UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite mediante fractales lineales

Jorge Leonardo Gómez Guevara

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2018

Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite mediante fractales lineales

Jorge Leonardo Gómez Guevara

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Doctor Herbert Alonso Dueñas Ruiz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2018

Habiendo entendido cómo la humanidad ha adquirido el conocimiento de ciertos conceptos, estamos en la mejor posición de juzgar cómo los estudiantes deberían adquirir dicho conocimiento.

George Polya

Agradecimientos

En primer lugar deseo agradecer a la Universidad Nacional de Colombia y en particular a todos los docentes de la maestría por haberme dado la oportunidad de ampliar, integrar, formalizar y reflexionar sobre los conocimientos disciplinares, científicos, pedagógicos y didácticos que intevienen en la labor docente; y sobre todo los saberes matemáticos necesarios para ser llevados al aula de manera óptima y pertinente.

Al Dr. Herbert Alonso Dueñas Ruiz, coordinador del programa de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, y director del presente trabajo, por su acompañamiento constante, colaboración y valiosos consejos que permitieron el desarrollo, ejecución y culminación del trabajo.

A la Dra. Clara Helena Sánchez Botero, docente de la maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, por su gran inspiración en el ámbito didáctico, histórico-epistemológico del trabajo, así como su colaboración, aportes y reflexiones en la documentación de referentes teóricos tenidos en cuenta.

Al Gimnasio los Andes, estudiantes y jefe de departamento de Matemáticas Jovanny González, los cuales contribuyeron con agrado en la aplicación y evaluación de las actividades propuestas.

En especial a mi esposa, padres y hermanos por su paciencia y apoyo constante.

Resumen

El presente trabajo muestra una estrategia didáctica que permite a los estudiantes de grado undécimo del Gimnasio los Andes (Bogotá) aproximarse al concepto de límite mediante la geometría de fractales lineales. La secuencia de actividades se enfoca en desarrollar por medio de las estructuras fractales el conjunto de obstáculos epistemológicos "horror al infinito", caracterizado por Ana Sierpinska, realizando un breve recorrido histórico-epistemológico del concepto en mención. La ingeniería didáctica se fundamentó en el contraste de una prueba de entrada y otra de salida, tomando como referencia dos grupos: experimental y de control. La investigación planteada concluye que los estudiantes confrontaron implícitamente las ideas de infinito actual y potencial; y así se logró introducir de manera aproximada algunas nociones de convergencia y continuidad por medio de numerosas expresiones y modelos matemáticos como series, sucesiones y funciones, las cuales contribuyeron satisfactoriamente a la comprensión del concepto de límite.

Palabras clave: concepto de límite, geometría fractal, obstáculos epistemológicos, "horror al infinito".

Abstract

The present paper shows a didactic strategy that allows eleventh grade students of the Andes School (Bogotá) to approach the concept of limit using the geometry of linear fractals. The sequence of activities focuses on developing, through fractal structures, the set of epistemological obstacles "horror to infinity", characterized by Ana Sierpinska, making a brief historical-epistemological journey of the concept in question. The didactic engineering was based on the contrast of a pre-test and a post-test, taking as reference two groups: experimental and control. The proposed research concludes that the students implicitly confronted the ideas of current and potential infinity, and thus it was possible to introduce in an approximate way some notions of convergence and continuity through numerous expressions and mathematical models such as series, successions and functions, which contributed satisfactorily to the understanding of the concept of limit.

Keywords: limit concept, fractal geometry, epistemological obstacles, "horror at infinity"

Contenido

Agradecimientos iv

Resumen v

Lista de tablas viii

Lista de figuras xi

1. Introducción 2

2. Objetivo general 4
2.1. Objetivos específicos 4

3. Marco Teórico 5
3.1. Marco Histórico-Epismológico 5
3.2. Marco disciplinar 8
3.2.1. Definición de límite 8
3.2.2. Fractales 13
3.3. Marco didáctico 22
3.3.1. Obstáculos epistemológicos del concepto de límite 23
3.3.2. Dificultades en el proceso de aprendizaje del concepto de límite . . . 27

4. Marco metodológico 29
4.1. Descripción de las actividades 30
4.1.1. Pre-test 31
4.1.2. Actividad 1 33
4.1.3. Actividad 2 34
4.1.4. Actividad 3 35
4.1.5. Actividad 4 36
4.1.6. Actividad 5, proyecto de síntesis 38
4.1.7. Post-test 39

5. Análisis 42
5.1. Pre-test 42
5.2. Actividad 1 52

5.3. Post-test 58

6. Conclusiones y recomendaciones **69**

6.1. Conclusiones 69

6.2. Recomendaciones 70

6.2.1. Recursos descargables 71

A. Anexo: Pre-Test **72**

B. Anexo: Actividad 1 **74**

C. Anexo: Actividad 2 **76**

D. Anexo: Actividad 3 **78**

E. Anexo: Actividad 4 **79**

F. Anexo: Actividad 5 **80**

G. Anexo: Post-test **82**

H. Anexo: Evidencias **84**

Bibliografía **88**

Lista de Tablas

3-1. SFI para la curva de Koch 22

4-1. Secuencia de actividades 31

5-1. Resultados ítem la dicotomía, pretest 42
5-2. Resultados ítem sumas de secuencias Pretest 44
5-3. Resultados ítem Gráficos - Pretest 47
5-4. Resultados ítem Recubrimientos, Pretest 50
5-5. Resultados ítem Cuadrados inscritos, Postest 58
5-6. Resultados ítem la planta, post-test 61
5-7. Resultados ítem Rectángulos, Post-test 63
5-8. Resultados ítem conjunto de Cantor, Post-test 66

Lista de Figuras

3-1. Ilustración al tomar un valor para ε más pequeño 9
3-2. Procedimiento de medida de la costa británica, tomada de Soler (2014, p.13) 13
3-3. Aquí podemos apreciar como se evidencia la autosimilitud en un Brocoli, tomada de http://www.grupoalquerque.es/ferias/2005/fractales/propiedad.htm 14
3-4. Autosemejanza en la Curva de Koch, tomada de Rubiano (2009, p.9) 14
3-5. Segmento, cuadrado y cubo, figuras sencillas por practicidad de dimensiones 1, 2 y 3 15
3-6. Paso de la figura inicial a la iteración 1 de la curva de Koch 19
3-7. Unificación de las funciones w_1, w_2, w_3, w_4 21
3-8. Representación del SFI en Geogebra 22
3-9. Obstáculo espistemológico horror al infinito asociado a la noción de límite (*Ana Sierpinska*). Tomado de Guitiérrez (2005) 23
3-10.Ejemplo método exhaustivo nonágono 24
3-11.Si área A = área B, y área A' = área B', entonces el volumen de la pirámide es igual al volumen del cono 25

4-1. Función volumen de la esponja de Menger 35
4-2. Procedimiento de medición para $5m$ 39
4-3. Procedimiento de medición para $2m$ 40

5-1. Contraste ítem dicotomía, grupo experimental y de control 44
5-2. Contraste ítem sumas de secuencias, grupo experimental y de control 47
5-3. Contraste ítem gráficos, grupo experimental y de control 49
5-4. Contraste ítem recubrimientos, grupo experimental y de control 52
5-5. Contraste concepción algebraica de límite 60
5-6. Contraste concepción algebraica de límite 62
5-7. Contraste concepción numérica de límite 65
5-8. Contraste concepción aritmética de límite 67

C-1. Tomado de https://matemelga.wordpress.com/2015/01/09/la-esponja-de-menger/ 76

H-1. Uso del software Geogebra en la visualización de los fractales utilizados . . . 84
H-2. Fractal copo de nieve en el software Geogebra 84
H-3. Fractal copo de nieve 2 en Geogebra 85

H-4. Drone para toma de fotografías vista superior parque infantil 85
H-5. Drone para toma de fotografías vista superior parque infantil 2 85
H-6. Paque infantil 86
H-7. Proyecto de síntesis medición parque infantil 86
H-8. Proyecto de síntesis medición parque infantil 2 87
H-9. Proyecto de síntesis medición parque infantil por pasos 87

1. Introducción

La presente propuesta desarrolla una experiencia en el colegio Gimnasio los Andes, institución educativa privada ubicada al norte de Bogotá, sobre la calle 209 con 45 (localidad de Suba). Este planteamiento está encargado de la elaboración y análisis de una secuencia de actividades que procuran favorecer la comprensión del concepto de límite, usando la geometría de fractales lineales, con estudiantes de grado undécimo. La población estudiantil pertenece a los estratos 4, 5 y 6.

El Gimnasio los Andes bajo su política, *"el colegio para la vida"* adopta como modelo pedagógico la enseñanza para la comprensión, en una visión de la educación donde se privilegia la comprensión, realiza una clasificación del ciclo superior de la educación media en grupos de profundización y fundamentación en Matemáticas. En este contexto se pretende tener grupos de trabajo más homogéneos, así como afianzar y profundizar en los conceptos matemáticos.

No obstante, cuando se trabaja el concepto de límite (en grado undécimo) se presentan diversas dificultades que tienen su origen en la complejidad del concepto y los obstáculos epistemológicos relacionados con él. Es por ello que se requiere proponer actividades y estrategias didácticas que permitan enriquecer y dotar de sentido éste concepto.

El énfasis que usualmente se da en la enseñanza tradicional a las reglas y procedimientos relacionados con el cálculo de límites, deja de lado los aspectos conceptuales, los cuales en la mayoría de los casos son muy pobres y se quedan cortos a la hora resolver problemas y aplicar propiedades de un concepto tan abstracto. Esto se evidencia constantemente en el aula, ya que como lo mencionan [Blázquez and Ortega, 2000], para los estudiantes es un concepto poco interesante y que olvidan con facilidad.

A lo largo de los últimos 30 años, el concepto de límite ha sido objeto de estudio e investigación, con la intención de mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje, no sólo en el ámbito de la educación media sino en el nivel universitario. Al respecto, Ana Sierpinska citada en [Blázquez et al., 2008], caracteriza en su investigación los obstáculos epistemológicos que subyacen de la génesis histórica del concepto de límite; y propone diferentes situaciones didácticas que pueden contribuir a la superación de dichos obstáculos.

Retomando los planteamientos de Ana Sierpinska sobre los obstáculos epistemológicos que conciernen la concepto de límite, [Medina, 2001], realiza un estudio minucioso de los mismos en torno al concepto de límite, y caracteriza la evolución de su concepción a través de la historia. Haciendo explícito, entre otros el obstáculo que denomina "horror al infinito" término acuñado por Cantor, el cual se refiere a la no aceptación del infinito actual; o en otras palabras la concepción que tenían los griegos en la llamada época de oro, sobre el infinito potencial; aquel que crece indefinidamente.

Ahora bien, teniendo en cuenta que el concepto de límite es de suma importancia, especialmente porque es considerado base del análisis [Blázquez and Ortega, 2000], ya que permite introducir conceptos como continuidad, derivada e integral, número real y demás objetos que repercuten directamente en el cálculo infinitesimal, se sugiere entonces desarrollar tan solo una aproximación al concepto del límite. En el sentido y ámbito escolar, teniendo en consideración el marco legal propuesto por el MEN, específicamente en los estándares básicos de competencia en Matemáticas y lineamientos curriculares del mismo.

Sin embargo, con el afán de indagar acerca de estudios similares que se relacionen directamente con nuestro objeto de estudio, se encontraron dos trabajos bases que abordan el concepto de límite, desde los fractales:

El primero de ellos, se realizó recientemente por [Camargo and Bustos, 2013]. En dicho trabajo se proponen una serie de actividades que favorecen la comprensión del concepto de límite con estudiantes de grado undécimo, centradas en el fractal árbol pitagórico. Dichas actividades pretendieron superar el obstáculo geométrico que subyace del concepto de límite, también caracterizado por Ana Sierpinska en su estudio. La propuesta permitió que los estudiantes llegaran a la noción de límite a través del tratamiento geométrico y el cálculo de áreas del fractal mientras variaban las iteraciones del mismo.

Finalmente, se encontró el estudio de [Soler, 2014], en donde se relaciona de manera interesante la construcción del concepto de límite desde los fractales, desarrollando con los estudiantes una idea de aproximación y tendencia a un número haciendo uso de estructuras fractales como: el triángulo de Sierpinski, los cuadrados y la curva de Koch. De esa manera, encontró que es posible introducir de forma intuitiva el concepto de convergencia de una sucesión por medio del proceso geométrico infinito que permiten los fractales.

Del problema planteado anteriormente surge la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de estrategia didáctica permite a los estudiantes de grado undécimo aproximarse al concepto de límite por medio de la geometría de fractales lineales?

2. Objetivo general

Desarrollar una secuencia didáctica para trabajar con estudiantes de grado undécimo el concepto de límite por medio de la geometría de fractales lineales.

2.1. Objetivos específicos

- Identificar los conocimientos previos de los estudiantes respecto al concepto de límite.
- Determinar y delimitar los aspectos conceptuales, epistemológicos y didácticos que fundamentan el concepto de límite.
- Construir el conjunto de actividades que conforman la secuencia didáctica.
- Implementar y evaluar con los estudiantes de grado undécimo las actividades propuestas en la secuencia didáctica.

3. Marco Teórico

A continuación, se realizará una descripción de los aspectos teóricos más importantes que se relacionan con el concepto de límite. En primera instancia se abordará, a grosso modo, el desarrollo y construcción de dicho concepto a lo largo de la historia. Por otra parte, se expone el aspecto disciplinar inmerso en la investigación, específicamente sobre cómo es presentado formalmente el concepto de límite y como es aceptado ante la comunidad matemática; sin dejar atrás la construcción matemática y caracterización de la geometría de fractales lineales. Finalmente, se pone en evidencia el marco didáctico, alrededor del concepto de límite en el contexto escolar, principales dificultades en el proceso de comprensión del mismo y obstáculos epistemológicos.

Por otra parte, cabe resaltar la importancia del uso del software Geogebra en la ilustración de gran parte de las imágenes que se presentan, aprovechando la edición de texto en formato LaTeXy su fácil exportación en formato png. Es por ello, que las ilustraciones que no se encuentran referenciadas, es porque fueron diseñadas por medio del programa tecnológico en mención.

3.1. Marco Histórico-Epismológico

Tomando como reflexión lo planteado por [Guzman, 1993], la historia juega en la enseñanza de las matemáticas el rol de proveer una mirada más humana de la ciencia, comprender que es creada y elaborada por seres humanos, comunes y corrientes. Por otra parte, el conocimiento histórico brinda elementos para comprender el desarrollo de un determinado concepto, así como también la opción de identificar las principales dificultades que se dan de manera inherente y natural.

Es por ello que se toma en consideración lo expuesto por [Filloy et al., 2003], en cuanto al concepto de límite se refiere, éste se remonta a la llamada época de oro –siglo VI-II a.C.-, donde Zenón de Elea, famoso por sus paradojas, inició a notar inconsistencias en el uso del infinito y lo complejo que resulta su asimilación; dado que, se pueden producir contradicciones, como es el caso de "Aquiles y la tortuga". Dichas paradojas perduraron sin respuestas por siglos, pues el mismo Aristóteles afirmaba que no era posible que el infinito existiera como ser actuante; por éstas y muchas otras razones los griegos no concebían ésta idea de

infinito y de su existencia palpable.

Por su parte, Eudoxo de Cnido y Arquímedes, según afirma [Ferrante, 2009], desarrollaron el conocido método de exhaución, el cual pretende determinar el cálculo de áreas de figuras, volúmenes y longitudes de curvas, mediante aproximaciones finitas grandes muy precisas. Por ejemplo, Arquímedes en su trabajo encontró la cuadratura de la parábola, por medio de éste método. Cabe resaltar, y como bien lo señala [Kleiner, 2001], los griegos obtuvieron brillantes resultados para la época, donde se contaba con muy poco simbolismo y se privilegiaba lo verbal, claro está que sin carecer de rigor.

Más tarde, fue Cavalierajo las ideas de Kepler y Galileo en 1635, quien formuló propuestas interesantes para el cálculo de volúmenes de cuerpos, mediante planos y secciones infinitas, mejor conocido como método de los invisibles. Cavalieri fue un antecesor del cálculo integral, impregnando una idea de infinitésimo pequeño. De hecho afirmó que *"una superficie estaba conformada por líneas sin ancho y que un volumen, un montón de superficies sin espesor"* [Ferrante, 2009]. Otro de los beneficios de **el principio de Cavalieri** que señala [Kleiner, 2001] era "si los elementos indivisibles están siempre a una razón dada, entonces las áreas (volúmenes) de dos figuras están a la misma razón proporcional" y ésto le validó por ejemplo el hallazgo del área de una elipse, en comparación a su circunferencia que la circunscribe.

Consecuentemente, como se puede evidenciar en [Ruiz, 2003], Fermat inició sus estudios en la geometría cartesiana y muy pronto descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica, denominada como "cantidades infinitamente próximas". Cabe resaltar, que según [Kleiner, 2001] Fermat era capaz de encontrar tangentes a una curva polinómica, claramente un gran referente del cálculo diferencial. De hecho, Laplace consideraba a Fermat como el verdadero descubridor, pues los trabajos de Newton y Leibnitz se dieron a conocer tiempo después.

Posteriormente, sobre el siglo XVII, de acuerdo a los planteamientos de Knobloch (1999); citado en Filloy y Hitt (2003), Leibniz estableció la acreditada "ley de continuidad", donde intentó extrapolar las propiedades y reglas que se cumplen en el finito al infinito. Encontrando procesos infinitos, por ejemplo en el cálculo de $\frac{\pi}{4}$. Las ideas de Leibniz motivaron a Fourier para considerar un gran trabajo de funciones continuas y sucesiones convergentes y la construcción de series trigonométricas. No obstante, según afirma [Kleiner, 2001], más allá de los grandes aportes matemáticas que realizó Leibniz, y que realmente favoreció sobre Newton, fue su notación y las ventajas algebraicas y operativas pronto cobrarían su relevancia.

Por su parte, a mediados del siglo XVIII, llegarían los grandes aportes y logros de Euler. Ya que, como lo indica [Kleiner, 2001], sin el concepto de función, el cálculo sería un sacrilegio. Ésta idea fue considerada un punto de quiebre, que gestó lucidez y sentido al cálculo infinitesimal como base de las matemáticas que se ocupa de las funciones. El enfoque que planteado por Euler en cuanto al cálculo, fue netamente algebraico, realizando también diversos planteamientos por medio de algunas series de potencia.

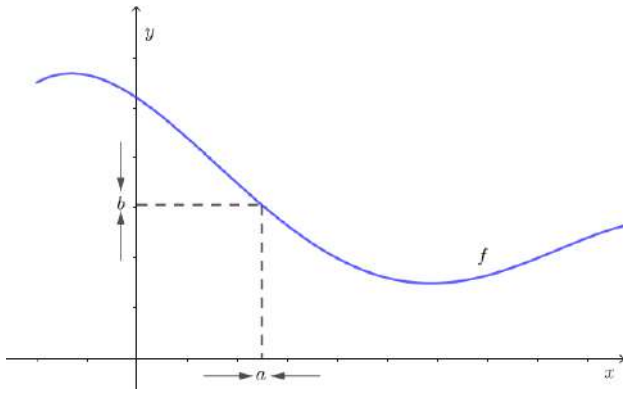
Asimismo, como lo menciona [Filloy et al., 2003], en 1851 Bolzano publica su libro *"Las paradojas del infinito"*, donde esclarece las ideas del infinito actual y su aritmetización, refutando por ejemplo el axioma de Euclides *"El todo es mayor que sus partes"* mediante un subconjunto propio. Y del mismo modo, exponiendo que para que Aquiles alcance a la tortuga, debemos pensar en otra idea de infinito: y éste es el infinito *actual*.

Consecuentemente, y como bien lo señala [Kleiner, 2001], fueron las obras de Cauchy, Bolzano y Weierstrass que permitieron una evolución rigurosa para el cálculo, pues previamente se privilegiaba desde un enfoque geométrico por encima del algebraico. En ese orden de ideas, fue el Alemán Weierstrass, bajo las ideas de Cauchy y D'Alembert, a mediados del siglo XIX, quien modifica notoriamente la aritmetización del análisis y define de manera formal y con rigor matemático el concepto de límite que hoy se conoce, donde se incluyen los conocidos valores δ y ε [Ferrante, 2009].

3.2. Marco disciplinar

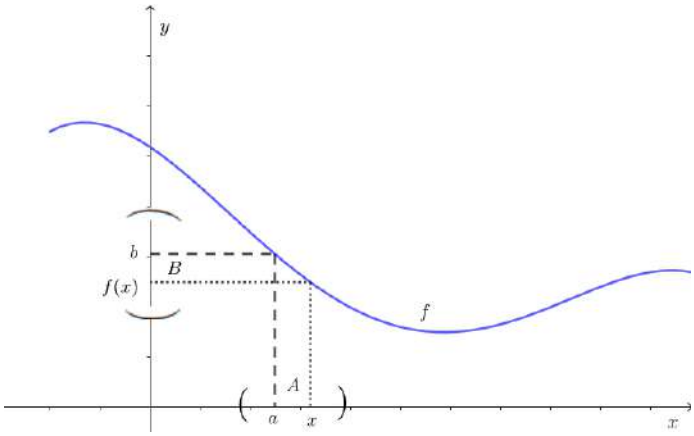
3.2.1. Definición de límite

Tal y como se menciona en algunos textos referentes al cálculo, como [Spivak, 1992], podemos considerar que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ hace referencia a que las imágenes de la función f tienden hacia b, en la medida que x pueda estar tan próximo de a como queramos, tal y como se puede ilustar a continuación:

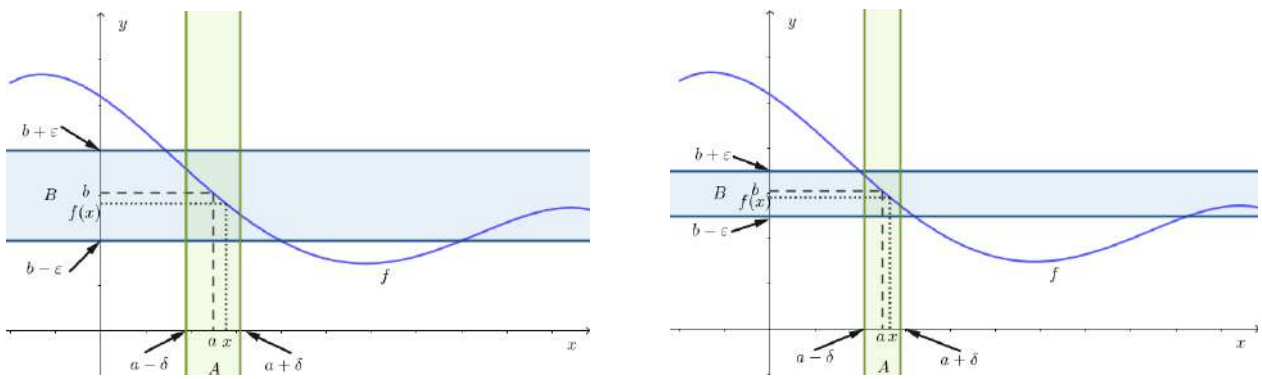


Sin embargo, en matemáticas hacer $f(x)$ próximo a b implica hacer $|f(x) - b|$ pequeño, y del mismo modo para x y a. Es decir, que por el momento la definición planteada inicialmente se puede traducir en que la función f tiende a b, para valores de x cercanos a a. Si podemos hacer $|f(x) - b|$ tan pequeño como queramos haciendo $|x - a|$ suficientemente pequeño, pero $x \neq a$.

Ahora bien, cuando tomamos algunos puntos x próximos a a, éstos pueden estar en un intervalo A; y del mismo modo los valores cercanos a b se encuentran en un intervalo B, tal y como se muestra a coninuación:



Normalmente, los intervalos A y B se suelen definir de la siguiente manera $A = (a-\delta, a+\delta)$ y $B = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, siempre y cuando $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Ahora bien, si para cualquier intervalo B, por pequeño que sea que contenga a b, podemos encontrar un intervalo respectivo A, alrededor de a, estaríamos entonces preservando las condiciones iniciales de hacer $f(x)$ tan próximo a b como queramos haciendo y que x esté suficientemente cerca de a pero distinto de él, de la siguiente manera:



(a) (b)

Figura 3-1.: Ilustración al tomar un valor para ε más pequeño

El procedimiento realizado en la **Figura 3-1** debe funcionar para cualquier ε por pequeño que sea. De tal manera que las imágenes de x están siempre en el intervalo B, las representaciones ilustran qué sucede al tomar un valor para ε más pequeño.

Es por ello, que cuando nos referimos a que debemos hacer $|f(x) - b|$ tan pequeño como queremos, significa que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, es decir que se encuentre en el intervalo B. Y asimismo, para cada número $\varepsilon > 0$ debe existir otro real positivo δ, tal que si $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$, en otras palabras, es posible establecer una relación de dependencia entre los intervalos A y B, conociendo el valor de ε.

Es así como llegamos a la definición que conocemos actualmente:

Definición 1. Si f es una función real, definida al rededor de a, no necesariamente en a, diremos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(el límite cuando x tiende a a de $f(x)$ es b), si:
Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$

Ejemplo: A continuación vamos a probar que: $\lim\limits_{x\to 1} x^3 = 1$.

Siguiendo las ideas de [Dueñas and Rubio, 2015], a partir de la definición planteada, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|x^3 - 1| < \varepsilon$. Partiendo de éste último hecho, la idea es para un valor dado ε, encontrar un valor para δ pertinente.

$$\begin{aligned} |x^3 - 1| &< \varepsilon \qquad \text{implica} \\ |x-1||x^2+x+1| &< \varepsilon \\ |x-1| &< \frac{\varepsilon}{|x^2+x+1|} \end{aligned}$$

Hasta aquí no podemos establecer que $\delta = \frac{\varepsilon}{|x^2+x+1|}$, dado que δ depende no sólo de ε sino también de x lo cual implica que el valor de δ varíe en la medida que se modifica a x. Para resolver esta situación es necesario acotar la expresión $|x^2 + x + 1|$.

Supongamos que $0 < \delta \leq 1$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} |x-1| &< 1 \\ -1 < x - 1 &< 1 \\ 0 < x &< 2 \\ 0 < x^2 &< 4 \\ -4 < 0 < x^2 &< 4 \\ |x^2| &< 4 \end{aligned}$$

Asimismo, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} |x-1| &< 1 \\ -1 < x - 1 &< 1 \\ 1 < x + 1 &< 3 \\ -3 < 1 < x + 1 &< 3 \\ |x+1| &< 3 \end{aligned}$$

Finalmente, recordemos que:

$$\begin{aligned} &|x^2 + x + 1| \leq |x^2| + |x+1| < 4 + 3 \\ &|x^2 + x + 1| < 7 \end{aligned}$$

Por consiguiente, es claro que:

$$|x-1||x^2+x+1| < |x-1|7$$

En ese sentido queremos que $|x-1|7 < \varepsilon$ lo que nos lleva a obtener $\frac{\varepsilon}{7}$ como un valor para δ, el cual presenta una condición inicial $0 < \delta < 1$; así vamos a tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$, siempre y cuando $\frac{\varepsilon}{7} < 1$; ó $\delta = 1$, si $\frac{\varepsilon}{7} \geq 1$ es decir $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\}$. Con base en lo anterior tenemos los elementos suficientes para realizar la demostración respectiva.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\}$. Si $0 < |x-1| < \delta$ se tiene que $0 < |x-1| < 1$ y $0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{7}$. Así,

$$\begin{aligned} |x^3-1| &= |x-1||x^2+x+1| \\ &< \frac{\varepsilon}{7}|x^2+x+1| \end{aligned}$$

Como $|x-1| < 1$ entonces:

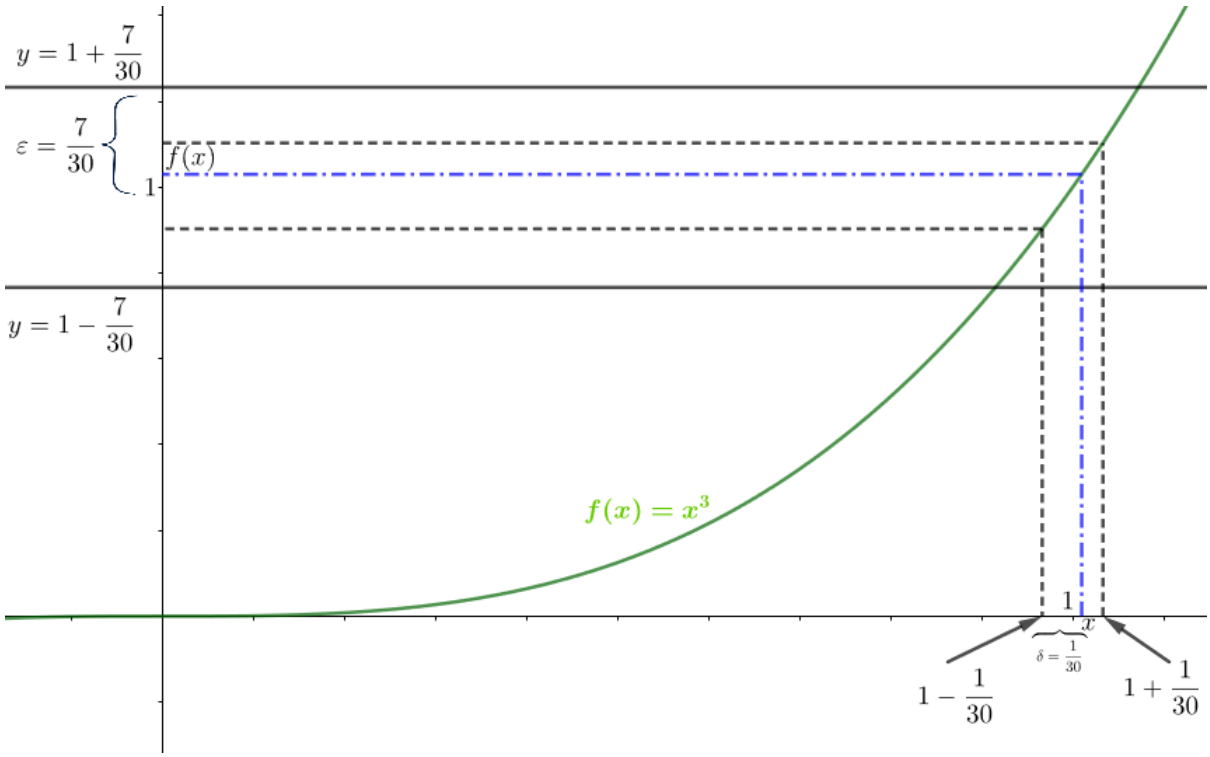
$$\begin{aligned} &|x^2+x+1| \leq |x^2| + |x+1| \\ &|x^2+x+1| < 4+3 \\ &|x^2+x+1| < 7 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} &|x^3-1| < \frac{\varepsilon}{7}|x^2+x+1| \\ &|x^3-1| < \frac{\varepsilon}{7}7 \\ &|x^3-1| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Veamos que, si por ejemplo, $\varepsilon = \frac{7}{30}$, entonces $\delta = \text{mín}\{\frac{1}{30}, 1\} = \frac{1}{30}$. Y aquí las imágenes de x, cuando se encuentran en el intervalo A, siempre están en el intervalo B.



3.2.2. Fractales

Contexto histórico

De acuerdo a como lo establece [Alonso, 1995], el término fractal, proviene del latín *fractus*, lo cual significa roto o irregular. La geometría fractal se considera una disciplina bastante reciente, y surge de manera formal a finales del siglo XIX y mediados del siglo XX. El gran exponente es el matemático polaco Mandelbrot, que gracias a algunos trabajos realizados por Cantor, Koch y Sierpinsky en la construcción de algunas figuras geométricas a partir de iteraciones que parecían copias reducidas de sí mismas, logró constituir dicho concepto. Del mismo modo, de acuerdo a como lo menciona [Soler, 2014] y [Alonso, 1995], Mandelbrot se planteó calcular la longitud de las costas británicas, de modo, que se encontró con que en cuanto la escala de medida disminuye, la longitud del litoral costero crece, planteando así que las longitudes de medida y costera se relacionaban mediante $L(n) = n^{-a}$, donde n es la longitud de medida (ver **Figura 3-2**).

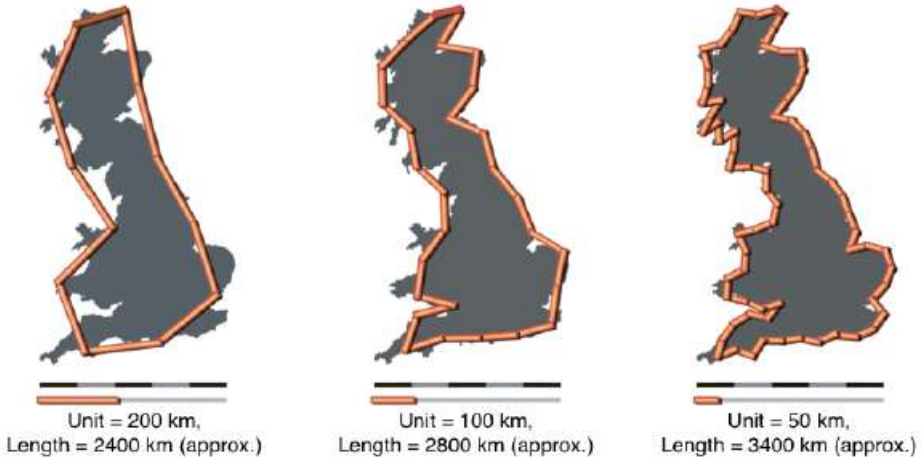


Figura 3-2.: Procedimiento de medida de la costa británica, tomada de Soler (2014, p.13)

Ahora bien, para entender, caracterizar y definir el concepto de *fractal*, según [Rubiano, 2009], es necesario de dos nociones básicas: **autosimilaridad** y **dimensión**, las cuales se esbozarán a continuación.

Autosimilaridad

Ésta primera noción es muy intuitiva, y su implicación requiere que el objeto en mención es autosemejante, es decir, que si observamos una parte de la figura, ésta es una copia de la inicial, no importa a qué escala se examine. Aunque no parezca, dicho fenómeno es muy típico de encontrar en nuestro entorno, por ejemplo la hoja de un helecho, las ramificaciones

de un árbol, los conductos sanguíneos o inclusive alveolos pulmonares.

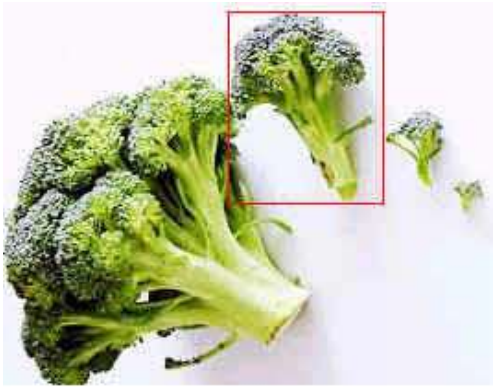


Figura 3-3.: Aquí podemos apreciar como se evidencia la autosimilitud en un Brocoli, tomada de http://www.grupoalquerque.es/ferias/2005/fractales/propiedad.htm

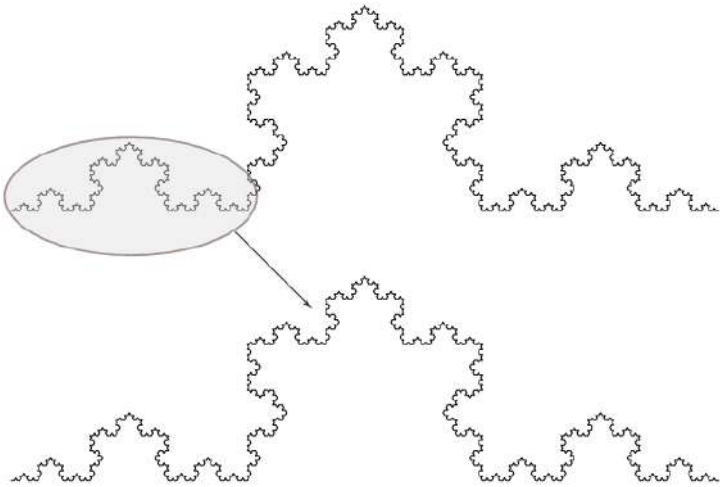


Figura 3-4.: Autosemejanza en la Curva de Koch, tomada de Rubiano (2009, p.9)

Dimensión fractal

Sin lugar a dudas, el concepto que permitió formalizar la geometría de fractales fue el de *dimensión fractal*. Para entender éste concepto vamos a empezar con un segmento de recta de longitud l, si éste se divide en 3 partes iguales, se obtienen 3 segmentos congruentes de longitud $\frac{l}{3}$, del mismo modo, si se repite el proceso mencionada con un cuadrado de lado l, tendremos 9 cuadrados congruentes de longitud $\frac{l}{3}$ y de igual manera, si replicamos el procedimiento en un cubo de longitud l serán 27 los cubos obtenidos al trisecar el lado inicial.

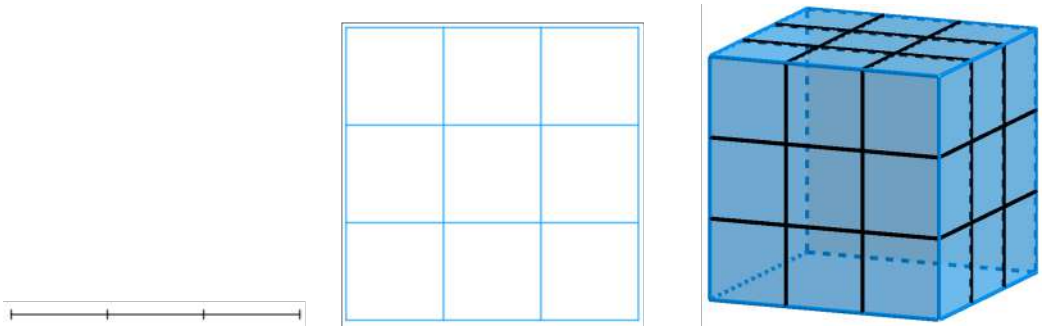


Figura 3-5.: Segmento, cuadrado y cubo, figuras sencillas por practicidad de dimensiones 1, 2 y 3

En ese sentido, tal y como lo señala [Rubiano, 2009], existe una relación entre el número de elementos N y el factor de escala k, el cual se encuentra a una razón $r = \frac{1}{k}$, en nuestro caso $k = 3$, pues cada segmento se reduce a su tercera parte. Veamos que para el segmento $N = 3 = 3^1$, en el cuadrado $N = 9 = 3^2$, y finalmente para el cubo $N = 27 = 3^3$.

Es entonces evidente que $N(k) = k^d$, donde d es la dimensión del objeto.

Definición 2. [1] Sea $N(k)$ el número de partes en que puede ser subdividida cualquier figura, todas congruentes entre sí (por traslaciones o rotaciones) y que sean una copia reducida del objeto inicial por un factor de escala $r = 1/k$, entonces la **dimensión fractal autosimilar** es el único valor d que satiface la ecuación $N(k) = k^d$.

$$d = \frac{log(N)}{log(k)}$$

Dimensión Topológica

Concretamente, una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar la geometría fractal es la topología. Específicamente cuando éstos se pueden generar a partir de un sistema de funciones iteradas. Por éstas razones, para [Rubiano, 2009], éste concepto es fundamental para consolidar formalmente una definición matemática de *fractal*.

Antes de entrar en materia, vamos a definir algunos conceptos básicos concernientes a la topología, teniendo en cuenta las ideas presentadas por [Rubiano, 2010]; los cuales servirán como insumo para dotar de sentido lo que se conoce como *dimensión topológica*.

[1] Adaptado de [Rubiano, 2009]

En primera instancia, es necesario tener en cuenta que: dado $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se tiene que los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman **abiertos**. Y así mismo, se dice que $V \subseteq X$ es **vecindad** de $x \in X$, si existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subseteq V$.

De manera similar en [Rubiano, 2010], se establece que: dados $A \subseteq (X, \mathcal{T})$ y $b \in X$, se afirma que b es un **punto frontera** de A, si para toda V_b se tiene $V_b \cap A \neq \varnothing$ y $V_b \cap A^c \neq \varnothing$. Y del mismo modo, el conjunto de todos los puntos frontera de A se denota como $\partial(A)$.

Ahora bien, para finalizar en [Rubiano, 2009] se define cuándo la **dimensión topológica** es 0, luego 1, ..., luego n y a partir de esta última cuándo es $n+1$, etc, es decir, de manera inductiva.

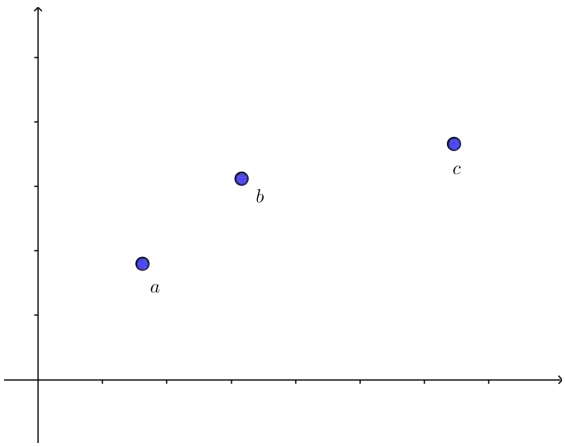
1. La dimensión del conjunto vacío es $\partial(\emptyset) = -1$.

2. Un espacio topológico tiene dimensión cero, $dim(X) = 0$, si dado cualquier $x \in V$ con V abierto en X, existe un conjunto abierto U cuya frontera $\partial(U)$ es vacía y satisface que $x \in U \subseteq V$.

3. Un espacio X tiene $dim(X) \leq n$ si para cada punto x en X y cada conjunto abierto V que contiene a x, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq V$ y $dim(\partial(U)) \leq n-1$; X tiene $dim(X) = n$ si $dim(X) \leq n$ pero es falso que $dim(X) \leq n-1$.

Teniendo en cuenta lo anteriormente presentado, según [Rubiano, 2009]:

Definición 3. *Un fractal es un subconjunto del plano que es autosimilar y cuya dimensión fractal excede a su dimensión topológica.*



Ejemplo 1: veamos que en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, podemos establecer el conjunto finito $\{a, b, c\}$. De tal modo, que si suponemos que la distancia entre los elementos a y b es la menor posible d, entonces la frontera de la vecindad de radio $d/2$ alrededor de algún punto cualquiera no contendrá ningún otro elemento posible. Por lo cual, podemos afirmar que:

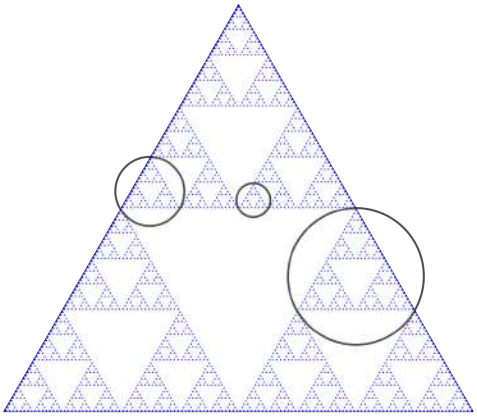
$$dim\{a, b, c\} = 0$$

Ejemplo 2: el fractal *triángulo de Sierpinski*, surgió por el matemático polaco Waclaw Sierpinski, como una variación del conjunto de Cantor en dos dimensiones. La construcción se realiza a partir de un triángulo equilátero de lado l, posterior a la bisección de sus lados, obtenemos 4 cuadrados congruentes, finalmente se suprime el triángulo del centro. El proceso se repite indefinidamente con cada cuadrado obtenido, tal y como se puede apreciar a continuación:

Éste fractal, genera 3 réplicas de triángulo a una escala reducida a su mitad, entonces tenemos que $N = 3$ y $k = 2$, por tanto podemos establecer que posee una **dimensión fraccionaria autosimilar** $d = \dfrac{log(3)}{log(2)} \approx 1{,}585$, según afirma [Alonso, 1995], éste hecho se puede interpretar como si el triángulo Sierpinski ocupará el plano de forma parcial entre un segmento y una superficie.

Por otra parte, en relación a la **dimensión topológica**, vamos a considerar las ideas relacionadas por [Dummit, 2015], en donde se realiza el siguiente razonamiento. La intención es evidenciar que cualquier punto tiene pequeñas vecindades arbitrarias que se intersectan con el triángulo de Sierpinski en un número finito de puntos; pues ésto, permitirá la condición que su frontera posea $dim(\partial(U)) \leq n - 1$, en éste caso particular será $dim(\partial(U)) = 0$.

Es por ello, que para cualquier punto x en el triángulo de Sierpinski, es posible plantear un pequeño círculo, que contenga dicho punto en su interior, pasando a través de los vértices de un pequeño triángulo de la construcción iterativa, tal y como se ejemplifica a continuación.



Éste cículo representa la frontera de una vecindad de x, y ésta a su vez intersectará el triángulo de Sierpinski en exactamente 3 puntos; en la cual hace referencia a un conjunto cuya dimensión topológica es 0. Dado que éste fractal presenta un comportamiento autosimilar, es posible encontrar vecindades arbitrarias como éstos círculos.

En conclusión, obtuvimos que el triángulo de Sierpinski posee una **dimensión fractal autosimiliar** de $d = 1,585$, y su **dimensión topológica** es 1. Lo cual, garantiza según la definición presentada por [Rubiano, 2009], que el triángulo de Sierpinski es efectivamente un fractal.

Fractales lineales:

No obstante, cabe aclarar que ésta geometría es bastante amplia y considera diversos aspectos teóricos. Uno de ellos, y cómo bien lo indica [Alonso, 1995] son los *fractales lineales*, los cuales se caracterizan por mantener una autosimilitud exacta. Y del mismo modo, se considera un sistema dinámico lineal, el cual se puede determinar por medio de un algoritmo de repetición constante, o de manera más formal, mediante un *sistema de funciones iteradas* SFI.

Un SFI representa la forma matricial de la serie de transformaciones afines que requiera el fractal. En particular, tales como contracciones, reflexiones, rotaciones y traslaciones. En general una transformación afín se puede describir del siguiente modo:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

En donde, los parámetros a, b, c, d, e, f determinan respectivamente:

$a = r \cdot cos(\alpha)$	$b = -s \cdot sen(\beta)$
$c = r \cdot sen(\alpha)$	$d = cos(\beta)$
$e =$ desplazamiento en x	$f =$ desplazamiento en y

Tal que:

$\alpha =$ ángulo de rotación en el componente x.
$\beta =$ ángulo de rotación en el componente y.
$r =$ escala para el componente x.
$s =$ escala para el componente y.

Hasta aquí, hemos mencionado que una función w_1 representa una transformación afín que requiera el fractal lineal, pero en su mayoría de ocasiones la generación de un fractal requiere de más de una transformación afín. Por lo cual, como bien lo señala [Rubiano, 2009] el conjunto de funciones $w = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_i\}$ representa las transformaciones afines necesarias para la construcción del fractal y es lo que se conoce como un **sistema de funciones iteradas**.

Ejemplo: A continuación vamos a construir el SFI para el fractal la curva de Koch.

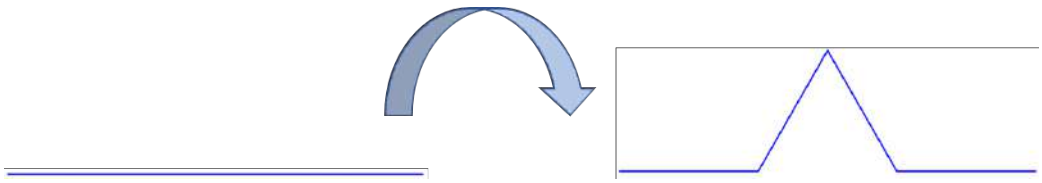
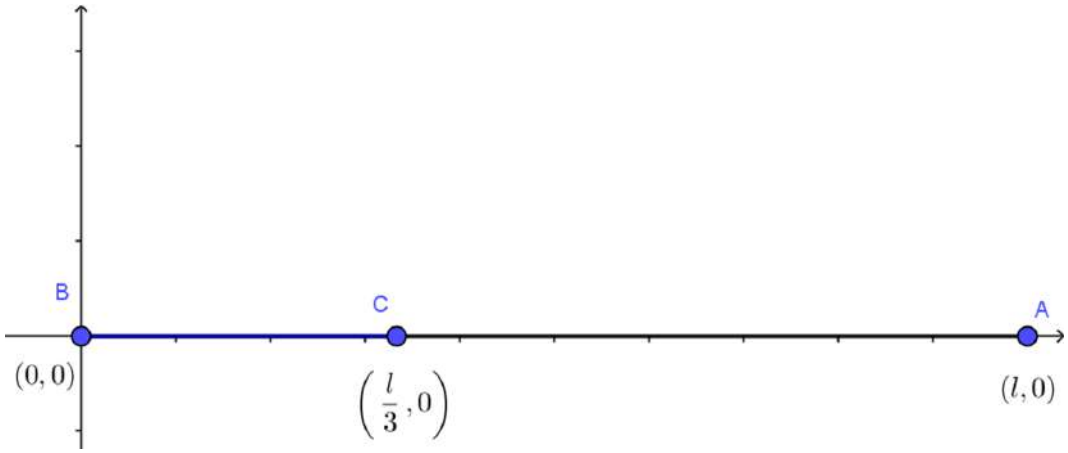


Figura 3-6.: Paso de la figura inicial a la iteración 1 de la curva de Koch

En primera instancia, podemos inferir que el paso a la primera iteración requiere de 4 transformaciones afines, cada una asociada a la generación de uno de 4 segmentos nuevos. Por comodidad podemos ubicar el segmento inicial de longitud l sobre el eje x con coordenadas $(0, 0)$ y $(l, 0)$ y así realizar las transformaciones requeridas.

Inicialmente, es necesario establecer una función que permita hallar la tercera parte de l, de la siguiente manera:

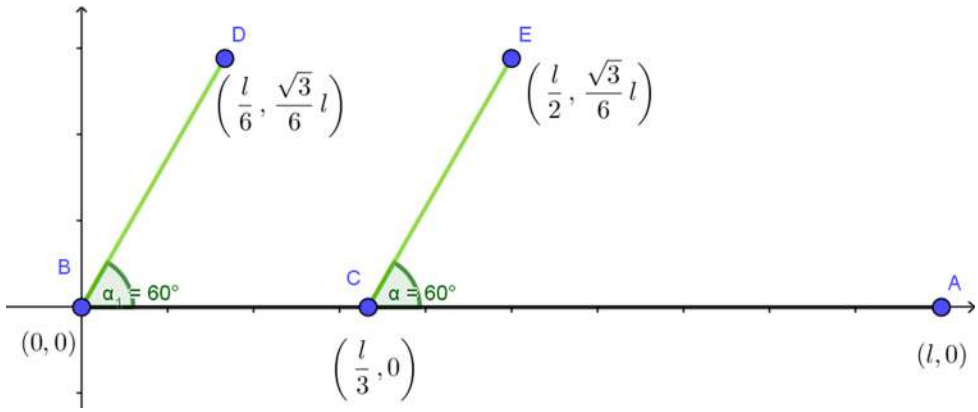


Ésto es factible, mediante:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Consecuentemente, es necesario realizar una transformación que permita reducir su escala a una tercera parte, posterior generar una rotación de 60°, y finalmente trasladar hacia la

derecha dicho segmento $l/3$ unidades, del siguiente modo:



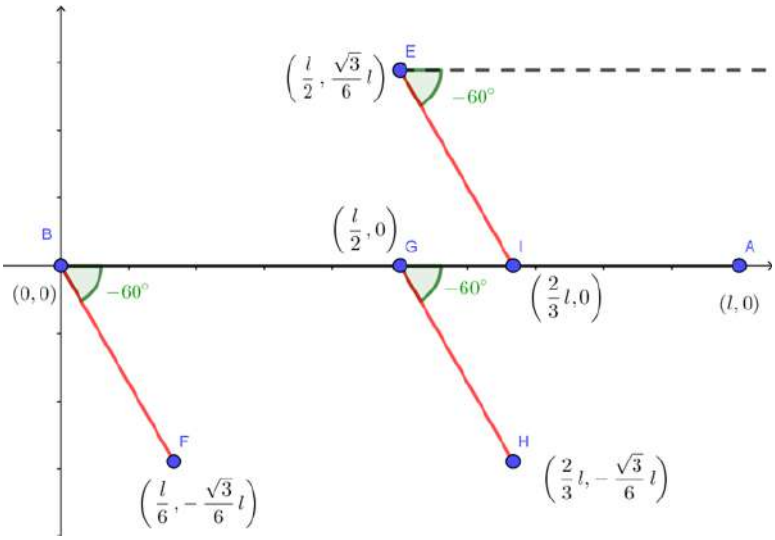
La función que permite realizar la transformación afín mencionada es:

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot cos(60°) & -\frac{1}{3}\cdot sen(60°) \\ \frac{1}{3}\cdot sen(60°) & \frac{1}{3}\cdot cos(60°) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual, implica que

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, tenemos que para el tercer segmento es necesario reducir la escala del segmento original a su tercera parte, realizar una rotación del mismo en $-60°$ y finalmente realizar un desplazamiento de $\frac{l}{2}$ unidades hacia la derecha, y de $\frac{\sqrt{3}}{g}l$ unidades hacia arriba, tal y como se puede apreciar a continuación:



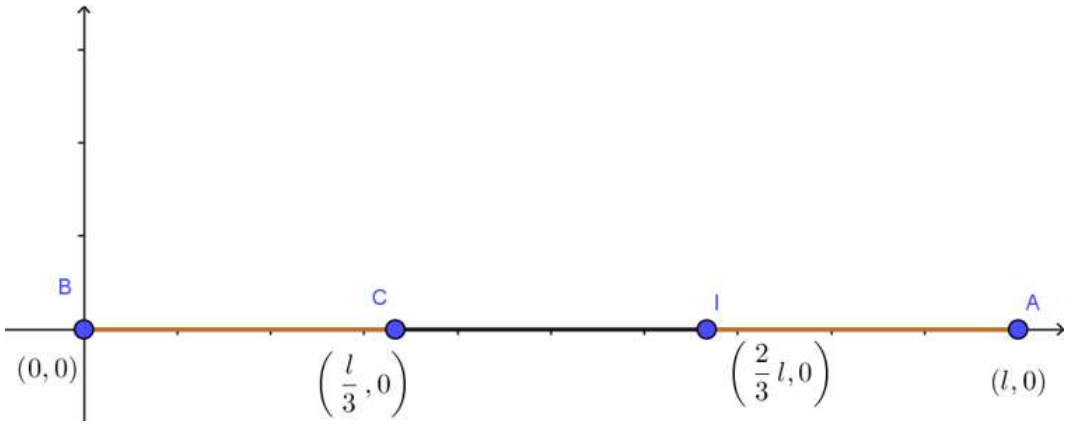
Lo esbozado anteriormente es viable mediante la función:

$$w_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\cdot cos(-60°) & -\frac{1}{3}\cdot sen(-60°)\\ \frac{1}{3}\cdot sen(-60°) & \frac{1}{3}\cdot cos(-60°)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}$$

Simplificando, tenemos

$$w_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}$$

Finalmente, el último segmento que necesitamos se obtiene simplemente al reducir l a su tercera parte, y luego desplazar $\frac{2}{3}l$ unidades hacia la derecha, de la siguiente forma:



La función w_4 que permite representar dicha transformación es:

$$w_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

A manera de conclusión podemos afirmar que el SFI para la curva de Koch es el conjunto de funciones $w=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$, usualmente éste SFI también se puede representar por:

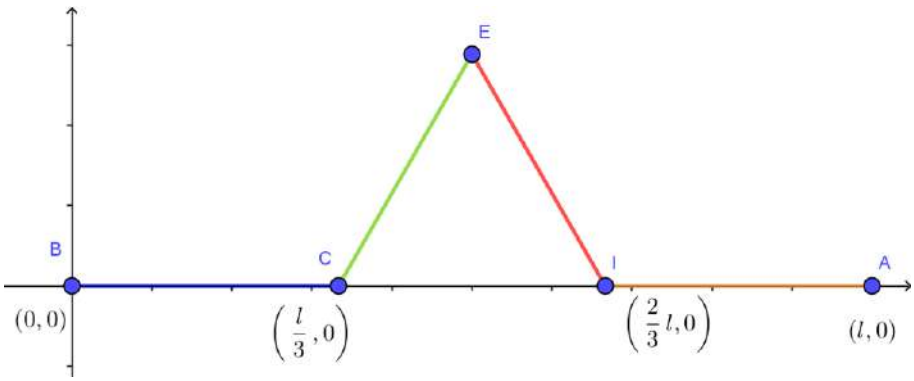


Figura 3-7.: Unificación de las funciones w_1, w_2, w_3, w_4

Tabla 3-1.: SFI para la curva de Koch

a	b	c	d	e	f
$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{1}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{3}$	0	o	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

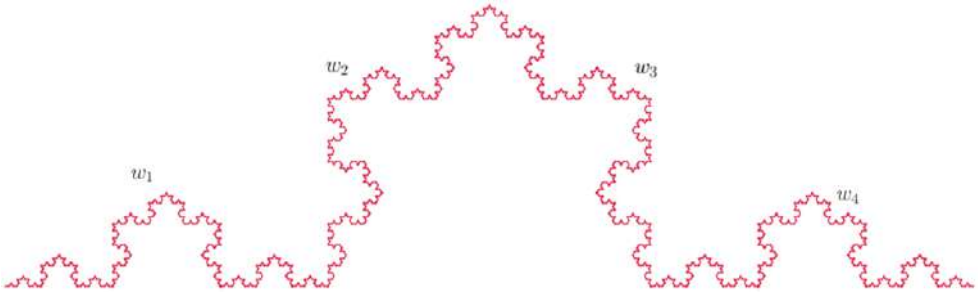


Figura 3-8.: Representación del SFI en Geogebra

3.3. Marco didáctico

Chevallard, como se citó en [Medina, 2001], designa Transposición Didáctica, al conjunto de tratamientos que el maestro realiza a un concepto. Desde el saber aceptado por la comunidad científica, hasta llegar al saber del alumno; afirma que para que el conocimiento se convierta en un saber escolar, debe pasar por ciertas adaptaciones desde su saber científico.

Pero para realizar ésta trasposición didáctica, es necesario realizar una breve revisión histórico-epistemológica del concepto de límite. Ya que, como lo menciona GuyBrousseau, citado en [Blázquez and Ortega, 2000], "el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo" y más aún cuando éste obstáculo es inherente a su génesis histórica del concepto. Este tipo de dificultades es lo que Brousseau denomina como obstáculos epistemológicos.

Es así como [Sánchez and Contreras, 1998] tomando las ideas de Cornu, caracterizan las siguientes concepciones históricas del concepto de límite:

- Concepción geométrica: está asociada con situaciones donde interviene el contexto geométrico, como, por ejemplo, lo realizado por Eudoxo y Arquímedes, en la aproximación de áreas de polígonos en un círculo y el método de exhausión.

- Concepción numérica: está ligada al uso de sucesiones y funciones, por ejemplo, Cauchy y su estudio de dependencia de variables y límite como valor fijo de aproximación.

3.3.1. Obstáculos epistemológicos del concepto de límite

Concepción de Sierpinska:

Sierpinska, citado en [Sánchez and Contreras, 1998] clasifica los obstáculos epistemológicos, en 5 grupos:

1. "Horror al infinito".
2. Ligados a la noción de función.
3. Obstáculos geométricos.
4. Obstáculos lógicos.
5. Obstáculos del símbolo.

Específicamente nos ocuparemos del primer obstáculo "horror al infinito", término acuñado por Cantor, el cual hace referencia a la no aceptación del infinito actual, en otras palabras la concepción que tenían los griegos en la llamada época de oro, sobre el infinito potencial; aquel que crece indefinidamente.

No obstante, [Gutiérrez, 2005] bajo los planteamientos de Ana Sierpinska relaciona el obstáculo *horror al infinito* en los siguientes 7 grupos de acuerdo a su desarrollo histórico y los problemas abordados que dieron origen a los mismos:

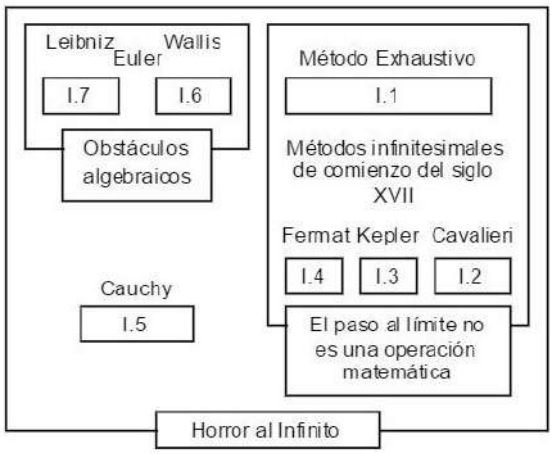


Figura 3-9.: Obstáculo espistemológico horror al infinito asociado a la noción de límite (*Ana Sierpinska*). Tomado de Guitiérrez (2005)

1. **Método exhaustivo**: Uno de los problemas clásicos de la Grecia antigua era el encargado de calcular áreas, particularmente la cuadratura del círculo (Cornu, 1983 [Gutiérrez, 2005]). Eudoxo de Cnido y Arquímedes, según afirma [Ferrante, 2009], desarrollaron éste método, el cual pretende determinar el cálculo de áreas de figuras, volúmenes y longitudes de curvas, mediante aproximaciones finitas grandes muy precisas. Por ejemplo, Arquímedes en su trabajo encontró la cuadratura de la parábola, por medio de éstas ideas. Aquí es importante evidenciar que de acuerdo a la concepción de la época, el límite no era considerado como una operación, pero sí un método rigoroso para probar ciertas relaciones entre magnitudes, o mejor aún es un método de demostración.

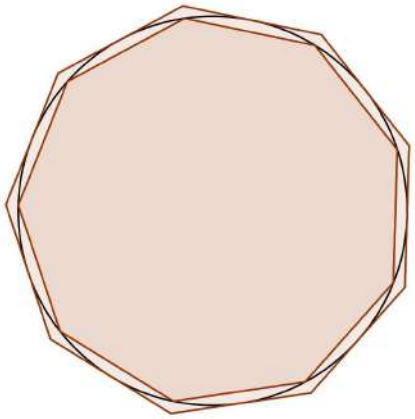


Figura 3-10.: Ejemplo método exhaustivo nonágono

2. **Cavalieri**: bajo las ideas de Kepler y Galileo en 1635, quien formuló propuestas interesantes para el cálculo de volúmenes de cuerpos, mediante planos y secciones infinitas, mejor conocido como método de los invisibles. Cavalieri fue un antecesor del cálculo integral, impregnando una idea de infinitésimo pequeño, de hecho afirmó que *"una superficie estaba conformada por líneas sin ancho y que un volumen, un montón de superficies sin espesor"* [Ferrante, 2009]. Aquí podemos apreciar un ejemplo. No obstante, cabe resaltar que de acuerdo a lo expuesto por Sierpinska citada en [Gutiérrez, 2005], se considera el pasar al límite como un razonamiento por inducción implícito dentro de un método heurístico.

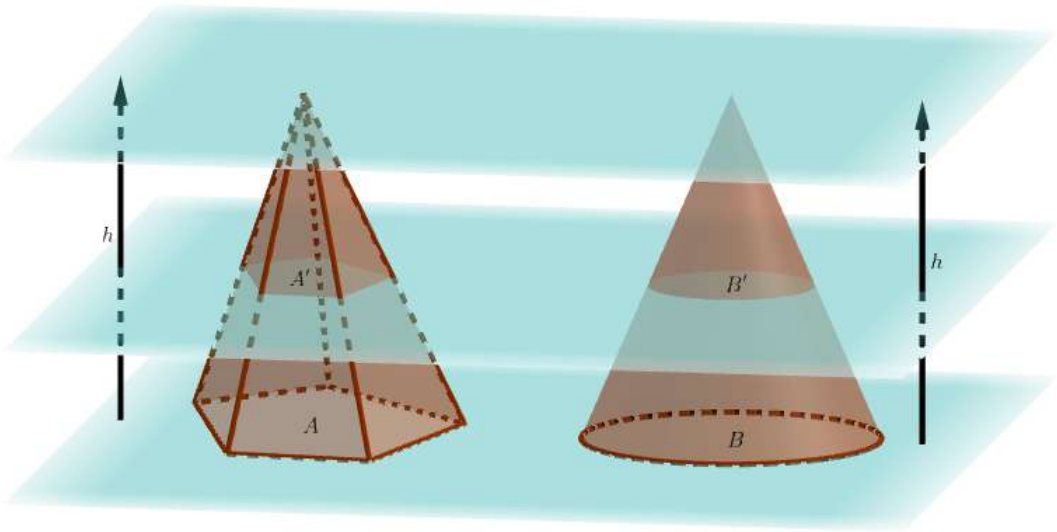
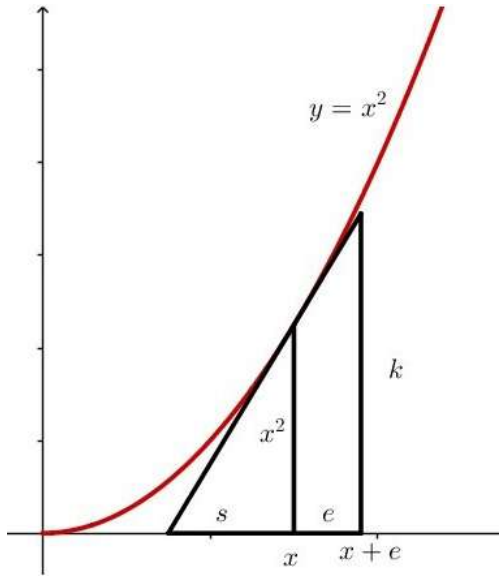


Figura 3-11.: Si área A = área B, y área A' = área B', entonces el volumen de la pirámide es igual al volumen del cono

3. **Kepler**: de acuerdo a lo expuesto por [Medina, 2001], estableció los primeros planteamientos de lo infinitamente pequeño, para encontrar áreas y superficies que se dan en el movimiento planetario, así como también volúmenes y algunas curvas que representaban la trayectoria de dichos movimientos. El concepto de límite en ésta época era visto como una *aproximación finita*, es decir, su concepción implicaba evidenciar un proceso de aproximación como una operación que tiende a un resultado, o como bien se señala "*una aproximación de un número finito de cantidades que se aproximan al límite como la mejor aproximación*". Así mismo, como lo señala Sierpinska citada en [Gutiérrez, 2005], éste obstáculo es muy típico de encontrar en el aula, y del mismo modo puede ser una explicación de por qué algunos estudiantes consideran que el límite de la sucesión $0{,}9, 0{,}99, 0{,}999, 0{,}9999, ...$ es diferente a 1.

4. **Fermat**: inició sus estudios en la geometría cartesiana y muy pronto descubrió un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica, denominada como "cantidades infinitamente próximas", claramente un gran referente del cálculo diferencial, de hecho Laplace consideraba a Fermat como el verdadero descubridor. Sierpinska, citada en [Gutiérrez, 2005], señala que el paso al límite se supone como la exploración de lo que solo conocemos, aproximaciones. Cabe resaltar, que según [Kleiner, 2001] Fermat era capaz de encontrar tangentes a una curva polinómica, revisemos a continuación el ejemplo[2] expuesto:

[2]Tomado de Kleiner (2001, p. 141)



Supongamos que queremos encontrar la tangente a la parábola $y = x^2$ *en algún punto* (x, x^2).

Dado que los triángulos son semejantes tenemos que:

$$\frac{x^2}{s} = \frac{k}{s+e}$$

En la medida que e *se hace más pequeño* $k \approx (x+e)^2$, *por tanto*:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{s} &\approx \frac{(x+e)^2}{s+e} \\
sx^2 + ex^2 &= s(x+e)^2 \\
ex^2 &= s(x+e)^2 - sx^2 \\
ex^2 &= s((x+e)^2 - x^2) \\
\frac{ex^2}{(x+e)^2 - x^2} &= s \\
\frac{ex^2}{2xe + e^2} &= s \\
\frac{x^2}{2x+e} &= s
\end{aligned}$$

Por lo cual, podemos afirmar que la recta tangente posee como pendiente

$$m = \frac{x^2}{\frac{x^2}{2x+e}} = 2x + e$$

5. **Cauchy**: para Sierpinska citada en [Medina, 2001], a él se le otorga el título de ser pionero en formalizar dicho concepto como "objeto matemático", iniciando por definir variable, límite e infinitesimal; dado que anteriormente el límite era utilizado como una "noción instrumental" inmerso en procedimientos de aproximación. De modo que, el límite es concebido como valor fijo al cual se aproximan indefinidamente valores numéricos de una variable en tanto como se desee. La definición de Cauchy del concepto de límite fue la siguiente: *"Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproxima indefinidamente a un valor fijo, de manera que termina por diferir de él en tanto como queramos, este último valor se llama límite de todos los demas"* Kitcher, citado en [Kleiner, 2001]. Sierpinska plantea una pregunta que perduró a través de la historia en éste obstáculo, y es ¿El límite se alcanza?, ¿o no?

6. **Wallis**: Según los planteamientos de Siepinska en [Gutiérrez, 2005], establece una preocupación por analizar los métodos algebraicos al manipular lo finito en lo infinito, conservando dichas propiedades. De hecho Wallis introdujo el símbolo que conocemos hoy por hoy (∞). Del mismo modo, Euler operaciones y cálculos con ésta insignia considerándolo como cualquier otro número; aquí es importante resaltar la importancia de la aparición de las primeras aritmetizaciones con el infinito.

7. **Leibniz**: de acuerdo a los planteamientos de Knobloch citado en [Filloy et al., 2003]. Leibnitz estableció la acreditada "ley de continuidad", donde intentó extrapolar las propiedades y reglas que se cumplen en el finito al infinito. Encontrando procesos infinitos por ejemplo en el cálculo de $\frac{\pi}{4}$. Las ideas de Leibnitz motivaron a Fourier para considerar un gran trabajo de funciones continuas y sucesiones convergentes y la construcción de series trigonométricas. Lo interesante, según Sierpinska es notar la transferencia de las propiedades de los términos de una sucesión convergente a su límite.

3.3.2. Dificultades en el proceso de aprendizaje del concepto de límite

A continuación se mencionan las dificultades presentes en el proceso de aprendizaje del concepto de límite, teniendo en cuenta los estudios realizados por [Blázquez and Ortega, 2000]:

1. Relacionan mal los distintos sistemas de representación funcional.

2. Les cuesta interpretar las desigualdades.

3. Asocian "todas"las gráficas con funciones conocidas.

4. No entienden la idea gráfica de límite.

5. Errores de cálculo algebraico sencillo.

6. Consideran que son puntos p^+ y p^-.
7. Definen mal las funciones.
8. La idea de que una función no tenga límite es más difícil de entender que el propio concepto.
9. Confunden límites finitos e infinitos.
10. Interpretan indeterminaciones como no existencia de límite.
11. Confunden límite con límite lateral.
12. No identifican el signo de la función en un entorno con el del límite y recíprocamente.
13. Creen que si el límite es cero, la función toma distintos signos en un entorno.
14. Interpretación errónea de tablas numéricas.
15. Proponen como límite el valor de la función en un punto cercano.
16. Asocian límite con frontera y lo relacionan con los extremos de la función.
17. Identifican tender en una dirección con moverse en el eje x en esa dirección.
18. Les cuesta trabajar con entornos y con aproximaciones.
19. No entienden la dependencia funcional entre las variables.
20. No encuentran situaciones relacionadas con el concepto.

4. Marco metodológico

En aras de verificar el desarrollo y cumplimientos de los objetivos planteados en la investigación, la presente propuesta se guiará a partir de la ingeniería didáctica; la cual permitirá orientar los aspectos esenciales en cuatro etapas específicas a saber: diseño, planeación, experimentación y validación, teniendo en cuenta los planteamientos de [Lezama and Farfán, 2001] y [Artigue, 1995].

FASE	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ESTRATEGIA
Diseño	Identificar los conocimientos previos de los estudiantes respecto al concepto de límite.	Obstáculo epistemológico "horror al infinito" Sierpinska citado en [Medina, 2001].
	Determinar y delimitar los aspectos conceptuales, epistemológicos y didácticos que fundamentan el concepto de límite.	Dificultades en la comprensión del concepto de límite en el ámbito escolar, [Blázquez and Ortega, 2000].
Planeación	Construir el conjunto de actividades que conforman la secuencia didáctica.	Fractales lineales como copo de nieve, triángulo de Sierpinski, esponja de Menger, etc.
Experimentación	Implementar y evaluar con los estudiantes de grado undécimo las actividades propuestas en la propuesta didáctica.	La secuencia de actividades se desarrolla a partir del modelo pedagógico, enseñanza para la comprensión EpC.
Validación	Implementar y evaluar con los estudiantes de grado undécimo las actividades propuestas en la propuesta didáctica.	Confrontación entre el análisis a priori y a posteriori, [Artigue, 1995].

Por otra parte, cabe resaltar algunos aspectos teóricos asociados a la enseñanza para la comprensión como metodología, ya que como lo menciona [Stone, 1999] se pueden dar 3 categorías progresivas: 1) etapa exploratoria, 2) etapa de investigación guiada y 3) proyecto de síntesis, las cuales se pueden caracterizar de la siguiente manera:

- **Etapa exploratoria:** se evidencian los desempeños preliminares, ejercen el poder de la provocación, exploran el Tópico Generativo (TG), retoman visiones informales de los estudiantes, pueden no retomar conceptos basados en la disciplina, sirven para traer y atraer a los estudiantes al dominio del Tópico Generativo, son generalmente de final abierto, se pueden abordar en múltiples niveles de dificultad, permiten a los estudiantes visualizar conexiones entre el TG y sus propios intereses y experiencias previas, permiten al maestro detectar lo que ya saben y lo que quieren aprender, pueden confrontar comprensiones previas y los enigmas del TG, no son indagación estructurada.

- **Etapa de investigación guiada:** generalmente se constituye como el centro de la unidad, recurren a la indagación estructurada según las consideraciones del docente, se centran en problemas o aspectos propios del TG, son altamente diversas, responden a las Metas de Comprensión (MC) definidas para la unidad de indagación, requieren el uso del lenguaje disciplinar, se centran en habilidades básicas como la indagación rigurosa, registro de datos, síntesis de diferentes fuentes, a través de preguntas específicas, exigen la reflexión permanente en pequeños grupos y puestas en común, ayudan a los estudiantes a aplicar conceptos y métodos disciplinares, promueven la integración de conocimientos y comprensiones más complejas y específicas (sofisticadas).

- **Proyecto de síntesis:** son las evidencias de la comprensión, tareas finales, de cierre de unidad, completan la unidad curricular, ponen en práctica las comprensiones, aunque son más complejas que las anteriores, no son proyectos complejos, demuestran con claridad el dominio que tienen los estudiantes de las metas de comprensión establecidas, invitan a los estudiantes a trabajar de manera más independiente y a sintetizar sus comprensiones desarrolladas a través de una o varias unidades, dan la opción de demostrar la comprensión de maneras distintas y novedosas, son legítimas evidencias de comprensión.

4.1. Descripción de las actividades

En coherencia con lo anteriormente expuesto y haciendo uso de la historia como recurso didáctico, las actividades se diseñaron con la intención de ambientar en el aula las diversas concepciones asociadas al concepto del límite, que tienen que ver con el obstáculo epistemológico “horror al infinito”, tal y como se evidenció en la **figura 3-10**.

Tabla 4-1.: Secuencia de actividades

ETAPA	OBSTÁCULO	CONCEPCIÓN	ACTIVIDAD	FRACTAL
Exploratoria	El paso al límite no es una operación matemática	Geométrica. Heurística-Rigurosa. Método Exhaustivo	Desarrollar una idea intuitiva de infinito potencial. Método de exhaución, área.	Triángulo de Sierpinski.
Investigación guiada		Geométrica y algebraica. Heurística de aproximación finita. Cavalieri-Kepler-Fermat.	Comparar áreas y volúmenes, nuevas ideas de infinitésimos.	Esponja de Menger.
	Algebraico	Numérica dinámica infinitésima. Cauchy	"Estar cada vez más cerca de " Perímetro	Curva de Koch
		Aritmética heurística. Wallis Algorítmica algebraica. Euler.	Representación gráfica, reflexión infinito potencial. Privilegiar las fórmulas y los algoritmos. Reflexión intuición infinito potencial.	Copo de nieve
Proyecto de síntesis		Metafísica algebraica infinitesimal. Leibniz	Hacia el principio de continuidad, ideas primarias de infinito actual. Comprobaciones y algoritmos generales.	Rectificación de curvas

4.1.1. Pre-test

El objetivo principal de la prueba de entrada (ver **Anexo: Pre-test**), es lograr identificar los conocimientos previos de los estudiantes respecto al concepto de límite, y de ésta manera caracterizar la concepción histórica presente, así como también su obstáculo epistemológico asociado.

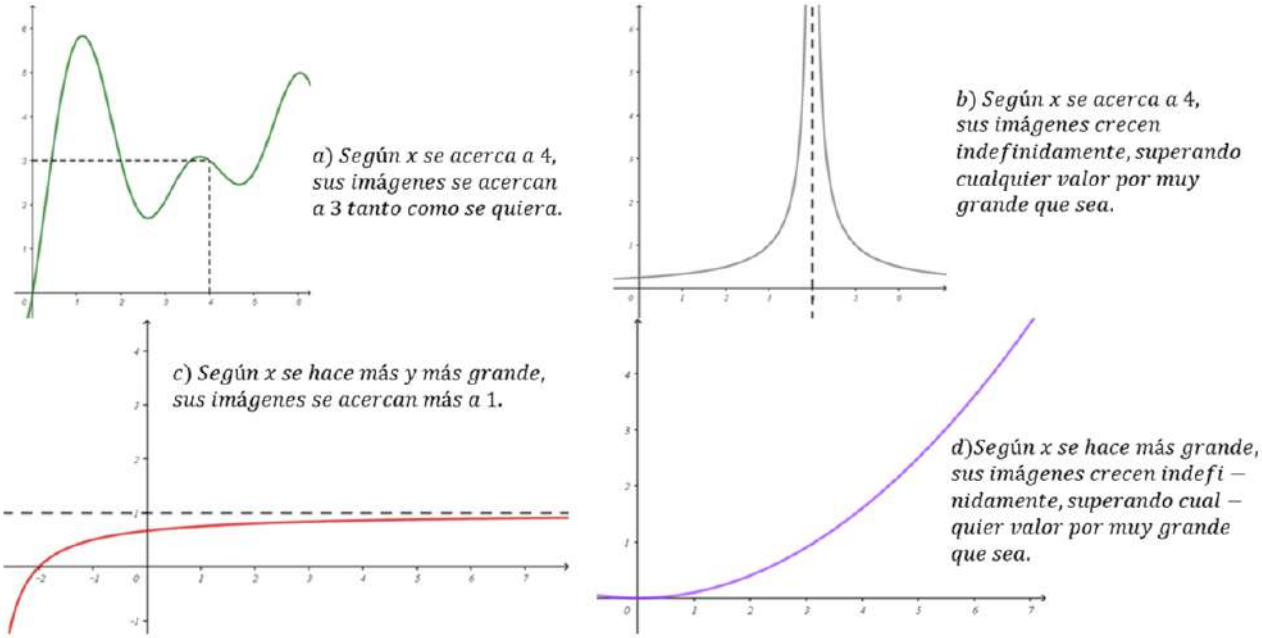
1. **La dicotomía (o la carrera):** describe una de las famosas paradojas de Zenón de Elea y se plantea uno de los cuestionamientos que perdudaron por siglos abierto, ¿el límite se alcanza?. Éste ítem procura que los estudiantes realicen una representación similar a la presentanda y confronten las nociones de infinito potencial, teniendo en cuenta la premisa propuesta por Zenón.

2. **Sumas de secuencias:** aquí se pone en manifiesto otra de las grandes dificultades, y es el lograr imaginar que una suma infinita puede ser finita. Del mismo modo en que se evidencia con constancia en el aula que los estudiantes consideren que la secuencia, $0{,}9, 0{,}99, 0{,}999, 0{,}9999, ...$ es diferente de 1. Aquí se requiere constatar especificamente

la concepción numérica dinámica infinitesimal del límite, poniendo en entre dicho el cuestionamiento de lo que sucedera al realizar la suma de forma indefinida.

Suma	**Resultado**	**Representación**
$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	
$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}$	$\frac{99}{100}$	
$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}$	$\frac{999}{1000}$	

3. **Gráficos:** la situación presentada es una adaptación de uno de los ítems que expone [Ortega, 2016], en donde se pretende la elaboración por parte del estudiante de puntos en el plano de tendencia hacia valores específicos. Para éstas cuestiones presentadas es indispensable el concepto de función.



4. **Recubrimientos:** los planteamientos expuestos, también hacen parte de lo propuesto por [Ortega, 2016]. La pregunta sugiere recubrir el área de un cuadrado por medio de una secuencia de mitades sobrantes, de manera similar a la dicotomía de Zenón, ésta vez desde el punto de vista de una serie.

Figura	**Fracción de Área**
1	$\frac{1}{2}l$
2	$\frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l = \frac{3}{4}l$
3	$\frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{8}l = \frac{7}{8}l$
4	$\frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{8}l + \frac{1}{16}l = \frac{15}{16}l$
5	$\frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{8}l + \frac{1}{16}l + \frac{1}{32}l = \frac{31}{32}l$
6	$\frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{8}l + \frac{1}{16}l + \frac{1}{32}l + \frac{1}{64}l = \frac{63}{64}l$
n	$l(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...) = l$

4.1.2. Actividad 1

El triángulo de Sierpinski: (ver **Anexo: Actividad 1**) el propósito principal de la primera actividad es activar las nociones de los estudiantes en relación al infinito potencial (aquel que crece indefinidamente). De otro modo, se persigue ahondar en las dificultades 18 y 19 (ver **contenido 3.3.2.**).

1. Iniclamente se plantea que el estudiante por medio del recurso Geogebra, identifique las principales características que intervienen en la construcción geométrica del fractal y describa el proceso reiterativo inmerso. De manera recursiva se espera que el estudiante logre reconocer que la construcción se realiza a partir de la unión de los puntos medios de los lados de la figura inicial.

2. En relación a la indagación del área del fractal, se propone por practicidad que se exprese como fracción, en la medida que el modelo algebraico requiere de valores irracionales y sus cálculos son más extensos. Así mismo, la reguridad es más evidente a la hora de generalizar el proceso.

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Fracción de área	A	$\frac{3}{4}A$	$\frac{9}{16}A$	$\frac{27}{64}A$	$\frac{81}{256}A$

3. Por otra parte, en cuanto al perímetro del fractal, se consideran algunas reflexiones asociadas a lo infinitamente pequeño, involucrando algunos aspectos algebraicos.

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Perímetro figura sombreada	$3l$	$\frac{9}{2}l$	$\frac{27}{4}l$	$\frac{81}{8}l$	$\frac{243}{16}l$

4. Por otra parte, la necesidad de encontrar el área y perímetro respectivo para las iteraciones 10 y 100 propicia la obtención de un modelo general para cada caso, generando así, las primeras expresiones y planteamientos funcionales.

$$A(10) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} A \qquad A(100) = \left(\frac{3}{4}\right)^{100} A$$

$$P(10) = \left(\frac{3}{2}\right)^{10} 3l \qquad P(100) = \left(\frac{3}{2}\right)^{100} 3l$$

5. Finalmente, las preguntas sugeridas buscan indagar en los planteamientos de los estudiantes, acerca de la tendencia que se da en el fractal, específicamente para el área y perímetro asociado. Se espera que los estudiantes planteen la hipótesis de que el perímetro crece indefinidamente y el área cada vez más se aproxima a 0.

4.1.3. Actividad 2

La esponja de Menger: (ver **Anexo: Actividad 2**) la intención fundamental de los planteamientos presentados es abarcar las dificultades 4, 17 y 20 (ver **contenido 3.3.2.**), teniendo en cuenta el obstáculo *el paso al límite no es una operación matemática*.

1. Tras un análisis geométrico del fractal presentado, se espera que el estudiante logre establecer una relación de dependencia entre el volumen y la iteración respectiva.

Iteración	**Cantidad de cubos**	**Volumen que queda**
Inicial	1	l^3
1	20	$20 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^3 = \frac{20}{27} l^3$
2	400	$400 \cdot \left(\frac{l}{9}\right)^3 = \frac{400}{729} l^3$
3	8000	$8000 \cdot \left(\frac{l}{27}\right)^3 = \frac{8000}{19683} l^3$
n	20^n	$\left(\frac{20}{27}\right)^n l^3$

2. En cuanto a la gráfica de la función Volumen, se espera que el estudiante ubique en el plano cartesiano la relación encontrada con anterioridad, tal y como se puede apreciar en la **Figura 4-1**.

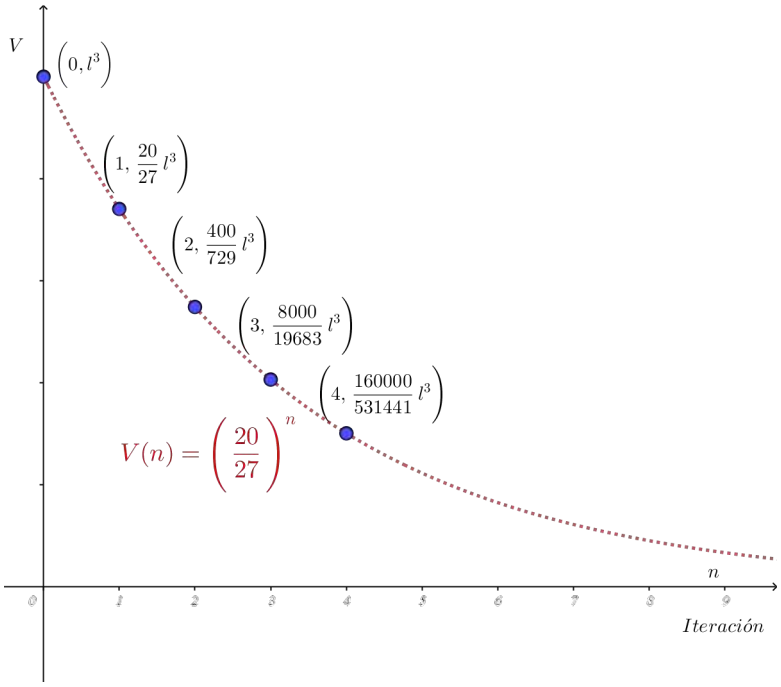


Figura 4-1.: Función volumen de la esponja de Menger

- Por otra parte, en cuanto a la pregunta formulada, se espera que el estudiante logre establecer la relación de tendencia hacia 0, en la medida que crece la iteración, el volúmen se hace más y más pequeño.
- No obstante, en cuanto al cuestionamiento de la longitud total de las aristas, se supone la conjeturación de, que a pesar que las aristas se hacen cada vez más pequeñas, la longitud total crece indefinidamente.

4.1.4. Actividad 3

La curva de Koch: (ver **Anexo: Actividad 3**) el objetivo primordial de los cuestionamientos expuesto es examinar en las dificultades 5, 7 y 9 (ver **contenido 3.3.2.**), teniendo en cuenta la idea de lo infinitamente pequeño y los primeros pasos en el obstáculo *algebraico*.

1. Inicialmente, los estudiantes deberían describir la construcción geométrica del fractal, reconociendo la división de los segmentos en 3 partes iguales, así como la unificación de un segmento nuevo del mismo tamaño formando una especie de triángulo equilátero.

2. Del mismo modo, la tabla expuesta, la cuál se encuentra organizada de manera sistémica, relaciona los elementos necesarios para construir una generalización en la longitud total de la curva de Koch.

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Cantidad de segmentos	1	4	16	64	256
Longitud del segmento	l	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$	$\frac{l}{81}$
Longitud total	l	$\frac{4}{3}l$	$\frac{16}{9}l$	$\frac{64}{27}l$	$\frac{256}{81}l$

3. Finalmente, con respecto a la cantidad de lados, lo realizado permite establecer que aumenta indefinidamente cada vez, a una razón proporcional de 4. Así mismo, su longitud se reduce a una tercera parte del segmento anterior. Mientras que, la longitud total de la curva de Koch, se puede encontrar por el producto entre la cantidad de segmentos y la longitud de cada uno, del siguiente modo.
   - Cantidad de lados: 4^n, donde n es la iteración.
   - Longitud de un lado: $\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot l$, donde n es la iteración.
   - Longitud total: $\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$, donde n es la iteración.

4.1.5. Actividad 4

El copo de nieve: (ver **Anexo: Actividad 4**) el motivo esencial de las problemáticas expresadas es aportar a las dificultades 4, 9, 18 y 19 (ver **contenido 3.3.2.**), teniendo en cuenta la relación entre los modelos matemáticos planteados y el obstáculo *algebraico*.

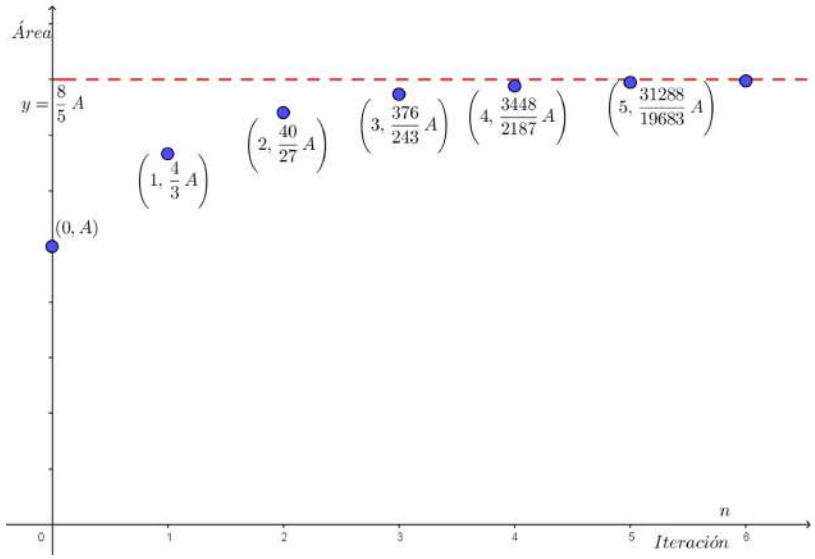
1. Los elementos necesarios para encontrar el área del copo de nieve son la altura y la base del triángulo equilátero nuevo, así como también, la fracción de área de cada uno, con respecto al triángulo inicial.

2. Sin embargo, se sugiere trabajar por fracciones de área para cada iteración por el hecho de que la altura requiere de números irracionales. Esto facilitará los cálculos, tal y como se puede apreciar a continuación.

   Supongamos que la longitud del triángulo inicial es l, entonces podemos afirmar que:

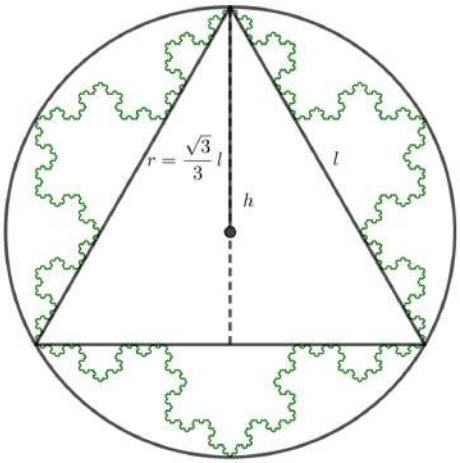
   Tal y como lo pudimos apreciar con anterioridad, la función para el área del copo de nieve está determinado por una serie geométrica, en donde su obtención demanda de un mayor dominio de conceptos matemáticos. No obstante, la intención, es que el estudiante logre evidenciar que es una función de otra índole, a la cual, se le añade un nuevo elemento que se puede encontrar de manera recursiva. Y el resultado de cada suma se puede representar de igual modo en el plano cartesiano, encontrando así la tendencia hacia $\frac{8}{5}A$.

Iteración	**Área**
Inicial	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$
1	$A + \frac{1}{3}A$
2	$A + \frac{1}{3}A + \frac{4}{27}A$
3	$A + \frac{1}{3}A + \frac{4}{27}A + \frac{16}{243}A$
4	$A + \frac{1}{3}A + \frac{4}{27}A + \frac{16}{243}A + \frac{64}{2187}A$
n	$A\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \frac{64}{729} + ... + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right)\right)$
...	$A\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{9^n}\right) = \frac{8}{5}A$



3. Ahora bien, en cuanto al ítem exhibido. Se formula el cuestionamiento del radio de la circunferencia que inscribe al fractal. Los estudiantes deberían reconocer que a pesar de que las iteraciones transcurran, el radio se mantiene constante, es decir que el fractal siempre está acotado por una región circular cuyo radio equivale a $r = \frac{2}{3}h$, donde h es la altura del triángulo equilátero inicial.

4. Por último, se suscita la premisa que el área del círculo es mayor al área del fractal. Éste planteamiento, sugiere también la confrontación entre un perímetro finito y otro infinito, los cuales se encuentran en una región perceptible.



4.1.6. Actividad 5, proyecto de síntesis

Competencia robótica: (ver **Anexo: Actividad 5**) la finalidad principal de la situación problema planteada es lograr aplicar las ideas abordadas en cuanto al concepto de límite, básicamente desarrollando uno de los grandes problemas que dieron origen al cálculo, desde la época de la Grecia Antigua. Éste es el problema clásico de rectificación de curvas, es decir, el poder medir con exactitud la longitud de una línea curva. Aquí también se ahonda en la concepción de curva y continuidad que presentaba Leibniz desde los infinitesimales. Finalmente los interrogantes formulados desean aportar a las dificultades 18, 19 y 20 (ver **contenido 3.3.2.**), teniendo en cuenta la articulación de los obstáculos *algebraico y el paso al límite no es una operación matemática.*

1. La primera parte del proyecto de síntesis, consiste en realizar la medición del contorno del parque infantil de manera experimental. De modo que, por grupos de trabajo (máximo 3 estudiantes) propondrán las respectivas estrategias a implementar en la medición.

   En las **figuras 4-2 y 4-3** se ilustran 2 ejemplos donde la unidad de medida son $5m$ y $2m$ respectivamente.

   Por otra parte, se espera que los estudiantes hagan uso de una unidad de medida cada vez menor, en aras de obtener una medición más aproximada. De tal manera que en el límite cuando la unidad de medida tiende a 0, la longitud del contorno del parque infantil es la medida real de curva que lo describe.

2. Finalmente, los estudiantes realizarán la medición en un mapa impreso del parque infantil, tal y como se mostró con anterioridad. La diferencia radica en hacer evidente la ventaja de los mapas y el uso de las escalas.

Figura 4-2.: Procedimiento de medición para $5m$

4.1.7. Post-test

La intención primordial de la prueba de salida (ver **Anexo: Post-test**), es evidenciar el progreso en torno a los aprendizajes y concepciones de los estudiantes con respecto al concepto de límite; haciendo el contraste entre los grupos experimental y de control, evaluando así la pertinencia de la secuencia de actividades.

1. Para el ítem establecido, se quiere evidenciar si los estudiantes logran formular las expresiones algebraicas adecuadas para la longitud de cada cuadrado, teniendo en cuenta la relación pitagórica y proporcial que emerge. Del mismo modo, se pretende dar cuenta de la habilidad de identificar la tendencia y reducción del segmento hacia 0, tal y como lo podemos apreciar a continuación.

Lado	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
Medida	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{4}$

En ese orden de ideas, se plantea encontrar la longitud del segmento del cuadrado 10000. Con el fin de generar la necesidad de encontrar regularidades y patrones generales, de la siguiente manera:

$$L(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \quad \textit{Para n impar}; \qquad L(n) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \textit{Para n par}$$

Figura 4-3.: Procedimiento de medición para $2m$

2. Los planteamientos que se proponen hacen parte de una de las preguntas que expone [Ortega, 2016], en donde se procura evidenciar las ideas que presentan los estudiantes en relación a la pregunta ¿el límite se alcanza?, y cómo ésta concepción sufrió alguna modificación posterior a la aplicación de la estrategia didáctica presentada.

3. El ítem implementado, también hace parte de las ideas sugeridas por [Ortega, 2016]. En él se esbozan una serie de preguntas que solicitan el análisis recursivo de cambio y tendencia, poniendo de manifiesto el concepto y confrontación de infinito potencial y actual, del siguiente modo:

   - ¿Qué relación hay entre la base y la altura?, aquí, se espera que el estudiante logre identificar en la secuencia presentada que en la medida que la altura del rectángulo se reduce a la mitad, la base del mismo se duplica con el fin de preservar la condición de poseer la misma superficie.
   - ¿Qué ocurre con la altura y la base si continuamos el proceso indefinidamente?, los estudiantes establecerán conjeturas que tienen que ver con la reducción de la altura, y cómo ésta se hace cada vez más cercana a cero, así como la duplicación de la base del rectángulo de manera indefinida.
   - ¿Qué figura se obtiene?, probablemente en los desarrollos más típicos para ésta pregunta, se encuentra la posibilidad de formular como figura resultante una semirecta o rayo; o de otro modo, un rectángulo con una altura muy pequeña.

4. Finalmente, se propone el conjunto de Cantor, de tal manera que se presenta la inquietud de lo que sucede al sumar los segmentos que se suprimen dentro de la construcción geométrica del mismo.

Iteración	**Longitud total que se suprime**
Inicial	$l_T = 0$
1	$l_T = \frac{1}{3}$
2	$l_T = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$
3	$l_T = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}$
4	$l_T = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81}$
n	$l_T = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$
$\ldots$	$l_T = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n} = 1$

Según y como lo menciona [Rubiano, 2009], el conjunto de Cantor C está conformado por infinitos puntos y su longitud es cero, lo que bien se conoce como una polvareada. Éste hecho de controversia conceptual generaría en los estudiantes cierto tipo de análisis y reflexión sobre la concepción propia de infinito.

5. Análisis

En este capítulo se expone el contraste entre los resultados recolectados de los grupos experimental y de control, tanto en la prueba de entrada como de salida, con el fin de evaluar la pertinencia e impacto de la secuencia didáctica propuesta. Por otra parte, se presenta de manera descriptiva y categórica el abordaje realizado por los estudiantes del grupo experimental en relación a las actividades planteadas como estrategia didáctica.

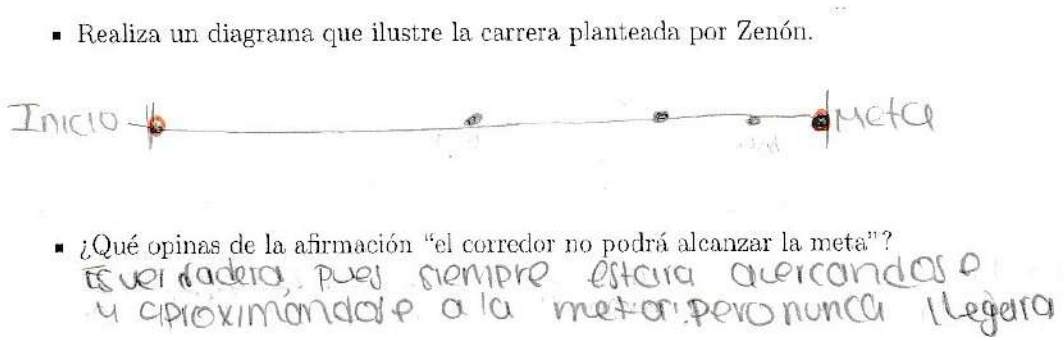
5.1. Pre-test

1. **La dicotomía (o la carrera):** a continuación se sistematizan los resultados realizados por los estudiantes, agrupados por 3 procesos evidenciados, teniendo en cuenta lo desarrollado por los grupos experimental y de control. Del mismo modo, estos procesos se caracterizaron teniendo en cuenta la *concepción geométrica* de límite que se presentaba en la antigua Grecia y la época clásica.

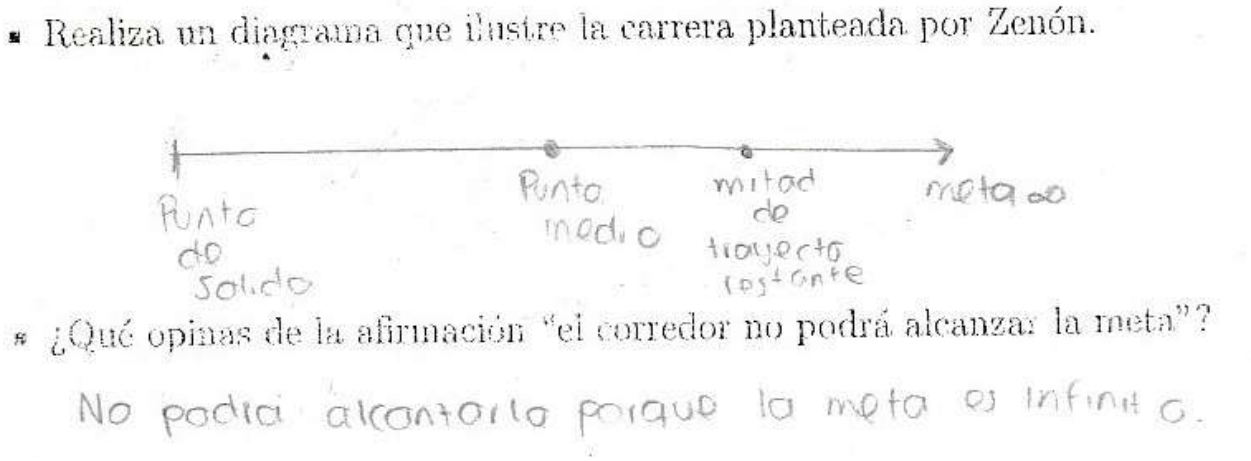
Tabla 5-1.: Resultados ítem la dicotomía, pretest

Categoría	**Descripción**	**Grupo Experimental**	**Grupo de Control**
		Número de estudiantes	**Número de estudiantes**
Concepción Geométrica 1 CG1.	Representa en la recta numérica la situación propuesta, del mismo modo, considera que la afirmación es correcta, pues es posible encontrar la mitad del trayecto restante de manera indefinida.	14	12
Concepción Geométrica 2 CG2.	Representa en la recta numérica la situación propuesta, no obstante, establece que para que la afirmación de Zenón se cumpla el recorrido es sobre una semi-recta.	9	10
Concepción Geométrica 3 CG3.	Representa en la recta numérica la situación propuesta, sin embargo, contempla que la premisa expuesta es incorrecta, pues en algún momento las mitades restantes no delimitarán un espacio considerable por recorrer.	6	5

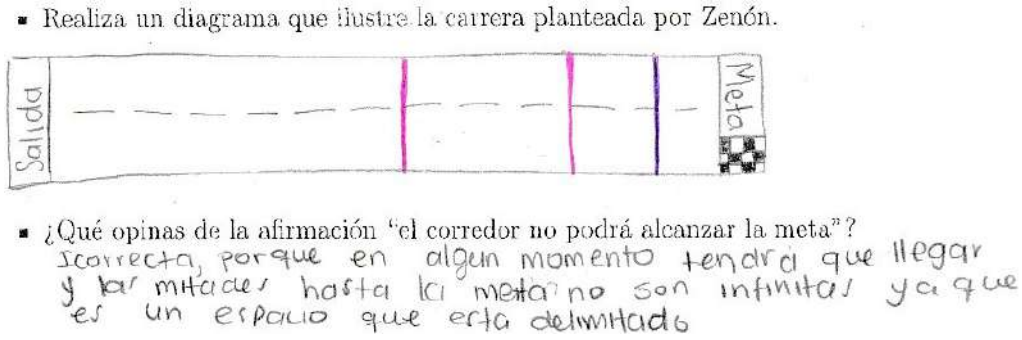
- **Concepción geométrica 1:** aquí podemos evidenciar un ejemplo que hace parte de ésta clasificación. De tal modo, que el grupo de estudiantes que se agruparon en ésta categoría presentaron procedimientos similares.



- **Concepción geométrica 2:** para dicha asociación, los estudiantes consideraron la modificación de la situación para se satisfagan las condiciones de la carrera planteada, de la siguiente manera.



- **Concepción geométrica 3:** finalmente, el último grupo de estudiantes consideró que la carrera planteada por Zenón, sí se podía completar.



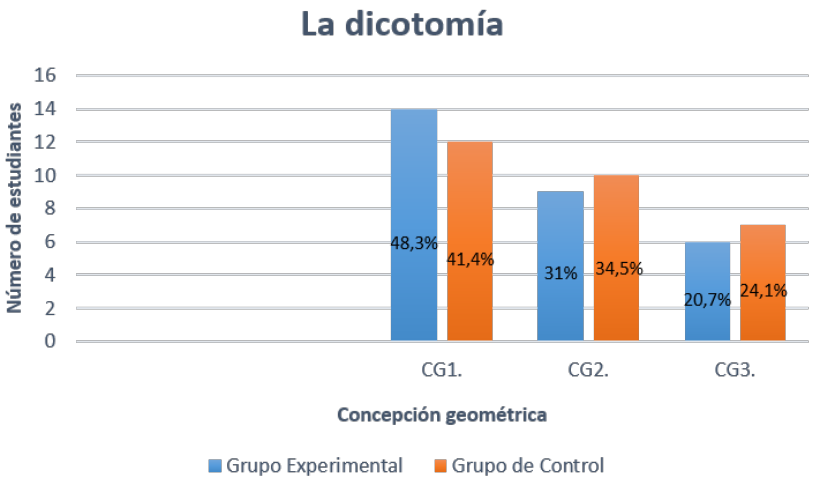


Figura 5-1.: Contraste ítem dicotomía, grupo experimental y de control

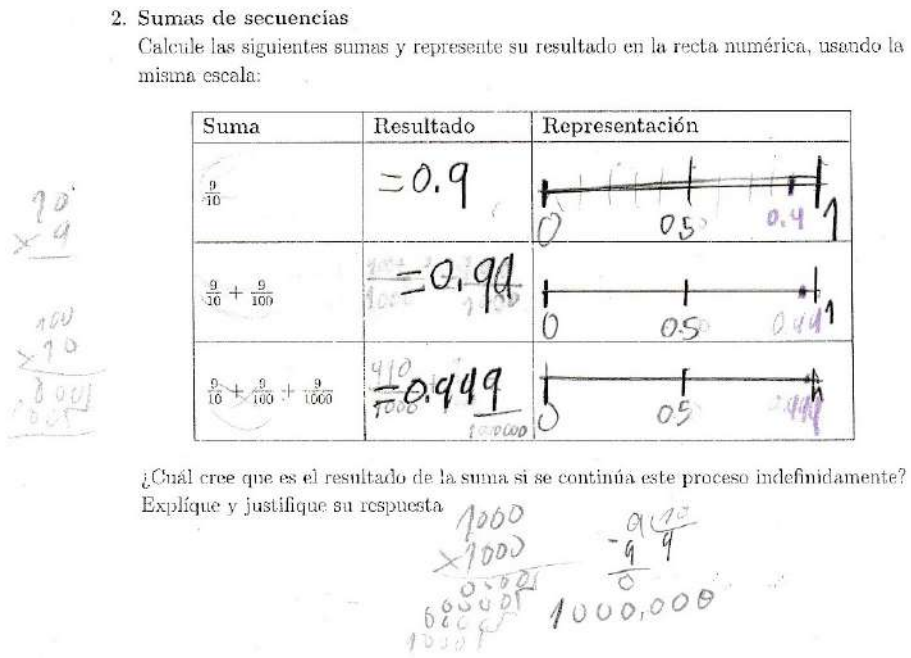
De acuerdo a lo encontrado podemos evidenciar claramente que los resultados son de cierto modo similares, en la medida que para cada categoría la diferencia entre grupos fue de 1 o 2 estudiantes, es decir, que inicialmente tenemos que los grupos tanto experimental y de control son relativamente homogéneos.

2. **Sumas de secuencias:** para el ítem formulado se encontraron 4 grupos de respuestas, en los cuales se refleja la *concepción aritmética* de límite, del siguiente modo.

Tabla 5-2.: Resultados ítem sumas de secuencias Pretest

Categoría	Descripción	Grupo Experimental Número de estudiantes	Grupo de Control Número de estudiantes
Concepción aritmética 1 Ca1.	Realiza sumas entre fracciones y ubica su resultado en la recta numérica, no obstante, le cuesta realizar inferencias y plantear hipótesis a partir de lo desarrollado.	5	12
Concepción aritmética 2 Ca2.	Desarrolla sumas entre fracciones y realiza su representación respectiva en la recta numérica. Sin embargo, considera que el resultado de realizar el proceso de manera indefinida es infinito pues de manera secuencial en la fracción aparece un nuevo 9 en el numerador, y un nuevo 0 en el denominador.	16	13
Concepción aritmética 3 Ca3.	Resuelve sumas entre fracciones plasmando su resultado en la recta numérica con una escala apropiada, del mismo modo, conjetura que al realizar dicha suma de forma indefinida su resultado se acercará a 1, más no lo alcanzará.	4	4
Concepción aritmética 4 Ca4.	Realiza sumas entre fracciones y representa su resultado en la recta numérica, haciendo uso de una métrica pertinente. Asimismo, afirma que el resultado será en algún momento 1, pues cada vez se acerca más a él.	4	0

- **Concepción aritmética 1:** el presente ejemplo, muestra la similitud de lo desarrollado por lo estudiantes que hacen parte de ésta categoría, en la cual prevalece la falta de proponer conclusiones de acuerdo a lo realizado.

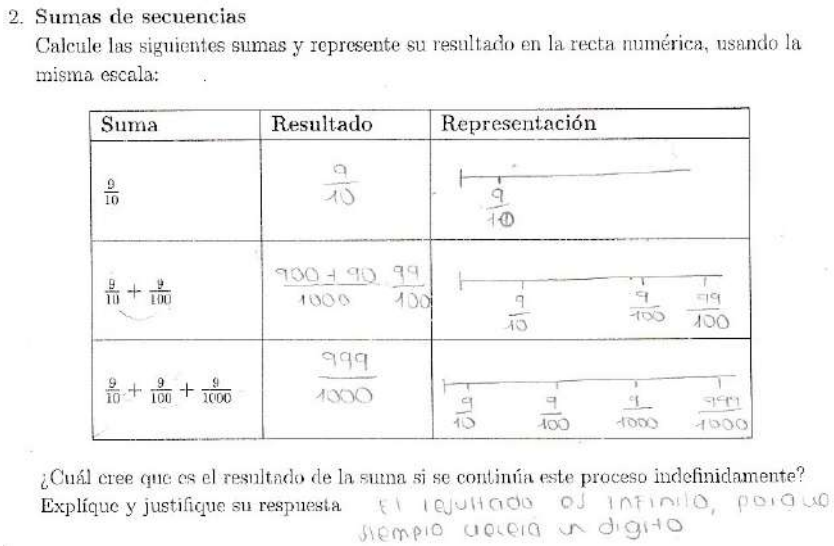


2. **Sumas de secuencias**
Calcule las siguientes sumas y represente su resultado en la recta numérica, usando la misma escala:

Suma	Resultado	Representación
$\frac{9}{10}$	$=0.9$	0 0.5 0.9 1
$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}$	$=0.99$	0 0.5 0.99 1
$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}$	$=0.999$	0 0.5 0.999 1

¿Cuál cree que es el resultado de la suma si se continúa este proceso indefinidamente? Explíque y justifique su respuesta 1000,000

- **Concepción aritmética 2:** la siguiente ilustración representa la producción de los estudiantes que hacen parte de dicha categoría, en donde se hace evidente el poco razonamiento y concepto de fracción como unidad.

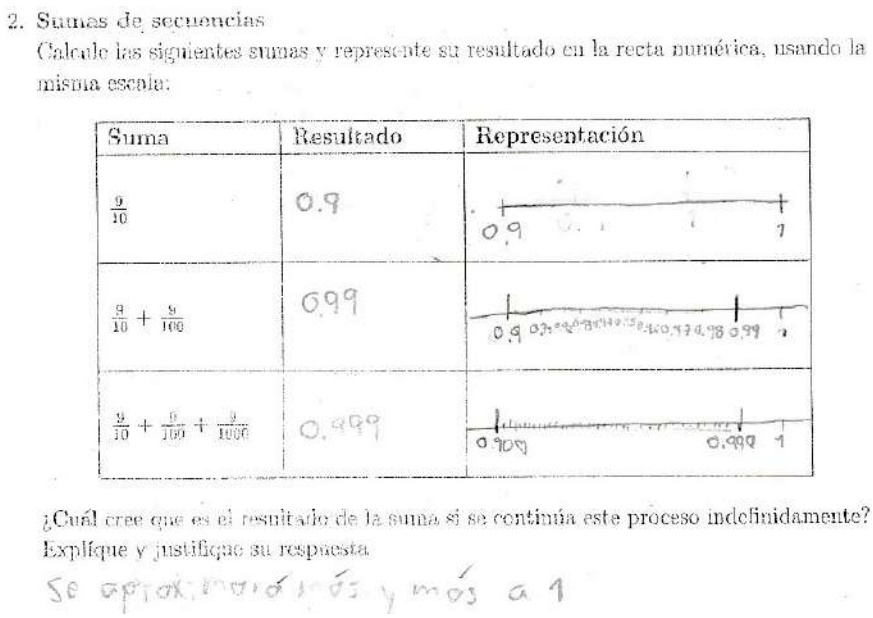


2. **Sumas de secuencias**
Calcule las siguientes sumas y represente su resultado en la recta numérica, usando la misma escala:

Suma	Resultado	Representación
$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$
$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}$	$\frac{900+90}{1000}$ $\frac{99}{100}$	$\frac{9}{10}$ $\frac{9}{100}$ $\frac{99}{100}$
$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}$	$\frac{999}{1000}$	$\frac{9}{10}$ $\frac{9}{100}$ $\frac{9}{1000}$ $\frac{999}{1000}$

¿Cuál cree que es el resultado de la suma si se continúa este proceso indefinidamente? Explíque y justifique su respuesta El resultado es infinito, porque siempre aparecerá un digito

- **Concepción aritmética 3:** el posterior caso relaciona lo realizado por los estudiantes en cuanto a los cuestionamientos propuestos, se puede apreciar la capacidad de plantear hipótesis e inferencias que se asocian a tendencias específicas.



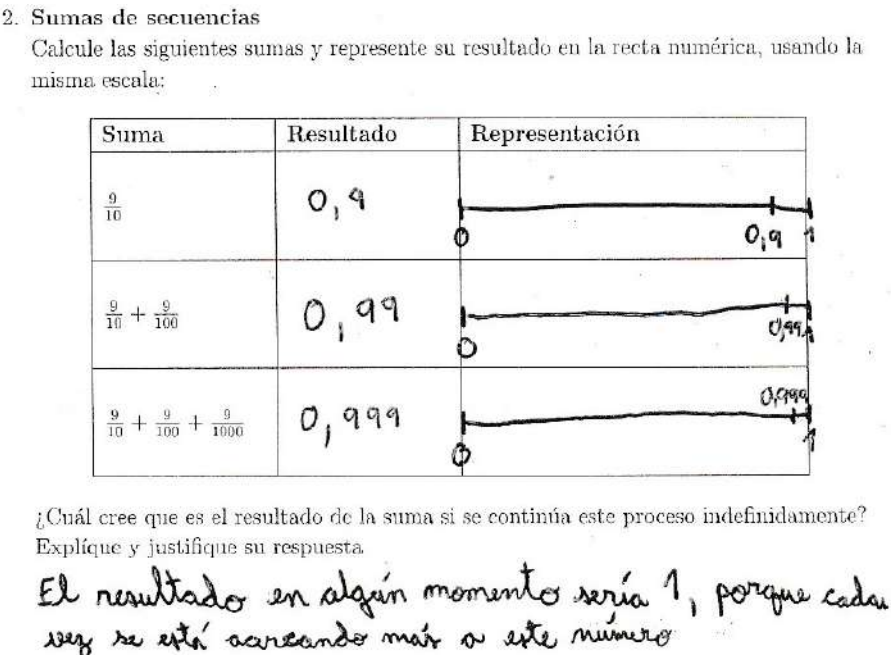
2. Sumas de secuencias
Calcule las siguientes sumas y represente su resultado en la recta numérica, usando la misma escala:

Suma	Resultado	Representación
$\frac{9}{10}$	0.9	0.9 1
$\frac{9}{10} + \frac{9}{100}$	0.99	0.9 0.99 1
$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$	0.999	0.909 0.999 1

¿Cuál cree que es el resultado de la suma si se continúa este proceso indefinidamente? Explíque y justifique su respuesta

Se aproximará más y más a 1

- **Concepción aritmética 4:** finalmente, podemos encontrar la última categorización que hace referencia a la posibilidad de identificar que la suma expuesta presenta un valor de tendencia y al realizarse de manera infinita será 1.



2. Sumas de secuencias
Calcule las siguientes sumas y represente su resultado en la recta numérica, usando la misma escala:

Suma	Resultado	Representación
$\frac{9}{10}$	0,9	0 0,9 1
$\frac{9}{10} + \frac{9}{100}$	0,99	0 0,99
$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$	0,999	0 0,999 1

¿Cuál cree que es el resultado de la suma si se continúa este proceso indefinidamente? Explíque y justifique su respuesta

El resultado en algún momento sería 1, porque cada vez se está acercando más a este número

El gráfico presentado en la **Figura 5-2.** muestra distinción entre las concepciones geométricas 1 y 4, de los grupos experimental y de control; así como similitud en las concepciones geométricas 2 y 3.

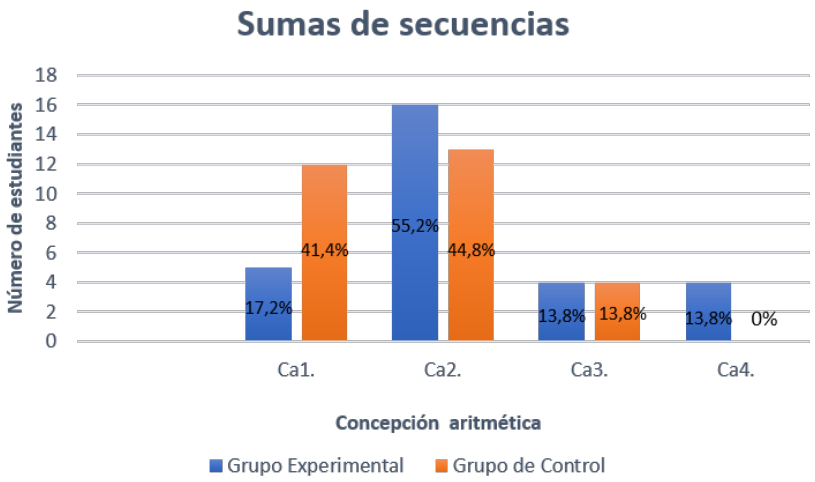


Figura 5-2.: Contraste ítem sumas de secuencias, grupo experimental y de control

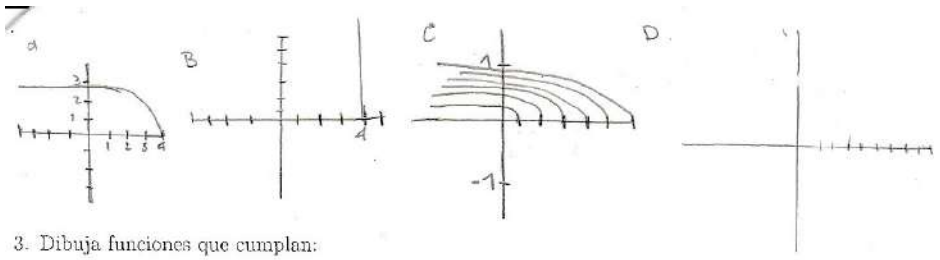
3. **Gráficos:** para el presente análisis, se tiene en cuenta la *concepción numérica* de límite, que revela el trabajo realizado por Cauchy, tal y como lo menciona [Medina, 2001], específicamente en relación en cuanto al concepto de función como dependencia entre variables.

Tabla 5-3.: Resultados ítem Gráficos - Pretest

Categoría	Descripción	Grupo Experimental Número de estudiantes	Grupo de Control Número de estudiantes
Concepción Numérica 1 CN1.	Identifica expresiones verbales de dependencia, sin embargo, le cuesta realizar su representación gráfica respectiva en el plano cartesiano.	7	5
Concepción Numérica 2 CN2.	Esboza gráficamente situaciones variacionales de dependencia, no obstante, presenta confusiones de las variables dependiente e independiente; específicamente para imágenes de una función en concreto.	16	22
Concepción Numérica 3 CN3.	Representa en el plano cartesiano funciones y relaciones de dependencia, teniendo en cuenta proximidades cada vez más cercanas las cuales generan tendencia y regularidades específicas.	6	2

- **Concepción numérica 1:** en el siguiente ejemplo es posible considerar que los estudiantes que hacen parte de ésta categoría poseen falencias en la representación de funciones en el plano cartesiano, especialmente al considerar que los elementos de éste tipo de relaciones son pares ordenados, así como el concepto propiamente

dicho; es decir, si es función o no, teniendo en cuenta que los valores de entrada deben poseer una única asignación del conjunto de llegada.



3. Dibuja funciones que cumplan:

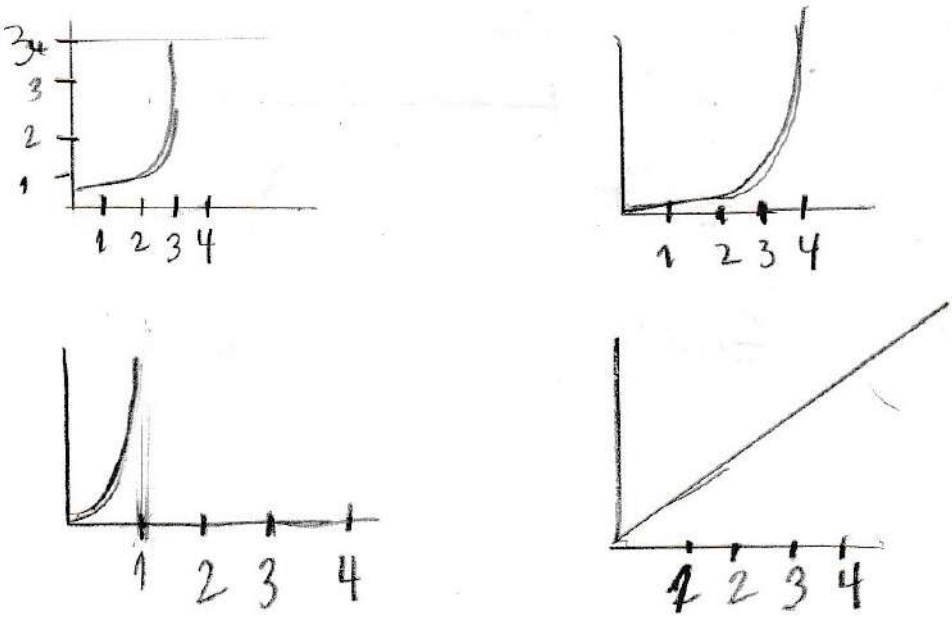
a ▪ Según x se acerca a 4, sus imágenes se acercan a 3 tanto como se quiera.

B ▪ Según x se acerca a 4, sus imágenes crecen indefinidamente, superando cualquier valor por muy grande que sea.

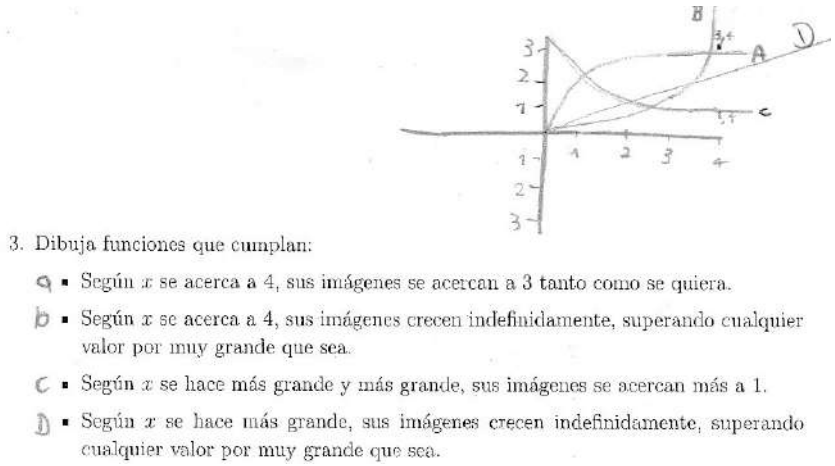
C ▪ Según x se hace más grande y más grande, sus imágenes se acercan más a 1.

D ▪ Según x se hace más grande, sus imágenes crecen indefinidamente, superando cualquier valor por muy grande que sea.

- **Concepción numérica 2:** los estudiantes que se clasificaron en esta asociación, estiman algunas confusiones entre las variables dependiente e independiente, concretamente intercambiando las coordenadas al reflexionar sobre las imágenes de algún punto requerido de una función.



- **Concepción numérica 3:** finalmente, tenemos el grupo que evidencia comprensión en el concepto de función y hace uso de su representación para mostrar tendencia de valores próximos y cercanos a relaciones específicas.



Teniendo en cuenta la **Figura 5-3.** podemos afirmar que la *concepción numérica 2 y 3* son las menos homogéneas, por una parte en el grupo de control la 2 es considerablemente mayor, y para el grupo experimental la 3 es algo mayor. Por otra parte, es preocupante el panorama en cuanto al concepto de función se refiere y es necesario retomarlo y afianzarlo para próximas intervenciones.

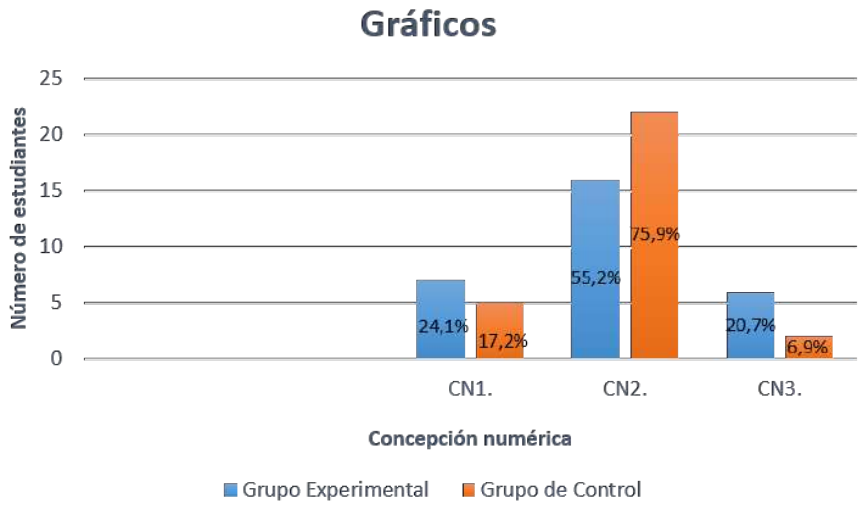


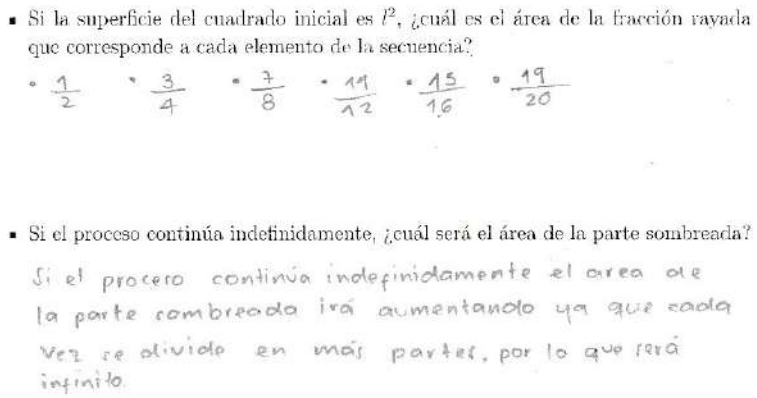
Figura 5-3.: Contraste ítem gráficos, grupo experimental y de control

4. **Recubrimientos:** Finalmente, en relación al desarrollo de los planteamientos que efectuaron los estudiantes para ésta situación, se establecieron 4 clasificaciones que tienen que ver con la *concepción algebraica* de límite, enmarcado dentro de lo que menciona [Medina, 2001], teniendo en cuenta el predominio de la simbología, fórmulas y expresiones generales que tenía Leibniz.

Tabla 5-4.: Resultados ítem Recubrimientos, Pretest

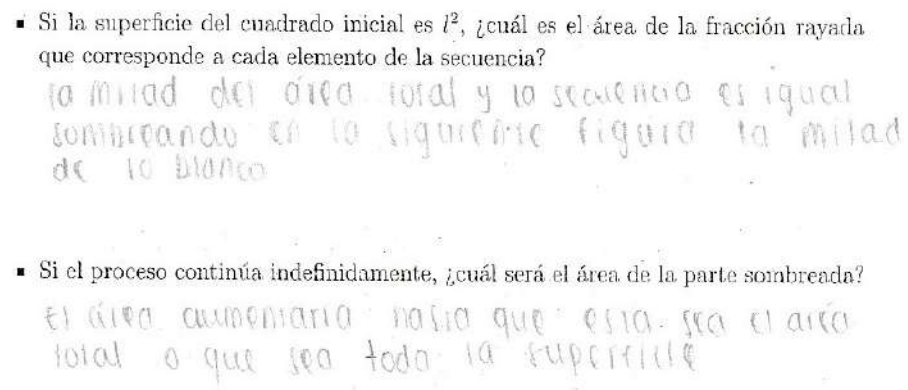
Categoría	Descripción	Grupo Experimental Número de estudiantes	Grupo de Control Número de estudiantes
Concepción Algebraica 1 CA1.	Presenta inferencias sobre una situación geométrica de regularidad y recursividad, sin embargo, los planteamientos aritméticos y algebraicos asociados son erróneos.	7	5
Concepción Algebraica 2 CA2.	Establece regularidades a partir de una situación geométrica de variación y repetición, formulando así conjeturas de tendencia que tienen que ver con el concepto de área, no obstante carece de justificaciones algebraicas y analíticas.	10	11
Concepción Algebraica 3 CA3.	Plantea patrones algebraicos generales para una secuencia geométrica en particular, reconociendo las características principales que las componen. Aunque, se le dificulta extraer y generar conclusiones sobre lo realizado.	4	8
Concepción Algebraica 4 CA4.	Sintetiza regularidades y patrones inmersos en una situación geométrica, haciendo uso de expresiones algebraicas generales que lo modelan. Así como también, propone hipótesis y planteamientos coherentes que tienen que ver con la tendencia de una superficie por medio de recubrimientos.	8	5

- **Concepción algebraica 1:** en este apartado podemos encontrar que los estudiantes a pesar de reconocer e identificar ciertas regularidades geométricas, presentan algunas falencias que tienen que ver con la fracción y del mismo modo, las conjeturas que realizan son muy pobres y con poco razonamiento analítico y lógico.


- Si la superficie del cuadrado inicial es l^2, ¿cuál es el área de la fracción rayada que corresponde a cada elemento de la secuencia?
  - $\frac{1}{2}$ • $\frac{3}{4}$ • $\frac{7}{8}$ • $\frac{11}{12}$ • $\frac{15}{16}$ • $\frac{19}{20}$
- Si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál será el área de la parte sombreada?

Si el procero continúa indefinidamente el area de la parte combreada irá aumentando ya que cada vez se dividio en más partes, por lo que será infinito.

- **Concepción algebraica 2:** por otra parte, se estableció la siguiente relación que considera y establece las regularidades requeridas. No obstante, las argumentos que presentan se caracterizan por ser netamente verbales.



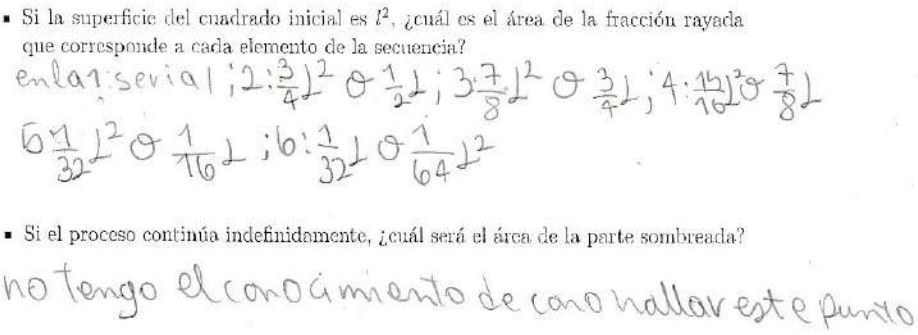
- Si la superficie del cuadrado inicial es l^2, ¿cuál es el área de la fracción rayada que corresponde a cada elemento de la secuencia?

  la mitad del área total y la secuencia es igual sombreando en la siguiente figura la mitad de lo blanco

- Si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál será el área de la parte sombreada?

  El área aumentaría hasta que esta sea el área total o que sea toda la superficie

- **Concepción algebraica 3:** de otro modo, podemos encontrar aquí los estudiantes que encontraron adecuadamente la regularidad fraccionaria requerida para cada representación de la figura, sin embargo, se les dificultó el planteamiento y formulación de hipótesis.



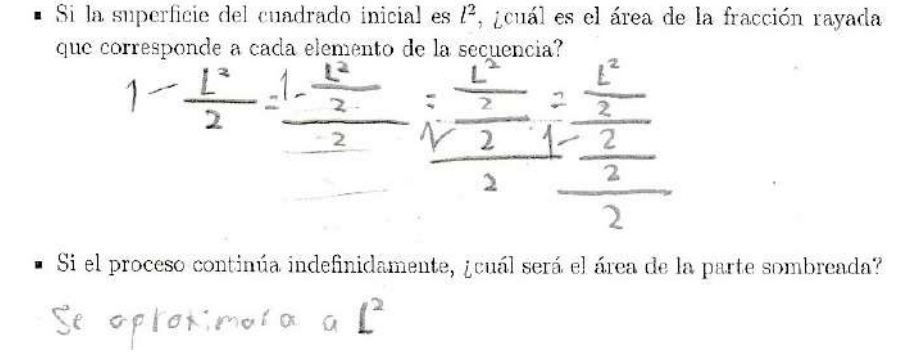
- Si la superficie del cuadrado inicial es l^2, ¿cuál es el área de la fracción rayada que corresponde a cada elemento de la secuencia?

  en la 1 se ria 1; 2: $\frac{3}{4}l^2$ o $\frac{1}{2}l$; 3 $\frac{7}{8}l^2$ o $\frac{3}{4}l$; 4: $\frac{15}{16}l^2$ o $\frac{7}{8}l$
  5 $\frac{31}{32}l^2$ o $\frac{1}{16}l$; 6: $\frac{1}{32}l$ o $\frac{1}{64}l^2$

- Si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál será el área de la parte sombreada?

  no tengo el conocimiento de como hallar este punto

- **Concepción algebraica 4:** finalmente, examinamos el último grupo de estudiantes, el cuál se caracteriza por haber encontrado oportunamente la regularidad requerida en cada figura. Y en el mismo sentido, proponer planteamientos coherentes con la situación expuesta.



- Si la superficie del cuadrado inicial es l^2, ¿cuál es el área de la fracción rayada que corresponde a cada elemento de la secuencia?

  $1 - \frac{L^2}{2} = \frac{1 - \frac{L^2}{2}}{2} = \frac{\frac{L^2}{2}}{\frac{2}{2}} = \frac{\frac{L^2}{2}}{1 - \frac{\frac{L^2}{2}}{2}}$

- Si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál será el área de la parte sombreada?

  Se aproximara a L^2

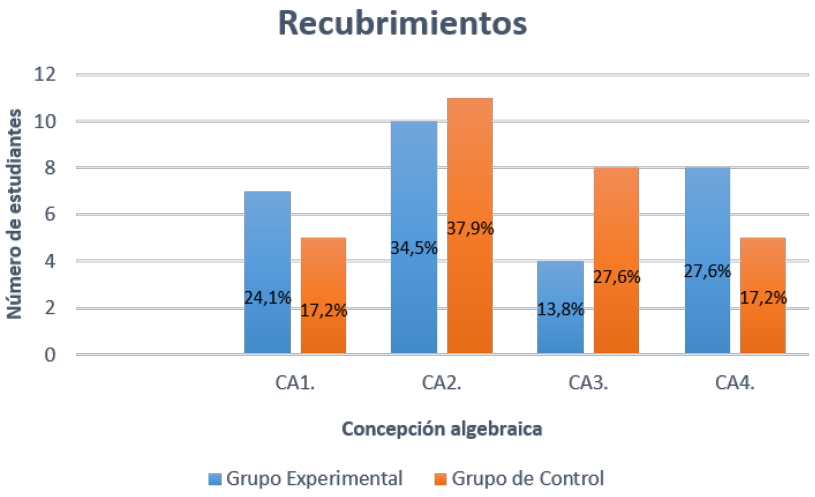


Figura 5-4.: Contraste ítem recubrimientos, grupo experimental y de control

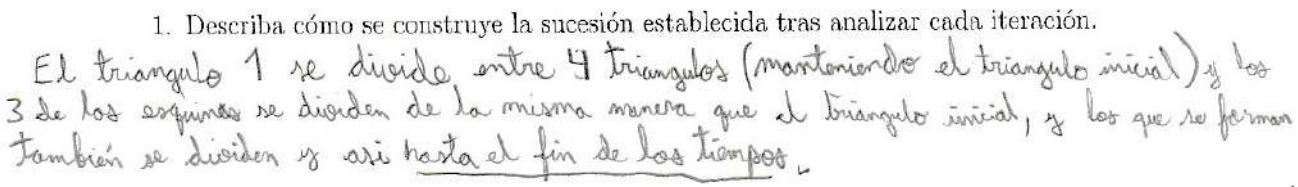
Con base en lo anterior, es posible inferir que la categoría algebraica 3, es la que presenta mayor distinción, aún así, los puntos porcentuales que influyen, sólo representan 4 estudiantes. En otro sentido, podemos establecer que, es necesario fortalecer en ambos grupos la formulación de hipótesis, conjeturas y planteamientos, frente a una problemática establecida.

5.2. Actividad 1

El triángulo de Sierpinski: (ver **Anexo: Actividad 1**)

1. **Descripción de la construcción del fractal:** a grosso modo se detectó que los estudiantes del grupo experimental fueron capaces de reconocer la reguridad geométrica que describe éste fractal. Sin embargo, se establecieron dos subcategorías esenciales, teniendo en cuenta que la descripción solicitada, se realiza de manera detallada o parcial.

   - **Descripción detallada:** los estudiantes clasificados en éste nivel realizaron una descripción verbal completamente detallada, que evidencia el reconocimiento de las regularidades geométricas que competen al fractal triángulo de Sierpinski.

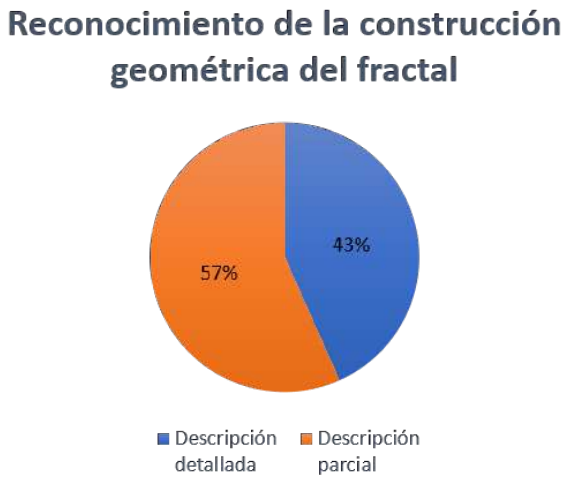

1. Describa cómo se construye la sucesión establecida tras analizar cada iteración.

El triangulo 1 se divide entre 4 triangulos (manteniendo el triangulo inicial) y los 3 de los esquinas se dividen de la misma manera que el triangulo inicial, y los que se forman también se dividen y asi hasta el fin de los tiempos.

- **Descripción parcial:** mientras que los estudiantes que hacen parte de la presente asociación, formularon de manera parcial o incompleta descripción geométrica del fractal mencionado. Evidenciando así, falencias y escasez de rigor.

1. Describa cómo se construye la sucesión establecida tras analizar cada iteración.

cada triangulo negro se divide en tres mas pequeños



A modo de conclusión, podemos afirmar que los estudiantes deben fortalecer el aspecto concerniente a la argumentación y justificación. Puesto, que el ejercicio de la descripción solicitada era de cierto modo trivial y sencillo.

2. **Área del triángulo de Sierpinski:** dentro de los resultados encontrados para el hallazgo del área del trigángulo de Sierpinski, se evidenciaron las siguientes 3 categorías a saber.

- **Asociación aritmética-fraccionaria incorrecta:** las agrupaciones presentadas se relacionan con una asociación aritmética fraccionaria incorrecta para el área de fractal.

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Fracción de área	0	$\frac{3}{4}$ A	$\frac{9}{10}$ A	$\frac{27}{69}$ A	$\frac{81}{256}$ A

- **Asociación aritmética-fraccionaria con ausencia heurística:** aquí se logró plasmar de manera adecuada la asignación fraccionaria para cada iteración del fractal, sin embargo, se constata ausencia heurística, en el sentido de describir las estrategias implementadas en la resolución de la situación

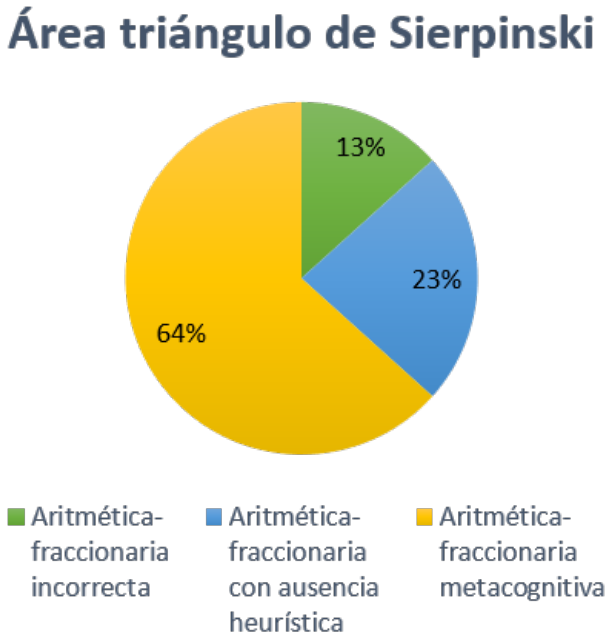
Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Fracción de área	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

- **Asociación aritmética-fraccionaria metacognitiva:** se refleja una relación correcta para cada iteración solicitada, y del mismo modo se puede identificar que existe una descripción del proceso realizado en el hallazgo de regularidades y características generales.

3 9 27

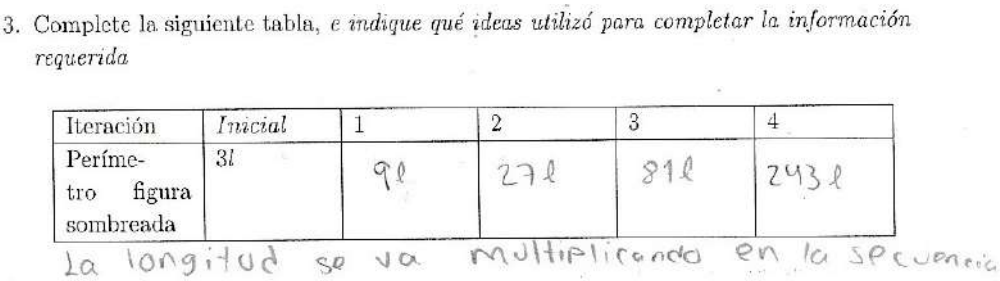
Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Fracción de área	A	$\frac{3}{4}$ A	$\frac{9}{16}$ A	$\frac{27}{64}$ A	$\frac{81}{256}$

multiplicamos el ~~area~~ nominador por 3 y el denominador por 4 para facilitar el proceso



Teniendo en cuenta el gráfico anterior, el panorama es positivo, teniendo en cuenta que el 87 % de los estudiantes logró encontrar las regularidades suficientes para determinar el área del fractal. Aún así, es necesario continuar fortaleciendo el proceso metecognitivo que se gesta a partir de reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas y de este modo fortalecer la competencia comunicativa en matemáticas.

3. **Perímetro del triángulo de Sierpinski:** para el siguiente planteamiento, se tuvieron en cuenta las mismas clasificaciones anteriormente relacionadas, del siguiente modo.
   - **Asociación aritmética-fraccionaria incorrecta:** en este fragmento se hace evidente que los estudiantes manifestaron una relación aritmética que no corresponde con el perímetro del fractal asociado.

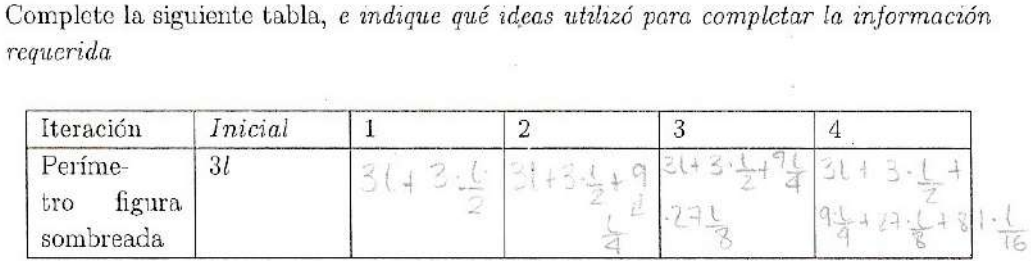


3. Complete la siguiente tabla, *e indique qué ideas utilizó para completar la información requerida*

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Perímetro figura sombreada	$3l$	$9l$	$27l$	$81l$	$243l$

La longitud se va multiplicando en la secuencia

   - **Asociación aritmética-fraccionaria con ausencia heurística:** en esta parte se puede reconocer que los estudiantes identificaron que el perímetro se puede hallar por medio de sumas de segmentos nuevos, y que éstos a su vez presentan cierta regularidad. No obstante, la suma quedó inconclusa, así como también la descripción de los elementos e ideas utilizadas en la resolución no se hacen de manera explícita.



3. Complete la siguiente tabla, *e indique qué ideas utilizó para completar la información requerida*

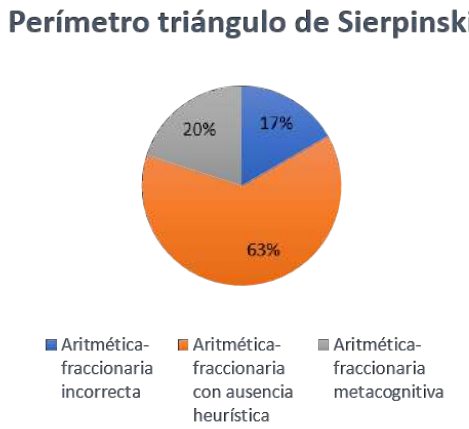
Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Perímetro figura sombreada	$3l$	$3l+3\cdot\frac{l}{2}$	$3l+3\cdot\frac{l}{2}+9\cdot\frac{l}{4}$	$3l+3\cdot\frac{l}{2}+\frac{9l}{4}\cdot\frac{27l}{8}$	$3l+3\cdot\frac{l}{2}+\frac{9l}{4}+\frac{27}{8}\cdot\frac{l}{8}+81\cdot\frac{l}{16}$

   - **Asociación aritmética-fraccionaria metacognitiva:** finalmente, se encontró la clasificación en donde los estudiantes encuentran el perímetro de cada iteración, como resultados de algunas sumas de fracciones y del mismo modo, describen el proceso realizado para cada caso, estableciendo finalmente alguna inferencia y regularidad que es posible a través de un análisis sobre lo desarrollado.

3. Complete la siguiente tabla, *e indique qué ideas utilizó para completar la información requerida*

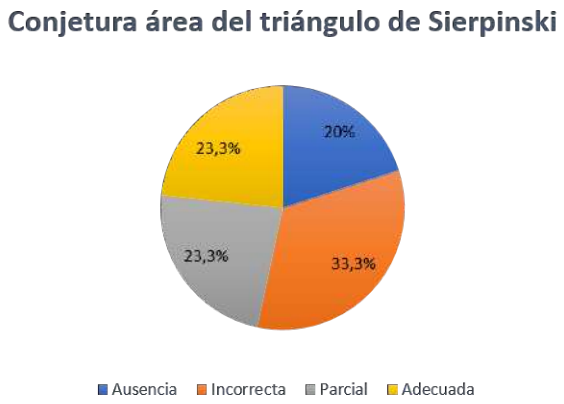
Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Perímetro figura sombreada	$3l$	$P = \frac{9l}{2}$	$\frac{27l}{4}$	$\frac{81l}{8}$	$\frac{243l}{16}$

después de realizar la sumas se cumple que el numerador se multiplica por 3 y el denominador se multiplica por 2.

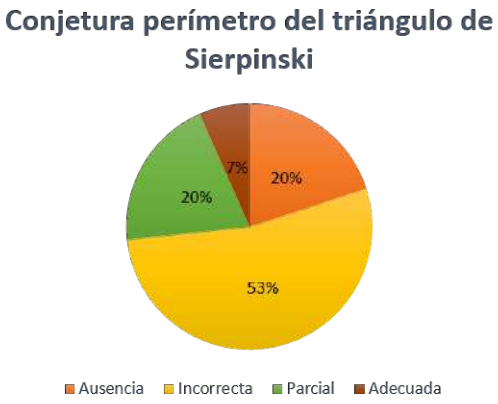


Teniendo en cuenta el gráfico anterior, se puede evidenciar que el panorama es bastante alentador, pues el 83 % de los estudiantes logró de una manera u otra referirse al perímetro de las iteraciones mostradas en el software, del triángulo de sierpinski. Sin embargo, es necesario hacer énfasis en el proceso metacognitivo sobre la resolución y estrategia implementada en la situación descrita en concreto.

4. **Predicciones área y perímetro triángulo de Sierpinski:** de acuerdo a lo establecido en relación a los resultados presentados por los estudiantes se encontraron cuatro características principales, descritas del siguiente modo: *ausencia de conjetura* (en donde los estudiantes no presentaron ningún procedimiento al respecto), *conjetura incorrecta* (donde los planteamientos aritméticos y/o verbales no tienen que ver con lo esperado), *conjetura parcialmente acertada* (donde se describe de manera inductiva el proceso para las primeras iteraciones y de manera verbal el patrón de regularidad inmerso) y *conjetura adecuada* (en donde se expresa de manera aritmética y algebraica el área y/o perímetro respectivo).



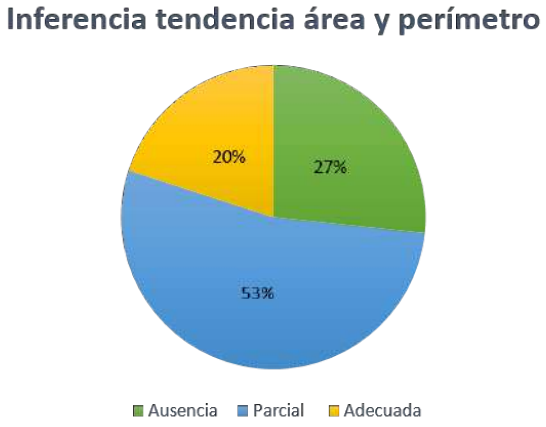
(a)



(b)

De acuerdo a los diagramas anteriormente presentados, podemos evidenciar que las predicciones en donde los estudiantes presentaron mayores dificultades, fue en relación al perímetro, posiblemente debido a la manera de expresar dicho valor como una serie geométrica. Por otra parte, se hace evidente en cada uno de los casos que un 23,3 % (área) y 7 % (perímetro) lograron formular los planteamientos para generalizar de cierto modo las estrategias implementadas en cada uno de los ítems anteriores, por lo cual, es necesario tener en cuenta y fortalecer los aspectos que conlleven a la producción de inferentes y deducciones matemáticas.

5. **Inferencias y deducciones, área y perímetro tirángulo de Sierpinski:** finalmente, podemos encontrar la agrupación caracterizada para la formulación de las tendencias respectivas asociadas al área y perímetro del fractal trabajado; aclarando el acercamiento intuitivo del área hacia 0 y el crecimiento exponencial del perímetro.



5.3. Post-test

1. **Cuadrados inscritos:** en relación a los resultados presentados por los estudiantes, se decidió establecer las siguientes categorías que tienen que ver con la *concepción algebraica* del concepto de límite. Ésta información recolectada se cruzará con los aportes sistematizados en el ítem **recubrimientos** del pretest, pues ambos ahondan en la concepción mencionada.

Tabla 5-5.: Resultados ítem Cuadrados inscritos, Postest

Categoría	Descripción	Grupo Experimental Número de estudiantes	Grupo de Control Número de estudiantes
Concepción Algebraica 1 CA1.	Presenta inferencias sobre una situación geométrica de regularidad y recursividad, sin embargo, los planteamientos aritméticos y algebraicos asociados son erróneos.	6	9
Concepción Algebraica 2 CA2.	Establece regularidades a partir de una situación geométrica de variación y repetición, formulando así conjeturas de tendencia que tienen que ver con longitudes de segmentos, no obstante carece de justificaciones algebraicas y analíticas.	10	11
Concepción Algebraica 3 CA3.	Plantea patrones algebraicos generales para una secuencia geométrica en particular, reconociendo las características principales que las componen. Aunque, se le dificulta extraer y generar conclusiones sobre lo realizado.	4	7
Concepción Algebraica 4 CA4.	Sintetiza regularidades y patrones inmersos en una situación geométrica, haciendo uso de expresiones algebraicas generales que lo modelan. Así como también, propone hipótesis y planteamientos coherentes que tienen que ver con la tendencia de una superficie por medio de recubrimientos.	9	2

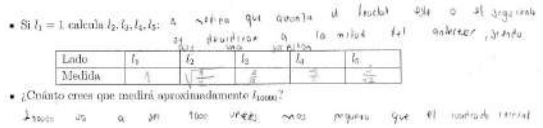
- **Concepción algebraica 1:**

Lado	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
Medida	1	(0.7)	(0.5)	(0.35)	0.25

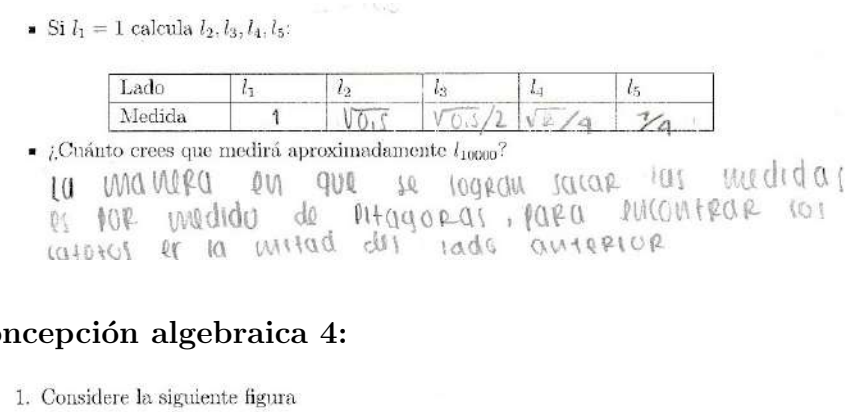
- ¿Cuánto crees que medirá aproximadamente l_{10000}?

$0.7 \cdot \frac{1}{2}^{500}$

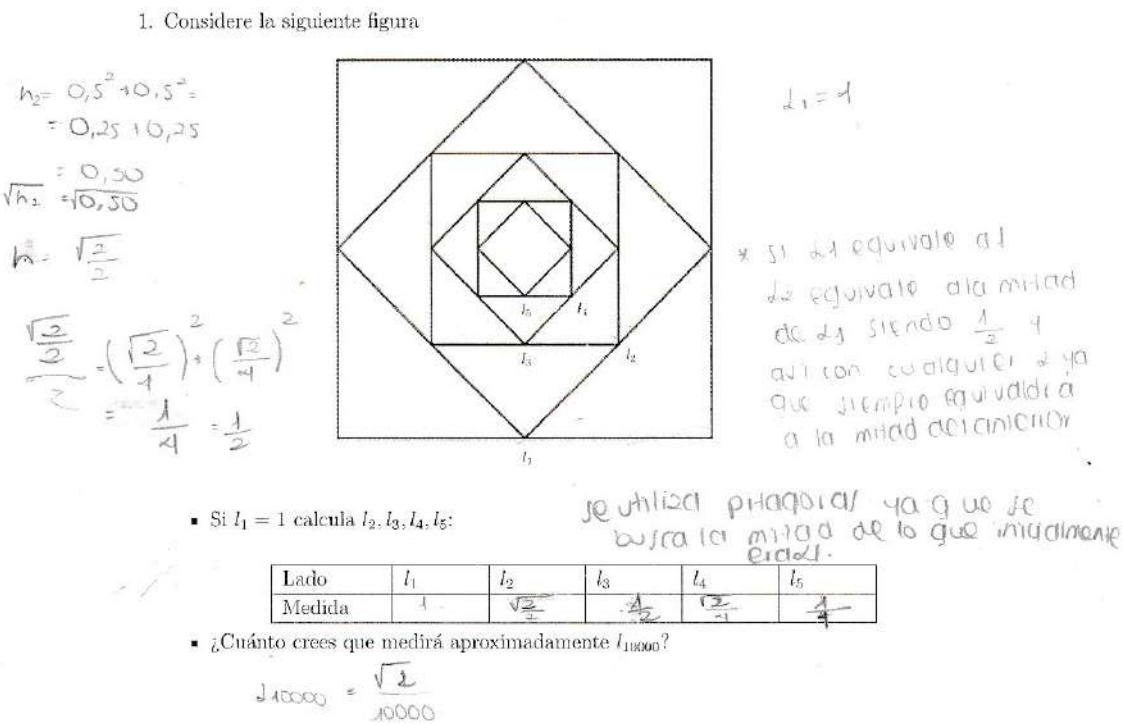
- **Concepción algebraica 2:** el siguiente ejemplo muestra cómo el estudiante encontró las primeras longitudes solicitadas, no obstante, las conjeturas e inferencias planteadas son erróneas, así como también las justificaciones planteadas carecen de argumentos sólidos.



- **Concepción algebraica 3:** aquí podemos apreciar cómo se realiza de manera adecuada el hallazgo de los planteamientos solicitados, en relación a las longitudes de los cuadrados del fractal. Sin embargo, los cuestionamientos formulados en aras de activar los procesos de generalización siguen costando trabajo.



- **Concepción algebraica 4:**



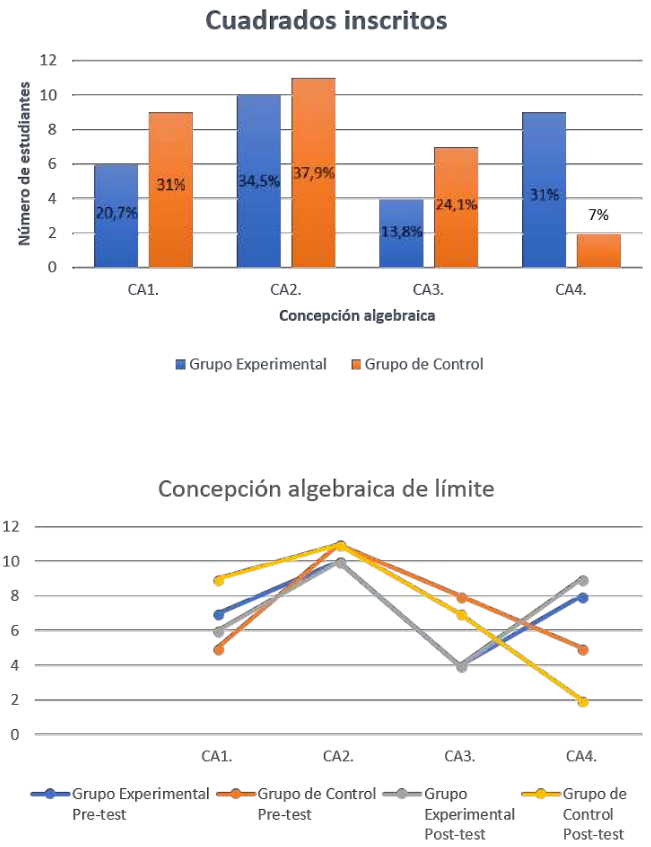


Figura 5-5.: Contraste concepción algebraica de límite

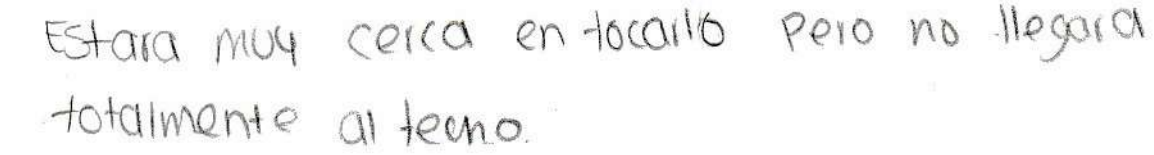
En la **Figura 5-5** podemos evidenciar el contraste de la prueba de entrada y de salida en relación con la concepción algebraica del concepto de límite. Concretamente, comparando los ítems **recubrimientos** y **cuadrados inscritos**. De modo que, a grosso modo, podemos afirmar que para el grupo experimental mantuvo el comportamiento encontrado, disminuyendo 4 % en CA1 y ganándolos en CA4. No obstante, se refleja disminución notoria en el grupo de control, probablemente con el aumento de complejdad del ítem final.

2. **La planta:** en este apartado se sintetizan los procedimientos realizados por los estudiantes en cuanto a la *concepción geométrica* del concepto de límite. Todo esto, es posible mediante la confrontación de lo que arrojó el ítem **la dicotomía**, bajo el planteamiento de si el límite se alcanza o no.

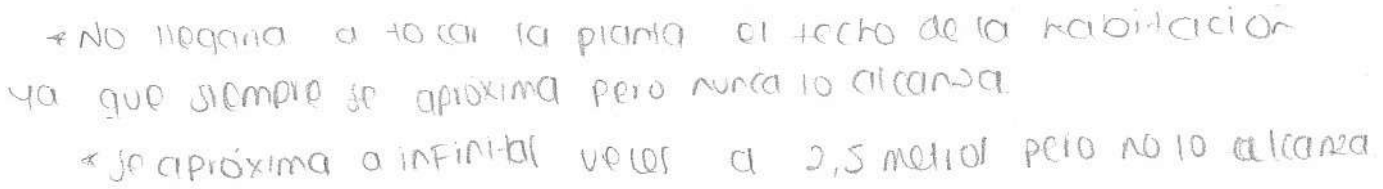
Tabla 5-6.: Resultados ítem la planta, post-test

Categoría	Descripción	Grupo Experimental Número de estudiantes	Grupo de Control Número de estudiantes
Concepción Geométrica 1 CG1.	Expresa inferencias entorno al cuestionamiento planteado, del mismo modo, considera que la planta no alcanzará a tocar el techo.	12	13
Concepción Geométrica 2 CG2.	Describe características y establece planteamientos de regularidad y recursividad frente a la situación propuesta, así mismo, deduce que la planta se acercará infinitamente al techo pero no lo alcanzará.	9	11
Concepción Geométrica 3 CG3.	Presenta argumentos sobre la situación y el cuestionamiento propuesto, en ese sentido, contempla que la planta llegará en algún momento a tocar el techo.	8	5

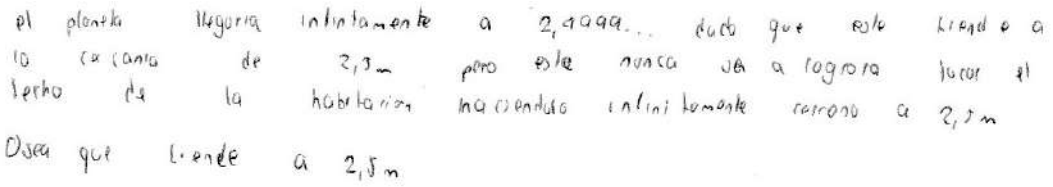
- **Concepción geométrica 1:**

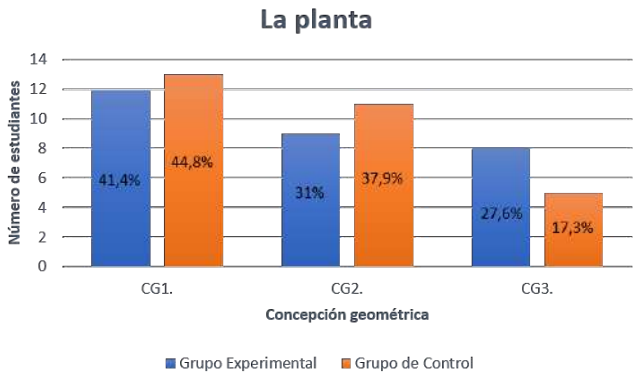

Estara muy cerca en tocarlo pero no llegara totalmente al techo.

- **Concepción geométrica 2:**


* No llegara a tocar la planta el techo de la habitacion ya que siempre se aproxima pero nunca lo alcanza.
* se aproxima a infinitos veces a 2,5 metros pero no lo alcanza

- **Concepción geométrica 3:**


el planta llegaría infinitamente a 2,4999... dado que esta tiende a
la cercanía de 2,5m pero esta nunca va a lograra tocar el
techo de la habitación haciendo infinitamente cercano a 2,5m
Osea que tiende a 2,5m



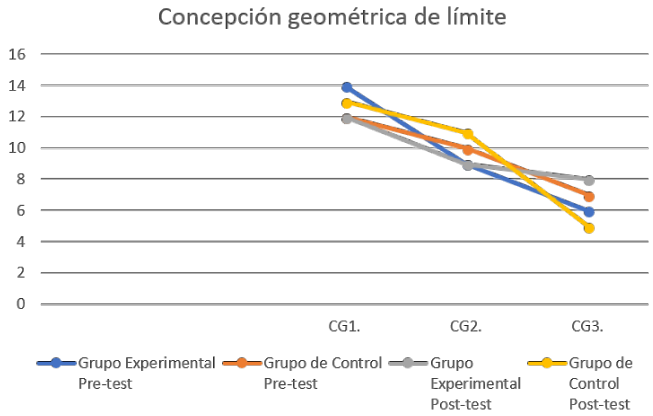


Figura 5-6.: Contraste concepción algebraica de límite

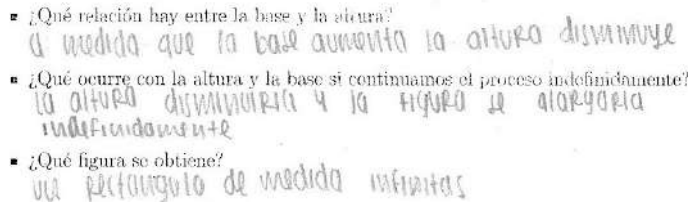
Teniendo en cuenta la **Figura 5-6**, se puede evidenciar que los comportamientos para ambos grupos se mantuvo de cierto modo constante, pues los cambios variacionales son para algunos casos del 5 % o 7 %. Sin embargo, es notorio que los estudiantes del grupo de control, son los que menor cantidad de población presenta en la última categoría, y del mismo modo, al finalizar del desarrollo los estudiantes del grupo experimental son los presentan mayor aporte a la concepción final, reconociendo así que existe algún momento donde el límite se alcanza.

3. **Rectángulos:** los planteamientos elaborados por los estudiantes en correspondencia con las preguntas formuladas de ésta situación se examinaron y equipararon con el ítem **gráficos**, en la medida de la coincidencia con el abordaje de la *concepción numérica* del concepto de límite.

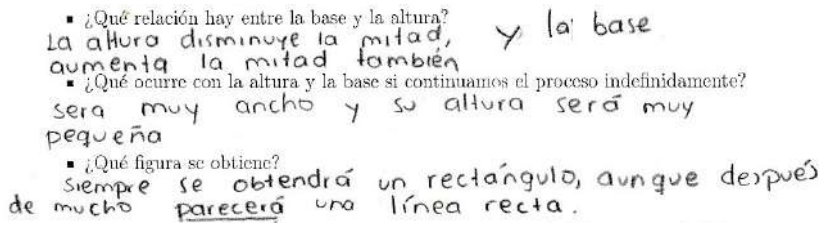
Tabla 5-7.: Resultados ítem Rectángulos, Post-test

Categoría	Descripción	Grupo Experimental Número de estudiantes	Grupo de Control Número de estudiantes
Concepción Numérica 1 CN1.	Identifica situaciones de dependencia y regularidad, sin embargo, las inferencias que presenta son muy generales y carecen de mayor razonamiento y justificación matemática.	5	8
Concepción Numérica 2 CN2.	Relaciona características presentadas por la situación, y del mismo modo, expone deducciones lógicas frente a las preguntas propuestas. No obstante, no se evidencia la recursividad infinita y análisis requerido frente a ello.	16	19
Concepción Numérica 3 CN3.	Propone y plantea argumentos sólidos en relación a los cuestionamientos variacionales de dependencia, teniendo en cuenta proximidades cada vez más cercanas las cuales generan tendencia y regularidades específicas.	8	2

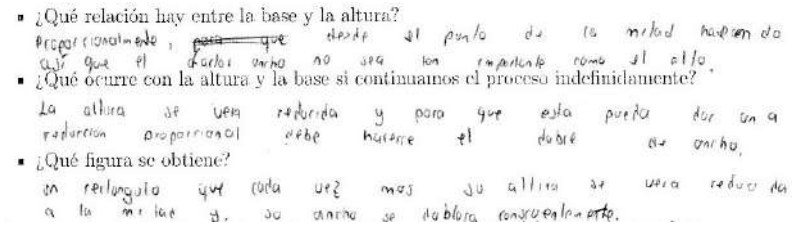
- **Concepción numérica 1:**

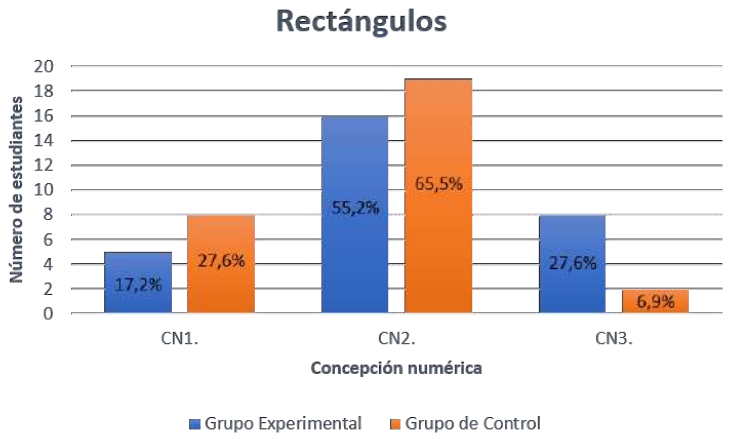

- ¿Qué relación hay entre la base y la altura?
  a medida que la base aumenta la altura disminuye
- ¿Qué ocurre con la altura y la base si continuamos el proceso indefinidamente?
  la altura disminuiría y la figura se alargaría indefinidamente
- ¿Qué figura se obtiene?
  un rectangulo de medida infinitas

- **Concepción numérica 2:**


- ¿Qué relación hay entre la base y la altura?
  La altura disminuye la mitad, y la base aumenta la mitad también
- ¿Qué ocurre con la altura y la base si continuamos el proceso indefinidamente?
  sera muy ancho y su altura será muy pequeña
- ¿Qué figura se obtiene?
  Siempre se obtendrá un rectángulo, aunque después de mucho parecerá una línea recta.

- **Concepción numérica 3:**


- ¿Qué relación hay entre la base y la altura?
Proporcionalmente, ~~para que~~ desde el punto de la mitad hacien do que el doble ancho no sea tan empinado como el alto.
- ¿Qué ocurre con la altura y la base si continuamos el proceso indefinidamente?
La altura se vera reducida y para que esta pueda dar con a reducción proporcional debe hacerse el doble de ancho.
- ¿Qué figura se obtiene?
un rectangulo que cada vez mas su altura se vera reduci da a la mitad y. su ancho se doblara consecuentemente.



El diagrama anterior muestra diferencia notoria concretamente en la concepción numérica 3, mientras que las dos primeras concepciones se encuentran de cierto modo homogéneas, en ambos grupos de trabajo. Es decir, que de cierta manera se generó al menos algunas reflexiones asociadas al infnito actual, durante la aplicación de la propuesta didáctica, la cuál permitió el incremento de ésta última concepción numérica.

En relación a la **Figura 5-7**, se puede evidenciar que la concepción numérica 1 se mantuvo sin cambios considerables. Del mismo modo, se puede apreciar que los estudiantes del grupo de control presenta mayor frecuencia en la concepción numérica 2. Mientras que la concepción 3 y tal vez la más importante, se modificó un poco para el grupo experimental y a su vez, éste es el que mayor número de estudiantes tiene en la categoría asociada al planteamiento de la gran pregunta ¿el límite se alcanza o no?

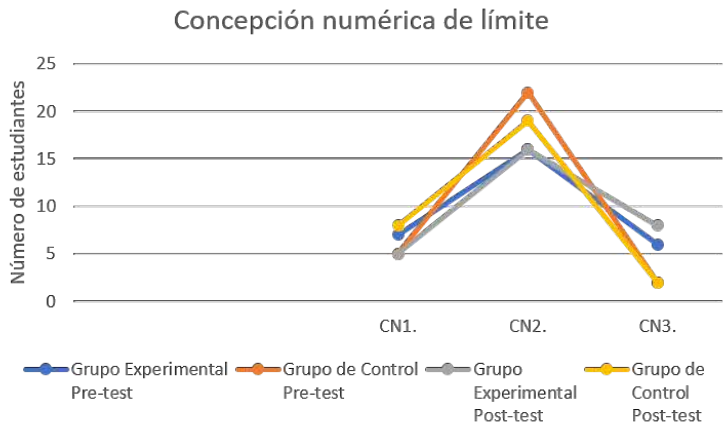
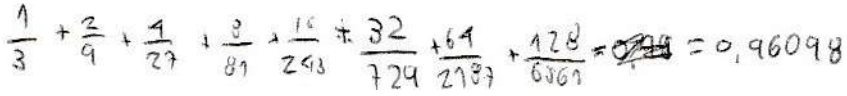


Figura 5-7.: Contraste concepción numérica de límite

4. **El conjunto de Cantor:** finalmente, conforme a lo desarrollado por los estudiantes de los grupos experimental y de control, se realizó la comparación respectiva con los planteamientos formulados en la situación **sumas de secuencias** de la prueba de entrada. Específicamente bajo la comparación de los niveles establecidos en la *concepción aritmética* del concepto de límite tal y como se puede apreciar a continuación.

   - **Concepción aritmética 1:**



   - **Concepción aritmética 2:**

   - Determine la longitud total de los segmentos que se suprimen del conjunto.

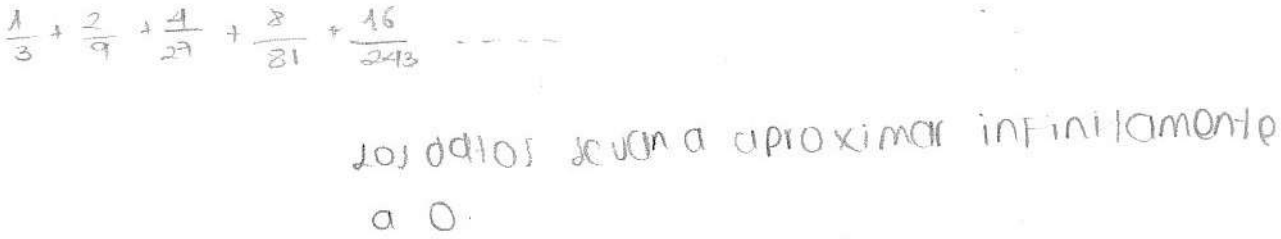
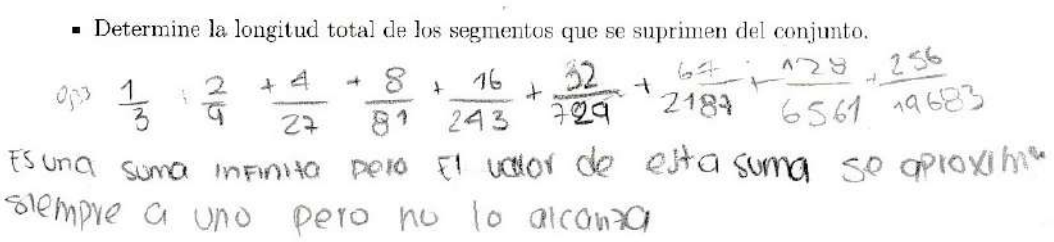


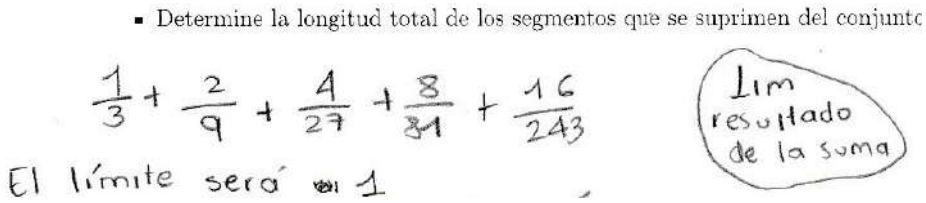
Tabla 5-8.: Resultados ítem conjunto de Cantor, Post-test

Categoría	Descripción	Grupo Experimental Número de estudiantes	Grupo de Control Número de estudiantes
Concepción aritmética 1 Ca1.	Realiza sumas entre fracciones, no obstante, le cuesta formular inferencias y plantear hipótesis a partir de lo desarrollado.	2	15
Concepción aritmética 2 Ca2.	Desarrolla sumas entre fracciones. Sin embargo, considera que el resultado de realizar el proceso de manera indefinida es infinito pues de forma secuencial no se encuentra regularidad alguna.	10	9
Concepción aritmética 3 Ca3.	Resuelve sumas entre fracciones plasmando su resultado parcial para cada iteración, del mismo modo, conjetura que al realizar dicha suma de forma indefinida su resultado se acercará a 1, más no lo alcanzará.	11	4
Concepción aritmética 4 Ca4.	Realiza sumas entre fracciones, haciendo de procesos aritméticos progresivos. Asimismo, afirma que el resultado será en algún momento 1, pues cada vez se acerca más a él.	6	1

- **Concepción aritmética 3:**



- **Concepción aritmética 4:**



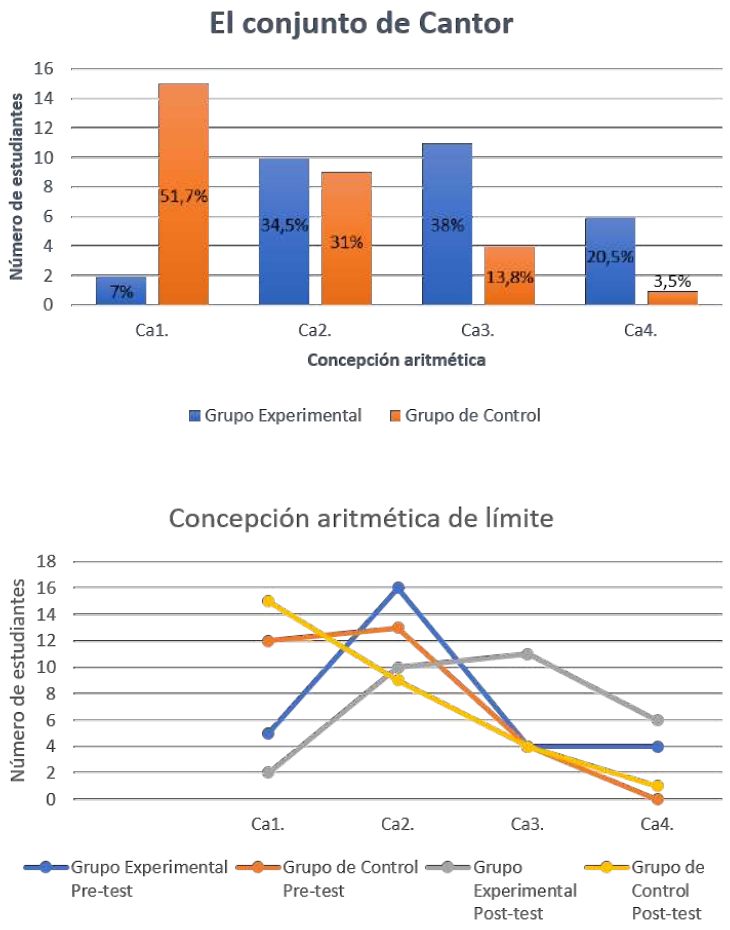


Figura 5-8.: Contraste concepción aritmética de límite

Ahora bien, teniendo en consideración la **Figura 5-8**, se puede ver de manera explícita las diversas variaciones de las concepciones aritméticas entorno al concepto de límite. En un primer momento, se puede evidenciar que el para grupo experimental la concepción 4 sufrió un pequeño incremento, mientras que la concepción 1 aumento, ésta modificación intervino en la concepción 2, haciendo que disminuyerá posterior a la prueba de salida. Es decir, que por el contrario lo relacionado en relación al contraste de las dos pruebas se puede decir que la concepción aritmética de límite decreció, conservando la mayor parte de su población den las dos primeras, en donde se comenten errores y planteamientos incorrectos, así como también la carencia de inferencias y deducciones que repercuten en la formulación de conjeturas.

Por otra parte, teniendo en cuenta el contraste entre las dos pruebas, se puede afirmar que el panorama para el grupo experimental es bastante positivo, pues la concepción 1 se logró minimizar, así como también el avance relacionado a la concepción 3 es claro.

Por lo cual, el progreso de dicha concepción es notorio, y tal vez se debe a la fuerte interrelación con lo desarrollado en las actividades planteadas en la secuencia didáctica.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

En primera instancia, es indispensable mencionar que el objetivo principal de la investigación se cumplió de manera satisfactoria, pues de acuerdo a lo estipulado se logró desarrollar una secuencia de actividades bien intencionadas para trabajar con los estudiantes de grado undécimo del gimansio los andes, el concepto de límite, haciendo uso de la geometría de fractales lineales. Esto se puede evidenciar claramente, en lo expuesto en los capítulos 4 y 5, asociados a la descripción de las actividades, objetivos y análisis respectivo.

Del mismo modo, se manifiesta de manera explícita en el capítulo 5, la caracterización y clasificación de los conocimientos previos de los estudiantes de los grupos experimiental y de control en relación al concepto de límite, y las 4 concepciones básicas (*numérica, aritmética, geométrica y algebraica*) todas las cuales se encuentran inmersas en el conjunto de obstáculos epistemológicos *horror al infinito* y su íntima relación con la construcción y gestación del concepto de límite a lo largo de la historia. Lo anteriormente mencionado, apunta directamente al cumplimiento del primer objetivo específico planteado al inicio del trabajo.

En ese orden de ideas, es primordial destacar lo expuesto en el marco teórico, en la medida que los recursos histórico-epistemológicos del concepto de límite proporcionaron una guía metodológica para desarrollar la secuencia didáctica; logrando contrastar las concepciones históricas con las diferentes problemáticas y/o dificultades asociadas a la comprensión del objeto de referencia. Así como también, la óptima delimitación de los aspectos conceptuales y didácticos que permitieron consolidar el diseño de las actividades, pretenciones en cada una de las preguntas propuestas y categorización de los resultados recolecctados.

Consecuentemente, se evidenció que las estructuras fractales y las actividades planteadas permitieron desarrollar con los estudiantes un proceso geométrico intuitivo, en torno a la idea de infinito y por ende al concepto de límite; generando así diversas reflexiones asociadas a los nuevos tipos de razonamientos surgidos con la resolución de problemas y situaciones propuestas. Sin dejar atrás, el fortalecimiento de las competencias matemáticas, tales como: modelación, comunicación, argumentación y representación, en la medida de la constante necesidad de describir las estrategias implementadas, reflexionar sobre ellas, y finalmente la formulación de conjeturas, deducciones e inferencias.

Asimismo, la propuesta planteada logró que los estudiantes confrontaran implícitamente las ideas de infinito actual y potencial; y así introducir de manera aproximada nociones de convergencia y continuidad por medio de numerosas expresiones y modelos matemáticos como series, sucesiones y funciones. Teniendo en cuenta que, la estrategia didáctica posibilitó ambientar en el aula las diferentes concepciones que se dieron a lo largo de la historia en relación al concepto de límite, fomentando desde un ámbito escolar la vivencia y abordaje de las principales características del obstáculo epistemológico "horror al infinito".

Finalmente, cabe resaltar que la construcción del marco disciplinar de los ejes articuladores de la estrategia didáctica elaborada (concepto de límite y fractales lineales), permitió a modo personal gran aprendizaje conceptual y matemático. Concretamente, en la formulación y construcción formal de los objetos matemáticos, así como la ejemplificación e interpretación de lo que se presentó. Tales como: la demostración de un límite específico, la construcción del SFI para el fractal lineal la curva de Koch, y en últimas, pero no menos importante el trabajo desarrollado en cuanto a fractales se referiere, en especial la construcción y contraste de la dimensión fraccionaria autosimiliar y su dimensión topológica, la cuál no puede exceder ésta primera, de lo contrario no sería considerado fractal.

6.2. Recomendaciones

Una vez aplicadas las actividades, se evidenció que algunas preguntas se pueden reformular mejorando la redacción, aclarando algunas convenciones y otros aspectos que permitan una mejor comprensión de las situaciones propuestas, en varios casos variando la idea inicial propuesta. Cabe entonces aclarar, que en los ejercicios en donde se presentan figuras (fractales), no se puede argumentar simplemente de manera visual o intuitiva, es necesario dar algunas indicaciones en forma verbal o escrita.

Por ejemplo:

En la actividad 1, los ejercicios pueden direccionarse preguntando solamente en cada caso por el área y perímetro de cada uno de los triángulos que van apareciendo en la nueva iteración.

En la actividad 3, en el ejercicio 2, se puede precisar preguntando por la longitud de cada uno de los nuevos segmentos que aparecen en la nueva iteración. De otro modo, es posible aclarar en concreto qué figura representa la iteración 1, 2, etc, pues ésto no es evidente hasta que se realiza el proceso dinámico en el software Geogebra.

En la actividad 4, es necesario aclarar que el fractal copo de nieve parte de un triángulo equilátero. Al respecto se deben reformular las preguntas, pues una vez analizadas vemos que presentan ambigüedad. En ese mismo sentido, se sugiere también adjuntar una tabla que organice el área de las iteraciones mostradas en el copo de nieve, viéndolas en términos de fracción de área de la figura inicial y del mismo modo añadiendo la nueva área que se origina con el fin de constituir la serie infinita que conforma dicho fractal, para finalmente esbozar por medio de aproximaciones la gráfica que relaciona el área de la figura formulada.

6.2.1. Recursos descargables

Con el fin de implementar los fractales usados en la secuencia didáctica expuesta, a continuación se presentan las figuras básicas utilizadas en formato .ggb (geogebra file). Dichos archivos, se encuentran listos para usar en algún navegador web o para descargar, de tal modo que solo basta con mover el deslizador para que el estudiante logre evidenciar de manera dinámica lo que sucede con el fractal tras cada iteración.

Triángulo de Sierpinski: https://ggbm.at/eyxnurd6

Curva de Koch: https://ggbm.at/bytkmnza

Copo de nieve: https://ggbm.at/yqz2sv2r

A. Anexo: Pre-Test

.

Gimnasio Los Andes
Departamento de Matemáticas, Grado Undécimo
Prueba de entrada Meta de comprensión 3
Primer Trimestre

1. **La dicotomía (o la carrera)**
   Un corredor debe recorrer el espacio que media entre el punto de salida y la meta. Para ello deberá en primer lugar alcanzar el punto medio del trayecto, luego la mitad del trayecto restante, posteriormente la mitad de la que queda... Puesto que nadie puede completar ese número infinito de tareas es necesario concluir que el corredor no puede alcanzar la meta.
   - Realiza un diagrama que ilustre la carrera planteada por Zenón.
   - ¿Qué opinas de la afirmación "el corredor no podrá alcanzar la meta"?

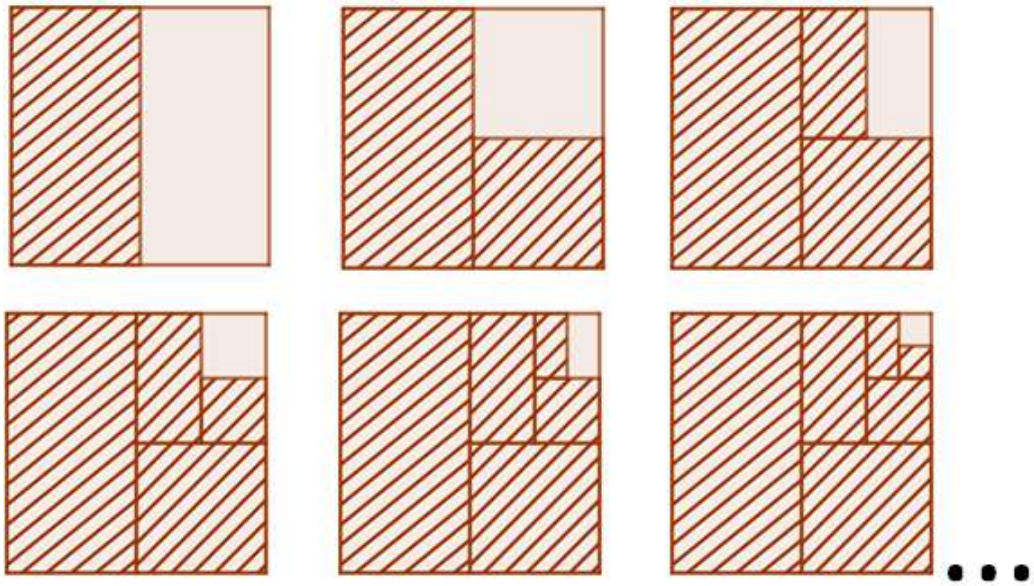
2. **Sumas de secuencias**
   Calcule las siguientes sumas, y usando la misma escala, represente su resultado en la recta numérica:

Suma	**Resultado**	**Representación**
$\frac{9}{10}$		
$\frac{9}{10} + \frac{9}{100}$		
$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$		

   ¿Cuál cree que es el resultado de la suma si se continúa este proceso indefinidamente? *Explíque y justifique su respuesta*

3. **Gráficos**
   Dibuja funciones que cumplan:
   - Según x se acerca a 4, sus imágenes se acercan a 3 tanto como se quiera.
   - Según x se acerca a 4, sus imágenes crecen indefinidamente, superando cualquier valor por muy grande que sea.
   - Según x se hace más grande y más grande, sus imágenes se acercan más a 1.
   - Según x se hace más grande, sus imágenes crecen indefinidamente, superando cualquier valor por muy grande que sea.

4. **Recubrimientos**
   Observa la siguiente secuencia, de izquierda a derecha comenzando desde la parte superior:



   - Si la superficie del cuadrado inicial es l^2, ¿cuál es el área de la fracción rayada que corresponde a cada elemento de la secuencia?
   - Si el proceso continúa indefinidamente, ¿cuál será el área de la parte sombreada?

B. Anexo: Actividad 1

.

Gimnasio Los Andes
Departamento de Matemáticas, Grado Undécimo
Actividad 1, Meta de comprensión 3
Primer Trimestre

El triángulo de Sierpinski. Por medio del recurso tecnológico Geogebra, utilice el deslizador i, de tal manera que obtenga las siguientes figuras, en la medida que el valor del deslizador cambia.

1. Describa cómo se construye la sucesión establecida tras analizar cada iteración.

2. ¿Qué fracción de área sombreada le corresponde a cada figura? *describa paso a paso la(s) estragia(s) implementadas*

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Fracción de área					

3. Complete la siguiente tabla, *e indique qué ideas utilizó para completar la información requerida*

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Perímetro figura sombreada	$3l$				

4. Podría encontrar una expresión para el área sombreada y perímetro en las iteraciones 10 y 100. *Justifique.*

5. ¿Qué cree que sucederá con el área y perímetro del fractal conforme el proceso continúe indefinidamente?

Nota importante: Los **fractales** se caracterizan por ser *figuras que no cambian en su forma según la escala a la que se observe.* Uno de los más conocidos es el triángulo de Sierpinski.

C. Anexo: Actividad 2

.

Gimnasio Los Andes
Departamento de Matemáticas, Grado Undécimo
Actividad 2, Meta de comprensión 3
Primer Trimestre

La esponja de Menger: considere el siguiente fractal

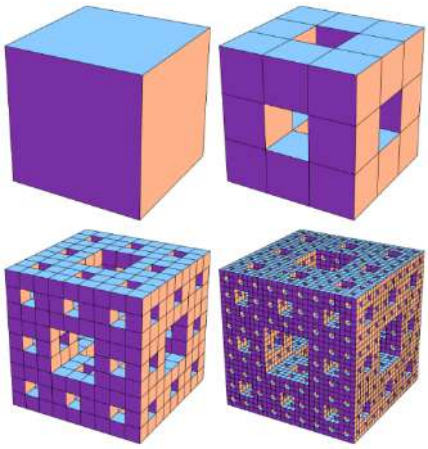
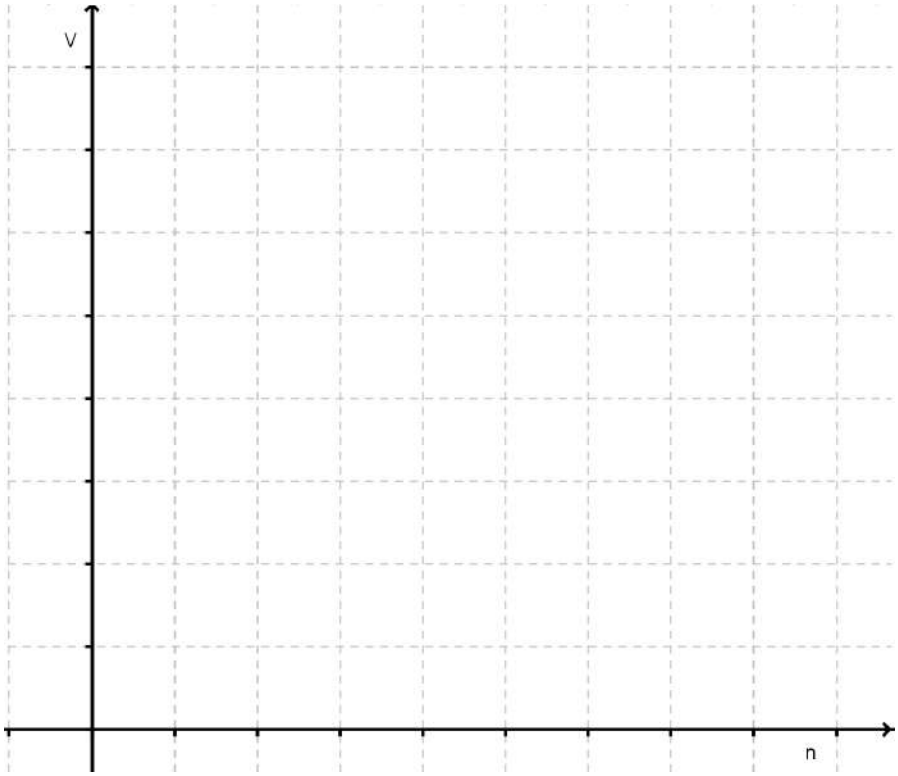


Figura C-1.: Tomado de https://matemelga.wordpress.com/2015/01/09/la-esponja-de-menger/

1. Teniendo en cuenta las primeras iteraciones de la esponja de menger complete la información de la siguiente tabla, sabiendo que la arista del cubo inicial es l:

Iteración	**Cantidad de cubos**	**Volumen que queda**
Inicial	1	l^3
1		
2		
3		
n		

2. Esboce la gráfica que relacione el Volumen en función de n (número de iteración)



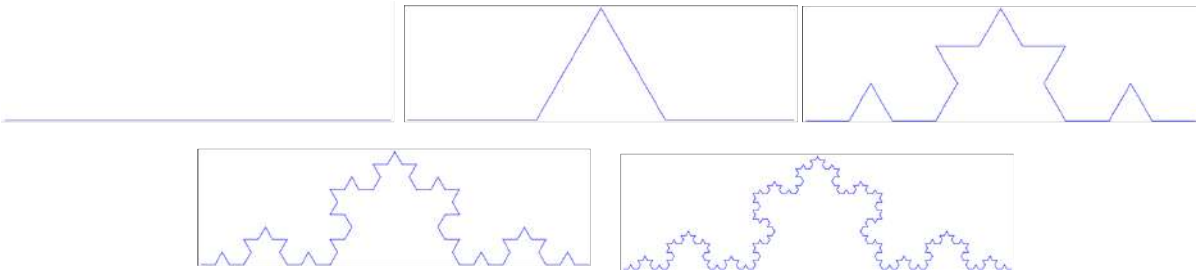
- ¿Qué puede decir acerca del volumen conforme el valor de la iteración se hace cada vez más grande? *explique*
- ¿Cómo cree que es la relación entre la longitud de las aristas y el número de iteraciones de la esponja de menger? ¿sucederá lo mismo que la función Volumen en cuanto se aumenta el número de iteraciones? *argumente*

D. Anexo: Actividad 3

.

Gimnasio Los Andes
Departamento de Matemáticas, Grado Undécimo
Actividad 3, Meta de comprensión 3
Primer Trimestre

La curva de Koch: Por medio del recurso tecnológico Geogebra, utilice el deslizador i, de tal manera que encuentre las primeras iteraciones del fractal, en la medida que el valor del deslizador cambia.



1. Describa verbalmente cómo se construye de manera geométrica éste fractal.

2. Complete la siguiente información teniendo en cuenta que la longitud del segmento inicial es l:

Iteración	*Inicial*	1	2	3	4
Cantidad de segmentos					
Longitud del segmento					
Longitud total					

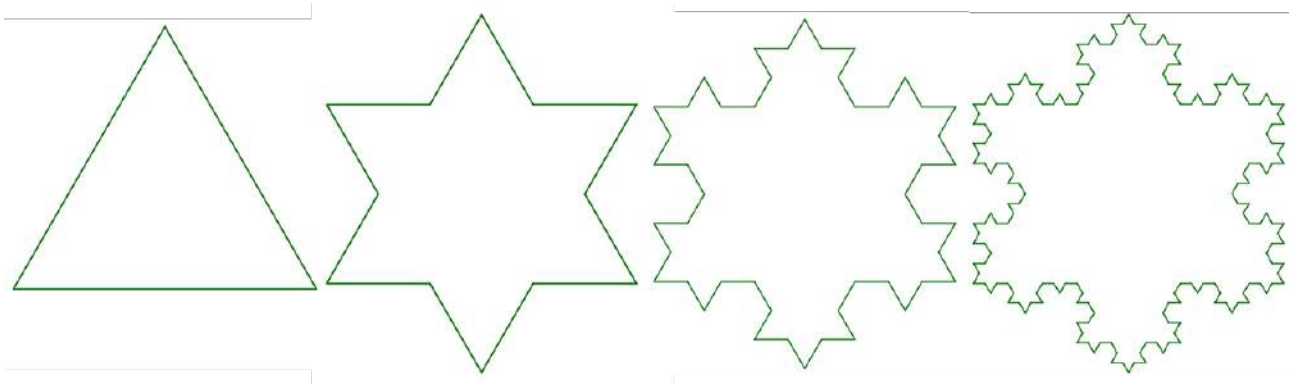
3. ¿Qué sucede con la cantidad de lados, longitud respectiva de un lado y longitud total de la curva asociada conforme la iteración es mayor? Ejemplifique con una iteración muy grande.

E. Anexo: Actividad 4

.

Gimnasio Los Andes
Departamento de Matemáticas, Grado Undécimo
Actividad 4, Meta de comprensión 3
Primer Trimestre

El copo de nieve: Por medio del recurso tecnológico Geogebra, utilice el deslizador i, de tal manera que obtenga las siguientes figuras, en la medida que el valor del deslizador cambia.



1. ¿Qué valores necesitaría para encontrar el área del fractal en mención conforme vaya cambiando de iteración?

2. Proponga la función área que depende del número de iteraciones.

3. Un estudiante desea inscribir el fractal en una circunferencia, ¿cuál debe ser el valor de r para que ésto suceda?

4. El mismo estudiante afirma que si el fractal se puede inscribir en una circunferencia, ésta última tendrá un área mayor. ¿considera usted que la premisa presentada es afirmativa? *argumente su respuesta.*

F. Anexo: Actividad 5

.

Gimnasio Los Andes
Departamento de Matemáticas, Grado Undécimo
Proyecto de síntesis, Meta de comprensión 3
Primer Trimestre

Competencia robótica. En la próxima IV olimpiada de robótica ANDESBOT, se realizará una competición alrededor del parque infantil, tomando como pista el contorno de ésta región. La carrera la ganará el robot que tome menor cantidad de tiempo en finalizar el recorrido. A continuación se anexa un diagrama del parque infantil.

(a)

(b)

1. Establezca una estrategia que permita encontrar la distancia total que deben recorrer los robots.

2. Encuentre la longitud total del contorno del parque infantil, haciendo uso del siguiente mapa.

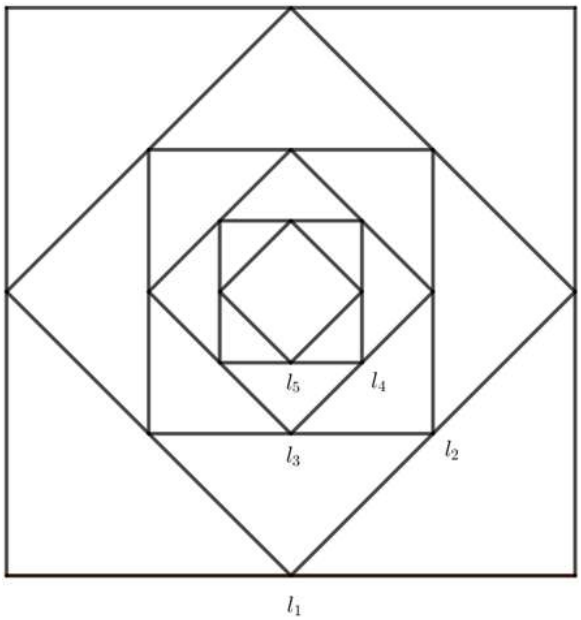
$n = 5m$

G. Anexo: Post-test

.

Gimnasio Los Andes
Departamento de Matemáticas, Grado Undécimo
Prueba de salida, Meta de comprensión 3
Primer Trimestre

1. Considere la siguiente figura



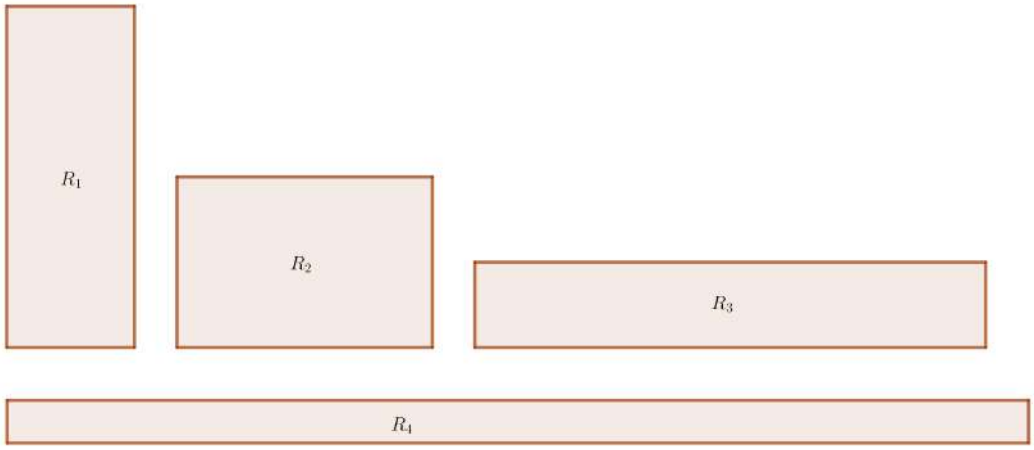
   - Si $l_1 = 1$ calcula l_2, l_3, l_4, l_5:

Lado	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
Medida					

   - ¿Cuánto crees que medirá aproximadamente l_{10000}?

2. Una planta crece en una habitación de 2.5 metros de altura. Las alturas que alcanza son sucesivamente 2.4 m, 2.49 m, 2.499 m, 2.4999 m, ...
   ¿Llegaría la planta a tocar el techo de la habitación?

3. Los siguientes rectángulos tienen todos la misma superficie, pero la altura de cada uno es la mitad de la altura anterior.



   - ¿Qué relación hay entre la base y la altura?
   - ¿Qué ocurre con la altura y la base si continuamos el proceso indefinidamente?
   - ¿Qué figura se obtiene?

4. **El conjunto de Cantor.** Éste conjunto se construye a partir del segmento incial que representa el intervalo [0,1]. Posteriormente se divide en 3 partes iguales y se suprime la del medio, del mismo modo se repite el procedimiento con cada segmento restante.

   - Determine la longitud de los segmentos que se suprimen del conjunto.

H. Anexo: Evidencias

Figura H-1.: Uso del software Geogebra en la visualización de los fractales utilizados

Figura H-2.: Fractal copo de nieve en el software Geogebra

Figura H-3.: Fractal copo de nieve 2 en Geogebra

Figura H-4.: Drone para toma de fotografías vista superior parque infantil

Figura H-5.: Drone para toma de fotografías vista superior parque infantil 2

Figura H-6.: Paque infantil

Figura H-7.: Proyecto de síntesis medición parque infantil

Figura H-8.: Proyecto de síntesis medición parque infantil 2

Figura H-9.: Proyecto de síntesis medición parque infantil por pasos

Bibliografía

[Alonso, 1995] Alonso, C. (1995). Introducción a los fractales. *Buran*.

[Artigue, 1995] Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[Blázquez et al., 2008] Blázquez, S., Gatica, S., and Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: aprendizaje y memoria. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 4.

[Blázquez and Ortega, 2000] Blázquez, S. and Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. *El futuro del cálculo infinitesimal*, 1:331–354.

[Camargo and Bustos, 2013] Camargo, D. and Bustos, L. (2013). Obstáculo geométrico del concepto de límite, una experiencia con fractales. *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*.

[Dueñas and Rubio, 2015] Dueñas, H. and Rubio, M. (2015). *Cálculo diferencial en una variable, primera edición*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Bogotá, Colombia.

[Dummit, 2015] Dummit, E. (2015). Dynamics, chaos, and fractals (part 4): Fractals. *Journal of Number Theory*, pages 1–21.

[Ferrante, 2009] Ferrante, J. (2009). Una Introducción al concepto de límite (dos mil años en un renglón). *Guía de estudio, editorial de la Universidad Tecnológica Nacional*.

[Filloy et al., 2003] Filloy, E., Hitt, F., Imaz, C., Rivera, F., and Ursini, S. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual. Fondo de Cultura Económica*, pages 91–111.

[Gutiérrez, 2005] Gutiérrez, L. (2005). El concepto de límite: Imagen, definición y algorítmos relacionados. Master's thesis, en Educación de la Universidad de los Andes.

[Guzman, 1993] Guzman, M. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias y de las Matemáticas. Tendencias e innovaciones. Madrid: Ibercima.*

[Kleiner, 2001] Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48.

[Lezama and Farfán, 2001] Lezama, J. and Farfán, R. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *El futuro del cálculo infinitesimal*, 1:331–354.

[Medina, 2001] Medina, A., C. (2001). Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios. Master's thesis, en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

[Ortega, 2016] Ortega, T. (2016). *Entre la intuición y el formalismo. El concepto de límite.* Comunicación presentada en. Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad, Bogotá.

[Rubiano, 2009] Rubiano, G. (2009). *Iteración y fractales.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[Rubiano, 2010] Rubiano, G. (2010). *Topología general: [un primer curso].* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[Ruiz, 2003] Ruiz, A. (2003). *Historía y filosofía de las matemáticas.* Editorial UNED, San José, Costa Rica.

[Sánchez and Contreras, 1998] Sánchez, O. and Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Matemáticas*, 16.

[Soler, 2014] Soler, B. (2014). Fractales para la construcción del concepto de límite en de 4º eso. Master's thesis, en Profesor de Educación Secundaria de la Universidad de Valencia.

[Spivak, 1992] Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal, segunda edición.* Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España.

[Stone, 1999] Stone, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión, vinculación entre la investigación y la práctica.* Editorial PAIDÓS, Buenos Aires, Argentina.