Uso de estructuras aditivas y el método CPA en la solución de problemas en el contexto de las ecuaciones lineales

Duván Andrés Ospina Sánchez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de las Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia, noviembre de 2019

Uso de estructuras aditivas y el método CPA en la solución de problemas en el contexto de las ecuaciones lineales

Duvan Andrés Ospina Sánchez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director

Jaider Albeiro Figueroa Flórez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de las Ciencias Exactas y Naturales

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia, noviembre de 2019

Dedicatoria

A mi familia, especialmente a mi hijo Emmanuel Ospina Morales, a mi esposa Juanita Morales, a mi hermana; quienes ven día a día mi esfuerzo para salir adelante y mi esmero por cumplir mis metas, por ser un ejemplo para mi hijo.

A mis estudiantes, ya que sin su apoyo y dedicación nada de esto sería posible. Todos ellos me alientan a crecer cada día como persona y como profesional, para el cumplimiento de mis sueños y metas.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por permitirme trazar metas claras, logrando cumplirlas, producto de sus bendiciones hacia mí.

A mis padres, quienes me mostraron el camino de la enseñanza, de los valores, sacrificios y, así mismo, la paciencia y el nunca desistir hasta culminar mis proyectos.

A mi hijo Emmanuel, quien es mi inspiración, con el cual día a día me levanto con motivación, para ser su ejemplo en la vida.

A mi esposa Juanita, por su paciencia, comprensión y apoyo en este camino. Por entender que mis metas y sueños los quiero lograr a su lado.

A Jaider A. Figueroa Flórez, como docente y asesor del trabajo, por la sistematicidad y organización durante el proceso, su permanente disposición e invaluable orientación y la gran lucidez en sus comentarios.

A los estudiantes, directivos y compañeros de la Institución Educativa Villa del Pilar, ya que me permitieron estar a su lado en este proyecto de vida, con su entusiasmo, colaboración y apoyo en el proceso.

Resumen

Este trabajo pretende contribuir al fortalecimiento del proceso de resolución de problemas en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales que impliquen el uso de diversas estructuras aditivas (combinación, cambio, igualación y de varias etapas), en estudiantes de básica secundaria, a partir del diseño e implementación de actividades de aprendizaje basadas en el enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto). El trabajo se desarrolla teniendo en cuenta tres tipos de talleres: un taller diagnóstico, tres talleres de afianzamiento y un taller final, que pretende profundizar en la resolución de problemas de varias etapas y contrastar el nivel de avance de los estudiantes durante el desarrollo de los talleres de afianzamiento. Dentro de los resultados obtenidos se destacan los siguientes: en torno al **uso de conceptos**: la identificación de los datos de un problema, de la operación correcta y el uso de diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación; en **metacognición**: la comprensión y superación de dificultades en la solución de problemas aditivos, uso de visión retrospectiva al darle solución a un problema; en **actitudes**: empatía en la resolución de problemas, aceptación o negación ante nuevas estrategias de solución, perseverancia en la búsqueda de respuestas correctas; y en **procesos**: la identificación de la posición donde se encuentra la incógnita en la ecuación asociada al problema, conversión del problema matemático a diversas representaciones o lenguajes (verbal, simbólico, numérico),

capacidad de interpretar, proponer y resolver problemas aditivos, identificación de regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras), y el reconocimiento de diferentes estrategias de solución para un problema dado.

Palabras clave: comprensión, estructuras aditivas, metacognición, método CPA, problemas aditivos, problemas de varias etapas.

Abstract

Use of additive structures and the CPA method in solving problems in the context of linear equations

The work aims to contribute to the strengthening of the problem-solving process in the context of equations and systems of linear equations involving the use of various additive structures (combination, change, equalising and multi-stage), in secondary school students, based on the design and implementation of learning activities based on the CPA approach (concrete, pictorial and abstract). The work is carried out taking into account three types of workshops: one diagnostic workshop, three entrenchment workshops and one final workshop that aims to deepen the resolution of multi-stage problems and contrast the level of progress of the students during the development of the entrenchment workshops. Among the results obtained are the following: around the use of concepts, the identification of the data of a problem, the correct operation and the use of various calculation (especially mental calculation) and estimation strategies; in metacognition: understanding and overcoming difficulties in solving additive problems, using retrospective vision when solving a problem; in attitudes: empathy in problem

solving, acceptance or denial in the face of new strategies of solution, perseverance in the search for correct answers; and in processes: the identification of the position where the unknown is found in the equation associated with the problem, conversion of the mathematical problem to various representations or languages (verbal, symbolic, numerical), ability to interpret, propose and solve additive problems, identify regularities and number properties using different calculation tools (bars), and recognize different solution strategies for a given problem.

Keywords: understanding, additive structures, metacognition, CPA method, additive problems, multi-stage problems.

Contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Horizonte de trabajo

Introducción

Para poder entender los problemas aditivos, se debe conocer la estructura que los rodea, así como la utilización de material bibliográfico enfocado a la enseñanza de las matemáticas. Es importante para los docentes y para los estudiantes la resolución de problemas aditivos dentro de las aulas de clase, como también en su vida cotidiana.

En el contexto diario, los estudiantes se enfrentan con información numérica, la cual se manifiesta de diferentes maneras, ejemplos de esto se observan en los noticieros cuando informan el alza de precios que han tenido algunos productos, el aumento del IVA, aumento o disminución en el precio de la gasolina, también en las estadísticas que se presentan cuando un candidato se postula para alguno de los puestos gubernamentales que ofrece el país.

Por lo anteriormente mencionado, se hace necesario que los estudiantes manejen una comprensión de números, y esto solo se logra si estos mismos se apropian de sus estudios matemáticos, pues convivirán con las situaciones que se presentan diariamente en su contexto.

Las estructuras aditivas son una base fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, por lo tanto, también para el pensamiento numérico. De esta manera se busca el desarrollo de la capacidad de análisis, progreso cognitivo y solución de problemas, en los alumnos del grado noveno, con el fin de que puedan demostrar sus habilidades y destrezas para la solución y resolución de problemas matemáticos, identificando que no solo existe una forma de solución, sino que se puede presentar más de una.

Este trabajo se realiza en el contexto educativo de la Institución Educativa Villa del Pilar, en el cual los estudiantes de grado noveno evidenciaron dificultades en procesos de pensamiento numérico. Por esta razón se decide fortalecer la comprensión y solución de situaciones aritméticas (estructuras aditivas de tipo verbal, establecidas por Nesher, 1982), y así poder lograr el desarrollo de algunos procesos de pensamiento numérico.

Con este estudio se pretende, a través de la utilización del método Singapur, el análisis de las estructuras aditivas que están contenidas en los problemas matemáticos, identificando si existe una coherencia significativa entre la estructura que se emplea y las soluciones planteadas.

Así pues, los alumnos, objeto de esta investigación, deben apropiarse de los contenidos y, a su vez, deben aprender a resolver los problemas que estén sujetos a dichos contenidos matemáticos, y de esta manera contribuir en el proceso de resolución de problemas en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, que contemplen diversas estructuras aditivas, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto).

Descripción y planteamiento del problema

En Colombia, desde tiempos atrás, las matemáticas han sido consideradas como un área difícil del conocimiento (Poveda, 1984), donde se ha creído que las personas que la comprenden son privilegiadas, las cuales son admiradas y consideradas como "muy inteligentes", y tal vez es esta percepción la que ha generado una desvinculación de esta área del conocimiento con las decisiones importantes de nuestra vida, como lo es al momento de elegir una carrera profesional que tenga que ver nada o mínimamente con esta área, pues a muchas personas les genera conflicto, frustración y por lo tanto desmotivación. Esta información ha sido difundida, de generación en generación, afianzando la idea de dificultad y, en muchos casos, de aversión.

Tal vez es esta la razón por la cual una de las dificultades que existe actualmente en la educación, y en este caso particular en la educación básica secundaria y media de la Institución Educativa Villa del Pilar, es en el área de matemáticas y específicamente en el aprendizaje y aplicación de las operaciones básicas utilizadas en la resolución de problemas. Ello se evidencia en los resultados de las pruebas externas (Saber 9º y 11º), aplicadas anualmente a los estudiantes de todas las instituciones Educativas, con el fin de monitorear y hacer seguimiento al desarrollo y/o desempeño de las competencias básicas, como parte del seguimiento de calidad por parte del MEN (2006). Estos resultados están contenidos en la caja DIA E (Día de la Excelencia Educativa) dada por este Ministerio, la cual presenta los resultados de estas pruebas, por alumno e institución, identificando destrezas, habilidades y valores que los estudiantes han desarrollado durante su trayectoria escolar. Además, permite conocer los comparativos a nivel local (lo urbano y lo rural, lo público y lo privado), departamental y nacional. También se tienen como referente los resultados de pruebas internas de la Institución como talleres, actividades grupales, rúbricas, exámenes, donde los resultados se clasifican en medio y bajo.

En el año 2017 los resultados obtenidos en las pruebas saber aplicadas a 27 estudiantes, de grado noveno de básica primaria, arrojó que el 35 % se encuentra en insuficiente, el 33 % en mínimo, el 23 % en satisfactorio y solo el 9 % en avanzado. En el año 2018 los resultados obtenidos fueron muy similares al anterior, pues de 25 estudiantes de grado noveno el 30 % se encuentra en insuficiente, el 39 % en mínimo, el 23 % en satisfactorio y el 8 % en avanzado.

Al analizar estos resultados se pone en evidencia la dificultad de los estudiantes para interpretar, plantear y resolver problemas, lo cual nos lleva a reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos en dichos estudiantes, y en especial la enseñanza y aplicación de las operaciones básicas como las estructuras aditivas, entendida esta como la capacidad de identificar, comprender y abordar las diferentes situaciones en las que tienen aplicabilidad las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (Vergnaund, 1995).

Es a partir de estos resultados donde se genera una preocupación a nivel general en toda la comunidad educativa (docentes, estudiantes y padres de familia), los cuales se han visto obligados a considerar, cuestionar y reflexionar sobre las diferentes prácticas educativas que afectan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como respuesta a esta dificultad surge la propuesta investigativa de diseñar e implementar una estrategia didáctica, basada en la metodología CPA (concreto, pictórico y abstracto), para mejorar el uso comprensivo de las estructuras aditivas en la solución de problemas en contexto, en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Villa del Pilar.

Justificación

Las matemáticas son un área del conocimiento de gran importancia en nuestras vidas ya que están relacionadas con todo lo que nos rodea como la música, la química, el funcionamiento de los aparatos eléctricos y electrónicos, tecnológicos, las áreas de ingenierías, la medicina, la administración de bienes y recursos, entre otros. Es a partir de esta realidad que surge el desafío que conlleva a plantearnos cómo enseñar los conceptos matemáticos, y para esto debemos iniciar con el intento de comprender en qué momento se complejiza dicho proceso, pues si partimos de la observación del desarrollo cognitivo del aprendizaje de las matemáticas en los niños pequeños, en edades de 2 a 6 años, su aprendizaje se da de forma natural y sencilla; aprenden los colores, formas, tamaños, relaciones de correspondencia, cuantificadores (más, menos, muchos, pocos), relaciones espaciales (cerca, lejos) y de esta forma van afianzando sus nociones temporo-espaciales, de lateralidad, de posición, de cantidad, seriación, correspondencia, entre otras.

Este proceso cognitivo se da en todos los seres humanos; son conocimientos matemáticos y es desde ahí (temprana edad) donde se consolidan las bases para los aprendizajes posteriores de mayor complejidad en las matemáticas. La reflexión que surge es: ¿si estos procesos se dan de forma sencilla y espontánea, en qué momento se convierten en un área difícil y frustrante, que en muchas ocasiones se asocia al fracaso escolar? Esto se puede observar en los resultados de las pruebas externas e internas de nuestros planteles educativos de enseñanza básica primaria, secundaria y media, específicamente en la resolución de problemas donde se hace uso de las operaciones básicas (estructuras aditivas).

Debido a esto, se hace notoria la preocupación e interés acerca de la enseñanza de las matemáticas, surgiendo proyectos y métodos didácticos que han llevado a acuñar el término de matemáticas modernas (Skemp, 1980). Este autor también menciona que, en una primera instancia, para la enseñanza de las matemáticas se debe permitir que los niños toquen, manipulen, separen, exploren y den significado a su trabajo.

Apoyados en estas premisas se consolida la propuesta como trabajo de investigación: diseñar e implementar una unidad didáctica basada en el enfoque concreto, pictórico y abstracto (CPA) de Bruner (2001), con la pretensión de motivar a los estudiantes a la comprensión y uso de los principales conceptos matemáticos, a través de un aprendizaje progresivo.

Esta progresión del aprendizaje parte desde lo concreto hasta llegar a lo abstracto pasando por lo pictórico, con la intención de buscar que los niños de grado noveno tengan un mayor acercamiento y oportunidad de experimentación con material concreto. A partir de su manipulación podrán llegar a deducir conceptos, desde sus propias experiencias, para luego hacer representaciones pictóricas a través de sus interpretaciones particulares, partiendo de una generalidad para representar la información. Finalmente, llegan al nivel de abstracción donde juega un importante papel la relación entre los niveles de desarrollo concreto y pictórico para hacer representaciones simbólicas matemáticas, que faciliten la articulación del conocimiento de los estudiantes con sus vivencias; en otras palabras, con su realidad, permitiendo así una mayor capacidad para analizar y solucionar situaciones que requieren el uso significativo de las matemáticas, en especial la aplicabilidad de las operaciones básicas (estructuras aditivas), y desde esta propuesta mejorar sus procesos de aprendizaje.

Todo este proceso se dará en concordancia con los referentes de calidad planteados por el MEN (2006), los cuales tienen como finalidad guiar con calidad la actividad pedagógica, como son los estándares básicos de competencias del aprendizaje. Define que ser matemáticamente competente es “saber hacer en contexto”, y es esta competencia concretamente la que se relaciona con el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los lineamientos curriculares: el pensamiento numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

Aunque estos cinco pensamientos están estrechamente relacionados, es importante resaltar que en esta propuesta de investigación se hará énfasis en el pensamiento numérico, pues propende por favorecer las experiencias de conteo haciendo uso de las operaciones básicas como la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, con el fin de generar la comprensión del concepto de número, utilizando la acción de contar con unidades de conteo simples y complejas, recurriendo a la reunión, separación, repetición y repartición de cantidades, y a los números que resultan de esas mediciones. De esta manera se puede dar respuesta a lo contemplado en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006), el cual establece que:

Al terminar tercer grado:

- Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Al terminar quinto grado:

- Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación.
- Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Al terminar séptimo grado:

- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.

Al terminar noveno grado:

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Objetivos

Objetivo general

Contribuir en el proceso de resolución de problemas en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, que impliquen diversas estructuras aditivas, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto), en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Villa del Pilar.

Objetivos específicos

- Proponer un plan de trabajo que contemple el diseño y aplicación de una estrategia didáctica basada en el enfoque CPA, que promueva el uso de las estructuras aditivas en la solución de problemas en contexto.

- Describir avances y dificultades presentadas en los estudiantes, en cuanto el uso de las estructuras aditivas en la solución de problemas, luego del proceso de intervención.

Marco Referencial

Marco de antecedentes

Para el desarrollo de este trabajo de investigación, es importante tener en cuenta los estudios realizados sobre el tema de nuestro interés, pues este, aunque es un material de consulta, permite dar el apoyo basado en las teorías, métodos y los resultados obtenidos dentro de las mismas.

A continuación, se presentarán los antecedentes en categorías internacionales, nacionales y regionales.

Tabla 1.

Antecedentes Internacionales

Nombre del texto y autor	Ideas principales
Nivel de resolución de problemas aditivos (PAEV) en estudiantes de dos instituciones educativas de San Juan de Lurigancho – 2018 Macazana, D. (2018)	Tuvo como objetivo principal describir la diferencia del nivel de resolución de problemas aditivos (PAEV) en estudiantes del segundo grado de primaria, Institución Educativa de San Juan de Lurigancho – 2018 (Lima Perú). Concluyó que existen diferencias en el nivel de resolución de problemas aditivos (PAEV) en estudiantes de dos Instituciones Educativas de San Juan de Lurigancho – 2018.
Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. Ivars, P & Fernández, C. (2016)	La idea central fue caracterizar la evolución de los niveles de éxito y de las estrategias empleadas por estudiantes de educación primaria (edad 6-12 años) cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. Se obtuvo que, si la resolución de problemas es considerada como la parte más esencial dentro de la educación matemática, deberíamos centrarnos en utilizar esas capacidades para ayudar a los alumnos a completar esa tarea. Este estudio fue realizado en Alicante, España.
Resolución de problemas aditivos y multiplicativos con números naturales para desarrollar capacidades matemáticas en los niños y niñas del V ciclo de educación primaria de la institución educativa N° 16451, del caserío Mandinga, distrito y provincia de San Ignacio – Perú. Rodríguez, O & Suarez, E. (2015).	La idea central de este estudio fue desarrollar la capacidad matemática, mediante la resolución de problemas aditivos y multiplicativos con números naturales, en los niños y niñas del V ciclo. Se concluyó que el proceso de resolución de problemas implica que el estudiante manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione y mejore su proceso de pensamiento, al aplicar y adaptar diversas estrategias matemáticas en diferentes contextos.

Continuación Tabla 1.

Nombre del texto y autor	Ideas principales
Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria. Martínez, A. (2012)	Se enfocó en los procesos de resolución de los estudiantes al solucionar problemas de estructura aditiva, las estrategias que utilizan y las dificultades que enfrentan con tipos y subtipos de problemas asociados a la adquisición de reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo. Concluyó que, si los docentes conocieran el pensamiento matemático infantil y las reglas intuitivas que los niños elaboran, antes y durante la instrucción escolar, tendrían más herramientas para diseñar actividades que favorezcan en sus estudiantes el pasaje del conocimiento de las reglas intuitivas SND a las reglas formales del mismo. Este estudio se realizó en México.
Problemas de estructura aditiva con estudiantes de 2° y 3° grados de primaria de una escuela pública del estado de Oaxaca: una propuesta de enseñanza. En México. Cruz, F. (2012)	Este estudio pretendió desarrollar una producción de conocimientos hacia las matemáticas. En una ordenada progresión de contenidos se reflexionó sobre las acciones y relaciones de los números. Se pudo observar que los estudiantes desarrollan ideas intuitivas de dos sistemas de numeración: decimal y vigesimal.
Aprendizaje del sistema aditivo y multiplicativo de los números enteros mediante la asistencia de objetos virtuales de aprendizaje. Bona, B. (2012)	Su idea principal se basó en ofrecer la oportunidad de un aprendizaje constructivo y verificar las contribuciones de ese proceso en la potenciación de aprendizaje, en el área de las matemáticas de la enseñanza primaria, con alumnos de 2º y 5º grado. En los resultados se encontró que el empleo de software favoreció la introducción al concepto de media aritmética basada en la representación gráfica, ya que le posibilitó al alumno descubrir propiedades y las relaciones que implica al campo conceptual constituido por la lectura e interpretación de gráficos y medias aritméticas.

Fuente: elaboración propia

Tabla 2.

Antecedentes Nacionales

Nombre del texto y autor	Ideas principales
El aprendizaje cooperativo como estrategia didáctica para el desarrollo de habilidades en la solución de problemas contextualizados con situaciones aditivas, para estudiantes de grado quinto. Cardona, A. (2019)	Su idea principal fue diseñar e implementar un módulo basado en aprendizaje cooperativo para desarrollar habilidades en la resolución de problemas contextualizados con situaciones aditivas (combinación, cambio, comparación e igualación) en el conjunto de los números naturales, con estudiantes de grado quinto de una institución educativa oficial de Cali. Se concluyó que brindar a los estudiantes la posibilidad de cooperar y aprender con sus pares, puede mejorar la participación y la consecución de habilidades, tanto sociales como para la resolución de problemas.
Resolución de situaciones problemáticas aditivas con estudiantes de grado segundo. Parra, R. (2018)	El objetivo principal de este estudio fue resolver situaciones problemáticas que requieren operaciones aditivas a través del método Polya, con las estudiantes del grado segundo de la IED Santa María de Ubaté. Como resultado se obtuvo que la planeación rigurosa de los procesos pedagógicos permite definir con claridad los objetivos de aprendizaje, y a partir de ellos generar las estrategias que más se ajusten a las necesidades e intereses de los estudiantes.
Influencia de una estrategia metodológica en el aprendizaje del concepto: estructura aditiva. Ciudad de Bogotá. Amezquita, N. (2017)	Esta investigación se fundamentó en describir cómo la implementación de una estrategia pedagógica que involucra la solución de problemas incide en el aprendizaje de la estructura aditiva de números naturales, en estudiantes del grado 5º dos, jornada tarde de la IED. Obtuvo como resultado que la mayor relevancia en el ámbito del aula es el tipo de herramientas y los modos en que son presentadas, cuando se vincula la lúdica y una contextualización al entorno e intereses, por ejemplo, el aprendizaje es trascendental y significativo

Continuación Tabla 2.

Nombre del texto y autor	Ideas principales
Resolución de problemas aditivos simples a través de situaciones significativas por parte de estudiantes de grado segundo del colegio Antonio García IED. Acuña, J & Rojas, J. (2018)	El objetivo fue describir los cambios que se producen en los estudiantes de grado segundo, jornada mañana, del colegio Antonio García IED al resolver problemas aditivos simples, específicamente de complemento a la derecha y excedencia a lo largo del desarrollo de una secuencia didáctica basada en experiencias significativas. Conclusión: es una estrategia que ayudó a los niños a transformar significativamente los procesos de solución y resolución de problemas aditivos simples principalmente en los de estructura complemento a la derecha y excedencia. Las verbalizaciones y acciones que los niños utilizan al resolver una situación problema, a partir de la experiencia con los juegos, dan cuenta de los significados numéricos que han construido a través de la acción e interacción con los objetos y cuentos del mundo que los rodea.
Análisis de las dificultades que presentan los estudiantes en la interpretación de los enunciados verbales donde intervienen estructuras aditivas. Uribe, M, Sierra, C. & Palacio, L. (2017) - Medellín.	El objetivo fue analizar las dificultades presentadas por los estudiantes, del grado segundo de básica primaria, en la interpretación de los enunciados verbales donde se involucran las estructuras aditivas. Se logró establecer la necesidad de realizar una instrucción guiada, debido a la falta de comprensión en los enunciados verbales, como consecuencia de la carencia de conocimientos previos y la incipiente formación conceptual.
Estructuras aditivas en la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal (PAE). Ordoñez, L. (2014)	Su idea principal se basó en aplicar la metodología Redactar, en grado séptimo, para fortalecer la conceptualización de las estructuras aditivas con números enteros, indispensable para el desarrollo del pensamiento numérico. Después de analizar los datos se concluyó que se fortaleció la conceptualización de las estructuras aditivas con números enteros, indispensables para el desarrollo del pensamiento numérico.

Continuación Tabla 2.

Nombre del texto y autor	Ideas principales
Secuencia didáctica basada en la teoría de las situaciones didácticas y la metodología PAVOC para la resolución de problemas matemáticos con estructuras aditivas. Piedrahita**,** P & Amú, H. (2017)	La idea principal de esta tesis fue promover la aplicación de una secuencia didáctica basada en la teoría de las situaciones didácticas y la metodología PAVOC, como recurso metodológico que favorezca el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas que involucran dos operaciones matemáticas básicas: suma y resta, en estudiantes de quinto grado de primaria. Se encontró que el nivel de logro en resolución de problemas aritméticos aditivos y sustractivos en los estudiantes es altamente significativo. Este trabajo se realizó en Santiago de Cali.
Efecto de la enseñanza a través de la resolución de problemas, en el uso de los procesos cognitivos y metacognitivos de los estudiantes. Lara, E & Quintero, M. (2016)	El objetivo principal de este estudio fue determinar el efecto de la enseñanza a través de la resolución de problemas en el uso de los procesos cognitivos y metacognitivos en dos grupos de estudiantes de segundo grado de básica primaria, un grupo experimental y uno control, en el departamento del Atlántico. Se encontró que los estudiantes de ambos grupos comenzaron iguales en matemáticas; sin embargo, después de realizar la implementación de la enseñanza, a través de la resolución de problemas matemáticos, se observó que los estudiantes de ambos grupos tienen diferencias significativas en los procesos comprende ($Z=-2.063$, $p<0.050$) y analiza ($Z=-3.499$, $p<0.010$), debido a que los estudiantes del grupo experimental utilizan más estos procesos que los del grupo control, después de haber implementado la estrategia de la enseñanza a través de la resolución de problemas.

Tabla 3.

Antecedentes Regionales

Nombre del texto y autor	Ideas principales
Un estudio sobre el tipo de estructuras aditivas usadas en problemas, planteados en los textos de matemáticas de primaria más usados en Colombia. Silva, J. (2018)	Se llevó a cabo un análisis didáctico en torno al tipo de estructuras aditivas usadas en los problemas que se plantean en textos de matemáticas de primaria más usados en Colombia, para determinar el grado de coherencia entre lo planteado por las políticas colombianas en Educación Matemática y el tipo de problemas encontrados. Mostró que las estructuras aditivas más usadas por las editoriales son en su orden categorías 2, 1, 3 y 4 de Vergnaud, o las categorías comparación, y en menor grado combinación e igualación de Nesher. Estas categorías se encuentran incluidas en la gran mayoría de textos con los cuales los docentes orientan las clases de matemáticas, pero carecen de las categorías 5 y 6 de Vergnaud y teorías de igualación de Nesher. Todo lo anterior refleja cierta articulación entre las normas exigidas por el MEN en los estándares básicos de competencias. Se debe resaltar que no se están trabajando las estructuras de igualación, y poco se trabajan las categorías de combinación.
Incidencia de estrategias de regulación metacognitiva en la resolución de problemas aditivos de cambio y combinación en niños de 7 a 8 años. Herrera, J. (2018)	Este estudio se basó en describir la incidencia de las estrategias de regulación metacognitiva en la resolución de problemas aditivos de cambio y combinación, en los estudiantes de segundo grado de la Institución Educativa San José. Se concluyó que la enseñanza de resolución de problemas brinda la posibilidad a los estudiantes de enfrentarse a situaciones desafiantes que requieren para su solución diversas habilidades, destrezas y conocimientos matemáticos, entre los que se encuentran el cálculo numérico escrito y mental, el análisis de datos y enunciados, y el uso, en este caso en específico, de material interactivo y concreto.

Fuente: elaboración propia

Se consideró importante abordar los antecedentes investigativos, dentro del planteamiento del problema, ya que muestra datos relevantes que a nivel regional no hay suficientes estudios sobre el tema. Además, los estudios encontrados se refieren más a la resolución de problemas en la población de estudiantes de básica primaria, dándole relevancia a este estudio el cual se basó en población de básica secundaria.

Marco Teórico

Para el desarrollo de este estudio investigativo, el marco teórico se procesó en dos fases, la primera corresponde a la Ley 115 de educación y, la segunda, a la resolución de problemas matemáticos.

Ley 115 de 1994

Partiendo de la idea de que, tanto para nuestro país como para el resto del mundo, el aprendizaje de las matemáticas es fundamental para el diario vivir de los estudiantes, dentro y fuera de las aulas de clases, en Colombia en la ley 115 se establece lo siguiente:

> Artículo 20: Objetivos generales de la educación básica. Son objetivos generales de la educación básica:
>
> a) Propiciar una formación general mediante el acceso, de manera crítica y creativa, al conocimiento científico, tecnológico, artístico y humanístico y de sus relaciones con la vida social y con la naturaleza, de manera tal que prepare al educando para los niveles superiores del proceso educativo y para su vinculación con la sociedad y el trabajo;

b) Desarrollar las habilidades comunicativas para leer, comprender, escribir, escuchar, hablar y expresarse correctamente;

c) Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana;

d) Propiciar el conocimiento y comprensión de la realidad nacional para consolidar los valores propios de la nacionalidad colombiana tales como la solidaridad, la tolerancia, la democracia, la justicia, la convivencia social, la cooperación y la ayuda mutua;

e) Fomentar el interés y el desarrollo de actitudes hacia la práctica investigativa, y

f) Propiciar la formación social, ética, moral y demás valores del desarrollo humano.

También es importante mencionar el artículo 22: Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de secundaria. Los cuatro grados subsiguientes de la educación básica, que constituyen el ciclo de secundaria, tendrán como objetivos específicos los siguientes:

a) El desarrollo de la capacidad para comprender textos y expresar correctamente mensajes complejos, orales y escritos en lengua castellana, así como para entender, mediante un estudio sistemático, los diferentes elementos constitutivos de la lengua;

b) La valoración y utilización de la lengua castellana como medio de expresión literaria y el estudio de la creación literaria en el país y en el mundo;

c) El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana;

d) El avance en el conocimiento científico de los fenómenos físicos, químicos y biológicos, mediante la comprensión de las leyes, el planteamiento de problemas y la observación experimental;

e) El desarrollo de actitudes favorables al conocimiento, valoración y conservación de la naturaleza y el ambiente;

f) La comprensión de la dimensión práctica de los conocimientos teóricos, así como la dimensión teórica del conocimiento práctico y la capacidad para utilizarla en la solución de problemas;

g) La iniciación en los campos más avanzados de la tecnología moderna y el entrenamiento en disciplinas, procesos y técnicas que le permitan el ejercicio de una función socialmente útil;

h) El estudio científico de la historia nacional y mundial dirigido a comprender el desarrollo de la sociedad, y el estudio de las ciencias sociales, con miras al análisis de las condiciones actuales de la realidad social;

i) El estudio científico del universo, de la tierra, de su estructura física, de su división y organización política, del desarrollo económico de los países y de las diversas manifestaciones culturales de los pueblos;

j) La formación en el ejercicio de los deberes y derechos, el conocimiento de la Constitución Política y de las relaciones internacionales;

k) La apreciación artística, la comprensión estética, la creatividad, la familiarización con los diferentes medios de expresión artística y el conocimiento, valoración y respeto por los bienes artísticos y culturales;

l) La comprensión y capacidad de expresarse en una lengua extranjera;

m) La valoración de la salud y de los hábitos relacionados con ella;

n) La utilización con sentido crítico de los distintos contenidos y formas de información y la búsqueda de nuevos conocimientos con su propio esfuerzo, y

ñ) La educación física y la práctica de la recreación y los deportes, la participación y organización juvenil y la utilización adecuada del tiempo libre.

Artículo 23:

Los grupos de áreas obligatorias y fundamentales que comprenderán un mínimo del 80 % del plan de estudios, son los siguientes:

1. Ciencias naturales y educación ambiental.
2. Ciencias sociales, historia, geografía, constitución política y democracia.
3. Educación artística.
4. Educación ética y en valores humanos.
5. Educación física, recreación y deportes.
6. Educación religiosa.

7. Humanidades, lengua castellana e idiomas extranjeros.

8. Matemáticas.

9. Tecnología e informática.

Resolución de problemas matemáticos

La resolución de problemas matemáticos tiene que ver con el desarrollo psíquico del individuo, en relación con las funciones ejecutivas. Así, para Delgado (1998) el resolver problemas matemáticos es una habilidad la cual permite que las personas encuentren un método de solución que conlleva a la solución definitiva del problema.

Por otra parte, Schoenfeld (como se citó en Barrantes, 2006) indica que la resolución de problemas matemáticos tiene que ver con ciertos aspectos como: la heurística, el control y los recursos. La heurística es el método que se utiliza por parte de los sujetos para la resolución de dichos problemas; el control se refiere a la manera en cómo el estudiante maneja y controla sus trabajos; y, por último, el recurso se refiere a los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre las matemáticas, para poder enfrentarse a los problemas que se les plantean.

En línea con lo anterior se puede evidenciar lo escrito por Martínez (1990) quien manifiesta que, desde el campo de la didáctica de la ciencia, es importante la realización de actividades enfocadas a la resolución de problemas matemáticos, basándolos en tres aspectos importantes:

1. Argumentos educativos: los cuales indican que la resolución de problemas matemáticos constituye una serie de procedimientos permanentes del aprendizaje de manera activa,

donde los estudiantes son los protagonistas, lo cual, de manera positiva, ayuda a que se cambien las percepciones que estos han adquirido de algún tema en particular.

2. Argumentos científicos: se refieren a que los alumnos tienen la oportunidad de familiarizarse con el modo de trabajo de los científicos, haciéndose conscientes de que la finalidad de estos es la resolución de los problemas que se plantean a través del tiempo.

3. Argumentos ideológicos: estos manifiestan que, a través de las actividades de la resolución de problemas matemáticos, se puede lograr que los estudiantes salgan de las aulas de clase y entiendan que dichos problemas se pueden ajustar a su diario vivir; es así como los problemas que se plantean en clase deben servir para la vida cotidiana de los estudiantes.

Marco conceptual

Estructuras Aditivas

Para Vergnaud y Durand (1983) aquellos problemas de tipo aditivo son los que requieren que su solución incluya adiciones o sustracciones; por lo tanto, las estructuras aditivas son las relaciones que entran en juego dentro de los problemas matemáticos.

Los autores Castro, Rico & Gil (1992) manifiestan que el objetivo de las matemáticas no solo son acercar a los estudiantes hacia ellas, sino que también estos las puedan aplicar en su vida cotidiana. Por tal razón, los problemas matemáticos que se imparten en las aulas de clase deben coincidir con situaciones de la vida real, dándole de esta forma un valor agregado al estudio.

Por otro lado, para Castro (2008) en la estructura aditiva se presentan problemas que se pueden clasificar en varios niveles de dificultad, los cuales varían dependiendo de la incógnita que se plantee (Tabla 4).

Tabla 4: Niveles de dificultad

Tipo de problema	Incógnita	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Cambio creciente	Cantidad final	X			
Cambio decreciente	Cantidad final	X			
Cambio creciente	Cantidad de cambio		X		
Cambio decreciente	Cantidad de cambio		X*		
Cambio creciente	Cantidad inicial			X	
Cambio decreciente	Cantidad inicial			X	
Combinación	Todo	X			
Combinación	Parte			X	
Comparación creciente	Diferencia			X*	
Comparación decreciente	Diferencia			X*	
Comparación creciente	Cantidad comparada			X	
Comparación decreciente	Cantidad comparada			X	
Comparación creciente	Cantidad de referencia				X*
Comparación decreciente	Cantidad de referencia				X*

Fuente: Castro (2008)

En línea con lo anterior, estos problemas de estructura aditiva no tienen una sola forma de solucionarse, sino que se puede observar distintas tácticas de resolución, que los alumnos pueden utilizar en su libre voluntad y adaptabilidad de acuerdo con sus capacidades, niveles cognitivos y de desarrollo.

Sin embargo, aunque se presente la disposición por parte de los estudiantes, es necesario aclarar que los niños y jóvenes cometen errores y presentan dificultades que hacen que los problemas de estructura aditiva se vean de mayor complejidad en la etapa escolar.

Resolución de problemas y el método Singapur

Desde el punto de vista psicológico, para Kilpatrick (1985) un problema "es una situación o tarea en la cual una meta quiere ser lograda y una ruta directa a ella está bloqueada" (p. 3).

La mayoría de los psicólogos coinciden en que los problemas no pueden verse aislados del sujeto y es por ese motivo que la resolución de problemas es la actividad de un sujeto.

Castro (1991) estableció que, desde el punto de vista matemático, el problema se constituye con los siguientes parámetros:

- Un enunciado apropiado
- Datos veraces que se deben investigar
- Una acción que se debe averiguar
- Propuesta de metas u objetivos que se deben alcanzar
- Un proceso adecuado para garantizar el resultado
- Unas reglas que se deben seguir como propósito para cumplir o alcanzar la meta.

Mayer (1983) afirma que "la resolución de problemas se refiere al proceso de transformar el estado inicial dado del problema al estado final, siendo dicha transformación realizada por el pensamiento" (p. 21).

Se considera entonces que la resolución de problemas es el abordaje principal del aprendizaje de las matemáticas, dado que permite a los estudiantes potencializar el desarrollo del pensamiento matemático.

Método Singapur

Para el Ministerio de Educación Nacional (2017) el método Singapur "es una propuesta para la enseñanza matemática basada en el currículo que el mismo país ha desarrollado por más de 30 años" (p. 3).

El método Singapur se caracteriza por:

- La resolución de problemas es el centro del proceso
- Al enseñar los conceptos a los estudiantes, se parte de material concreto

Adicional a esto el método Singapur consta de cinco compontes descritos por el MEN (2017) que son:

- **Conceptos:** Los conceptos matemáticos se agrupan en seis tipos que se relacionan fuertemente entre sí, los cuales son: numéricos, geométricos, probabilísticos, algebraicos, estadísticos y analíticos.
- **Habilidades:** Consisten en aquellas habilidades que son relacionadas con la práctica matemática y que son necesarias para realizar un procedimiento. Estas incluyen: cálculo numérico, manipulación algebraica, visualización espacial, análisis de datos, medición, uso de herramientas matemáticas y estimación.

- **Procesos:** Son habilidades generales necesarias para adquirir y aplicar conocimientos matemáticos. Estos incluyen: razonar, comunicar y hacer conexión, y por último aplicar y moldear.
- **Metacognición:** Es el pensar sobre cómo piensa la persona. Y para desarrollar la metacognición se sugieren las siguientes prácticas:
    - Resolver problemas abiertos y no rutinarios.
    - Enseñar a los estudiantes habilidades generales de resolución de problemas, indicando cómo se utilizan y aplican para resolverlos.
    - Discutir las diversas soluciones y estrategias de resolución.
    - Motivar a los estudiantes a buscar formas alternativas de resolver un problema.
    - Pensar en voz alta.
    - Reflexionar continuamente.
- **Actitudes:** Las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas están influenciadas por sus experiencias de aprendizaje. Estas incluyen:
    - Creencias sobre la utilidad de las matemáticas.
    - Interés y capacidad de disfrutar las matemáticas.
    - Apreciación de la belleza y el poder de las matemáticas.
    - Confianza en el uso de las matemáticas.
    - Perseverancia en resolver problemas. (pp. 5-12)

Modelos matemáticos

Si bien, se puede indicar que existen muchos modelos para poder estudiar la multiplicación y la división, para este trabajo se tendrán en cuenta los modelos descritos por Castro, Rico & Castro (1995), como son:

- **Modelos lineales:** En primer lugar, podemos considerar modelos de recuento, en los que se utiliza la línea numérica. Si la línea numérica tiene un soporte gráfico, el producto n × a ("n veces a") se modeliza formando un intervalo de longitud a-unidades y contándolo n-veces. El esquema de la división es similar; consiste en contar hacia atrás desde el dividendo, y de tanto en tanto, según indique el divisor. Pero la utilización más sencilla de este modelo es como resta reiterada y contando hacia atrás, y no tanteando los puntos en los que la longitud total del dividendo queda partida en partes iguales.

- **Modelos cardinales:** Se utilizan para representar uno o los dos factores. Entre los tipos más usados están: La unión repetida de conjuntos cardinales, usualmente con los mismos objetos, la distribución de objetos en un esquema rectangular. Para ello se hace una fila con tantos objetos como nos indica el multiplicando y se forman tantas filas como dice el multiplicador. En este modelo cada uno de los factores se puede reconocer en la representación. Entre otros, en el caso de la división el modelo más usual es el de repartir en partes iguales. Se tiene un conjunto con 12 elementos y se abren, a partir de él, tres subconjuntos. Hay que repartir los elementos iniciales en partes iguales entre los tres subconjuntos, lo que toca a cada parte es el cociente.

- **Modelos con medidas:** Las regletas de Cuisenaire nos proporcionan un modelo adecuado del número como **longitud**. Para realizar un producto con regletas 2 × 3, por ejemplo, se toman las regletas 2 y 3 respectivamente y se colocan en cruz, y a continuación se toman tantas regletas abajo como indique la longitud de arriba. En este caso se toman dos regletas de tres, y ya podemos prescindir de la regleta superior cuya función era indicar cuántas de tres había que tomar. El resto del proceso es el conocido: realizar la suma de las dos regletas de tres. La división con estos dos materiales resulta muy sencilla: consiste en establecer la equivalencia entre una longitud o peso global (dividendo) y otro más pequeño (divisor), que hay que reiterar hasta conseguir dicho equilibrio.

- **Modelos numéricos:** Aparecen cuando se considera en un contexto estrictamente simbólico, y los números aparecen únicamente simbolizados. En este caso el producto es una suma reiterada 3 × 4 = 3 veces 4 = 4 + 4 + 4. Esta idea subyace a muchos de los modelos en los que se emplea material o representaciones gráficas. La división se interpreta como una resta reiterada. 12: 4 consiste en ver cuántas veces puede restarse 4 de 12, hasta llegar a 0.

- **Modelos de razón aritmética:** En ellos hay que realizar la comparación de dos conjuntos, o dos cantidades, en términos de “cuantas veces más”. El caso más sencillo se da al comparar dos conjuntos disjuntos de objetos discretos. Una técnica usual de comparación es establecer una correspondencia de varios a uno que nos da el factor de conversión o comparación. Dentro de esta misma clase de modelos de razón podemos considerar el que se fundamenta en la semejanza de triángulos y que puede utilizarse con dos líneas numéricas convergentes. Si queremos realizar el producto 3 × 4 tomamos sobre una de las rectas, por ejemplo, la horizontal el valor 3. Sobre la otra señalamos el punto 1, que unimos mediante un trazo con el 3 anterior. Sobre la segunda recta señalamos también el punto 4 y trazamos por él una paralela a la que se trazó. El punto de corte con la recta horizontal señala el resultado del producto.

- **Modelos funcionales:** Se trata de todos aquellos casos en los que el producto aparece con carácter de función u operador. De nuevo el caso más sencillo consiste en considerar cada operación como una máquina-operador que transforma números-estados en números-estados. (pp. 45- 40).

- **Subtipos de problemas aditivos**

Según Aguilar y Navarro (2000) son acciones que se realizan dentro del problema, que surgen de la ubicación de la incógnita. Existen los siguientes tipos de problema:

✓ **Problemas de cambio:** Estos describen aquellas situaciones en las cuales un conjunto se incrementa o se reduce. Por ejemplo, si Daniela tiene 3 peluches y su amiga Alejandra le regala 6 ¿cuántos peluches tiene Daniela ahora?

✓ **Problemas de combinación:** Son aquellas situaciones que se derivan de cantidades o aisladas o que hacen parte de un total. Por ejemplo, si Pablo tiene 6 carros y Juan tiene 5 ¿cuántos carros tienen entre los dos?

- ✓ **Problemas de comparación:** En estos no se presenta modificación en los conjuntos, solo se retoman de una manera comparativa. Por ejemplo, si Luisa tiene 5 manzanas y Andrés tiene 2 más que Luisa ¿cuántas manzanas tiene Andrés?

- ✓ **Problemas de igualación:** En este problema las cantidades se aumentan o se disminuyen de los conjuntos para que estos sean iguales. Por ejemplo, Si Luis tiene 8 naranjas y Diego tiene 4 ¿cuántas naranjas necesita Diego para tener las mismas que Luis?

Teoría de los campos de Vergnaud

Vergnaud (1990) indica que los campos conceptuales nacen de una teoría cognitivista, la cual pretende mostrar algunas bases para el estudio del desarrollo así como el aprendizaje de aquellas competencias que se consideran complejas.

Esta teoría como tal no es específica de las matemáticas; sin embargo, esta se ha elaborado con el fin de dar cuenta de los procesos conceptualizados de las estructuras aditivas y también multiplicativas.

Así mismo, el autor Vergnaud (1990) indica que existen tres componentes de la teoría que son: campo conceptual, esquema y representación.

Campo conceptual: Vergnaud (1990) indica que este es “como un conjunto de situaciones” (p. 7).

Así pues, las estructuras aditivas son el conjunto de situaciones que requieren de alguna operación y sus posibles combinaciones; por otro lado, las estructuras multiplicativas son aquellas que requieren una multiplicación o una combinación de las operaciones.

Vergnaud (1990) manifiesta que "La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero está claro que el fracaso en una subtarea implica el fracaso global" (p. 8).

Por tal razón el campo conceptual de las estructuras aditivas es aquel conjunto de situaciones que necesita de una o varias adiciones o sustracciones, de la mano de los conjuntos de teoremas que permiten dar solución a esos problemas matemáticos.

Para dar credibilidad a lo expuesto, Rodríguez, Palmero & Moreira (2002) manifiestan que es fundamental la relación que se establece entre los conceptos y las situaciones que se presentan, dado que, a través de esa relación, los estudiantes retienen y aplican el conocimiento. Además de indicar que la resolución de problemas debe partir de la persona en el contexto.

Esquema: Para Vergnaud (1990) los esquemas hacen referencia a la "totalidad dinámica organizadora de la acción del sujeto para una clase de situaciones específicas; es por tanto un concepto fundamental de la psicología cognitiva y de la didáctica" (p. 5).

Los esquemas no siempre se reconocen por su composición ni de inferencias; así mismo, las inferencias son necesarias para poner en funcionamiento los esquemas dada su situación en particular. Por lo tanto, el esquema no es un estereotipo, es una función temporal de argumentos, la cual permite generar series de diferentes acciones y que resulta de la recolección de la información.

En concordancia con lo anterior, se puede decir que los esquemas que son evocados pueden permitir que ocurra una asimilación de las nuevas situaciones. Sin embargo, cuando la situación no se ajusta a dichos esquemas, es necesario realizar un cambio. Es así como se establece una colección de esquemas, que de manera significativa llegan a aumentar las oportunidades de poder solucionar situaciones más complicadas.

Para finalizar con esta categoría, los esquemas son los que permiten generar diferentes acciones y métodos de recolección de la información, en función de las variables que se presentan en las situaciones.

Representación: En este caso Vergnaud (1990) indica que las representaciones son los gestos y las acciones que se ejercen sobre el mundo físico.

Por lo anterior, el conocimiento es el constructor de las representaciones mentales sobre el objeto. Estas permiten simular una realidad y por ende poderse anticipar a la acción que se debe de realizar sobre esta.

El estudiante al resolver un problema construye representaciones, toma decisiones relevantes sobre el problema, los conceptos que se presentan del problema, los signos o los símbolos que permiten lograr la resolución del problema. Por tal razón, en las representaciones se encuentran los esquemas, los cuales hacen parte de la comprensión y la solución de los problemas.

Por otro lado, Zhang y Norman (1994) plantean datos que ayudan a la comprensión de este estudio investigativo, ya que permiten identificar los pensamientos de los estudiantes, para el proceso de la solución de los problemas planteados y así verificar la acción que realizan para resolver dichos problemas.

Metodología

Tipo de trabajo

El presente trabajo se lleva a cabo desde la interacción, análisis y conocimiento de las dificultades y potencialidades de los estudiantes de básica secundaria, específicamente del grado noveno, en el proceso de resolución de problemas que contienen diversas estructuras aditivas, utilizando el método Singapur, donde se ponen a prueba los conocimientos previos, se fortalecen los procesos del pensamiento numérico y se enriquecen las prácticas pedagógicas.

El tipo de análisis de los datos cualitativos será la inducción analítica, debido a que: "Es un procedimiento para verificar teorías y proposiciones basadas en datos cualitativos" (Znaniecki, 1934, p. 1). "Permite incorporar las excepciones o anomalías a la generalización…" (Taylor y Bogdan, 1987, p. 156). También se tiene en cuenta la definición dada por Monje (2011) quien indica que la inducción analítica es aquella que está basada en la observación de la realidad, a través de la cual el investigador obtiene el conocimiento básico para desarrollar los cuerpos teóricos que puedan captar los esquemas interpretativos de los grupos que está estudiando.

Por lo anteriormente descrito, este trabajo es de tipo cualitativo-descriptivo, ya que la variable de estudio tiene que ver con el proceso de resolución de problemas, en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, que contemplen diversas estructuras aditivas, variable que toma el carácter cualitativo. Es descriptivo, por cuanto se desea describir los avances y dificultades de los estudiantes en torno a la variable de estudio a lo largo de la intervención e implementación de los instrumentos metodológicos. Para describir este tipo de avances nos apoyamos en cinco categorías de análisis, tomadas de los componentes del método Singapur (CPA) en torno a la resolución de problemas.

- Conceptos
- Metacognición
- Actitudes
- Habilidades
- Procesos

Respaldando lo dicho, Hernández, Fernández y Baptista (2014) indican que una investigación cualitativa es aquella que "se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto" (p. 358)

Instrumentos

Para el alcance de los objetivos propuestos, se plantea el desarrollo de los siguientes instrumentos:

- **Taller diagnóstico:** tuvo como objetivo establecer los conocimientos previos de los estudiantes y su estado en torno al abordaje y solución de problemas contextualizados, que contemplan el uso de diversas estructuras aditivas y las ecuaciones lineales. Los problemas aditivos planteados llevan implícito el uso de tres tipos de estructuras aditivas: cambio, combinación y comparación (Apéndice 1).

- **Talleres de afianzamiento:** Luego de tener un diagnóstico del grupo, se hicieron los talleres de afianzamiento en los cuales se realizó la modelación, simulación y ejercitación de diversas estrategias de solución de problemas basadas en el método Singapur (CPA).

  Se desarrollaron tres talleres de afianzamiento, los cuales se llevaron a cabo en un trabajo expositivo y participativo entre el docente y los estudiantes, al igual que se realizó interacción grupal, de modo que todos los estudiantes participaronn dando respuestas y solucionando problemas utilizando el tablero. Para esto se explicó, con la mayor claridad, a los estudiantes los tipos de problemas según el enunciado (comparación- combinación- cambio).

  Basados en la anterior información, se explicó claramente a los estudiantes que los problemas a trabajar serían de tres niveles: fácil, medio y difícil.

  El rol del docente fue el de moderador o guía que intervino directamente durante el desarrollo e implementación de estos talleres (Apéndice 2).

- Taller final: En este taller se profundizó en el proceso de resolución de problemas y contrastar el nivel de avance de los estudiantes durante el desarrollo de los talleres de afianzamiento. Este taller se diseña con problemas de varias etapas usando las estructuras aditivas (combinación, cambio, comparación). En esta ocasión la intervención del docente es poca (Apéndice 3).

Población

El presente trabajo se desarrolló en la Institución Educativa Integrado Villa del Pilar, ubicada en el municipio de Manizales (Caldas), que atiende estudiantes de zonas aledañas como el barrio Villa Pilar, Chipre, Venecia, vereda Sacatín y barrio la Linda; cuenta con jornada única, y es calendario A. Es una institución de carácter oficial, destacada por prácticas de educación inclusiva potenciadas con el modelo Escuela Activa Urbana

En la actualidad la Institución Educativa atiende a 450 estudiantes aproximadamente, de los cuales 280 pertenecen a la básica secundaria y media; de este total el 43 % son estudiantes con necesidades educativas especiales, en poblaciones vulnerables, con diagnósticos referidos a lo cognitivo, visual, auditivo y conductuales, entre otros.

Fuentes de información

Las principales fuentes de información que se tomaron como soporte para la descripción de los resultados del trabajo fueron:

- Producción escrita de los estudiantes, en cada uno de los talleres.
- Observación directa del docente sobre el actuar de cada uno de los estudiantes.
- Interacción simétrica (estudiante-estudiante) y asimétrica (docente-estudiante).

Análisis de los resultados

El análisis de los resultados se realizó teniendo en cuanta las categorías de análisis inherentes a la variable de estudio, es decir, haciendo énfasis en el avance de procesos más que en el de contenidos. Para ello se establecieron unas subcategorías o subprocesos asociadas a las categorías: conceptos, metacognición, actitudes, habilidades y procesos, tal como se describe a continuación.

Conceptos

Se analizaron conceptos numéricos, y en cuanto a los recursos se examinaron los conocimientos previos incluyendo los resultados incorrectos. En resumen, se tuvo en cuenta si el estudiante:

- Identifica los datos de un problema.
- Identifica la operación correcta que se debe realizar para solucionar el problema.
- Realiza la operación correctamente.
- Usa diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en estructura aditivas
- Reconoce los símbolos matemáticos.

Metacognición

En metacognición se analizó el monitoreo del propio pensamiento y la autorregulación del aprendizaje. Y se realiza un monitoreo si el estudiante:

- Identifica, comprende y supera sus dificultades, en torno a la solución de problemas aditivos.
- Verifica la respuesta.
- Reflexiona sobre la respuesta del problema propuesto.

Actitudes

- Se analizaron las creencias, intereses, confianza y perseverancia en la resolución de problemas matemáticos.
- Empatía en la resolución de problemas matemáticos.
- Aceptación o negación ante nuevas estrategias de solución de problemas matemáticos.
- Perseverancia en la búsqueda de respuestas correctas, frente a una situación matemática específica.

Procesos

- En los procesos se analizó el razonamiento. En torno a las habilidades se examinó el cálculo numérico, el análisis de datos y la estimación. En las heurísticas se analizaron las diversas estrategias de solución como:
  - Identificación de la posición donde se encuentra la incógnita en la ecuación asociada al problema.
  - Interpretación errónea del problema, teniendo en cuenta las palabras involucradas.
  - Conversión del problema matemático a diversas representaciones o lenguajes (verbal, simbólico, numérico).
  - La capacidad de interpretar, proponer y resolver problemas aditivos

- Identificación de regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras).
- Reconocimiento de la existencia de diferentes estrategias de solución para un problema dado.

Resultados y Discusión

Resultados del taller diagnóstico

El taller diagnóstico (Apéndice 1) se aplicó a 20 estudiantes del grado noveno de básica secundaria, de la Institución Educativa Villa del Pilar, permitiéndole a los estudiantes el uso de sus saberes previos. Las respuestas y estrategias solicitadas fueron libres, con la finalidad de identificar el dominio que los estudiantes tenían con respecto a los problemas matemáticos planteados.

Conceptos

En general se pudo observar e identificar algunas dificultades en los estudiantes. En el 25 % de la población intervenida (5 estudiantes) se encontró:

- Confusión en la identificación de los datos del problema.
- Ubicación incorrecta de los términos para realizar las operaciones.
- Confusión de símbolos matemáticos.
- Dificultad en la identificación de la operación que se debe realizar para solucionar el problema.

– Errores en el desarrollo de las operaciones aditivas.

– Utilización de la estrategia de solución tradicional operación – respuesta.

Metacognición

Se percibió que el 20 % de la población (4 estudiantes) mostraron algunas dificultades:

– No reflexionaron sobre la respuesta del problema propuesto.

– No verificaron la respuesta del problema

– Fallas en la comprensión de las diversas palabras utilizadas en la solución de problemas aditivos.

Actitudes

Cuatro estudiantes (20 %) expresaban verbal y físicamente incapacidad para solucionar los problemas, con palabras como: "está muy difícil, no sé cómo hacerlo, no soy capaz, cambiemos de tema". Y con comportamientos como: recostarse sobre la mesa, hacer gestos de tristeza y desánimo. También mostraron:

– Desinterés, desconfianza, o poca motivación, en el transcurso del desarrollo de los ejercicios

– Afirmaban "no soy capaz", por lo cual la dificultad de solucionar el problema se afianzaba.

– Dificultad para identificar que están realizando la solución del problema de manera incorrecta.

– Surgieron dudas en el resultado de las operaciones.

– Deciden copiar la respuesta de los compañeros, frente a una situación matemática específica.

Procesos

Solo 7 estudiantes (35 %) demostraron habilidades como:

- Identificación de la posición donde se encuentra la incógnita en la ecuación asociada al problema.
- Interpretación errónea del problema, teniendo en cuenta las palabras involucradas.
- Conversión del problema matemático a diversas representaciones o lenguajes (verbal, simbólico, numérico).
- Capacidad para interpretar, proponer y resolver problemas aditivos
- Identificación de regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras).
- Identificación que con frecuencia existen diferentes estrategias de solución para un problema dado.

A continuación, se presenta de forma detallada el análisis, de acuerdo con las categorías de los tipos de problema.

Pregunta 1.

Categoría: Combinación

En esta categoría se observó lo siguiente:

A. 13 estudiantes resuelven este problema de manera acertada consiguiendo establecer la operación correcta.

B. 3 estudiantes, pese a establecer la operación correcta, no lo desarrollan como un problema de ecuación.

C. 4 estudiantes ubican incorrectamente el valor posicional en la ecuación, y no verifican la respuesta del problema. Durante el ejercicio afirmaban “no soy capaz”, por lo cual se les dificultó solucionar el problema.

Las estrategias de solución utilizadas por todos los estudiantes son tradicionales (operación y respuesta). (Figura 1).

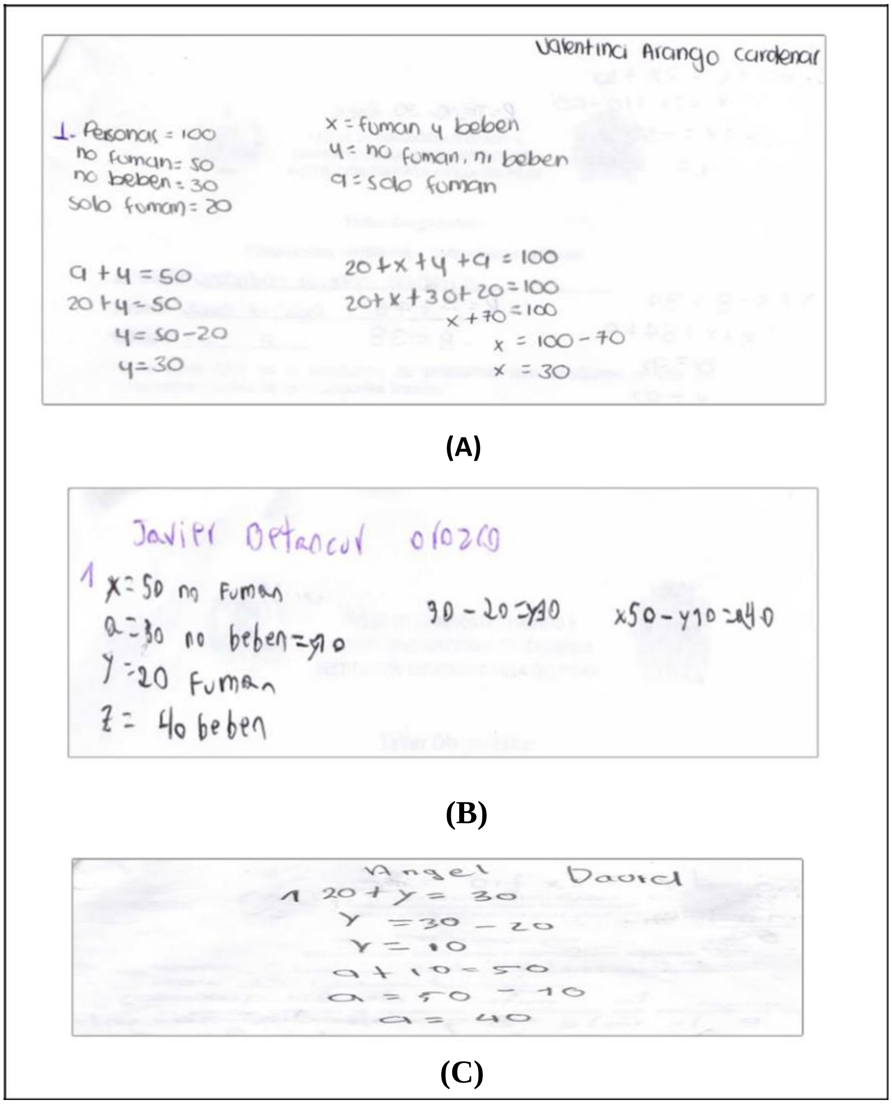


Figura 1. Respuesta dada por los estudiantes a la pregunta 1 del taller diagnóstico

Pregunta 2.

Categoría: Comparación

Las observaciones a esta categoría fueron:

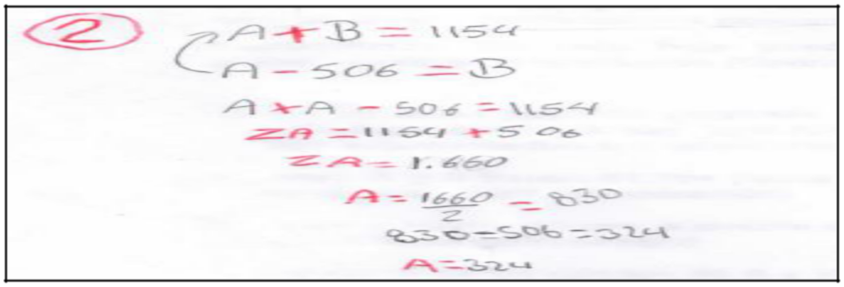
A. Con respecto a este problema se observó que 8 estudiantes lo resolvieron de manera acertada, pudiendo establecer la operación correcta.

B. Cinco estudiantes compararon la cantidad de dinero para encontrar o determinar la cantidad que se desconoce, empleando de manera efectiva una fórmula expresada por sí mismo desde la lógica, pero equivocándose en su resultado.

C. Cinco estudiantes compararon las variables para diferenciarlas entre sí, pero al momento de realizar la operación omitieron procesos importantes y, en consecuencia, obtuvieron un resultado erróneo.

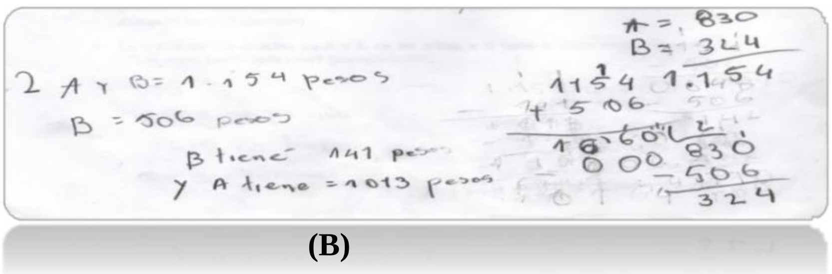
D. Dos estudiantes no pudieron interpretar el ejercicio y por consiguiente no dieron una solución.

Por consiguiente, las estrategias de solución utilizadas por todos los estudiantes son tradicionales (operación y respuesta). (Figura 2).



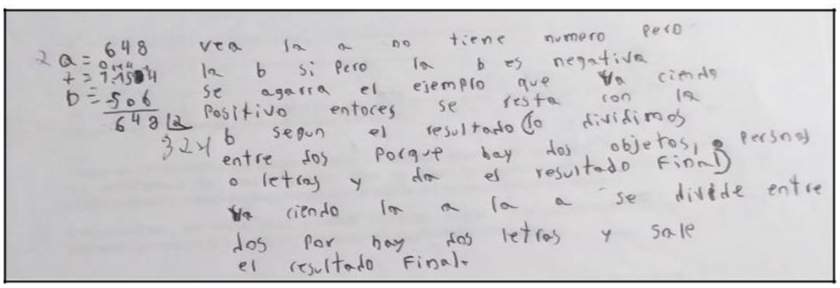
2
A + B = 1154
A − 506 = B
A + A − 506 = 1154
2A = 1154 + 506
2A = 1.660
A = 1660/2 = 830
830 − 506 = 324
A = 324

(A)



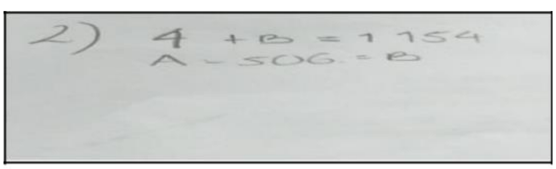
A = 830
B = 344
2 A y B = 1.154 pesos
B = 506 pesos
B tiene 141 pesos
y A tiene = 1013 pesos
1154 + 506 = 1660
1.154 − 506
1660 ÷ 2 = 830
830 − 506 = 324

(B)



2 a = 648
+ = 1.154
b = −506
648 ÷ 2
324
vea la a no tiene numero pero la b si pero la b es negativa se agarra el ejemplo que ya ciendo positivo entoces se resta con la b segun el resultado (lo dividimos entre dos porque hay dos objetos, o personas o letras y da el resultado Final) ya ciendo la a la a se divide entre dos por hay dos letras y sale el resultado Final.

(C)



2) 4 + B = 1 154
A − 506 = B

(D)

Figura 2. Respuesta dada por los estudiantes a la pregunta 2 del taller diagnóstico

Pregunta 3.

Categoría: Cambio

En esta categoría se observó:

A. Que 9 estudiantes tuvieron la capacidad de emplear de forma correcta la fórmula, para posteriormente resolver el ejercicio.

B. Siete estudiantes realizaron una formula desde su interpretación de manera incorrecta, pero obtuvieron de manera acertada la respuesta.

C. Un estudiante, al momento de interpretar el ejercicio, lo hace de manera errónea pues el procedimiento y resultado son equivocados.

D. Tres estudiantes no estuvieron en la capacidad de interpretar la pregunta y, por ende, no la respondieron.

Las estrategias de solución utilizadas por todos los estudiantes son tradicionales (operación y respuesta). (Figura 3).

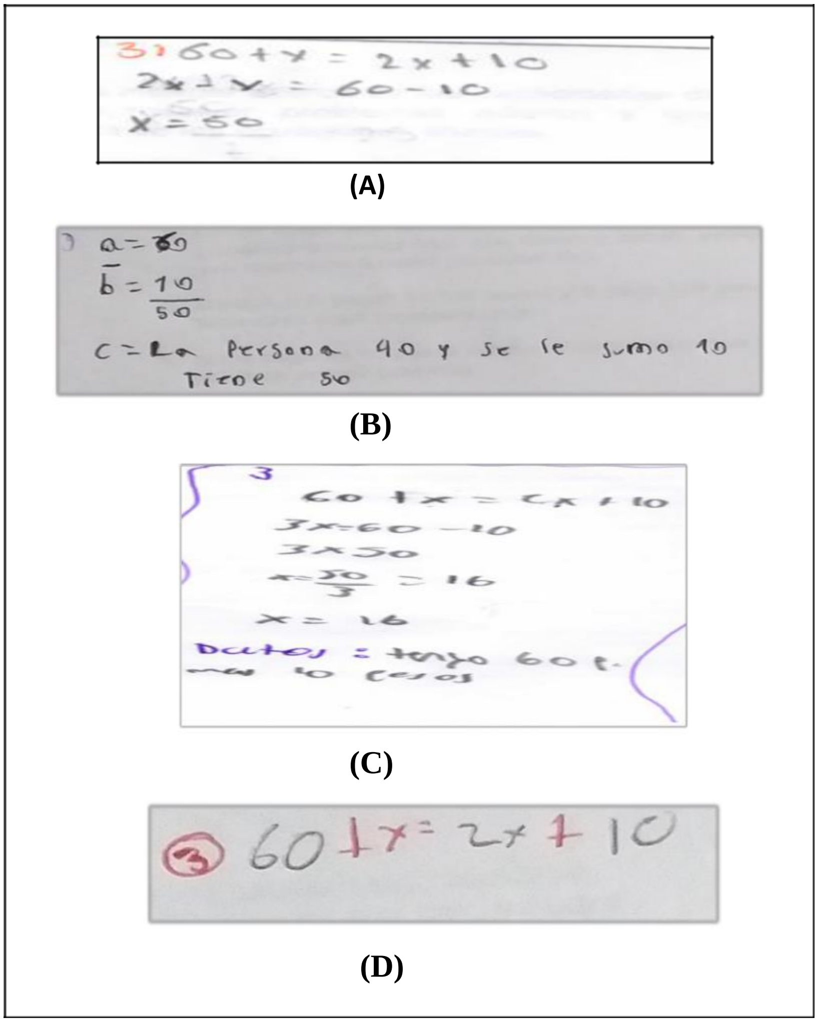


Figura 3. Respuesta dada por los estudiantes a la pregunta 3 del taller diagnóstico

Pregunta 4.

Categoría. Comparación

En esta categoría se observó:

A. Que tres estudiantes pudieron darle respuesta a ambas preguntas y realizaron el ejercicio de forma adecuada.

B. Siete estudiantes estuvieron en la capacidad de establecer la fórmula correcta para realizar el ejercicio, pero no despejaron correctamente la pregunta B.

C. Siete estudiantes interpretaron de manera errónea el ejercicio y no realizaron de forma correcta los ejercicios propuestos.

D. Tres estudiantes solo dejaron expresadas las ecuaciones para realizar el ejercicio, pero no lo realizaron.

Las estrategias de solución utilizadas por todos los estudiantes son tradicionales (operación y respuesta). (Figura 4).

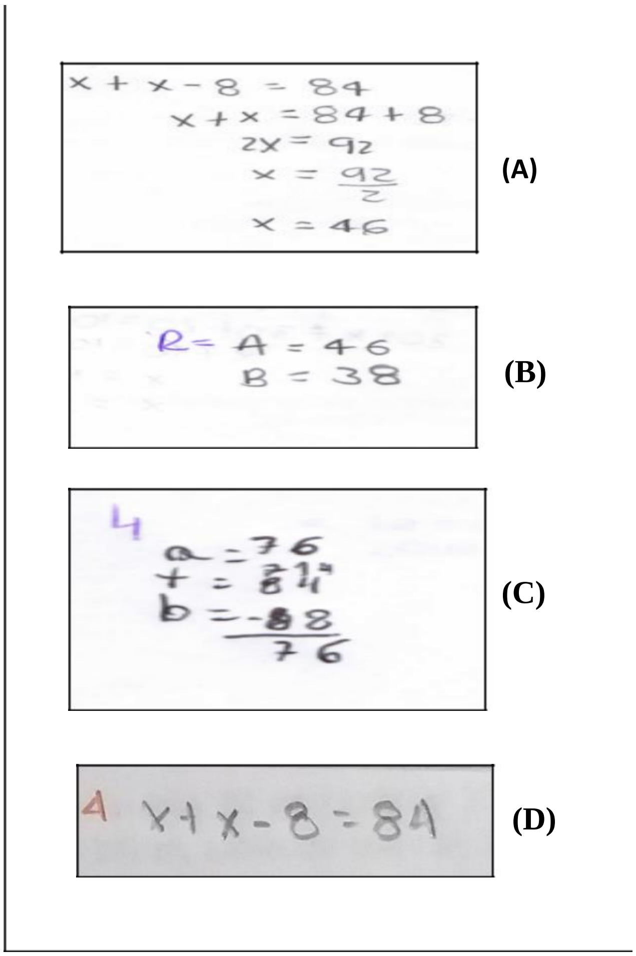


Figura 4. Respuesta dada por los estudiantes a la pregunta 4 del taller diagnóstico

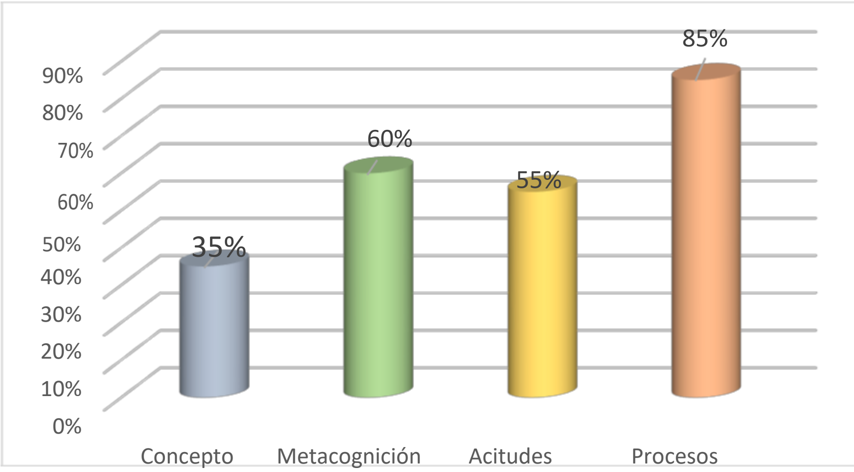


Figura 5. Resultado taller de afianzamiento 1

El taller de afianzamiento 1 se llevó a cabo en un trabajo expositivo y participativo entre el docente y los estudiantes, se realizó en interacción grupal, de modo que todos los estudiantes participaron dando respuestas y solucionando los ejercicios en el tablero. Se explicó con la mayor claridad posible a los estudiantes los tipos de problemas según el enunciado.

Como se observa en la figura 5, los estudiantes tuvieron un aumento significativo en sus resultados, en especial en las categorías de metacognición y procesos lo cual repercute de forma positiva en el desempeño de los problemas matemáticos.

Después de analizar los resultados del diagnóstico, se acordó con los estudiantes una estrategia de solución basada en cinco pasos:

– Identificación de los datos del problema.
– Identificación de la operación que se debe realizar para solucionar el problema.
– Identificación, comprensión y superación de dificultades, en torno a la solución de problemas aditivos

- Análisis de creencias, intereses, confianza y perseverancia en la resolución de problemas matemáticos.
- Identificación de regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras).

Esta estrategia fue un gran aporte a cada una de las categorías a analizar, debido a que el proceso de enseñanza y aprendizaje se dio de forma gradual pasando primero por lo concreto, donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de observar, manipular y comparar barras las cuales variaban su tamaño, y de acuerdo con este valor y por medio de esta ejercitación mejoraron la comprensión de los conceptos trabajados. Luego incorporaron dibujos (pictórico), para sus representaciones graficas de los números o expresiones matemáticas; por último llegaron a lo abstracto donde se da la representación simbólica donde se evidencia la interiorización de los procesos matemáticos para la resolución de problemas, ya que fue un resultado obtenido durante el proceso.

Conceptos

En este punto los estudiantes empiezan a evidenciar avances en el manejo del valor posicional de un número con respecto a otro, identificando datos para seleccionar la operación que se debe realizar para solucionar el problema. También se empieza a observar que aun presentan varias dificultades entre ellos para la resolución correcta del taller.

Todo lo anterior se hace con la continua corrección y retroalimentación del docente y estudiantes, ya que fueron varios los conceptos y recursos inadecuados, detectados en el taller diagnóstico. (Figura 6).

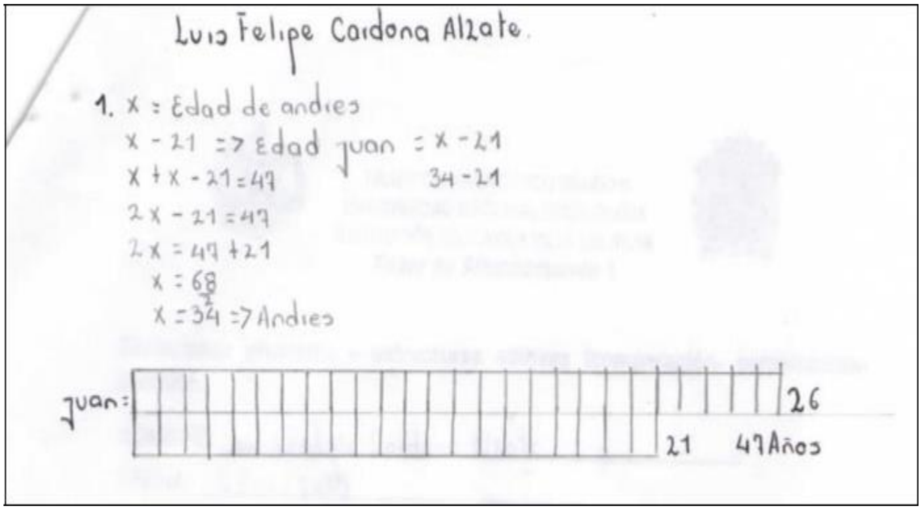


Figura 6. Respuesta dada por los estudiantes a la pregunta 1 del taller de afianzamiento 1

Metacognición

Se percibió que el 25 % de los estudiantes tuvo algunas dificultades:

- Los estudiantes incursionan en un proceso de reflexión y reacomodación de sus respuestas de forma que sean apropiadas a la pregunta, según los requerimientos del problema.
- Los estudiantes entre sí se realizan las correcciones, proponen diversas soluciones correctas e incorrectas.
- Los estudiantes identifican fácilmente en qué aspectos tienen dificultades, en torno a la solución de problemas aditivos.
- Los problemas contextualizados beneficiaron el proceso de solución realizado por los estudiantes, ya que fácilmente de un problema propuesto pueden realizar una lectura de su entorno, e incluso proponer otros problemas.
- Realizan retrospección proponiendo, de manera verbal, otros tipos de preguntas.
- Los estudiantes verifican y compara la respuesta con sus compañeros. (Figura 7).

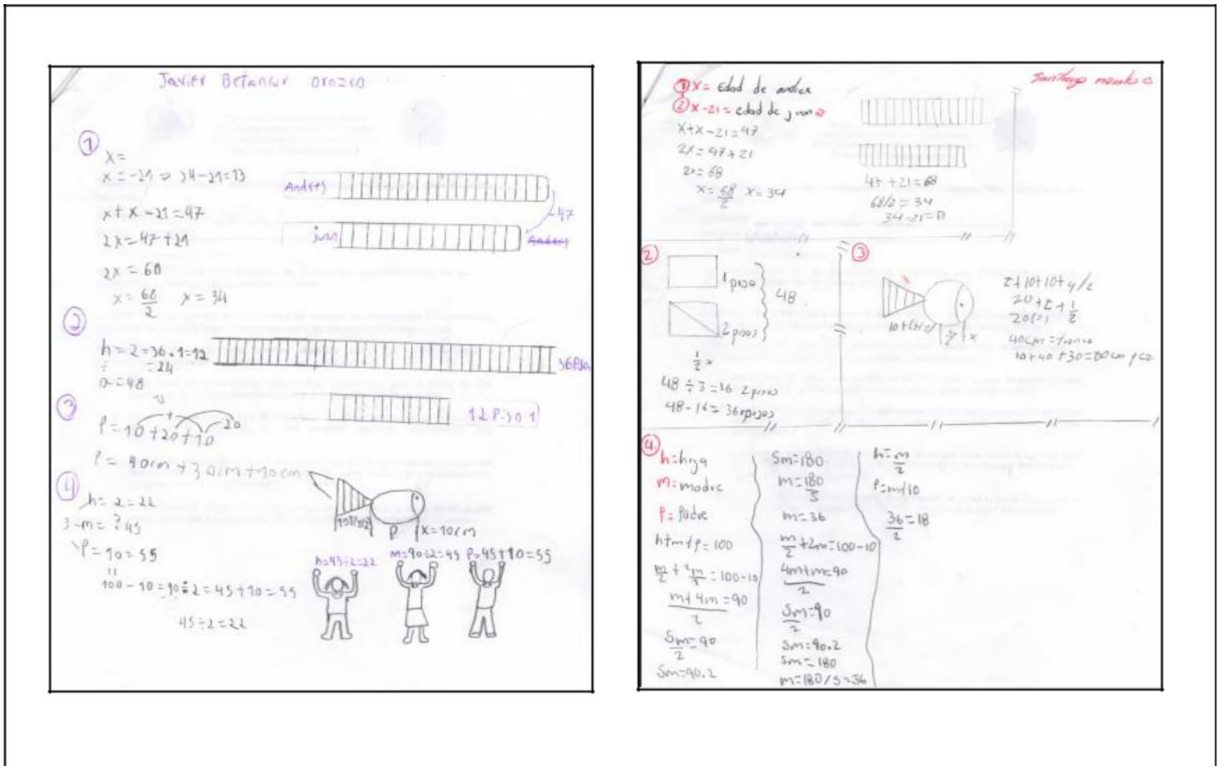


Figura 7. Respuesta dada por los estudiantes al taller de afianzamiento 1

Actitudes

El 45 % de los estudiantes presentó una buena actitud frente a la estrategia de enseñanza que se utilizó, correspondiente a la solución de problemas.

- Al momento de hacer entrega del taller de afianzamiento #1, los estudiantes comprenden que la metodología de solución ya no será individual, sino que los problemas serán solucionados de forma colaborativa, lo cual para ellos es de gran aceptación, presentando una buena actitud frente a la estrategia de enseñanza que se utilizó, correspondiente a la solución de problemas.

- La mayoría de los estudiantes mostró mejor comprensión de los problemas y confianza para participar y realizar aportes. Otros, una minoría, continúan evidenciando dificultad para participar y dar sus propios aportes, negación ante nuevas estrategias de solución de problemas.
- A medida que se fue avanzando en el taller la participación aumentó, los estudiantes fácilmente iniciaron la identificación y aplicación de la estrategia de solución y la clasificación de las palabras clave, como un recurso para solucionar los problemas de manera eficaz. Los estudiantes continuaron en la búsqueda de respuestas correctas, frente a una situación matemática específica. (Figura 8)

Figura 8. Respuesta dada por los estudiantes del taller de afianzamiento 1

Procesos

Solo el 18 % de los estudiantes, demostraron habilidades como:

- Continuar en el proceso de comprensión para realizar la asociación de cantidad con diversas representaciones.
- En la socialización de respuestas, algunos estudiantes realizaron cálculo mental sin necesidad de aplicar la estrategia de solución. Otros estudiantes requirieron un poco más de tiempo para solucionar la operación.

– La mayoría de los estudiantes pudo proponer diversas estrategias de solución; pictóricamente lograron consignar los datos del problema.

– En algunas ocasiones lograron identificar a qué corresponde cada dato del problema. Algunos estudiantes manifestaron mayor habilidad para comprender el problema y otros para realizar operaciones.

– A los estudiantes se les facilita razonar el problema cuando contiene situaciones contextualizadas. Algunos razonan los problemas planteados con agilidad, mientras que otros requieren de más tiempo.

– Los estudiantes identificaron regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras). (Figura 9).

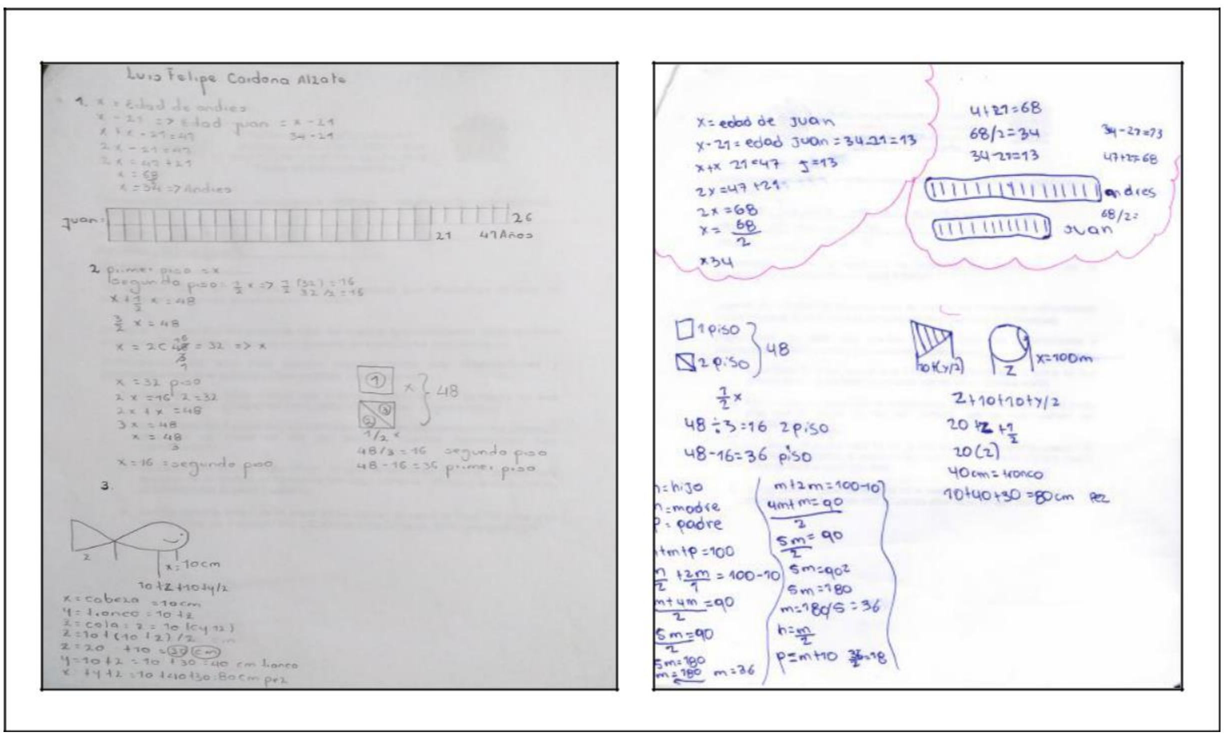


Figura 9. Respuesta dada por los estudiantes del taller de afianzamiento 1

Resultado del taller de afianzamiento 2

Este taller fue el tercer acercamiento de los estudiantes a los problemas aritméticos. El procedimiento utilizado para llevar a cabo el taller se basó en el análisis de tipo global o semántico propuesto por Nesher (1982), específicamente de las categorías de comparación, combinación y cambio.

La teoría fue explicada a los estudiantes de manera sencilla. Se reafirmó la misma metodología del trabajo anterior, aplicando la estrategia de solución de problemas; igualmente se realizó de manera participativa y colaborativa. Se propuso a los estudiantes que pudieran:

- Identificar los datos de un problema.
- Identificar la operación correcta que se debe realizar para solucionar el problema.
- Identificar, comprender y superar sus dificultades, en torno a la solución de problemas aditivos.
- Analizar las creencias, intereses, confianza y perseverancia en la resolución de problemas matemáticos.
- Identificar regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras).

Conceptos

Los estudiantes muestran buenos avances en:

- La comprensión, identificación y extracción de los datos de un problema.
- Identificación y resolución con mayor propiedad del tipo de operación que deben usar para solucionar el problema.

– Reconocimiento de los símbolos matemáticos.

– Mayor capacidad en la utilización del cálculo mental y de la estimación para resolver los problemas (Figura 10).

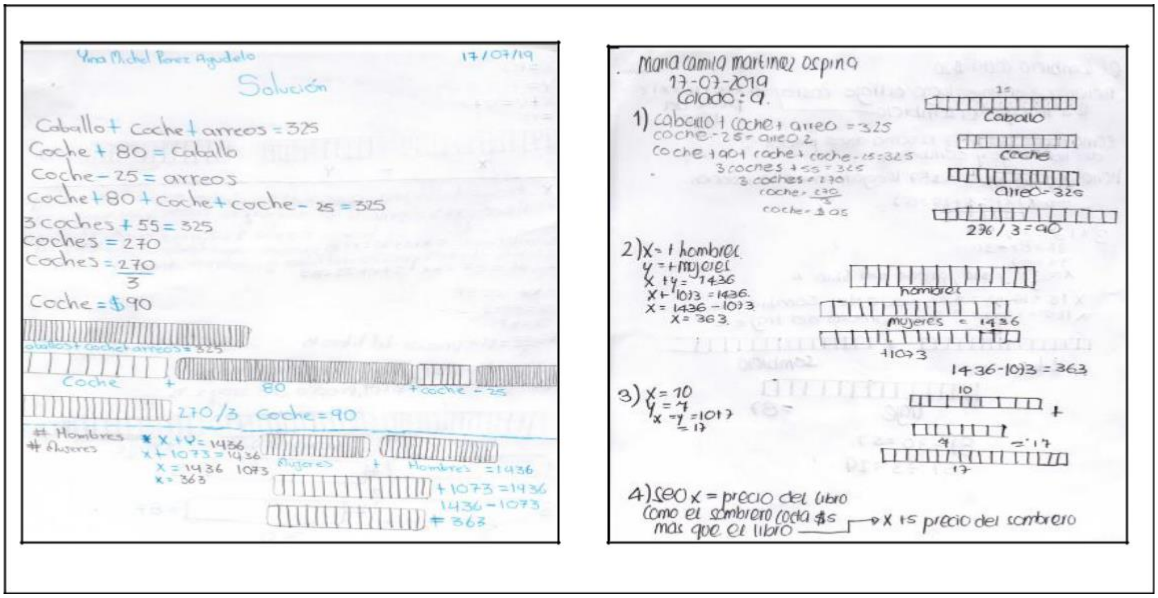


Figura 10. Respuesta dada por los estudiantes taller de afianzamiento 2

Metacognición

– Los estudiantes realizaron entre todos las correcciones, proponiendo y estableciendo entre ellos diversas soluciones (correctas e incorrectas) llevándolos a la comprobación. Esto pone en evidencia una mayor confianza en sus conocimientos al momento de la resolución de los problemas. En este taller, en comparación con el otro, se observó un notorio crecimiento crítico entre ellos.

– Los estudiantes empiezan a identificar y a reconocer con mayor facilidad los aspectos en que tienen mayores dificultades y a proponer planes de acción para mejorar.

– Los problemas contextualizados beneficiaron el proceso de solución realizado por los estudiantes, ya que fácilmente de un problema propuesto realizan una lectura de su entorno, e incluso proponen otros problemas.

– Realizan retrospección proponiendo de manera verbal, otros tipos de pregunta. Los estudiantes reflexionan sobre la respuesta del problema propuesto. (Figura 11).

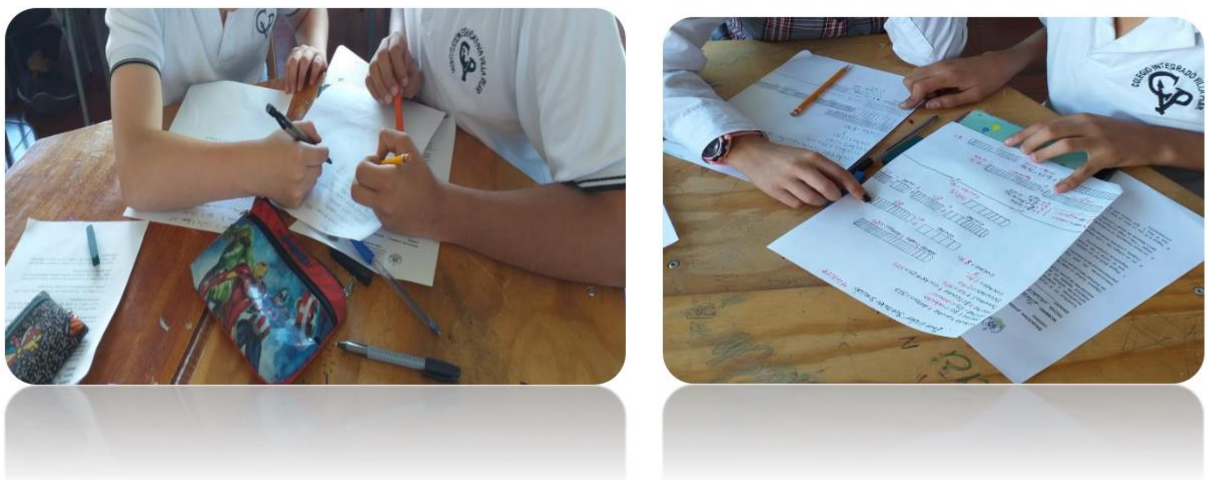


Figura 11. Respuesta dada por los estudiantes del taller de afianzamiento 2

Actitudes

– Los estudiantes fácilmente se adaptan a la estrategia de solución y a la identificación de las palabras claves.

– Algunos estudiantes expresan desánimo para solucionar los problemas debido a que los talleres se presentan de la misma manera que los anteriores.

– Los estudiantes procuraron resolver el taller lo más pronto posible, buscando quedar en el primer lugar.

– Se evidenció, en algunos estudiantes, la duda para participar saliendo al tablero, pero ya no se notó temor en ellos.

– Los estudiantes expresaron la importancia de los problemas matemáticos en la vida cotidiana y hacen una mayor comprensión de su utilidad. (Figura 12)

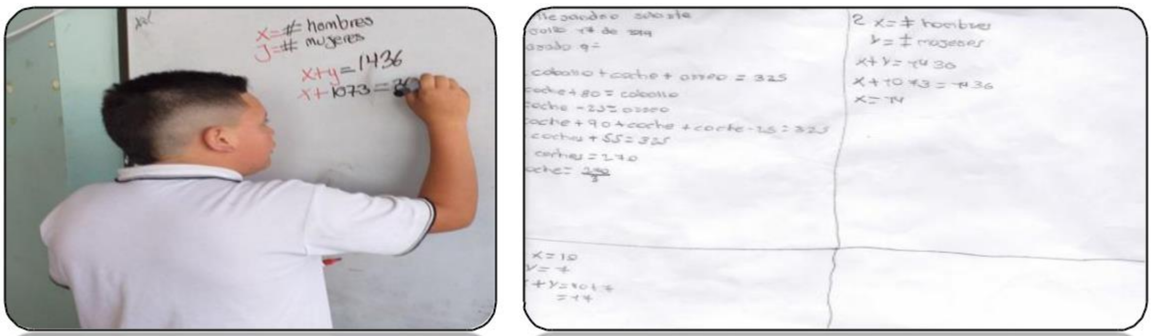


Figura 12. Respuesta dada por los estudiantes del taller de afianzamiento 2

Procesos

– Algunos estudiantes empiezan a identificar a qué corresponde la incógnita en la ecuación asociada al problema.

– Los estudiantes inician la identificación de regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras).

– Los estudiantes plantearon diversas habilidades de solución; pictóricamente logran consignar los datos del problema.

– Los estudiantes mostraron habilidades al momento de identificar las palabras clave y fácilmente llevaron a cabo la estrategia de solución para un problema dado.

– Razonaron con mayor facilidad cada uno de los problemas planteados.

– Asociaron la forma de solución de un problema anterior, con la solución requerida en un problema actual.

– Constantemente identificaron el contexto al cual se refiere el problema planteado y proponen nuevos elementos a diversas representaciones o lenguajes (verbal, simbólico, numérico). (Figura 13).

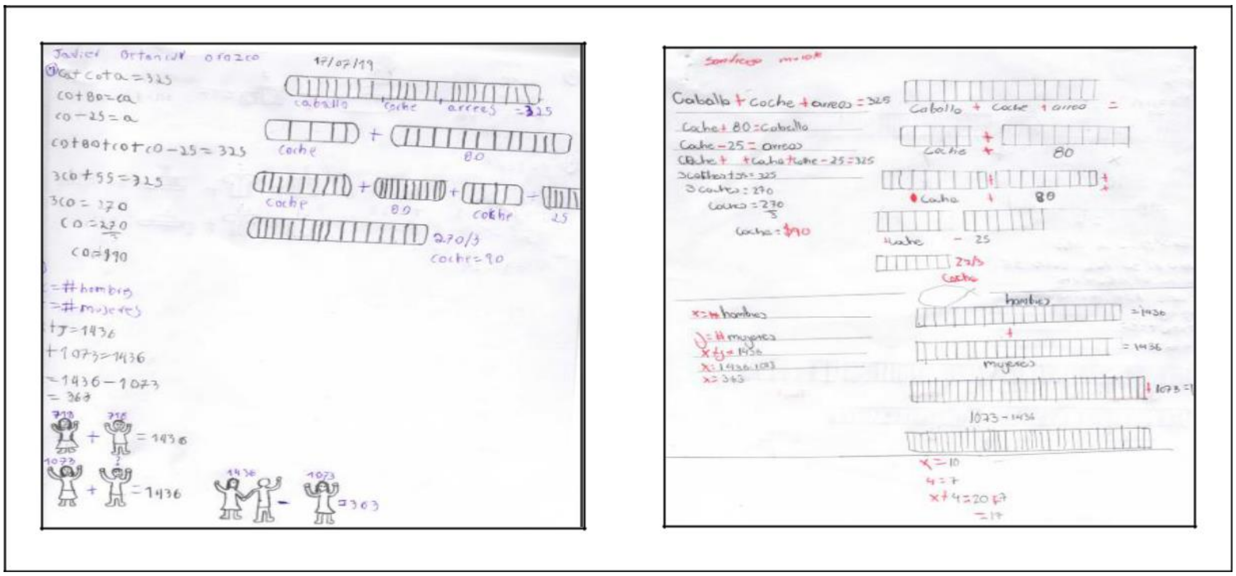


Figura 13. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de afianzamiento 2

Resultados del taller de afianzamiento 3

Este taller fue el cuarto acercamiento de los estudiantes a los problemas aritméticos. El procedimiento utilizado para llevar a cabo el taller se basó en el análisis de tipo global o semántico propuesto por Nesher (1982). Específicamente de las categorías de comparación, combinación y cambio.

La teoría fue explicada a los estudiantes de manera sencilla. Se reafirmó la misma metodología de trabajo anterior, aplicando la estrategia de solución de problemas. Igualmente se realizó de manera participativa y colaborativa. Se propuso a los estudiantes que pudieran:

- Identificar los datos de un problema.
- Identificar la operación correcta que se debe realizar para solucionar el problema.
- Identificar, comprender y superar sus dificultades, en torno a la solución de problemas aditivos
- Analizar las creencias, intereses, confianza y perseverancia en la resolución de problemas matemáticos.
- Identificar regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras).

Conceptos

A medida que se avanza en los talleres de afianzamiento los estudiantes corrigen los conceptos y recursos defectuosos, seleccionando y solucionando correctamente las operaciones.

Se evidencia en los estudiantes:

- Comprensión de los conceptos de comparación e igualación, para realizar la operación correctamente.
- Identificación y extracción de los datos de un problema.

– Identificación y resolución con mayor propiedad del tipo de operación que deben usar para solucionar el problema.

– Reconocimiento de los símbolos matemáticos.

– Mayor capacidad en la utilización del cálculo mental y de la estimación para resolver los problemas (Figura 14).

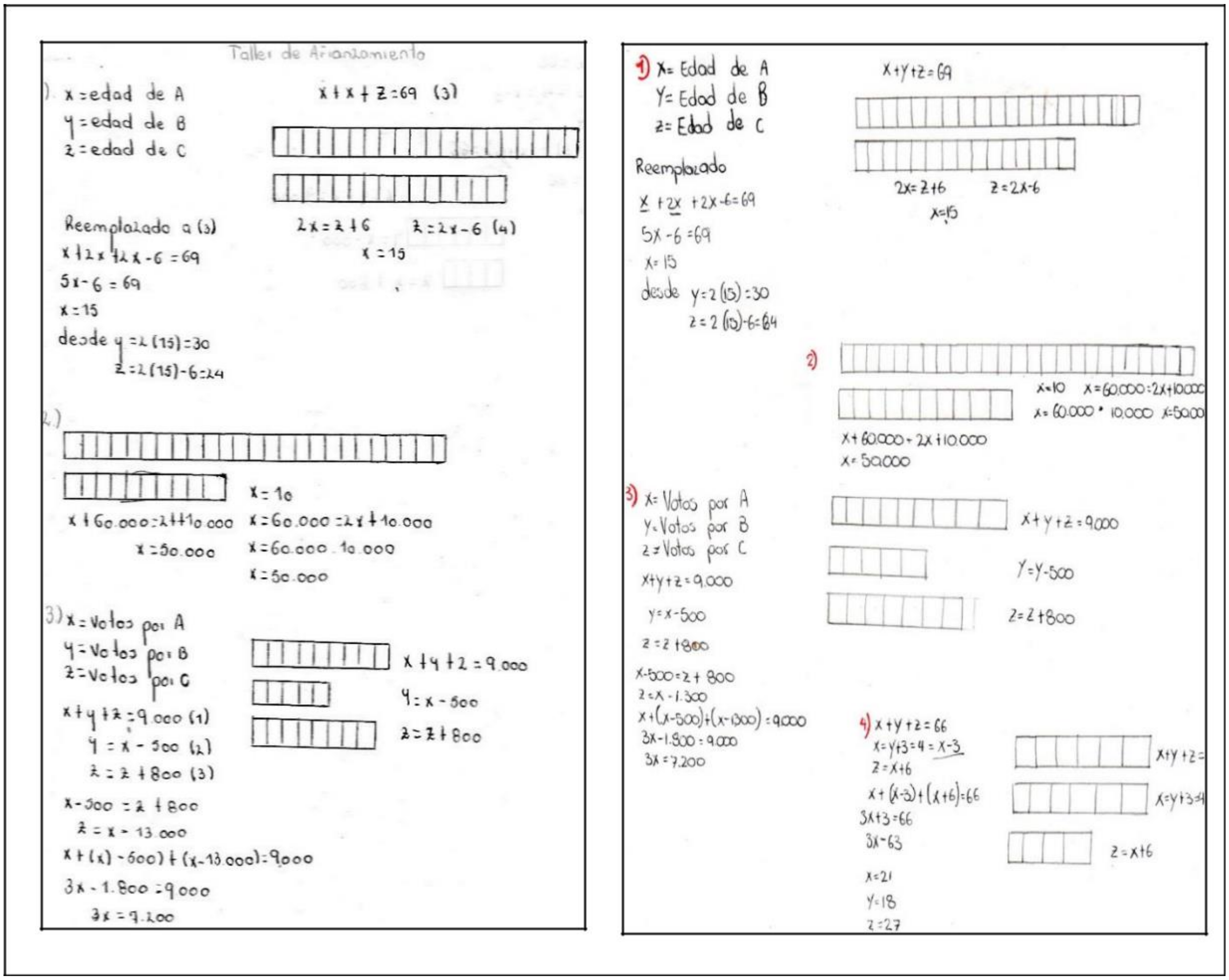


Figura 14. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de afianzamiento 3

Metacognición

- Los estudiantes cada vez registran de manera más ordenada los datos del problema a solucionar.
- Cada vez trabajan de manera más rápida y autónoma, superando poco a poco las dificultades en torno a la solución de problemas aditivos. De esta manera los estudiantes analizan el enunciado y la pregunta de manera más consciente y reflexionando sobre la respuesta del problema propuesto.
- Los estudiantes se hacen conscientes de la necesidad de verificar las respuestas, apoyándose en el criterio del docente y otros compañeros. (Figura 15).

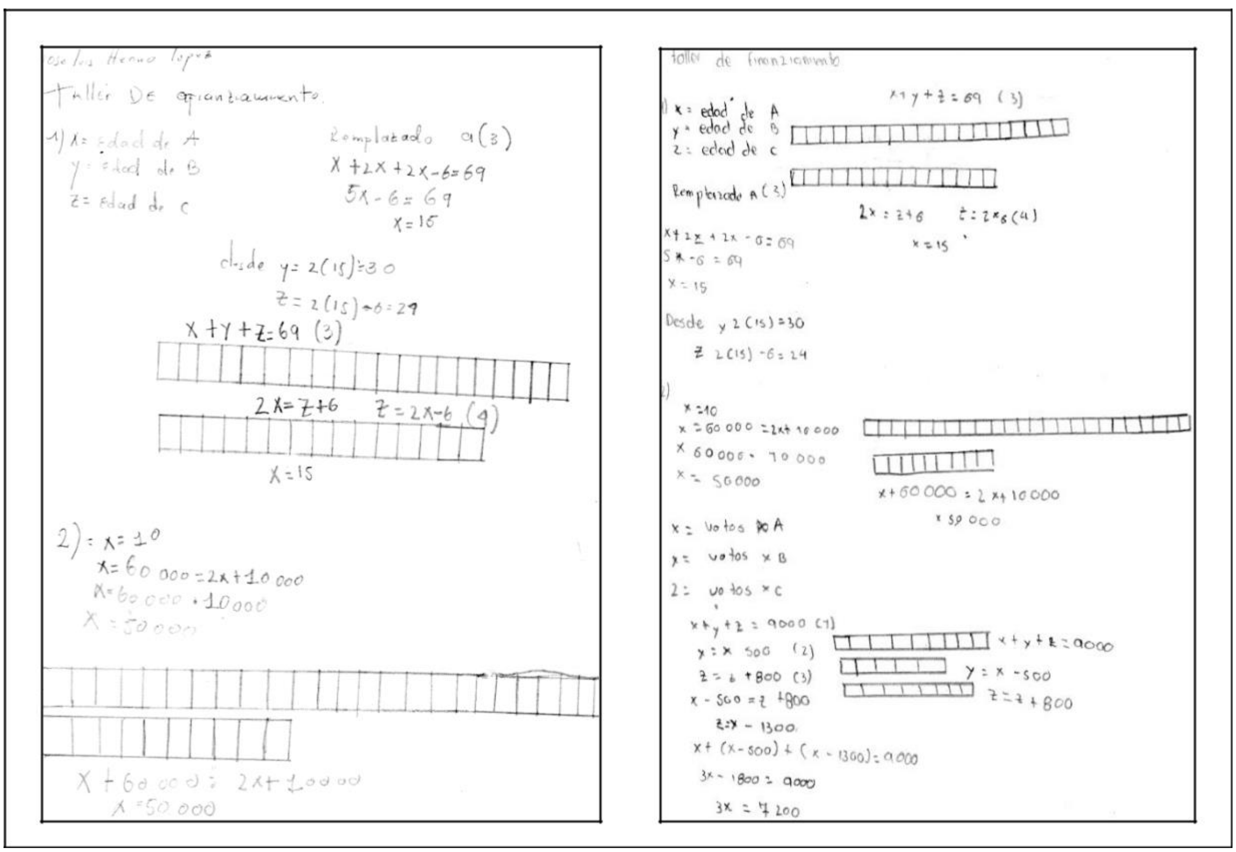


Figura 15. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de afianzamiento 3

Actitudes

- A medida que se avanza en los talleres, los estudiantes muestran que la dificultad para solucionar de forma correcta los problemas disminuye.
- Los estudiantes se muestran un poco frustrados cuando presentan errores, pero han aumentado su confianza e interés, así mismo la perseverancia para lograr una solución correcta.
- Ante los diferentes tipos de problemas y diversas representaciones, los estudiantes tuvieron una buena empatía en la resolución de problemas matemáticos; están abiertos a variadas estrategias de solución.
- Trabajan colaborativamente desarrollando el gusto por la materia. (Figura 16)

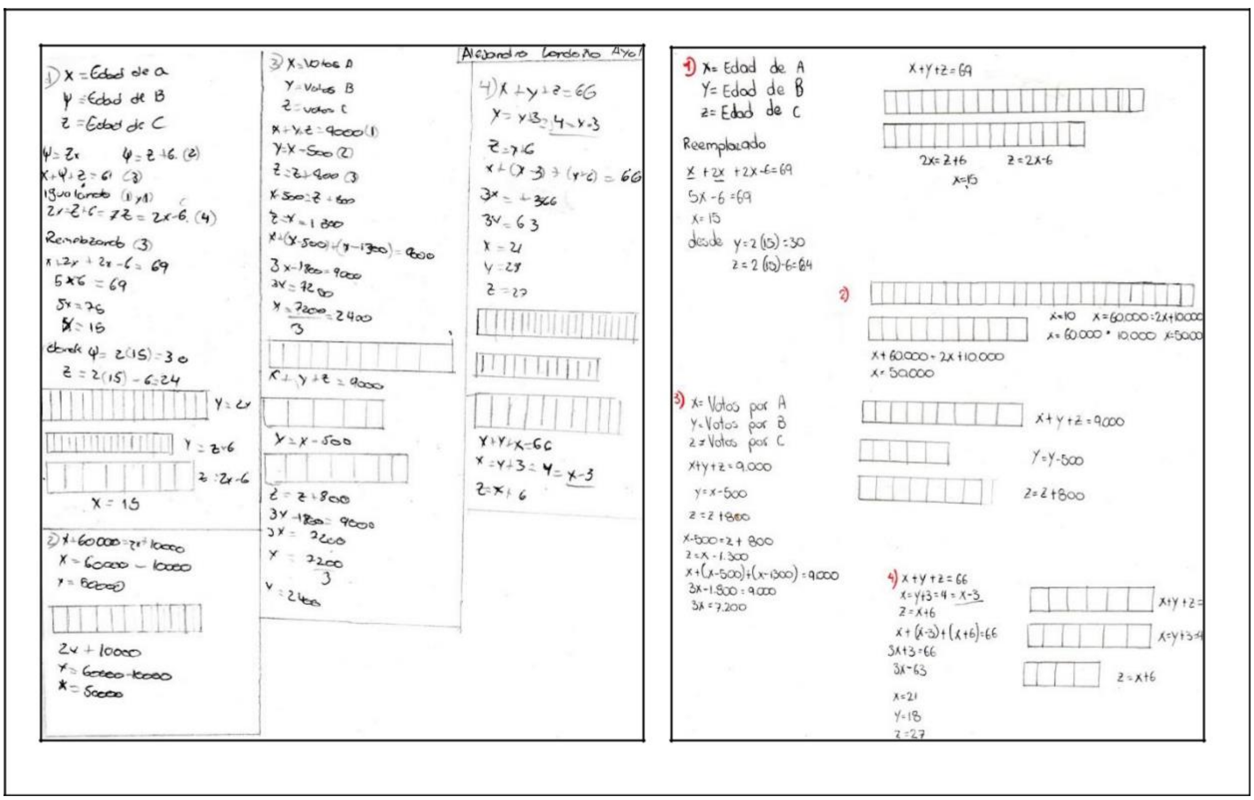


Figura 16. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de afianzamiento 3

Procesos

- Los estudiantes encuentran la incógnita en la ecuación asociada al problema.

- Los estudiantes desarrollan y proponen diversos tipos de heurísticas, basados principalmente en representaciones pictóricas. En ellas logran representar de manera concreta los datos del problema.

- Los estudiantes identifican regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (barras).

- A los estudiantes se les facilita convertir el problema matemático a diversas representaciones o lenguajes (verbal, simbólico, numérico).

- Los estudiantes realizan el razonamiento correcto para definir el tipo de problema al que pertenece el enunciado, sea comparación o igualación, identificando la posición en la que se encuentra la incógnita asociada al problema. (Figura 17)

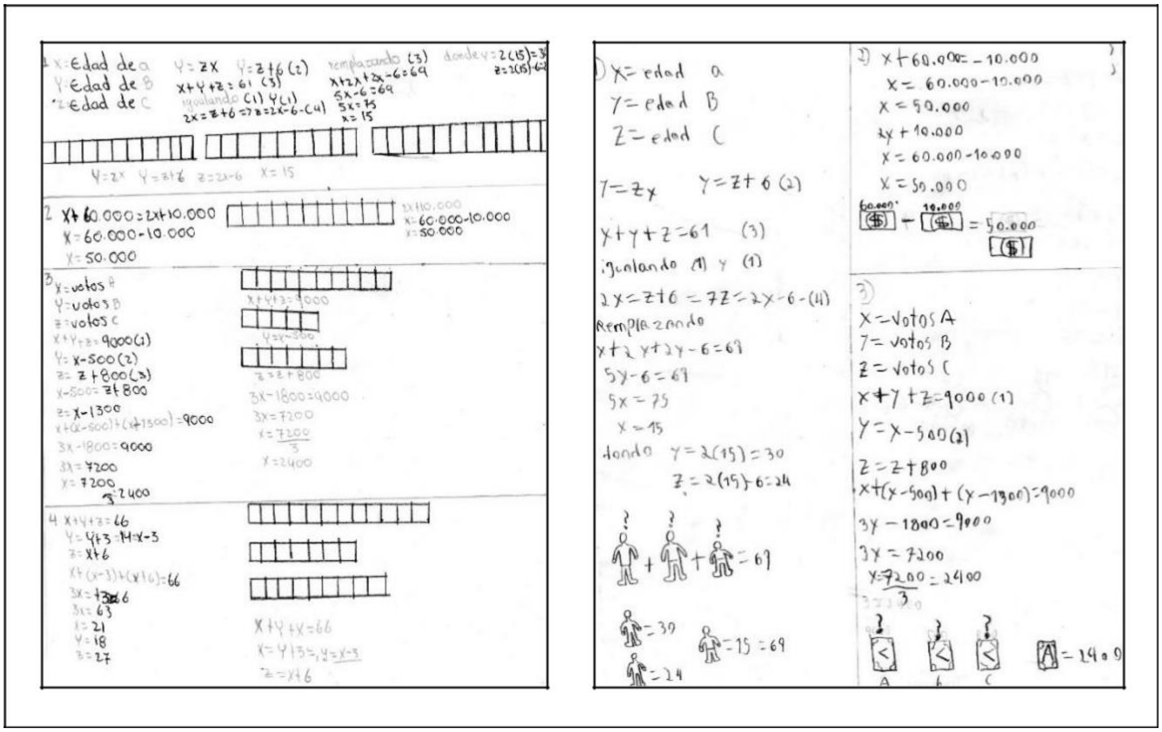


Figura 17. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de afianzamiento 3

Resultados del taller de profundización

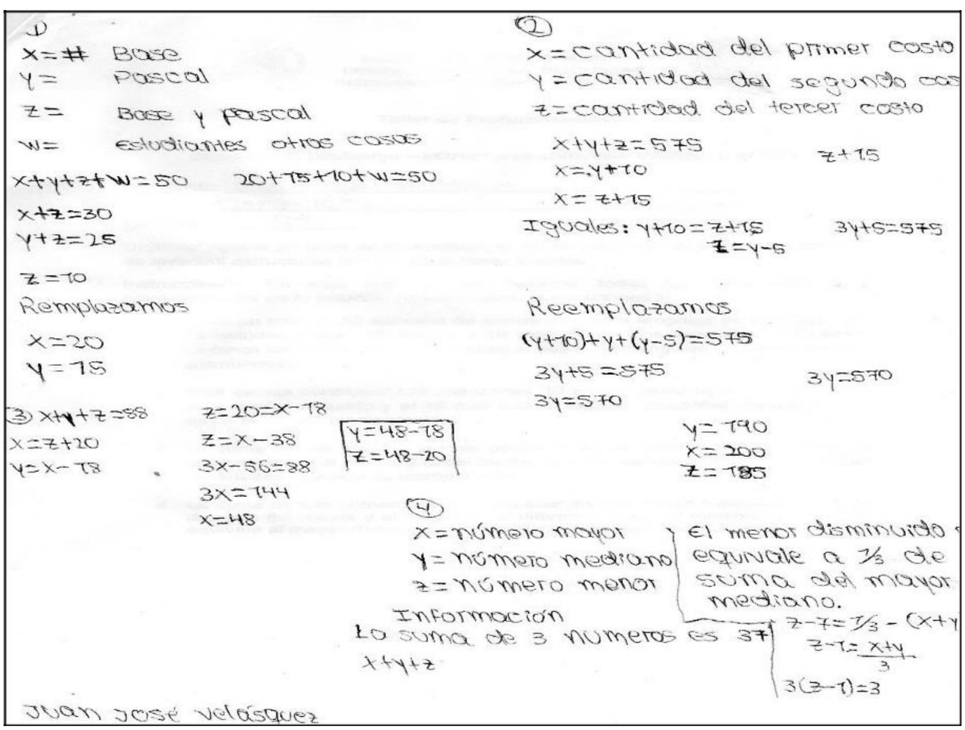
El taller de profundización se aplicó con la finalidad de identificar el dominio que los estudiantes adquirieron en la solución de los problemas matemáticos, planteados en cada uno de los talleres de afianzamiento.

En el taller se utilizaron problemas matemáticos verbales de estructuras aditivas que requerían de análisis de palabras involucradas y análisis de tipo global o semántico, pero esta vez unidos a problemas divididos en varias etapas de complejidad. Se realizó una orientación general y se permitió a los estudiantes solucionar el taller.

Conceptos

En general se observa que las diversas dificultades en los estudiantes se han ido superando:

- Ya leen con mayor atención los problemas y no confunden fácilmente los datos del problema logrando expresar a qué corresponde cada dato.
- Se han reducido los errores en el desarrollo de las operaciones aditivas.,
- Ya no confunden símbolos y recuerdan escribirlos.
- Ubican correctamente los términos para realizar las operaciones.
- Ya tienen en cuenta la pregunta para la formulación de la respuesta.
- Utilizan diversas estrategias de cálculo para la solución, incluso el cálculo mental. (Figura 18).



1
x = # Base
y = Pascal
z = Base y Pascal
w = estudiantes otros cosas
x+y+z+w=50 20+15+10+w=50
x+z=30
y+z=25
z=10
Remplazamos
x=20
y=15

2
x = cantidad del primer costo
y = cantidad del segundo cos
z = cantidad del tercer costo
x+y+z=575
x=y+10
x=z+15
z+15
Iguales: y+10=z+15
z=y-5
3y+5=575
Reemplazamos
(y+10)+y+(y-5)=575
3y+5=575
3y=570
3y=570
y=190
x=200
z=185

3 x+y+z=88
x=z+20
y=x-18
z=20=x-18
z=x-38
3x-56=88
3x=144
x=48
y=48-18
z=48-20

4
x = número mayor
y = número mediano
z = número menor
El menor disminuido equivale a 1/3 de suma del mayor mediano.
Información
La suma de 3 números es 37
x+y+z
z-7=1/3-(x+y
z-1=(x+y)/3
3(z-1)=3

Juan José Velásquez

Figura 18. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de profundización

Metacognición

- Los estudiantes son conscientes cuando están realizando la solución de manera incorrecta, ya que aprendieron a identificar, comprender y superar sus dificultades, en torno a la solución de problemas aditivos.
- Aprendieron a autocorregirse y a argumentar los motivos.
- Identifican los datos del problema y los resultados son razonables.
- Discuten diversas soluciones y estrategias de solución a un mismo problema.
- Reflexionan sobre las respuestas obtenidas. (Figura 19)

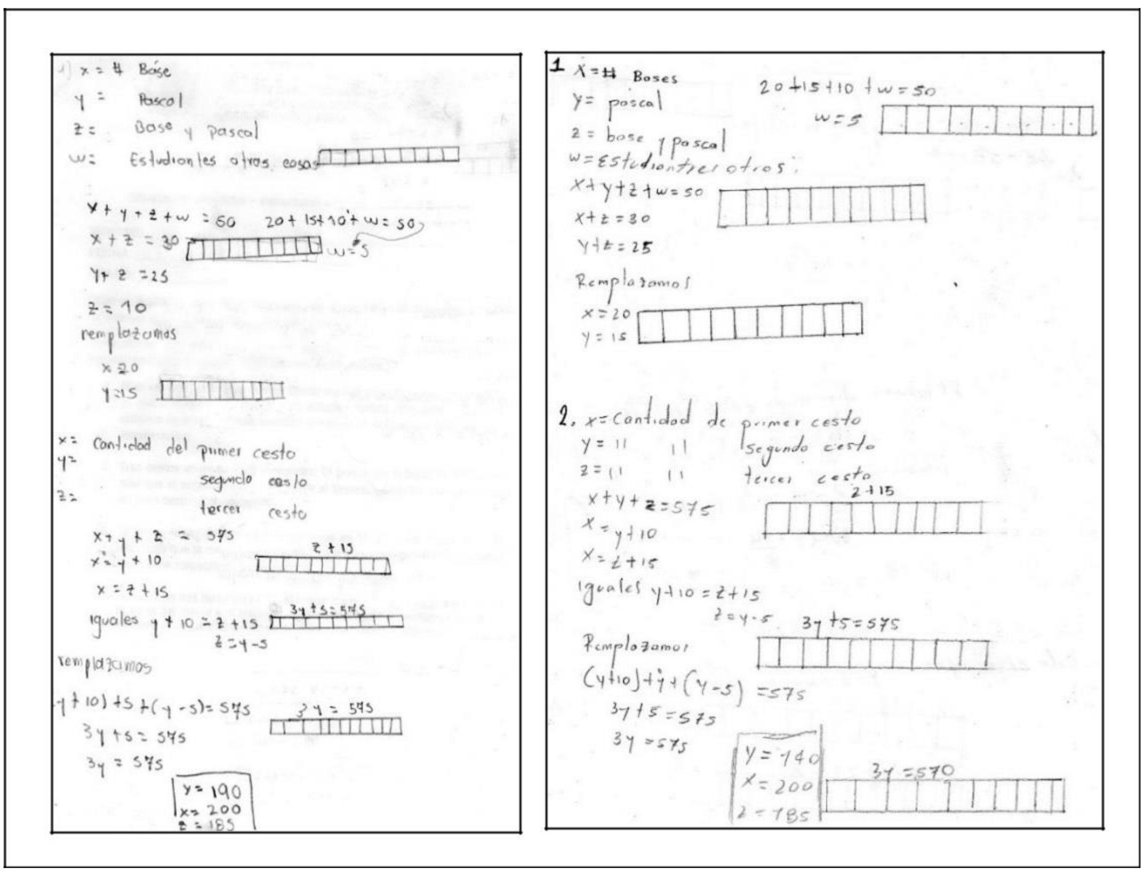


Figura 19. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de profundización

Actitudes

- Los estudiantes ya no sienten temor de participar, demuestran autoconfianza y deseo por trabajar.
- Los estudiantes ya no expresan incapacidad para solucionar los problemas, sólo en ocasiones dicen que está un poco difícil.
- Continúan apoyando su proceso en uno o varios compañeros, para tener una empatía en la resolución de problemas matemáticos
- Los estudiantes continúan motivando que los problemas matemáticos sean contextualizados, es decir encontrar situaciones cotidianas; esto les permite desarrollar el gusto por la materia haciéndola más divertida y significativa.
- La contextualización de los problemas permite a los estudiantes relacionar la matemática con la aplicabilidad a su entorno, cambiando la perspectiva de esta y hallando sentido en su aprendizaje. (Figura 20).

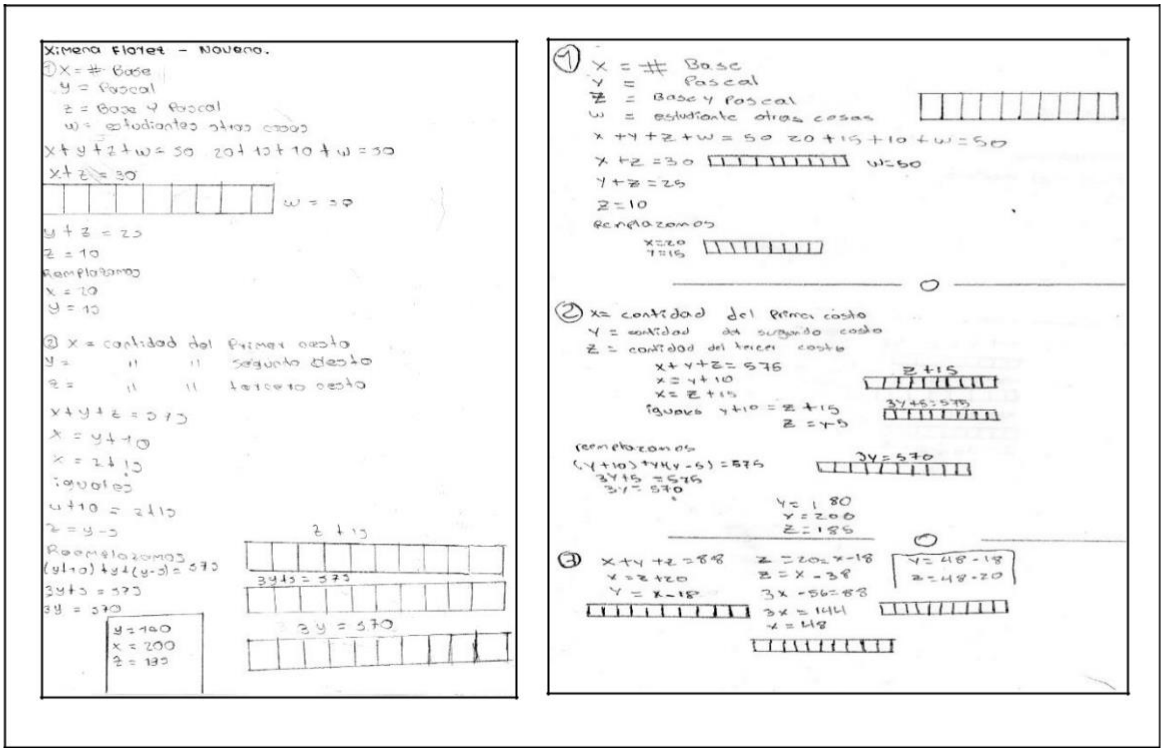


Figura 20. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de profundización

Procesos

- Con mayor facilidad identifican la posición de la incógnita en la operación asociada al problema.
- Algunos estudiantes tienen mayor familiaridad con los diferentes tipos de palabras involucradas, identificándolas en los enunciados de los problemas de tipo verbal.
- Algunos estudiantes demuestran habilidades en las operaciones básicas usándolas de forma flexible.
- Se nota cálculo numérico y estimaciones previas y acertadas al momento de realizar las operaciones.

– Comprenden claramente a qué datos corresponden los números presentados en el problema; se evidencia análisis de datos; la formulación de la respuesta muestra razonamiento.

– Se visualiza la utilización de diversas heurísticas. En mayor medida los estudiantes interpretan, proponen y resuelven problemas aditivos de composición, cambio, comparación e igualación y reconocen la existencia de diferentes tipos de solución para un problema específico.

– Convierten el problema matemático verbal a diferentes representaciones. (Figura 21)

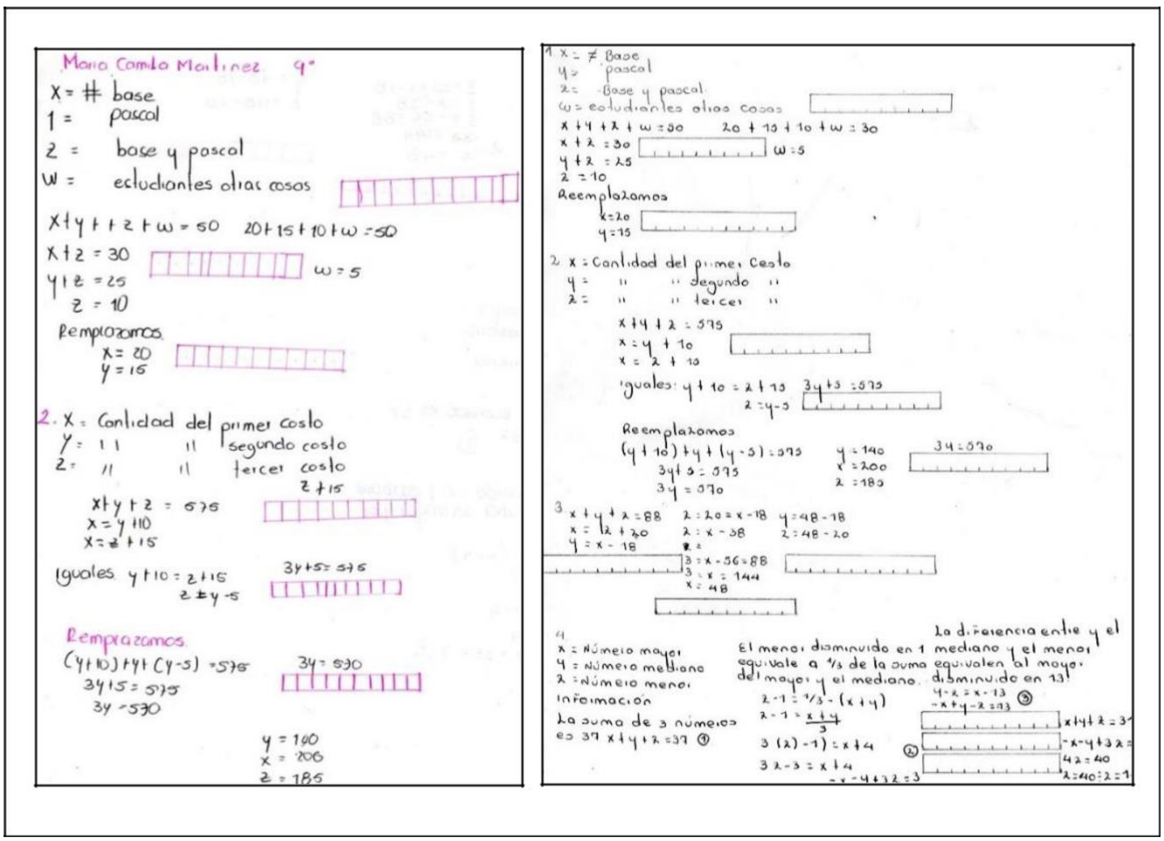


Figura 21. Respuesta dada por los estudiantes en el taller de profundización

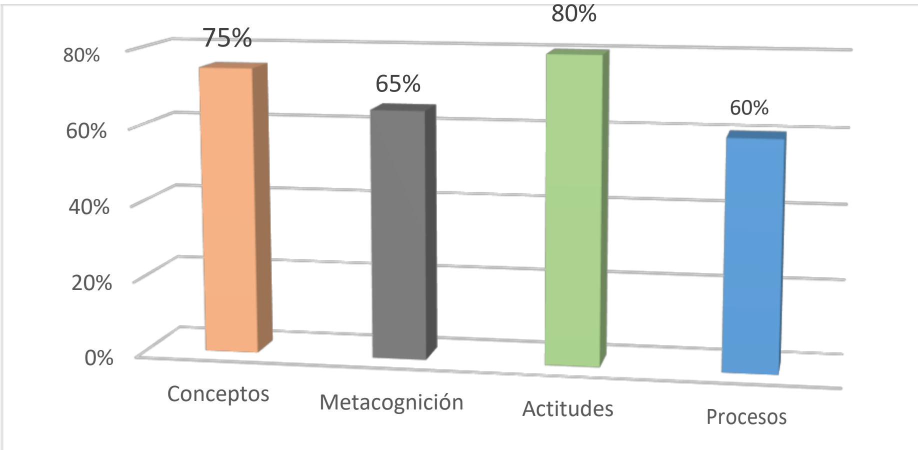


Figura 22. Resultado taller de profundización

Además del análisis de la información recolectada, se hizo una tabla para fortalecer y sustentar el análisis de los resultados de esta investigación, la cual puede ser una herramienta de visión de datos, donde se relacionan los talleres de diagnóstico y de profundización, como primer y último momento de la aplicación de las pruebas, esto con el fin de evidenciar el avance en la resolución de problemas de las estructuras aditivas y también como apoyo para la orientación del lector.

Tabla 5.

Tabla comparativa de resultados

	Diagnóstico				Profundización			
	(Avance) Positivo		(Dificultad) Negativo		Positivo		Negativo	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Concepto	13	65	7	35	15	75	5	25
Metacognición	8	40	12	60	13	65	7	35
Actitud	9	45	11	55	16	80	4	20
Procesos	3	15	17	85	12	60	6	40

Para hacer la tabla entre el diagnóstico y la profundización se hizo la lectura de cada una de estas variables. Hay que tener en cuenta que entre la primera categoría de diagnóstico y la categoría de profundización, existen tres momentos de crecimiento y afianzamiento que no se tuvieron en cuenta para este análisis.

En la categoría de diagnóstico se tienen diferencias significativas entre los positivos y negativos. Solo existe un caso en que la variable positiva sobrepasa satisfactoriamente la negativa y es la variable de concepto, mientras que en los otros tres momentos predomina el negativo.

En el caso de la profundización es notable el aumento frente a la resolución de problemas de manera satisfactoria, presentando todos los estudiantes mejores porcentajes frente a la prueba diagnóstico. En este mismo sentido, la resolución de conflictos en la primera categoría fue insatisfactoria, presentando múltiples errores cognitivos y de interpretación, frente a la segunda categoría que sí logra llegar a un notable avance, donde la resolución de problemas razonable fue la clave.

Es notable que los estudiantes lograran tener una óptima solución frente a los conflictos de forma idónea, a la vez que fortalecen e implementan el enfoque CPA en la resolución de problemas. Este asunto expone la íntima relación entre el fortalecimiento del enfoque CPA y la resolución de conflictos de manera idónea.

Conclusiones

Luego del proceso del trabajo que se realizó con los estudiantes, se pudieron construir una serie de conclusiones de carácter reflexivo como:

- La comprensión de las estructuras aditivas en la metodología CPA son dinamizadores de la identificación de problemas que poseen los estudiantes de la institución educativa Villa del Pilar en el área de matemáticas.

- El Fortalecimiento del diseño y la aplicación de los talleres de afianzamiento con problemas aditivos, logran la estimulación en la comprensión y el uso de diversas estrategias de solución, ya que los estudiantes durante el proceso se mostraron receptivos, atentos y alegres, por lo cual se evidenció un avance. Lograron identificar los diversos tipos de problemas en caracterización y diferenciación.

- La estrategia utilizada facilitó a los estudiantes la interpretación, formulación y resolución de los problemas aditivos que se plantearon en los talleres trabajados.

- La contextualización de problemas permite que los estudiantes relacionen las matemáticas con situaciones de la vida cotidiana, creando un cambio de perspectiva frente a las mismas y evidenciando un aprendizaje significativo.

- Al finalizar el trabajo se evidenció el fortalecimiento en los procesos de pensamiento numérico que se obtuvieron con las actividades de aprendizaje ejecutadas entre los estudiantes.

    - El diseño y aplicación de los talleres desde la metodología CPA permitió que los estudiantes se enfocaron en solucionar conceptos y recursos inadecuados, mejorando las categorías de metacognición, actitud, habilidad y proceso, controlando su aprendizaje matemático, replanteando actitudes y sistemas de creencias y aumentando así las heurísticas, los procesos y las habilidades matemáticas.
    - El diseño de actividades orientadas al fortalecimiento de la solución de problemas aditivos, facilita el propósito en los estudiantes de aprender a superar sus dificultades en la resolución de problemas.

Recomendaciones

- Partiendo de que el aula de clases es reconocido como un espacio potencializador para la formación de nuestros estudiantes, se sugiere a la comunidad docente la continua formulación y reestructuración de las prácticas educativas para que así puedan surgir nuevas posibilidades de encaminar estos procesos, basados en una enseñanza más reflexiva y participativa, en concordancia con el contexto y las necesidades de los estudiantes.

- También se tiene como recomendación a la Institución Educativa Villa del Pilar de dar a conocer este trabajo a todos los docentes del área de matemáticas, apoyados en la socialización de los talleres diseñados, sus fases, y metodología utilizada (CPA), al igual que los resultados, con el fin de continuar con este proceso en los estudiantes y mejorar el aprendizaje de las estructuras aditivas.

- Otra sugerencia es que durante el proceso de los talleres los docentes continúen con el propósito de que el estudiante tenga un equilibrio entre la teoría y la práctica, es decir, tengan dominio del concepto y también de sus aplicaciones.

Referencias

Acuña, J. & Rojas, J. (2018). *Resolución de problemas aditivos simples a través de situaciones significativas por parte de estudiantes de grado segundo del colegio Antonio García IED*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://repository.javeriana.edu.co/bitstream/handle/10554/34895/Tesis%20Jhon%20y%20Jose.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Aguilar, V & Navarro, J. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Psicología general y aplicada*, *53*(11), 63-83.

Amézquita, N. (2017). *Influencia de una estrategia metodológica en el aprendizaje del concepto: estructura aditiva.* (Tesis de maestría). Universidad Externado de Colombia. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://bdigital.uexternado.edu.co/bitstream/001/495/11/CBA-Spa-2017-influencia_de_una_estrategia_metodol%C3%B3gica_en_el_aprendizaje__del_concepto_estructura_aditiva.pdf

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(1), 1-10. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6971

Bona, B. (2012). Aprendizaje del sistema aditivo y multiplicativo de los números enteros mediante la asistencia de objetos virtuales de aprendizaje. (Tesis de Doctorado). Universidad de Burgos. España. Recuperado de: http://riubu.ubu.es/bitstream/10259/200/1/Bona.pdf

Bruner, J. (2001). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Narcea.

Cardona, A. (2019). *El aprendizaje cooperativo como estrategia didáctica para el desarrollo de habilidades en la solución de problemas contextualizados con situaciones aditivas, para estudiantes de grado 5°.* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Javeriana Santiago de Cali. Colombia. Recuperado de http://vitela.javerianacali.edu.co/bitstream/handle/11522/11370/ Aprendizaje_cooperativo_estrategia.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. Memoria de Tercer Ciclo.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). Adición y sustracción. En C. Maza. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. (pp. 177 – 202). Madrid, España: Síntesis Educación.

Castro, E., Rico, L., y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias*, *10*(3), 243-253. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/39780/93200

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Una empresa docente*. Bogotá: Iberoamericana.

Cruz, F. (2012). *Problemas de estructura aditiva con estudiantes de 2° y 3° grados de primaria de una escuela pública del estado de Oaxaca: una propuesta de enseñanza.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Recuperado de http://200.23.113.51/pdf/28540.pdf

Delgado, R. (1998). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas* (Tesis de Doctoral). Universidad de La Habana, Cuba.

Congreso de la República de Colombia. (febrero 8 de 1994). Ley 115 de 1994 por la cual se expide la ley general de educación. DO 41.214

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México: McGraw Hill.

Herrera, J. (2018). *Incidencia de estrategias de regulación metacognitiva en la resolución de problemas aditivos de cambio y combinación en niños de 7 a 8 años.* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales. Colombia. Recuperado de http://167.249.43.80/jspui/bitstream/11182/488/1/Inci_regu_metacog_resolu_proble_aditi_cambio_combi_ni%C3%B1os_7_8_a%C3%B1os.pdf

Ivars, P. & Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática*, *28*(1), 9-38.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving.En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective* (pp.1-15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Lara, E. & Quintero, M. (2016). *Efecto de la enseñanza a través de la resolución de problemas, en el uso de los procesos cognitivos y metacognitivos de los estudiantes.* (Tesis de maestría). Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia. Recuperado de: http://manglar.uninorte.edu.co/bitstream/handle/10584/7615/eivis.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Macazana, D. (2018). *Nivel de resolución de problemas aditivos (PAEV) en estudiantes de dos instituciones educativas de San Juan de Lurigancho – 2018.* (Tesis de maestría).

Universidad César Vallejo. Trujillo, Perú. Recuperado de http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/22752/Macazana_GD.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Martínez, A. (2012). *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Recuperado de http://200.23.113.51/pdf/29358.pdf

Martíneza Bonafé, J. (1990). El estudio de casos en la investigación cualitativa. En J. B. Martínez Rodríguez (Ed.), *Hacia un enfoque interpretativo de la enseñanza* (pp. 57-68). Granada: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Granada

Mayer, R. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition. New York*: Freeman and Company.

Ministerio de Educación (2017). *Método Singapur para la enseñanza de las matemáticas.* Bogotá: autor. Recuperado de https://docplayer.es/25799517-Metodo-singapur-para-la-ensenanza-de-matematicas.html

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Documento N° 3. Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá

Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa: Guía didáctica.* (Tesis de maestría). Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia. Recuperado de https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems, *Addition andsubtraction: A cognitive perspective,* pp. 25-38. (Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, New Jersey).

Ordoñez, L. (2014*). Estructuras aditivas en la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal (PAE).* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. Recuperado de http://bdigital.unal.edu.co/47657/1/34607989_Leysa.pdf

Parra, R. (2018). *Resolución de situaciones problemáticas aditivas con estudiantes de grado segundo.* (Tesis de maestría). Universidad Externado de Colombia. Bogotá: Colombia. Recuperado de https://bdigital.uexternado.edu.co/bitstream/001/1160/1/CAA-spa-2018-Resolucion_de_situaciones_problematicas_aditivas_con_estudiantes_de_grado_segundo.pdf

Piedrahita, P. & Amú, H. (2017). *Secuencia didáctica basada en la teoría de las situaciones didácticas y la metodología Pavoc para la resolución de problemas matemáticos con estructuras aditivas.* (Tesis de maestría). Universidad ICESI. Cali, Colombia. Recuperado de: https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/83491/1/T01300.pdf

Poveda, G. (1984). Algunas ecuaciones funcionales. *Lecturas Matemáticas, 4*(1, 2, 3].

Rodríguez, M, Palmero, L & Moreira, A (2002). Modelos mentales y esquemas de célula. *Investigacoes em Ensino de Ciencias, 7*(1), 77-103.

Rodríguez, O & Suarez, E. (2015). *Resolución de problemas aditivos y multiplicativos con números naturales para desarrollar capacidades matemáticas en los niños y niñas del V* *ciclo de educación primaria de la institución educativa N° 16451, del caserío Mandinga, distrito y provincia de San Ignacio, en el año 2015.* (Tesis de pregrado). San Ignacio, Perú. Recuperado de: https://es.slideshare.net/edinsonsuareznunez/proyecto-de-resolucin-de-problemas-aditivos-y-multiplicativos

Silva, J. (2018). *Un estudio sobre el tipo de estructuras aditivas usadas en problemas planteados en los textos de matemáticas de primaria más usados en Colombia.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. Recuperado de: http://bdigital.unal.edu.co/69659/1/75074993.2018.pdf

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Taylor, S. & Bogdan, R. (1987). *Introducción de los métodos cualitativos de investigación.* Barcelona: Paidós. Recuperado de: https://asodea.files.wordpress.com/2009/09/taylor-s-j-bogdan-r-metodologia-cualitativa.pdf

Uribe, M., Sierra, C. & Palacio, L. (2017). *Análisis de las dificultades que presentan los estudiantes en la interpretación de los enunciados verbales donde intervienen estructuras aditivas.* (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia. Recuperado de: https://repository.udem.edu.co/bitstream/handle/11407/4648/T_MEM_44.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vergnaud, G., & Durand, C. (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. En C. Coll. (Ed.), *Psicología genética y aprendizajes escolares*, 105-128. Madrid: Siglo XXI.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2), 133-170.

Vergnaud, G. (1995): *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las Matemáticas en la escuela.* México: Trillas.

Zhang, J & Normand, D. (1994). Representations in distributed cognitive tasks. *Cognitive Science, 18*(1), 87-122.

Znaniecki, F. (1934). *The Method of Sociology*. Michigan: McMillan.

Apéndice 1. Taller diagnóstico

TALLER DE DIAGNÓSTICO GRADO 9 UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA INSTITUCIÓN EDUCATIVA VILLA DEL PILAR Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales 2019

Situaciones problema – estructuras aditivas

NOMBRE: ____

FECHA: ___________________________________

GRADO: ______________

"Contribuir en el proceso de resolución de problemas en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, que contemplen diversas estructuras aditivas, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto), en estudiantes de grado noveno".

Objetivo: El propósito del presente taller es indagar acerca de las capacidades de los estudiantes de grado noveno para resolver problemas aditivos y qué conocimiento y preconceptos poseen acerca de las ecuaciones lineales.

Instrucciones: En esta hoja puedes registrar todas tus observaciones y planteamientos de la solución (Operaciones, explicaciones,…).

1. En un avión hay 100 personas de las cuales 50 no fuman y 30 no beben. ¿Cuántas personas hay que fuman y beben, sabiendo que hay 20 personas que solamente fuman? (combinación).

2. Entre A y B tienen $1.154 pesos y B tiene 506 pesos menos que A. ¿Cuánto tiene cada uno? (comparación)

3. Si me pagaran 60 pesos tendría el doble de lo que tengo ahora más 10 pesos. ¿Cuánto tengo?

4. La suma de las edades de A y B es 84 años, y B tiene 8 años menos que A. ¿Qué edad tiene cada uno?

Apéndice 2. Talleres de Afianzamiento 1

TALLER DE DIAGNÓSTICO GRADO 9 UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA INSTITUCIÓN EDUCATIVA VILLA DEL PILAR Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales 2019

Situaciones problema – estructuras aditivas (comparación- combinación- cambio)

NOMBRE: ____

FECHA: __________________________________

GRADO: ______________

“Contribuir en el proceso de resolución de problemas en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, que contemplen diversas estructuras aditivas, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto), en estudiantes de grado noveno”.

Objetivo: El propósito del presente taller es mejorar las habilidades interpretativas y comunicativas para la correcta compresión de situaciones problemáticas.

Instrucciones: En esta hoja puedes registrar todas tus observaciones y planteamientos de la solución (Operaciones, explicaciones,…).

1. Juan tiene 21 años menos que Andrés y sabemos que la suma de sus edades es 47. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos? (comparación)

2. En un hotel de 2 pisos hay 48 habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero, ¿cuántas habitaciones hay? (combinación)

3. La cabeza de un pez mide 10 cm, la cola es tan larga como la cabeza más la mitad de su tronco, el tronco es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuánto mide el pez? (cambio).

4. En una reunión hay 30 personas que toman agua mineral y 48 toman gaseosas, 5 personas prefieren no tomar ninguna de estas bebidas. ¿Cuántas personas asisten a la reunión si 16 bebieron ambas bebidas? (combinación)

Apéndice 3. Talleres de Afianzamiento 2

TALLER DE DIAGNÓSTICO GRADO 9 UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA INSTITUCIÓN EDUCATIVA VILLA DEL PILAR Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales 2019

Situaciones problema – estructuras aditivas (comparación- combinación- cambio).

NOMBRE: ____
FECHA: ___________________________________
GRADO: ______________

“Contribuir en el proceso de resolución de problemas en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, que contemplen diversas estructuras aditivas, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto), en estudiantes de grado noveno”.

Objetivo: Aplicar un taller de afianzamiento en la resolución de problemas aditivos de diversas estructuras con las ecuaciones lineales.

Instrucciones: En esta hoja puedes registrar todas tus observaciones y planteamientos de la solución (Operaciones, explicaciones,…).

1. Pagué $325 por un caballo, un coche y sus arreos. El caballo costó $80 más que el coche y los arreos $25 menos que el coche. Hallar los precios respectivos (comparación).

2. En un colegio hay 1.436 estudiantes entre hombres y mujeres. Si hay 1.073 mujeres, ¿cuántos hombres hay en el colegio? (combinación).

3. Un barco transporta 10 contenedores de mercancías. Atraca en un puerto para cargar 7 más y luego prosigue su travesía. ¿Cuántos contenedores hay en el barco después de zarpar? (cambio)

4. Pagué $ 87 por un libro, un traje y un sombrero. El sombrero costó $5 más que el libro y $20 menos que el traje. ¿Cuánto pagué por cada cosa? (comparación)

Apéndice 4. Talleres de Afianzamiento 3

TALLER DE DIAGNÓSTICO GRADO 9 UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA INSTITUCIÓN EDUCATIVA VILLA DEL PILAR Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales 2019

Situaciones problema – estructuras aditivas (comparación- combinación- cambio).

NOMBRE: ____

FECHA: ___________________________________

GRADO: ______________

“Contribuir en el proceso de resolución de problemas en el contexto de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, que contemplen diversas estructuras aditivas, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto), en estudiantes de grado noveno”.

Objetivo: Aplicar un taller de afianzamiento en la resolución de problemas aditivos de diversas estructuras con las ecuaciones lineales.

Instrucciones: En esta hoja puedes registrar todas tus observaciones y planteamientos de la solución (Operaciones, explicaciones,…).

1. La suma de las edades de A, B, C es 69 años. La edad de A es el doble que la de B y 6 años mayor que la de C. Hallar las edades. (Comparación)

2. Si me pagaran $60.000 pesos tendrían el doble de lo que tengo ahora más $10.000 pesos. ¿Cuánto tengo? (combinación)

3. En una elección en que había 3 candidatos A, B, C se emitieron 9.000 votos. B obtuvo 500 votos menos que A y 800 votos más que C. ¿cuántos votos obtuvo el candidato triunfante? (cambio)

Apéndice 5. Taller de profundización

TALLER DE DIAGNÓSTICO GRADO 9

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA INSTITUCIÓN EDUCATIVA VILLA DEL PILAR Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales 2019

Situaciones problema – estructuras aditivas – VARIAS ETAPAS

NOMBRE: ____
FECHA: __________________________________
GRADO: ______________

Objetivo: Aplicar un taller de profundización en la resolución de problemas aditivos de diversas estructuras con las ecuaciones lineales.

Instrucciones: En esta hoja puedes registrar todas tus observaciones y planteamientos de la solución (Operaciones, explicaciones,).

1. Si en un total de 50 alumnos de primer ingreso a lenguaje de computación, 30 estudian Basic, 25 Pascal y 10 estudian ambos lenguajes. ¿Cuántos alumnos de primer ingreso estudian al menos un lenguaje de computación? (combinación)

2. Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y el 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto? (comparación)

3. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades respectivas (comparación)

4. Imagina que estamos sentados frente a la puerta de un teatro. Antes de que terminen la obra 9 personas abandonan la sala, y cuando acaba salen 7 más. ¿Cuántas personas asistieron a la función?