletos y treinta y cinco (35) lo dejan en blanco.

	Correcto	No correcto	Incompleto	En blanco
Problema 1	36	2	0	0
Problema 2	26	4	7	1
Problema 3	17	4	7	9
Problema 4	10	1	2	25
Problema 5	0	1	2	35

Tabla No. 6-5 Resultados de la prueba final

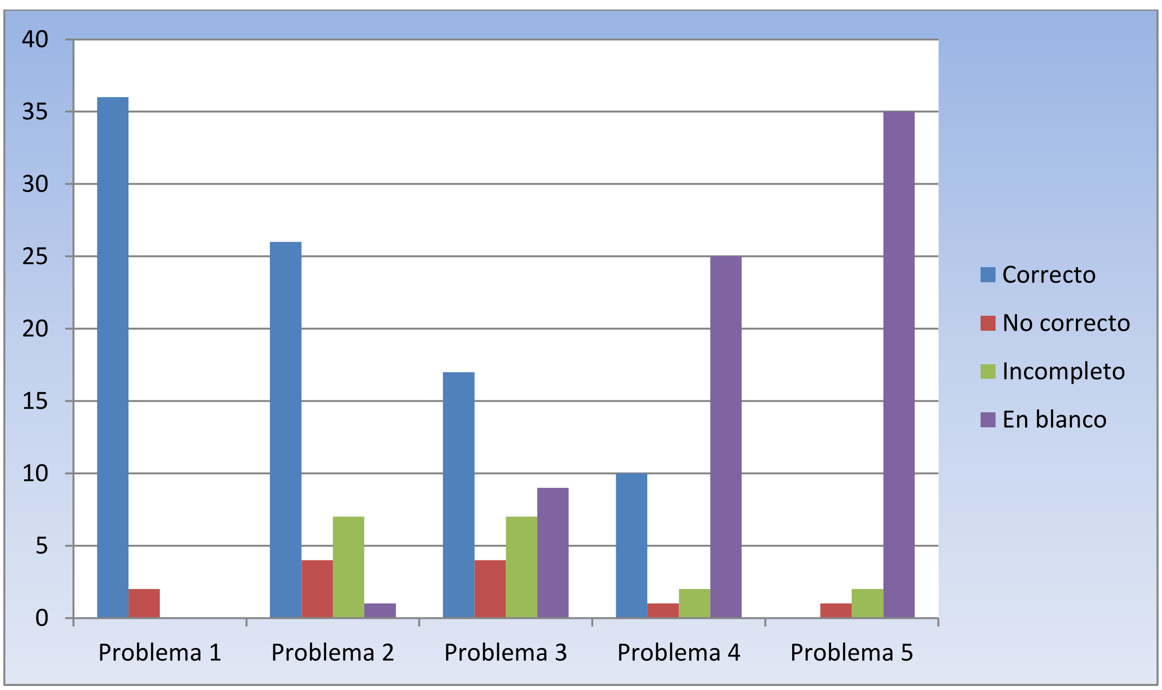


Diagrama No. 6-5: Estadística de la Prueba Final

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA

Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales

Nombre: Diana cristina salazar cardona.

Procura realizar estos cuatro pasos ante cada situación:

a) Comprender el problema	**b) Concebir un plan para solucionarlo**
c) Ejecutar ese plan	**d) Realizar una visión retrospectiva**

1. La suma de las edades de Adriana y Juan es igual a 33 años. Si la edad de Adriana equivale a la edad de Juan más 9 años, ¿cuántos años tiene cada uno?

➢ Elige las incógnitas:

x= Adriana

y= Juan

➢ Formula las ecuaciones:

$x+y=33$

$x=y+9$

➢ Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r} x+y=33 \\ x-y=9 \\ \hline 2x=42 \end{array}$$

$x=\frac{42}{2} \rightarrow \boxed{x=21}$

$21+y=33$

$y=33-21$

$\boxed{y=12}$

➢ Analiza las soluciones:

x=21 → edad actual de adriana

y=12 → edad actual de juan

2. Dos números suman 51. La diferencia entre la tercera parte del primero y la sexta parte del segundo es 1. ¿Cuáles son los dos números?

➢ Elige las incógnitas:

x → un numero

y → otro número

➢ Formula las ecuaciones:

$x+y=51$

$\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=1 \rightarrow 2x-y=1$

➢ Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r} x+y=51 \\ 2x-y=6 \\ \hline 3x=57 \end{array}$$

$x=\frac{57}{3} \rightarrow x=19$

$19+y=51$

$y=51-19$

$\boxed{y=32}$

➢ Analiza las soluciones:

x → 19 - un número

y → 32 - el otro

Figura 6-5 Prueba final: Página 1

3 La edad de una persona es el doble de la otra. Hace 7 años, la suma de ambas edades era igual a la edad actual de la mayor. Hallar las edades actuales de las dos personas.

➢ Elige las incógnitas:

x — Edad de una persona

Y — Edad de la otra.

➢ Formula las ecuaciones:

$x = 2Y$ $\qquad x = 2(14)$

$x-7+Y-7=x \rightarrow x-x+Y-14=0 \rightarrow \boxed{Y=14}$ $\quad \boxed{x=28}$

➢ Resuelve el sistema de ecuaciones:

➢ Analiza las soluciones:

x = 28 → Edad de una persona

Y = 14 → " " " " de la otra.

4. Hallar las edades de dos personas, sabiendo que hace 10 años la edad de la primera era 4 veces la edad de la segunda y dentro de 20 años, la edad de la primera será sólo el doble.

➢ Elige las incógnitas:

x — una persona

Y — otra persona

➢ Formula las ecuaciones:

$x-10=4(Y-10) \rightarrow x-10=4Y-40 \rightarrow x-4Y=-30$

$x+20=2(Y+20) \rightarrow x+20=2Y+40 \rightarrow x-2Y=20$

➢ Resuelve el sistema de ecuaciones:

$x-4Y=-30 \times(-1) \rightarrow x+4Y=30$

$x-2Y=20 \times(2) \qquad 2x-4Y=40$

$\boxed{3x=70}$

$70-10=4(Y-10)$

$60=4Y-40$

$-4Y=-40-60$

$-4Y=-100$

➢ Analiza las soluciones:

5. Hallar dos números sabiendo que si se divide el mayor entre el menor, el cociente es 2 y el residuo es 2. Y si se divide cinco veces el menor entre el mayor, el cociente es 2 y el residuo es 3.

➢ Elige las incógnitas:

➢ Formula las ecuaciones:

➢ Resuelve el sistema de ecuaciones:

➢ Analiza las soluciones:

Figura 6-6. Prueba final: Página 2

	Prueba diagnóstica				Prueba Final			
	Correcto	No correcto	Incompleto	En blanco	Correcto	No correcto	Incompleto	En blanco
Problema 1	3	6	11	18	36	2	0	0
Problema 2	3	5	10	20	26	4	7	1
Problema 3	7	8	12	11	17	4	7	9
Problema 4	7	5	9	17	10	1	2	25
Problema 5	10	6	15	7	0	1	2	35

Tabla No. 6-6: Resultados comparativos entre las pruebas diagnóstica y final

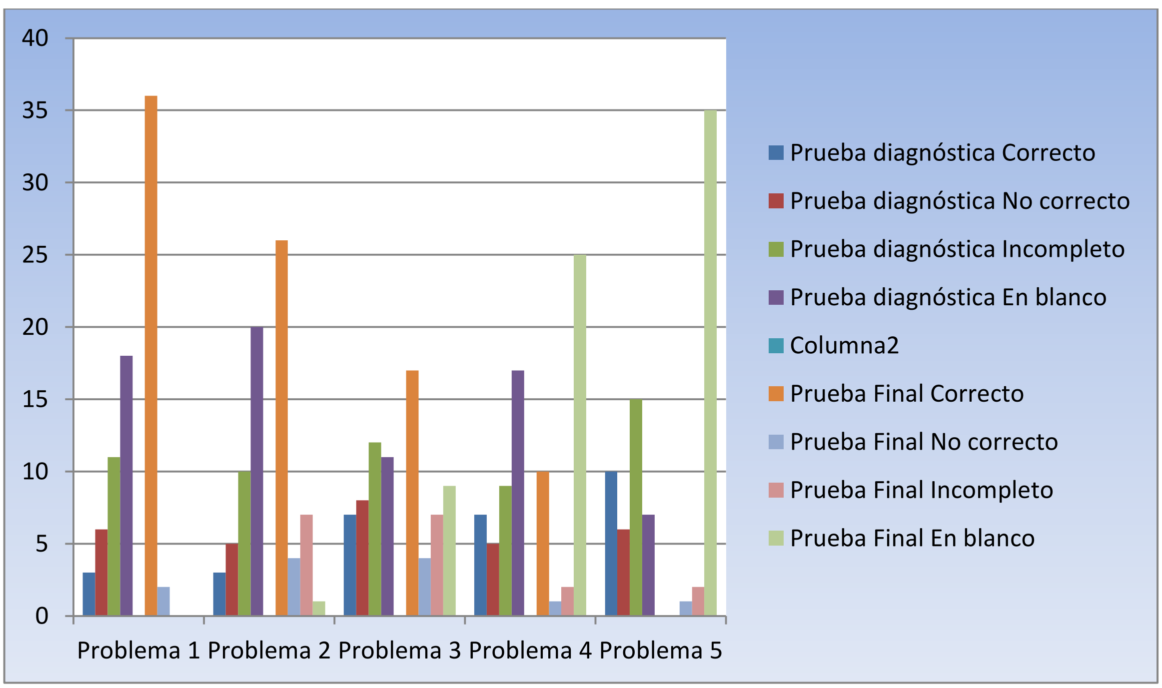


Diagrama No. 6-6: Estadística comparada entre las pruebas diagnóstica y final

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta práctica docente se mostró como la utilización anterior de la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, permite la elaboración adecuada de las ecuaciones a partir de los problemas que se plantean de la vida real para ser modelados con sistemas de ecuaciones lineales, que propician una resolución acertada de los mismos con los métodos aprendidos.

Los jóvenes necesitan acercar el lenguaje natural al lenguaje algebraico que no les es tan común, de ahí, la importancia de practicar la traducción de expresiones del lenguaje de la vida normal a un lenguaje matemático y algebráico.

Las dfificultades del lenguaje heterogéneo observado al inicio se ve mejorar luego con un interés y compromiso del estudiante motivado por la constancia y perseverancia en el trabajo realizado.

Los resultados obtenidos en las actividades realizadas validan la estrategia considerada en el desarrollo de este trabajo, lo que permite concluir que es muy conveniente preparar la resolución de problemas con una implementación adecuada del lenguaje algebraico.

Por ello se recomienda hacer primero bastantes ejercicios de traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático y algebraíco, preparar a la traducción y expresión de enunciados transformándolos en ecuaciones algebraicas que permitan luego pasar a la resolución adecuada de problemas aplicando la solución de ecuaciones.

ANEXOS

ANEXO 1: PRUEBA DIAGNÓSTICA

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA

Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales

Nombre: ____

Procura realizar estos cuatro pasos ante cada situación:	
a) Comprender el problema	b) Concebir un plan para solucionarlo
c) Ejecutar ese plan	d) Realizar una visión retrospectiva

1. Un hotel tiene un total de 50 habitaciones, entre dobles y sencillas. Si cuenta con 87 camas, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?
   - Elección de las incógnitas:
   - Obtención de las ecuaciones:
   - Solución del sistema de ecuaciones:
   - Análisis de las soluciones:

2. En un corral hay un total de 61 cabezas y 196 patas de animales. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?
   - Elección de las incógnitas:
   - Obtención de las ecuaciones:
   - Solución del sistema de ecuaciones:
   - Análisis de las soluciones:

3. En una cafetería, Sara compra 2 buñuelos y 3 gaseosas, por $5.000; yCarlos compra 4 buñuelos y 2 gaseosas, por $8.200. ¿Cuál es el valor de cada producto?

   - Elección de las incógnitas:
   - Obtención de las ecuaciones:
   - Solución del sistema de ecuaciones:
   - Análisis de las soluciones:

4. En la papelería, un cliente compra 4 bolígrafos y 3 marcadores por un totalde $10.200, y otro se lleva 2 bolígrafos y 5 marcadores por $ 11.400. ¿Cuánto vale cada artículo?

   - Elección de las incógnitas:
   - Obtención de las ecuaciones:
   - Solución del sistema de ecuaciones:
   - Análisis de las soluciones:

5. La suma de dos números es 82 y 1/3 de su diferencia es 4. Halla los números.

   - Elección de las incógnitas:
   - Obtención de las ecuaciones:
   - Solución del sistema de ecuaciones:
   - Análisis de las soluciones:

ANEXO 2: GUÍA PARA LA COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA
Comprensión del lenguaje matemático
Nombre: ____

Escribe cada enunciado del lenguaje natural en el lenguaje algebraico:

- El cuadrado de la suma de dos números: ________________________________
- Un número disminuido en el doble de otro: ________________________________
- Tres veces un número más su mitad: ____________________________________
- La cuarta parte de un número: ____
- El doble de la resta de dos números: ____________________________________
- La quinta parte de un número más tres: __________________________________
- La suma de los cuadrados de dos números: ______________________________
- Un número disminuido en el doble del otro: ________________________________
- La edad de una persona hace 7 años, si la actual es x: _______________________

Escribe el enunciado para las siguientes expresiones algebraicas:

- 2x + 8 : ____
- 8 (x + 3) : ____
- X + y = 4 : ____
- $(x + y)^2$: ____

ANEXO 3: GUÍA PARA LA TRADUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA

Comprensión del lenguaje matemático

Nombre: ____

Escribe cada enunciado del lenguaje natural en el lenguaje algebraico:

Total de 50 habitaciones de un hotel entre dobles y sencillas:

____

En un corral hay un total de 61 cabezas y 196 patas de animales.

____

En una cafetería, Sara compra 2 buñuelos y 3 gaseosas, por $5.000;

____

Carlos compra 4 buñuelos y 2 gaseosas, por $8.200.

____

La suma de dos números es 82 ______________________________________

Un tercio de la diferencia de dos números es 4. __________________________

En la papelería, un cliente compra 4 bolígrafos y 3 marcadores por un total de $10.200:

____

Alguien se lleva 2 bolígrafos y 5 marcadores por $ 11.400.

____

ANEXO 4: PRUEBA FINAL.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MARIA JOSEFA MARULANDA
Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales
Nombre: ___________________________________

Procura realizar estos cuatro pasos ante cada situación:	
a) Comprender el problema	b) Concebir un plan para solucionarlo
c) Ejecutar ese plan	d) Realizar una visión retrospectiva

1. La suma de las edades de Adriana y Juan es igual a 33 años. Si la edad de Adriana equivale a la edad de Juan más 9 años, ¿cuántos años tiene cada uno?

- Elige las incógnitas:
- Formula las ecuaciones:
- Resuelve el sistema de ecuaciones:
- Analiza las soluciones:

2. Dos números suman 51. La diferencia entre la tercera parte del primero y la sexta parte del segundo es 1. ¿Cuáles son los dos números?

- Elige las incógnitas:
- Formula las ecuaciones:
- Resuelve el sistema de ecuaciones:
- Analiza las soluciones:

3 La edad de una persona es el doble de la otra. Hace 7 años, la suma de ambas edades era igual a la edad actual de la mayor. Hallar las edades actuales de las dos personas.

- Elige las incógnitas:
- Formula las ecuaciones:
- Resuelve el sistema de ecuaciones:
- Analiza las soluciones:

4. Hallar las edades de dos personas, sabiendo que hace 10 años la edad de la primera era 4 veces la edad de la segunda y dentro de 20 años, la edad de la primera será sólo el doble.

- Elige las incógnitas:
- Formula las ecuaciones:
- Resuelve el sistema de ecuaciones:
- Analiza las soluciones:

5. Hallar dos números sabiendo que si se divide el mayor entre el menor, el cociente es 2 y el residuo es 2. Y si se divide cinco veces el menor entre el mayor, el cociente es 2 y el residuo es 3.

- Elige las incógnitas:
- Formula las ecuaciones:
- Resuelve el sistema de ecuaciones:
- Analiza las soluciones:

BILIOGRAFÍA

- **GUZMÁN, MIGUEL DE Y GIL, DANIEL**. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular. 1993

- **GONZÁLEZ, A Y WEINSTEIN, E.** Implicaciones didácticas del enfoque de la resolución de problemas. Tomado de: "La enseñanza de la matemática en el jardín de infantes a través de secuencias didácticas". Homo Sapiens Ediciones. Argentina. 2006

- **LABARRERE SARDUY, ALBERTO F**. Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. La Habana, Pueblo y Educación. 1988.

- **MESA BETANCUR, ORLANDO**. Criterios y estrategias para la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Medellín. 1994.

- **MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL.** Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas. Santafé de Bogotá. 1998.

- **MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL.** Estándares Básicos de Matemáticas. Santafé de Bogotá. 2003.

- **POLYA, GEORGE**. Cómo Plantear y Resolver Problemas. Editorial Trillas. México, 1970

- **RÚA, JOSÉ Y BEDOYA JORGE.** Modelos de situaciones problema para la movilización y evaluación de competencias matemáticas. Universidad de Medellín. 2010

- **SCHOENFELD, ALAN H.** Resolución de problemas una propuesta a considerar en el aprendizaje de las Matemáticas. Educación Matemática. Volumen 4. Número 2. Agosto. 1992.