UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Consensus algorithms application on microgrids

Luis Carlos Torres Nupan

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Manizales, Colombia
2019

Aplicación de algoritmos de consenso en microrredes

Luis Carlos Torres Nupan

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ingeniería Eléctrica

Director (a):

Mg. Cesar Arango Lemoine

Línea de Investigación:

Redes inteligentes

Grupo de Investigación:

Environmental Energy and Education Policy - E3P

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación

Manizales, Colombia

2019

A mis padres Martha y Leonardo

Agradecimientos

A Dios quien hace posibles todas las cosas, a la Universidad Nacional de Colombia, al director de este trabajo, Mg Cesar Arango Lemoine por su colaboración que permitió la culminación exitosa de esta investigación.

A mis amigos, German Obando y Darío Yela por sus explicaciones y aportes en el desarrollo de este trabajo.

Resumen

Los algoritmos de control distribuido adquieren mayor vigencia en la actualidad, puesto que las microrredes están en continua transformación, la adaptación de topologías y el intercambio de datos entre los agentes que la conforman se facilita cuando no se impone un controlador centralizado. Se desarrolla en este documento la explicación teórica y la puesta en funcionamiento de algoritmos de consenso para diferentes redes de agentes que tienen una topología aleatoria.

Como resultado relevante, está la sencillez y robustez de los algoritmos de consenso para ser modelados e implementados en simulación, facilitando el análisis del comportamiento del sistema. Estos algoritmos, proporcionan un acuerdo rápido involucrando a todos los agentes de la red, en particular permitiendo la identificación y conteo en de un subconjunto de nodos dentro de un grafo.

Palabras clave: (Microrred, algoritmos distribuido, consenso).

Abstract

The distributed control algorithms had acquired validity at present. The microgrids are in continuous transformation, the adaptation of topologies and the exchange of data between the agents that conform it is facilitated when a centralized controller is absent. The theoretical explanation and the implementation of consensus algorithms for different networks of agents that have a random topology are developed in this document.

An important result is the simplicity and robustness of the consensus algorithms, to be modeled and implemented in simulation, facilitating the analysis of the system's behavior. These algorithms provide a quick agreement involving all the agents in the network, in particular allowing the identification and counting of a subset of nodes within a graph.

Keywords: (Microgrid, distributed algorithms, consensus)

Contenido

Pág.

1. Introducción 17
1.1 Identificación del problema 17
1.2 Objetivos 19
1.2.1 Objetivo general 19
1.2.2 Objetivos específicos 19
1.3 Estructura del documento 20

2. Generación distribuida y microrredes 21
2.1 Generación distribuida 21
2.2 Microrred 22
2.3 Algoritmos distribuidos 23
2.4 Estimación del estado del sistema de potencia 27

3. Algoritmos de consenso y aplicaciones 29
3.1 Fundamentos teóricos 29
3.1.1 Teoría algebraica de grafos 29
3.1.2 Vecindario y grado de los nodos 31
3.1.3 Matriz de Adyacencia y matriz Laplaciana 31
3.1.4 Características de la matriz Laplaciana 31
3.1.5 Algoritmo de Consenso 32
3.1.6 Estabilidad y convergencia 33
3.2 Aplicación del algoritmo de consenso 34
3.2.1 Asignación distribuida de recursos 34
3.2.2 Planteamiento del problema 34
3.2.3 Asignación de recursos entre un subconjunto de un nodo de un grafo en tiempo discreto 35

4. Análisis de resultados 37
4.1 Consenso en grafos dirigidos y no dirigidos 37
4.1.1 Consenso en grafos dirigidos 37
4.1.2 Consenso en grafos no dirigidos 41
4.2 Conteo de nodos distribuidos 45

5. Conclusiones y Trabajos futuros 51
5.1 Conclusiones 51
5.2 Trabajos futuros 52

Lista de figuras

Pág.

Figura 3-1: Grafo no dirigido 29
Figura 3-2: Grafo dirigido 30
Figura 4-1: Convergencia de una red de 50 nodos, grafo dirigido 38
Figura 4-2: Arcos en una red de 50 nodos, grafo dirigido 38
Figura 4-3: Convergencia de una red de 100 nodos, grafo dirigido 39
Figura 4-4: Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido 39
Figura 4-5: Red de 100 nodos, grafos dirigido, no hay consenso 40
Figura 4-6: Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido, no hay consenso 40
Figura 4-7: Convergencia de una red de 50 nodos, grafo no dirigido 41
Figura 4-8: Arcos en una red de 50 nodos, grafo no dirigido 42
Figura 4-9: Convergencia de una red de 100 nodos, grafo no dirigido 42
Figura 4-10: Arcos en una red de 100 nodos, grafo no dirigido 43
Figura 4-11: Red de 100 nodos, grafo no dirigido, no hay consenso 44
Figura 4-12: Arcos en una red de 100 nodos, grafo no dirigido, no hay consenso 44
Figura 4-13: Grafo de una red de 100 nodos, no hay consenso 45
Figura 4-14: Grafo de una red de 50 nodos, 25 nodos activos 46
Figura 4-15: Evolución de las variables auxiliares del algoritmo 46
Figura 4-16: Convergencia de $y(k)$ 47
Figura 4-17: Grafo de una red de 50 nodos, 10 nodos activos 47
Figura 4-18: Evolución de las variables auxiliares del algoritmo 48
Figura 4-19: Convergencia de $y(k)$ 48
Figura 4-20: Grafo de una red de 50 nodos, 5 nodos activos 49
Figura 4-21: Evolución de las variables auxiliares del algoritmo 49
Figura 4-22: Convergencia de $y(k)$ 50

Lista de tablas

Pág.

TABLA 1-1: Algoritmos distribuidos descritos en [7]. 24
TABLA 3-1 Características de los grafos dirigidos y no dirigidos 30

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolo	**Término**
$\mathcal{G}$	Grafo
$\mathcal{V}$	Conjunto de arcos de un grafo
$\mathcal{E}$	Conjunto de arcos de un grafo
a_{ij}	Valor o peso de un arco
$\mathcal{A}$	Matriz de adyacencia ponderada
$\mathcal{N}_i$	Vecindario del nodo i
$\deg(i)$	Grado del nodo i
Δ	Matriz de grado del grafo
L	Matriz laplaciana
$\mathcal{G}'$	Subgrafo de $\mathcal{G}$
ϕ_i	Función convexa de costo de asignación de recursos en el nodo i
$\mathcal{C}$	Espacio de funciones continuamente diferenciables
λ	Valor propio
$\mathbb{1}_n$	Vector de dimensión *n*, con todos sus elementos de valor 1
$0_{\boldsymbol{n}}$	Vector de dimensión *n*, con todos sus elementos de valor 0
$\boldsymbol{I}_n$	Matriz identidad de $n \times n$ dimensiones

1. Introducción

En este capítulo se desarrolla la descripción general sobre las redes distribuidas y los algoritmos de consenso, su relevancia en el contexto actual, así como la identificación del problema y objetivos del trabajo. Por último, se muestra la estructura general del documento.

1.1 Identificación del problema

Anteriormente, las economías de escala favorecieron los modelos de monopolio centralizado de distribución de energía eléctrica, actualmente los mercados evolucionan hacia sistemas descentralizados cuyos servicios energéticos son personalizados y se basan en la disponibilidad y el momento local. [1]

La introducción de mercados liberalizados, nacionales e internacionales y las iniciativas para abordar las preocupaciones ambientales han dado lugar a un aumento en la cantidad de generación distribuida (DG) conectada al sistema de potencia. Con la cantidad creciente de la DG, los operadores de redes de transmisión comenzaron a imponer requisitos técnicos en su conexión y operación [2]. Por ejemplo la optimización centralizada para el despacho económico, suele ser costosa tanto en computación como en comunicación, incrementándose cuando el sistema de potencia crece, además cuando se instalan o desinstalan generadores la optimización debe ser rediseñada [3].

Para un sistema de energía cuyas redes de transmisión y distribución tienen numerosas DG dispersas geográficamente, los controles centralizados son demasiado costosos para ser implementados, incluso si pudieran hacerse, el sistema resultante no es robusto o eficiente.[4]. De otra parte la introducción de fuentes renovables (por ejemplo, eólica, solar) aunque implique otras dificultades como producción de energía dependiente de las condiciones meteorológicas, los casos de integración existentes tienen altos niveles

anuales de penetración, hasta el 30% de la producción total, en el caso de Estados Unidos, indicando que las técnicas de despacho que consideran los fuentes renovables mantienen un alto estándar de fiabilidad [5].

Otro aspecto relevante es el avance hacia las redes inteligentes en el sistema eléctrico, involucrando grandes plantas generadoras, generación distribuida en pequeña escala de energías renovables, en la cual el usuario puede consumir y enviar energía a la red, es decir, el lado de la demanda de la red se puede convertir, de manera controlada, en una “fuente” o en un “pozo” de energía. Además conlleva un sistema de comunicaciones rápido, que permite el flujo de datos, para responder a situaciones locales y globales obteniendo más información sobre los problemas del sistema, así como incorporar mediciones [6].

En cuanto al propósito principal de algunos algoritmos en sistemas distribuidos estos buscan descomponer la optimización central en varias optimizaciones locales, en lugar de recopilar todos los parámetros de un problema, mediante la comunicación de cada agente con un conjunto limitado de vecinos, esto permite que los algoritmos distribuidos tengan diferentes especificaciones y aplicaciones de interés [3], [7].

Un problema importante en la coordinación distribuida es desarrollar algoritmos o protocolos de flujo de información, que especifiquen el intercambio de información entre un agente y sus vecinos, de modo que el grupo en su conjunto pueda llegar a un acuerdo con respecto a cierta cantidad de interés. Este problema suele denominarse de consenso. La última década ha sido testigo de las investigaciones intensivas sobre el consenso de coordinación distribuida en sistemas multiagentes (MAS) desde diversas perspectivas, como el consenso sobre el cambio de la topología de la red, el consenso con retrasos, consenso óptimo, consenso de datos de muestra, consenso de adaptación, consenso cuantificado, consenso de segundo orden, consenso de agentes lineales genéricos y consenso con múltiples líderes.[8]

Es importante resaltar que la estabilidad de algoritmos de consenso se ha demostrado en otros trabajos, por tanto puede extenderse a los controladores distribuidos, hecho que se refleja en la resistencia frente a fallas del controlador distribuido que mejora frente a un controlador centralizado [9]. También permiten identificar características de los nodos, para facilitar un ajuste en la topología de red [10]. Además existe un grupo particular, los

algoritmos de consenso lineal, caracterizados por su simpleza que requieren solo cómputo mínimo, comunicación y la sincronización para calcular los promedios de las cantidades locales que residen en cada dispositivo [11].

Los trabajos rastreados y la relevancia de los algoritmos de consenso, genera un espacio para implementar sistemas de prueba, inicialmente en simulaciones, para identificar las características de funcionamiento de esta técnica de control en una microrred descentralizada en un ambiente con ciertas condiciones, aplicando la teoría existente, los procesos reducidos de computo, para modelar y ejecutar aplicaciones en un tiempo menor tiempo que faciliten su estudio y viabilidad en desarrollos futuros.

1.2 Objetivos

Bajo el contexto descrito anteriormente este trabajo aborda los algoritmos de consenso como técnica de control en microrredes distribuidas, con el propósito de ejecutar una aplicación práctica en un modelo simulado de este sistema.

1.2.1 Objetivo general

Modelar un sistema para la ejecución de algoritmos de consenso en una microrred de agentes descentralizados

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar las aplicaciones contemporáneas de los algoritmos distribuidos en microrredes.
- Modelar un algoritmo de consenso en una microrred de agentes descentralizada.
- Implementar una aplicación basada en algoritmos de consenso dentro de la microrred modelada.

Para alcanzar los objetivos planteados se desarrollaron las siguientes etapas:

Etapa1: recolección de información para identificar algoritmos distribuidos en microrredes, en años recientes.
Etapa 2: Construir el marco teórico conceptual para modelar el algoritmo de consenso

Etapa 3: Simular el algoritmo modelado

Etapa 4: Recolectar y construir el marco teórico conceptual para modelar la aplicación de conteo distribuido de nodos, basado en algoritmos de consenso.

Etapa 5: simular la aplicación seleccionada.

1.3 Estructura del documento

El capítulo 1, expone la introducción general del trabajo, presentando el contexto, la identificación del problema, los objetivos y la organización del documento. En el capítulo 2 se desarrolla la exposición teórica sobre las microrredes descentralizadas así como las características de las técnicas de control empleadas. En el capítulo 3 se expone la teoría y el modelamiento matemático del algoritmo de consenso, igualmente se realiza el proceso para la aplicación en conteo de nodos distribuidos. El capítulo 4 presenta el análisis de los resultados simulados. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de este trabajo y se proponen futuros desarrollos sobre la temática tratada.

2. Generación distribuida y microrredes

Este acápite describe el estado del arte de la generación distribuida, microrredes y técnicas de control, que hacen posible el funcionamiento de un sistema de generación eléctrica, en el caso particular que involucra fuentes renovables y no renovables de pequeña escala, con la característica adicional de ausencia de un controlador central.

El sistema de generación eléctrico descrito anteriormente difiere de los modelos tradicionales centralizados; por ejemplo, los elementos de red dejan de ser pasivos para tomar un rol activo, incluso, con la capacidad de tomar decisiones de acuerdo con la información que comparte con nodos vecinos. Dicha evolución permite mejorar aspectos de escalabilidad y enfrentar fallas en algunos de sus nodos evitando inhabilitar el sistema. Este es uno de los resultados de la evolución de las tecnologías el cambio de la microrred hacia la red inteligente o smart grid.

2.1 Generación distribuida

Los generadores distribuidos (DER) son fuentes de energía conectadas a la red eléctrica en los niveles medio y bajo de tensión. Una gran subcategoría de DER está dedicada a las energías renovables. Se incluye también, los dispositivos utilizados para almacenar energía (baterías, supercondensadores o volantes de inercia). Un beneficio importante de tener las fuentes de energía dispersas en la red es la posibilidad de generación local, cerca de donde se consume. Por lo tanto, no hay necesidad de transporte en largas distancias, que conlleva pérdidas de energía [12].

En los casos donde las fuentes principales de producción de energía eléctrica son DER se habla de DG; entendida como la producción de electricidad a pequeña escala realizada directamente en la red de distribución o en las instalaciones del usuario final. Para la producción de electricidad, la DG puede utilizar fuentes de energía renovable (generación

eólica, solar, biodiesel) o no renovable (generación con turbinas, microturbinas, motores de combustión) [13].

Un aspecto relevante de la generación distribuida se ha asociado con la introducción de las fuentes renovables en el sistema de producción eléctrico (solar, eólica) fomentada por los aspectos medioambientales, reducción de gases de efecto invernadero, desarrollo de nuevas tecnologías, factores económicos y técnicos [14], adicionalmente la integración de múltiples recursos de energía renovable permiten satisfacer las necesidades energéticas de los consumidores en ubicaciones remotas con mayor confiabilidad, que conlleva un desafío importante debido a las características inherentes de las fuentes renovables disponibles, a saber, la imprevisibilidad y la variabilidad. Esto requiere el desarrollo de controladores para gestionar el equilibrio de potencia entre la carga y la generación [15].

De otro lado la DG y su integración a la red AC local ofrecen opciones para un flujo de potencia económico, continuo y bidireccional. Además, proporciona respaldo ante fallas de la red principal o interrupción del servicio [16].

La generación distribuida adquiere relevancia involucrando las fuentes renovables que han alcanzado un alto nivel de penetración en diferentes lugares, dicha situación crea nuevos desafíos que son la integración y el control para funcionar articuladamente con el propósito de suministrar un recurso energético a una necesidad particular.

2.2 Microrred

El concepto de microrred aparece en la literatura técnica aproximadamente en el año 2001, introducido como una solución para la integración confiable de los DER, incluidos los sistemas de almacenamiento de energía (ESS) y las cargas controlables. Dicha microrred se percibe por la red principal como un elemento único que responde a las señales de control apropiadas. Entonces una microrred puede definirse como un grupo de cargas, unidades DG y ESS operadas en coordinación para suministrar electricidad confiablemente, conectada al sistema central de energía en el nivel de distribución en un único punto de conexión; el punto de acoplamiento común (PCC) [17].

Las microrredes representan un concepto prometedor para facilitar la integración de fuentes renovables distribuidas en la red eléctrica, con base en dos motivadores principales: La creciente instalación de fuentes de energía renovables en todo el mundo, y la otra, una gran parte de estas fuentes renovables consiste en unidades DG de pequeña escala conectadas en los niveles de media y baja tensión [18].

Una microrred puede proporcionar electricidad limpia, renovable y confiable mediante la integración de varias tecnologías. Sin embargo, las fuentes renovables altamente intermitentes y las diversas demandas de carga plantean nuevos desafíos para la gestión óptima de los recursos dentro de sí misma. Por ejemplo la frecuencia de la microrred puede cambiar rápidamente y repetidamente debido al desequilibrio inesperado entre la oferta y la demanda y la pequeña inercia propia de estos sistemas. Existe por tanto una creciente necesidad de desarrollar soluciones distribuidas rápidas, flexibles, confiables y rentables para cumplir con los requisitos de reacción en tiempo real en microrredes, particularmente bajo un alto nivel de penetración de DG [19].

Es muy importante señalar que el enfoque dado al concepto de microrred está orientado al campo de control distribuido, usando técnicas que funcionan sin un controlador centralizado. Los trabajos rastreados indican que es una tendencia actual para integrar generadores distribuidos en grandes cantidades, en especial de recursos renovables.

2.3 Algoritmos distribuidos

El cálculo centralizado ha sido la principal forma en que los algoritmos de control y optimización se han implementado en los sistemas de energía eléctrica. Con el aumento de los DER, ocurre un cambio de paradigma, de centralizado a distribuido; en lugar de recopilar todos los parámetros del problema y realizar un cálculo central, este tipo de algoritmos realizan cálculos utilizando muchos agentes que obtienen ciertos parámetros del problema a través de la comunicación con un conjunto limitado de vecinos. Dependiendo de los detalles del algoritmo distribuido y la aplicación de interés, estos agentes pueden representar buses individuales o grandes porciones de un sistema de potencia [7].

Una de las aplicación de los algoritmos distribuidos actualmente está orientado al despacho económico (ED) que es uno de los problemas estudiados detalladamente en la investigación de sistemas de potencia, y tiene como objetivo asignar una demanda local entre un grupo de unidades de generación con un costo operativo mínimo reduciendo emisiones ambientales. Los enfoques para resolver el problema de ED en la literatura se pueden clasificar en tres grupos principales: centralizado, descentralizado y distribuido. Los esquemas de despacho tradicionales, basados en una estructura centralizada, generan inquietudes relacionadas con la necesidad de compartir información privada con una entidad central; escalabilidad, independencia del modelo, especialmente cuando aumenta el número de unidades; y robustez. Por el contrario, el enfoque descentralizado ofrece características que los hacen una alternativa interesante para superar estos inconvenientes. Además, permite dispersar los cálculos entre las unidades, facilitando una rápida respuesta a cambios inesperados en la generación no despachable o en el consumo de las cargas [20].

Para el caso del control distribuido no existe una unidad de control central y los controladores locales se comunican solo entre sí a través de enlaces de comunicación dedicados. La principal ventaja de este enfoque es que el sistema puede mantener una funcionalidad completa, incluso si se produce el fallo de algunos enlaces de comunicación, siempre que la red de comunicación permanezca en servicio, el control distribuido es inmune al punto único de falla. Sin embargo, para habilitar estas funcionalidades, la información intercambiada a través de los enlaces de comunicación primero necesita procesarse apropiadamente. En particular, la información intercambiada directamente entre controladores puede contener solo variables disponibles localmente. En otras palabras, si las dos unidades no están conectadas por un enlace dedicado, no tienen acceso directo a los datos de los demás y su observación del sistema es bastante limitada [21].

Se presenta una tabla a manera de resumen de algunos algoritmos distribuidos utilizados en despacho económico y optimización, de acuerdo con el estudio realizado en [7]:

TABLA 2-1: Algoritmos distribuidos descritos en [7].

Algoritmo	**Descripción**

Método de multiplicadores de dirección alterna (ADMM)	Es el resultado de la fusión de dos algoritmos descomposición dual (que a su vez se basa en el algoritmo doble ascenso) y el Método de Multiplicadores para resolver problemas Lagrangianos aumentados de forma distribuida (que también es similar en sabor al método iterativo de Gauss-Siedel). ADMM combina la solidez del Lagrangiano aumentado y el método de multiplicadores con la capacidad computacional distribuida de la descomposición dual.
Cascada analítica de objetivo (ATC)	Es un enfoque jerárquico e iterativo para la solución distribuida de un problema de optimización. El problema de optimización se divide en subproblemas que están relacionados por una estructura de árbol. Los subproblemas, padre e hijos en este árbol comparten variables de optimización. Si todos los subproblemas son convexos, se garantiza que el algoritmo converge a la solución. Otra característica de los algoritmos ATC requieren un coordinador central para administrar los cálculos distribuidos.
Principio de problema auxiliar (APP)	Descompone un problema de optimización en subproblemas con variables compartidas. Cada subproblema corresponde a una región del sistema con variables compartidas en las líneas de unión que conectan a regiones vecinas. Se utiliza el lagrangiano aumentado para garantizar la coherencia entre los subproblemas de las regiones vecinas. La diferencia clave para las técnicas de APP es que los términos cruzados en la expresión de dos normas empleada en el Lagrangiano aumentado se linealizan en lugar de modelarse directamente como en las técnicas ADMM y ATC. Esto desacopla los subproblemas de modo que no se requiere un coordinador central para las técnicas de APP. La convergencia está garantizada si todos los subproblemas son convexos.
Descomposición de condiciones de optimalidad (OCD)	En lugar de duplicar variables compartidas como en las técnicas anteriores, asigna cada variable principal y dual a un subproblema específico. Cada agente considera un subproblema bajo la

	condición de que solo se permita cambiar sus variables asignadas (es decir, todas las variables que están asignadas a otros subproblemas se fijan a sus valores previos). Los acoplamientos para las variables asignadas a otros subproblemas se modelan utilizando penalizaciones lineales que se agregan al objetivo. Los coeficientes para estas penalizaciones lineales están definidos por los multiplicadores de Lagrange resultantes de otros subproblemas. En cada iteración, cada agente aplica un paso de un método de Newton-Raphson a las condiciones KKT para su subproblema y luego comparte los valores primarios y duales resultantes con sus agentes vecinos. Por lo tanto, la técnica OCD es efectivamente un enfoque para la solución distribuida de las condiciones KKT para un problema de optimización. OCD no requiere un coordinador central.
Consenso + Innovación (C + I)	Realiza una solución distribuida de las condiciones KKT. Sin embargo, en lugar de asignar cada variable a un cierto subproblema como en la técnica OCD, la técnica C + I usa un algoritmo iterativo que permite que varíen todas las variables en un subproblema. Un punto límite del algoritmo iterativo satisface las condiciones KKT. Para problemas convexos, cualquier punto límite de este algoritmo iterativo es, por lo tanto, una solución óptima. Dado que cada paso del algoritmo iterativo se puede realizar usando solo información local y cercana, los cálculos en la técnica de C + I se pueden realizar de forma distribuida sin la necesidad de un coordinador central. A diferencia de las técnicas OCD, la técnica C + I es aplicable en cualquier nivel de partición: un agente individual podría representar un solo bus o una gran región de la red.

Es necesario destacar que un campo de investigación muy activo se centra en la resolución de problemas en microrredes a través del control distribuido. Una forma que ha surgido

recientemente como un enfoque popular de realizar varias estrategias de control distribuido, es la aplicación de algoritmos de consenso en las microrredes de CC [21].

2.4 Estimación del estado del sistema de potencia

La estimación del estado (EE) es una de las funciones clave en un sistema de gestión de energía. Las mediciones de campo se envían a través del sistema de Control de Supervisión y Adquisición de Datos (SCADA) al centro de control. Las mediciones provienen de sensores, por ejemplo, transformadores de corriente y de potencial, unidades de medida fasorial (PMU), etc., que miden magnitudes de tensión, ángulos e inyecciones de potencia en nodos, flujos de potencia y corrientes en líneas. Un estimador de estado convierte estas lecturas y otra información disponible en una estimación del estado real del sistema que filtra el ruido de medición [22].

En los sistemas de energía actuales, la EE generalmente se realiza de forma centralizada o jerárquica, pero a medida que los sistemas de potencia avanzan hacia una red inteligente, la EE distribuida es una alternativa importante a las soluciones centralizadas y jerárquicas. Existiendo un interés creciente por el caso distribuido para futuras redes inteligentes, ya que elimina la necesidad de una entidad central, que puede obtener una estimación de estado consistente para todo el sistema de potencia interconectado [23].

En las últimas décadas, está surgiendo un nuevo paradigma arquitectónico, principalmente debido a la adopción de agentes inteligentes, es decir, dispositivos que tienen la capacidad de cooperar y tomar decisiones autónomas sin ningún sistema de supervisión. De hecho, los sistemas tradicionales a gran escala tienen una arquitectura centralizada o, en el mejor de los casos, jerárquica. Sin embargo, estos sistemas requieren sensores y actuadores muy confiables, generalmente son muy caros y no se escalan bien debido a las limitaciones de comunicación y computación. La tendencia reciente para evitar estos problemas es sustituir sensores, actuadores y sistemas de comunicación costosos con un mayor número de dispositivos que pueden compensar de forma autónoma los fallos potenciales y limitaciones de cómputo a través de la comunicación y la cooperación. Una de las herramientas más prometedoras son los algoritmos de consenso lineal, que son algoritmos distribuidos simples que requieren un mínimo de computación, comunicación y

sincronización para calcular los promedios de las cantidades locales que residen en cada dispositivo [11].

3. Algoritmos de consenso y aplicaciones

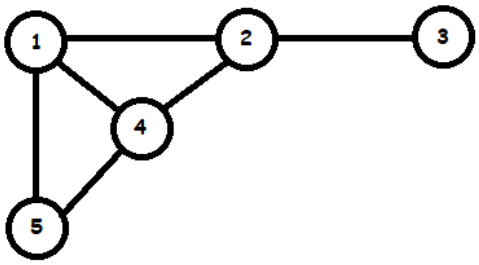
En esta sección se tratarán los aspectos de interacción entre los integrantes de una red en ausencia de un controlador central. Se desarrolla la teoría matemática de los algoritmos de consenso que permiten a un grupo de agentes alcanzar acuerdos compartiendo información limitada con sus pares, a través de un esquema de comunicaciones. Finalmente se esboza una explicación sobre una aplicación particular basada en el conteo distribuido de nodos

3.1 Fundamentos teóricos

3.1.1 Teoría algebraica de grafos

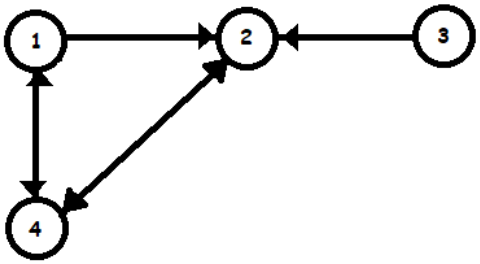
Un grafo, provee una abstracción natural de cómo se comparte la información entre agentes dentro de una red, está constituido por un conjunto finito de elementos, denominados nodos y arcos. Un grafo es un conjunto de objetos teóricos, que se puede representar gráficamente, como indica en las figuras **Figura 3-1** y **Figura 3-2**.

Figura 3-1: Grafo no dirigido



Fuente: Esta investigación

Figura 3-2: Grafo dirigido



Fuente: Esta investigación

TABLA 3-1 Características de los grafos dirigidos y no dirigidos

Grafo dirigido	Grafo no dirigido
También se conoce como dígrafo, en este caso, los datos que viajan a través de los diferentes arcos que conectan a los nodos tienen una sola dirección	Los datos viajan bidireccionalmente entre los diferentes arcos que conectan a los nodos.

La teoría algebraica de grafos busca analizar las propiedades de estas estructuras matemáticas, usando métodos pertenecientes al álgebra lineal [24]. Un grafo, que por convención se denota como $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$, está compuesto por un conjunto de nodos $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ y un conjunto de arcos $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. En general, un grafo expresa las relaciones entre los nodos que lo componen, caracterizadas por el conjunto $\mathcal{E}$. Por ejemplo, si el arco $(i, j) \in \mathcal{E}$, entonces existe una relación entre el nodo i y el nodo j; si por el contrario $(i, j) \notin \mathcal{E}$, entonces los nodos i y j no están relacionados. Para este trabajo, las relaciones entre los nodos representan capacidad para compartir información. Por convención, $(i, j) \in \mathcal{E}$ significa que el nodo i puede recibir información del nodo j. En una forma más general, cuando a cada arco se le asigna un valor o peso a_{ij}, tal que $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ij} > 0$, entonces se habla de grafos ponderados. En tales grafos, es posible considerar rutas más cortas, o geodésicas, entre nodos, a través de la noción de longitud de ruta, definida como la suma de todos los pesos a lo largo de ella misma [24].Un grafo ponderado se puede definir como $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$, donde $\mathcal{A}$ es la matriz de adyacencia ponderada.

3.1.2 Vecindario y grado de los nodos

El vecindario del nodo i está formado por todos los nodos que pueden enviar información al nodo i. $\mathcal{N}_i = \{j|(i,j) \in \mathcal{E}\}$, en el caso de grafos no dirigidos y no ponderados, a la cardinalidad del Conjunto $\mathcal{N}_i$ se le llama grado del nodo i y se denota por $\deg(i)$. Así $\deg(i) = |\mathcal{N}_i|$. La cardinalidad del conjunto $\mathcal{N}_i$ es igual al número de vecinos del nodo i. Usando el grado de todos los nodos, es posible definir la matriz de grado del grafo así:

$$\Delta = diagonal(\deg(1), \dots, \deg(n)) \tag{3.1}$$

3.1.3 Matriz de Adyacencia y matriz Laplaciana

Un grafo (ya sea dirigido o no dirigido) puede ser completamente caracterizado a través de su matriz de adyacencia ponderada $\mathcal{A}$, cuyos elementos están dados por:

$$[\mathcal{A}]_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & si(i,j) \in \mathcal{E} \\ 0, & si(i,j) \notin \mathcal{E} \end{cases} \tag{3.2}$$

Donde $[\mathcal{A}]_{ij}$ representa el elemento ubicado en la fila i columna j de la matriz $\mathcal{A}$. En este trabajo, se asume a menos que se indique lo contrario que los grafos no son ponderados, entonces $a_{ij} = 1$ para cualquier $i, j = 1, \dots, n$. Obtener las características del grafo de interés directamente de la matriz $\mathcal{A}$ conlleva complicaciones, por eso se utiliza una matriz auxiliar, denominada matriz Laplaciana, la cual se denota por la letra L, y se define como:

$$L = \Delta - \mathcal{A} \tag{3.3}$$

Con Δ como la matriz de grado del grafo indicada en la ecuación $\Delta = diagonal(\deg(1), \dots, \deg(n))$ (3.1)

3.1.4 Características de la matriz Laplaciana

La matriz definida en la ecuación $L{=}\Delta - \mathcal{A}$
(3.3) tiene las siguientes características según [25]

- Sus valores propios tienen parte real no negativa.

- Tiene al menos un valor propio igual a cero, el cual está asociado al vector propio $\mathbb{1} = [1, \dots, 1]^T \mathcal{A}$.

- Si el grafo es no dirigido, entonces L es simétrica y por lo tanto, sus valores propios son reales.

- Si el grafo es no dirigido y conexo, entonces el segundo valor propio más pequeño de L es estrictamente positivo. Este valor propio se denota como λ_2 y da una medida de qué tan conectado es el grafo. Entre mayor sea λ_2 mayor es el número de arcos del grafo.

Se dice que un grafo es conexo ($\mathcal{C}$) si cada par de nodos está conectado por al menos un camino o sucesión de arcos. La matriz Laplaciana es usada para determinar la conectividad de los grafos. En general, para los grafos dirigidos, se tiene el siguiente resultado:

- **Teorema 1**: Sea L la matriz Laplaciana del grafo dirigido $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ posee un árbol de expansión dirigido, si y solo si L tiene un único valor propio en cero, el cual está asociado al vector propio $\mathbb{1}$.

Sea $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$, un grafo dirigido y $\mathcal{G}' = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}'\}$, donde $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, un subgrafo de $\mathcal{G}$. Se dice que $\mathcal{G}'$ es un árbol de expansión dirigido de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}'$ no contiene ningún ciclo dirigido y además posee un nodo raíz, i_r tal que existe un camino dirigido desde i_r hacia cualquier otro nodo de $\mathcal{G}'$.

El teorema 1 es importante porque provee una condición suficiente y necesaria para determinar si un grafo dirigido posee un árbol de expansión dirigido, es decir, si el grafo posee un nodo desde el cual es posible alcanzar a cualquier otro nodo siguiendo un camino dirigido. Este teorema permite además analizar el comportamiento en equilibrio de sistemas dinámicos lineales caracterizados por matrices de estado Laplacianas, como es el caso de los protocolos de consenso.

3.1.5 Algoritmo de Consenso

En las redes de agentes (o sistemas dinámicos), "consenso" significa llegar a un acuerdo con respecto a una cierto valor de interés que depende del estado de todos los agentes.

Un "algoritmo de consenso" (o protocolo) es una regla de interacción que especifica el intercambio de información entre un agente y todos sus vecinos en la red [26].

Si a cada uno de los nodos que conforman el grafo se asocia una cantidad escalar, entonces se obtiene como resultado un grafo algebraico. Sea $x_i \in \mathbb{R}$ el escalar asociado al nodo i. El estado total del grafo, el cual representa el valor de cada una de las cantidades asociadas a los nodos, está dado por el vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Además, se asume que el estado de cada nodo evoluciona en el tiempo bajo la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), \qquad \forall i = 1, \dots, n, \tag{3.4}$$

Donde $f_i: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función que describe la tasa de cambio de los estados de los nodos y u_i es una entrada de control, es decir, una señal que puede ser manipulada con el fin de obtener un comportamiento deseado.

Un problema de consenso aparece cuando se desea que los elementos del estado x alcancen un mismo valor, es decir $x_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{j}}$, para todo $i = j = 1, \dots, n$. En general, el objetivo de este tipo de problemas de consenso es diseñar leyes de control locales donde cada nodo del grafo dispone de un controlador que toma decisiones usando solo información del estado del nodo y del estado de sus vecinos.

En este trabajo se plantea la siguiente ley de control

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j - x_i\right), \qquad \forall i = 1, \dots, n, \tag{3.5}$$

Esta ley planteada en la ecuación $u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j - x_i\right), \quad \forall i = 1, \dots, n,$ (3.5), se tomó del trabajo desarrollado en [27].

3.1.6 Estabilidad y convergencia

Para que todos los agentes de una red alcancen el consenso, la condición suficiente y necesaria se da cuando uno de los valores propios de la matriz laplaciana sea cero o un valor propio de multiplicidad 1 sea cero, dicha afirmación se aplica en los dos caso; para grafos dirigidos significa que existe un árbol de expansión dirigido, descrito en el teorema

1 tratado en la sección 3.1.4. Para grafos no dirigidos significa que existe una sucesión de arcos entre cualquier par de nodos, es decir que el grafo es conexo.

3.2 Aplicación del algoritmo de consenso

Tratados anteriormente los fundamentos teóricos de los algoritmos de consenso, se estructuro una aplicación basada en los trabajos desarrollados en [28] y [29]. En las siguientes secciones se realiza la descripción conceptual.

3.2.1 Asignación distribuida de recursos

La asignación de recursos tiene abundantes aplicaciones y varían desde problemas de equilibrio en ingeniería, ciencias económicas, problemas de equilibrio en manufactura, estadísticos, investigación de operaciones militares, economía financiera, algoritmos para una variedad de modelos de optimización más complejos [30]. Es posible clasificar los nodos de un grafo de acuerdo a una característica.

Por ejemplo, en el caso particular de las microrredes y generación distribuida, bancos de condensadores / compensadores estáticos, a menudo se desarrolla con la ayuda de sofisticados programas de optimización y paquetes de software. Desde una perspectiva de ingeniería, estos enfoques pueden presentar inconvenientes en su implementación, en particular si tienen que usarse con frecuencia para adaptarse a las diferentes condiciones de la red de distribución [31].

3.2.2 Planteamiento del problema

Sea un grafo $\mathcal{G}$ conexo con n nodos, es decir, $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$. Siguiendo un criterio de optimalidad, se divide un recurso $r \in \mathbb{R}$ entre un subconjunto de nodos de $\mathcal{G}$. Para formalizar este problema, se distribuye $\mathcal{V}$ en dos subconjuntos, nodos activos $\mathcal{V}_a$ y nodos pasivos $\mathcal{V}_p$. Se asume que $\mathcal{V}_a \cup \mathcal{V}_p = \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}_a \neq \mathbf{0}$ matemáticamente se expresa como:

$$\begin{aligned} &\min_{\{x_i\}_{i\in\mathcal{V}_a}} \sum_{i\in\mathcal{V}_a} \phi_i(x_i) \\ &sujeto\ a \sum_{i\in\mathcal{V}_a} x_i = r \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donde $x_i \in \mathbb{R}$ es el recurso asignado al i-ésimo nodo y $\phi_i: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función estrictamente convexa que modela el costo de asignación de recursos en este nodo. Se considera que $\phi_i \in \mathcal{C}$, para todo $i \in \mathcal{V}_a$

3.2.3 Asignación de recursos entre un subconjunto de un nodo de un grafo en tiempo discreto

Este tipo de algoritmos se desarrollan en tiempo discreto, se plantean las siguientes relaciones

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \alpha \sum_{j\epsilon\mathcal{N}_i}(y_j(k) - y_i\,(k)), \forall i\epsilon\mathcal{V} \tag{3.7}$$

$$\hat{x}_i(k+1) = \hat{x}_i(k) + \alpha x_i(k) + \alpha \sum_{j\epsilon\mathcal{N}_i}(y_j(k) - y_i\,(k)), \forall i\epsilon\mathcal{V}_p \tag{3.8}$$

$$y_i(k) = \begin{cases} \phi'\big(x_i(k)\big)\ si\ i\epsilon\mathcal{V}_a \\ \hat{x}_i(k)\ si\ i\epsilon\mathcal{V}_p \end{cases} \tag{3.9}$$

Donde $\phi'\big(x_i(k)\big)$ es el costo marginal asociado con la función de costo ϕ_i y $\hat{x}_i \in \mathbb{R}$ es una variable auxiliar asociada al nodo i. Las variables auxiliares solo se definen para los nodos pasivos. Es necesario aclarar que el algoritmo planteado en la ecuaciones $x_i(k+1) = x_i(k) + \alpha \sum_{j\epsilon\mathcal{N}_i}(y_j(k) - y_i\,(k)), \forall i\epsilon\mathcal{V}$ (3.7),

$\hat{x}_i(k+1) = \hat{x}_i(k) + \alpha x_i(k) + \alpha \sum_{j\epsilon\mathcal{N}_i}(y_j(k) - y_i\,(k)), \forall i\epsilon\mathcal{V}_p$ (3.8)

y $y_i(k) = \begin{cases} \phi'\big(x_i(k)\big)\ si\ i\epsilon\mathcal{V}_a \\ \hat{x}_i(k)\ si\ i\epsilon\mathcal{V}_p \end{cases}$ (3.9)

solo utiliza información local; en efecto el nodo i sólo requiere información sobre y_i e $\{y_j\}_{j\epsilon\mathcal{N}_i}$ para ejecutar el algoritmo.

También se define $k \in \mathbb{N}$, y α $\in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Este algoritmo cumple las siguientes proposiciones (la demostración se encuentra en el apéndice A)

- **Proposición 1**: conservación del recurso, se asume que una cantidad de recurso r se dividen entre los nodos del grafo $\sum_{i=1}^{n} x_i(0) = r$, entonces $\sum_{i=1}^{n} x_i(k) = r$, para todo $k \geq 0$.

- **Proposición 2**: punto de equilibrio, sea $(\{x_i^*\}_{i\in\mathcal{V}}, \{\hat{x}_i^*\}_{i\in\mathcal{V}_p})$, el punto de equilibrio en un grafo conexo se cumple, $\phi_i'(x_i^*) = \phi_j'(x_j^*)$, para todo $i,j \in \mathcal{V}_a$ (los costos marginales son iguales y $x_i^* = 0$, $i,j \in \mathcal{V}_p$ (el recurso no se ubica en los nodos pasivos).

- **Proposición 3:** estabilidad, si $\mathcal{G}$ es un grafo conexo, entonces $(\{x_i^*\}_{i\in\mathcal{V}}, \{\hat{x}_i^*\}_{i\in\mathcal{V}_p})$ definido en la proposición 2. es asintóticamente estable.

Sin embargo para garantizar la convergencia a la solución óptima es necesario adicionar restricciones en la función de costo y el parámetro α. Se asume que $n \in \mathcal{V}_a$, es un nodo activo. Adicionalmente se asume una función cuadrática de costos $\phi_i(x_i) = \frac{c_i}{2}x^2 + b_i x_i$, donde b_i, $x_i \in \mathbb{R}$ son parámetros escalares.

Para encontrar el valor de α que garantice la convergencia, se define las siguientes matrices: $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ sea un matriz diagonal tal que $[\boldsymbol{J}]_{ii} = c_i$ si $i \in \mathcal{V}_a$ y $[\boldsymbol{J}]_{ii} = 0$ si $i \in \mathcal{V}_p$. Sea $\boldsymbol{L}^{n_r} = ([\boldsymbol{L}^T]_{-\{n\}})^T$, $\boldsymbol{L}^n = [\boldsymbol{L}^{n_r}]_{-\{n\}}$, e $\boldsymbol{I}^n = [\boldsymbol{L}^{n_r}]_n$. Obsérvese que $\boldsymbol{L}^{n_r}$ se obtiene removiendo la n-ésima fila de la matriz Laplaciana $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}^n$ es una matriz cuadrada de las primeras $(n-1)$ columnas y filas de $\boldsymbol{L}$, e $\boldsymbol{I}^n$ es la n-ésima columna de $\boldsymbol{L}^{n_r}$. Además sea $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{I}_{n-1}]_{-\{i\epsilon\mathcal{V}_a\}}$, E se obtiene tomando una matriz identidad de $(n-1)\times(n-1)$ eliminando las columnas donde los índices correspondan a nodos pasivos. Usando estas matrices se define.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Donde $\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{L}^n \boldsymbol{J}_{-c_n} \boldsymbol{I}^n \mathbb{1}_{n-1}^T$, $\boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{L}^n \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}_{21} = -\boldsymbol{E}^T + \boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{L}^n \boldsymbol{J}_{-c_n} \boldsymbol{I}^n \mathbb{1}_{n-1}^T)$, y $\boldsymbol{A}_{22} = \boldsymbol{E}^T \boldsymbol{L}^n \boldsymbol{E}$. La matriz $\boldsymbol{A}$ está relacionada con la convergencia del algoritmo. En tiempo discreto con las condiciones iniciales que satisfacen $\sum_{i=1}^{n} x_i(0) = r$. Sea $\bar{\alpha} = \frac{1}{\lambda_{max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})}$, donde $\lambda_{max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})$ es el máximo valor propio de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, y $\boldsymbol{P}$ es la solución de la ecuación de Lyapunov $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}_{(n-1+|\mathcal{V}_a|)}$. Se asume que $\mathcal{G}$ es un grafo conexo. Si $\alpha \,\epsilon\, (0, \bar{\alpha})$, entonces $\{x_i(k)\}_{i\epsilon\mathcal{V}_a}$ que tiende a la solución óptima del problema cuando $k \to +\infty$.

4. Análisis de resultados

Este acápite se divide en dos secciones; la primera parte presenta los resultados de la implementación de un algoritmo de consenso, con su correspondiente análisis. La segunda parte explica la técnica de conteo de nodos distribuidos dentro de un grafo, con su discusión pertinente.

4.1 Consenso en grafos dirigidos y no dirigidos

Las simulaciones se realizaron utilizando como software de programación la plataforma MATLAB. Dos casos diferentes se implementaron, grafos dirigidos y no dirigidos, el modelo desarrollado genera un grafo con topología aleatoria de n nodos y un número de arcos definido según la expresión:

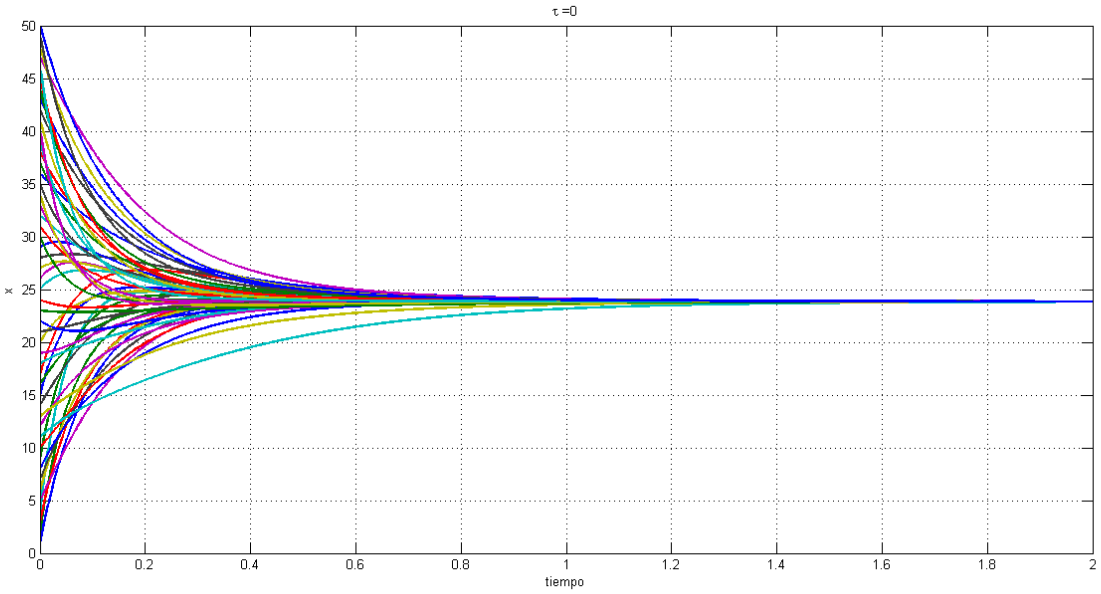
$$\mathcal{E} = \frac{n(n-1)}{\frac{p}{2}} \tag{4.1}$$

Donde p representa la probabilidad de conexión entre nodos. Los siguientes resultados se obtuvieron en simulaciones con una probabilidad de conexión de 20%.

4.1.1 Consenso en grafos dirigidos

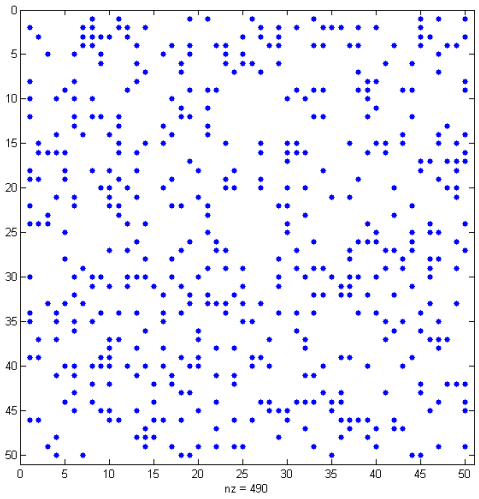
Se modelaron grafos de 50 y 100 nodos

Figura



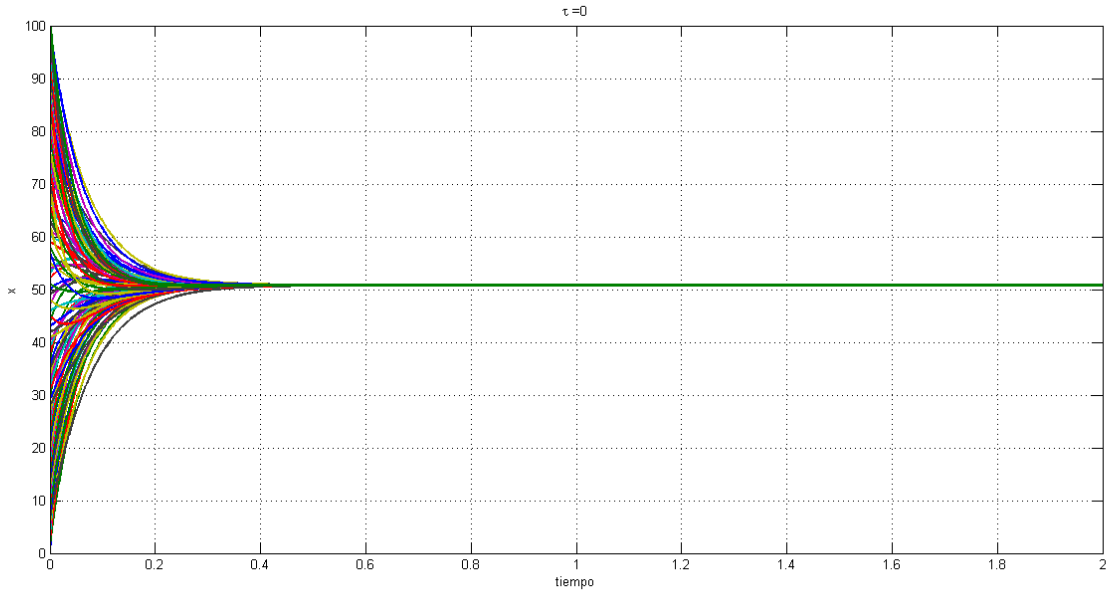
Fuente: Esta investigación

Figura



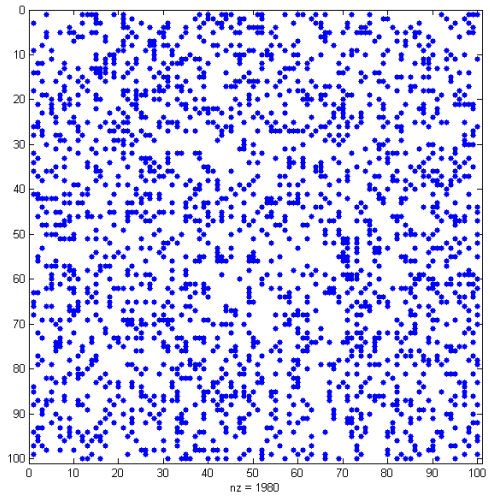
Fuente: Esta investigación

Figura



Fuente: Esta investigación

Figura

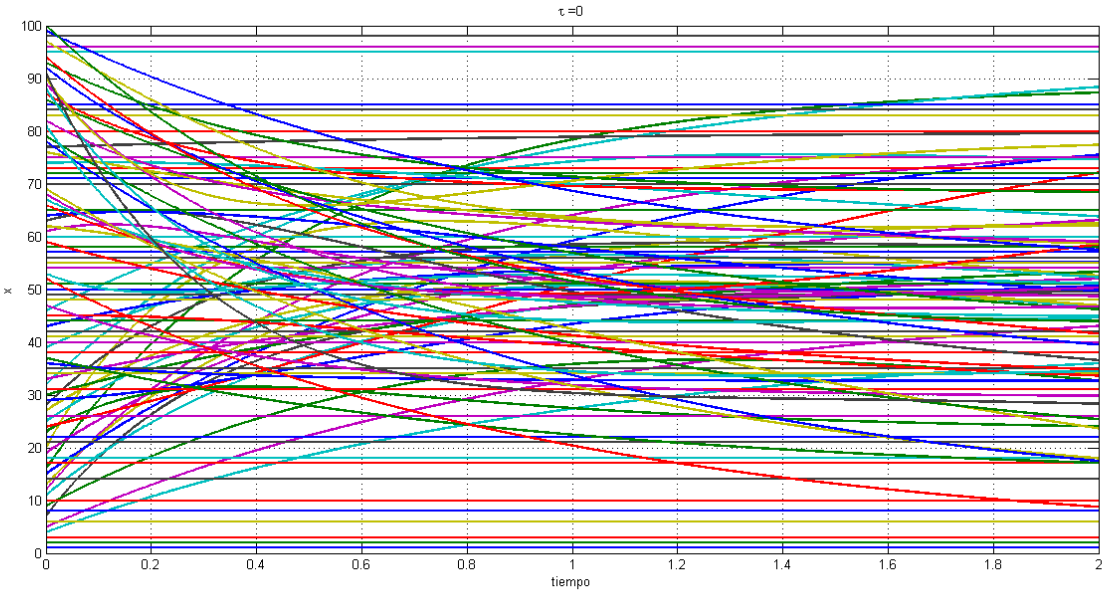


Fuente: Esta investigación

Las figuras **Figura 4-1:** Convergencia de una red de 50 nodos, grafo dirigido y **Figura 4-3:** Convergencia de una red de 100 nodos, grafo dirigido representan el consenso de 50 nodos de acuerdo a la ley de control propuesta en la ecuación $ui = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j - x_i\right), \quad \forall i = 1, \dots, n,$ (3.5), las figuras **Figura 4-2:** Arcos en una red de 50 nodos, grafo dirigido y **Figura 4-4:** Arcos en una red

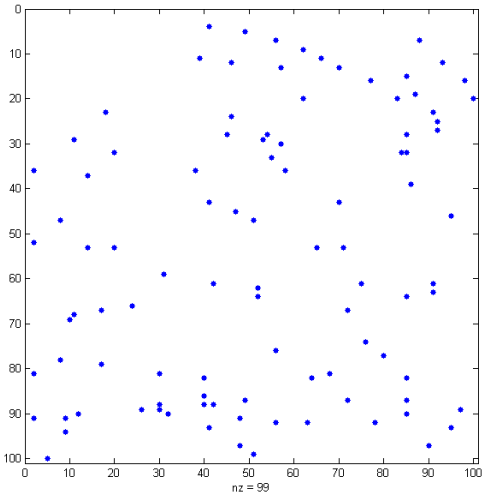
de 100 nodos, grafo dirigido representan los arcos (enlaces entre nodos) usando puntos azules. En un grafo dirigido se puede observar que los arcos están distribuidos aleatoriamente, esta característica indica que la matriz de adyacencia del grafo no es simétrica, puesto que el enlace $(i, j) \in \mathcal{E}$ mientras que enlace $(\mathrm{j}, \mathrm{i}) \notin \mathcal{E}$; el flujo de datos tiene una sola dirección.

Figura 4-5: Red de 100 nodos, grafos dirigido, no hay consenso



Fuente: Esta investigación

Figura 4-6: Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido, no hay consenso



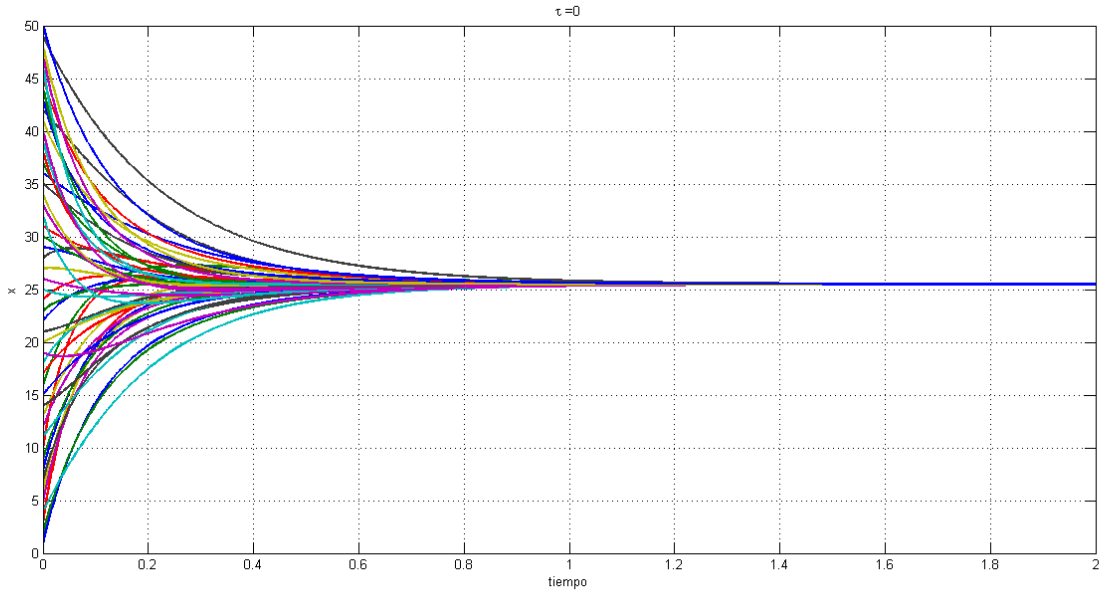
Fuente: Esta investigación

Las figuras, **Figura 4-4:** Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido y **Figura 4-6:** Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido, no hay consenso representan un caso donde los nodos del grafo no logran el consenso, esto se debe principalmente al uso de un valor p de 0.01, por lo tanto una probabilidad muy baja de enlace entre los agentes. Teóricamente, el grafo no posee un árbol de expansión dirigido, por lo tanto el sistema es inestable y no converge a un estado de consenso; desde otra perspectiva entre los nodos hay subconjuntos aislados, subgrafos que pueden llegar al consenso pero en un número determinado de agentes.

4.1.2 Consenso en grafos no dirigidos

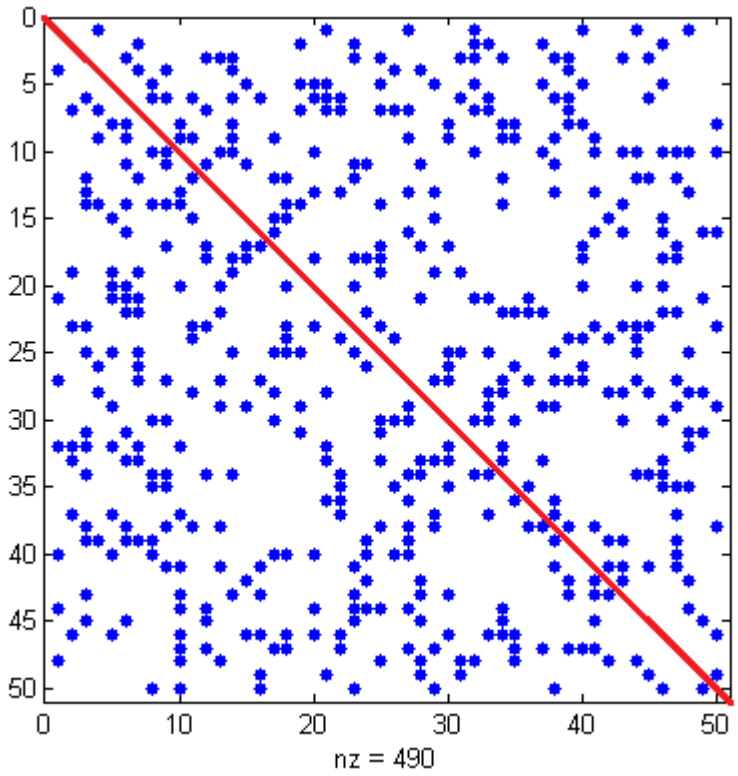
Se modelaron grafos de 50 y 100 nodos

Figura 4-7: Convergencia de una red de 50 nodos, grafo no dirigido



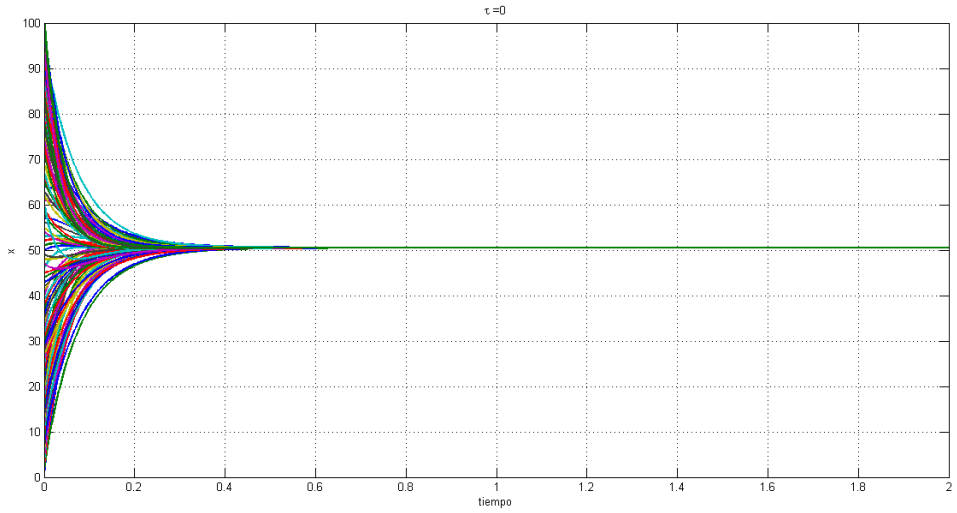
Fuente: Esta investigación

Figura 4-8: Arcos en una red de 50 nodos, grafo no dirigido



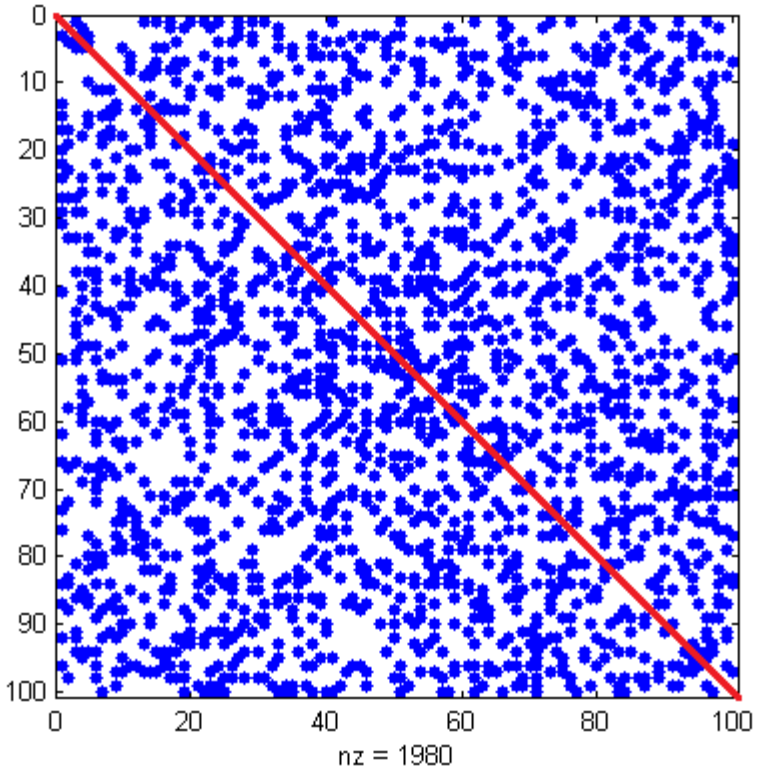
Fuente: Esta investigación

Figura 4-9: Convergencia de una red de 100 nodos, grafo no dirigido



Fuente: Esta investigación

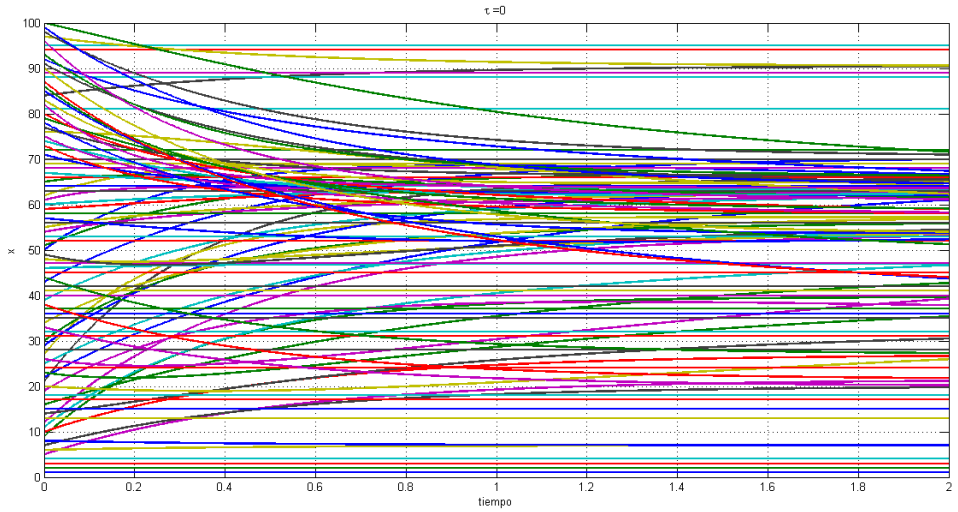
Figura 4-10: Arcos en una red de 100 nodos, grafo no dirigido



Fuente: Esta investigación

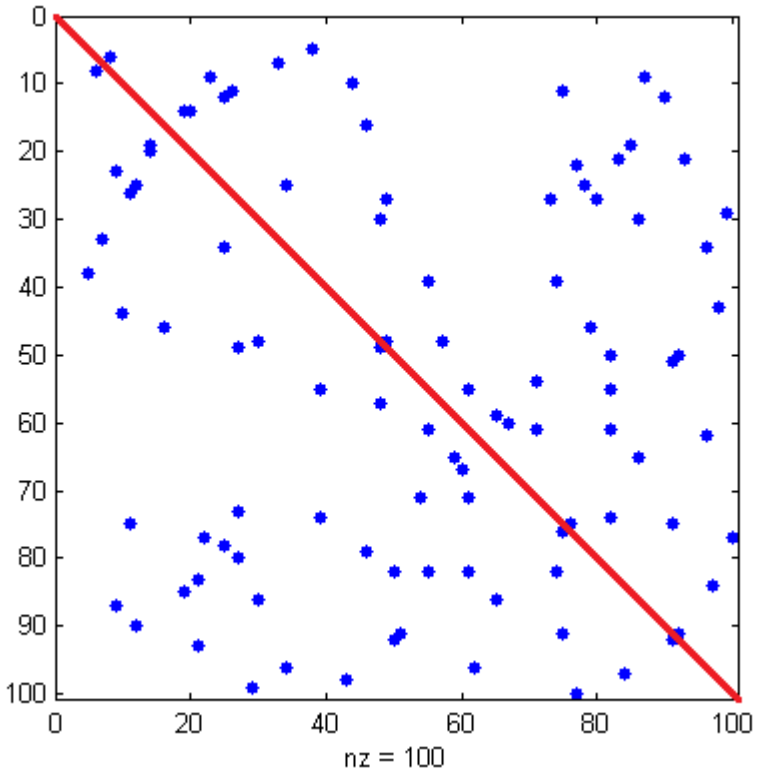
Las figuras **Figura 4-1:** Convergencia de una red de 50 nodos, grafo dirigido y **Figura 4-3:** Convergencia de una red de 100 nodos, grafo dirigido representan el consenso de 50 y 100 nodos respectivamente, de acuerdo a la ley de control propuesta en la ecuación $ui=$ $\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}\left(x_j - x_i\right), \qquad \forall i = 1, \dots, n,$ (3.5), las figuras **Figura 4-2:** Arcos en una red de 50 nodos, grafo dirigido y **Figura 4-4:** Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido representan los arcos (enlaces entre nodos) usando puntos azules. En un grafo no dirigido se puede observar que los arcos están distribuidos aleatoriamente, pero simétricamente respecto al eje de color rojo, esta característica indica que la matriz de adyacencia del grafo es simétrica, puesto que los enlaces (i, j) y $(\mathrm{j}, \mathrm{i}) \in \mathcal{E}$; el flujo de datos es bidireccional.

Figura 4-11: Red de 100 nodos, grafo no dirigido, no hay consenso



Fuente: Esta investigación

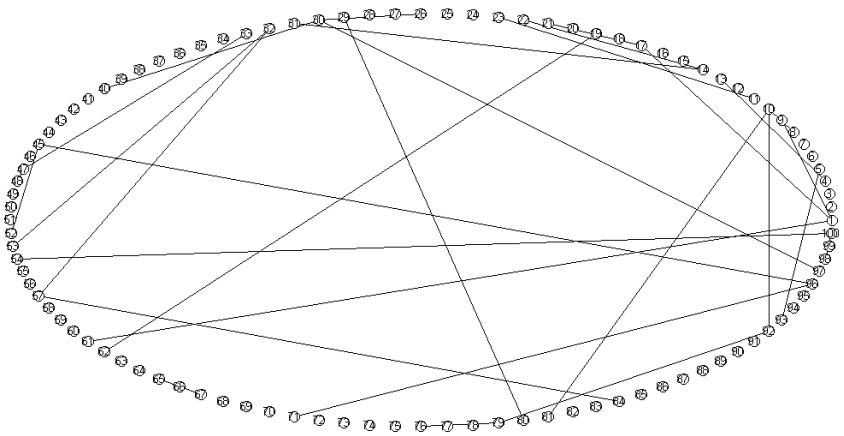
Figura 4-12: Arcos en una red de 100 nodos, grafo no dirigido, no hay consenso



Fuente: Esta investigación

Las figuras, **Figura 4-4:** Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido y **Figura 4-6:** Arcos en una red de 100 nodos, grafo dirigido, no hay consenso representan un caso donde los nodos del grafo no logran el consenso, esto se debe principalmente al uso de un valor p de 0.01, por lo tanto una probabilidad muy baja de enlace entre los agentes, teóricamente, el grafo no es conexo, por lo tanto el sistema es inestable y no converge.

Figura 4-13: Grafo de una red de 100 nodos, no hay consenso



Fuente: Esta investigación

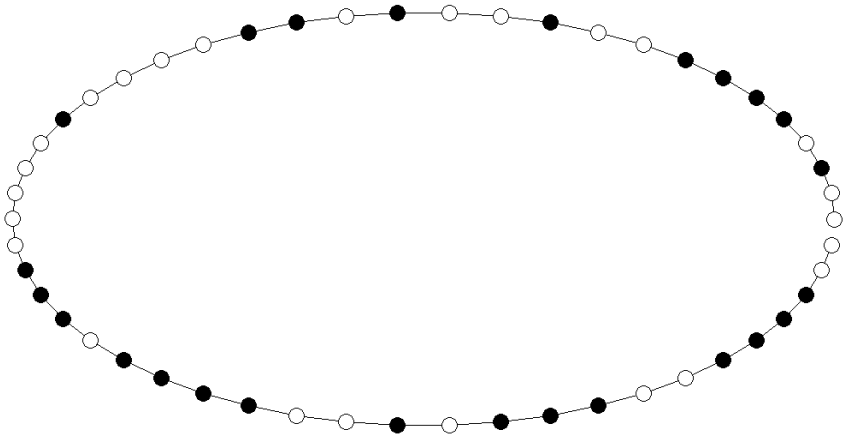
La figura **Fuente**: Esta investigación

Figura 4-10 es una representación del grafo de 100 nodos donde no hay convergencia, es decir es un grafo no conexo. Se observa que hay nodos aislados o subconjuntos de nodos, que constituyen un subgrafo, por tanto no es posible llegar al consenso entre todos los agentes de la red.

4.2 Conteo de nodos distribuidos

En la sección anterior se observó la convergencia de un conjunto de nodos pertenecientes a un grafo, sin embargo el valor al cual llegan al consenso no tiene un significado particular. Nuevamente usando la plataforma MATLAB se simuló el algoritmo descrito en las ecuaciones separando los nodos en dos grupos; activos a los cuales se les asigno el color “blanco” y pasivos, representados con el color “negro”, los casos presentados cambian en el número de nodos activos y pasivos.

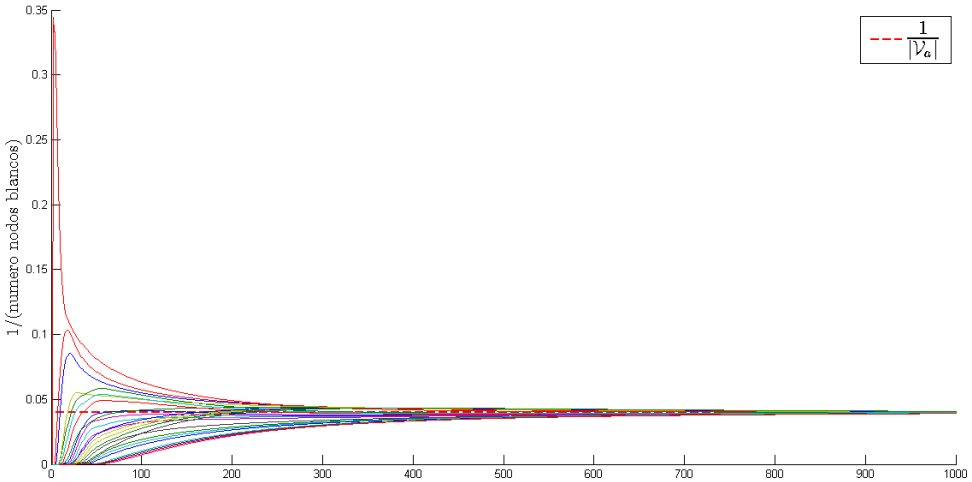
Figura 4-14: Grafo de una red de 50 nodos, 25 nodos activos



Fuente: Esta investigación

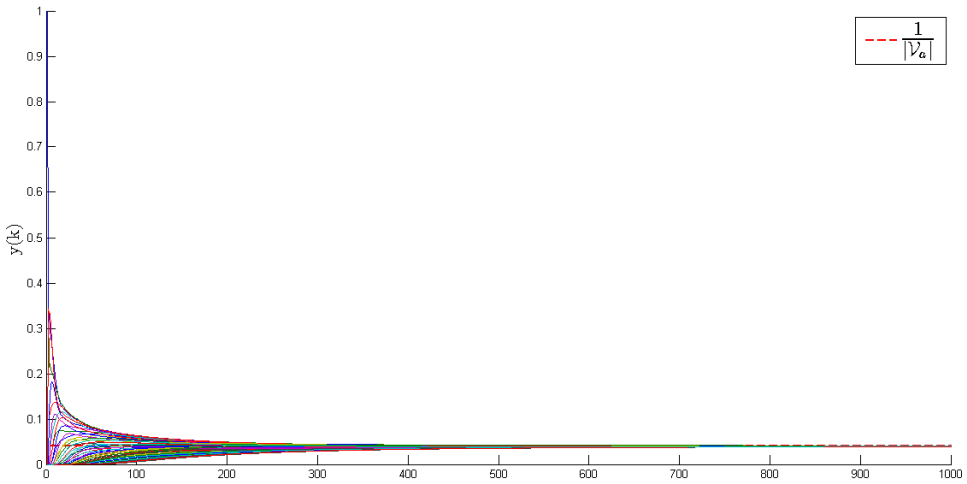
En este resultado se ha divido en partes iguales los nodos activos y pasivos, 50 nodos blancos, 50 nodos negros. A continuación se presenta las gráficas de convergencia

Figura 4-15: Evolución de las variables auxiliares del algoritmo



Fuente: Esta investigación

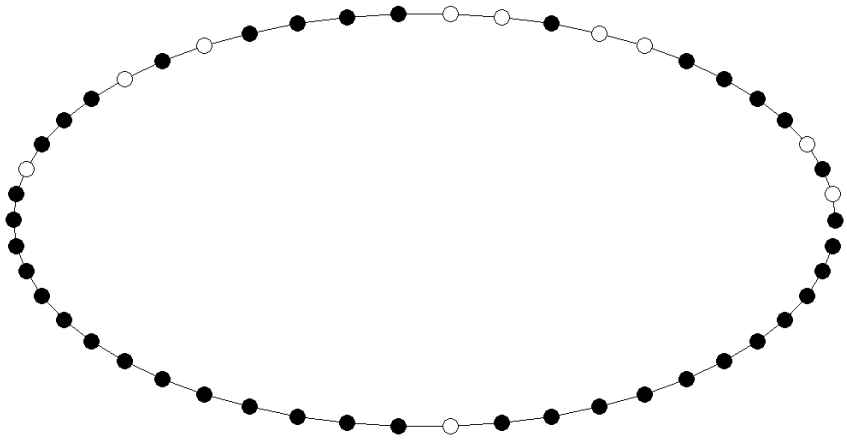
Figura 4-16: Convergencia de $y(k)$



Fuente: Esta investigación

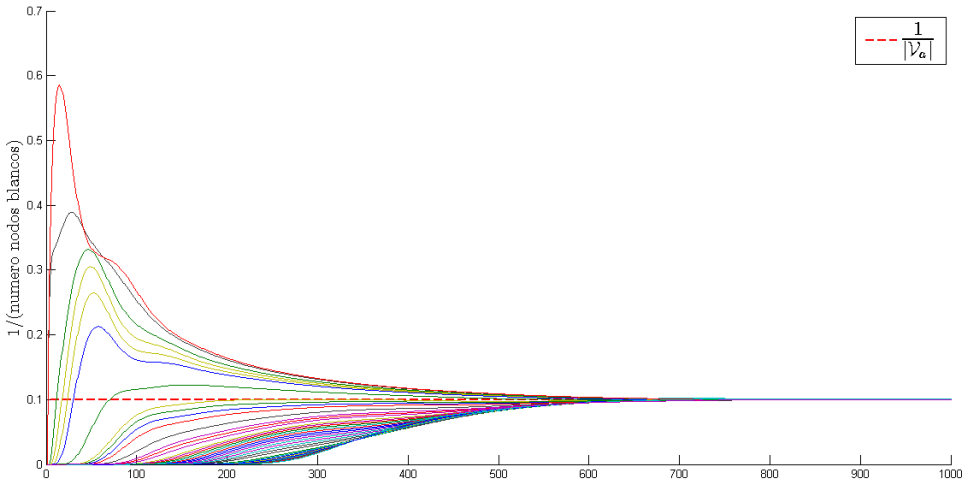
En las figuras **Figura 4-15** y **Figura 4-16** la asíntota de convergencia es el valor $\frac{1}{|\mathcal{V}_a|} = \frac{1}{25}$ que corresponde al número de nodos blancos o activos.

Figura 4-17: Grafo de una red de 50 nodos, 10 nodos activos



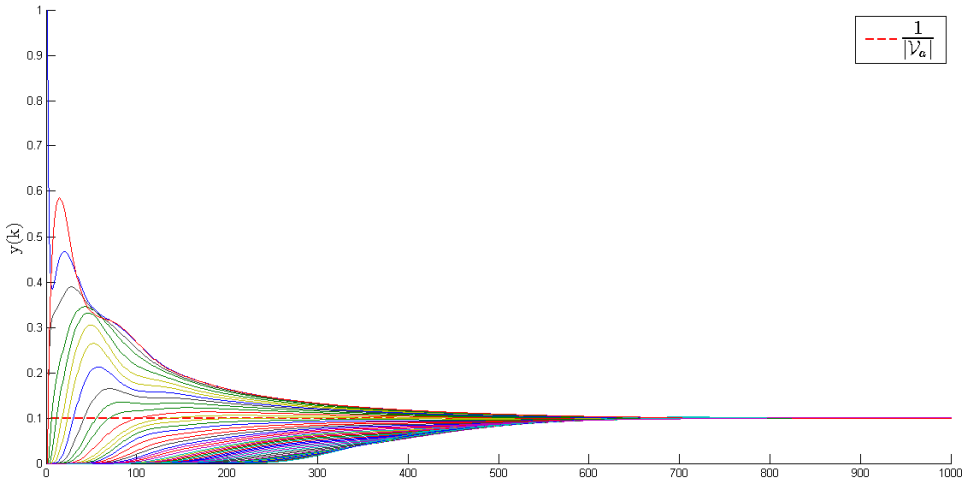
Fuente: Esta investigación

Figura 4-18: Evolución de las variables auxiliares del algoritmo



Fuente: Esta investigación

Figura 4-19: Convergencia de $y(k)$

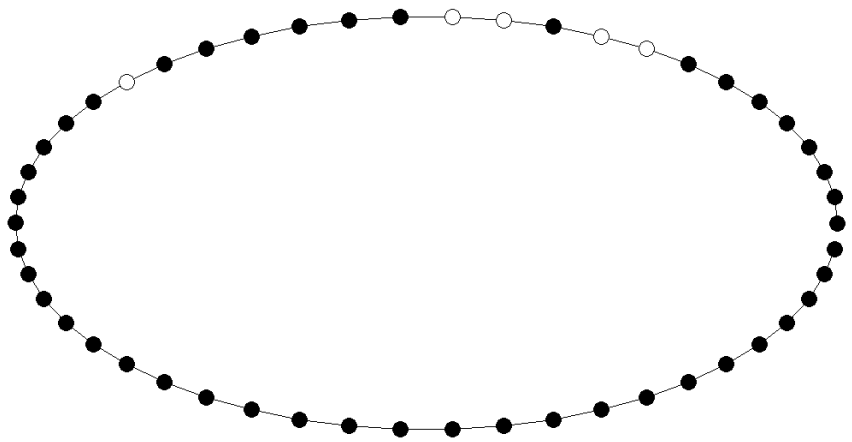


Fuente: Esta investigación

En las figuras **Figura 4-15** y **Figura 4-16** la asíntota de convergencia es el valor $\frac{1}{|\mathcal{V}_a|} = \frac{1}{10}$ que corresponde al número de nodos blancos o activos. A diferencia de las gráficas de algoritmos de consenso observados en la sección **4.1** el valor hacia el cual convergen los agentes es inverso del número de nodos activos en la red, dato que está disponible para todos los agentes del grafo.

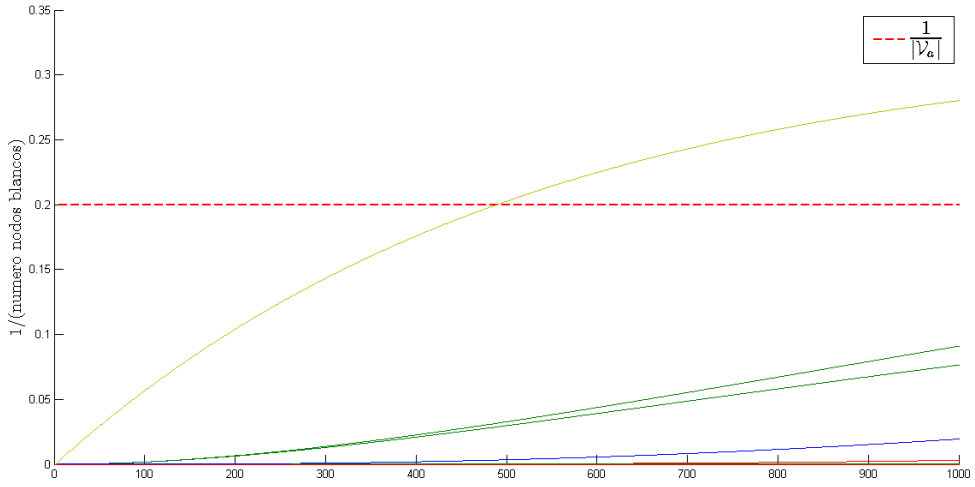
A continuación se presenta los resultados en los cuales el algoritmo de consenso en la aplicación de conteo de nodos no converge.

Figura 4-20: Grafo de una red de 50 nodos, 5 nodos activos



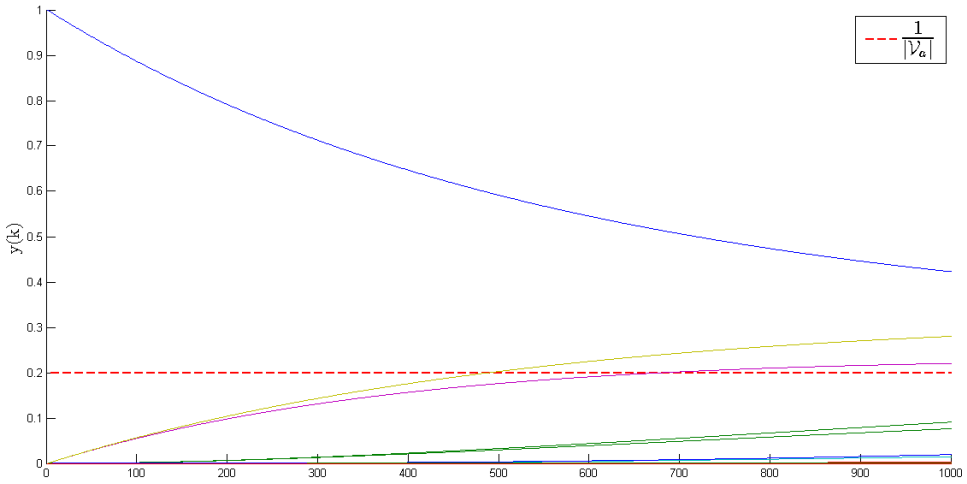
Fuente: Esta investigación

Figura 4-21: Evolución de las variables auxiliares del algoritmo



Fuente: Esta investigación

Figura 4-22: Convergencia de $y(k)$



Fuente: Esta investigación

Las figuras **Figura 4-20**, **Figura 4-21** y **Figura 4-22** son un ejemplo en el cual no hay consenso, la principal razón es la modificación del parámetro α descrito en la sección **3.2.3**, con lo cual se infringe la restricción de funcionamiento y el algoritmo no converge.

5. Conclusiones y Trabajos futuros

5.1 Conclusiones

De acuerdo con los objetivos planteados inicialmente en este trabajo se presentan las siguientes conclusiones.

- Las microrredes evolucionan hacia las redes inteligentes con un sistema de comunicaciones que permite la interacción entre agentes, en especial para la integración de generación distribuida, obligando en consecuencia a desarrollar sistemas de integración flexible y de control descentralizado.

- Los algoritmos de consenso presentan robustez y sencillez de implementación, plantean un amplio abanico de posibilidades de aplicaciones, puesto que hay diferentes técnicas de control fundamentadas en estos algoritmos.

- Los grafos son abstracciones que facilitan la comprensión del intercambio de datos entre agentes de una red, las herramientas matemáticas del algebra lineal permite modelar un sistema e implementar un algoritmo de consenso además de facilitar la identificación de sus características de funcionamiento.

- Se comprobó mediante simulaciones que no hay consenso en grafos dirigidos y no dirigidos cuando se reduce el número de conexiones, en grafos dirigidos deja de existir un árbol de expansión dirigido, mientras que en grafos no dirigidos el grafo deja de ser conexo, por tanto no hay consenso.

- La implementación de algoritmos de consenso en grafos dirigidos y no dirigidos, es necesario puesto que hay agentes que solo tienen comunicación unidireccionalmente como el caso de los sensores que envían información, esto

permite observar el comportamiento y restricciones en cuanto a la convergencia de los algoritmos desarrollados.

- En el algoritmo de consenso implementado se observa que todos los agentes de la red convergen a un mismo valor, un dato que está disponible en todo el grafo, en la aplicación se manipula este valor, para que corresponda con el inverso del número de nodos activos, información disponible en toda la red.

- La aplicación de conteo de nodos distribuidos permite identificar las características de una microrred, los nodos activos y pasivos permiten por ejemplo contar con un diagnóstico de funcionamiento de los agentes involucrados de un grafo.

- Como aporte es necesario resaltar la aplicación práctica de trabajos de control en redes inteligentes donde la tendencia actual involucra agentes activos, capaces de tomar decisiones y alcanzar acuerdos entre ellos sin necesidad de supervisión.

5.2 Trabajos futuros

Sobre los temas de estudio involucrados en este trabajo actualmente existen campos de interés para profundizar en futuros proyectos, como son:

- Los retardos y su impacto en la estabilidad de convergencia de los algoritmos de consenso.

- Detección de fallas dentro de un grafo, desconexión de agentes.

- Parámetros que aceleran la velocidad de convergencia del sistema.

A. Anexo: Demostraciones

Proposición 1: Es necesario demostrar que$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(0)$, para todo $t \geq 0$. Esto es equivalente a probar que la cantidad $\dot{\Sigma} = 0$, donde $\Sigma = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$. Obsérvese que $\dot{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) = \mathbb{1}_n^T \dot{\boldsymbol{x}}(t)$, donde $[\dot{\boldsymbol{x}}(t)]_i = x_i(t)$, para todo $i = 1, \dots, n$. Además según la ecuación, $\mathbb{1}_n^T \dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\mathbb{1}_n^T \boldsymbol{L} y(t)$, donde $\boldsymbol{L}$ es la matriz laplaciana asociada al grafo $\mathcal{G}$ e $[y(t)]_i = y_i(t)$, para todo $i = 1, \dots, n$. Es necesario recordar que $\boldsymbol{L}\mathbb{1}_n = 0_n$. Además, dado que $\mathcal{G}$ es un grafo no dirigido, la matriz laplaciana es simétrica. Entonces, $\mathbb{1}_n^T \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\mathbb{1}_n - \mathbb{1}_n^T \boldsymbol{L} = 0_{\boldsymbol{n}}$ Por lo tanto, $\dot{\Sigma} = 0$.

Proposición 2: Sea y_i^* el valor de y_i evaluado en el punto de equilibrio $\left(\{x_i^*\}_{i \epsilon \mathcal{V}}, \{\hat{x}_i^*\}_{i \epsilon \mathcal{V}_p}\right)$. Además se define $\lambda \coloneqq y_i^*$, para algún $j \epsilon \mathcal{V}_a$. Mientras $\mathcal{G}$ sea conexo, se asume que $y_i^* = \lambda$, para todo $i \epsilon \mathcal{V}$ (esta conclusión se obtiene del hecho que $\boldsymbol{L}\mathbb{1}_n = 0_n$). Obsérvese que $y_i^* = \phi_i'(x_i^*)$ si $i \epsilon \mathcal{V}_a$, e $y_i^* = \hat{x}_i^*$ si $i \epsilon \mathcal{V}_p$. Así, $\phi_i'(x_i^*) = \lambda$, para todo $i \epsilon \mathcal{V}_a$, y $\hat{x}_i = \lambda$, para todo $i \epsilon \mathcal{V}_p$. Por lo tanto, se concluye que $x_i^* = 0$, para todo $i \epsilon \mathcal{V}_p$.

Bibliografía

[1] P. Asmus, “Why Microgrids Are Moving into the Mainstream,” *IEEE Electrif. Mag.*, pp. 12–19, 2014.

[2] J. Sachau, G. Deconinck, and H. Margossian, “Distribution network protection considering grid code requirements for distributed generation,” *IET Gener. Transm. Distrib.*, vol. 9, no. 12, pp. 1377–1381, 2015.

[3] F. Guo, C. Wen, J. Mao, and Y. D. Song, “Distributed Economic Dispatch for Smart Grids with Random Wind Power,” *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 7, no. 3, pp. 1572–1583, 2016.

[4] H. Xin, Z. Qu, J. Seuss, and A. Maknouninejad, “A self-organizing strategy for power flow control of photovoltaic generators in a distribution network,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 26, no. 3, pp. 1462–1473, 2011.

[5] Deloitte, “Gestión de fuentes de energía variable y distribuida: Una nueva era para la red,” *Cuad. Energía*, vol. 51, pp. 26–44, 2016.

[6] E. Velasco-Ramírez, C. Ángeles-Camacho, and M. García-Martínez, “Redes de transmisión inteligente. Beneficios y riesgos,” *Ing. Investig. y Tecnol.*, vol. 14, no. 1, pp. 81–88, 2015.

[7] D. K. Molzahn *et al.*, “A Survey of Distributed Optimization and Control Algorithms for Electric Power Systems,” *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 8, no. 6, pp. 1–21, 2017.

[8] J. Qin, Q. Ma, Y. Shi, and L. Wang, “Recent advances in consensus of multi-agent systems: A brief survey,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 64, no. 6, pp. 4972–4983, 2017.

[9] Q. Sun, R. Han, H. Zhang, J. Zhou, and J. M. Guerrero, “A Multiagent-Based Consensus Algorithm for Distributed Coordinated Control of Distributed Generators in the Energy Internet,” *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 6, no. 6, pp. 3006–3019, 2015.

[10] T. Qiu, K. Zheng, H. Song, M. Han, and B. Kantarci, “A Local-Optimization

Emergency Scheduling Scheme with Self-Recovery for a Smart Grid," *IEEE Trans. Ind. Informatics*, vol. 13, no. 6, pp. 3195–3205, 2017.

[11] F. Garin, "A survey on distributed estimation and control applications using linear consensus algorithms," *Networked Control Syst.*, pp. 75–107, 2011.

[12] P. Vrba *et al.*, "A review of agent and service-oriented concepts applied to intelligent energy systems," *IEEE Trans. Ind. Informatics*, vol. 10, no. 3, pp. 1890–1903, 2014.

[13] P. A. Narváez, J. M. López-Lezama, and E. Velilla, "Ubicación de generación distribuida para minimización de pérdidas usando un algoritmo genético híbrido location of distributed generation for power losses reduction using a hybrid genetic algorithm," *Inf. Tecnol.*, vol. 26, no. 3, pp. 123–131, 2015.

[14] L. Willer Oliveira and T. Cristina Jose Maria, "Planning of Renewable Generation in Distribution Systems Considering Daily Operating Periods," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 15, no. 5, 2017.

[15] K. Venkatraman, B. Dastagiri Reddy, M. P. Selvan, S. Moorthi, N. Kumaresan, and N. A. Gounden, "Online condition monitoring and power management system for standalone micro-grid using FPGAs," *IET Gener. Transm. Distrib.*, vol. 10, no. 15, pp. 3875–3884, 2016.

[16] C. Chakraborty, H. Ho-Ching Iu, and D. Dah-Chuan Lu, "Power converters, control, and energy management for distributed generation," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 62, no. 7, pp. 4466–4470, 2015.

[17] D. E. Olivares *et al.*, "Trends in microgrid control," *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 5, no. 4, pp. 1905–1919, 2014.

[18] J. Schiffer, T. Seel, J. Raisch, and T. Sezi, "Voltage Stability and Reactive Power Sharing in Inverter-Based Microgrids with Consensus-Based Distributed Voltage Control," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 24, no. 1, pp. 96–109, 2016.

[19] Y. Xu and Z. Li, "Distributed Optimal Resource Management Based on the Consensus Algorithm in a Microgrid," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 62, no. 4, pp. 2584–2592, 2015.

[20] P. P. Vergara, H. R. Shaker, B. N. Jorgensen, and L. C. P. da Silva, "Generalization of the λ-method for decentralized economic dispatch considering reactive resources," in *2017 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT-Europe)*, 2017, pp. 1–6.

[21] T. Dragicevic, X. Lu, J. C. Vasquez, and J. M. Guerrero, “DC Microgrids - Part I: A Review of Control Strategies and Stabilization Techniques,” *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 31, no. 7, pp. 4876–4891, 2016.

[22] S. Kar, G. Hug, J. Mohammadi, S. Member, and J. M. F. Moura, “Distributed State Estimation and Energy Management in Smart Grids : A Consensus Innovations Approach,” *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, vol. 8, no. 6, pp. 1022–1038, 2014.

[23] O. Vukovic and G. Dan, “Security of fully distributed power system state estimation: Detection and mitigation of data integrity attacks,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 32, no. 7, pp. 1500–1508, 2014.

[24] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton University Press, 2010.

[25] D. A. Yela, G. Obando, and A. Pantoja, “Analysis of consensus protocols under time delays in directed graphs,” in *2017 IEEE 3rd Colombian Conference on Automatic Control (CCAC)*, 2017, pp. 1–6.

[26] B. R. Olfati-saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems,” *Proc. IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.

[27] J. Tsitsiklis, D. Bertsekas, and M. Athans, “Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31, no. September, 1986.

[28] G. Obando, N. Quijano, and N. Rakoto-Ravalontsalama, “A centrefree approach for resource allocation with lower bounds,” *Int. J. Control*, pp. 1–16, 2016.

[29] G. Obando, N. Quijano, and A. Gauthier, “Distributed Resource Allocation Among a Subset of Nodes of a Graph * *This work is supported in part by project SGR Cundinamarca. G. Obando is supported in part by Colciencias-Colfuturo Grant 528.,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 8417–8422, 2017.

[30] M. Patriksson, “A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 185, no. 1, pp. 1–46, 2008.

[31] K. Strunz, E. Abbasi, and D. N. Huu, “DC microgrid for wind and solar power integration,” *IEEE J. Emerg. Sel. Top. Power Electron.*, vol. 2, no. 1, pp. 115–126, 2014.