ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA QUE CONTRIBUYEN AL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES DESDE SU HISTORIA EN LOS NIÑOS DE SÉPTIMO GRADO DEL COLEGIO GIMNASIO VERMONT

CARLOS ARTURO VALENCIA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las
Ciencias Exactas y Naturales
Medellín, 2017

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA QUE CONTRIBUYEN AL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES DESDE SU HISTORIA EN LOS NIÑOS DE SÉPTIMO GRADO DEL COLEGIO GIMNASIO VERMONT

CARLOS ARTURO VALENCIA

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora
Mg. SANDRA MILENA ZAPATA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
Facultad de Ciencias
Maestría en Enseñanza de las
Ciencias Exactas y Naturales
Medellín, 2017

Dedico este trabajo a mi hijo, quien fue siempre una fuente de motivación para seguir adelante, porque me esperó en esos momentos que eran para él y que dediqué al presente trabajo. Cada vez que veía su bella sonrisa llenaba de fuerza mi ser, que en ocasiones se colmaba de cansancio.

Y a la madre de mi hijo, por su incondicionalidad y apoyo en este proceso.

Agradecimientos

A Dios, por brindarme una hermosa familia, la cual fue incondicional y siempre me motivó a seguir adelante.

A la magister Sandra Milena Zapata por haberme apoyado con sus conocimientos y orientado en la realización de este trabajo.

A la institución educativa Colegio Gimnasio Vermont, por permitir la realización del proyecto, en especial a los estudiantes del grado séptimo B, quienes estuvieron siempre dispuestos a colaborar con las actividades de esta investigación.

A la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, al equipo asesor de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, por los espacios de formación que contribuyeron significativamente para mi práctica de la enseñanza de las matemáticas.

Resumen

¿Te has preguntado alguna vez sobre el origen del símbolo $\sqrt{\ }$? ¿te has inquietado por la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales? o ¿sabes a quien debemos la escritura $\frac{a}{b}$ para representar un número racional como cociente? Preguntas como estas son la razón de la presente investigación, enmarcada en el uso del componente histórico y epistemológico como estrategia didáctica. El estudio es el resultado de un proceso de reflexión y experimentación en el campo de la docencia, en él se analiza un problema que radica en el olvido del componente histórico de la matemática para su enseñanza y aprendizaje, particularmente de conceptos asociados con el conjunto de los números racionales.

Así, mediante un diagnóstico inicial de saberes previos, el diseño y aplicación de una guía didáctica, se busca favorecer el aprendizaje de los números racionales en los estudiantes de séptimo grado del colegio Gimnasio Vermont de Medellín, a través de su historia como recurso didáctico. Para ello, se toma como referente la teoría sociocultural de Vygotsky, la cual es fundamental en este trabajo puesto que se pretende que los estudiantes construyan su conocimiento a través de problemas y situaciones que se presentan en su contexto social y en relación con los demás; así, los estudiantes deben analizar problemas que en el pasado el hombre tuvo que solucionar, dando paso al conocimiento del origen y necesidad de los números racionales. Teniendo en cuenta este referente, se busca propiciar que los estudiantes comprendan la incidencia de la historia en la constitución de nociones asociadas con los números racionales.

El estudio se enmarca en la metodología investigación acción, la cual permite que el docente este inmerso en el problema detectado; para el caso particular, se considera un ciclo conformado por cuatro fases: planificación, actuación, observación y reflexión. La fase de planificación o diagnóstico, se orienta a la indagación de conocimientos previos, asociados con nociones de los números racionales y su historia; en la fase de actuación o acción, se lleva a cabo el diseño y aplicación de una secuencia de actividades didácticas que buscan rescatar la historia y epistemología como recurso didáctico para la enseñanza de este conjunto numérico; luego, en las fases de observación y reflexión o fase evaluativa se busca determinar

la pertinencia de la metodología utilizada, a través de las evidencias de aprendizajes manifiestas por los estudiantes.

En este sentido, el presente estudio contribuyó a la comunidad académica que a diario se preocupa por avanzar y mejorar en la enseñanza de las matemáticas, pues brindó a la labor docente una herramienta didáctica enmarcada en el conocimiento de la historia, el desarrollo, las dificultades, el origen de símbolos, los principales personajes y sucesos implicados en la construcción y evolución del objeto de enseñanza; lo cual ofrece una riqueza a nivel conceptual y dialéctica en la práctica docente. Se recomienda que se indague sobre otras temáticas de la matemática para las cuales su componente histórico ha sido olvidado, para plantear propuestas de enseñanza y tener mejores argumentos del por qué lo que se enseña.

Palabras clave: Historia, epistemología, civilizaciones, unidad didáctica, aprendizaje, enseñanza, números racionales.

Abstract

Have you ever wondered about the origins of the $\sqrt{\ }$ symbol? Have you ever felt the need to increase the amount of natural numbers? Do you know to whom we owe writing $\frac{a}{b}$ to represent a rational number as a quotient? Questions like these are the reason for the next investigation, which is framed in the use of the historical and epistemological component as a teaching strategy. This study is the result of a reflexive process of experimentation in the field of teaching. This process analyses a problem that resides in the oblivion to which the historical component of mathematics' teaching and learning has been thrown, more specifically, the concepts associated to set theory and rational numbers.

Thus, through an initial diagnosis of prior knowledge, the design and implementation of a didactic module, I seek to enhance the learning of rational numbers in 7th graders at the Vermont School Medellín, through its history as a teaching resource. For this purpose is used the theory of socio-cultural learning by Vygotsky. Which is of great importance for this study since its aim is to promote in students the acquirement of knowledge through problems and situations from their social context and their relationship with others; this way, students must analyze problems from the past that human kind had to solve, which led the knowledge about the origin and need of rational numbers. Having in mind this referent, the aim is to foster the comprehension of the influence of history in building concepts related to rational numbers.

The study is proposed under an Action-research framework, which allows the teacher to interact with the identified problem; for this particular case a cycle consisting in 4 stages is considered: planning, intervention, observation and reflection The planning or diagnostic stage focuses on the enquiry for prior knowledge, associated to notions of rational numbers and their history; during the stage of execution or action take place the design and implementation of a teaching sequence that aims to rescue history and epistemology as a didactic resource; then, during the observation and reflection stage the aim is to determine the effect and relevance of the proposal implemented, through the evidences of new learnings that students manifested.

According to this, the present study is a contribution to the academic community that daily seeks to advance towards better and more effective strategies for mathematics teaching, since it provides teachers with a tool that enhances their work through the use of history and epistemology with didactic purposes, a tool that avoids considering mathematics as a finished field of knowledge by considering all the, people involved in its origins and the problems they had to face, digging to the very core of the concepts, symbols and procedures we now take for granted and guaranteeing the enrichment of the mathematical language. It is recommended to inquire about other mathematical concepts for which their historical component has been forgotten in order to come up with new proposals and continue to enrich the practice of math teaching.

Key words: History, epistemology, civilizations, didactic unit, learning, teaching, rational numbers.

Contenido

Lista de ilustraciones XI
Lista de tablas XIII
Lista de gráficos: XIV
Introducción: 15

CAPÍTULO I. DISEÑO TEÓRICO 17
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 17
1.1. Descripción del problema 17
1.2. Formulación de la pregunta 20
2. JUSTIFICACIÓN 21
3. OBJETIVOS 22
3.1. General 22
3.2. Específicos 22
4. MARCO REFERENCIAL 23
4.1. Referente de Antecedentes 23
4.2. Referente Teórico 25
4.3. Referente Disciplinar 31
4.4. Referente Legal o Normativo. 32
4.5 Marco espacial 38

CAPÍTULO II. DISEÑO METODOLÓGICO 40
5. DISEÑO METODOLÓGICO 40
5.1. Enfoque 40
5.2. Método 41
5.3. Instrumentos de recolección de la información 43
5.4. Población y muestra 44
5.5. Impacto esperado 44
5.6. Cronograma de actividades 46

CAPÍTULO III. SISTEMATIZACIÓN DE LA INTERVENCIÓN 48
6. ANÁLISIS DE RESULTADOS 48
6.1. Método de la intervención 48

6.2. Diseño y aplicación de taller pre test. (Actividad 1) 48
6.3. Diseño y aplicación de la unidad didáctica (Actividad 2 a 5) 53
6.3.1. Actividades de exploración o de explicitación inicial 54
6.3.2. Actividades de introducción de los nuevos conocimientos. 61
6.3.3. Actividades de construcción de conocimientos 68
6.3.4. Actividades de aplicación. 73
6.4. Diseño y aplicación de taller post test 81
6.5. Antes VS después: un comparativo 87
6.6. Conclusiones 89
6.7. Recomendaciones 90
Referencias 91
Anexos 95
Unidad didáctica 95

Lista de ilustraciones

Ilustración 1:Síntesis de hipótesis 19
Ilustración 2:Respuesta de estudiante de grado 7° 49
Ilustración 3:Respuesta de estudiante de 7° 50
Ilustración 4. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011) 51
Ilustración 5 tomada de (Castro y Osorno, 2014) 54
Ilustración 6 tomada de (Castro y Osorno, 2014) 54
Ilustración 7:Respuesta de estudiantes de 7° 56
Ilustración 8:Respuesta de estudiantes de 7° 57
Ilustración 9:Respuesta de estudiantes de 7° 57
Ilustración 10:Respuesta de estudiante de 7° 58
Ilustración 11 tomada de (Freepik, 2010-2017) 59
Ilustración 12:Respuesta de estudiantes de 7° 60
Ilustración 13:respuesta de estudiantes de 7° 61
Ilustración 14:Respuestas de estudiantes de 7° 63
Ilustración 15:Civilización China 63
Ilustración 16:Representación de Hindues y Arabes 64
Ilustración 17:Grecia 65
Ilustración 18:Civilización Babilonia 66
Ilustración 19:Egipto 67
Ilustración 20:Respuesta de estudiantes de 7° 69
Ilustración 21: Respuesta de estudiantes de 7° 69
Ilustración 22:Respuesta de estudiantes de 7° 71
Ilustración 23:Respuesta de estudiantes de 7° 72
Ilustración 24:Estudiantes midiendo escritorio 72
Ilustración 25:Estudiantes midiendo puerta 72
Ilustración 26:Estudiante midiendo televisor 73
Ilustración 27:Estudiante midiendo mesa de estudio 73
Ilustración 28:Respuesta de estudiantes de 7° 75
Ilustración 29:Respuesta de estudiantes de 7° 75
Ilustración 30:Respuesta de estudiantes de 7° 76
Ilustración 31:Respuesta de estudiantes de 7° 77
Ilustración 32:Respuesta de estudiantes de 7° 78
Ilustración 33:Respuesta de estudiantes de 7° 78
Ilustración 34.Anuncio de préstamos. Obtenido de Balbuena y Otros (2009) 79
Ilustración 35.Tabla de intereses 79
Ilustración 36. Descuento de mercancías. Adaptada de Balbuena y Otros (2009) 79
Ilustración 37:Respuesta de estudiantes de 7° 80
Ilustración 38:Respuesta de estudiante de 7° 82
Ilustración 39:Respuesta de estudiante de 7° 82
Ilustración 40:Respuesta de estudiante de 7° 83
Ilustración 41:Respuesta de estudiante de 7° 83
Ilustración 42:Respuesta de estudiante de 7° 84
Ilustración 43. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011) 85
Ilustración 44. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011) 99

Ilustración 45 tomada de (Castro y Osorno, 2014) 100
Ilustración 46 tomada de (Castro y Osorno, 2014) 100
Ilustración 47 tomada de (Freepik, 2010-2017) 101
Ilustración 48.Papiro de Rhind. Tomado de (Mol, 2013) 103
Ilustración 49 tomada de (Valdez, 2008) 103
Ilustración 50 tomada de (Amaya y Solano, 2006) 104
Ilustración 51 tomada de https://i.ytimg.com/vi/f4g3vh3k2Mg/maxresdefault.jpg 104
Ilustración 52.Anuncio de préstamos. Obtenido de Balbuena y Otros (2009) 108
Ilustración 53.Tabla de intereses 108
Ilustración 54. Descuento de mercancías. Adaptada de Balbuena y Otros (2009) 108
Ilustración 55. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011) 109

Lista de tablas

Tabla 1:Normograma del Marco Legal..... 36
Tabla 2:Planeación de actividades 46
Tabla 3:Cronograma de actividades 47
Tabla 4:Representación de estanterías 55
Tabla 5: Distribución de cuentos..... 58
Tabla 6: Exploración con patrones 68
Tabla 7: mediciones con cintas..... 70
Tabla 8:Representación de estanterías 100
Tabla 9: Distribución de cuentos..... 101
Tabla 10: Exploración con patrones 106
Tabla 11: mediciones con cintas..... 106

Lista de gráficos:

Gráfico 1: Resultados históricos de Colombia 33
Gráfico 2: Pregunta 1 del pre-test 49
Gráfico 3:Pregunta 2 del pre-test 50
Gráfico 4:Pregunta 3 del pre-test 51
Gráfico 5: Pregunta 4 del pre-test 52
Gráfico 6:Pregunta 5 del pre-test 52
Gráfico 7:Pregunta 6 del pre-test 53
Gráfico 8: Pregunta 1 de la actividad 2 54
Gráfico 9:Pregunta 2 de la actividad 2 55
Gráfico 10:Pregunta 3 de la actividad 2 56
Gráfico 11:Pregunta 4 de la actividad 2 59
Gráfico 12:Pregunta 5 de la actividad 2 60
Gráfico 13: Respuestas pregunta 1 al post-test 82
Gráfico 14:Pregunta 2 del post-test 83
Gráfico 15:Pregunta 3 del post-test 84
Gráfico 16: Pregunta 4 del post-test 85
Gráfico 17:Pregunta 5 del post-test 86
Gráfico 18:Pregunta 6 del post-test 86

Introducción

El presente estudio se enmarca en una propuesta de enseñanza para nociones asociadas con el conjunto de los números racionales; se desarrolla con estudiantes de séptimo grado a través del diseño de una unidad didáctica enmarcada en la historia de dicho conjunto numérico, como recurso para la enseñanza del mismo; un referente para la investigación es el ciclo de aprendizaje de Jorba y Sanmartí (1993), que consta de cuatro etapas, actividades de saberes previos, de introducción de nuevos conocimientos, de estructuración-síntesis y de aplicación de conocimientos.

Esta propuesta de enseñanza tiene como objetivo no solo favorecer el aprendizaje de los números racionales, también, reconocer la historia de los conceptos matemáticos como una estrategia para motivar el trabajo en el aula. Por lo que se convierte en una invitación a los docentes para estudiar la historia, explorar los recursos que esta ofrece, acercarla e incluirla en sus prácticas y ampliar el horizonte conceptual propio y el de sus estudiantes.

El estudio consideró cuatro momentos; inicialmente se indagó sobre cómo ha sido utilizada la historia y la epistemología de la matemática en la enseñanza, para ello se hizo un rastreo bibliográfico, se entrevistaron compañeros actualmente en ejercicio y se hizo un análisis personal de experiencias como estudiante y como docente; con estos elementos se delimita el segundo momento, que permitió la definición del problema de investigación en un tema específico de las matemáticas, los números racionales, en grado séptimo y el planteamiento de los objetivos asociados con el mismo. Posteriormente se realizó la intervención, a través de distintos instrumentos, un pre-test, una secuencia de actividades enmarcadas en un ciclo de aprendizaje y un post-test; finalmente se analizaron los resultados obtenidos para presentar las conclusiones del estudio.

Luego de haber aplicado los cuestionarios y secuencia de actividades con unos objetivos en mente, se llegó a que efectivamente hacer uso de la historia de los números racionales como recurso didáctico para su enseñanza, favorece de manera significativa el aprendizaje de los estudiantes. Esto permite afirmar a modo de sugerencia, que sería conveniente extender esta propuesta a otros tópicos de la

matemática, con miras a incentivar la motivación en el trabajo académico de los estudiantes y a enriquecer el diseño de estrategias y recursos inspirados en la historia de los conceptos matemáticos.

CAPÍTULO I. DISEÑO TEÓRICO

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción del problema

La enseñanza de la matemática ha sido cuestionada significativamente y esto ha generado que se inicien estudios investigativos con el fin de aportar a la mejora de dicha práctica. Tal cuestionamiento surge porque en muchos casos la enseñanza se limita de forma exclusiva a la operatividad y a lo abstracto de la matemática, a aplicar una serie de algoritmos, a resolver problemas y ejercicios que potencian habilidades de los estudiantes, pero son poco cercanos al contexto. Así, se evidencia un descuido en otros aspectos importantes en la formación de los estudiantes, como es la necesidad y aplicabilidad de lo que aprenden, el origen y la historia de los tópicos de las matemáticas.

Reconociendo el entramado histórico que subyace en la matemática y que muchos de los conceptos que la constituyen fueron difícilmente aceptados por los matemáticos de la época, como es el caso de los números racionales, es válido cuestionar la pretensión de los profesores, por ejemplo, de lograr una rápida comprensión de los números racionale por parte de los estudiantes, cuando la aceptación de estos tardó siglos; posiblemente incurrir en estos errores se da por desconocimiento de la historia del concepto enseñando, por no reconocer que se tratan de abarcar siglos de investigaciones y arduos trabajos de matemáticos en tan solo unas cuantas clases.

Igualmente pasa con otros conceptos matemáticos, por ejemplo, el caso del álgebra, ¿cuándo y por qué se empezó a hablar de álgebra por primera vez? ¿quiénes la necesitaban y para qué?, ¿en qué contextos era utilizada? ¿Por qué una x o z representa algo? Y otras cuestiones que posiblemente tendrían sentido para los estudiantes si el docente incluyera en sus prácticas los relatos de las historias que permiten un acercamiento a conceptos tan abstractos.

Así, el presente estudio pretende destacar la historia de la matemática como herramienta didáctica para su enseñanza, minimizando el olvido en el que se encuentra,

para darle el valor y reconocimiento que se merece. Es claro que no se puede abarcar en este trabajo la historia por completo, por lo que se tomará como tema central los números racionales y algunas nociones asociadas con estos, con miras a hacer un estudio con los estudiantes de grado 6to (7mo para la escala interna) del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.

Las siguientes ideas representan los aspectos y pensamientos acerca de una problemática que ha cuestionado mi experiencia con la matemática, como estudiante y como profesor. Tal lista es realizada sin ninguna fuente de respaldo, son ideas producto de la observación y de la reflexión, que permite obtener algunos aspectos que hacen parte de las causas y otros que hacen parte de los efectos de la problemática observada

- Enseñar matemáticas desde su historia
- Motivar a los estudiantes
- La historia que antecede a los conceptos que enseñamos
- ¿Qué tan importante es para un docente leer la historia de los conceptos que enseña?
- ¿Cómo se han transformado los conceptos matemáticos a través del tiempo?
- ¿Qué tan reconocida, aceptada y usada es la historia de la matemática entre los profesores que la enseñan?
- ¿Les gusta a los estudiantes la historia de la matemática?
- ¿Si los profesores conocen el origen de lo que enseñan e incluyen esto en sus clases, habrá un mejor resultado en el aprendizaje de los estudiantes?

Los anteriores cuestionamientos se sintetizan a través del siguiente esquema, proponiendo unas posibles hipótesis que guiarán el presente trabajo:

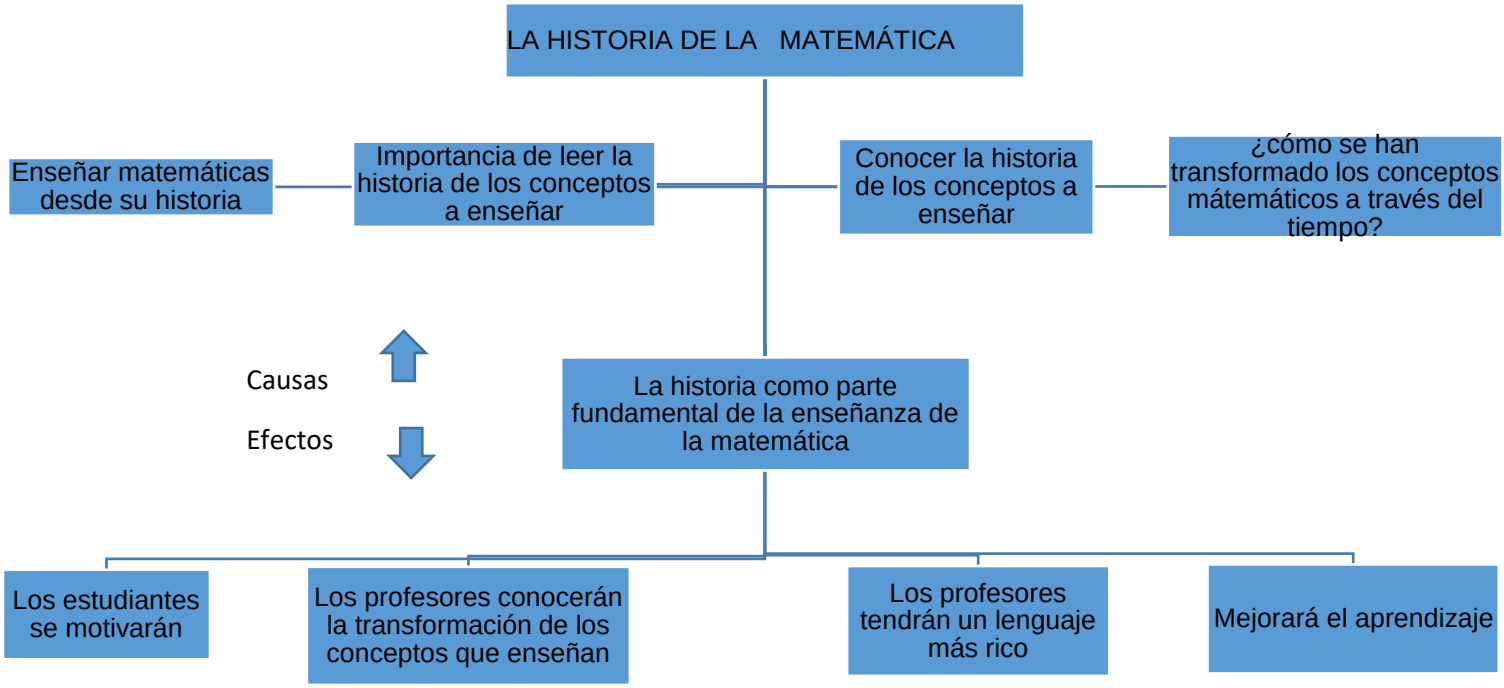
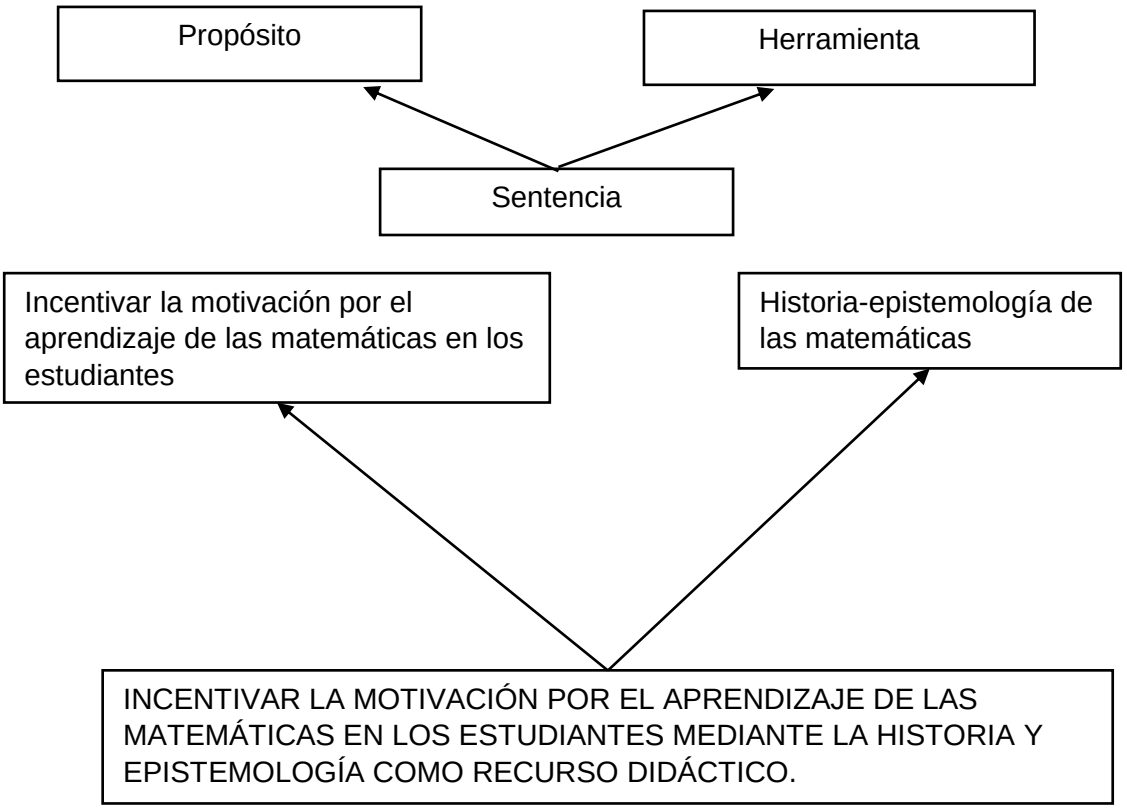


Ilustración 1:Síntesis de hipótesis

De lo anterior, se define un propósito y una herramienta para ofrecer una sentencia como un acercamiento a un título provisional del trabajo:



Lo anterior evidencia que el problema en cuestión es el uso de la historia de la matemática para su enseñanza. El problema central que se ha detectado tanto, desde la posición del estudiante, como la del profesor, es que se está dejando de lado el componente histórico de la matemática, los grandes problemas y dificultades que la comunidad matemática ha vivido y, posiblemente, se le está dando más fuerza a lo operativo, sin tener una comprensión profunda y consciente de los tópicos de la matemática.

En relación con lo anterior, algunas investigaciones reportan que posiblemente, el componente histórico, no se considera importante y por tanto no es tomado en cuenta en los planes de clase y esto arroja como resultado dos consecuencias, en primer lugar que se desconozca, por parte del docente, la complejidad de concepto que va a enseñar y en segundo lugar, que los estudiantes desconozcan el origen de lo que aprenden generándose preguntas típicas como ¿y esto para qué? y ¿por qué?, provocando que se pierda interés por el área.

Con relación a lo anterior y tomando en cuenta dos consideraciones: (a) que la idea de numero racional y sus operaciones, es uno de los tópicos que en el campo de las matemáticas ha presentado mayores dificultades, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, y (b) que la historia de este tópico no ha sido objeto de interés ni reflexión en los procesos de enseñanza orientados en el currículo de la institución educativa Colegio Gimnasio Vermont, se propone para la presente investigación la pregunta dada a continuación.

1.2. Formulación de la pregunta

¿Cómo la historia y epistemología de los números racionales, utilizados como recurso didáctico, favorece el aprendizaje en los estudiantes de séptimo grado del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín?

2. JUSTIFICACIÓN

Con el presente estudio se pretende la implementación de estrategias de enseñanza para mejorar el aprendizaje de los números racionales en los estudiantes; utilizando su historia como recurso didáctico con miras a lograr una mayor motivación por el aprendizaje y a acercar a los estudiantes con su aplicabilidad y utilidad.

La investigación, por lo tanto, intenta rescatar el valor de la historia de la matemática, hecho que se convierte en un desafío para el presente trabajo. Se concibe así la idea de, generar, crear, provocar, dar paso a la apertura de posibilidades que lleven a los estudiantes a trascender lo operativo y algorítmico, es decir, que conozcan el origen y el porqué de todo lo que sus profesores le enseñan concerniente a los números racionales y que se genere en ellos, en adelante, esa curiosidad del desarrollo y evolución de los conceptos matemáticos.

Es cierto que, por el carácter abstracto y riguroso de la matemática, el proceso de enseñanza-aprendizaje, genera poco interés y motivación para los estudiantes, y es precisamente ese interés el que se busca recuperar, para así comprender la problemática, que como se ha mencionado en los antecedentes, impide que los estudiantes reconozcan la importancia y aplicabilidad de lo que les enseñan en la escuela. Así, con la propuesta se pretende sumar esfuerzos para minimizar dicha problemática, la cual está directamente relacionada con los procesos de enseñanza-aprendizaje que no dejan ver las matemáticas como lo que son: una de las áreas del conocimiento más atractivas (Perez, Higuita y Valencia, 2014). Lo anterior ofrece una posibilidad para que el presente trabajo se interese por generar un aprendizaje de los números racionales, transformando al estudiante en un agente activo mediante metodologías que hacen uso de la historia de los racionales.

3. OBJETIVOS

3.1. General

Analizar cómo la historia y epistemología de los números racionales, utilizados como recurso didáctico, favorece el aprendizaje en los estudiantes de séptimo grado del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.

3.2. Específicos

Diagnosticar los saberes sobre el conjunto de los números racionales y el reconocimiento de su historia, en los estudiantes de grado séptimo B del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.

Diseñar una guía de enseñanza para los números racionales inspirada en componentes históricos del concepto que permita vivenciar experiencias de aprendizaje.

Aplicar la guía de enseñanza para los números racionales en los estudiantes de grado séptimo B del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.

Evaluar la implementación de la guía de enseñanza a través de un diagnóstico final para evidenciar el impacto en el aprendizaje de los números racionales.

4. MARCO REFERENCIAL

4.1. Referente de Antecedentes

En el campo de la enseñanza, es importante conocer las concepciones que los profesores tienen acerca de la historia de la matemática para incluirla en su práctica, al respecto, Fernandez (2015), reporta que su investigación con docentes en ejercicio en el estado de Guerrero México, tuvo como objetivo analizar las concepciones de los profesores de matemáticas del nivel medio sobre la inclusión de la historia de la matemática en su práctica docente. Para tal fin, utilizaron un enfoque mixto (cualitativo y cuantitativo) iniciando con un cuestionario de 8 items y posteriormente con una entrevista. Dicho enfoque se aplicó a 11 docentes en ejercicio. El cuestionario se clasificó en las siguientes categorías: concepciones de la historia de la matemática y sus usos en la práctica, los obstáculos para incorporar la historia en la enseñanza, la importancia de la historia para los docentes en su práctica y formación profesional y por último el interés de los decentes por incorporar materiales históricos en las clases de matemáticas.

Como resultados obtuvieron que la historia de la matemática se convierte para los docentes y para los estudiantes en un recurso motivacional, pero, que este se queda demarcado en el hecho anecdótico o datos curiosos y que no se utilizan como herramienta para dejar ver la dificultad inherente a ciertos conceptos matemáticos para ser entendidos y aceptados por el hombre. La investigación en cuestión, deja ver que la historia, en cierto modo ayuda para que los estudiantes vean el lado humano de la matemática, es decir, que esta no es algo acabado sino algo que el hombre ha venido construyendo debido a las exigencias y problemas planteados por el entorno. También es de resaltar que los docentes en cuestión anotaban que muchas veces no se tocaba el tema de la historia por falta de tiempo, debido a la cobertura del área que les exigía abarcar muchos temas en un semestre. A esto también hay que anotarle que los profesores no aplican historia en sus clases porque muchos de los textos son extensos.

Por otro lado, con un enfoque en el estudiante, el artículo titulado *la historia de la matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza aprendizaje: una*

experiencia en secundaria Barbosa (2003), muestra el impacto de la historia de la matemática sobre los procesos de enseñanza aprendizaje atendiendo las actitudes y concepciones de los estudiantes acerca de la matemática. Para ello, se seleccionaron dos grupos del mismo nivel de un colegio en Guanacaste Costa Rica. En ambos grupos se trabajó como tema central la solución de ecuaciones cuadráticas con una sola incógnita y con coeficientes irracionales; el trabajo se hizo desde dos modalidades, solución mediante factorización y mediante el uso de la fórmula general; la única diferencia fue que uno de los grupos utilizó herramientas históricas (hablando de los aportes de Bagdad desde el siglo V y de los aportes de Al-Khwarizmi) y el otro grupo trabajó el mismo tema, pero desde el aspecto operativo.

El estudio concluyó que la historia de la matemática es una herramienta potente para el proceso enseñanza-aprendizaje, pero que es necesario tener en cuenta dos recomendaciones: la primera tiene que ver con el desarrollo de una corriente de investigación mediante dos acciones, el envío de profesores al extranjero por parte de las universidades y la invitación de especialistas en el área de la aplicación de la historia de la matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje y, la segunda recomendación, está en considerar la importancia de cursos de historia como orientación didáctica desde los primeros niveles en los programas de enseñanza de la matemática.

En esta misma línea, Urbaneja (2004) plantea varios métodos para implementar la historia de la matemática en nuestras clases. Pero antes menciona que para proceder a la implementación se requiere de una buena formación y motivación por parte del docente y que este sea el primero en ganar consciencia en cuanto a las dificultades que tuvieron los matemáticos para construir un concepto como tal. Esto se dice en algunas líneas del artículo donde se destaca que la historia permite conocer la aconteceres y problemáticas que permearon muchos de los conceptos matemáticos que ahora son parte del currículo escolar, que en su momento histórico no fueron comprendidos fácilmente, y por consiguiente lo mismo le puede suceder a los estudiantes.

Entre las técnicas para incluir la historia, tarea no sencilla, se mencionan algunas de manera rápida, hacer una introducción histórica de cada tema a iniciar, mostrando la evolución. Se puede también añadir en medio de las explicaciones algunas notas

históricas y plasmarlas en las guías de trabajo de los estudiantes. Igualmente se puede mencionar a qué matemático se debe el concepto que estamos tratando, esto les permitirá reconocer que no es algo que surgió de la nada, sino que hubo alguien o una corriente matemática que trabajó en su desarrollo. Estos métodos pueden ser regularmente conocidos y aplicados por los docentes pero, sin lugar a dudas, según el artículo Urbaneja (2004), la forma más directa de implicar la historia en la didáctica es mediante el método genético el cual " […] ha sido reivindicado por grandes matemáticos y profesores de Matemáticas, pretende demostrar que, para la perfecta comprensión de un concepto determinado, el alumno ha de repetir a grandes rasgos el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto" Urbaneja, (2004, pág. 22), lo quiere decir que hay que llevar al estudiante a que se ponga en el lugar de los personajes que vivieron las problemáticas, que el estudiante se enfrente de verdad a un problema contextualizado, pero remontado en el tiempo, un ejemplo podría ser la medición de longitudes y ángulos utilizando solo regla y compás respectivamente y poner a los estudiantes a resolver problemas de este tipo, esto serviría para iniciar el estudio de la geometría Euclidiana y así cobran sentido los conceptos posteriores.

En este sentido, se reconocen las ventajas que le ofrece al docente conocer la historia de la matemática, por ejemplo, el profesor que está al tanto de ésta, además de conocer su legado, conocerá las dificultades de los contenidos y podrá encontrar mejores estrategias para introducir conceptos en sus clases; cada vez que el docente se motive por saber más (debido a la riqueza en el historia de la matemática), consolidará una autoformación continua y como consecuencia una preparación adecuada para las exigencias curriculares; el docente ganará una actitud favorable para llegar al salón de clase y esto contagiará de manera positiva a sus estudiantes.

4.2. Referente Teórico

En las matemáticas es sabido que existen algunas temáticas de mayor complejidad que otras y múltiples investigaciones se han centrado en las de mayor complejidad, para mejorar su proceso de enseñanza y por ende su aprendizaje; este trabajo apunta en esa

dirección en un tema particular, los números racionales en la básica secundaria. Enfoca en el uso de dos tipos de lenguajes que a diario son utilizados por toda la humanidad, el lenguaje visual y el verbal que según Perez, Higuita y Valencia (2014) son el principal mediador en el proceso de aprendizaje. En ese sentido si reconocemos que un uso adecuado de éstos, combinados con una serie de actividades como por ejemplo, tomar patrones de medida para calcular el ancho del tablero y mirar qué sucede cuando el patrón no cabe una cantidad entera de veces, dividir el espacio del salón en partes iguales y tratar de representar esto matemáticamente, tomar el periódico o revistas y analizar porcentajes de incrementos en salarios, impuestos, entre otros; puede generar una comprensión adecuada de la temática en cuestión, entonces es conveniente tomar en cuenta, al lenguaje visual y verbal, como herramientas para el desarrollo de la investigación.

Así, el uso de estrategias visuales que posibiliten un acercamiento al objeto de estudio disciplinar, podría permitir que el estudiante perciba, observe y actué, con miras a comprender con mayor claridad aquello que se imparte de manera verbal; considerando lo anterior es necesario reconocer algunas teorías del aprendizaje, para determinar cuál puede ser el sustento teórico para la presente investigación, teniendo en cuenta las formas de aprendizaje de los estudiantes de la población con la que se desarrolla el estudio, pues sus estilos de aprendizaje pueden ser gráficos, verbales, auditivos, kinestésicos, entre otros.

Para ello, es necesaria la implementación de una estrategia que relacione algunas de las formas de aprendizaje enmarcada en una propuesta de enseñanza para lograr un acercamiento al constructo de los números racionales. Es así como es pertinente el diseño, la aplicación y la evaluación de una guía didáctica enmarcada en la historia del concepto objeto de estudio, en la que además se consideren las formas de aprendizaje mediante el uso de materiales concretos como, patrones de medidas, tortas fraccionarias, doblado de papel, entre otros y todo esto mediante estrategias de aprendizaje cooperativo, donde se pongan de manifiesto las habilidades sociales como bien lo sustenta Becco (1999), apoyado en los análisis que ha realizado a los aportes de Vygotsky, cuando sentencia que cada persona por su naturaleza y en completa soledad no puede desarrollarse plenamente, es decir, el desarrollo de sí mismo implica

fundamentalmente un proceso de interacción constante con el medio que le rodea, donde están incluidos los otros seres humanos y, en este caso los estudiantes deberán estar en relación constante con sus compañeros para desarrollar la guía didáctica que les permitirá entender la necesidad que desde los tiempos más remotos ha tenido la humanidad,, para crear un sistema de numeración tan importante como los racionales.

En consonancia con lo anterior, una persona en interacción con el otro logra una consolidación de su aprendizaje gracias a que somos seres sociales en tanto nos relacionamos con los otros individuos que constituyen la cultura. Esto es:

> …el aprendizaje y trabajo cooperativo juega un rol de vital importancia en la construcción del conocimiento pues como lo sustenta el Servicio de Innovación Educativa (2008) citando a Johnson y Johnson; para estos autores cooperar es trabajar juntos para lograr objetivos compartidos, por lo que el trabajo en equipos será una constante en la intervención didáctica. En este sentido, resulta necesario entender la teoría sociocultural introducida por Vygotsky, en la que se destaca la importancia que tiene la cultura y la sociedad al momento de acercar a cada estudiante con sus experiencias en la adquisición de conocimiento. (Perez, Higuita, y Valencia, 2014, p. 26)

De este modo es necesario dejar claro que el referente teórico de esta propuesta es el constructivismo social de Vygotsky, asociado a la teoría del aprendizaje colaborativo el cual es definido por Lobato Fraile (1997) como un método y un conjunto de técnicas en las que los estudiantes trabajan en equipos pequeños desarrollando una actividad de aprendizaje y recibiendo evaluación de los resultados conseguidos. Convirtiéndose en una técnica por excelencia para este trabajo, pues, los estudiantes deberán estar reunidos por grupos para realizar las actividades planteadas, a la vez que se ven en la necesidad de relacionarse con otros compañeros, es decir de actuar como personas pertenecientes a una sociedad (el salón de clase).

Para sustentar lo anterior se hace necesario retomar lo que Lobato Fraile (1997) plantea en su artículo al referirse a D.W. Johnson y R.T. Johnson, como los principales estudiosos del aprendizaje cooperativo, donde estos sustentan que hay algunos elementos fundamentales en dicha estrategia de aprendizaje, entre ellos, la interpendencia positiva: que no es otra cosa que cuando el estudiante por si solo se

entera de que para conseguir sus objetivos debe primero velar para que los demás integrantes de sus consigan también los suyos. Otro elemento que es producto del anterior, es la interacción “frente a frente”, el cual se traduce en aquellas acciones en las que los estudiantes se prestan ayuda, intercambian recursos e ideas, hacen procesos de autoevluación, desarrollando así habilidades sociales.

Por otro lado, teniendo en cuenta los aportes de los estudiosos Yael Sharan y Sholo Sharan, citado por Lobato Fraile (1997), es fundamental mencionar el papel que el docente jugará en el presente trabajo, pues según estos autores el docente en medio de esa interacción de los estudiantes, deberá promover algunas competencias como la comunicativa, entendida como el respeto por la palabra y la opinion de los integrantes; la reflexión, la cual es vivida cuando incite a los estudiantes a revisar lo trabajado al interior del grupo.

Lo mencionado hasta este punto, exige que las actividades que se diseñen, apunten a que los estudiantes tengan una verdadera apropiación conceptual y para ello, hay que crear atmósferas que posibiliten al estudiante ser creador de explicaciones del por qué, de lo que aprende, cuya justificación se encuentra en la relación con los otros, al momento de escuchar y ser escuchado, lo cual será transmitido a través del lenguaje verbal, al momento en que los equipos de trabajo expongan a sus compañeros la forma de solucionar algunos puntos de la guía.

Las actividades planteadas en la guía didáctica están desarrolladas en tres momentos, uno inicial donde los estudiantes manifiestan sus saberes previos, un segundo momento donde deben desarrollar problemas de manera independiente y, un tercero, en el que se solucionan problemas con la ayuda de otros compañeros y del profesor; los dos últimos momentos son sustentados desde lo que se conoce como la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), que como lo plantean Carrera y Mazarella (2001) citando a Vygotsky (1979:133) “No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz”. Cabe mencionar que, en algunas actividades de los momentos descritos anteriormente, se

hará especial énfasis en el componente histórico y epistemológico como elemento motivador en el desarrollo de las tareas propuestas.

Pero, ¿qué hace que el trabajo cooperativo asociado a la teoría sociocultural de Vygotsky funcione para el presente trabajo? La respuesta se tiene exactamente en la obra titulada "*Teoría del aprendizaje cooperativo"* donde se manifiesta:

> Para Vygotsky, la colaboración favorece el crecimiento, porque es probable que los niños de edades similares operen dentro de las zonas de desarrollo próximo de los demás, al actuar como modelos de conductas más avanzadas en sus propios grupos. Para describir la influencia de la colaboración sobre el aprendizaje, Vygotsky (1978) dice: "Las funciones se forman primero en lo colectivo, como relaciones entre niños y sólo después se convierten en funciones psíquicas del individuo (...) (Slavin, pág. 24)

Lo anterior refuerza el concepto de ZDP el cual se había mencionado anteriormente y que ciertamente estará presente durante las actividades.

En armonía con lo anterior y contextualizados en la presente investigación, es posible hacer la siguiente pregunta: ¿Cómo se relacionan las capacidades cognitivas y sensoriales en lo concerniente al proceso de enseñanza-aprendizaje del conjunto del número racionales? Esta, podría conllevar a esclarecer la finalidad del presente trabajo, el cual se enmarca en la implementación de estrategias didácticas que generen un movimiento cognitivo en la psiquis del estudiante, esto es, la combinación de lo sensorial entendido como lo que puede percibir mediante el tacto, la visión, la oralidad; con lo cognitivo, que es la capacidad de cada estudiante para apropiar conocimiento.

Vygotsky se refiere a la necesidad de herramientas y signos para la enseñanza, abordados desde una componente visual; a la luz de lo anterior la guía contempla actividades concretas, pictóricas y de abstracción que ponen de manifiesto procesos de visualización y oralidad para que los estudiantes expliquen y den cuenta de los precedentes de los racionales, así podrá relatar cómo por las necesidades del hombre surgió dicho conjunto numérico, por ejemplo, con actividades donde tenga que solucionar problemas de medición similares a los que vivió la civilización Egipcia, al momento de redistribuir los espacios terrestres con un patrón de medida que no daba exacto, luego de que el rio Nilo se desbordara.

La guía didáctica es tanto de carácter gráfico, como textual, y está articulada a la historia de los racionales; invita a los estudiantes a tomar papel y lugar en la historia y es acá donde la teoría sociocultural de Vygotsky apoya el presente trabajo puesto que fue en la sociedad, en la cotidianidad y relaciones del hombre donde surgió la necesidad de hablar de números racionales. Siguiendo dicho enfoque, el profesor apoya y guía inicialmente a los estudiantes en el inicio de las actividades, posteriormente se dejarán solos, de tal modo que haciendo relación con lo que ya saben de los números enteros, puedan dar solución a las problemáticas planteadas en la guía.

Así, los lenguajes verbal y visual se manifiestan cuando los estudiantes utilicen elementos para medir, comparar, clasificar, recrear situaciones de la historia, como en el caso de medir terrenos sin una regla graduada y expresar su medida. Luego de que el estudiante estuvo inmerso en la historia y resolvió problemas como los de esa época y, habiendo respondido por completo a lo sugerido en las actividades, ya se tienen elementos para analizar los resultados, para explicar el impacto que tuvo la historia, para afirmar si de verdad favorece al aprendizaje de los estudiantes de dicho conjunto o que implicaciones tiene en la enseñanza-aprendizaje.

Es claro entonces que el profesor deberá hacer uso de su lenguaje verbal para complementar la historia en la que los estudiantes se encuentran al momento de desarrollar la guía, así se acercará a los estudiantes no solo a los antecedentes, también al dónde, cuándo, cómo y porqué de los números racionales.

Finalmente, en términos de Vygotsky el conocimiento es una construcción que se hace en lo social, en la relación con los demás mediante el uso del lenguaje y, esto supone una colaboración, un trabajo en equipo y por ende terminar concibiendo el aprendizaje como una experiencia compartida más que una experiencia individual.

4.3. Referente Disciplinar

La enseñanza y aprendizaje del concepto de número a lo largo de la vida escolar se ve de alguna manera parcelado debido a los niveles de complejidad que se deben ir desarrollando a lo largo de la misma; por lo anterior, es común iniciar la enseñanza del número partiendo de los naturales, pues, inicialmente lo que se pretende es lograr la habilidad para contar; luego, se hace necesario trascender para representar otras situaciones para las cuales los naturales se agotan, naciendo así la necesidad de implementar en la enseñanza otros conjuntos numéricos como los enteros, los racionales, reales y complejos, teniendo así, más herramientas para explicar los fenómenos que los estudiantes observan acorde a lo que aprenden.

La presente propuesta de enseñanza está encaminada hacia el conjunto de los números racionales con la intención de construir los sentidos y significados relativos a la medida, fracciones, razones, proporciones y porcentajes, haciendo un especial uso del componente histórico del mismo. Por lo que se hace necesario dejar ver su importancia en la matemática misma pues, como se trató en las líneas anteriores, el estudio de este conjunto es importante en el desarrollo del *pensamiento numérico***,** luego, es inevitable no mencionar algunos temas a posteriori, asociados con los números racionales, como por ejemplo, la teoría de probabilidades, la resolución de ecuaciones donde la incógnita tiene un valor racional, el estudio de funciones racionales, la cuales luego harán parte de una derivada o una integral, o la resolución de ecuaciones diferenciales exactas, entre muchos otros. Estos temas no están desligados a la aplicabilidad en otras ciencias o profesiones como la química, la física, la bilogía, entre otras.

De acuerdo a lo anterior cabe mencionar que la elección de los números racionales se asocia, no solo con la importancia de este tópico en el campo de la matemática, sino también con la necesidad que tienen los estudiantes de comprender escenarios del día a día, relacionados con la información que entregan los noticieros, periódicos, revistas, representada en términos de porcentajes, probabilidades, razones, fracciones, etc., frente a lo cual se requiere una interpretación desde la matemática y un acercamiento a la cultura en la que se encuentra inmerso el estudiante. En este sentido,

el manejo de los números racionales es primordial para analizar e interpretar circunstancias cotidianas, mencionando algunos temas de interés en particular, resultados de encuestas, indicadores económicos, tasas de interés ofrecidas en los bancos, descuentos en tiendas, la probabilidad de ganarse el baloto, la predicción del clima, etc.

4.4. Referente Legal o Normativo.

La presente propuesta de enseñanza se llevará a cabo en una institución del territorio colombiano, y como tal también está sujeta al análisis de los resultados que arrojan diferentes pruebas realizadas a nivel internacional, nacional e institucional.

- **Contexto internacional: Prueba PISA**

  Las pruebas PISA se aplican cada 3 años a los estudiantes de 15 años indistinto del grado escolar en que estén y para ello se hace una escogencia aleatoria para la participación, allí se evalúan las habilidades y conocimientos en las áreas de ciencias, matemáticas y lectura; escogiendo una de ellas como el énfasis cada tres años. Colombia inicio su participación en estas pruebas en el año 2006 y esto ha permitido al sistema colombiano evaluar su trabajo en materia de educación.

  La última vez que participó Colombia fue en la prueba aplicada en el 2015 donde se refleja un notable mejoramiento en las tres áreas evaluadas, sin embargo, se nota que en matemáticas es donde menos avance hubo en comparación con las otras dos. Esto se muestra mejor en el gráfico 1 tomada del informe ejecutivo por el ministerio de educación por medio del ICFES (Martínez y Mateus, 2016).

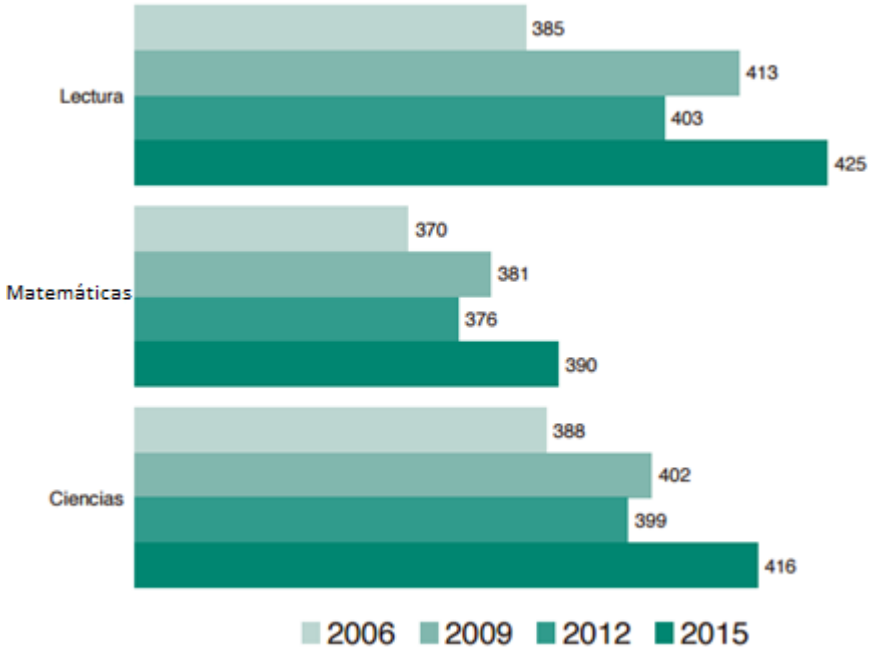


Gráfico 1: Resultados históricos de Colombia

Lo anterior deja ver que sigue siendo una necesidad la implementación de estrategias para la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Al respecto, y según lo aportan algunas investigaciones, los números racionales en particular son bastante importantes en la actividad diaria del ser humano, donde es importante tener una buena interpretación de la unidad, por lo que trabajos como el de Obando (2003) se preocupó por diseñar una estrategía de enseñanza que aboradara este campo, donde se diferenciara la unidad discreta de la unidad continua. Así, los números racionales representa uno de los topicos con mayores dicultades en este tipo de pruebas.

- **Contexto nacional: Lineamientos curriculares y Estándares Básicos en Competencias Matemáticas**

  Las pruebas a nivel nacional, como las Saber 3°, 5°, 9° y las pruebas de estado Saber 11°, son aplicadas por el instituto colombiano para la evaluación de la educación (ICFES), que complementadas con las pruebas internacionales PISA buscan determinar los avances en el aprendizaje de los estudiantes colombianos en comparación con otras economías participantes del planeta.

Para responder a estas pruebas nacionales, se dispone de los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas, como apoyo a los docentes para impartir, en este caso, la enseñanza de las matemáticas. Dichas directrices serán tenidas en cuentas en la presente propuesta de enseñanza.

- **Contexto institucional: Proyecto Educativo Institucional (PEI)**

  Se hace necesario reconocer el PEI de la institución donde se hará la intervención con la propuesta de enseñanza, para ir en la misma dirección de las intenciones pedagógicas del colegio y poder así favorecer al aprendizaje de los estudiantes.

  Se considera importante la participación de la institución en las diferentes pruebas dadas en los contextos antes descritos, pues esto le dará categoría y posicionamiento dentro y fuera del país, teniendo así herramientas para implementar estrategias de mejoramiento en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las demás áreas del conocimiento. En la prueba de estado Saber 11 los resultados correspondientes al año 2016-1 son bastantes buenos, superando incluso con un promedio de 79 al promedio Colombiano, que es de 68, con una desviación estándar muy baja, como se aprecia en el gráfico 2 (Icfes, 2016). Sin embargo, el promedio podría ser superior si se hace un trabajo mejorado en cuanto a la enseñanza de los números racionales desde grados tempranos, ya que este tema es transversal para presentar dicha prueba, por ejemplo, son necesarios para interpretar problemas de geométricos (teorema de Thales, reglas de tres, áreas, estimación de porcentajes y probabilidades, lectura de gráficas); desde grados anteriores como en sexto o séptimo grado. A continuación, se presentan un resumen del nivel de agregación, promedio y desviación de la institución.

Nivel de agregación	Promedio	Desviación
Establecimiento educativo (EE)	79	14
Sede 1	79 ●	14 ●
Sede 1 / Jornada 1	79 ●	14 ●
Colombia	68 ▲	16 ●
ET	71 ▲	15 ●
Privados ET	71 ▲	15 ●
GC 4 ET	71 ▲	15 ●

Gráfico 2: Promedio y desviación estándar en Matemáticas

Según el Índice Sintético de Calidad Educativa ISCE, las competencias que se evalúan en matemáticas en las pruebas saber 3°, 5° y 9°, son **comunicación, razonamiento y resolución**. Al colegio, por ser calendario B le correspondió presentar la prueba para el grado quinto con los estudiantes de séptimo grado en el año 2016 y algunos de los resultados que se obtuvieron fueron:

Competencia: comunicación

"El 21% de los estudiantes no usa fracciones comunes para describir situaciones continuas y discretas."

Competencia: razonamiento

"El 28% de los estudiantes no establece conjeturas acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos."

Competencia: resolución

"El 10% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas sencillos de proporcionalidad directa." (MEN, 2016)

y es así como se evidencia una necesidad de que nuestros estudiantes tengan desde el bachillerato inicial unas buenas bases conceptuales de los números racionales.

La siguiente tabla muestra las normas de acuerdo a la ley, en relación a los contextos antes mencionados:

Tabla 1:Normograma del Marco Legal

NORMATIVIDAD	TEXTO	CONTEXTO
Contexto Internacional		
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)	La prueba internacional PISA que se realiza cada tres años con la intensión de evaluar la calidad de la educación de los países miembros de la OCDE	Esta prueba es esencialmente rica para el país en el sentido de que permite visualizar cómo se está en relación con otros países vecinos o del mundo en general y, poder así los profesores evaluar si su trabajo está contribuyendo de verdad al mejoramiento de la educación
Contexto Nacional		
Ley 115 Ley general de educación. Articulo 21 (Macias, "Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón", 2015)	"El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como…"	Los aprendizajes de los conceptos matemáticos para el pensamiento humano son útiles para la resolución de problemas de la vida cotidiana. Y en esta propuesta de enseñanza en particular para los racionales también se apunta a dicho fin.

Serie Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998)	Documento que sirve como posibilitador y orientador de los procesos que se debe llevar al momento de enseñar matemáticas en el contexto colombiano.	Los lineamientos deben ser conocidos por todo profesor de matemáticas puesto que este ayuda a orientar la actividad de enseñar en dirección a los criterios nacionales establecidos. En ese sentido, la presente investigación se sustenta desde los lineamientos en cuanto a los procesos matemáticos que deben desarrollar los estudiantes tales como, el razonamiento, resolución de problemas, comunicación, modelación, elaboración, comparación y ejercitación. En este caso se busca fortalecer el proceso de **razonamiento.**
Estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2004)	Distribuidos en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo) en relación a los tipos de pensamientos que se trabajan en matemáticas.	Esta normativa apoya al presente trabajo en el sentido de que nos ubica en el conjunto de grados de **sexto a séptimo** en relación al desarrollo del **pensamiento numérico.**
Estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2004)	*Al terminar séptimo grado…* "*utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida"*	Este estándar nos ubica exactamente en el concepto sobre el cuál recae la presente propuesta de enseñanza, los números racionales.
Contexto Institucional		

Proyecto educativo institucional (PEI) Colegio Vermont School de Medellín	Enseñanza para la comprensión apoyados en el desarrollo de competencias y el uso de las TIC	Este documento ayuda a estar en dirección a los ideales pedagógicos y de formación de la institución donde se hará la intervención. Pues, con este tipo de estrategias los estudiantes comprenderán el tema y le verán más sentido a lo que aprenden y, por supuesto con la tecnología de por medio.

4.5 Marco espacial

El colegio Gimnasio Vermont es una institución educativa bilingüe calendario B, donde el español es la primera lengua y el inglés la segunda. Desde el año 2010 en el colegio se implementa un currículo internacional provisto por la universidad de Cambridge y administrado en Colombia por el consejo Británico, el cual permite a los estudiantes obtener su título de bachiller internacional y así proyectar su vida académica y profesional en importantes instituciones de educación superior tanto a nivel nacional como internacional. Del mismo modo el colegio da cumplimiento a los requerimientos mínimos del ministerio de educación MEN, los cuales son un subconjunto de los contenidos y competencias desarrollados en el currículo CIE (Cambridge International Education).

Está ubicado en la vereda Carrizales del Municipio del Retiro, al Oriente del Departamento de Antioquia y tiene como representante legal al Señor rector Oscar Mauricio Rey. El colegio se ha vinculado hace aproximadamente 6 meses a la red nacional de colegios REDCOL que administra y gestiona el currículo de diferentes instituciones educativas del país.

Su población estudiantil está conformada por familias de estrato 5 y 6, familias en su mayoría profesionales e interesados en proyectar internacionalmente a sus hijos. El colegio actualmente cuenta con tres secciones de escolaridad, iniciando con preescolar conformada por fundation, explorers, begginers, juniors, Stage 1 y Stage 2; luego con la

sección de primaria iniciando su proceso en Stages 3, 4, 5 y 6; y la sección de secundaria conformada por Stages 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Las edades de los estudiantes oscilan desde 3 a 18 años de edad.

Aunque la presente propuesta de enseñanza tiene como esencia la utilización de la historia de los números racionales como recurso didáctico para su enseñanza, se realizará también la implementación de actividades apoyadas en el uso de las TIC y así contribuir al desarrollo y cumplimiento del PEI institucional en el sentido de que el estudiante logre una comprensión de lo que se le enseña en el colegio, en este caso particular de la matemática.

CAPÍTULO II. DISEÑO METODOLÓGICO

5. DISEÑO METODOLÓGICO

5.1. Enfoque

Investigación aplicada

La investigación práctica o aplicada recibe este nombre porque esta se lleva a cabo en el lugar donde se detectó el problema y el investigador debe estar inmerso en el proceso, así lo expresa Cordero (2009) al referirse a la investigación práctica o aplicada diciendo que *"con ella, los conocimientos son devueltos a las áreas de demanda, ubicadas en el contexto, donde se da la situación que será intervenida, mejorada o transformada*". Así, de los tipos de investigación aplicada que existen, la investigación acción se preocupa por encontrar cambios en las prácticas de cierta acción para generar mejoras, y para ello utiliza como recurso la reflexión propia de la persona implicada, en este caso el docente, ya que este plantea un problema relacionado con su quehacer cuyo objetivo es mejorarla.

En relación a lo anterior, como el investigador (el docente) estará inmerso en el área de acción, la presente investigación es de tipo cualitativo, conforme al cual los estudiantes son tratados desde sus experiencias personales como actores de su contexto socio-cultural y como protagonistas de su proceso formativo; en otras palabras, dicho enfoque de investigación permite describir el fenómeno en las propias palabras de los estudiantes, sea mediante la oralidad, la escritura y/o el lenguaje gestual.

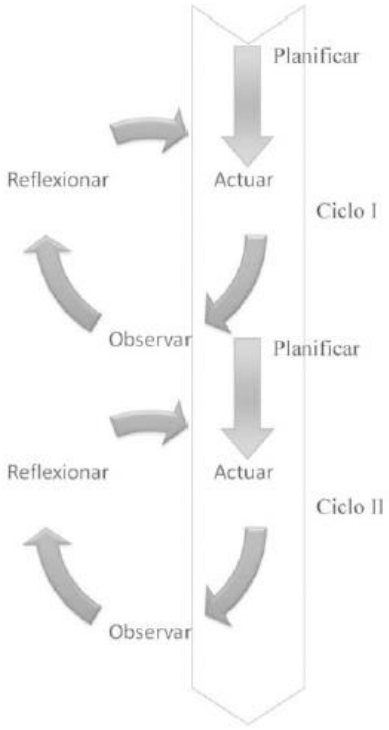
Lo anterior es sustentado desde la perspectiva de LeCompte (1995), al referirse a la investigación de tipo cualitativo como aquella que puede entenderse como una categoría de diseños de investigación que extrae descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, narraciones, notas de campo, grabaciones, transcripciones de audio y video, registros escritos de todo tipo, fotografías o películas. Con algún tipo de estas observaciones se podrá entonces tener un insumo para posteriormente hacer el análisis de todos los resultados obtenidos.

5.2. Método

Según (Sampieri, Collado, & Lucio, 2010) el método descriptivo busca medir y evaluar diversos aspectos de una población en particular, la cual es investigada; así, el presente proyecto adopta tal método dado que se busca describir cómo la historia de los números racionales como recurso didáctico favorece al aprendizaje de los estudiantes del grado séptimo del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín. De lo anterior es claro que los estudiantes juegan un papel fundamental en la presente investigación, pues serán ellos los que dejarán ver, acorde al impacto de la guía didáctica implementada, si de verdad se logró un aprendizaje de los números racionales, de tal modo que si haya herramientas para tal descripción.

La metodología llevada a cabo, para obtener la información que luego será descrita y evaluada, tiene lugar en las características esenciales de toda investigación educativa, según lo afirman Javier y Rasilla (2007), citando la espiral de ciclos de McTaggart (1988, 2000) para la investigación acción, la cual se muestra en el siguiente gráfico:

Grafico 1-La espiral de ciclos



Planificar: Para esta parte del proceso hay que pensar necesariamente en un diagnóstico sobre la población estudiada y observar lo que está sucediendo, en este caso en el campo educativo particularmente en el contexto de la de matemáticas. Luego es necesario pensar si se trata de un problema en relación con la enseñanza o el aprendizaje de un tema en particular de la matemática, para finalmente pensar en qué se puede hacer al respecto.

Directamente en lo que concierne para la presente propuesta de enseñanza, se detectó luego de un rastreo de antecedentes bibliográficos y acuerdo a la experiencia como estudiante y docente que hace falta mayor consolidación del componente histórico de la matemática, particularmente en el conjunto de los números racionales, surgiendo así la pregunta ¿Cómo la historia y epistemología de los números racionales, utilizados como recurso didáctico, favorece el aprendizaje en los estudiantes de séptimo grado del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín? y para ello se debe pensar en unos objetivos específicos que conllevarán al objetivo general propuesto al inicio de la investigación. Luego para lograr de dichos objetivos se diseñará y elaborará una unidad en la cual se encuentra una secuencia de actividades en la que están explícitos los momentos de exploración de saberes, la introducción de nuevos conocimientos y finalmente una evaluación con instrumentos como pruebas escritas (post-test), carteles, socialización grupal, representaciones gráficas, etc.

Actuar: En esta fase se debe pensar en las acciones que se llevaran a cabo para dirimir el problema detectado. Para la presente investigación esto se traduce en lo que corresponde a la intervención de aula.

Observar y evaluar: Es la fase del ciclo en que se observan los resultados obtenidos luego de haber implementado un plan de acción el cuál se supuso daría solución al problema detectado. Es de aclarar que esta fase del ciclo estará siempre presente durante la intervención, pues en todo momento se debe reflexionar sobre las acciones que se ejecutaron, no es algo exclusivo del cierre, como por ejemplo la autoevaluación y actividades de cierre que los estudiantes presentaran.

5.3. Instrumentos de recolección de la información

Cuestionarios Pre y post-test

Tanto al inicio como al final de la intervención se aplican test, uno inicial con el ánimo de diagnosticar los saberes previos de los estudiantes en relación al tema objeto de estudio, que son los números racionales; y uno final como un insumo más para clasificación y análisis de los resultados.

Guías didácticas

Estas guías hacen parte de la unidad didáctica (Anexo 1) que respalda la presente propuesta de enseñanza, por lo tanto, las secuencias de actividades que se llevarán a cabo serán una fuente primaria crucial para la obtención de la información. Así, las diferentes actividades serán desarrolladas en correlación al ciclo de aprendizaje de Jorba y Sanmartí (1993) planteado en cuatro tipos de actividades:

1. Actividades de exploración o de explicitación inicial.
2. Actividades de introducción de los nuevos conocimientos.
3. Actividades de estructuración y síntesis de los nuevos conocimientos.
4. Actividades de aplicación.

Estas guías arrojarán información en múltiples formatos, por ejemplo, en los talleres que los estudiantes por equipos deben resolver y entregar, las exposiciones o socializaciones de las actividades planteadas, los comentarios que el docente logre escuchar de los estudiantes mientras resuelven su actividad, la evaluación inicial (pre-test) y final (post-test). Se considera que este instrumento será la principal fuente de información ya que es donde habrá más interacción entre el docente, el estudiante y el contenido.

La observación cualitativa

Igualmente, la observación cualitativa, siguiendo a los autores anteriormente mencionados, es un recurso para la obtención de la información, pues permite describir problemáticas, procesos, sentimientos y toda clase de manifestaciones que se detecten sobre los sujetos que son estudiados, en este caso los estudiantes. Esta observación tendrá forma de anotaciones diarias, bien sea en medio físico o digital, será tomado en cuenta lo más relevante que se observe en los estudiantes, para luego hacer un análisis.

La información recolectada, tanto de las fuentes primarias (actividades de la propuesta), como de las secundarias (observaciones, comentarios, entre otros), se presenta a través de diagramas de barras y/o circulares (mediante Microsoft Excel O Word), para su análisis e interpretación y finalmente, consolidación de los resultados, conclusiones y recomendaciones.

5.4. Población y muestra

Población: La población hace referencia al colegio Gimnasio Vermont que será el espacio donde tendrá lugar la intervención. Se realiza en esta población porque es la institución donde labora quien dirige esta investigación, y por motivos de comodidad, economía, cercanía; se hace ventajoso llevar a cabo el estudio en dicha población.

Muestra: Es claro que se debe delimitar y elegir con qué grado se aplicará la propuesta de enseñanza y, en este caso se seleccionaron los estudiantes de séptimo grado (sexto para la escala nacional) particularmente al grupo séptimo B, el cual está conformado por 27 estudiantes.

5.5. Impacto esperado

Un compromiso con el saber didáctico, que todo docente de matemáticas debería tener en relación a la enseñanza de la misma, sería el de aportar propuestas, bien sea con especializaciones, diplomados, maestrías, doctorados o con la misma autorreflexión, que propendan por un mejor aprendizaje por parte de sus estudiantes, que comprendan lo que se les enseña y le encuentren una aplicación útil a sus vidas.

Por eso, la presente propuesta pretende dejar ver tan solo una posibilidad para acercarnos a una mejor articulación de esa relación enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que tanto requiere nuestro país. Esta propuesta está delimitada a la enseñanza de los números racionales, haciendo uso del componente histórico y epistemológico como recurso didáctico. Y así es como pretende contribuir a la comunidad académica que a diario se preocupa por avanzar y mejorar en la enseñanza de las matemáticas.

5.6. Cronograma de actividades

El siguiente cronograma relaciona las fases, objetivos y actividades a considerar durante el desarrollo del proyecto de investigación.

Tabla 2:Planeación de actividades

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Caracterización	Identificar las metodologías propias para la mejora de la enseñanza de los números racionales rescatando su historia y epistemología como recurso didáctico	1.1. Revisión bibliográfica sobre la enseñanza de las matemáticas haciendo uso de su componente histórico y epistemológico 1.2. Revisión bibliográfica sobre la enseñanza de los números racionales utilizando la historia como recurso didáctico 1.3. Revisión bibliográfica sobre los referentes teóricos para la propuesta de enseñanza 1.4. Revisión bibliográfica sobre los documentos del MEN que hablan sobre resultados de pruebas internacionales como las PISA, así como de los estándares básicos de matemáticas y de los lineamientos curriculares
Fase 2: Diseño	Diagnosticar los saberes sobre el conjunto de los números racionales y el reconocimiento de su historia en los estudiantes de grado séptimo B del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín. Diseñar una guía de enseñanza para los números racionales inspirada en componentes históricos del concepto que permita vivenciar experiencias de aprendizaje.	2.1 Diseño de talleres pre-test 2.2 Diseño y construcción de guías para la intervención 2.3 Diseño de talleres post-test
Fase 3: Intervención en el aula	Aplicar la guía de enseñanza para los números racionales en los estudiantes de grado séptimo B del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.	3.1. Intervención de la estrategia de didáctica de la propuesta de enseñanza
Fase 4: Evaluación	Evaluar la implementación de la guía de enseñanza a través de un diagnóstico final para evidenciar el impacto en el aprendizaje de los números racionales	4.1. Aplicación de talleres post-test 4.2. Recolección y validación de datos 4.3. Realización de análisis de los resultados obtenidos (dados por las herramientas de recolección)
Fase 5: Conclusiones y recomendaciones	Determinar el alcance acorde a los objetivos planteados al inicio de la presente investigación	5.1. Análisis de datos. Sistematización de la intervención en un informe final 5.2. Redacción del resultado (impacto de la propuesta) 5.3. Publicación del trabajo

Tabla 3:Cronograma de actividades

ACTIVIDAD	2016				2017							
	AGO	SEP	OCT	NOV	FEB	MAR	ABR	MAY	AGO	SEP	OCT	NOV
Actividad 1.1	X											
Actividad 1.2		X										
Actividad 1.3			X		X	X	X					
Actividad 1.4				X	X	X	X					
Actividad 2.1								X				
Actividad 2.2								X				
Actividad 2.3								X				
Actividad 3.1									X	X		
Actividad 4.1									X	X		
Actividad 4.2										X		
Actividad 4.3											X	
Actividad 5.1											X	X
Actividad 5.2											X	X
Actividad 5.3												X

CAPÍTULO III. SISTEMATIZACIÓN DE LA INTERVENCIÓN

6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

6.1. Método de la intervención

La intervención en el aula se llevó a cabo con un orden establecido teniendo siempre en mente el objetivo general y los objetivos específicos. Como el problema detectado se encontró acorde a la experiencia propia como estudiante y como docente, entonces se pensó inicialmente en aplicar un taller diagnóstico, que se denominó “pre test” con la intensión de corroborar la hipótesis inicial. Luego de aplicar este taller y observar falencias en el conocimiento histórico y por ende en otros campos relacionados con el concepto de números racionales, se procede a diseñar una secuencia de actividades que buscan poner en el centro la historia de dicho conjunto numérico como recurso didáctico (Anexo 1), tanto para exaltarla, como para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Finalmente, luego de haber aplicado la secuencia de actividades con las cuales se pretendía validar la hipótesis inicial, se procede a aplicar de nuevo el cuestionario inicial, el cual se denominó “post tes”; con el propósito de observar cambios favorables en aprendizaje de los estudiantes.

6.2. Diseño y aplicación de taller pre test. (Actividad 1)

Este primer taller consistía de 6 preguntas y buscaba hacer un diagnóstico inicial sobre el dominio de los números racionales tanto desde su componente histórico como desde el componente operativo. Para ello se pidió a los estudiantes que respondieran con mucha sinceridad las preguntas, que si algo no lo sabían el profesor no les iba a contestar ni a orientar, que no les diera pena aceptar el desconocimiento de alguna de ellas. El taller lo respondieron 26 estudiantes.

Acorde a las observaciones cualitativas que el docente iba tomando mientras los estudiantes respondían el taller, se escuchaban algunos comentarios como “eso no lo sé porque no me lo enseñaron”, “¿qué es eso de las fracciones egipcias?”. Desde un comienzo se notó el desconocimiento del origen de los números racionales, lo que era un indicativo de que las siguientes actividades debían reforzar esta parte.

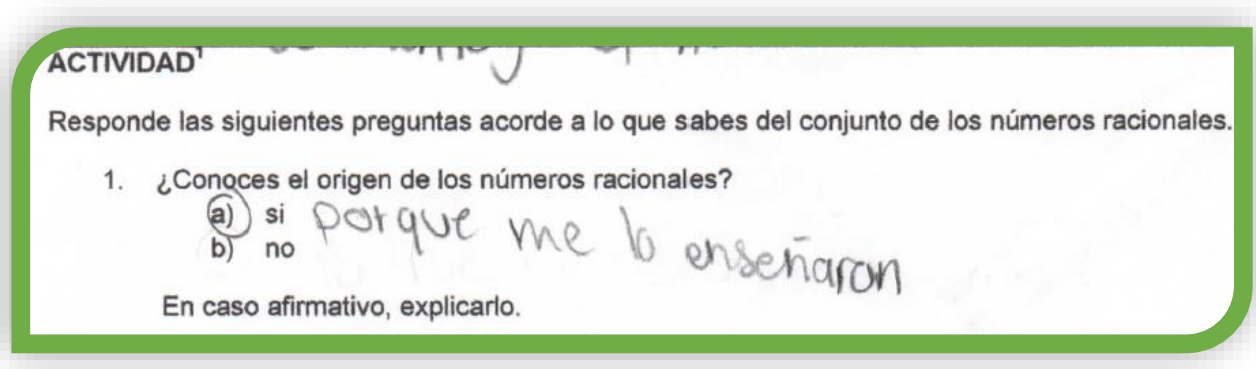
Análisis de las preguntas:

1. ¿Conoces el origen de los números racionales?
   a) Si
   b) No

   En caso afirmativo, explicarlo.

Gráfico 2: Pregunta 1 del pre-test

En este caso 24 estudiantes desconocen el origen de los números racionales, los otros 2 estudiantes que respondieron "si" su explicación era "porque me lo enseñaron" y el otro estudiante hacía referencia a los racionales como la conformación de un numerador y denominador. Esto se puede ver mejor en las siguientes ilustraciones:


ACTIVIDAD

Responde las siguientes preguntas acorde a lo que sabes del conjunto de los números racionales.

1. ¿Conoces el origen de los números racionales?
   a) si porque me lo enseñaron
   b) no

En caso afirmativo, explicarlo.

Ilustración 2:Respuesta de estudiante de grado 7°

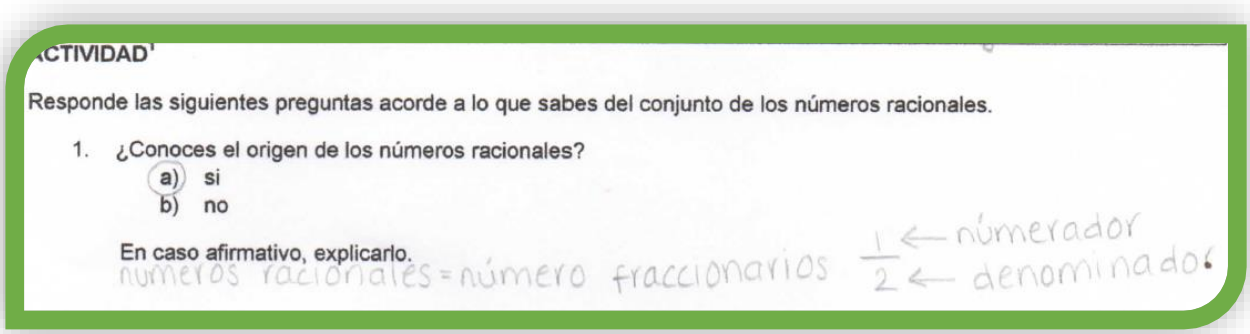


Ilustración 3:Respuesta de estudiante de 7°

Como se aprecia prácticamente ningún estudiante conoce el origen de dicho conjunto numérico.

2. ¿Conoces las fracciones egipcias?
    a) Si
    b) No

    En caso afirmativo, explicarlo.

Gráfico 3:Pregunta 2 del pre-test

Esto indica que ningún estudiante conoce sobre la primera civilización que utilizó las fracciones de numerador 1, las cuales aún utilizamos, así como su método para sumar fracciones.

3. Sustituye las palabras en cursiva por una expresión numérica.
    a) ***Media*** *hora.*
    b) Las ***tres cuartas partes*** de un iceberg está sumergidas en agua.

c) Los mares y los océanos forman aproximadamente ***siete décimos*** de la superficie del planeta.
d) Un mes es la ***doceava parte*** de un año.
e) Un cuatrimestre es la ***tercera parte*** de un año.

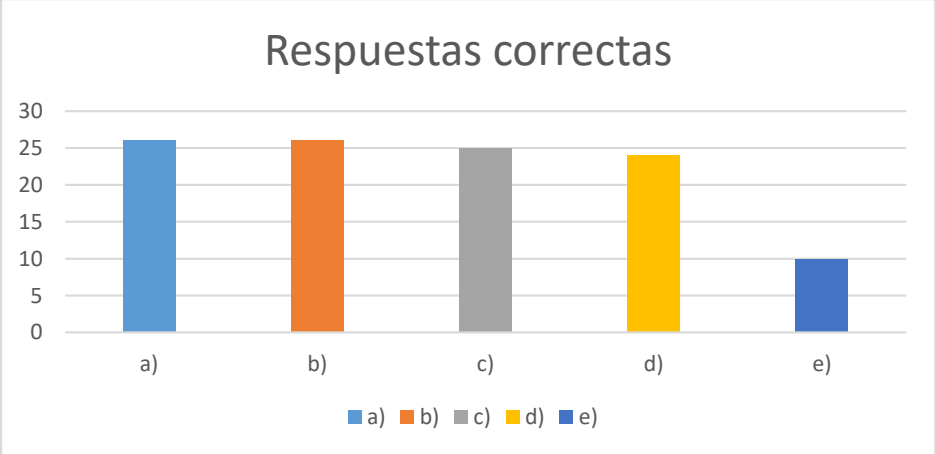


Gráfico 4:Pregunta 3 del pre-test

En esta pregunta se observa un buen dominio de los estudiantes para escribir expresiones en lenguaje natural a expresiones numéricas, en particular expresiones racionales. Las respuestas fueron variadas, por ejemplo, las respuestas para a) era posible encontrar expresiones como ½ o 30 minutos, en las preguntas b) y c) se encontraron expresiones como ¾,75% y 7/10, 70% respectivamente, para el caso de la pregunta e) fue en la que se evidenció más dificultad en los estudiantes, pues había confusión en tomar el año como unidad o dividirlo en 12 meses, si lo tomaran como unidad debían escribir 1 / 3 y si lo dividían en meses la respuesta tendría que ser 12/3=4; pero escribieron respuestas como 3/12, 12/4, 3 / 4, 3, 1/ 12,

4. De acuerdo a la siguiente imagen.
   a) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura A?
   b) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura B?

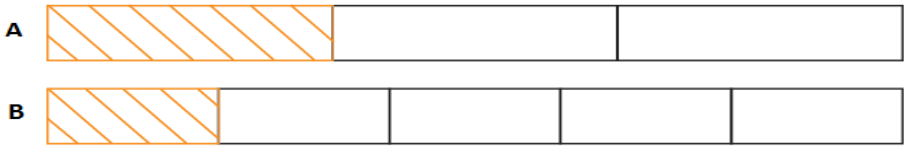


Ilustración 4. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011)

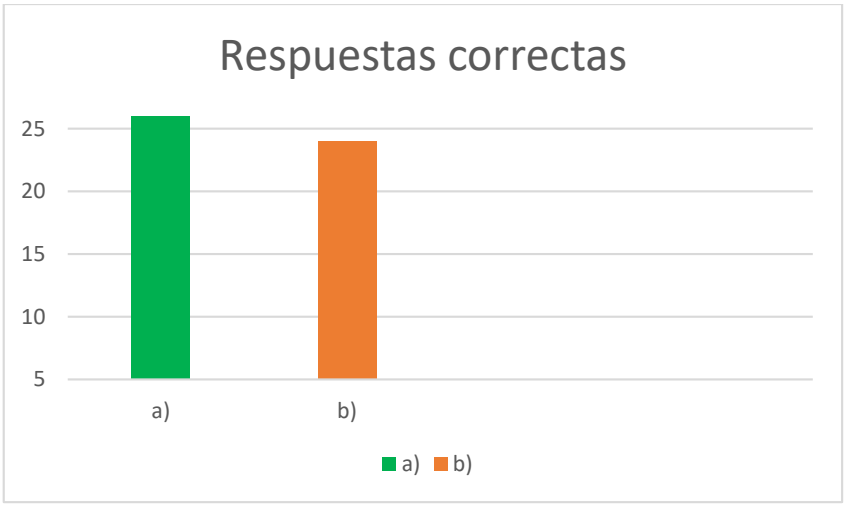


Gráfico 5: Pregunta 4 del pre-test

Se observa una buena interpretación por parte de los estudiantes en cuanto a la parte y el todo, solo 2 estudiantes en la pregunta b) no respondieron correctamente.

5. Jorge se ganó $10.000.000 y de estos, invirtió $\frac{3}{5}$ en la motocicleta que tanto deseaba; el resto lo compartió con su familia.
   a) ¿Cuánto le costó a Jorge la motocicleta?
   b) ¿Cuánto dinero compartió con su familia?
   c) ¿Qué porcentaje del total ganado costó la motocicleta?
   d) ¿Qué porcentaje del total ganado compartió con su familia?

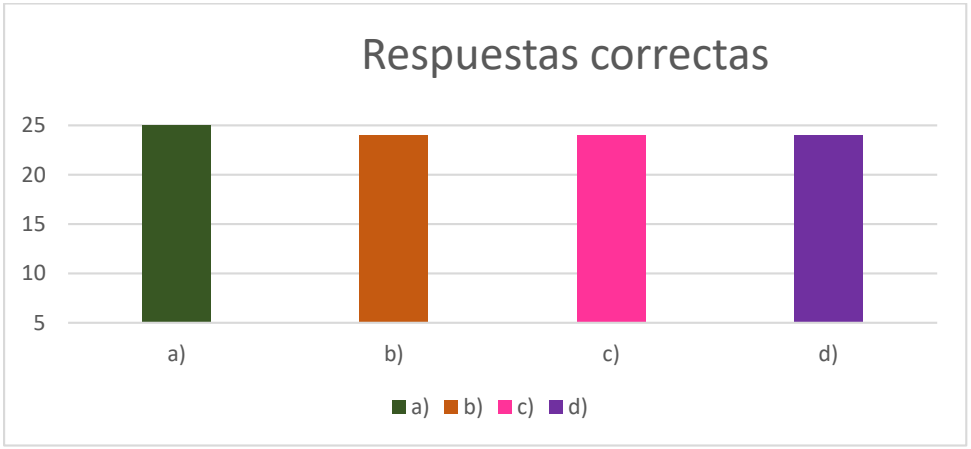


Gráfico 6:Pregunta 5 del pre-test

Solo a 2 estudiantes les costó interpretar una expresión entera como un porcentaje, se les dificultó entender 6 millones como un 60% de 10 millones y lo mismo en el caso de 4 millones.

6. Identifica en las siguientes fracciones $\frac{8}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{7}$

   a) Una fracción irreducible.

   b) Un par de fracciones equivalentes.

   c) Una fracción igual a la unidad.

Gráfico 7:Pregunta 6 del pre-test

De los 26 estudiantes que respondieron esta pregunta, 22 lo hicieron correctamente, lo que quiere decir que a los otros 4 estudiantes les cuesta la simplificación de fracciones, las fracciones equivalentes y el reconocimiento de la unidad.

Del anterior taller se evidencia que, a pesar de los estudiantes tener buen manejo operativo de los números racionales, no se evidencia lo mismo en cuanto al conocimiento del cómo, del por qué surgió cierto conjunto numérico. Esto dio pie a pensar en actividades que integraran dicho componente el cual se ha visto dejado a un lado al momento de enseñar esta temática.

6.3. Diseño y aplicación de la unidad didáctica (Actividad 2 a 5)

El diseño y aplicación de dicha unidad se hizo teniendo en cuenta el ciclo de aprendizaje planteado por Jorba y Sanmartí (1993), en el cuál se muestra una secuencia de actividades con las que se espera un aprendizaje favorable por parte de los estudiantes, en este caso particular del conjunto de los números racionales, utilizando su componente histórico como recurso didáctico. Esta secuencia consta de cuatro actividades las cuales se encuentran en la unidad didactica (Anexo 1).

A continuación se hace el análisis de cada una de las siguientes actividades:

Actividades de exploración o de explicitación inicial.

Actividades de introducción de los nuevos conocimientos.

Actividades de estructuración y síntesis de los nuevos conocimientos.

Actividades de aplicación.

6.3.1. Actividades de exploración o de explicitación inicial

Lee atentamente las situaciones planteadas:

Ilustración 5 tomada de (Castro & Osorno, 2014)

1. Uno de los estantes de una biblioteca está dividido en nueve partes iguales. En ocho de ellas se guardan los libros de una enciclopedia. ¿cuál es la fracción que representa los libros que contiene la biblioteca?

¿cómo se llaman las partes de esta fracción?

R//_____

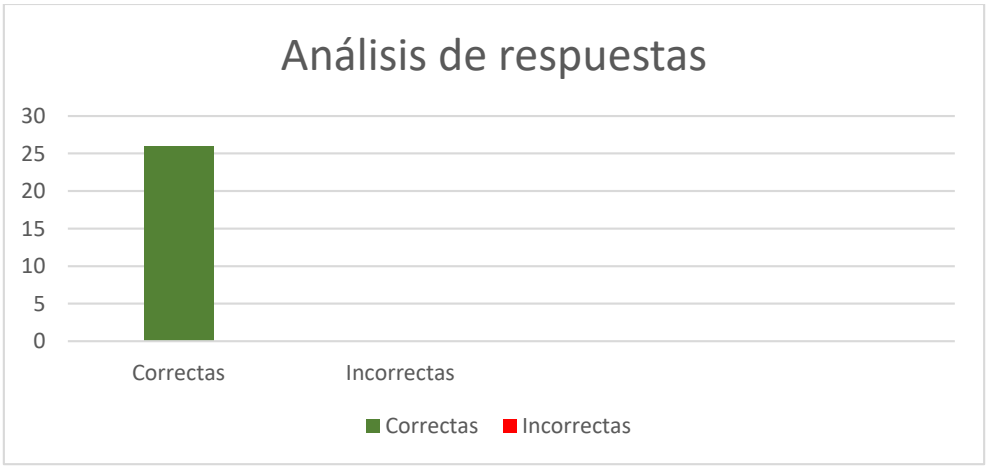


Gráfico 8: Pregunta 1 de la actividad 2

2. Manuela organizó los exhibidores de una hemeroteca así: en $\frac{8}{12}$ del exhibidor ubicó revistas sobre lugares misteriosos, y en $\frac{4}{12}$ puso revistas sobre las maravillas del mundo.

Ilustración 6 tomada de (Castro & Osorno, 2014)

¿Qué tipo de revistas ocupan la mayor parte del exhibidor?

R//_____

¿Cómo se conoce este tipo de fracciones?

R//_____

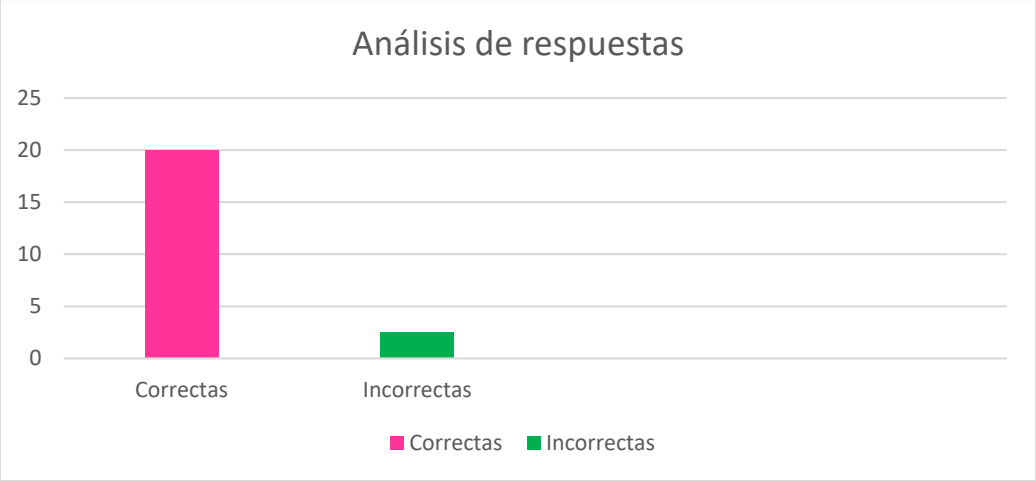


Gráfico 9:Pregunta 2 de la actividad 2

Se observa que solo 6 estudiantes tuvieron dificultad con decir que tipo de fracción eran aquellas en las que el numerador era menor que el denominador.

3. Manuela utilizó dos estantes de igual tamaño, pero con diferente número de divisiones para ubicar otras revistas. Uno de los estantes está dividido en ocho secciones iguales y ocupó una, el otro está dividido en seis secciones iguales y ocupó uno.

Dibuja los estantes de la biblioteca de Manuela y señala los espacios que ocupó.

Tabla 4:Representación de estanterías

Estante 1	Estante 2

¿Cuál de los dos estantes tiene mayor espacio ocupado?

R//_____

_____

_____

_____

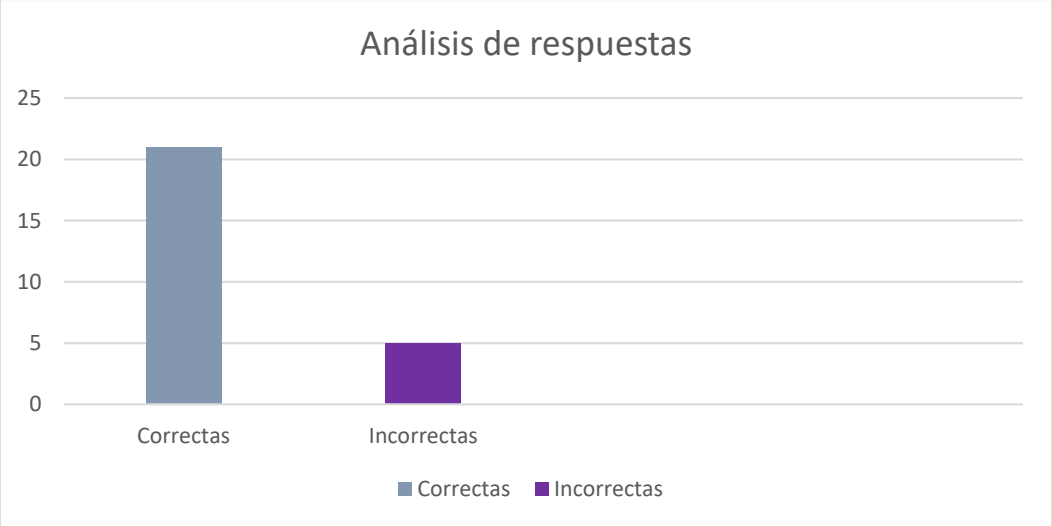


Gráfico 10:Pregunta 3 de la actividad 2

Se observa que 21 estudiantes responden correctamente las preguntas y que no tienen dificultad con la división de la unidad en partes iguales, lo contrario a 5 estudiantes que no fueron cuidadosos al momento de dibujar las estanterías y no tener en cuenta que los partes en que se divide la unidad deben ser iguales.

Esto se puede constatar mejor en las siguientes ilustraciones:

División correcta:

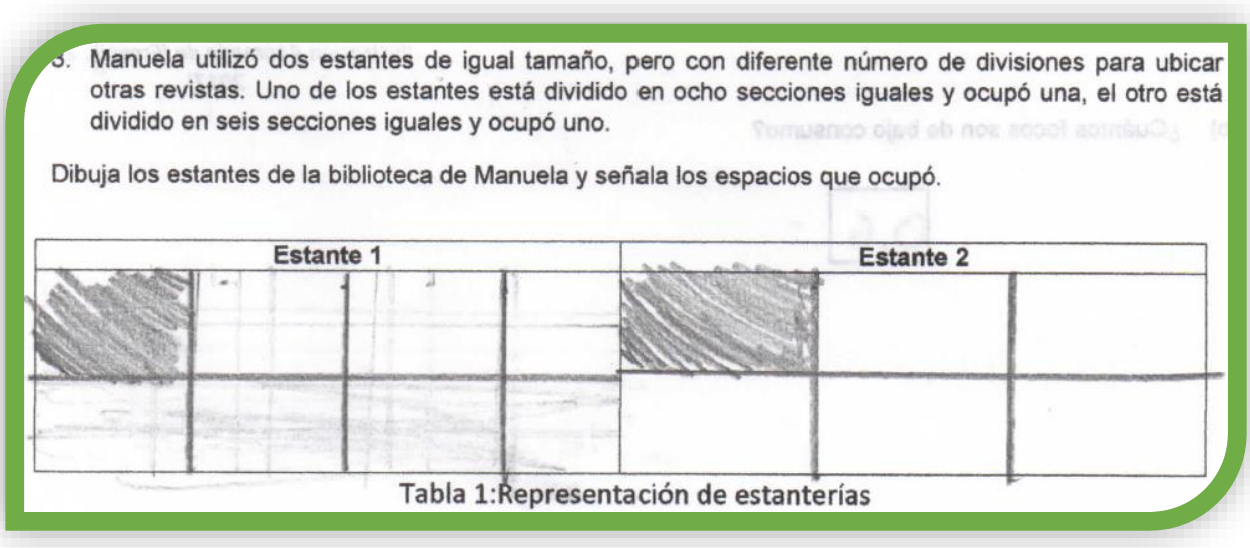
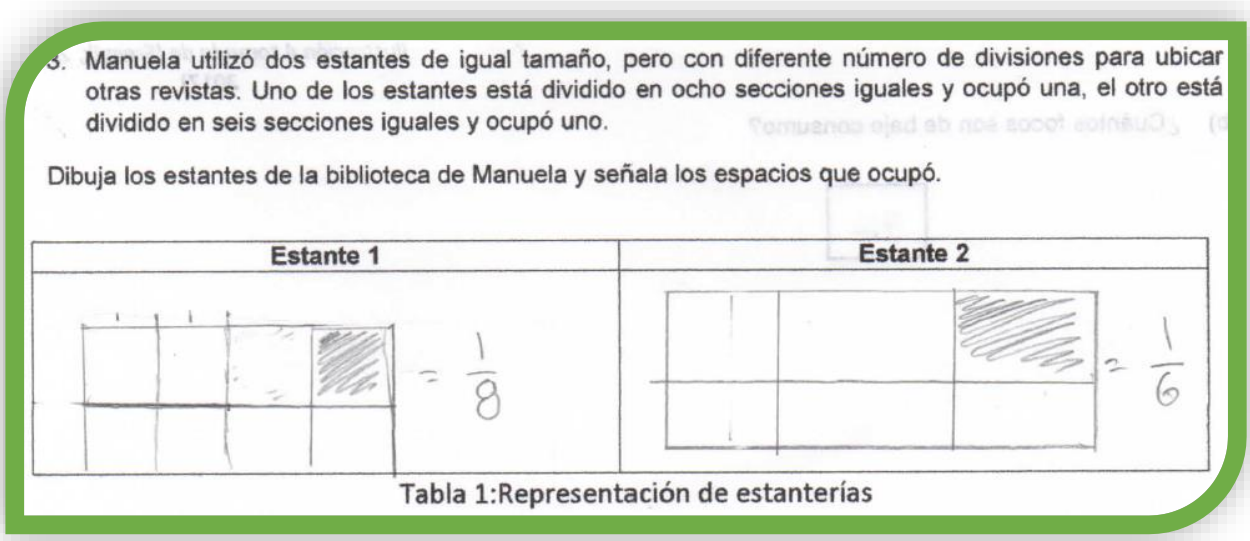


Ilustración 7:Respuesta de estudiantes de 7°


3. Manuela utilizó dos estantes de igual tamaño, pero con diferente número de divisiones para ubicar otras revistas. Uno de los estantes está dividido en ocho secciones iguales y ocupó una, el otro está dividido en seis secciones iguales y ocupó uno.

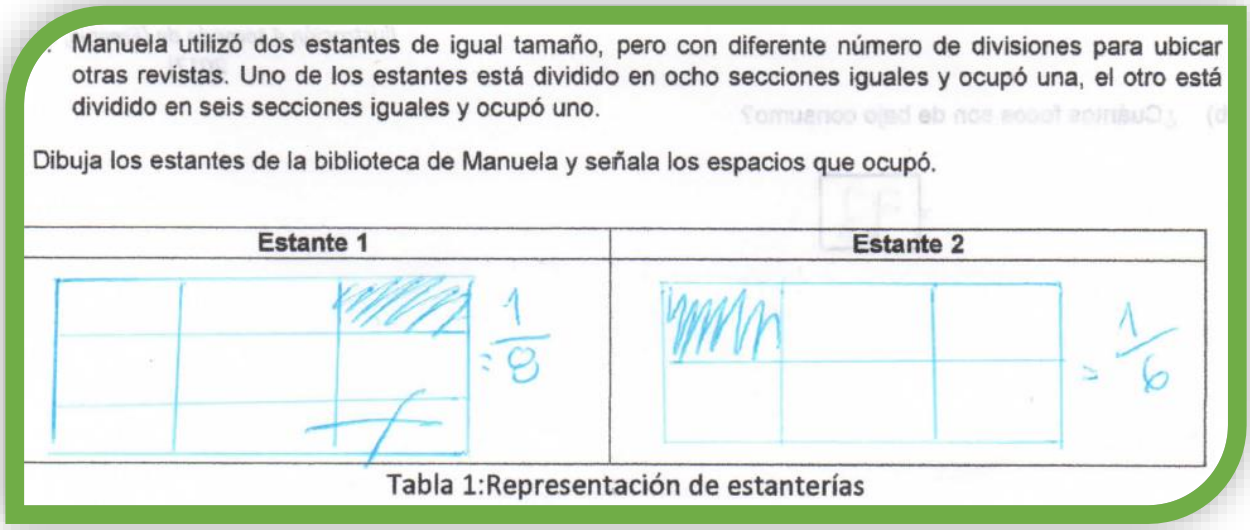
Dibuja los estantes de la biblioteca de Manuela y señala los espacios que ocupó.

Estante 1	Estante 2
= 1/8	= 1/6

Tabla 1:Representación de estanterías

Ilustración 8:Respuesta de estudiantes de 7°

División incorrecta:

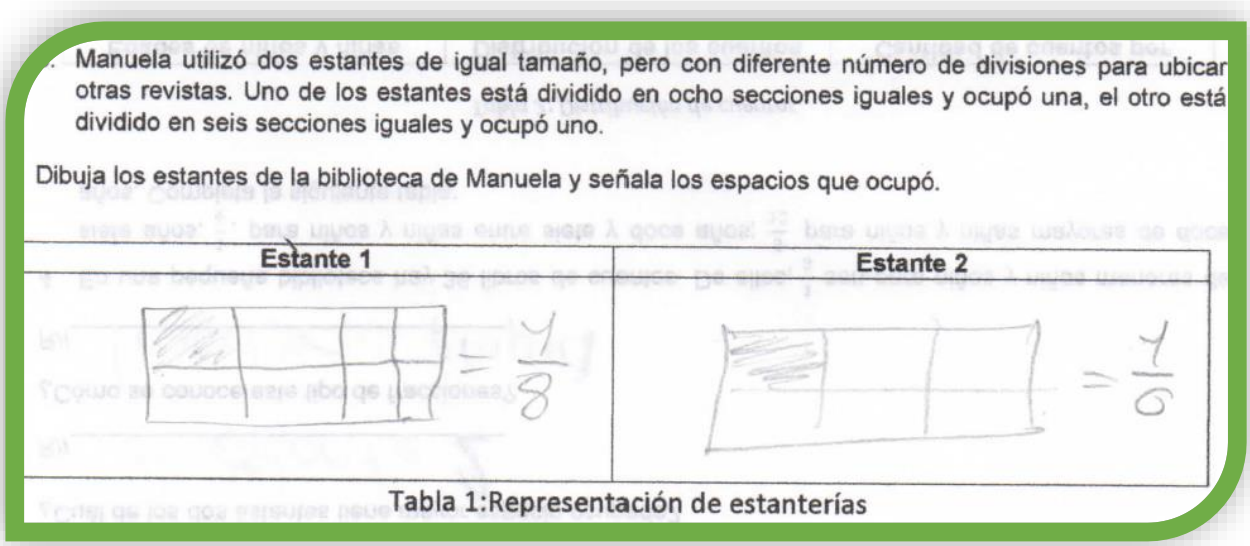

3. Manuela utilizó dos estantes de igual tamaño, pero con diferente número de divisiones para ubicar otras revistas. Uno de los estantes está dividido en ocho secciones iguales y ocupó una, el otro está dividido en seis secciones iguales y ocupó uno.

Dibuja los estantes de la biblioteca de Manuela y señala los espacios que ocupó.

Estante 1	Estante 2
= 1/8	= 1/6

Tabla 1:Representación de estanterías

Ilustración 9:Respuesta de estudiantes de 7°



Manuela utilizó dos estantes de igual tamaño, pero con diferente número de divisiones para ubicar otras revistas. Uno de los estantes está dividido en ocho secciones iguales y ocupó una, el otro está dividido en seis secciones iguales y ocupó uno.

Dibuja los estantes de la biblioteca de Manuela y señala los espacios que ocupó.

Estante 1	Estante 2
$= \frac{1}{8}$	$= \frac{1}{6}$

Tabla 1:Representación de estanterías

Ilustración 10:Respuesta de estudiante de 7°

4. En una pequeña biblioteca hay 36 libros de cuentos. De ellos, $\frac{1}{3}$ son para niños y niñas menores de siete años; $\frac{1}{4}$ para niños y niñas entre siete y doce años; $\frac{5}{12}$ para niños y niñas mayores de doce años. Completa la siguiente tabla:

Tabla 5: Distribución de cuentos

Edades de niños y niñas	Distribución de los cuentos	Cantidad de cuentos por edades
Menores de 7 años	$\frac{1}{3} * \square$	$\square$
Entre 7 y 12 años	$\frac{5}{12} * \square$	$\square$
Mayores a 12 años	$\frac{1}{4} * \square$	$\square$

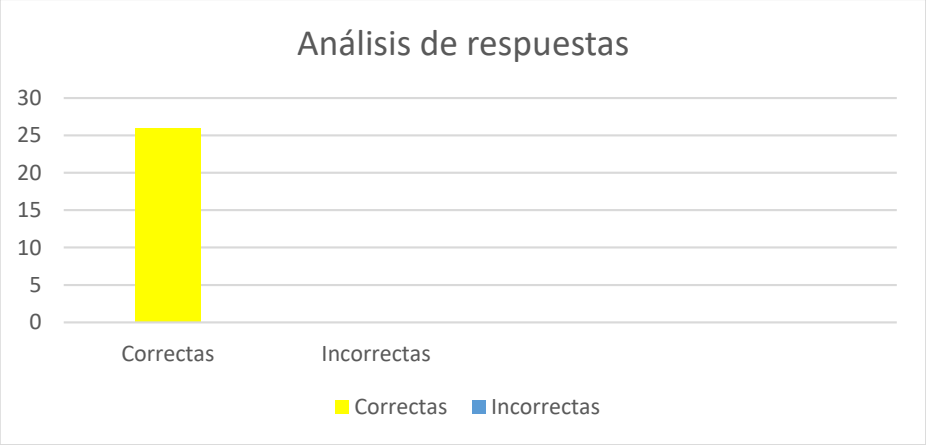


Gráfico 11:Pregunta 4 de la actividad 2

Es de reconocerle a los estudiantes que tenían muy claro cuando las fracciones se comportaban como un factor de una multiplicación, en este caso con un entero. El total de los estudiantes hicieron las operaciones correspondientes correctamente.

5. Reducir el consumo de energía es contribuir con la economía y disminución de la emisión de gases de efecto invernadero. Aníbal en su ferretería recibió un pedido de focos, las tres quintas partes del total son de bajo consumo. Si hay 120 focos de este tipo,

Ilustración 11 tomada de (Freepik, 2010-2017)

   a) ¿Qué fracción corresponde a los focos de bajo consumo?

$$\frac{\square}{\square}$$

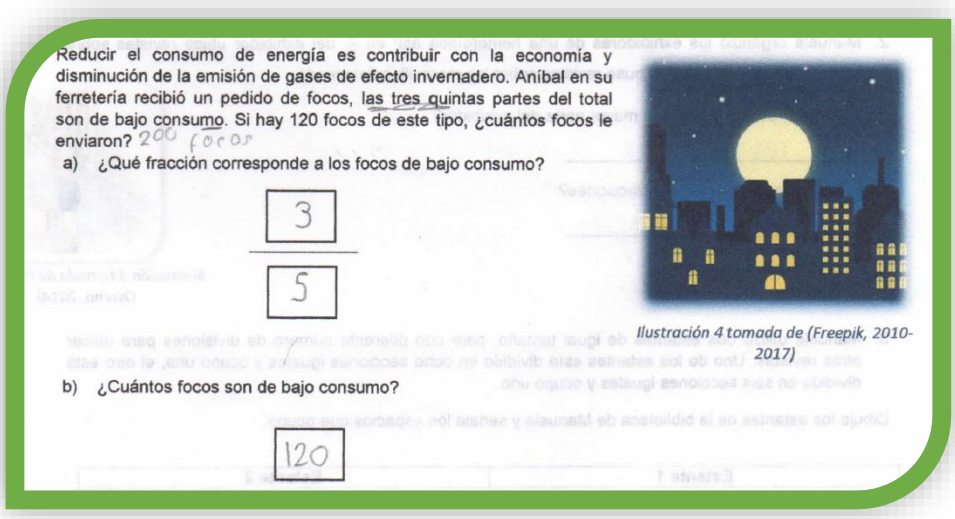
   b) ¿Cuántos focos son de bajo consumo?

$$\square$$

Gráfico 12:Pregunta 5 de la actividad 2

Se observa en la pregunta b) que a pesar de que en la pregunta anterior contestaron identificando el factor multiplicativo correctamente, en este caso se les dificultó interpretar que el total era 200 y que las 3/5 partes eran de bajo consumo. En otros casos, la respuesta se dio como 0.6, refiriéndose al porcentaje, lo cual es incorrecto porque no se le pregunta en términos de porcentajes. También hubo quienes en vez del total de bombillos que debía ser 200, pusieron 120 como factor obteniendo 72, lo cual no es correcto. Esto se ve mejor mediante las siguientes evidencias que nos proporcionó la actividad:

Respuestas correctas:


Reducir el consumo de energía es contribuir con la economía y disminución de la emisión de gases de efecto invernadero. Aníbal en su ferretería recibió un pedido de focos, las tres quintas partes del total son de bajo consumo. Si hay 120 focos de este tipo, ¿cuántos focos le enviaron? 200 focos

a) ¿Qué fracción corresponde a los focos de bajo consumo?

3/5

b) ¿Cuántos focos son de bajo consumo?

120

Ilustración 4 tomada de (Freepik, 2010-2017)

Ilustración 12:Respuesta de estudiantes de 7°

Respuestas incorrectas:

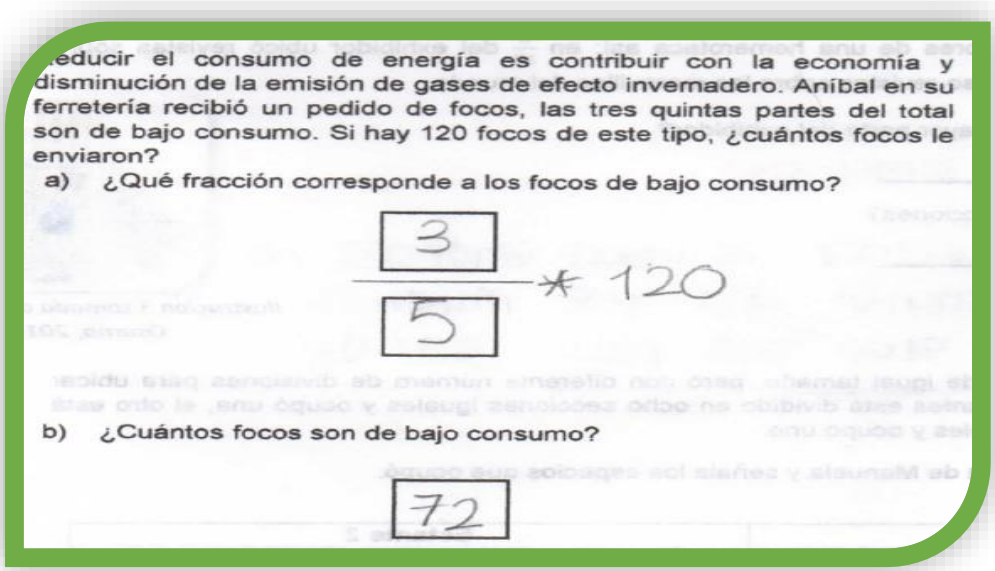


Ilustración 13:respuesta de estudiantes de 7°

Esta actividad permite ver que los estudiantes tienen una gran capacidad de reconocer los números racionales en distintas formas, aplicando multiplicaciones sencillas, evidenciando una buena interpretación de lo que es la unidad para referirse a la parte y el todo. Así, este tipo de actividades aportan a la propuesta en el sentido de que posibilitó ver en los conocimientos que los estudiantes ya tenían, el poder ampliar dicho manejo y hacer del mismo algo más completo, implementando saberes epistemológicos e históricos. La teoría de Vygotsky se evidenció en esta primera actividad del ciclo de aprendizaje en el sentido de que los estudiantes ya tienen unos saberes que no necesariamente provienen de la escuela sino de sus interacciones con la cultura.

6.3.2. Actividades de introducción de los nuevos conocimientos.

Esta actividad consistía de tres partes, una inicial en la que el docente hacía una lectura de una breve historia de los números racionales en las principales civilizaciones (Egipto, Babilonia Grecia, chinos, hindúes-Arabes), para lo cual se iban proyectando imágenes (de la lectura) y videos disponibles en Edumates (2011), permitiendo intervenciones de los estudiantes; luego ellos debían conformar grupos de 5 personas y elegir roles de coordinador, comunicador, utilero, vigía del tiempo, relator; para realizar una representación gráfica (con carteleras) sobre las

civilizaciones acorde a la presentación del docente; finalmente el relator de cada equipo debía salir y exponer en 5 minutos la civilización que les correspondió representar.

A continuación, se presenta la actividad propuesta y algunas ilustraciones en las que se dejan ver momentos de construcción y desarrollo de la actividad.

ACTIVIDAD.

Reunirse en equipos de 5 personas y realizar las siguientes actividades. Para ello cada equipo debe elegir un rol para cada uno de sus integrantes:

- Un líder o coordinador: quien lleva la secuencia y orden del trabajo que se lleva al interior del equipo.
- Un comunicador: quien se comunica con otros equipos, con el profesor con la web, entre otros, para complementar información faltante.
- Un utilero: quien se encarga de buscar, gestionar, llevar los materiales necesarios para completar la actividad.
- Un vigía del tiempo: Encargado de llevar el tiempo, verifica que se cumpla el tiempo dispuesto para cada actividad.
- Un relator: Integrante encargado de exponer, de contar y representar a su equipo ante los demás.

1. De la lectura se puede decir que los racionales tienen su nacimiento cuando

_____

_____

_____

Algunas evidencias

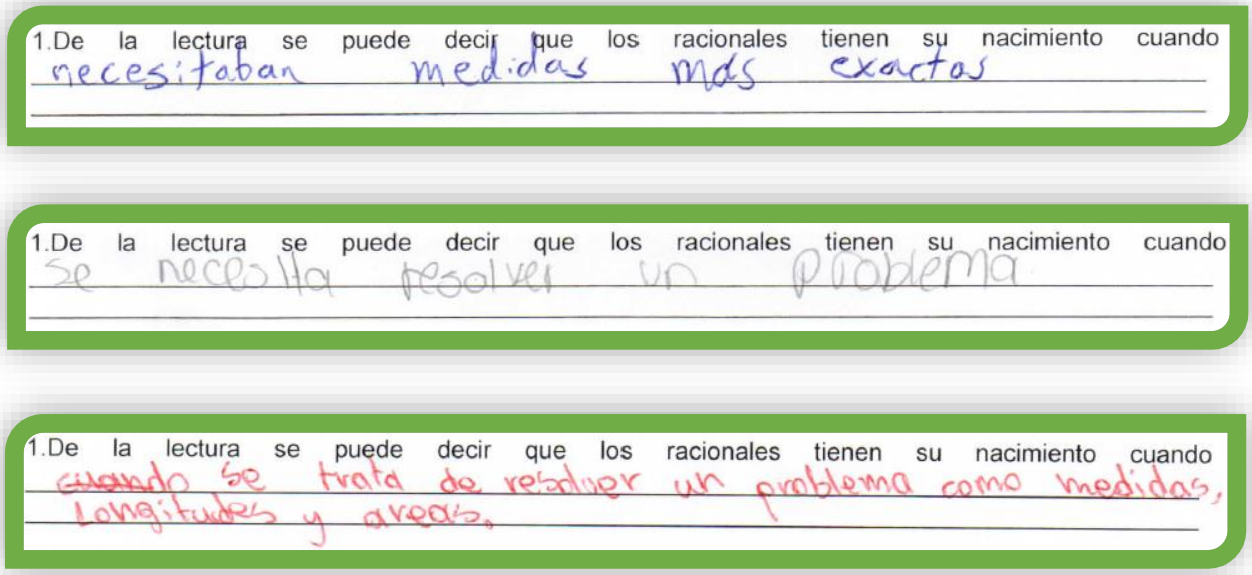


Ilustración 14:Respuestas de estudiantes de 7°

2. Representar el desarrollo de los números racionales vivido a lo largo del tiempo en las civilizaciones egipcia, babilonia, griega, china, hindú y árabe. Cada equipo se encargará de una civilización.

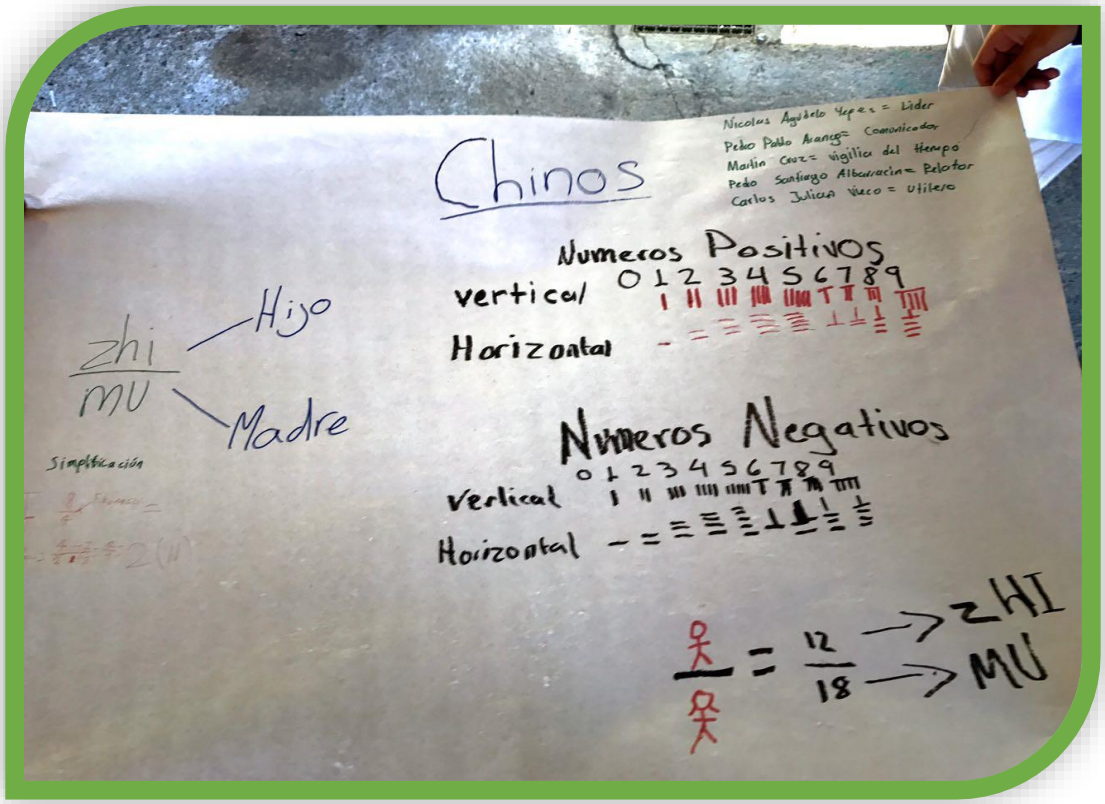


Ilustración 15:Civilización China

En la ilustración quince se observa la representación que unos de los grupos hicieron de la civilización china teniendo como precedente lo que el docente les compartió en la lectura, imágenes y videos.

En la ilustración dieciseis se observa cómo los estudiantes le dieron crédito a las civilizacion hinduarabiga porque fueron quienes introdujeron la notación a/b, mencionado además los aportes que Fibonacci hizo al campo de los números racionales.

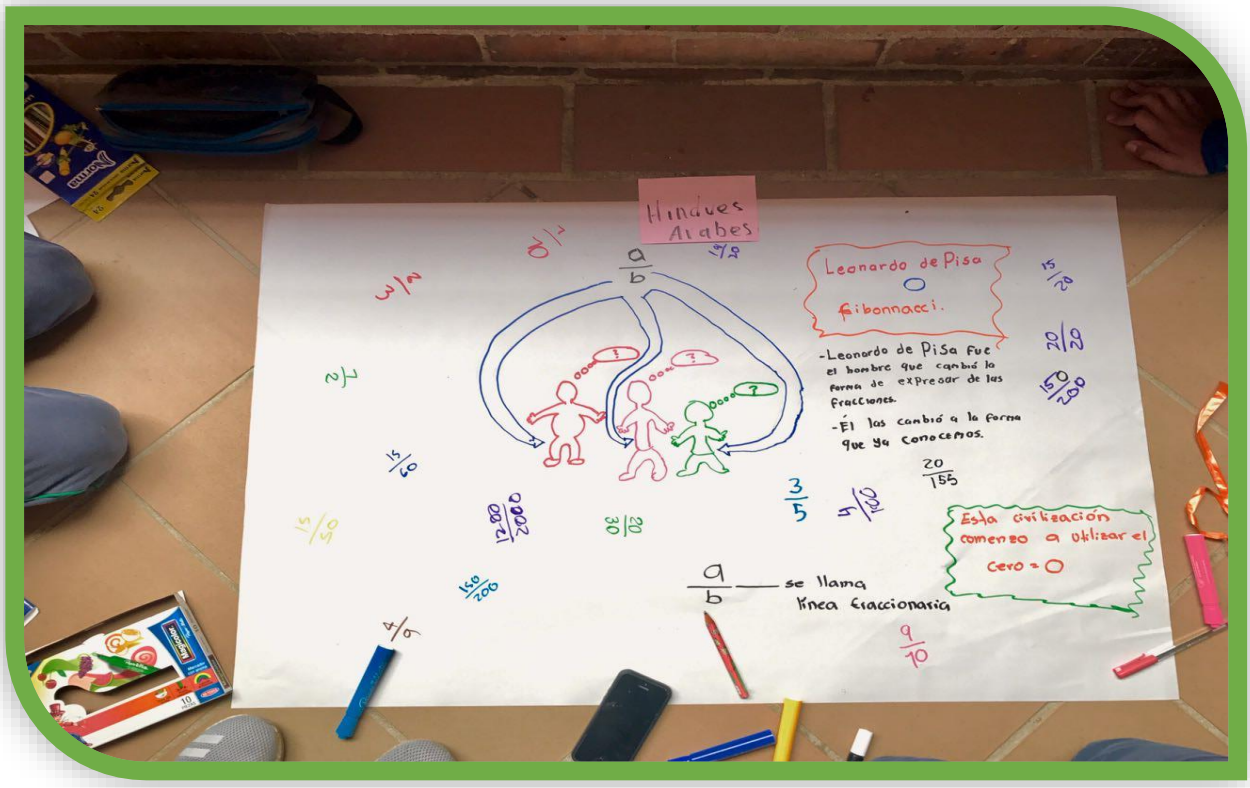


Ilustración 16:Representación de Hindues y Arabes

La representación de la civilización griega se puede ver en la ilustración siete, en la cual los estudiantes le dieron reconocimiento a la forma en como estos escribían los números racionales pues, utilizaban su alfabeto y elementos similares a una tilde para indicar fracciones. Ver actividad 3 en la unidad didáctica (Anexo 1) para mejor claridad sobre el sistema de los griegos.

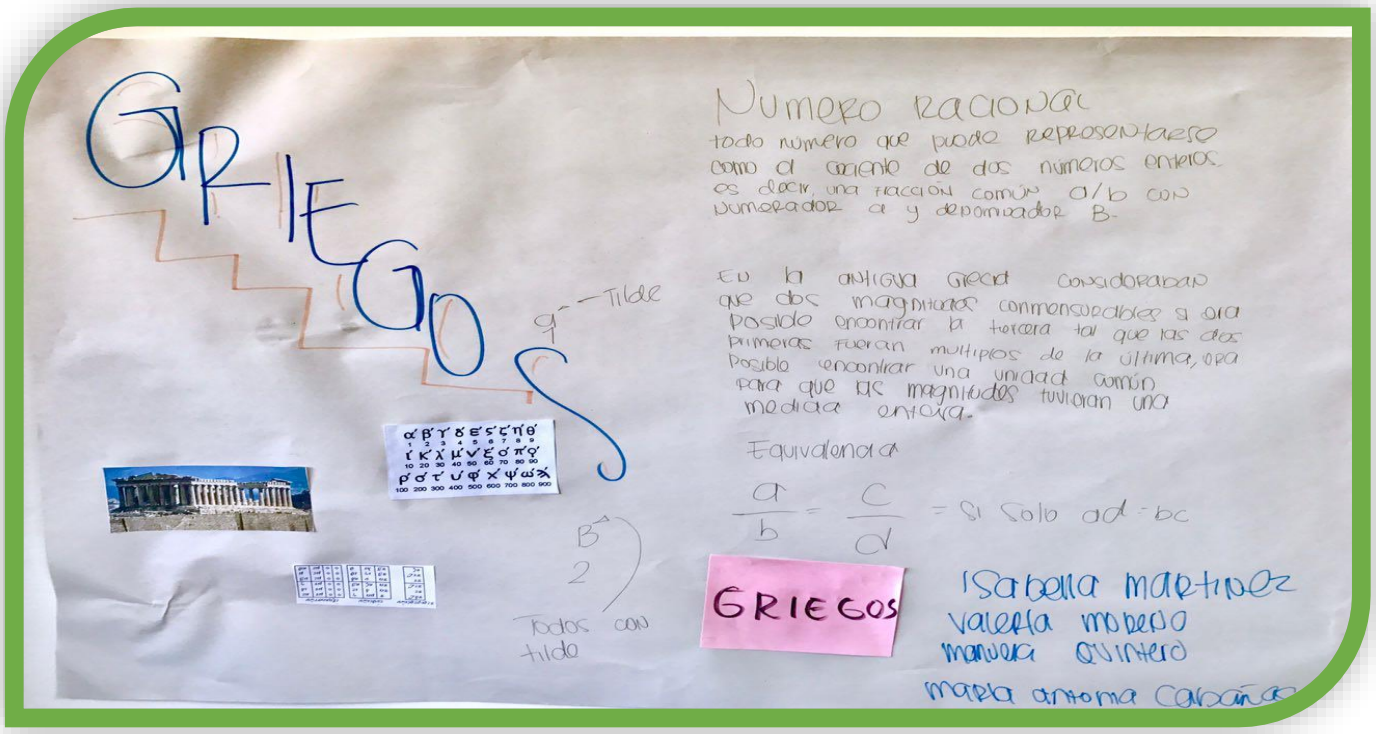


Ilustración 17:Grecia

Los estudiantes al momento de escuchar y conocer sobre la civilización Babilonia se sorprendieron por la notación cuneiforme que utilizaban para representar números, por ello en la representación de la misma se evidencia cómo se ponen imágenes relacionadas con dicha notación. Esto se ve mejor en la ilustración.

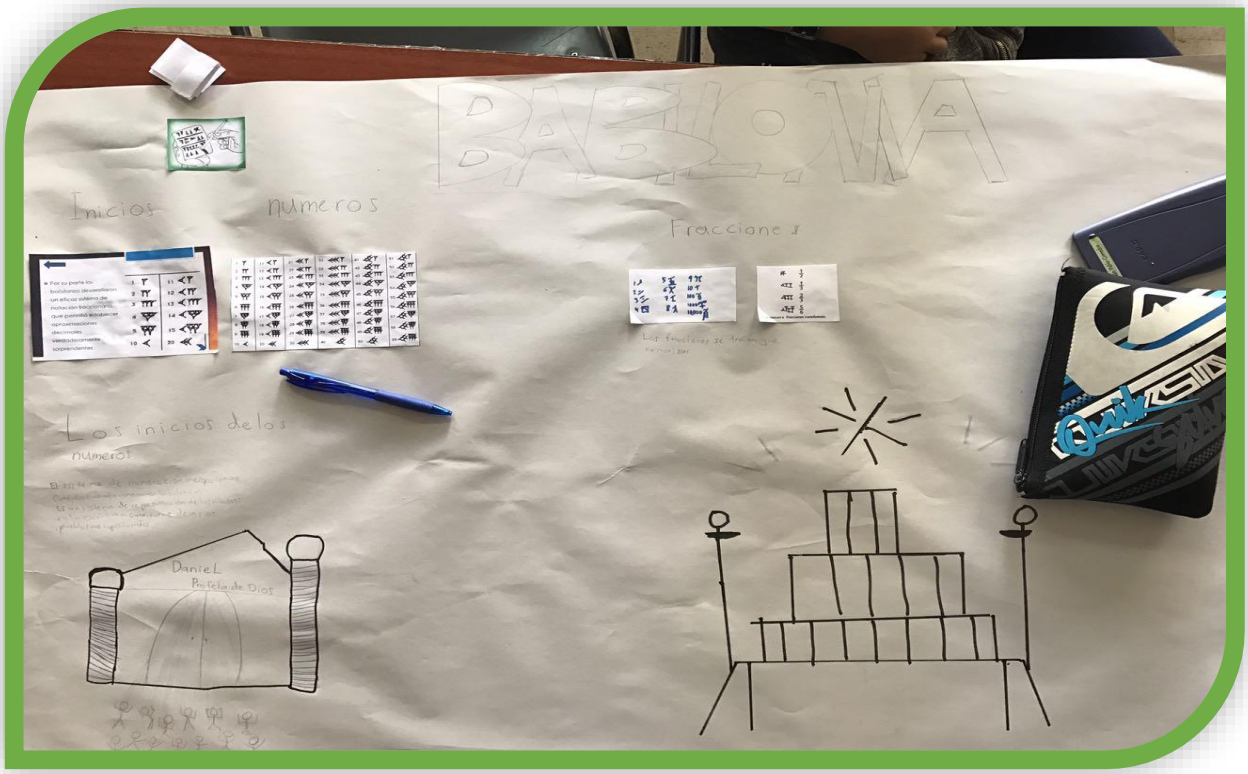


Ilustración 18:Civilización Babilonia

La civilización egipcia también fue representada por los estudiantes como es evidente en la ilustración 19 como los estudiantes identificaron las civilizaciones unitarias egipcias, al igual que el papiro de Rhind.

Ilustración 19:Egipto

Como se puede ver, esta actividad aporta conocimiento nuevo a los estudiantes para ir en dirección al ciclo de aprendizaje que se ha tomado como referencia, así, se puede decir que ha sido una actividad satisfactoria y contribuyente para la presente propuesta en el sentido de que verdaderamente era algo que a los estudiantes les hacía falta, reconocer el origen y razones por las cuales se originaron los números racionales. Y la teoría socio-histórica de Vygotsky se refleja claramente en la introducción de ese saber nuevo que se complementa con los saberes previos

que los estudiantes ya tenían. Esta actividad se constituyó en ese elemento con el que se considera los estudiantes complementarían sus conocimientos iniciales, a la vez que les permitió ver que el hombre es quien crea su conocimiento desde la cultura y es moldeado por la misma como bien lo afirma Lucci (2006).

6.3.3. Actividades de construcción de conocimientos

La siguiente actividad consiste en que los estudiantes estén inmersos mediante la exploración en situaciones reales, como a las que las antiguas civilizaciones se enfrentaban, medir terrenos, medir objetos cercanos, repartir comida, etc. Con esto en mente, se buscó que los estudiantes construyeran nuevo conocimiento.

1. Elegir un instrumento patrón de medida de entre un palo de escoba, una tabla, un marcador, un lapicero, un clip metálico, una cabuya, etc. y medir los objetos que se muestran en la tabla 3, poniendo sus medidas correspondientes con cada patrón. Cada grupo debe medir mínimo tres objetos con al menos tres patrones.

	Objeto 1:	Objeto 2:	Objeto 3:	Objeto 4:
Patrón 1:				
Patrón 2:				
Patrón 3:				
Patrón 4:				

Tabla 6: Exploración con patrones

En este punto, es evidente que los estudiantes tuvieron en cuenta lo nuevo que aprendieron en las actividades anteriores, algunos estudiantes consignaron

respuestas en las que se veía la mezcla del lenguaje numérico y verbal como se puede ver en la ilustración.

Tabla 3: Exploración con patrones

	Objeto 1: Mesa	Objeto 2: Puerta	Objeto 3: Cajonera	Objeto 4: lockers
Patrón 1: Tabla corta	2 y un cuarto	2 y medio	1	2 y un cuarto
Patrón 2: (corta) Cinta verde	2 y medio	3	1	2 y un cuarto
Patrón 3: Cuerda	1	1	mitad	1
Patrón 4: Palo	2 y medio	3	2 y medio	1

Ilustración 20:Respuesta de estudiantes de 7°

Pero también fue posible encontrar respuestas en las que era necesario utilizar las partes del cuerpo o el nombre de las herramientas con que se medía, exactamente como lo hacían los antepasados, veámoslo en la ilustración.

Tabla 3: Exploración con patrones

	Objeto 1: televisor	Objeto 2: ancho mesa	Objeto 3: borrados tablero tabla	Objeto 4: Gafas Juampa tabla
Patrón 1: tabla	2 tablas	2 tablas	0.25	0.30
Patrón 2: brazo	2.5 brazos	2.4 brazos	0.60 brazo	0.42 brazo
Patrón 3: tirita	2.2 tiritas	2.1 tiritas	0.32	0.20 tirita
Patrón 4: palillos	16 palillos	16 palillos	2 palillos	2 palillos

Ilustración 21: Respuesta de estudiantes de 7°

2.Comparar las medidas obtenidas con su patrón y las obtenidas por los demás. Escribe unas cortas líneas de lo observado al comparar:

_____

_____

_____

_____

Acá nos encontramos con respuestas que hacían alusión a la longitud del instrumento con que se mide, como la responsable de la exactitud de la medida obtenida, un grupo de estudiantes observó que "*como la cuerda era más larga entonces no necesito que se repitiera mucho como otros".* Otro encontró que "*Las medidas con los palillos son más exactas. Los demás son casi todas decimales".*

Lo importante acá es que se reconoce la necesidad de fraccionar algo (ese algo como la unidad) que se tuviera que utilizar una cantidad de veces determinada para poder medir algo.

3. Ahora mide el objeto asignado con los tres patrones de medida (las tres cintas) y consigna los resultados en la tabla 4.

Tabla 7: mediciones con cintas

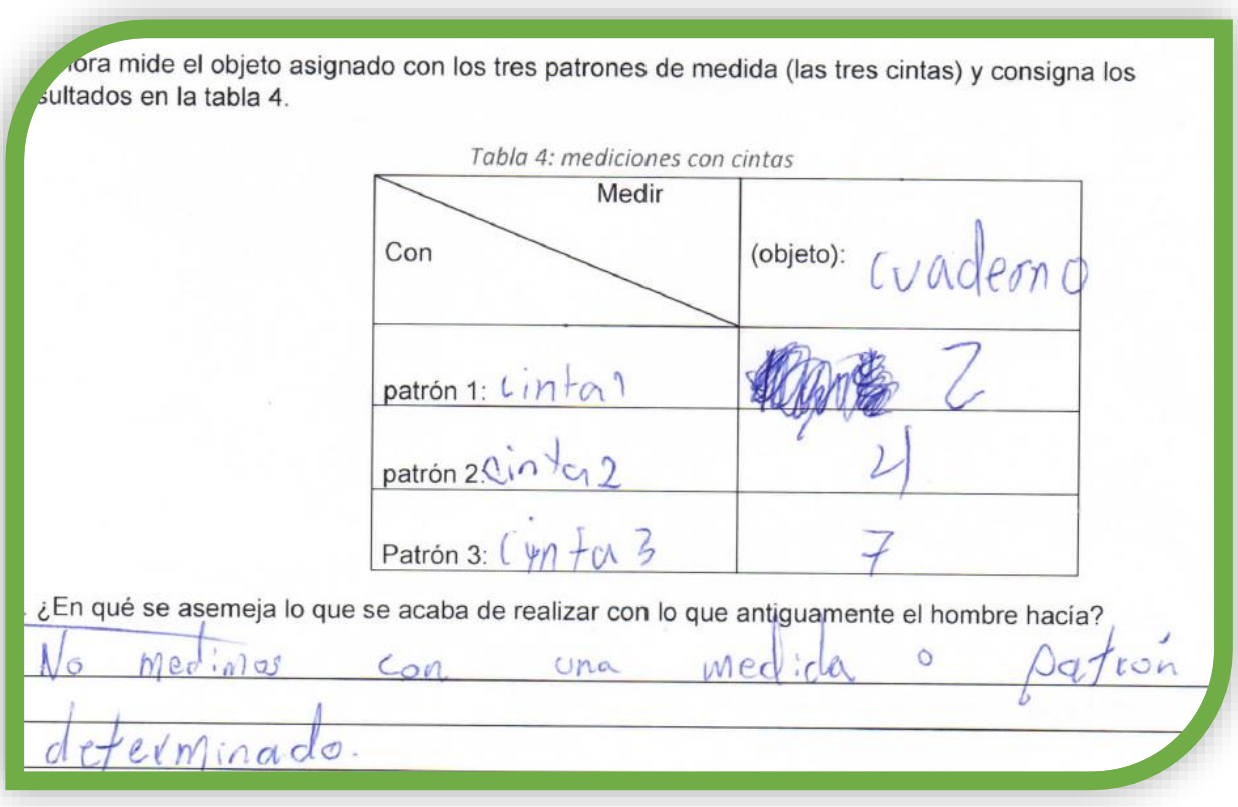
Medir / Con	(objeto):
patrón 1:	
patrón 2:	
Patrón 3:	

¿En qué se asemeja lo que se acaba de realizar con lo que antiguamente el hombre hacía?

_____
_____
_____
_____

La intensión con esta actividad era tomar un solo objeto y medirlo del lado más largo con distintos patrones. El objetivo acá era tanto contextualizar al estudiante en cómo se medía anteriormente y la necesidad de las fracciones, como construir la idea proporcionalidad.

Algunas de las respuestas que los estudiantes dieron se ven en las siguientes dos ilustraciones:



ora mide el objeto asignado con los tres patrones de medida (las tres cintas) y consigna los sultados en la tabla 4.

Tabla 4: mediciones con cintas

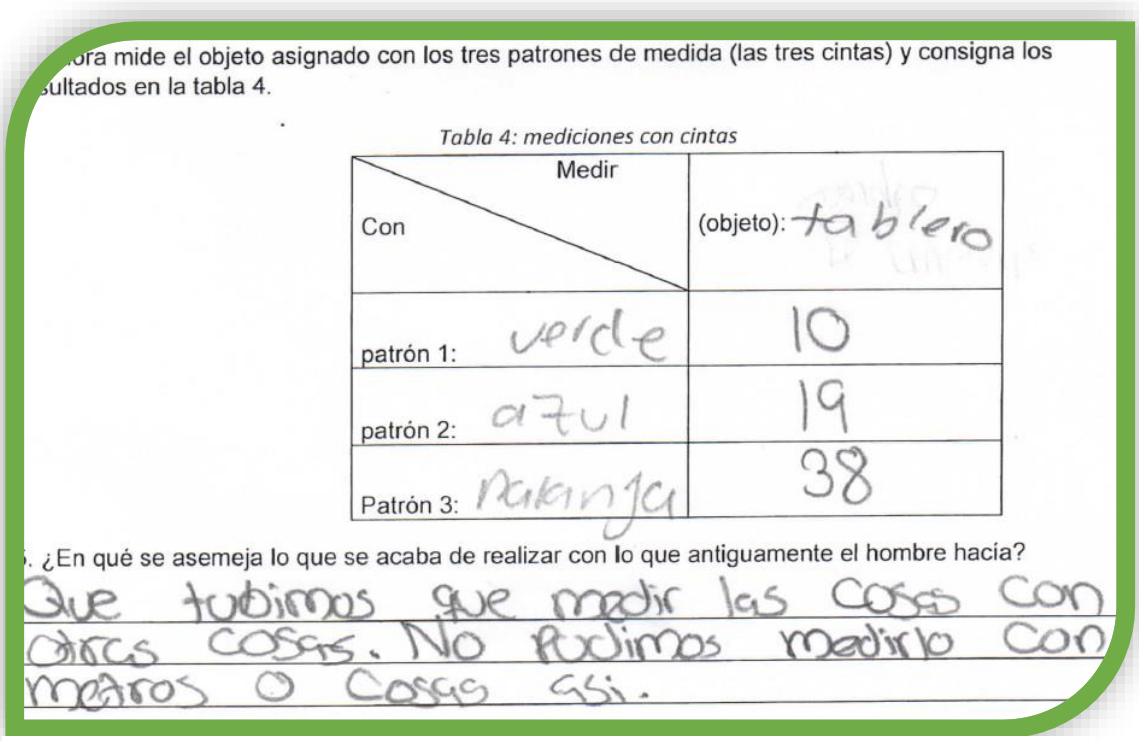
Con \ Medir	(objeto): cuaderno
patrón 1: cinta1	2
patrón 2: cinta 2	2
Patrón 3: cinta 3	7

¿En qué se asemeja lo que se acaba de realizar con lo que antiguamente el hombre hacía?

No medimos con una medida o patrón determinado.

Ilustración 22:Respuesta de estudiantes de 7°

Acá se evidencia una aproximación a la proporción 1, ½ y ¼ y afirman que tuvieron que hacerlo con un patrón determinado (dado por el profesor).



ora mide el objeto asignado con los tres patrones de medida (las tres cintas) y consigna los sultados en la tabla 4.

Tabla 4: mediciones con cintas

Con \ Medir	(objeto): tablero
patrón 1: verde	10
patrón 2: azul	19
Patrón 3: Naranja	38

. ¿En qué se asemeja lo que se acaba de realizar con lo que antiguamente el hombre hacía?

Que tubimos que medir las cosas con otras cosas. No Podimos medirlo con metros o Cosas asi.

Ilustración 23:Respuesta de estudiantes de 7°

Igual que el anterior, se observa una aproximación a la proporción 1, ½ y ¼, afirmando en este caso que debieron utilizar herramientas que no estaban graduadas y que eran elementos aleatorios (dados por el profesor).

Ahora, veamos unas ilustraciones en las que se observan los estudiantes midiendo objetos de su entorno:

Ilustración 25:Estudiantes midiendo puerta

Ilustración 24:Estudiantes midiendo escritorio

Ilustración 26:Estudiante midiendo mesa de estudio

Ilustración 27:Estudiante midiendo televisor

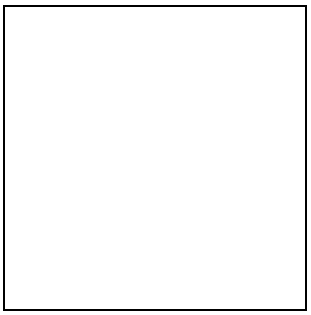
Esta actividad buscaba que los estudiantes relacionaran lo nuevo que el profesor les había presentado en la actividad anterior para que construyeran su conocimiento, pero poniendo en el centro la idea de que el mismo se sitiera como si estuviera en el pasado y teniendo que resolver problemas del común. Así, esta actividad se ajusta a la presente propuesta, porque evidenció conclusiones y reflexiones por parte de los estudiantes, en relación a lo que desconocían y al componente histórico, que es el eje central del estudio. Y la teoría socio-histórica de Vygotsky se refleja claramente en la construcción del conocimiento, complementado con esos saberes previos de los estudiantes. Adicionalmente, el lenguaje, que es un concepto primordial (Lucci, 2006), jugó un papel esencial en las actividades, cuando los estudiantes se vieron en la necesidad de expresar medidas con partes de su cuerpo, con elementos del entorno, pues vieron una necesidad de comunicarse y esto lo hicieron como sus antepasados.

6.3.4. Actividades de aplicación.

La siguiente actividad consiste en que los estudiantes apliquen el conocimiento construido anteriormente en situaciones reales, que resolvieran cada problema siempre pensando en un contexto histórico, donde las herramientas eran mínimas.

1. En un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno inicial y el ancho son dos quintos del ancho inicial.

a) Realizar el dibujo de la situación:



b) ¿Qué parte del terreno ocupará la escuela?

En fracción (como lo escribirían los griegos)	En porcentaje

Explica cómo se obtuvieron los resultados:

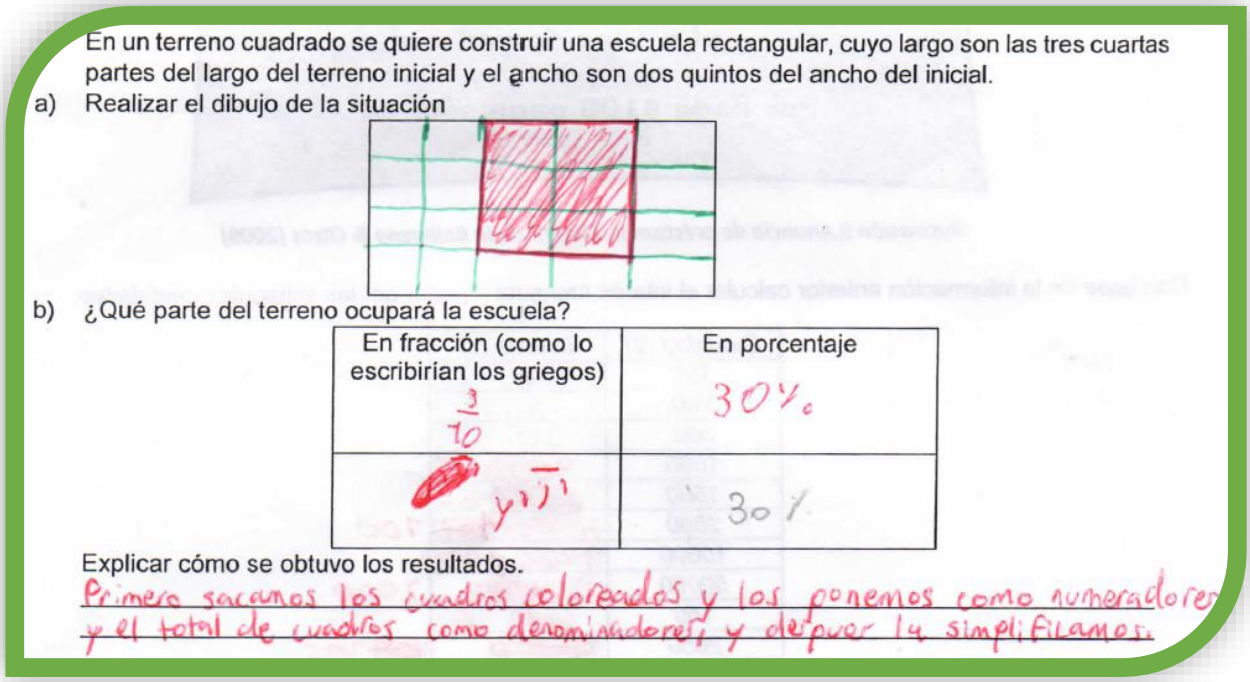
_____

_____

_____

_____

Las respuestas y procedimientos de los estudiantes fueron muy buenos, además, utilizaron correctamente las notaciones de los griegos y tienen muy clara la noción de porcentaje. Con las siguientes imágenes podemos constatarlo:


En un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno inicial y el ancho son dos quintos del ancho del inicial.

a) Realizar el dibujo de la situación

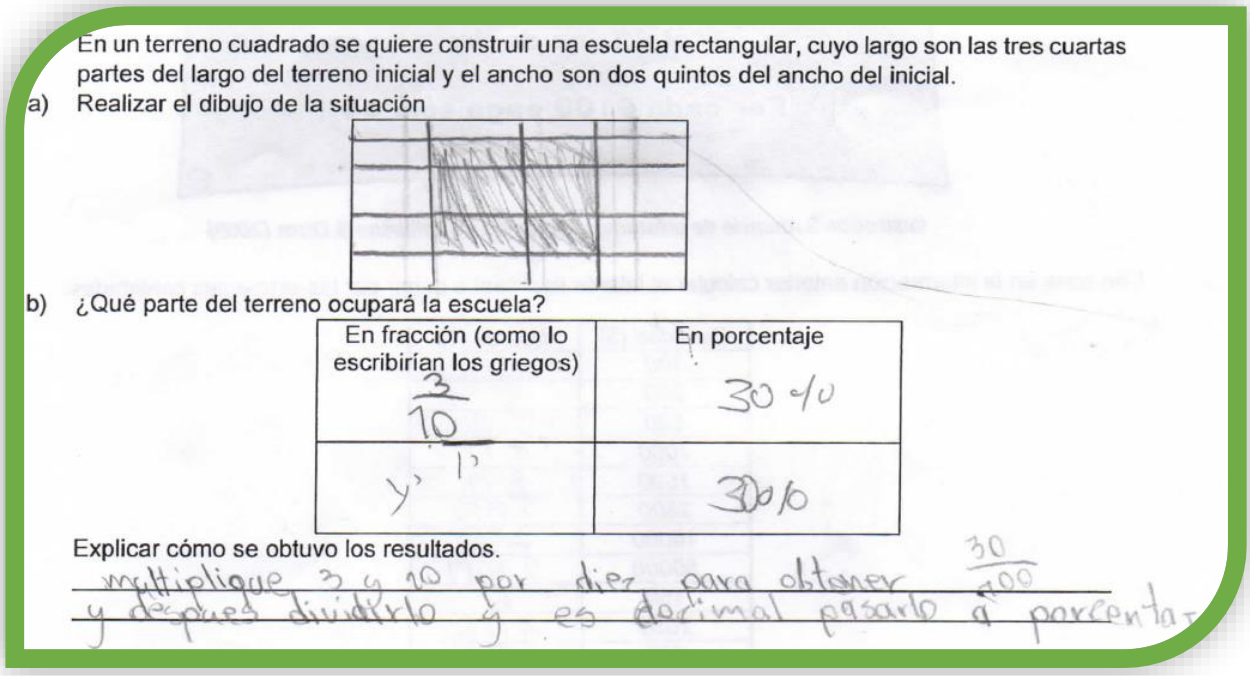
b) ¿Qué parte del terreno ocupará la escuela?

En fracción (como lo escribirían los griegos)	En porcentaje
$\frac{3}{10}$	30%
y' 1'	30 %

Explicar cómo se obtuvo los resultados.

Primero sacamos los cuadros coloreados y los ponemos como numeradores y el total de cuadros como denominadores; y después la simplificamos.

Ilustración 27:Respuesta de estudiantes de 7°


En un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno inicial y el ancho son dos quintos del ancho del inicial.

a) Realizar el dibujo de la situación

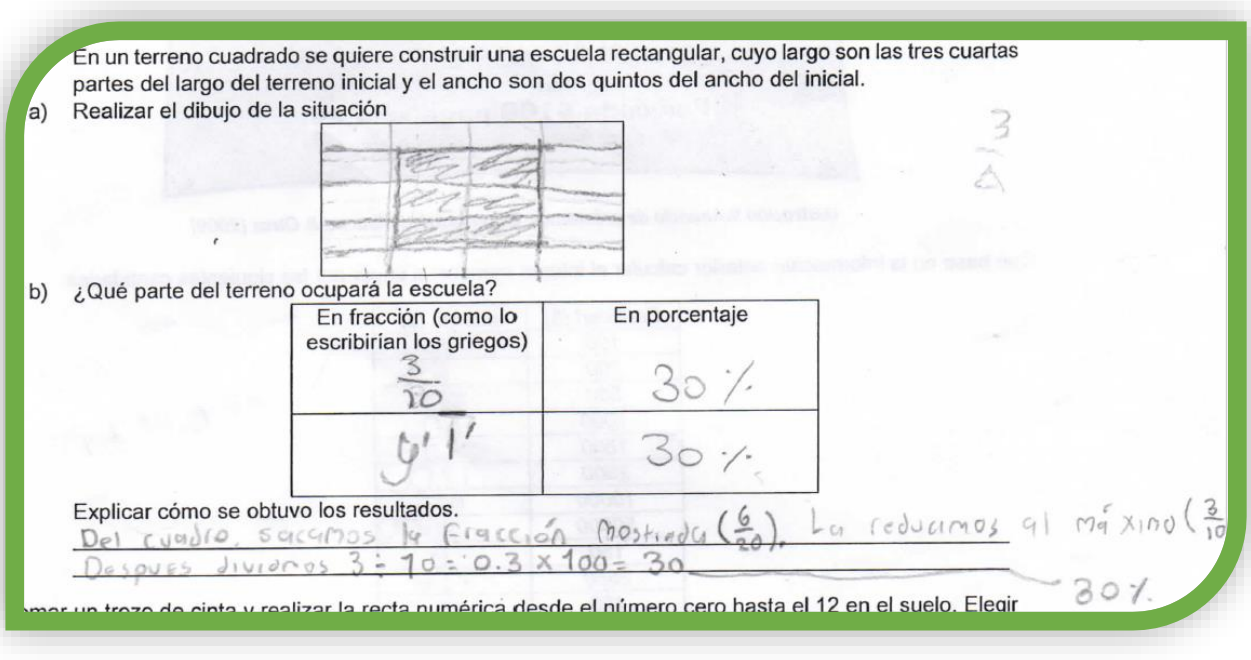
b) ¿Qué parte del terreno ocupará la escuela?

En fracción (como lo escribirían los griegos)	En porcentaje
$\frac{3}{10}$	30 %
y' 1'	30%

Explicar cómo se obtuvo los resultados.

multiplique 3 y 10 por diez para obtener $\frac{30}{100}$ y después dividirlo y es decimal pasarlo a porcenta

Ilustración 28:Respuesta de estudiantes de 7°



En un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno inicial y el ancho son dos quintos del ancho del inicial.

a) Realizar el dibujo de la situación

b) ¿Qué parte del terreno ocupará la escuela?

En fracción (como lo escribirían los griegos)	En porcentaje
$\frac{3}{10}$	30 %
6' 1'	30 %

Explicar cómo se obtuvo los resultados.

Del cuadro, sacamos la fracción mostrada $(\frac{6}{20})$. La reducimos al máximo $(\frac{3}{10})$

Después dividimos 3 ÷ 10 = 0.3 x 100 = 30 30%

mar un trozo de cinta y realizar la recta numérica desde el número cero hasta el 12 en el suelo. Elegir

Ilustración 29:Respuesta de estudiantes de 7°

2.Tomar un trozo de cinta y realizar la recta numérica desde el número cero hasta el 12 en el suelo. Elegir a un integrante del grupo para que sea el **robot** para resolver las siguientes situaciones.

Sabiendo que los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3, si el robot se para en el punto 6 y da un solo paso hacia la derecha,

a) ¿cómo se representa el número del punto en el que se detiene? (escriba el resultado como lo escribirían los chinos)

_____

_____

b) Indicar otros cinco puntos donde pararía el robot, que no sean los indicados por los números naturales, y asignar un número a cada uno de esos ellos.

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5

Otro **robot** (elegir otro integrante), da pasos de distinta longitud que el robot anterior. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

a). Si el robot está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?_____

_____

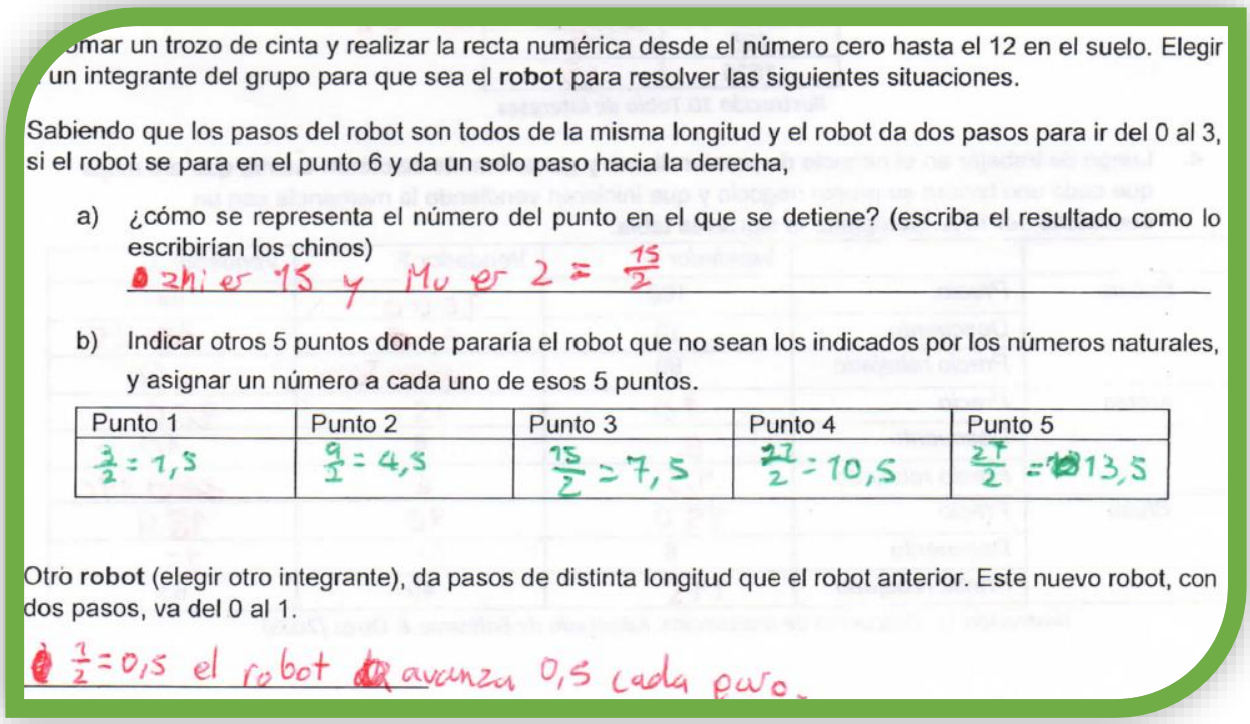
b). ¿Cuál es la relación entre los pasos de los dos robots?_____

_____

_____

Este punto deja ver claramente como los estudiantes identifican los números decimales finitos como números racionales, que representaban los pasos de los robots; los estudiantes concluyeron que no eran pasos enteros. Además, tenían claridad sobre la nomenclatura que la civilización china utilizaba.

Veamos algunas evidencias:



omar un trozo de cinta y realizar la recta numérica desde el número cero hasta el 12 en el suelo. Elegir un integrante del grupo para que sea el **robot** para resolver las siguientes situaciones.

Sabiendo que los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3, si el robot se para en el punto 6 y da un solo paso hacia la derecha,

a) ¿cómo se representa el número del punto en el que se detiene? (escriba el resultado como lo escribirían los chinos)

Dividir 15 y Mu er 2 = $\frac{15}{2}$

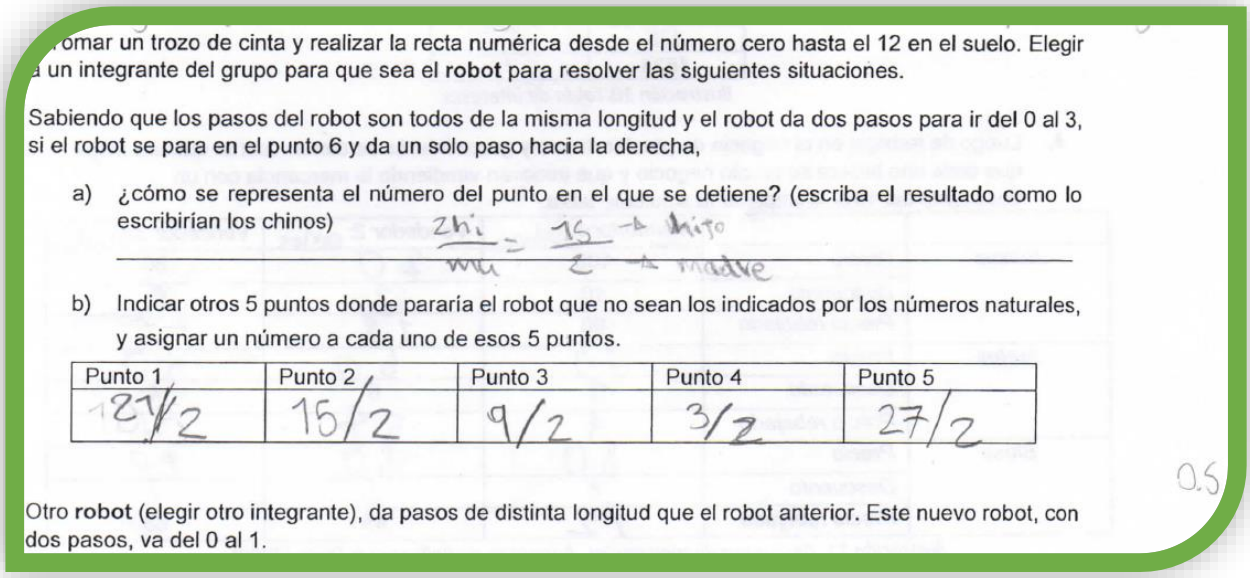
b) Indicar otros 5 puntos donde pararía el robot que no sean los indicados por los números naturales, y asignar un número a cada uno de esos 5 puntos.

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5
$\frac{3}{2}$ = 1,5	$\frac{9}{2}$ = 4,5	$\frac{15}{2}$ = 7,5	$\frac{21}{2}$ = 10,5	$\frac{27}{2}$ = 13,5

Otro **robot** (elegir otro integrante), da pasos de distinta longitud que el robot anterior. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

$\frac{1}{2}$ = 0,5 el robot avanza 0,5 cada paso.

Ilustración 30:Respuesta de estudiantes de 7°



omar un trozo de cinta y realizar la recta numérica desde el número cero hasta el 12 en el suelo. Elegir un integrante del grupo para que sea el **robot** para resolver las siguientes situaciones.

Sabiendo que los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3, si el robot se para en el punto 6 y da un solo paso hacia la derecha,

a) ¿cómo se representa el número del punto en el que se detiene? (escriba el resultado como lo escribirían los chinos) 15/2 → 十五分之二

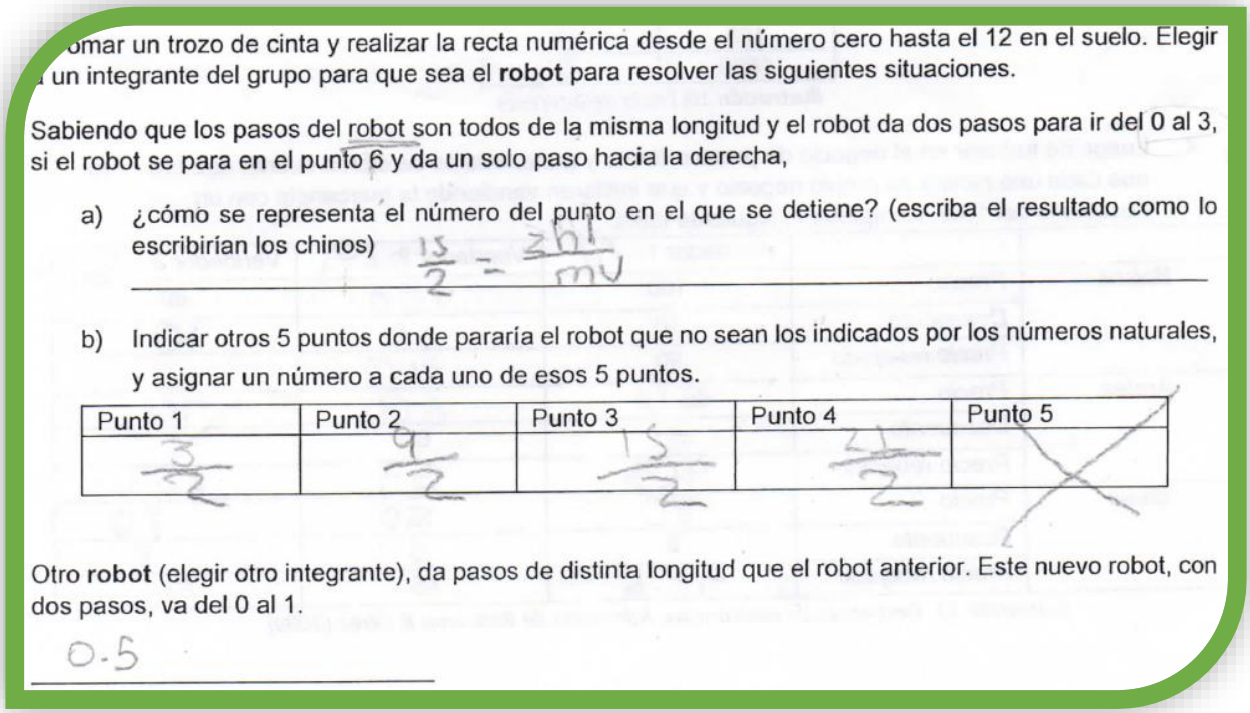
b) Indicar otros 5 puntos donde pararía el robot que no sean los indicados por los números naturales, y asignar un número a cada uno de esos 5 puntos.

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5
-27/2	15/2	9/2	3/2	27/2

0.5

Otro **robot** (elegir otro integrante), da pasos de distinta longitud que el robot anterior. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

Ilustración 31:Respuesta de estudiantes de 7°



omar un trozo de cinta y realizar la recta numérica desde el número cero hasta el 12 en el suelo. Elegir un integrante del grupo para que sea el **robot** para resolver las siguientes situaciones.

Sabiendo que los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3, si el robot se para en el punto 6 y da un solo paso hacia la derecha,

a) ¿cómo se representa el número del punto en el que se detiene? (escriba el resultado como lo escribirían los chinos) 15/2 = 十五分之二

b) Indicar otros 5 puntos donde pararía el robot que no sean los indicados por los números naturales, y asignar un número a cada uno de esos 5 puntos.

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5
3/2	9/2	15/2	21/2	

Otro **robot** (elegir otro integrante), da pasos de distinta longitud que el robot anterior. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

0.5

Ilustración 32:Respuesta de estudiantes de 7°

3. Los integrantes de tu equipo piensan prestar dinero y cobrar interés para así obtener una ganancia, para ello realizan un cartel como el que se muestra

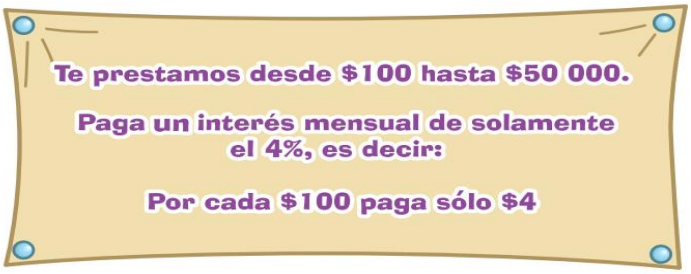


Ilustración 33.Anuncio de préstamos. Obtenido de Balbuena & Otros

Con base en la información anterior calcular el interés mensual a pagar por las siguientes cantidades:

Cantidad ($)	*Interés ($)*
100	
200	
500	
1000	
1500	
2500	
10000	
50000	
150	
2650	
125	
1625	

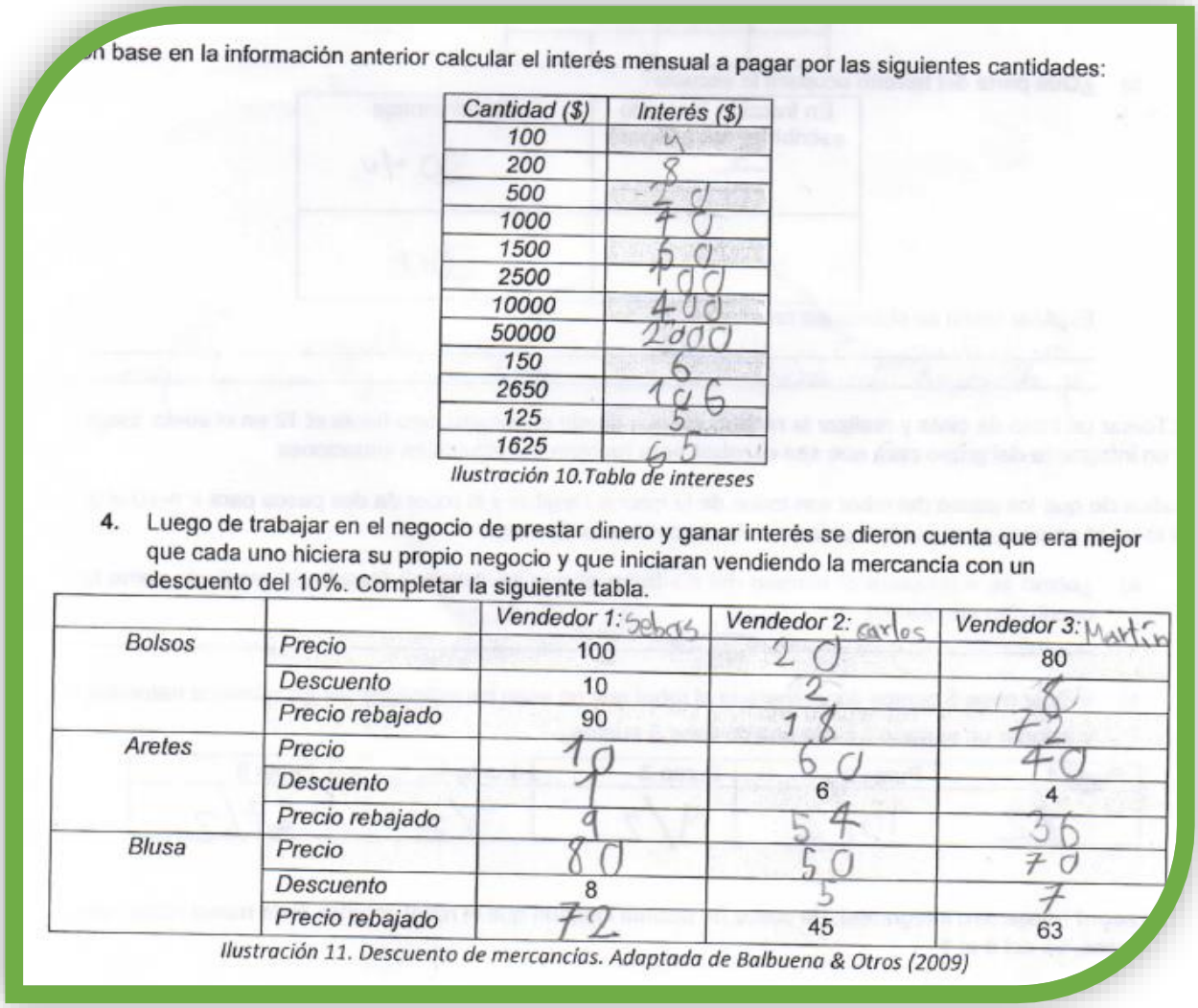
Ilustración 34.Tabla de intereses

4. Luego de trabajar en el negocio de prestar dinero y ganar interés se dieron cuenta que era mejor que cada uno hiciera su propio negocio y que iniciaran vendiendo la mercancía con un descuento del 10%. Completar la siguiente tabla.

		Vendedor 1:	*Vendedor 2:*	*Vendedor 3:*
Bolsos	*Precio*	100		80
	Descuento	10		
	Precio rebajado	90		
Aretes	*Precio*			
	Descuento		6	4
	Precio rebajado			
Blusa	*Precio*			
	Descuento	8		
	Precio rebajado		45	63

Ilustración 35. Descuento de mercancías. Adaptada de Balbuena y Otros (2009)

En los puntos 3 y 4 se observa que los estudiantes tienen muy buen reconocimiento de las cantidades porcentuales, aplicándolas a una situación de ganancia en negocios. Así, como se mencionó anteriormente, los estudiantes tienen un excelente dominio operativo del conjunto de los números racionales y los porcentajes no se quedaron por fuera, solo por ver una muestra, se tiene la siguiente evidencia de un grupo de estudiantes:



n base en la información anterior calcular el interés mensual a pagar por las siguientes cantidades:

Cantidad ($)	Interés ($)
100	4
200	8
500	20
1000	40
1500	60
2500	100
10000	400
50000	2000
150	6
2650	106
125	5
1625	65

Ilustración 10.Tabla de intereses

4. Luego de trabajar en el negocio de prestar dinero y ganar interés se dieron cuenta que era mejor que cada uno hiciera su propio negocio y que iniciaran vendiendo la mercancía con un descuento del 10%. Completar la siguiente tabla.

		Vendedor 1: Sebas	Vendedor 2: carlos	Vendedor 3: Martin
Bolsos	Precio	100	20	80
	Descuento	10	2	8
	Precio rebajado	90	18	72
Aretes	Precio	10	60	40
	Descuento	1	6	4
	Precio rebajado	9	54	36
Blusa	Precio	80	50	70
	Descuento	8	5	7
	Precio rebajado	72	45	63

Ilustración 11. Descuento de mercancías. Adaptada de Balbuena & Otros (2009)

Ilustración 36:Respuesta de estudiantes de 7°

Este tipo de actividades son apoyadas fuertemente por la teoría de Vygotsky, especialmente con el concepto de zona de desarrollo próximo (ZDP) pues, en las actividades de introducción del conocimiento y construcción del mismo el docente era agente que ayudaba y apoyaba a los estudiantes, luego, ya en esta actividad el estudiante debe ser capaz de solucionar los problemas de manera intendente aplicando todo lo anteriormente aprendido, así se disminuyó esa distancia a la que se refiere la ZDP de Vygotsky.

6.4. Diseño y aplicación de taller post test

Este primer taller consistía de 6 preguntas y buscaba hacer un diagnóstico final sobre el dominio de los números racionales tanto desde su componente histórico como desde el componente operativo. Para ello se pidió a los estudiantes que respondieran con mucha sinceridad las preguntas, que aplicaran todo lo aprendido durante la secuencia de actividades aplicadas por el profesor.

Acorde a las observaciones cualitativas que el docente iba tomando mientras los estudiantes respondían el taller, se escuchaban algunos comentarios como “ahora sí, pues porque el profe lo enseñó en estos días”, “las fracciones egipcias son las más conocidas…” Se empezaba a notar la tranquilidad de los estudiantes al momento de poder responder las preguntas.

El total de estudiantes que presentaron este cuestionario fue 24, puesto que dos estudiantes no asistieron a clase.

Análisis de las preguntas:

1. ¿Conoces el origen de los números racionales?
    c) Si
    d) No

    En caso afirmativo, explicarlo.

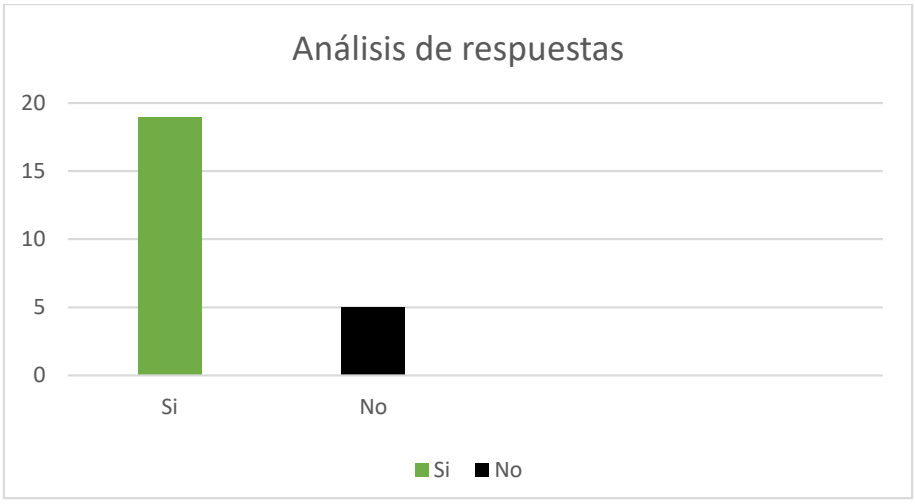


Gráfico 13: Respuestas pregunta 1 al post-test

En este caso 19 estudiantes dieron explicación sobre el origen de los números racionales, los otros 5 estudiantes respondieron que sí lo conocían, pero no daban su explicación, otros se referían a que su origen había sido solo en una civilización como la egipcia o solo en china. Esto se puede ver mejor en las siguientes imágenes:

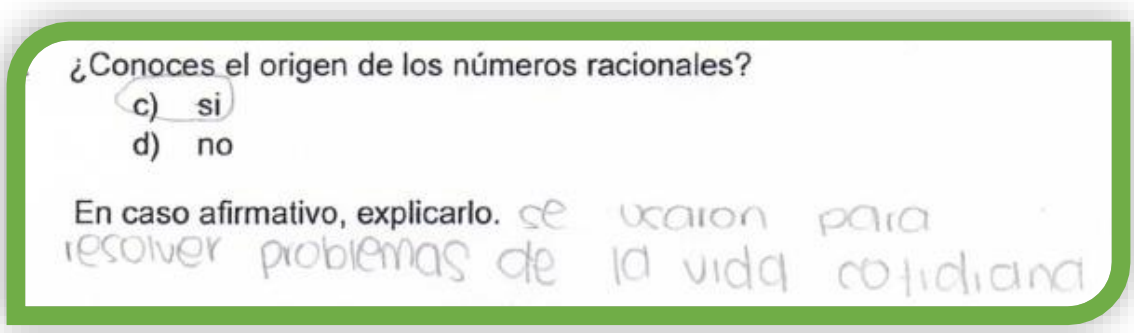


Ilustración 37:Respuesta de estudiante de 7°

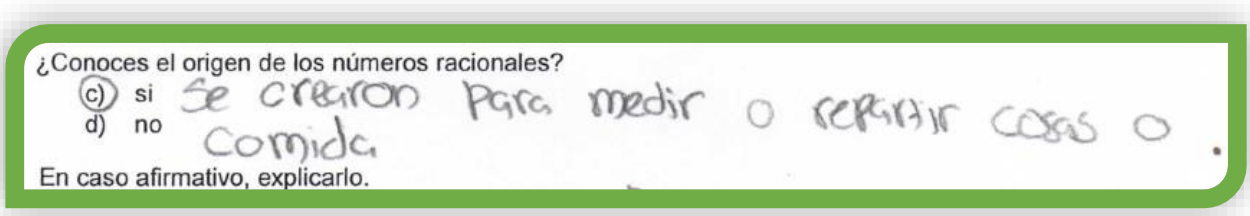


Ilustración 38:Respuesta de estudiante de 7°

2. ¿Conoces las fracciones egipcias?
    c) Si
    d) No

En caso afirmativo, explicarlo.

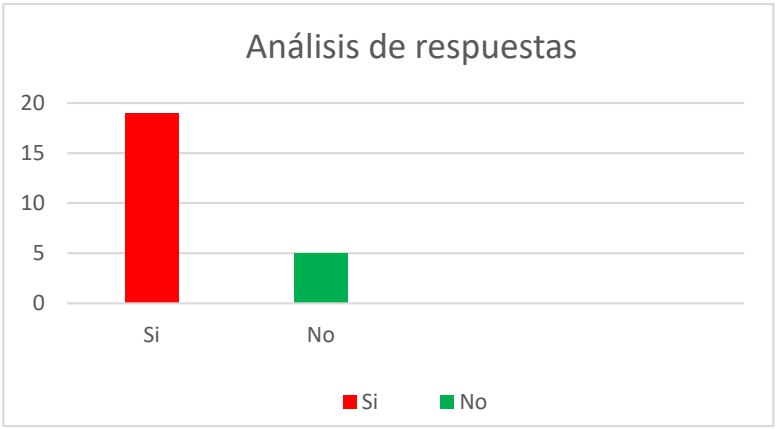


Gráfico 14:Pregunta 2 del post-test

Esto indica que la mayoría de estudiantes conocen sobre la primera civilización que utilizó las fracciones de numerador 1, las cuales aún utilizamos, así como su método para sumar fracciones. Los cinco estudiantes que respondieron mal la pregunta es porque hacían referencia a otro tipo de fracciones como “son las fracciones en pares”, “Si, son fracciones en palos…”, o simplemente decían que sí, pero sin explicar.

En las siguientes imágenes se ve el ejemplo de una respuesta correcta y de dos respuestas incorrectas:

Correcta

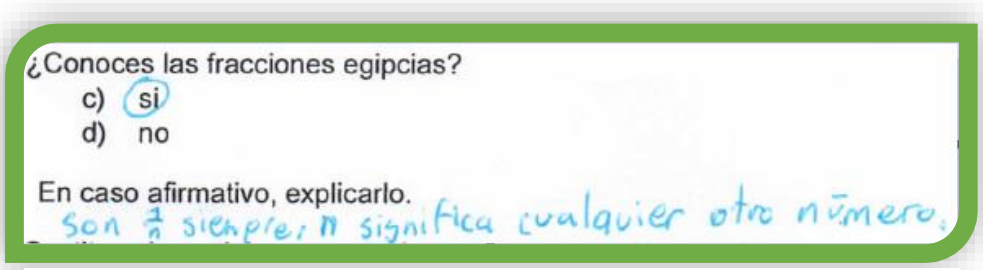


Ilustración 39:Respuesta de estudiante de 7°

Incorrectas:

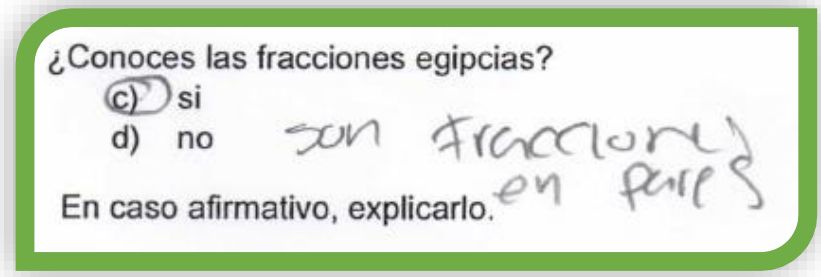


Ilustración 40:Respuesta de estudiante de 7°

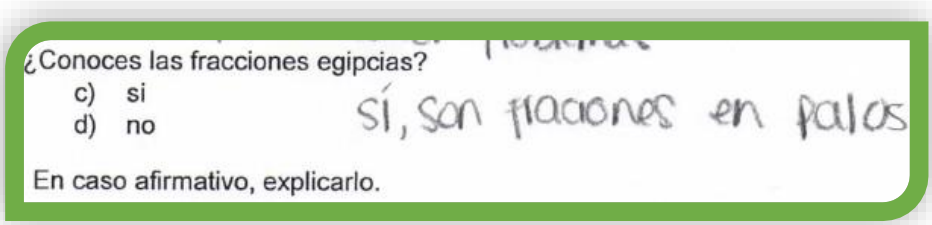


Ilustración 41:Respuesta de estudiante de 7°

3. Sustituye las palabras en cursiva por una expresión numérica.
   a) ***Media*** *hora.*
   b) Las ***tres cuartas partes*** de un iceberg está sumergidas en agua.
   c) Los mares y los océanos forman aproximadamente ***siete décimos*** de la superficie del planeta.
   d) Un mes es la ***doceava parte*** de un año.
   e) Un cuatrimestre es la ***tercera parte*** de un año.

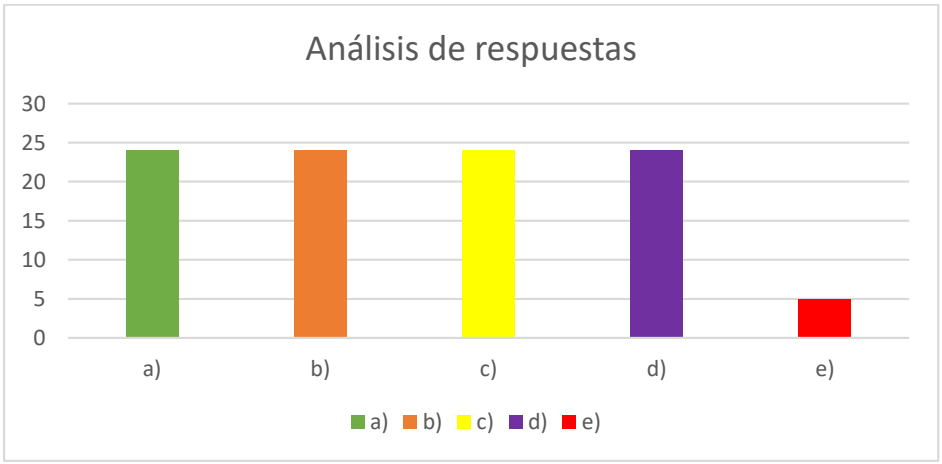


Gráfico 15:Pregunta 3 del post-test

En esta pregunta se observa un buen dominio de los estudiantes para escribir expresiones en lenguaje natural a expresiones numéricas, en particular expresiones racionales. Las respuestas fueron variadas, por ejemplo, las respuestas para a) era posible encontrar expresiones como ½ o 30 minutos, en las preguntas b) y c) se encontraron expresiones como ¾,75% y 7/10, 70% respectivamente, para el caso de la pregunta e) fue en la que se evidenció más dificultad en los estudiantes, pues había confusión en tomar el año como unidad o dividirlo en 12 meses, si lo tomaran como

unidad debían escribir 1 / 3 y si lo dividían en meses la respuesta tendría que ser 12/3=4; pero escribieron respuestas como 3/12, 12/4, 3 / 4, 3, 1/ 12,

Es un punto en que a futuro sería bueno profundizar con los estudiantes, pues tanto al inicio como al final (incluso más al final) hubo dificultades para tomar la unidad como 1 o como 12.

4. De acuerdo a la siguiente imagen.
   a) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura A?
   b) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura B?

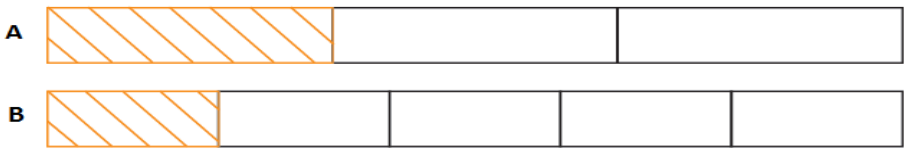


Ilustración 42. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011)

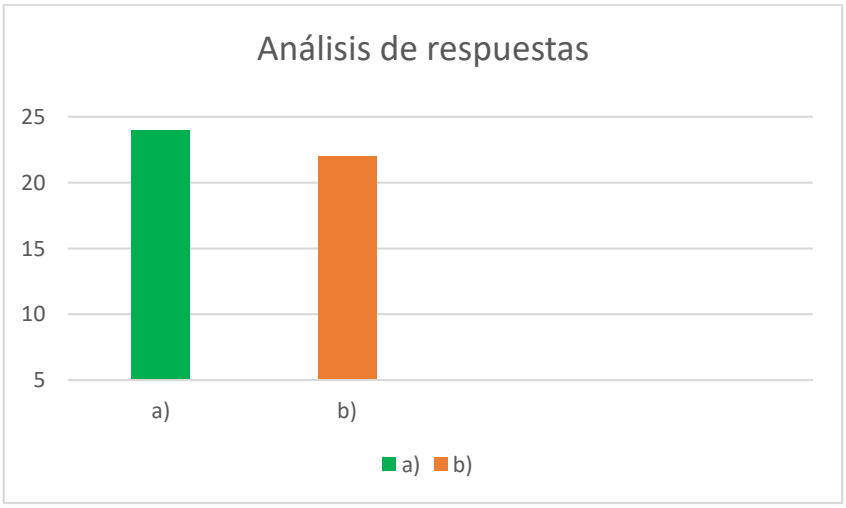


Gráfico 16: Pregunta 4 del post-test

De los 24 estudiantes, se observa una buena interpretación por parte de los estudiantes en cuanto a la parte y el todo, solo 2 estudiantes en la pregunta b) no respondieron correctamente. Algo muy similar a las respuestas en el pre-test.

5. Jorge se ganó $10.000.000 y de estos, invirtió $\frac{3}{5}$ en la motocicleta que tanto deseaba; el resto lo compartió con su familia.
   a) ¿Cuánto le costó a Jorge la motocicleta?
   b) ¿Cuánto dinero compartió con su familia?
   c) ¿Qué porcentaje del total ganado costó la motocicleta?
   d) ¿Qué porcentaje del total ganado compartió con su familia?

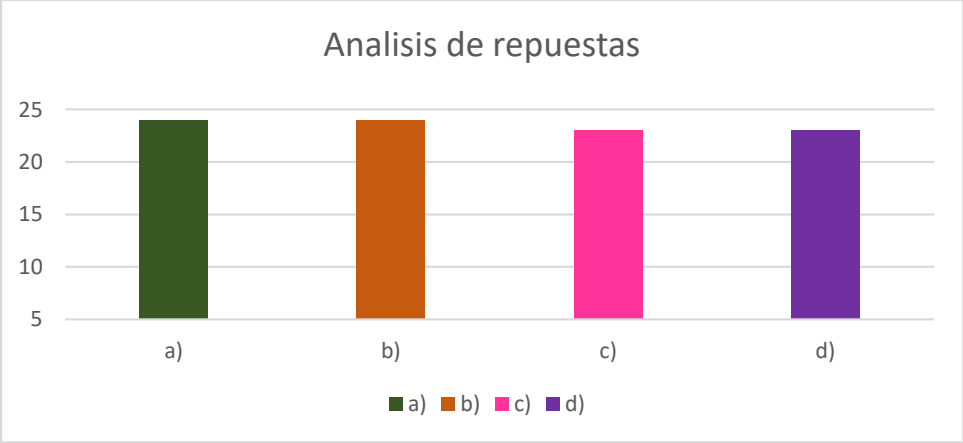


Gráfico 17:Pregunta 5 del post-test

Solo a un estudiante le costó interpretar una expresión entera como un porcentaje, se le dificultó entender 6 millones como un 60% de 10 millones y lo mismo en el caso de 4 millones.

6. Identifica en las siguientes fracciones $\frac{8}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{7}$
   a) Una fracción irreducible.
   b) Un par de fracciones equivalentes.
   c) Una fracción igual a la unidad.

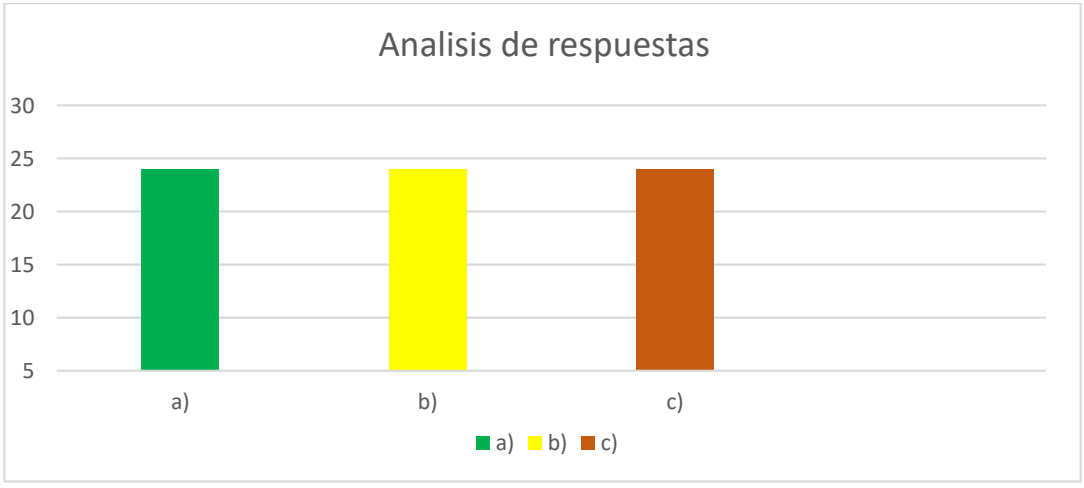


Gráfico 18:Pregunta 6 del post-test

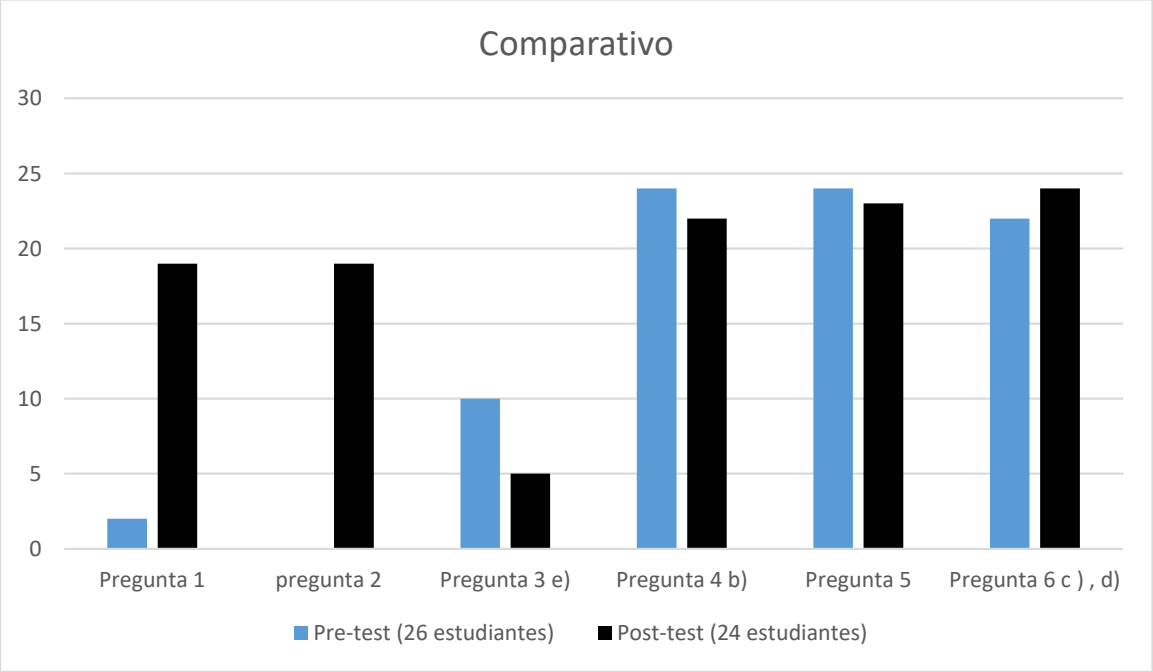
El 100% de los 24 estudiantes respondieron esta pregunta correctamente, lo que quiere decir que los han mejorado en la simplificación de fracciones, las fracciones equivalentes y el reconocimiento de la unidad. Hay que resaltar que estos temas no se explicaron como tal ni se dedicó un tiempo específico a ello, solo con el conocimiento previo y las actividades nuevas se reforzó ese conocimiento.

Del anterior taller se evidencia que, los resultados han sido favorables y que los estudiantes han logrado un buen aprendizaje de los números racionales, habiendo ciertamente algunos aspectos del mismo por mejorar.

6.5. Antes VS después: un comparativo

Luego de haber aplicado una secuencia de actividades basada en un ciclo de aprendizaje, se hace necesario, de una manera concreta y resumida dejar ver cuantitativamente en un gráfico comparativo los resultados finales, los cuales podemos obtener de los talleres inicial y final.

Se hará un comparativo entre las preguntas en las que se observó más falencias teniendo en cuenta que la cantidad de estudiantes al inicio fue 26 y al final de 24, para lo que se tomará un promedio de 25 estudiantes para tal cometido.



En la pregunta uno y dos es donde se observa un avance más significativo, pues tienen que ver específicamente con el contenido histórico de los números racionales, lo que quiere decir que luego de aplicar las demás actividades si hubo un aporte

relevante. Se evidencia que al principio solo un 8% conocía el origen de los números racionales, comparado con un 76% que al final ya conocían el origen de dicho conjunto numérico. En la pregunta tres es claro que hubo una desmejora y que es preciso hacer énfasis en esta parte ya que a muchos estudiantes les cuesta interpretar la unidad de distintas formas acorde al contexto, esto se explica claramente con la diferencia de un 40% inicial frente a un 20% final. Luego en las demás preguntas se observa que los estudiantes tienen un bueno dominio operativo como se mencionó antes.

6.6. Conclusiones

El trabajo realizado con los estudiantes de séptimo grado del colegio Gimnasio Vermont, arrojó resultados favorables en cuanto al aprendizaje de los números racionales; así, la unidad didáctica implementada deja ver que la historia es bastante enriquecedora para los estudiantes.

Actividades de este tipo motiva a los estudiantes y los hace ser más críticos en el sentido de querer seguir indagando sobre los objetos de estudio.

Es importante notar que no a todos los estudiantes les gusta este tipo de actividades, en las que hay que ir a tiempos remotos, pues algunos manifiestan que hay que vivir el ahora, con lo que tenemos y no querer hacer las actividades del hoy con las herramientas del ayer. Es una tarea del docente hacer caer en cuenta al estudiante que no es con el objetivo de hacer la matemática más difícil sino con el ánimo de conocer y entender de dónde, cómo, quienes y porque surgió hace tiempo lo que hoy en día se conoce.

En la investigación se cumplió con el objetivo principal, que era favorecer el aprendizaje de los números racionales a través de la historia como recurso didáctico, pues en todo momento las actividades debían ser resueltas teniendo en cuenta los hechos históricos, tema que se tornó en algo nuevo y divertido para los estudiantes a la vez que se obtuvo una buena comprensión de dicho conjunto numérico.

Finalmente, está claro que los estudiantes disfrutan de estrategias de enseñanza motivadoras y que respondan a sus interrogantes, ¿…y eso para qué…?", ¿…quién inventó eso…? Una evidencia de ello son sus comentarios, que indicaban agrado por las actividades, indicando de la conveniencia de que se continuara con esa línea de trabajo en matemáticas, que era divertido y que se salían un poco de la monotonía. Lo anterior, indica entonces la posibilidad de asumir la historia como una estrategia de enseñanza de los conceptos matemáticos.

6.7. Recomendaciones

Luego de haber tenido esta experiencia bastante enriquecedora, es importante tener en cuenta las siguientes recomendaciones para quienes consideren llevar a sus aulas esta propuesta de enseñanza:

- Todas las actividades deben estar encaminadas hacia el uso de la historia para poderlas resolver, esto porque, aunque en las guías no esté explicito, debe quedar claro en las indicaciones verbales a los estudiantes.

- Tanto en la actividad de inicio como en la de cierre, se evidenció que a los estudiantes les cuesta interpretar la unidad en diferentes presentaciones, así que se hace imprescindible adaptar la propuesta para lograr que esto mejore en el aprendizaje de los estudiantes. Como no era el fin último de esta propuesta no se le hizo hincapié.

- Específicamente en la actividad de cierre post-test es recomendable agregar otras preguntas acerca del componente histórico.

- No es necesario llevar materiales al aula para dibujar la historia de los números racionales, pero sí, hacer una introducción histórica al inicio de cada tema de los racionales que se vaya a trabajar, bien sea con una lectura colectiva, un video, imágenes, entre otras. En este caso, por ser una investigación propiamente, se hizo necesario otro tipo de estrategias.

En general, se recomienda que en cualquier tema de las matemáticas se haga uso de la historia como un recurso de enseñanza, pues esto según muchas investigaciones y la presente que se suma, explicitan que es una buena herramienta y dejan resultados muy favorables. Esto, a la vez beneficia al docente en cuanto va ganando cultura matemática y va enriqueciendo su lenguaje.

Referencias

Alzina, R. B. (2009). *METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA.* Madrid: La muralla S.A. Obtenido de https://books.google.com.co/books?hl=esylr=yid=VSb4_cVukkcCyoi=fndypg=PA3ydq=Alzina,+R.+(2009).+METODOLOG%C3%8DA+DE+LA+INVESTIGACI%C3%93N+EDUCATIVA.+Madrid:+La+muralla+S.A.yots=PuyxQjjwDQysig=g8O23GrgwKtq-Jujn_gnjRyDzo0#v=onepageyq=Alzina%2C%20R.%20(2009)

Amaya, L. M., y Solano, A. S. (2006). *Reflexiones acerca de las fracciones.* Grupo de Estudio e Investigación en Educación Matmática "GEMAT". Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/884/1/20Conferencias.pdf

Balbuena, H. H., y Otros. (2009). *Matemática 6. Cuaderno de trabajo para el alumno.* Argentina: Servicios editoriales. Obtenido de http://educacionespecial.sepdf.gob.mx/escuela/documentos/CurriculumBasica/Primaria/Apoyo/MatematicasCuadernoTrabajo6.pdf

Barbosa, E. C. (2003). La historia de la matemática como recurso metodologico en los procesos de enseñanza aprendizaje: una experiencia de secundaria. *UNICIENCIA*, 259-266. Obtenido de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/download/109/102

Bausela, H. E. (1992). LA DOCENCIA A TRAVÉS DE LA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación, 20/*, 7-36. Obtenido de http://rieoei.org/deloslectores/682Bausela.PDF

Becco, G. R. (1999). *Vygotsky y teorías sobre el aprendizaje. COCEPTOS CENTRALES DE LA PERSPECTIVA VYGOTSKIANA.* Obtenido de http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/Vygotsky%20y%20teor%C3%ADas%20sobre%20el%20aprendizaje.pdf

Benega, M., Capelletti, G., García, M., y Tenutto, M. (2006). *Matemática. Números racionales. Aportes para la enseñanza.Nivel medio.* Buenos Aires. Obtenido de http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/matematica_aportesmedia.pdf

Carrera, B., y Mazarella, C. (Abril-Junio de 2001). Vygotsky: enfoque sociocultural. *Educere, 5*(13), 41-44. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/356/35601309.pdf

Carrera, B., y Mazarella, C. (Abril-Junio de 2001). Vygotsky: enfoque sociocultural. *Educere, 5*(13), 41-44. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/356/35601309.pdf

Castro, L., y Osorno, M. (2014). *Matemáticas 6. Texto para estudiantes.* Quito Ecuador: Ediciones SM. Obtenido de https://es.slideshare.net/blankiadri/texto-delestudiantematematicas6toegb

Ceneida Fernandez, M. M. (2015). *Investigación en Educación Matemática XIX.* Alicante:SEIEM. Obtenido de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/51591/1/2015-Actas-XIX-SEIEM.pdf

Cordero, Z. R. (2009). LA INVESTIGACIÓN APLICADA: UNA FORMA DE CONOCER. *Revista Educación, 33*(1), 155-165. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44015082010

Ecuador, M. (2011). *Didáctica de las Matmáticas.* Quito-Ecuador: MinEduc. Obtenido de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2013/03/SiProfe-Didactica-Matematicas.pdf

Ecuador, M. (2011). *GUÍA PARA DOCENTES.* Quito: Don Bosco. Obtenido de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2014/09/Guia-Docente-Matematica-8vo.pdf

Edumates. (16 de Noviembre de 2011). Números racionales. Argentina. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=bBKF9dwGdWgyt=40s

Freepik. (2010-2017). Obtenido de Ilustración de ciudad de noche Vector Premium: http://www.freepik.es/vector-gratis/ilustracion-de-ciudad-de-noche_831969.htm

Gil, F. L. (2008). *Historia y didáctica de los números racionales e irracionales.* Jaen-España: Ittakus. Obtenido de http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Francisco_Luis_Flores_Gil_-_Historia_y_Didactica_de_los_Numeros_Racionales_e_Irracionales.pdf

Huanaco, I. C. (2015). *NÚMEROS RACIONALES EN EL ANTIGUO EGIPTO.* Obtenido de https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/82386/2/35948.pdf.

Icfes. (2016). *Reporte de resultados del examen saber 11 por aplicación 2016-1 para establecimientos educativos.* Bogotá. Obtenido de http://www.icfes.gov.co/

Javier, F., y Rasilla, D. (2007). La Investigación-acción como medio para innovar en las ciencias experimentales. *Revista Pulso de Educación*(30), 103-118. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2498251.pdf

Jorba, J., y Sanmartí, N. (1993). La función pedagogica de la evaluación. Aula de inovación educativa (20). 20-30. Obtenido de http:// www. seg. guanajuato. gob. mx / Ceducativa / CartillaB / 6antologia / Referentes%20para%20la%20evaluaci%C3%B3n/Sobre%20estrategias%20y%20herramientas%20para%20llevar%20a%20cabo%20evaluaci%C3%B3n%20f/Jorba,%20Jaume%20y%20S.%20Neus.pdf

LeCompte, M. D. (1995). Un matrimonio conveniente: Diseño de investigación cualitativa y estandares para la evaluación de programas. *Revista Electrónica de investigación y evaluación educativa. RELIEVE, 1*(1). Obtenido de http://www.uv.es/relieve/v1/RELIEVEv1n1.htm

Lobato Fraile, C. (1997). Hacia una comprensión del aprendizaje cooperativo. *Revista de Psicodidáctica*, 59-76. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17517797004

Lucci, M. A. (2006). LA PROPUESTA DE VYGOTSKY:LA PSICOLOGÍA SOCIO-HISTORICA. *Revista de currículum y formación del profesorado., 10*(2), 2-11. Obtenido de http://www.ugr.es/local/recfpro/Rev102COL2.pdf

Macias, C. O. (2015). *"Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón".* Medellín. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/51739/1/43527937.2016.pdf

Macias, C. O. (2015). *"Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón".* Medellín.

Martínez, K. L., y Mateus, S. G. (2016). *Resumen Ejecutivo Colombia en PISA 2015.* Bogotá.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares matemáticas.* Bogotá, DC. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares matemáticas.* Bogotá, DC.

MEN. (2004). *Estandares básicos de competencias en matemáticas.Potencias el pensamiento matemático. Un reto escolar.* Bogostá, DC.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, DC. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN. (2012). *Guías Didácticas del Docente 8°.* Bogotá. Obtenido de http://redes.colombiaaprende.edu.co/ntg/men/archivos/Referentes_Calidad/Modelos_Flexibles/Secundaria_Activa/Guias_Docente/Guia_Docente_Grado08.pdf

MEN. (2016). *Informe por colegio 2016. Resultados Pruebas Saber 3°, 5° y 9°.* Bogotá. Obtenido de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siemprediae/86442

Mol, R. S. (2013). *Introdução à História da Matemática.* Obtenido de http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales apartir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 158-182. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

ORDUZ, M. E. (2012). *UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES EN EL GRADO SEXTO.* Bogotá. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf

Perez, J. I., Higuita, J. C., y Valencia, C. A. (2014). *INFLUENCIA DEL LENGUAJE VERBAL Y VISUAL EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.* Medellín. Obtenido de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1320/1/JC0942.pdf

Rodríguez, Á. S. (2014). *APRENDER LAS MATEMÁTICAS EGICPIAS.* Obtenido de http://egiptologia.com/wp-content/uploads/2016/07/Aprender-matematicas-egipcias.1.pdf

Sampieri, C. R., Collado, C. F., y Lucio, P. B. (2010). *Metodología de la investigación* (5 ed.). México: MacGraw-Hill. Obtenido de https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Slavin, R. (s.f.). *GRUPODE ESTUDIO SOBRE APRENDIZAJE COOPERATIVO:Aprendizaje cooperativo: teoría, investigacióny práctica.* Obtenido de http://ecoasturias.com/images/PDF/slavin-el-aprendizaje-cooperativo.pdf

Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA*, 17-28. Obtenido de https://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Valdez, V. (18 de Febrero de 2008). *LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS A TRAVÉS DE LA HISTORIA.* Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2779665.pdf

Anexos
Unidad didáctica

LOS RACIONALES PARA MI VIDA

Asignatura:	Matemáticas
Grado:	Séptimo B
Materiales:	Papel periódico, videos de YouTube, cinta, colores, papel con divisiones, palos de escoba, zapatos, marcadores, lapiceros, clips metálicos.
Tiempo:	6 clases (bloques)
Páginas:	17

COMPETENCIA

Usa los números racionales en distintas expresiones como fraccionarios, razones y porcentajes, para resolver problemas en contextos de medida con seguridad y asertividad.

INDICADORES DE DESEMPEÑO

Reconoce las fracciones como una de las formas de representar los números racionales.

Compara dos magnitudes y las reconoce como razones siendo esta una de las formas de representar los números racionales.

Interpreta los porcentajes como una manifestación de los números racionales.

Resuelve problemas que tienen que ver con el uso de los racionales en una de sus expresiones como fracción, razón o porcentaje.

CAPÍTULO 3: SISTEMATIZACIÓN DE LA INTERVENCIÓN

JUSTIFICACIÓN

La presente unidad didáctica está pensada para trabajar con estudiantes de grado séptimo y esta tiene como fin lograr que los estudiantes interpreten conceptualmente el significado, uso y aplicación de los números racionales en los contextos en que se encuentra inmerso. Para lo cual se le plantearán actividades donde se deje ver la construcción de dicho conjunto en la interacción social, que el estudiante pueda ser testigo de que estos son fruto de las necesidades que la misma humanidad ha sufrido y que esto no es algo independiente de la mente humana.

Siendo así, es importante pensar en estrategias que apunten a dar solución a los problemas que se notan en los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones en las que deben interpretar una información dada en porcentajes como un descuento o un impuesto; o problemas como el de sumar fraccionarios como numeradores y denominadores entre sí; y otros errores comunes. Y para ello, las actividades enmarcadas en problemas de las antiguas civilizaciones, acompañadas de otras actividades de inmersión histórica, pueden constituirse en instrumentos óptimos para esclarecer motivar el trabajo de los estudiantes.

En la anterior perspectiva, los estudiantes pueden dotar de sentido conceptos matemáticos, poniendo de manifiesto la comprensión de relaciones y representaciones como decimales, fracciones o porcentajes; reconociendo su utilidad en las actividades matemáticas.

OBJETIVOS

Analizar cómo la historia y epistemología de los números racionales, utilizados como recurso didáctico, favorece el aprendizaje en los estudiantes de séptimo grado del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.

3.2. Específicos

Diagnosticar los saberes sobre el conjunto de los números racionales y el reconocimiento de su historia, en los estudiantes de grado séptimo B del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.

Diseñar una guía de enseñanza para los números racionales inspirada en componentes históricos del concepto que permita vivenciar experiencias de aprendizaje.

Aplicar la guía de enseñanza para los números racionales en los estudiantes de grado séptimo B del Colegio Gimnasio Vermont de Medellín.

Evaluar la implementación de la guía de enseñanza a través de un diagnóstico final para evidenciar el impacto en el aprendizaje de los números racionales.

CAPÍTULO 3: SISTEMATIZACIÓN DE LA INTERVENCIÓN

MARCO TEÓRICO

El referente teórico que apoya la presente unidad didáctica es el constructivismo social de Vygotsky, pues habla de apropiación y para ello hay que crear escenarios posibles que permitan al estudiante ser constructor de explicaciones del por qué lo que aprende , cuyo sustento se halla en la interacción de uno frente a los otros al momento de escuchar y ser escuchado y se ha de movilizar mediante el lenguaje verbal al momento en que los equipos de trabajo expongan a sus compañeros la forma en como solucionaron algunos puntos de la guía.

La secuencia de actividades estará desarrollada en tres momentos, uno inicial donde los estudiantes manifiesten sus saberes previos, un segundo momento donde deben desarrollar problemas de manera independiente y, un tercero en que se solucionen problemas con la ayuda de otros compañeros y del profesor, los dos últimos momentos son sustentados desde lo que se conoce como la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) que como lo plantean (Carrera & Mazarella, Vygotsky: enfoque sociocultural, 2001) citando a Vygotsky (1979:133) “No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz”.

La teoría sociocultural de Vygotsky es fundamental en este trabajo puesto que se pretende que los estudiantes construyan su conocimiento a través de problemas y situaciones que se presentan en el contexto social, donde él vive y en relación con los demás, así, el estudiante se verá enfrentado a problemas que en el pasado el hombre tuvo que solucionar, dando paso al conocimiento del origen y necesidad de los números racionales. Se sugieren actividades donde el estudiante comprenda la importancia del conjunto numérico de los racionales, como por ejemplo las escalas que tanto usa un arquitecto para realizar sus maquetas, la interpretación de información dada por los noticieros y revistas en forma de porcentajes; así como su utilidad en otras áreas del conocimiento como la biología, la química, física, etc. Con este conjunto de actividades se deja ver cómo se va en línea con el referente teórico, la historia de un concepto matemático en situaciones y espacios sociales donde se desarrolla el estudiante.

ACTIVIDAD 1

PRE-TEST

Unidad: Actividad de diagnóstico inicial	**Nombre del curso:**
Profesor: Carlos Arturo Valencia	**Duración: 30 minutos**
Estudiante:	**Fecha:**

ACTIVIDAD[1]

Responde las siguientes preguntas acorde a lo que sabes del conjunto de los números racionales.

1. ¿Conoces el origen de los números racionales?
   a) si
   b) no

   En caso afirmativo, explicarlo.

2. ¿Conoces las fracciones egipcias?
   a) si
   b) no

   En caso afirmativo, explicarlo.

3. Sustituye las palabras en cursiva por una expresión numérica.
   f) ***Media*** *hora.*
   g) Las ***tres cuartas partes*** de un iceberg está sumergidas en agua.
   h) Los mares y los océanos forman aproximadamente ***siete décimos*** de la superficie del planeta.
   i) Un mes es la ***doceava parte*** de un año.
   j) Un cuatrimestre es la ***tercera parte*** de un año.

4. De acuerdo a la siguiente imagen.
   a) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura A?
   b) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura B?

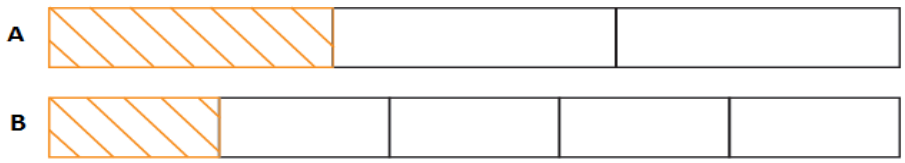


Ilustración 43. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011)

5. Jorge se ganó $10.000.000 y de estos, invirtió $\frac{3}{5}$ en la motocicleta que tanto deseaba; el resto lo compartió con su familia.
   e) ¿Cuánto le costó a Jorge la motocicleta?
   f) ¿Cuánto dinero compartió con su familia?
   g) ¿Qué porcentaje del total ganado costó la motocicleta?
   h) ¿Qué porcentaje del total ganado compartió con su familia?

6. Identifica en las siguientes fracciones $\frac{8}{12}, \frac{2}{12}, \frac{4}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{7}$
   d) Una fracción irreducible.
   e) Un par de fracciones equivalentes.
   f) Una fracción igual a la unidad.

[1] Algunos puntos de esta actividad son adaptados de los textos Matemática 6 de Castro & Osorno (2014) y Didactica de la matemática (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011)

ACTIVIDAD 2

¡APRENDO MIENTRAS EXPLORO LO QUE CONOZCO!

Unidad: Fase 1 de actividades de exploración de sabes previos	**Nombre del curso:**
Profesor: Carlos Arturo Valencia	**Duración: 60 minutos**
Estudiante 1:	**Fecha:**
Estudiante 2:	
Estudiante 3:	

ACTIVIDAD[2]

Lee atentamente las situaciones planteadas:

Ilustración 44 tomada de (Castro & Osorno, 2014)

6. Uno de los estantes de una biblioteca está dividido en nueve partes iguales. En ocho de ellas se guardan los libros de una enciclopedia. ¿cuál es la fracción que representa los libros que contiene la biblioteca?

¿cómo se llaman las partes de esta fracción?

R//_____

7. Manuela organizó los exhibidores de una hemeroteca así: en $\frac{8}{12}$ del exhibidor ubicó revistas sobre lugares misteriosos, y en $\frac{4}{12}$ puso revistas sobre las maravillas del mundo.

Ilustración 45 tomada de (Castro & Osorno, 2014)

¿Qué tipo de revistas ocupan la mayor parte del exhibidor?

R//_____

¿Cómo se conoce este tipo de fracciones?

R//_____

8. Manuela utilizó dos estantes de igual tamaño, pero con diferente número de divisiones para ubicar otras revistas. Uno de los estantes está dividido en ocho secciones iguales y ocupó una, el otro está dividido en seis secciones iguales y ocupó uno.

Dibuja los estantes de la biblioteca de Manuela y señala los espacios que ocupó.

Tabla 8:Representación de estanterías

Estante 1	Estante 2

¿Cuál de los dos estantes tiene mayor espacio ocupado?

R//_____

¿Cómo se conoce este tipo de fracciones?

[2] Esta actividad es una adaptación de las planteadas en el libro Matemática 6 de Castro & Osorno (2014, págs. 35-39)

R//_____

9. En una pequeña biblioteca hay 36 libros de cuentos. De ellos, $\frac{1}{3}$ son para niños y niñas menores de siete años; $\frac{1}{4}$, para niños y niñas entre siete y doce años; $\frac{5}{12}$ para niños y niñas mayores de doce años. Completa la siguiente tabla:

Tabla 9: Distribución de cuentos

Edades de niños y niñas	Distribución de los cuentos	Cantidad de cuentos por edades
Menores de 7 años	$\frac{1}{3} * \square$	$\square$
Entre 7 y 12 años	$\frac{5}{12} * \square$	$\square$
Mayores a 12 años	$\frac{1}{4} * \square$	$\square$

10. Reducir el consumo de energía es contribuir con la economía y disminución de la emisión de gases de efecto invernadero. Aníbal en su ferretería recibió un pedido de focos, las tres quintas partes del total son de bajo consumo. Si hay 120 focos de este tipo, ¿cuántos focos le enviaron?

Ilustración 46 tomada de (Freepik, 2010-2017)

c) ¿Qué fracción corresponde a los focos de bajo consumo?

$$\frac{\square}{\square}$$

d) ¿Cuántos focos son de bajo consumo?

$\square$

ACTIVIDAD 3

¡DESDE LOS ORIGENES!

Unidad: Fase 2 de actividades de introducción de nuevos conocimientos	**Nombre del curso:**
Profesor: Carlos Arturo Valencia	**Duración: 60 minutos**
Estudiante 1:	**Fecha:**
Estudiante 2:	**Estudiante 3:**
Estudiante 4:	**Estudiante 5:**

Breve historia de los números racionales

"Los números racionales o fracciones aparecieron muy pronto en la historia de las matemáticas y como la gran mayoría de los conceptos matemáticos, su descubrimiento fue debido a la necesidad de resolver un problema. Los antiguos necesitaban medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo otro tipo de medidas. Al enfrentarse a esto en la vida cotidiana, pronto descubrieron que no era suficiente poder contar con los números naturales para hacerlo de manera exacta, ya que estas medidas eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma pero que no eran números naturales, por lo que fue necesario ampliar el concepto de número natural. Así surgieron los números racionales. Algunas de las civilizaciones que hicieron aportes al desarrollo de este conjunto numérico fueron los egipcios, los chinos, los babilónicos, los griegos, los hindúes y árabes". (Gil, 2008)

Los egipcios

Se cree que los egipcios fueron los primeros en utilizar los números fraccionarios y que trabajaron inicialmente las fracciones que tenían como numerador el número 1; a estas las llamaban fracciones unitarias, algunos de sus símbolos se observan en la siguiente ilustración.

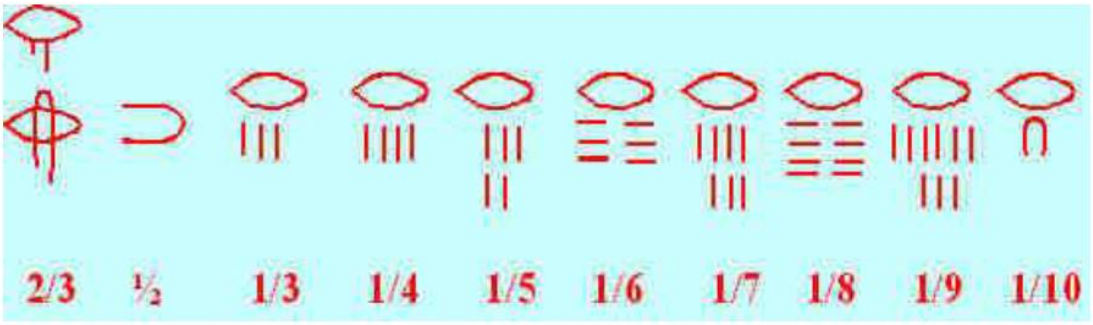


Ilustración 4. Notación de algunas fracciones egipcias. Tomada de (ORDUZ, 2012)

Estos números eran usados por los egipcios para resolver los problemas que se les presentaba en el día a día, especialmente en los contextos de reparto. Las fracciones aparecen en textos matemáticos antiguos, constancia de esto es el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el año 1.650 a.C., considerado una de las mayores fuentes de conocimiento de la matemática egipcia; en él se encuentran registrados un gran número de problemas de reparto, con los métodos de solución utilizados en esa época, por ejemplo, se deja ver cómo expresaban toda fracción como la suma de fracciones unitarias, así, la fracción $\frac{3}{4}$ se expresaba como $\frac{1}{2};\frac{1}{4}$

Ilustración 47.Papiro de Rhind. Tomado de (Mol, 2013)

Los

Babilonios

Los babilonios tenían grandes habilidades matemáticas y en cuanto a su aporte al desarrollo de los números racionales, se tiene que ellos usaron en sus fracciones denominadores de base 60 y 10, es decir, denominadores sexagesimales y decimales respectivamente. Sin embargo, este método presentaba una dificultad, memorizar las y por ello la mayoría de ellas eran registradas en tablas. Estas fracciones se conocían como fracciones cuneiformes.

Los babilonios utilizaban patrones al momento de hacer medidas de longitudes, áreas de sus terrenos, volúmenes, pesos, etc; este patrón podía ser una vara, una cuerda, un pie, un codo, cualquier objeto de longitud desconocida, al cual llamaban unidad, tenía múltiplos y submúltiplos y las cantidades medidas eran expresadas mediante valores enteros y fracciones sexagesimales. Esto traía consigo la posibilidad de obtener cantidades más pequeñas o más grandes que el patrón elegido. La siguiente ilustración muestra algunas de las fracciones cuneiformes que utilizaban los babilonios.

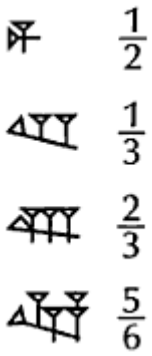


Ilustración 48 tomada de (Valdez, 2008)

CAPÍTULO 3: SISTEMATIZACIÓN DE LA INTERVENCIÓN

Los griegos

Los griegos también consideraron inicialmente las fracciones unitarias de los egipcios, pero estos desarrollaron otra interpretación de los fraccionarios entendiéndolos como una razón (cociente) entre dos números enteros. Los griegos representaban los números con letras de su alfabeto, utilizadas para escribir palabras y para no entrar en confusión se le agregaba un acento (algo como una tilde, ´) en la parte superior izquierda de la letra como se ve en la ilustración.

Las fracciones se escribían con el numerador como base y el denominador se ponía de exponente, la barra que actualmente conocemos iba puesta sobre la letra que representaba el denominador, por ejemplo, la fracción $\frac{5}{9}$ se escribe de la forma $\varepsilon'^{\bar{\theta}'}$.

Unidades	Decenas	Centenas
$\alpha' = 1$	$\tau' = 10$	$\rho' = 100$
$\beta' = 2$	$\text{И}' = 20$	$\sigma' = 200$
$\gamma' = 3$	$\lambda' = 30$	$\tau' = 300$
$\delta' = 4$	$\mu' = 40$	$u' = 400$
$\varepsilon' = 5$	$\nu' = 50$	$\varphi' = 500$
$F' = 6$	$\xi = 60$	$\chi' = 600$
$\zeta' = 7$	$o' = 70$	$\psi' = 700$
$\eta' = 8$	$\pi' = 80$	$\omega' = 800$
$\theta' = 9$	$\text{ϟ}' = 90$	$\sigma\pi' = 900$

Ilustración 49 tomada de (Amaya & Solano, 2006)

Los chinos

Los chinos también tenían cierto conocimiento sobre las fracciones ordinarias, hasta el punto de que realizaban el cálculo del mínimo común denominador de varias fracciones. La representación que utilizaron para dichos números fue con identificación de género, a un número le asignaban un rol femenino y al otro un rol masculino. Se referían al numerador como "el hijo" (zhi) y al denominador como "la madre" (mu).

Veamos un ejemplo de simplificación de fraccionarios llevado por los chinos mediante el siguiente vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=f4g3vh3k2Mg

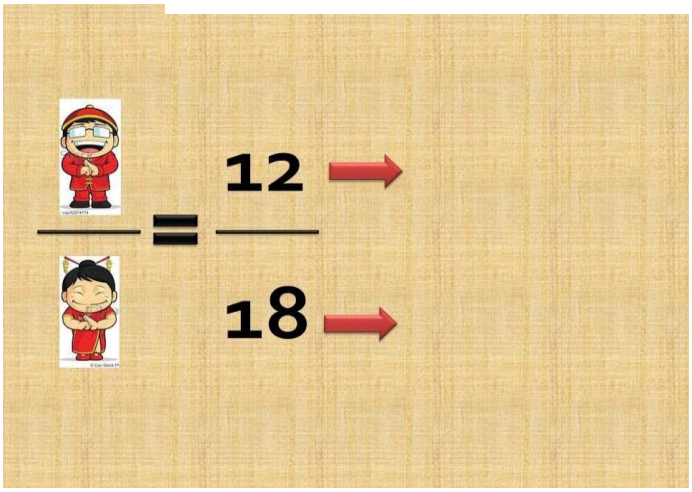


Ilustración 50 tomada de https://i.ytimg.com/vi/f4g3vh3k2Mg/maxresdefault.jpg

Los hindúes y árabes

En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indo arábigo. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa. Gracias a los árabes conocemos el sistema decimal que hoy en día utilizamos, pues estos fueron los que se encargaron de divulgar el sistema decimal en Europa y posteriormente en América. También se le reconoce a la civilización hindú, como la primera en introducir el cero tal cual lo conocemos hoy, e incluso con su símbolo circular (pues ya otras civilizaciones hablaban del cero, pero no había una representación propia para él). Así, la forma de escribir numerador entre denominador se la debemos a los hindúes, mientras la que la raya que los separa fue un aporte de los árabes,

Respecto a las fracciones se dice que fue apenas hasta el S. XIII cuando el Italiano Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números "ruptus", empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

ACTIVIDAD 3

¡DESDE LOS ORIGENES!

Unidad: Fase 2 de actividades de introducción de nuevos conocimientos	**Nombre del curso:**
Profesor: Carlos Arturo Valencia	**Duración: 60 minutos**
Estudiante 1:	**Fecha:**
Estudiante 2:	**Estudiante 3:**
Estudiante 4:	**Estudiante 5:**

ACTIVIDAD.

Reunirse en equipos de 5 personas y realizar las siguientes actividades. Para ello cada equipo debe elegir un rol para cada uno de sus integrantes:

- Un líder o coordinador: quien lleva la secuencia y orden del trabajo que se lleva al interior del equipo.
- Un comunicador: quien se comunica con otros equipos, con el profesor con la web, etc para complementar información faltante.
- Un utilero: quien se encargará de buscar, gestionar, llevar los materiales necesarios para completar la actividad.
- Un vigía del tiempo: Encargado de llevar el tiempo, que no se sobrepasen del tiempo de elaboración de la actividad, del tiempo de exposición, etc.
- Un relator: Integrante encargado de exponer, de contar y representar a su equipo ante los demás.

1.De la lectura se puede decir que los racionales tienen su nacimiento cuando _____
_____

2.Representar de una manera creativa el desarrollo de los números racionales que se ha vivido a lo largo del tiempo en las civilizaciones egipcia, babilonia, griega, china, hindú y árabe. Cada equipo se encargará de una civilización.

3. El relator debe salir y exponer el gráfico realizado con su equipo de trabajo. Para ello tendrá 5 minutos.

ACTIVIDAD 4

¡NO LO SABÍA!

Unidad: Fase 3 de actividades de construcción de conocimientos	**Nombre del curso:**
Profesor: Carlos Arturo Valencia	**Duración: 60 minutos**
Estudiante 1:	**Fecha:**
Estudiante 2:	**Estudiante 3:**
Estudiante 4:	**Estudiante 5:**

Indicaciones: Formar equipos de 5 personas y realizar las actividades propuestas.

1.Elegir un instrumento patrón de medida de entre un palo de escoba, una tabla, un marcador, un lapicero o un clip metálico, una cabuya, etc. y medir los objetos que se muestran en la tabla 3 poniendo sus medidas correspondientes con cada patrón. Cada grupo debe medir mínimo 3 objetos y explorar mínimo con 3 patrones.

	Objeto 1:	Objeto 2:	Objeto 3:	Objeto 4:
Patrón 1:				
Patrón 2:				
Patrón 3:				
Patrón 4:				

Tabla 10: Exploración con patrones

2.Comparar las medidas obtenidas con su patrón y las obtenidas por los demás. Escribe unas cortas líneas de lo observado al comparar:

_____

_____

_____

3. Ahora mide el objeto asignado con los tres patrones de medida (las tres cintas) y consigna los resultados en la tabla 4.

Tabla 11: mediciones con cintas

Medir / Con	(objeto):
patrón 1:	
patrón 2:	
Patrón 3:	

4. ¿En qué se asemeja lo que se acaba de realizar con lo que antiguamente el hombre hacía?

_____

_____

_____

ACTIVIDAD 5

¡ES CIRTO, LOS RACIONALES LOS UTILIZO A DIARIO!

Unidad: Fase 4 de actividades de aplicación de los conocimientos adquiridos	**Nombre del curso:**
Profesor: Carlos Arturo Valencia	**Duración: 60 minutos**
Estudiante 1:	**Fecha:**
Estudiante 2:	
Estudiante 3:	

Indicaciones:[3]

Resuelve cada uno de los siguientes problemas haciendo uso de herramientas como las que el hombre antiguo tenía, es decir, sin reglas graduadas, sin calculadoras, etc. Para ello se trabajará en equipos de tres personas.

2. En un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno inicial y el ancho son dos quintos del ancho del inicial.

c) Realizar el dibujo de la situación

d) ¿Qué parte del terreno ocupará la escuela?

En fracción (como lo escribirían los griegos)	En porcentaje

Explicar cómo se obtuvo los resultados.

_____

_____

2.Tomar un trozo de cinta y realizar la recta numérica desde el número cero hasta el 12 en el suelo. Elegir a un integrante del grupo para que sea el **robot** para resolver las siguientes situaciones.

Sabiendo que los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3, si el robot se para en el punto 6 y da un solo paso hacia la derecha,

c) ¿cómo se representa el número del punto en el que se detiene? (escriba el resultado como lo escribirían los chinos)

_____

d) Indicar otros 5 puntos donde pararía el robot que no sean los indicados por los números naturales, y asignar un número a cada uno de esos 5 puntos.

Punto 1	Punto 2	Punto 3	Punto 4	Punto 5

[3] Algunos puntos de esta actividad son adaptados de los textos Matemática. Números racionales de Benega, Capelletti, García, & Tenutto, (2006), y de Matemática &. Cuaderno de trabajo para el alumno de Balbuena & Otros (2009)

Otro **robot** (elegir otro integrante), da pasos de distinta longitud que el robot anterior. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

a). Si el robot está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?_____

b). ¿Cuál es la relación entre los pasos de los dos robots?_____
_____
_____

5. Los integrantes de tu equipo piensan prestar dinero y cobrar interés para así obtener una ganancia, para ello realizan un cartel como el que se muestra

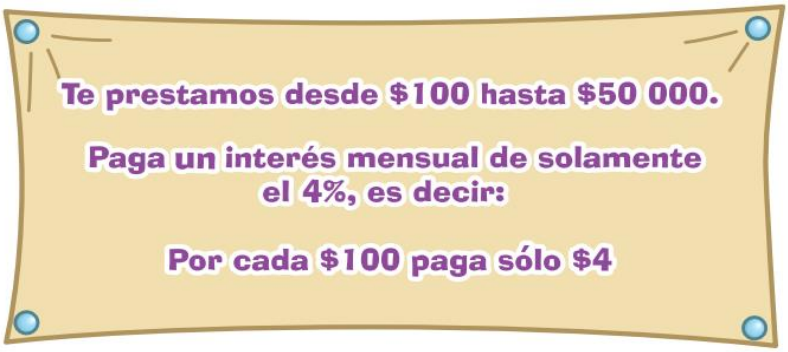


Ilustración 51.Anuncio de préstamos. Obtenido de Balbuena & Otros (2009)

Con base en la información anterior calcular el interés mensual a pagar por las siguientes cantidades:

Cantidad ($)	*Interés ($)*
100	
200	
500	
1000	
1500	
2500	
10000	
50000	
150	
2650	
125	
1625	

Ilustración 52.Tabla de intereses

6. Luego de trabajar en el negocio de prestar dinero y ganar interés se dieron cuenta que era mejor que cada uno hiciera su propio negocio y que iniciaran vendiendo la mercancía con un descuento del 10%. Completar la siguiente tabla.

		Vendedor 1:	*Vendedor 2:*	*Vendedor 3:*
Bolsos	*Precio*	100		80
	Descuento	10		
	Precio rebajado	90		
Aretes	*Precio*			
	Descuento		6	4
	Precio rebajado			
Blusa	*Precio*			
	Descuento	8		
	Precio rebajado		45	63

Ilustración 53. Descuento de mercancías. Adaptada de Balbuena y Otros (2009)

ACTIVIDAD 6

POST-TEST

Unidad: Actividad de diagnóstico final	**Nombre del curso:**
Profesor: Carlos Arturo Valencia	**Duración: 30 minutos**
Estudiante:	**Fecha:**

ACTIVIDAD[4]

Responde las siguientes preguntas acorde a lo que sabes del conjunto de los números racionales.

7. ¿Conoces el origen de los números racionales?
   c) si
   d) no

   En caso afirmativo, explicarlo.

8. ¿Conoces las fracciones egipcias?
   c) si
   d) no

   En caso afirmativo, explicarlo.

9. Sustituye las palabras en cursiva por una expresión numérica.
   k) ***Media*** *hora.*
   l) Las ***tres cuartas partes*** de un iceberg está sumergidas en agua.
   m) Los mares y los océanos forman aproximadamente ***siete décimos*** de la superficie del planeta.
   n) Un mes es la ***doceava parte*** de un año.
   o) Un cuatrimestre es la ***tercera parte*** de un año.

10. De acuerdo a la siguiente imagen.
    a) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura A?
    b) ¿Qué fracción representa la región sombreada de la figura B?

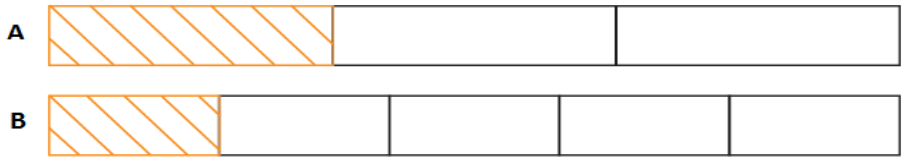


Ilustración 54. Representación de fracciones. Tomado de (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011)

11. Jorge se ganó $10.000.000 y de estos, invirtió $\frac{3}{5}$ en la motocicleta que tanto deseaba; el resto lo compartió con su familia.
    i) ¿Cuánto le costó a Jorge la motocicleta?
    j) ¿Cuánto dinero compartió con su familia?
    k) ¿Qué porcentaje del total ganado costó la motocicleta?
    l) ¿Qué porcentaje del total ganado compartió con su familia?

12. Identifica en las siguientes fracciones $\frac{8}{12}, \frac{2}{12}, \frac{4}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{7}$
    g) Una fracción irreducible.
    h) Un par de fracciones equivalentes.
    i) Una fracción igual a la unidad.

[4] Algunos puntos de esta actividad son adaptados de los textos Matemática 6 de Castro & Osorno (2014) y Didactica de la matemática (Ecuador, GUÍA PARA DOCENTES, 2011)

Referencias

Alzina, R. B. (2009). *METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA.* Madrid: La muralla S.A. Obtenido de https://books.google.com.co/books?hl=esylr=yid=VSb4_cVukkcCyoi=fndypg=PA3ydq=Alzina,+R.+(2009).+METODOLOG%C3%8DA+DE+LA+INVESTIGACI%C3%93N+EDUCATIVA.+Madrid:+La+muralla+S.A.yots=PuyxQjjwDQysig=g8O23GrgwKtq-Jujn_gnjRyDzo0#v=onepageyq=Alzina%2C%20R.%20(2009)

Amaya, L. M., y Solano, A. S. (2006). *Reflexiones acerca de las fracciones.* Grupo de Estudio e Investigación en Educación Matmática "GEMAT". Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/884/1/20Conferencias.pdf

Balbuena, H. H., y Otros. (2009). *Matemática 6. Cuaderno de trabajo para el alumno.* Argentina: Servicios editoriales. Obtenido de http://educacionespecial.sepdf.gob.mx/escuela/documentos/CurriculumBasica/Primaria/Apoyo/MatematicasCuadernoTrabajo6.pdf

Barbosa, E. C. (2003). La historia de la matemática como recurso metodologico en los procesos de enseñanza aprendizaje: una experiencia de secundaria. *UNICIENCIA*, 259-266. Obtenido de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/download/109/102

Bausela, H. E. (1992). LA DOCENCIA A TRAVÉS DE LA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación, 20/*, 7-36. Obtenido de http://rieoei.org/deloslectores/682Bausela.PDF

Becco, G. R. (1999). *Vygotsky y teorías sobre el aprendizaje. COCEPTOS CENTRALES DE LA PERSPECTIVA VYGOTSKIANA.* Obtenido de http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/Vygotsky%20y%20teor%C3%ADas%20sobre%20el%20aprendizaje.pdf

Benega, M., Capelletti, G., García, M., y Tenutto, M. (2006). *Matemática. Números racionales. Aportes para la enseñanza.Nivel medio.* Buenos Aires. Obtenido de http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/matematica_aportesmedia.pdf

Carrera, B., y Mazarella, C. (Abril-Junio de 2001). Vygotsky: enfoque sociocultural. *Educere, 5*(13), 41-44. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/356/35601309.pdf

Carrera, B., y Mazarella, C. (Abril-Junio de 2001). Vygotsky: enfoque sociocultural. *Educere, 5*(13), 41-44. Obtenido de http://www.redalyc.org/pdf/356/35601309.pdf

Castro, L., y Osorno, M. (2014). *Matemáticas 6. Texto para estudiantes.* Quito Ecuador: Ediciones SM. Obtenido de https://es.slideshare.net/blankiadri/texto-delestudiantematematicas6toegb

Ceneida Fernandez, M. M. (2015). *Investigación en Educación Matemática XIX.* Alicante:SEIEM. Obtenido de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/51591/1/2015-Actas-XIX-SEIEM.pdf

Cordero, Z. R. (2009). LA INVESTIGACIÓN APLICADA: UNA FORMA DE CONOCER. *Revista Educación, 33*(1), 155-165. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44015082010

Ecuador, M. (2011). *Didáctica de las Matmáticas.* Quito-Ecuador: MinEduc. Obtenido de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2013/03/SiProfe-Didactica-Matematicas.pdf

Ecuador, M. (2011). *GUÍA PARA DOCENTES.* Quito: Don Bosco. Obtenido de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2014/09/Guia-Docente-Matematica-8vo.pdf

Edumates. (16 de Noviembre de 2011). Números racionales. Argentina. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=bBKF9dwGdWgyt=40s

Freepik. (2010-2017). Obtenido de Ilustración de ciudad de noche Vector Premium: http://www.freepik.es/vector-gratis/ilustracion-de-ciudad-de-noche_831969.htm

Gil, F. L. (2008). *Historia y didáctica de los números racionales e irracionales.* Jaen-España: Ittakus. Obtenido de http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Francisco_Luis_Flores_Gil_-_Historia_y_Didactica_de_los_Numeros_Racionales_e_Irracionales.pdf

Huanaco, I. C. (2015). *NÚMEROS RACIONALES EN EL ANTIGUO EGIPTO.* Obtenido de https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/82386/2/35948.pdf.

Icfes. (2016). *Reporte de resultados del examen saber 11 por aplicación 2016-1 para establecimientos educativos.* Bogotá. Obtenido de http://www.icfes.gov.co/

Javier, F., y Rasilla, D. (2007). La Investigación-acción como medio para innovar en las ciencias experimentales. *Revista Pulso de Educación*(30), 103-118. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2498251.pdf

Jorba, J., y Sanmartí, N. (1993). La función pedagogica de la evaluación. Aula de inovación educativa (20). 20-30. Obtenido de http:// www. seg. guanajuato. gob. mx / Ceducativa / CartillaB / 6antologia / Referentes%20para%20la%20evaluaci%C3%B3n/Sobre%20estrategias%20y%20herramientas%20para%20llevar%20a%20cabo%20evaluaci%C3%B3n%20f/Jorba,%20Jaume%20y%20S.%20Neus.pdf

LeCompte, M. D. (1995). Un matrimonio conveniente: Diseño de investigación cualitativa y estandares para la evaluación de programas. *Revista Electrónica de investigación y evaluación educativa. RELIEVE, 1*(1). Obtenido de http://www.uv.es/relieve/v1/RELIEVEv1n1.htm

Lucci, M. A. (2006). LA PROPUESTA DE VYGOTSKY:LA PSICOLOGÍA SOCIO-HISTORICA. *Revista de currículum y formación del profesorado., 10*(2), 2-11. Obtenido de http://www.ugr.es/local/recfpro/Rev102COL2.pdf

Macias, C. O. (2015). *"Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón".* Medellín. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/51739/1/43527937.2016.pdf

Macias, C. O. (2015). *"Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón".* Medellín.

Martínez, K. L., y Mateus, S. G. (2016). *Resumen Ejecutivo Colombia en PISA 2015.* Bogotá.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares matemáticas.* Bogotá, DC. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares matemáticas.* Bogotá, DC.

MEN. (2004). *Estandares básicos de competencias en matemáticas.Potencias el pensamiento matemático. Un reto escolar.* Bogostá, DC.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, DC. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN. (2012). *Guías Didácticas del Docente 8°.* Bogotá. Obtenido de http://redes.colombiaaprende.edu.co/ntg/men/archivos/Referentes_Calidad/Modelos_Flexibles/Secundaria_Activa/Guias_Docente/Guia_Docente_Grado08.pdf

MEN. (2016). *Informe por colegio 2016. Resultados Pruebas Saber 3°, 5° y 9°.* Bogotá. Obtenido de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siemprediae/86442

Mol, R. S. (2013). *Introdução à História da Matemática.* Obtenido de http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales apartir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 158-182. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

ORDUZ, M. E. (2012). *UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES EN EL GRADO SEXTO.* Bogotá. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf

Perez, J. I., Higuita, J. C., y Valencia, C. A. (2014). *INFLUENCIA DEL LENGUAJE VERBAL Y VISUAL EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.* Medellín. Obtenido de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1320/1/JC0942.pdf

Rodríguez, Á. S. (2014). *APRENDER LAS MATEMÁTICAS EGICPIAS.* Obtenido de http://egiptologia.com/wp-content/uploads/2016/07/Aprender-matematicas-egipcias.1.pdf

Sampieri, C. R., Collado, C. F., y Lucio, P. B. (2010). *Metodología de la investigación* (5 ed.). México: MacGraw-Hill. Obtenido de https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA*, 17-28. Obtenido de https://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Valdez, V. (18 de Febrero de 2008). *LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS A TRAVÉS DE LA HISTORIA.* Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2779665.pdf