UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Diseño de instrumento para la enseñanza de la ley probabilística de los grandes números a través de Geogebra como herramienta de modelización en la educación media de la institución educativa Antonio Donado Camacho en el municipio de Rionegro, Antioquia.

Jesús Evenson Pérez Arenas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Medellín, Colombia

2014

Diseño de instrumento para la enseñanza de la ley probabilística de los grandes números a través de Geogebra como herramienta de modelización en la educación media de la institución educativa Antonio Donado Camacho en el municipio de Rionegro, Antioquia.

Jesús Evenson Pérez Arenas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Juan Carlos Salazar Uribe, Ph.D.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Medellín, Colombia

2014

DEDICATORIA

En la memoria de mi padre quien sembró en mí la perseverancia, a mi madre por su apoyo y consejos, a mi esposa y mi hijo por su apoyo emocional.

Agradecimientos

A Dios que siempre me ha guiado por el sendero correcto, permitiendo aprender las grandes lecciones de la vida.

A mi asesor Ph.D. Juan Carlos Salazar Uribe, por su oportuno acompañamiento en la elaboración de esta tesis.

A mi evaluador M.Sc. Rene Iral Palomino por su orientación y motivación en las correcciones.

A mis estudiantes del grado 10° y 11° de la institución educativa Antonio Donado Camacho, quienes por su dedicación y compromiso permitieron el desarrollo de todas las actividades.

A mis estudiantes María Camila Álzate, Juan Diego Murillo, Leidy Laura Arroyave por su colaboración incondicional en la demostración del proyecto en las ferias institucional y municipal. Al igual su participación como monitores en el cursillo VII congreso universidad de Medellín.

A mi esposa y madre de mi hijo (José Samuel), por su ayuda en los momentos de tensión.

A todos muchas gracias.

RESUMEN

El diseño está orientado a interpretar la teoría de la probabilidad con un enfoque lúdico, como recurso educativo utilizando los juegos de azar, la simulación de las frecuencias de aparición asociadas a un suceso aleatorio, calculando las frecuencias relativas de cada suceso elemental de un experimento aleatorio, observando cómo estos valores tienden a estabilizarse en cierto número, conforme el número de ensayos va creciendo llamado probabilidad del suceso, tal como lo explica la ley de los grandes números.

Cada experimento aleatorio es representado con las imágenes relacionadas al problema, las tablas de frecuencias, las gráficas de frecuencias absolutas y relativas, el algoritmo de construcción y la probabilidad del suceso o evento, utilizando como herramienta de modelización applets de Geogebra[1]; software matemático didáctico de dominio público que nos permite simular un experimento aleatorio cuantas veces deseemos.

Palabras claves: probabilidad, Ley de los grandes números, Geogebra, experimentos aleatorios, probabilidad frecuentista, frecuencia relativa, Applets.

---

[1] Geogebra software de libre acceso www.Geogebra.org

ABSTRACT

The study design aims at interpreting the theory of probability within a ludic approach as an educational resource by using gambling and simulation of frequencies of occurrence associated to a random event. The relative frequencies of each elementary event of a random experiment were calculated. It was observed how those values tend to stabilize in number depending on the increase of a number of trials, which is called probability of the event, as explained by the law of large numbers.

Every random experiment is represented by the images related to the problem, frequency tables, graphs of absolute and relative frequencies, the algorithm construction, and the probability of occurrence of the event. The modeling tool Geogebra Applets[2]; which is a mathematical teaching public-domain software, was used since it allows us to simulate a random experiment as many times as we want.

Keywords: probability, law of large numbers, Geogebra, randomized experiments, frequentist probability, relative frequency, Applets.

[2] Geogebra software de libre acceso www.Geogebra.org

1 Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

1. Introducción

La ley de los grandes números establece: "conforme un experimento aleatorio se repite una y otra vez un gran número de veces, las frecuencias relativas de cada suceso elemental de un experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en cierto número, llamado probabilidad de un suceso" (Triola, 2009)

En este sentido, se diseña una propuesta de enseñanza aprendizaje con miras a que los estudiantes tengan la posibilidad de analizar una serie de problemas, los cuales presentan una mayor cantidad de datos que les permiten realizar previsiones, compararlas con gráficos de frecuencias relativas; y así, facilitar una aproximación menos abrupta al concepto clásico de probabilidad mediante la noción de la "ley de los grandes números", haciéndolo de una forma más activa y lúdica, en aras de aprendizajes significativos.

Batanero (2006) en su trabajo *Razonamiento Probabilístico en la Vida Cotidiana*, defiende la necesidad de reforzar la formación del razonamiento en la educación primaria y secundaria para proporcionar un instrumento que oriente la acción ante la incertidumbre.

Jiménez y Jiménez (2004), en su trabajo *Enseñar Probabilidad en Primaria y Secundaria ¿Para qué y por qué?*, lo dirige a profesores y expone reflexiones sobre la necesidad de abordar conceptos de incertidumbre y probabilidad proponiendo modelos didácticos lúdicos para orientar el proceso.

Es de resaltar, que en la actualidad la enseñanza de conceptos como incertidumbre y probabilidad continúa siendo de forma muy tradicional: pizarrón, profesor, alumno; con estos tres elementos se lleva a cabo la labor educativa en este campo. Se colman los tableros con teoría la cual se complementa con un discurso que no es suficiente para dejar del todo claro cada uno de los conceptos. El estudiante se limita a copiarlos y memorizarlos, aspecto que desemboca en el olvido de estos, tanto a corto como a mediano plazo. En consecuencia, las clases dentro del aula son poco dinámicas, tediosas y aburridas.

Con el propósito de transformar el trabajo en el aula, se diseña esta propuesta mediante la utilización del software interactivo de Geogebra y el recurso de los applets, en la cual el alumno tendrá la oportunidad de acercarse, de una manera más amable, a la teoría de la probabilidad, y podrá evidenciar que no es necesario un excesivo esfuerzo para su comprensión y que las dificultades presentadas se pueden superar. Para ello se incorporan los instructivos paso a paso, como instrumento de aprendizaje para demostrar un suceso aleatorio con la posibilidad de realizarlo un gran número de veces; este es un insumo importante para estudiantes y profesores interesados en profundizar el concepto de probabilidad frecuentista, desarrollando en los estudiantes la capacidad de seguir instrucciones y de deducir resultados.

Además, con los "applets ley de los grandes números diseñados en la página wiki" (Pérez, 2014) con enlaces a la página Geogebra, de acceso público, siguiendo las instrucciones respectivas y resolviendo las preguntas, los estudiantes y usuarios en general, pueden comprender el concepto ley de los grandes números para determinar la aproximación de la probabilidad del suceso aleatorio definida en la literatura estadística como probabilidad clásica o teórica.

Dado que la Probabilidad utiliza los juegos de azar para definir sus propiedades y leyes, es conveniente utilizar elementos como dados o monedas como recursos didácticos, además de un conjunto de materiales interactivos lúdicos sencillos en pro de despertar la curiosidad, imaginación y la intuición de nuestros estudiantes.

2. Tema

Diseño de instrumento para la enseñanza de la ley probabilística de los grandes números a través de Geogebra como herramienta de modelización en la educación media de la institución educativa Antonio Donado Camacho en el municipio de Rionegro, Antioquia.

3. Planteamiento del Problema

¿Cómo utilizar un software educativo para mejorar la comprensión del concepto de probabilidad frecuentista en los estudiantes de básica media?

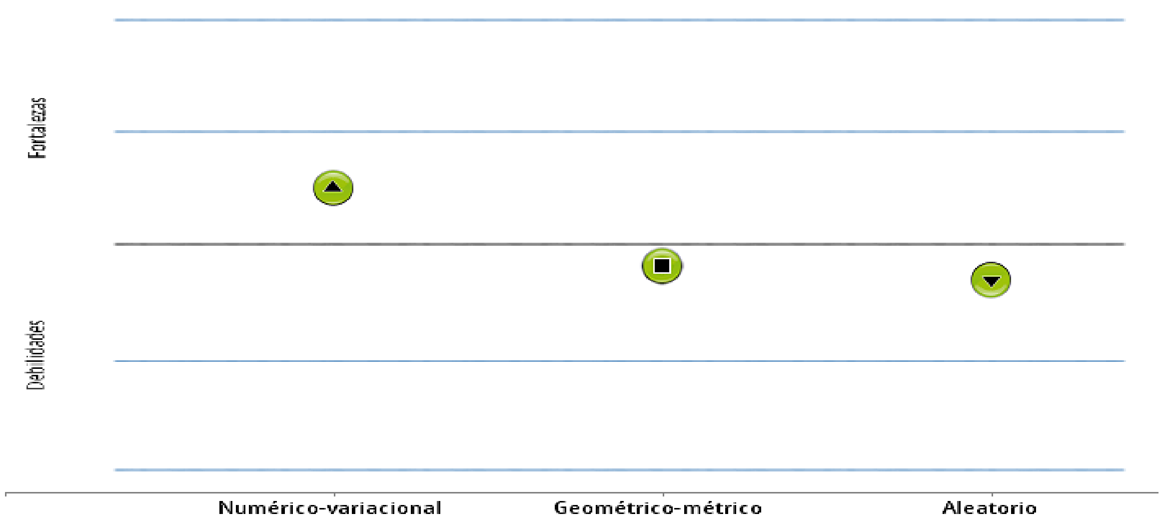
De acuerdo con el análisis realizado a los resultados de las pruebas saber 9° (ICFES, 2013), se concluye que la institución educativa Antonio Donado Camacho del municipio de Rionegro Antioquia, debe mejorar el nivel de desempeño en el área de matemáticas para lograr los niveles deseados: satisfactorio y avanzado. A continuación se presentan las tablas que permiten visualizar de forma resumida el desempeño de los estudiantes de noveno de la Institución educativa con respecto al municipio y al país en general.

Tabla 1. Comparación de porcentajes de estudiantes del grado noveno según niveles de desempeño en matemáticas en el establecimiento educativo, la entidad territorial certificada a la que pertenece y el país.

NIVEL	PAÍS	MUNICIPIO	INSTITUCIÓN
Insuficiente	21%	12%	11%
Mínimo	53%	52%	54%
Satisfactorio	21%	28%	34%
Avanzado	5%	8%	1%

Fuente:http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

Figura 1. Componentes evaluados en matemáticas, noveno grado



Fuente:http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

Con respecto a lo anterior, desde el ICFES (2013), se plantea que en comparación con los establecimientos educativos con puntajes promedio similares la institución educativa es:

- Fuerte en el componente Numérico-Variacional
- Similar en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación
- Débil en el componente Aleatorio

De acuerdo a la información obtenida en la tabla 1 y la figura 1, es necesario fortalecer el proceso matemático, principalmente el pensamiento aleatorio y sistemas de datos en la institución educativa, Teniendo en cuenta que es el componente más bajo y que en un alto porcentaje de estas pruebas es importante la interpretación de las tablas, gráficos y el manejo de la información.

4. Justificación del problema

"Una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana. La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logran dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a cómo actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística..., y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática" [3] . Posada (2005).

Con base en lo anterior, se pone de manifiesto la necesidad de introducir el pensamiento aleatorio y los conceptos de sistemas de datos en los planes de área de Matemáticas, reconociendo la limitada producción curricular en la educación media en el país, además la

[3] Tomado de: Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas pág. 117, MEN (1998).

necesidad de ir incorporando la competencia en el manejo de los programas interactivos. Es así como software, las hojas de cálculo Excel, programas de libre acceso como el R, Geogebra, nos proporcionan una fuente amplia de recursos que deben ser utilizados para planear nuestras clases de una manera más didáctica y lúdica con miras a el enfoque sistémico del pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

La institución Educativa Antonio Donado Camacho actualmente cuenta con los suficientes recursos tecnológicos, en promedio 2 estudiantes por computador, que deben ser utilizados para la enseñanza en todas las áreas del conocimiento, además con la adquisición de 160 Tablets para la institución, se justifica fortalecer el proceso de la enseñanza del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, utilizando los software interactivos.

Sin duda, la incorporación de este instrumento en el currículo de nuestra institución favorece enormemente a los estudiantes incentivando su habilidad en el manejo de los medios tecnológicos, y además poniéndolos en contacto con la solución de situaciones problema e incertidumbres que surgen en la vida cotidiana a través del pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

5. Antecedentes

Durante los últimos años, se ha planteado la importancia de implementar el uso de las nuevas tecnologías en el aula de clase como una forma de cambiar el paradigma y dinamizar el trabajo cotidiano en el proceso de enseñanza aprendizaje. Es así como para la enseñanza de las matemáticas, se han ejecutado algunas propuestas que dan gran importancia a componentes como la estadística, para lo cual se recurre a software como Geogebra que favorece y optimiza este tipo de trabajo, ya que el uso de la estadística es esencial en diferentes profesiones. Además, su estudio favorece el desarrollo del pensamiento crítico y el desempeño en la interpretación de gráficos que aparecen en determinados documentos que abordan los estudiantes, tanto en la educación superior como en el campo laboral. En este sentido se plantean algunas propuestas que fundamentan el estudio de la estadística y cómo cambia la metodología en pro de aprendizajes significativos.

Desde esta perspectiva, Godino y Batanero (2004), plantean las principales razones que fundamentan el estudio de la estadística en la escuela:

- La estadística es útil para la vida posterior a la escuela, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.

- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos frente a criterios subjetivos.

- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

De acuerdo con los planteamientos de Godino y Batanero (2004), cuando tenemos en cuenta el tipo de estadística que se quiere enseñar y la forma de llevar a cabo esta enseñanza debemos reflexionar sobre lo siguiente: los alumnos deben llegar a comprender los diferentes temas de aplicación de la estadística y su desarrollo establecido en la sociedad. Valorar el método estadístico, es decir, la clase de preguntas que desde la estadística se pueden responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencial y limitaciones.

Por su parte, Núñez (2007), en su *Taller de Estadística y Probabilidad* pretende proporcionar a los profesores algunas muestras de juegos probabilísticos para realizar en el salón de clases con alumnos de bachillerato entre 15 y 18 años, concluyendo que los juegos son más accesibles que la cuestión abstracta.

También, Yáñez y Jaimes (2013), en su artículo *"Efectos de la simulación en la comprensión de la ley de los grandes números",* presenta los resultados de un trabajo realizado con estudiantes entre 12 y 15 años utilizando el software Probability Explorer para realizar simulaciones relacionadas en la extracción de bolas de dos colores distintos contenidos en una urna; utilizando extracciones con sustitución concluyen: "La construcción conceptual de la Ley de los Grandes Números y el concepto de probabilidad asociado al enfoque frecuencial de la probabilidad requieren, a nuestro juicio, de tres significados básicos, como son: la variabilidad de los resultados obtenidos cuando se repite un experimento aleatorio; la estabilidad de las frecuencias relativas asociadas a los resultados de un evento, y la relación entre el valor límite de esas frecuencias con la distribución de los resultados posibles en el espacio muestral y el valor de probabilidad ”. Si el número de extracciones es grande entonces las frecuencias relativas se estabilizan, significado de “estabilidad” a lo que denominaron efecto a largo plazo reflejándose el valor de la probabilidad y si el número de extracciones es pequeño la frecuencia relativa siempre cambia, significado de “variabilidad” a lo que denominaron efecto a corto plazo el valor de la probabilidad no se refleja.

Además, Álvarez, Gastélum, & Insunza, (2009), en su artículo “Desarrollo de software para El aprendizaje y razonamiento probabilístico: El caso de SIMULAPROB” concluyen que en el caso de una simulación por computadora, mediante diversas instrucciones es posible construir un modelo que represente dicho fenómeno. Así, el estudiante puede explorar y comprender conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos, contribuyendo con ello a mejorar la experiencia estocástica y la intuición probabilística. A través de la simulación, conceptos fundamentales en probabilidad y estadística, como la ley de los grandes números, la aleatoriedad, la variabilidad muestral, distribuciones de probabilidad, pueden ser explorados por los estudiantes con relativa facilidad mediante el entrenamiento de seguimiento de instrucciones.

En esta misma línea, Biehler (1991), (como se cita en Álvarez, Gastélum, & Insunza, 2009), señala que la enseñanza de la probabilidad apoyada con tecnología computacional y con una metodología pedagógica apropiada puede presentar ventajas como:

- El número de repeticiones es fácilmente incrementado, haciendo que la incertidumbre y la variabilidad de los resultados se reduzcan; nuevas clases de patrones pueden ser detectados.

- Es posible una exploración extensiva cambiando los supuestos del modelo, haciendo experimentos adicionales, cambiando la forma de generar los datos, etc.

- Representaciones nuevas y más flexibles están disponibles para expresar modelos y procesos estocásticos y despliegue de datos con facilidades gráficas.

En el mismo sentido, Godino *et al* (2007), en su trabajo "Análisis didáctico de un proceso de estudio de la ley empírica de los grandes números" plantean que mediante la utilización de un software, el simulador "box model" del NCTM, disponible en: http://illuminations.nctm.org/imath/6-8/BoxModel/index.html, permite abordar el estudio de la ley de los grandes números de una manera no formal, mediante la elaboración de secuencias de frecuencias relativas calculadas a medida que se incrementa el número de experimentos, las posibilidades de cálculo y graficación permiten hacer la exploración en un tiempo breve, siendo imposible hacerla de otro modo. En un proceso inicial, el docente había introducido las nociones básicas sobre experiencias aleatorias (sucesos, probabilidad, regla de Laplace, y resuelto algunos problemas sencillos de cálculo de probabilidades), sin embargo, los estudiantes, mediante instrucciones presentadas por un formador que presentó brevemente el uso del dispositivo de simulación, les instó hacia la reflexión y a manifestar sus ideas. Se registró un seguimiento realizado durante 45 minutos, tiempo durante el cual, los estudiantes estaban interactuando con el programa, centrado principalmente en el análisis de la simulación del lanzamiento de una moneda. Para ello, se inicia simulando el lanzamiento de una moneda 50 veces esperando observar "la estabilidad de las frecuencias relativas", el simulador muestra en el diagrama de barras el valor de la "probabilidad teórica" de cada suceso, que el alumno A1 describe como "el valor central que tiene que tomar". Detienen el experimento después de 50 lanzamientos y observan que las frecuencias relativas son similares a las probabilidades (aproximadamente 0.5). Se vuelve a repetir el experimento de lanzar una moneda otras 50 veces. En esta ocasión no obtienen los resultados esperados. Después de 50 lanzamientos las frecuencias relativas son 0.36 y 0.64, bastante diferentes de las probabilidades. Los alumnos se muestran "convencidos" de que las frecuencias relativas se van a aproximar a la probabilidad.

A1: Mientras más repeticiones haya, más va a tender al valor central, se supone. Sin embargo, desconocen cómo es esta aproximación, en particular si hay rachas de experiencias en las que las frecuencias relativas son menores (o mayores) que la probabilidad, y cuánto duran tales rachas. Tampoco conocen qué tan rápida es la tendencia hacia "el valor central". En conclusión: El trabajo personal del estudiante, o en equipo, sobre tareas adecuadas, permite contextualizar los conocimientos matemáticos. Pero la progresión de los conocimientos y la optimización de la idoneidad del proceso de estudio requieren una secuencia de configuraciones didácticas de tipo dialógico y magistral que no siguen en principio un patrón regular, sino que su articulación depende de la aparición de conflictos que deben ser resueltos con cambios en las configuraciones didácticas.

6. Marco Referencial

6.1. Marco Teórico

Para el desarrollo de esta propuesta se abordan diversos teóricos que han profundizado en el tema de estudio como la "Ley de los grandes números, la teoría de la probabilidad, el teorema de la ley débil, la ley fuerte, la variable aleatoria, entre otros. A continuación se reseña, de forma breve, algunas de estas teorías que dan soporte a este marco teórico.

Según lo propuesto por Pérez M, (2009), el pilar imprescindible para la teoría de la probabilidad elaborada por el francés Henry Laplace, fue "La ley de los grandes números" demostrada por su creador. Jakob Bernoulli (1713), publicó esta ley en su libro *Arte de las conjeturas* (*Ars Conjectandi*), que en forma simplificada dice: "Si la probabilidad de un suceso es "**p**", entonces el cociente entre el número de veces "**x(n)** que ocurre el suceso y el número de veces "**n**" que se realiza el experimento tiende a "**p**" cuando "**n**" es muy grande".

En notación moderna será: $\lim_{n\to +\infty} \frac{x_n}{n} = p$

En este sentido, a partir de la ley de Bernoulli, Laplace obtuvo el concepto más básico de toda la teoría de la probabilidad, conocida como la probabilidad para calcular la probabilidad de un suceso aleatorio **S** formado por sucesos elementales y equiprobables (todas las mismas probabilidades) esto es:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s}) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso}{número\ de\ casos\ posibles}$$

O en términos más rigurosos:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s}) = \frac{Número\ de\ sucesos\ elementales\ que\ componen\ el\ suceso}{número\ total\ \ de\ \ sucesso\ elementales}$$

En consecuencia, Poisson (como se citó en Gutiérrez 1994), lo aplicó a conjuntos observados, y dio el título de “ley de los grandes números”, al principio que subyacía en estas regularidades. Al respecto, Recherches plantea: “las cosas de cualquier naturaleza, están sometidas a una ley universal que puede denominarse ley de los grandes números… de estos ejemplos de todas clases, resulta que la ley universal de los grandes números es ya para nosotros un hecho general e incontestable, resultante de experiencias que no se desmienten jamás”.

En este sentido, Chebyshev (como se citó en Klein 1997), demostró dentro del contexto de la esperanza matemática de valores de suma secuencial, qué condiciones garantizaban la ley de los grandes números, además formuló el teorema de la ley débil de los grandes números en el que demuestra que la variable aleatoria media aritmética $\bar{x}_n$ de una sucesión de variables aleatorias $\{\varepsilon_n\}$, incorrelacionadas dos a dos y con varianzas finitas σ_n^2 que tienden a cero cuando n tiende a infinito, convergen en probabilidad a la esperanza de la variable $\bar{x}_n$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{x}_n - E[\bar{x}_n]| \geq \varepsilon) = 0)$$

En concordancia con lo anterior, Borel (1909), (Como se cito en Salinero), "demostró que el experimento de Bernoulli llevaba a una afirmación más fuerte que la ley de los grandes números para *p*=0.5."

Entre tanto, Cantelli (como se citó en Martin 2011), demuestra que la función de distribución empírica $F_n^*(x)$ converge, de forma casi segura, a la función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria. Si se denomina por: $D_n = sup|F_n^*(x) - F(x)|$ se verifica que: $p(\lim_{n\to\infty} D_n = 0) = 1$.

En esta misma línea, Kolmogorov (1930), (como se citó en Salinero), "presenta una generalización de la ley fuerte de los grandes números".

También, Khinchine (1935), (como se citó en Salinero), "introdujo el concepto de estabilidad relativa de suma de variables aleatorias".

Glivenko(1933), (como se citó en Salinero), presenta la convergencia de una distribución empírica a una verdadera función de distribución.

Según la ley de los grandes números se afirma que la frecuencia relativa de las obtenciones de un experimento de carácter aleatorio se estabiliza en un número que coincide con la probabilidad cuando el experimento se realiza muchas veces. Teniendo en cuenta que la frecuencia relativa es la proporción de veces que ocurre un determinado suceso o, lo que es lo mismo, la cantidad de veces que sale un único suceso entre el número de veces que se ha realizado el experimento, podemos afirmar que la razón por la cual se estabiliza la frecuencia relativa es porque al ser el denominador cada vez más grande, al cociente le afectan cada vez menos las oscilaciones del numerador.

6.2. Marco Conceptual y Disciplinar

Este trabajo está enmarcado en el componente disciplinar estadístico, delimitado por la teoría de probabilidades, específicamente en "la ley de los grandes números" mediante simulaciones con el software educativo Geogebra, utilizando los applets de dicho software. En este sentido existen diferentes teóricos, que a través de la historia han realizado sus aportes al tema y se constituyen en insumos importantes para el desarrollo de esta propuesta.

Es así como desde la antigüedad, el pedagogo checo, Amos, J. (1983) en su obra pedagógica, la Didáctica Magna, plantea algunos requisitos generales para aprender y enseñar, al respecto considera que conforme se relacionan las cosas unas con otras, así debemos enlazarlas, y no de modo diferente. La solidez para aprender y enseñar, se logra, entre otras cosas si se tratan las cosas sin separación. De este modo, todo lo posterior se fundamenta en lo anterior. Los estudios se deben disponer de manera que los posteriores tengan su fundamento en los que preceden y éstos se afirmen y corroboren con los que van después. En este método natural todos los antecedentes deben servir de base a los consiguientes, de otro modo no podría darse solidez en lo que se haga. En consecuencia, todo lo coherente se enlaza siempre.

Amos, J. (2010). Afirma que un procedimiento relevante consiste en idear diversiones de aquellas que permiten recrear las habilidades para habituarlas a las formas del entendimiento; de este modo, un continuo desarrollo de actividades lúdicas en interacción con software nos pueden proporcionar experiencias para adquirir nuevas formas de conocimientos.

También Lara (1997), sostiene que dentro de los requerimientos necesarios para el aprendizaje constructivista, es importante que se relacione la nueva información con los conocimientos previos, los cuales son el fundamento de la construcción de los nuevos significados. Los alumnos tienen dificultades para vincular la nueva información con los conocimientos previos, cuando no se lo proponen, o cuando la información es poco clara, está desorganizada o de alguna forma carece de sentido. Sin embargo, en la práctica no siempre el profesor desarrolla un proceso de enseñanza aprendizaje que propicia que el estudiante aprecie el contenido matemático como un todo, como un sistema en el que las diferentes agrupaciones de contenido se entrelazan dando lugar a ese todo concatenado. Entonces el estudiante ve las diferentes partes del contenido, las diferentes asignaturas matemáticas de forma fragmentaria, sin conexión y esto, lejos de propiciar el aprendizaje, da una imagen falsa de lo que es el contenido matemático, constituyendo una deficiencia en su proceso de enseñanza aprendizaje que es necesario erradicar por las razones anteriormente expuestas.

6.3. Marco Legal

"Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar.

El uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes. Al respecto se está adelantando un trabajo en el Ministerio de Educación Nacional para construir unos lineamientos para la incorporación de las Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas."[4]

[4] Tomado de: Serie Lineamientos curriculares ministerio de educación nacional pág. 18.

En el artículo 67 de la constitución política de Colombia, en los literales 1,2, 5,7, 9 se plantea que la adquisición y generación de conocimientos científicos y técnicos el fomento de la investigación; el desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional.

La Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), la cual en sus artículos 21, 22 y 23 determina los objetivos específicos para cada uno de los ciclos de enseñanza en el área de matemáticas.

Los Lineamientos Curriculares en matemáticas publicados por el MEN en 1998. Propone fundamentos pedagógicos, orientaciones en los procesos curriculares, enfoques para comprender y enseñar.

Los Estándares Básicos de Competencias Schmidt, M. (2006) aporta orientaciones necesarias para la construcción del currículo del área.

7. OBJETIVOS

7.1. General

Diseñar un instrumento que contenga instrucciones, las cuales precisen y profundicen en la enseñanza de la probabilidad orientada en la ley de los grandes números para la básica media utilizando las simulaciones como recurso didáctico e interactivo mediante el software educativo Geogebra.

7.2. Específicos

- Diseñar actividades con sucesos o experimentos aleatorios, que le permitan al estudiante la solución de situaciones problema relacionadas con la ley de los grandes números, con el fin de facilitar el aprendizaje de los conceptos básicos de probabilidad, probabilidad frecuentista y análisis de permutaciones.

- Elaborar una secuencia de actividades relacionadas con el seguimiento de instrucciones utilizando como recurso tecnológico el software Geogebra facilitando la interpretación del concepto de estabilidad y variabilidad en la ley de los grandes números.

- Desarrollar un conjunto de experimentos aleatorios relacionados con la ley de los grandes números utilizando applets de geogebra disponible en la red, de libre acceso GeogebraTube, útil para estudiantes y profesores.

- Analizar los resultados obtenidos en las prácticas de los experimentos aleatorios usando los applets de Geogebra realizadas con los estudiantes.

8. Metodología

Este trabajo se enmarca en el Paradigma de investigación cualitativo que según Hernández, Fernández y Baptista (2006), “se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)”.

En este estudio se combina lo cualitativo con apoyo de lo cuantitativo ya que se describen los procesos asimilados por los estudiantes a través de las actividades realizadas y se hace una interpretación de los resultados de forma general para cada uno de los experimentos aleatorios propuestos en el diseño de los applets ley de los grandes números.

La población seleccionada para la aplicación de esta propuesta estuvo conformada por los estudiantes de educación media grados 10° y 11°, con un número de 45 por cada grado, es decir, un total de 90 jóvenes cuyas edades oscilan entre los 15 y 17 años, de la institución educativa Antonio Donado Camacho ubicada en zona rural del municipio de Rionegro, Antioquia, Colombia.

Para la aplicación de la propuesta, inicialmente se diseñaron las guías didácticas para la construcción de los experimentos aleatorios con sus respectivas instrucciones utilizando Geogebra como modelo para representar los ensayos de los experimentos aleatorios desde 0 hasta 50000 repeticiones; estos programas mediante la interacción de Geogebra como herramienta pensada para enseñar y aprender matemáticas de código abierto se construyen los applets que son subidos a la página web www.geogebratube.org que es un repositorio de materiales interactivos espacio para publicar, compartir y comentar materiales. Es de anotar que los applets aparecen clasificados y permiten la búsqueda por palabras clave; para ello se utilizan las siguientes palabras claves: Ley de los grandes números, probabilidad frecuentista, experimentos aleatorios, frecuencia relativa, tablas de frecuencias. Además, está abierto a que cualquier usuario pueda subir y por tanto, compartir sus propias construcciones. Obtenido el link de cada experimento aleatorio, se realizó en la página llamada wiki probabilidades con una galería de imágenes de los experimentos aleatorios llamada, "applets ley de los grandes números", debajo de cada imagen hay un hipervínculo que lleva al estudiante o el usuario al experimento que quiere observar o resolver como tarea propuesta por el profesor; esta wiki está ubicada en la red: http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki/ permitido por la universidad Nacional, sede Medellín, a los estudiantes de la Maestría en la enseñanza de las ciencias naturales.

Cabe aclarar que los "applets ley de los grandes números", desarrollados en GeoGebratube contienen: Título del tema, una descripción general, información para otros profesores y para estudiantes, las preguntas o tareas para los alumnos que aparecen después del applet y las etiquetas que son las palabras claves relacionadas con el tema.

Construidos los “applets ley de los grandes números” se asignó a los estudiantes el compromiso, extraescolar, de responder las preguntas consignadas en siete applets en diferentes semanas, que luego se confrontaron en clase, los demás se realizaron en clase monitoreando los avances de los estudiantes y resolviendo las dudas.

Cinco estudiantes de cada grado desarrollaron el trabajo siguiendo paso a paso las instrucciones diseñadas en las guías didácticas para la construcción de los applets, con ello se pretendía comprobar el nivel de comprensión de las mismas para la ejecución de las prácticas en Geogebra, además corroborar la lógica de los estudiantes en el seguimiento de instrucciones y la asimilación de los temas correlacionados con el área.

Es de resaltar que los estudiantes fueron ilustrados previamente para el manejo de las herramientas básicas del programa Geogebra mediante el instructivo general de geogebra, al igual que se desarrollaron actividades relacionadas de acuerdo con el grado, para este caso, las secciones cónicas en Geogebra para grado 10° y las gráficas de funciones y sus derivadas para el grado 11°. Dado que el interés se centra en los aprendizajes obtenidos en los applets ley de los grandes números, en una clase previa, a los estudiantes se les instruye sobre propio manejo de ellos.

Después de conocer las instrucciones de los applets, se procedió a resolver las preguntas consignadas al final de cada applet utilizando la dirección de internet, más las actividades asignadas en cada clase con un taller complementario para responder las preguntas. Es de anotar que no se les explicó el concepto de probabilidad frecuentista, ya que el propósito final es que los estudiantes comprendan dicho concepto asociado a la “ley de los grandes números”, es decir, en la medida que aumenta un número n de ensayos de un experimento aleatorio ellos deben comparar las frecuencias relativas de los resultados con 4 cifras significativas después del punto decimal con los resultados de las probabilidades clásicas para cada elemento del espacio muestral.

9. Instructivos de los experimentos aleatorios Applets ley de los grandes números.

Para el desarrollo de esta propuesta se recurre a los instructivos applets en Geogebra ley de los grandes números los cuales son un compendio de 12 archivos de cada experimento aleatorio con extensión pdf, que contienen un conjunto de instrucciones paso a paso para la elaboración de cada applet. Para el desarrollo de estos instructivos se utiliza , “el manual oficial de la versión 3.2 Geogebra” MarKus (2009).

Dicho recurso didáctico está disponible para quienes estén interesados en profundizar en la construcción de cada applet de los experimentos aleatorios (ver figura 2), en la pagina Wiki: http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki/index.php/Experimentos_Aleatorios

Los instructivos Applets en GeoGebra ley de los grandes números se encuentran en la red con los siguientes hipervínculos:

- Instructivo Introducción del software Geogebra.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra lanzamiento de una moneda n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra grafico de frecuencia Absoluta Lanzamiento de una moneda n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra grafico de frecuencia Relativa Lanzamiento de una moneda n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra lanzamiento de un dado n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra gráfico de frecuencia Relativa Lanzamiento de un dado n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra Lanzamiento dos monedas n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra Grafica frecuencia relativa Lanzamiento de dos monedas n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra lanzamiento de dos dados n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra grafica frecuencia relativa Lanzamiento de dos dados n veces.pdf
- Instructivo Applet en Geogebra las coincidencias de los sombreros de Euler con n=3.pdf
- Instructivo las coincidencias de los Sombreros de Euler con n=4.pdf

- Instructivo Applet en Geogebra Probabilidad de las no coincidencias de los Sombreros de Euler.pdf

Figura 2. Diseño final applets ley de los grandes números

Fuente: Applets creados en Geogebra por Jesús Evenson Pérez Arenas. http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki.

El software educativo Geogebra, nos permite simular un experimento aleatorio por medio de los deslizadores y las cajas de entrada un experimento aleatorio tantas veces como deseemos, aprovecharemos esta característica para la realización de diferentes actividades, en las que se pretende obtener los resultados de las probabilidades de sucesos equiprobables como el lanzamiento de monedas, de dados y las situaciones problema de los sombreros de

Euler, utilizando como instrumentos comparativos las tablas de frecuencia absoluta y relativa, con sus respectivos gráficos de barras.

Cada experimento aleatorio va asociado al diseño algorítmico de construcción en Geogebra, útil para profesores y estudiantes contribuyendo a seguir instrucciones en forma ordenada, importante para adquirir destrezas como primeros pasos en la lógica de la programación y despertar el interés de los estudiantes. Al final de cada experimento aleatorio hay una guía de preguntas relacionadas con el tema, la cual tiene como propósito que los estudiantes comprendan los resultados mediante la simulación de n veces un experimento aleatorio utilizando las probabilidades frecuentistas y puedan comparar los resultados con la definición clasica de probabilidad.

Núcleo Temático: Probabilidad Frecuentista

Indicador: Interactuar con los applets en Geogebra ley de los grandes números observando las frecuencias absolutas y relativas a medida que el número de ensayos va creciendo.

9.1. Applets en Geogebra Experimentos aleatorios con eventos equiprobables

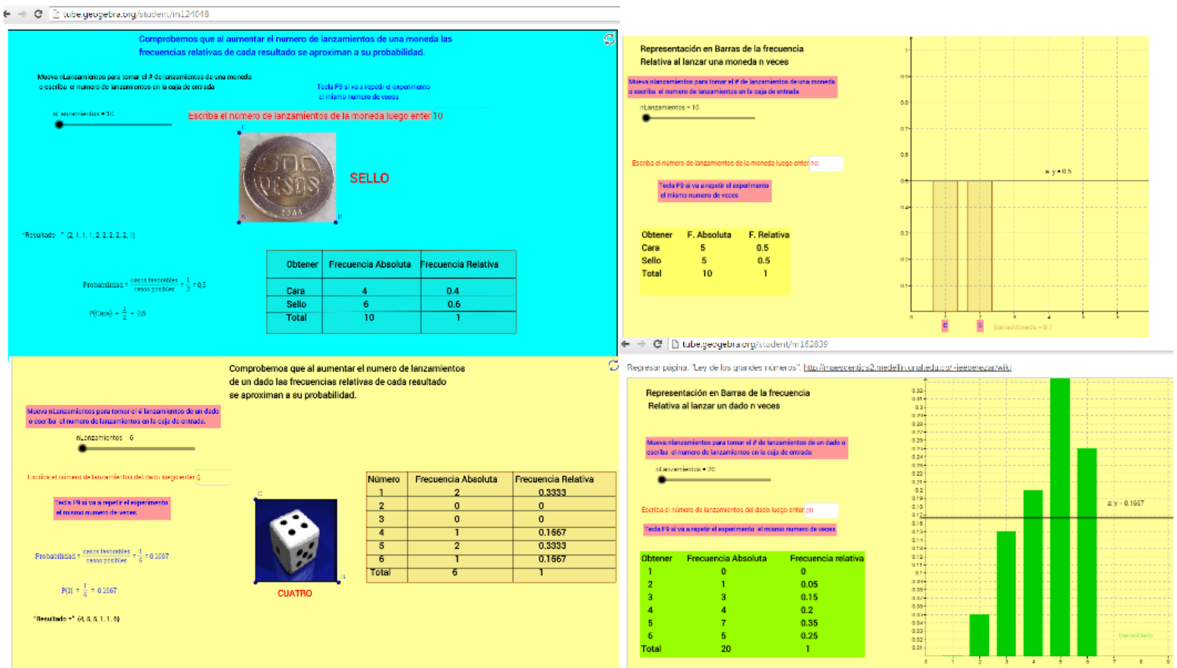
Indicador: simular un número n de lanzamientos de experimentos aleatorios equiprobables, calculando las frecuencias absolutas y relativas, representando sus frecuencias en gráficos de barras, observando cómo las frecuencias relativas se aproximan a la probabilidad, conforme el número de ensayos va aumentando tal como lo explica la **ley de los grandes números.**

Los applets de los experimentos aleatorios con eventos equiprobables se caracterizan porque cada uno de los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de salir, éstos reciben también el nombre de eventos equiposibles. Los experimentos aleatorios utilizados para este diseño son: el lanzamiento de una moneda n veces y el lanzamiento de un dado n veces. Los applets en Geogebra diseñados con estas características están dispuestos en la wiki: http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki o en pagina de Geogebra tube con los siguientes nombres y enlaces:

Tabla 2. Applets en Geogebra Experimentos aleatorios con eventos equiprobables

Nombre Applet En Geogebra	Hipervínculo
Lanzamiento de una moneda n veces	http://tube.geogebra.org/student/m124048
Gráfico de frecuencia absoluta. Lanzamiento de una moneda n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m125060
Gráfico de frecuencia relativa. Lanzamiento de una moneda n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m161382
Lanzamiento de un dado n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m156660
Gráfico de frecuencia absoluta de lanzar un dado n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m125360
Gráfico de frecuencia relativa. Lanzamiento de un dado n veces	http://www.geogebratube.org/student/m162839

Figura 3. Applets en Geogebra Experimentos aleatorios con eventos equiprobables



Fuente: Applets creados en Geogebra por Jesús Evenson Pérez Arenas. http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki.

A continuación se explica la figura número tres. Estos applet consisten en simular las frecuencias absolutas y relativas del lanzamiento de una moneda y un dado respectivamente desde un lanzamiento hasta 50000. Los estudiantes o usuarios pueden interactuar ingresando mediante la casilla de entrada el número de lanzamientos que desee. Observando en una tabla de frecuencias cómo varían los resultados de las frecuencias absolutas y relativas con sus respectivos gráficos de barras de cada uno de los elementos del espacio muestral. Cada gráfico de barras está representado por una semirrecta, la cual está determinada por una ecuación de función constante asociada a la probabilidad del suceso, si este grafico de barras representa las frecuencias absolutas, las ecuaciones de las semirrectas son la media obtenida según el número los elementos del espacio muestral. El applet tiene la posibilidad de repetir el experimento aleatorio un mismo número de veces mediante la utilización de la tecla f9.

Además, cada applet en Geogebra experimentos aleatorios con eventos equiprobables tiene un cuestonario guía para estudiantes, donde el estudiante debe indicar el espacio muestral de cada experimento aleatorio. Estas guías son un instrumento comparativo de cómo son las frecuencias y el comportamiento de los gráficos, conforme el número de lanzamientos va aumentando.

9.2. Applets en Geogebra Experimentos aleatorios con eventos no equiprobables

Indicador: simular un número n de lanzamientos de experimentos aleatorios no equiprobables, calculando las frecuencias absolutas y relativas del experimento aleatorio, representando sus frecuencias en gráficos de barras, observando cómo las frecuencias relativas se aproximan a la probabilidad, conforme el número de ensayos va aumentando tal como lo explica la **ley de los grandes números.**

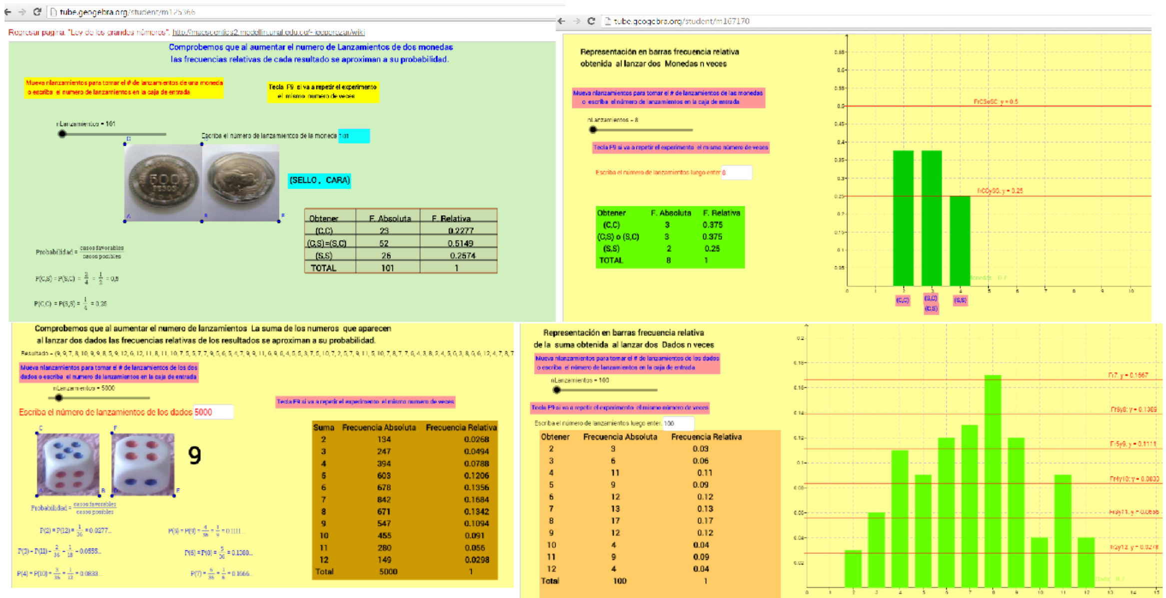
Los applets de los experimentos aleatorios con eventos no equiprobables se caracterizan porque cada uno de los elementos del espacio muestral no tienen la misma probabilidad de salir. Por lo tanto, los experimentos aleatorios utilizados para este diseño son: el lanzamiento simultáneo de dos monedas n veces y el lanzamiento simultáneo de dos dados n veces, estos sucesos son independientes ya que la probabilidad de un suceso A no se ve afectado por el resultado del suceso B, es decir el resultado de una moneda no se ve afectado por el resultado obtenido de la otra moneda.

Los applets en Geogebra diseñados con estas característica están dispuestos en la página wiki: http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki o en la página de Geogebra tube con los siguientes nombres y enlaces:

Tabla 3.Applets en Geogebra Experimentos aleatorios con eventos no equiprobables

Nombre applet en Geogebra	Hipervínculo
Lanzamiento dos monedas n veces	http://www.geogebratube.org/student/m125366
Gráfico de frecuencia absoluta de lanzar dos monedas n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m125372
Gráfica frecuencia relativa Lanzamiento de dos monedas n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m167170
Lanzamiento de dos dados n veces	http://www.geogebratube.org/student/m125374
Gráfico de frecuencia absoluta de lanzar dos dados n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m125377
Gráfica de frecuencia relativa. Lanzamiento de dos dados n veces.	http://www.geogebratube.org/student/m163661

Figura 4. Applets en Geogebra Experimentos aleatorios con eventos no equiprobables



Fuente: Applets creados en Geogebra por Jesús Evenson Pérez Arenas. http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki

A continuación se explica la figura número cuatro. Estos applet consisten en simular las frecuencias absolutas y relativas del lanzamiento de dos monedas y la suma obtenida al lanzar dos dados respectivamente desde un lanzamiento hasta 50000. Estos applets tienen asociada la probabilidad de cada uno de los elementos del espacio muestral para poder comparar los resultados con las frecuencias relativas a medida que el número de ensayos va creciendo.

Los estudiantes o usuarios pueden interactuar ingresando mediante la casilla de entrada el número de lanzamientos que desee, observando en una tabla de frecuencias la variación de los resultados de las frecuencias absolutas y relativas con sus respectivos gráficos de barras de cada uno de los elementos del espacio muestral. Cada gráfico de barras está representado por una semirrecta con una ecuación de función constante asociada a la probabilidad del suceso. El applet tiene la posibilidad de repetir el experimento aleatorio un mismo número de veces mediante la utilización de la tecla f9.

Cada applet en Geogebra experimentos aleatorios con evento no equiprobables tienen un cuestonario guía para estudiantes, donde el estudiante debe indicar el espacio muestral de cada experimento aleatorio. Estas guías son un instrumento comparativo de cómo son las frecuencias y el comportamiento de los gráficos, conforme el número de lanzamientos va aumentando.

9.3. Applet en Geogebra las coincidencias de los sombreros de Euler con n = 3

Indicador: Introducir el concepto de probabilidad realizando un número n de ensayos calculando las frecuencias absolutas , las frecuencias relativas y su gráfico de frecuencia relativa del experimento aleatorio las coincidencias de los sombreros de Euler, comprobando cómo se aproximan estos últimos a los valores de la probabilidad tal como lo explica la **ley de los grandes números.**

Situación Problema

Tres señores, cada uno con su sombrero, van a la ópera y al entrar dejan los sombreros en el guardarropa.

A la salida cada uno toma al azar un sombrero.

¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los señores reciba su sombrero?

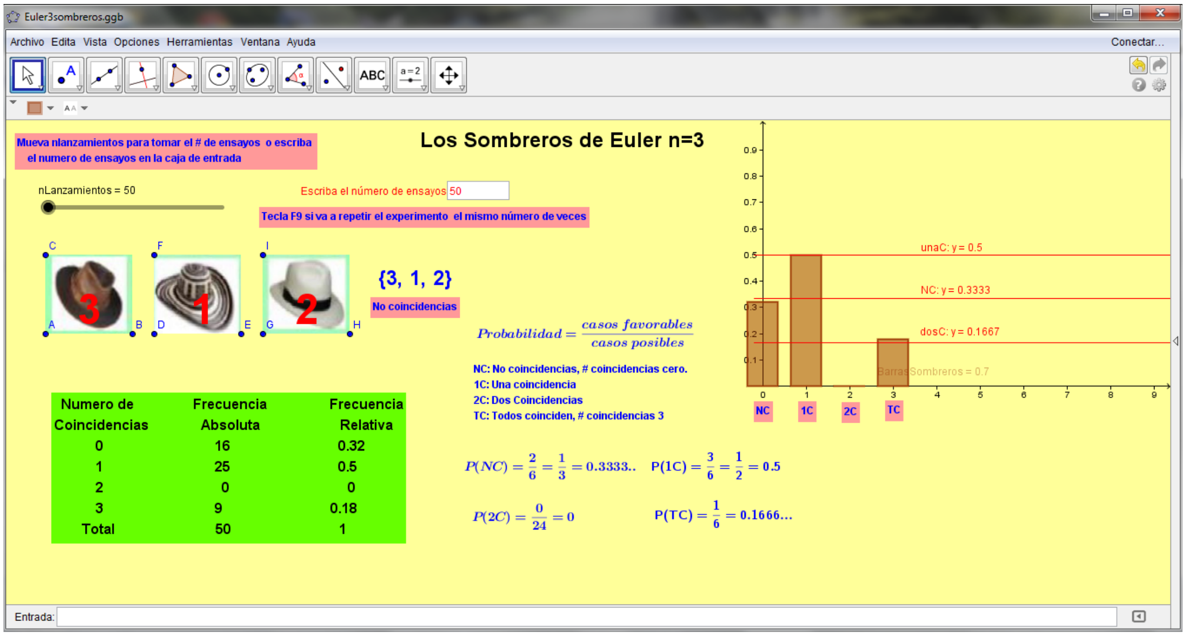
Los experimentos aleatorios utilizados para este diseño son: las coincidencias de los sombreros de Euler con n =3 y las coincidencias de los sombreros de Euler con n =4, donde n representa 3 y 4 sombreros respectivamente. estos sucesos son independientes.

Los applets en Geogebra diseñados con estas características están dispuestos en la página wiki: http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki o en la página de Geogebra tube con los siguientes nombres y enlaces:

Tabla 4. Applet en Geogebra las coincidencias de los sombreros de Euler

Nombre applet en Geogebra	Hipervínculo
Las coincidencias de los sombreros de Euler con n =3.	http://www.geogebratube.org/student/m299049
Las coincidencias de los sombreros de Euler con n =4.	http://tube.geogebra.org/student/m299055

Figura 5. Applet en Geogebra las coincidencias de los sombreros de Euler n=3



Fuente: Applets creados en Geogebra por Jesús Evenson Pérez Arenas. http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki

A continuación se explica la figura número cinco. Estos applet consisten en simular las frecuencias absolutas y relativas de las coincidencias de los sombreros de Euler desde un lanzamiento hasta 50000. Estos applets tienen asociada la probabilidad de cada uno de los elementos del espacio muestral para poder comparar los resultados con las frecuencias relativas a medida que el número de ensayos va aumentando.

Estos applets muestran de forma interactiva cómo los sombreros cambian de orden al ir realizando la simulación e indicando si hay coincidencias o no coincidencias en el primer arreglo de los grupos de 3 o 4 sombreros.

En estos applets se describe una situación problema donde los estudiantes deben analizar los posibles resultados de coincidencias formando grupos de a 3 elementos si n=3 sombreros, donde el orden en que son escogidos los sombreros es importante y no se repiten los elementos, introduciendo el concepto de permutación. $P_{n,n}$: permutaciones de n en n. La solución del problema se presenta cuando los n señores se van con un sombrero diferente. En el applet está denotado como NC: No coincidencias, número de coincidencias cero.

Los estudiantes o usuarios pueden interactuar ingresando mediante la casilla de entrada el número de ensayos que desee, observando en una tabla de frecuencias la variación de los resultados de las frecuencias absolutas y relativas con sus respectivos gráficos de barras de cada uno de los elementos del espacio muestral. Cada gráfico de barras está representado por una semirrecta con una ecuación de función constante asociada a la probabilidad de cada elemento del suceso. El applet tiene la posibilidad de repetir el experimento aleatorio un mismo número de veces mediante la utilización de la tecla f9.

Cada applet en Geogebra de los experimentos aleatorios sombreros de Euler tienen un cuestionario guía para estudiantes, donde el estudiante debe indicar el espacio muestral de cada experimento aleatorio. Estas guías son un instrumento comparativo de cómo son las frecuencias y su comportamiento de los gráficos, conforme el número de lanzamientos va aumentando.

9.4. Applet en Geogebra Probabilidad de las no coincidencias de los Sombreros de Euler

Indicador: simular la probabilidad de las no coincidencias en los sombreros de Euler utilizando el límite cuando **n** tiende a infinito con la definición del número **e** tal como lo demostró Euler, comprobando que a medida que n crece se aproxima a los valores de la probabilidad tal como lo explica la **ley de los grandes números.**

Situación Problema

Cuatro señores, cada uno con su sombrero, van a la ópera y al entrar dejan los sombreros en el guardarropa.
A la salida cada uno toma al azar un sombrero.
¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los señores reciba su sombrero?

En un trabajo propuesto por Fernández, S. (2013), en la III jornada de la enseñanza de las matemáticas en Navarra España propone el problema de las coincidencias de los sombreros de Euler. Explicando las Formulas construida por Euler:

Fórmulas construidas por Euler:

P(n): Nº de permutaciones en las que ninguna ocupa su posición original

$$P(n) = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

Fórmula recursiva utilizada por Euler Para $n \geq 3$:

P(n) = (n-1). [P(n – 1) + P(n-2)]

Euler también demostró que (para n ≥ 2)

P(n) = n.P(n -1) + $(-1)^n$

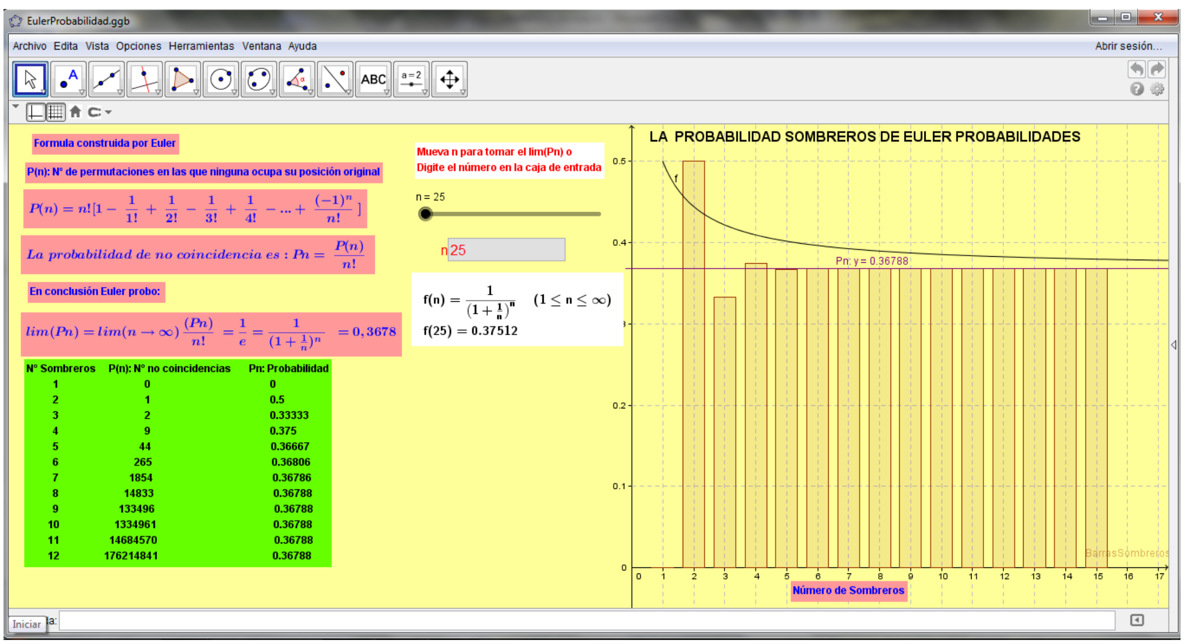
La probabilidad de no coincidencia es definida como Pn:

$$Pn = \frac{P(n)}{n!}$$

En conclusión, Euler probó que:

$$\lim_{n\to+\infty} Pn = \lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \frac{1}{e} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Figura 6. Diseño final Applet en Geogebra Probabilidad de las no coincidencias de los sombreros de Euler



Fuente: Applet creado en Geogebra por Jesus Evenson Pérez Arenas. http://tube.geogebra.org/student/m299059

9.4.1 Guía para estudiantes Probabilidad de las coincidencias de los Sombreros de Euler

El recurso se encuentra en la dirección Web: http://tube.geogebra.org/student/m299059

P1: P(n): Nº de permutaciones en las que ninguna ocupa su posición original. Observa la fórmula en el Applet, resuelve para: P(1) P(2) P(3) P(4) P(5) P(6)

P2: Podemos afirmar que la fórmula P(n) es válida para n elementos con n>=1.

P3: Ya teniendo las respuestas de P(1) P(2) P(3) P(4) P(5) P(6). Verifica la fórmula recursiva utilizada por Euler Para $n \geq 3$:

$P(n) = (n-1). [P(n – 1) + P(n-2)]$ para P(3) P(4) P(5) P(6).

P4: En la fórmula anterior, si tienes P(7) y P(8) ¿Puedes hallar P(9)?. Explica la respuesta.

P5: Euler también demostró que (para $n \geq 2$) $P(n) = n.P(n -1) + (-1)^n$ verifica si esta fórmula se cumple para P(2) P(3) P(4) P(5) P(6).

P6: En la fórmula anterior, si tienes P(9) ¿Puedes hallar P(10)?. Explica la respuesta.

P7: La probabilidad de no coincidencia es: $Pn = \frac{P(n)}{n!}$ Con ayuda de la tabla en el applet verifica la probabilidad de P1 hasta P10. ¿Qué puedes concluir sobre las probabilidades? A qué número se aproxima la probabilidad.

P8: Ingresa en el campo de entrada **n =** 5 y observa el resultado de f(5): ¿este resultado se aproxima a alguna probabilidad de Pn? Explica.

P9: Ingresa en el campo de entrada **n =** 10 y observa el resultado de f(10): ¿este resultado se aproxima a alguna probabilidad de Pn? Explica.

P10: Ingresa en el campo de entrada **n** =25 y observa el resultado de f(25): ¿este resultado se aproxima a alguna probabilidad de Pn? Explica.

P10: Ingresa en el campo de entrada **n**=1000 y observa el resultado de f(1000): ¿este resultado se aproxima a alguna probabilidad de Pn? Explica.

P11: Ingresa en el campo de entrada **n**=10000 y observa el resultado de f(10000): ¿este resultado se aproxima a alguna probabilidad de Pn? Explica.

P12: Ingresa en el campo de entrada **n**=100000 y observa el resultado de f(100000): ¿este resultado se aproxima a alguna probabilidad de Pn? Explica.

P13: Ver gráfico del applet ¿Qué relación encuentras con los gráficos de barras, la ecuación de la semirrecta y el gráfico de la función f(n)? Explica.

Regresar página: "Ley de los grandes números": http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki

10. Análisis de los resultados

10.1. Análisis del experimento aleatorio lanzamiento de una moneda n veces.

Esta actividad fue propuesta como taller extra clase indicando la dirección web http://www.geogebratube.org/student/m124048.

Los estudiantes resolvieron el taller representando los resultados en las tablas de frecuencias para 10, 100, 1000, 20000 en 5 repeticiones y concluyeron que a medida que iban aumentando los ensayos, las frecuencias relativas se aproximan a 0.5, además indicaron que si el número de lanzamientos eran 50000 las frecuencias absolutas de obtener cara se aproxima a la mitad 25000, igual para el número de sellos y que la frecuencia relativa del número de caras se obtiene: $f_r = \frac{numero\ de\ caras}{total\ lanzamientos}$ y la frecuencia relativa del número de sellos se obtiene: $f_r = \frac{numero\ de\ sellos}{total\ lanzamientos}$

Luego escribieron la relación entre la probabilidad frecuentista y la ley de los grandes números: al aumentar el número de lanzamientos de la moneda, las frecuencias relativas de obtener cara se aproximan a la probabilidad teórica. Es de anotar la facilidad de comprensión de los estudiantes para relacionar los conceptos por ser un experimento sencillo, pero lo que más les pareció interesante fue la manera como el programa Geogebra ayuda a representar un gran número de simulaciones ya que si lo realizaban manualmente, afirma un estudiante que no terminarían, además de la alta posibilidad de equivocarse.

Figura 7. Tablas de frecuencias comparativo lanzamiento de una moneda n veces.

Obtener	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Cara	9	0.9
Sello	1	0.1
Total	10	1

Obtener	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Cara	4997	0.4997
Sello	5003	0.5003
Total	10000	1

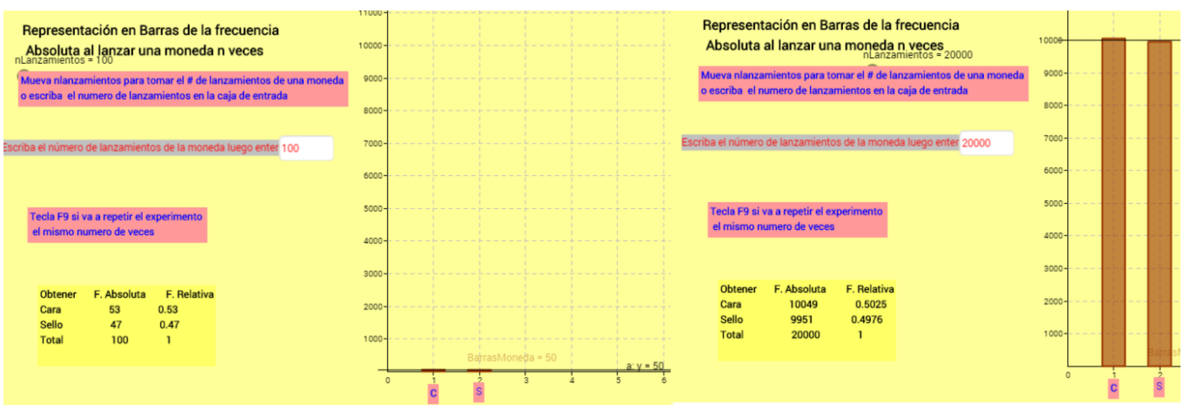
Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m299059. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

En la figura se observa claramente que las frecuencias relativas en 10000 lanzamientos de obtener cara o sello se aproximan a 0.5.

El 20% de los estudiantes tuvieron dificultades para cumplir la actividad. Unos por no tener internet y otros por la dificultad de abrir el applet, se debe tener actualizado el software de JAVA para poder ejecutar el applet de Geogebra.

10.2. Análisis del Gráfico de frecuencia absoluta lanzamiento de una moneda n veces

Figura 8. Gráfico de barras comparativo de las frecuencias absolutas lanzamiento de una moneda n veces



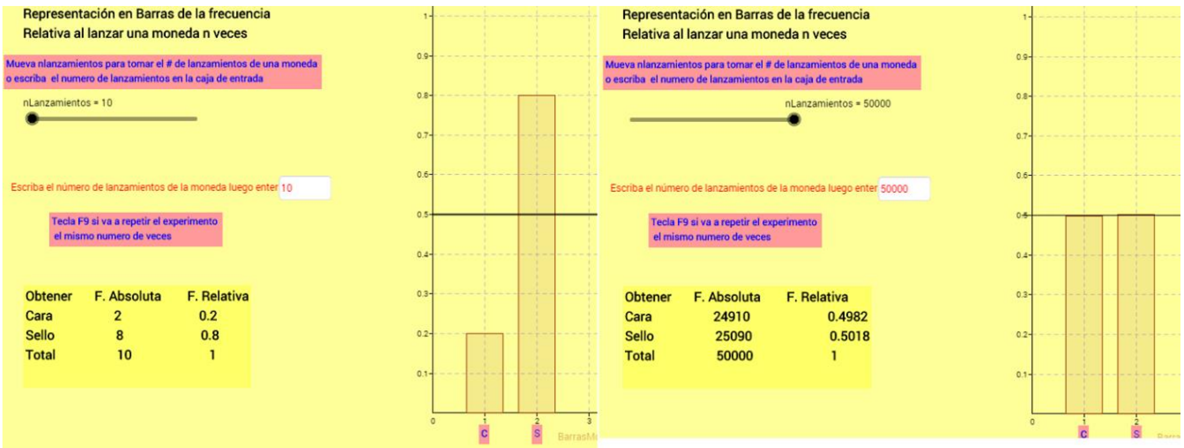
Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m125060. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

Esta actividad fue propuesta como trabajo extra clase, indicando la dirección de internet http://www.geogebratube.org/student/m125060. Para esta actividad los estudiantes representan el grafico de barras de las frecuencias absolutas de la simulación; para los siguientes numeros de lanzamientos 100, 5000, 10000, 20000 escribiendo la semirrecta que la conforma. El punto de más dificultad fue la simulación con 100 lanzamientos porque se diseñó en vista gráfica de Geogebra con una escala de 1:1000 y para la simulación de 100 lanzamientos la representación del gráfico de barras es muy pequeño.

Los estudiantes al realizar la simulación con 100 lanzamientos, explicaban en general que las barras son muy pequeñas y que para observar mejor las frecuencias absolutas de las barras, había que organizar la escala del eje de las ordenadas un poco más pequeño proponiendo escalas de 1:10 y 1:50. Esto es cierto, pero los estudiantes a primera vista no dimensionan que al realizar estos cambios no es posible visualizar el final del gráfico de barras y la semirrecta que sirve como comparación cuando el número de lanzamientos es más grande. Para las representaciones gráficas de 5000, 10000, 20000 lanzamientos, los estudiantes afirman que a medida que el número de lanzamientos es muy grande el valor de las frecuencias absolutas está más cerca a la semirrecta y que la ecuación de la semirrecta es siempre la mitad del número de lanzamientos, concluyendo que para un número muy grande, como por ejemplo el 20000, el número para obtener los eventos “obtener cara” y “obtener sello”, estos deben aproximarse a 10000 y las frecuencias relativas a 0.5.

10.3. Analisis del gráfico de frecuencia relativa lanzamiento de una moneda n veces

Figura 9. Gráfico de barras comparativo de las frecuencias relativas lanzamiento de una moneda n veces



Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m161382. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

Esta actividad fue propuesta como trabajo extra clase indicando la dirección web http://www.geogebratube.org/student/m161382. Debido a la dificultad presentada en el diseño gráfico de frecuencia absoluta lanzamiento de una moneda n veces, se mejoró la versión utilizando las frecuencias relativas con el propósito de que los estudiantes pudieran deducir mejor sobre los resultados, ya que con esta forma de representar las gráficas de barras no va depender del número obtenido de las frecuencias absolutas, sino de las frecuencias relativas con resultados entre 0 y 1; teniendo como referencia en el mismo Applet la tabla de frecuencia de los resultados, además se construyó una semirrecta $y = 0.5$, con la probabilidad teórica del experimento aleatorio.

Los estudiantes representan el gráfico de barras de las frecuencias relativas para las simulaciones cuando el número de lanzamientos fueron: 5, 10, 100, 1000, 10000, 30000, 50000. En consecuencia, deducen que con el número de lanzamientos 5, 10, 100 hay variabilidad de los resultados, notándose más cuando el número de lanzamientos es menor y que para las simulaciones con el número de lanzamientos 1000, 10000, 30000, 50000 a medida que van haciéndose más grandes las barras se acercan a la semirrecta. Indicando que la semirrecta $y = 0.5$ significa la probabilidad teórica y que por eso los resultados de las frecuencias relativas se aproximan a 0.5 cuando el número de lanzamientos es muy grande.

10.4. Análisis experimento aleatorio Lanzamiento de un dado n veces.

Figura 10. Tablas de frecuencias comparativo lanzamiento de un dado n veces.

Número	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	10	0.2
2	8	0.16
3	8	0.16
4	7	0.14
5	10	0.2
6	7	0.14
Total	50	1

Número	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1	3395	0.1698
2	3280	0.164
3	3331	0.1666
4	3334	0.1667
5	3338	0.1669
6	3322	0.1661
Total	20000	1

Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m156660. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

El applet está disponible en la dirección web: http://www.geogebratube.org/student/m156660. Esta actividad se realiza en el salón de clases. Para una mayor dinámica se lleva una guía de trabajo donde los estudiantes debían completar la siguiente tabla de frecuencias y responder las preguntas propuestas en el applet.

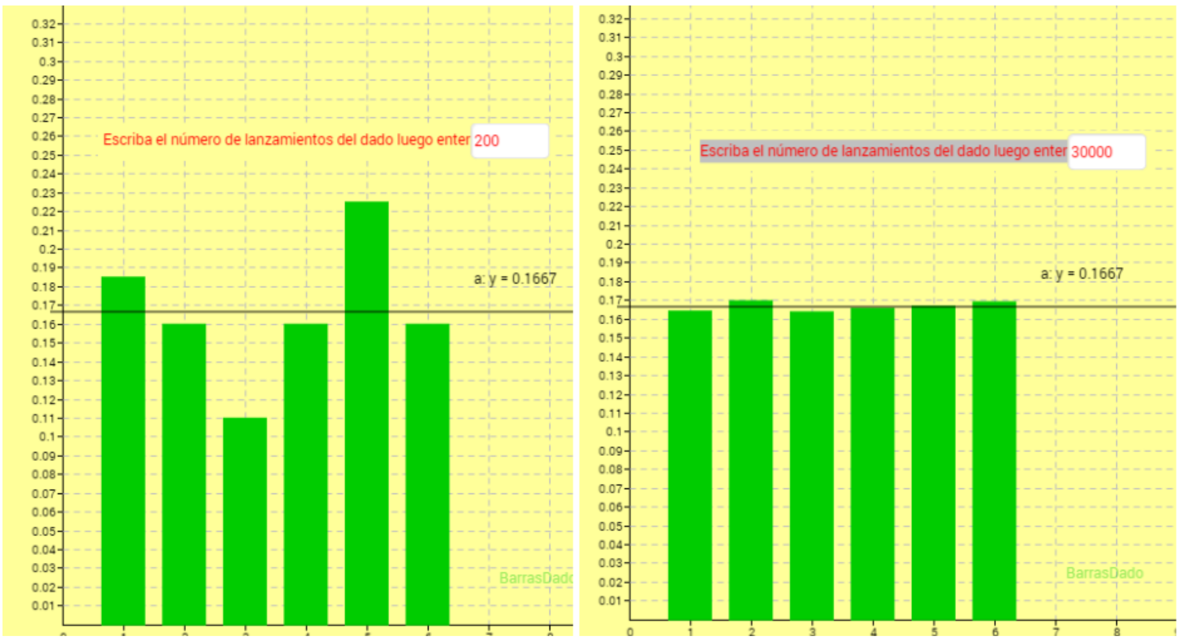
Tabla 5. Guía de resultados Lanzamiento de un dado n veces.

	1		2		3		4		5		6	
# Lanz	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r
10												
100												
1000												
15000												
23000												
35000												
40000												
50000												

Los estudiantes completaron la tabla de frecuencias de cada una de las simulaciones y explicaron que las frecuencias relativas se aproximan 0.166 a medida que el número de lanzamientos es más grande. Al final concluyeron que con 50000 lanzamientos las frecuencias relativas se aproximan a 0.166 y que corresponde a la probabilidad de obtener cualquier evento del espacio muestral.

10.5. Análisis Gráfico frecuencia relativa Lanzamiento de un dado n veces

Figura 11. Gráfico de barras comparativo de las frecuencias relativas lanzamiento de un dado n veces



Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m162839. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

Esta actividad fue desarrollada como trabajo extra clase indicando la dirección web: http://www.geogebratube.org/student/m162839. Los estudiantes resolvieron las preguntas propuestas en el applet construyendo los gráficos de barras representativos para 6, 10, 100, 1000, 3600, 10000, 30000, 50000. Para las simulaciones con el número de lanzamientos 6, 10, 100, 1000, a lo cual respondieron que hay variabilidad de los resultados observándose que a medida que los resultados aumentan, las barras son más próximas a la semirrecta $y = 0.1667$. Con las simulaciones 10000, 30000, 50000 respondieron que se presenta estabilidad de los resultados indicando que cuando el número de lanzamientos es 50000, las barras de cada elemento del espacio muestral está muy cerca de la semirrecta $y = 0.1667$. Y afirmaron que el valor de la semirrecta se obtiene con la probabilidad clásica de cada uno de los elementos del espacio muestral así:

$$P(1) = \frac{1}{6} = 0.1667.$$

10.6. Análisis de resultados lanzamiento de dos monedas n veces

Figura 12. Tablas de frecuencias comparativo lanzamiento de dos monedas n veces

Obtener	F. Absoluta	F. Relativa
(C,C)	4	0.1333
(C,S)=(S,C)	18	0.6
(S,S)	8	0.2667
TOTAL	30	1

Obtener	F. Absoluta	F. Relativa
(C,C)	8700	0.2486
(C,S)=(S,C)	17565	0.5019
(S,S)	8735	0.2496
TOTAL	35000	1

Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m125366. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

El applet está disponible en la dirección web: http://www.geogebratube.org/student/m m125366. Esta actividad se realizó en el salón de clases. Para una mayor dinámica se llevó una guía de trabajo donde los estudiantes debían completar la siguiente tabla de frecuencias y responder las preguntas propuestas en el applet. A continuación se representa dicha guía.

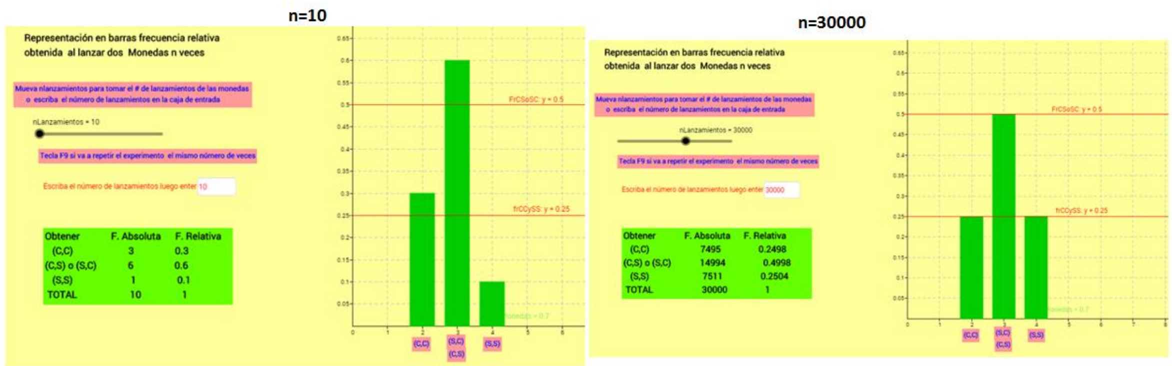
Tabla 6. Guías de resultados lanzamiento de dos monedas n veces

Pregunta 3	(C,C)		(C,S) O (S,C)		(S,S)	
# Lanzamientos	F. Absoluta	F. relativa	F. Absoluta	F. relativa	F. Absoluta	F. relativa
R1: 100						
R2: 100						
R3: 100						
R4: 100						
R5: 100						
Promedio						

Los estudiantes completaron las tablas con las simulaciones en 5 repeticiones de 100, 1000, 25000, 35000, 50000 concluyendo que: a medida que aumenta el número de lanzamientos, las frecuencias relativas de los resultados se aproximan a la probabilidad teórica; indicando: P(C,C)=P(S,S) = 0.25 y P(C,S)=P(S,C)= 0.5 y con la simulación de 50000 lanzamientos, las frecuencias absolutas de los resultados para los elementos del espacio muestral de (C,C) se aproximan a 12500, lo mismo para (S,S) y para (C,S) o (S,C) que se aproximan a 25000.

10.7. Análisis de resultados gráfica de frecuencia relativa lanzamiento de dos monedas n veces

Figura 13. Gráfico de barras comparativo de las frecuencias relativas lanzamiento de dos monedas n veces



Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m167170. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

El applet está disponible en la dirección web: http://www.geogebratube.org/student/m167170. Esta actividad se realizó en el salón de clases. Para una mayor dinámica, se llevó una guía de trabajo donde los estudiantes debían completar la siguiente tabla de frecuencias y responder las preguntas propuestas en el applet. A continuación se representa la guía mencionada:

Tabla 7. Guía gráfica de frecuencia relativa lanzamiento de dos monedas n veces

Pregunta 3	(C,C)		(C,S) O (S,C)		(S,S)	
# Lanzamientos	F. Absoluta	F. relativa	F. Absoluta	F. relativa	F. Absoluta	F. relativa
R1: 100						
R2: 100						
R3: 100						
R4: 100						
R5: 100						

Para esta actividad se hizo la siguiente observación: se dice que hay variabilidad cuando los resultados aleatorios de las frecuencias relativas de cada elemento del espacio muestral está muy separado a su probabilidad y si está muy cerca se dice que hay estabilidad.

En este experimento aleatorio lanzamiento de dos monedas n veces, fue necesario reforzar el concepto del espacio muestral, debido a que se tiene la unión de dos experimentos aleatorios simples a la vez y que son independientes. Es decir; la probabilidad del resultado aleatorio de una moneda no se ve afectada por el resultado de la otra moneda y como se lanzan las monedas simultáneamente, entonces el espacio muestral está conformado por las parejas posibles de cada uno de los resultados. Si representamos los eventos de la siguiente manera. S: "salir sello", C: "salir cara", entonces el espacio muestral S está dado por:

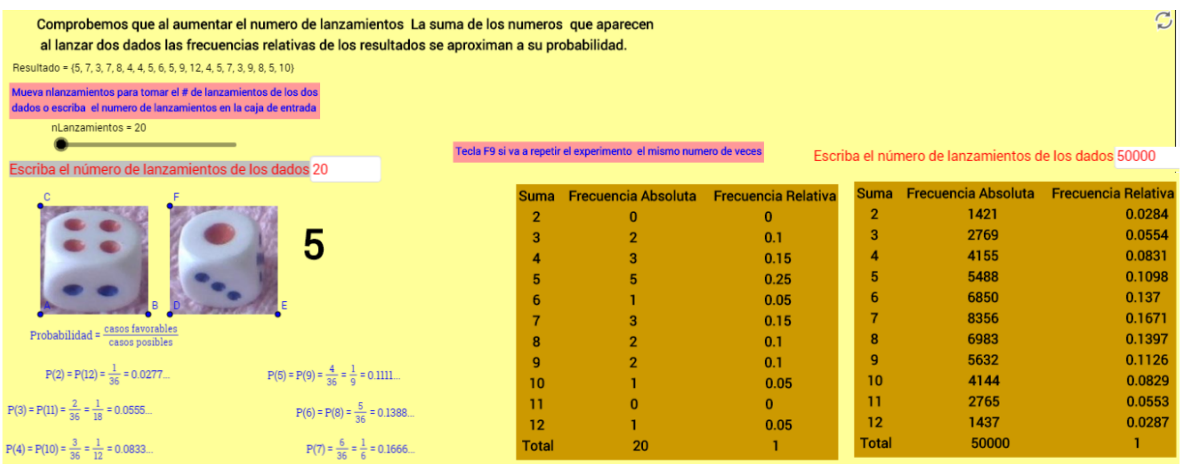
S= {(C, C), (S, S), (C, S), (S, C)}.

Los estudiantes completaron las tablas de las respectivas preguntas y realizaron una sola gráfica de barras para las simulaciones con cinco repeticiones cuando el número de lanzamientos son 4, 100, 1000, 10000, 30000 y 50000. Además, afirmaron que con 4 y 100 lanzamientos hay mucha variabilidad, con 1000 lanzamientos hay variabilidad pero disminuye comparada con las 100 simulaciones. Con 10000, 30000 y 50000 simulaciones ya hay una estabilidad en los resultados de las frecuencias relativas.

Referente a las ecuaciones de las semirrectas $y = 0.5$ e $y = 0.25$ indicaron que corresponden a las probabilidades teóricas de cada elemento del espacio muestral.

10.8. Análisis resultados Lanzamiento de dos dados n veces

Figura 14. Tablas de frecuencias comparativo Lanzamiento de dos monedas n veces



Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m125374. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

El applet esta disponible en la dirección web: http://www.geogebratube.org/student/m125374. Esta actividad se realizó en el salón de clase, para una mayor dinámica se llevó una guía de trabajo donde los estudiantes debían completar la siguiente tabla de frecuencias y responder las preguntas propuestas en el applet.

Tabla 8. Guía de resultados Lanzamiento de dos dados n veces

# lanzamientos	10		99		999		5000		38000		50000	
Suma	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
Total												

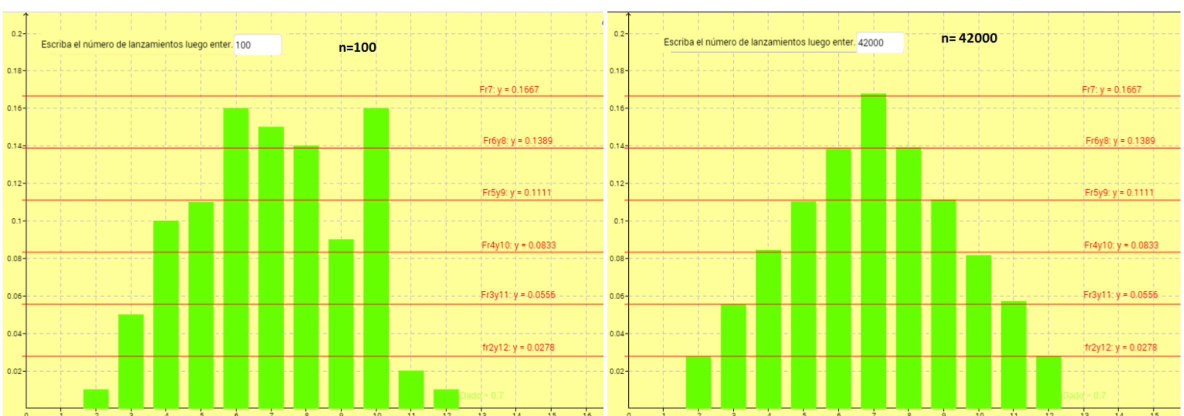
Inicialmente los estudiantes completaron la tabla propuesta y con ayuda de las probabilidades presentadas en el Applet, respondieron que a medida que el número de lanzamientos aumentan, las frecuencias relativas se aproximan a la probabilidad de cada uno de los elementos del espacio muestral.

Para las simulaciones de 10, 100 lanzamientos en 5 repeticiones indicaron que hay mucha variabilidad de los resultados. Las frecuencias relativas de los resultados aleatorios no son tan próximas a las probabilidades teóricas.

Para las simulaciones de 1000, 30000, 40000, 50000 indicaron que a medida que se aumentan los lanzamientos, los resultados aleatorios de las frecuencias relativas se aproximan a la probabilidad.

10.9. Análisis resultados Grafica de frecuencia relativa Lanzamiento de dos dados n veces

Figura 15. Gráfico de barras comparativo de las frecuencias relativas lanzamiento de dos dados n veces



Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m163661. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

El applet está disponible en la dirección web: http://www.geogebratube.org/student/m163661. Esta actividad se realizó en el salón de clases. Para una mayor dinámica, se llevó una guía de trabajo donde los estudiantes debían completar la siguiente tabla de frecuencias y responder las preguntas propuestas en el applet. A continuación se representa la información:

Tabla 9. Guía de resultados Grafica de frecuencia relativa Lanzamiento de dos dados n veces

# lanzamientos	20		500		1100		15000		42000		50000	
Suma	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r	F.A	f.r
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
Total												

De acuerdo con la tabla, se observa que a medida que el número de lanzamientos es más grande, las frecuencias relativas de cada uno de los resultados son próximos a la probabilidad de cada suceso, es decir, las barras son próximas a cada uno de los resultados del espacio muestral. ¿Explica? ¿Qué puedes concluir?

Los estudiantes completaron la tabla de frecuencias y respondieron que a medida que hay un número de lanzamientos más grande, los resultados se aproximan a la semirrectas, siendo la misma para los resultados 2 y 12, otra semirrecta para 3 y 11, otra semirrecta para 4 y 10, otra semirrecta para 5 y 9, otra semirrecta para 6 y 8 y otra semirrecta para 7.

Para las simulaciones 100, 1000, 10000, 30000, 50000 lanzamientos, los estudiantes respondieron que con un número de lanzamientos de 100 y 1000, se presenta variabilidad de los resultados aleatorios teniendo en cuenta las semirrectas que representan las probabilidades para cada elemento del espacio muestral. Con 10000, 30000, 50000 lanzamientos, los resultados de las frecuencias relativas se aproximan a las semirrectas que son las probabilidades teóricas así: $P(2) = P(12) = \frac{1}{36} = 0.0277.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.0278$

$$P(3) = P(11) = \frac{2}{36} = 0.0555.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.0256$$

$$P(4) = P(10) = \frac{3}{36} = 0.0833.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.0833$$

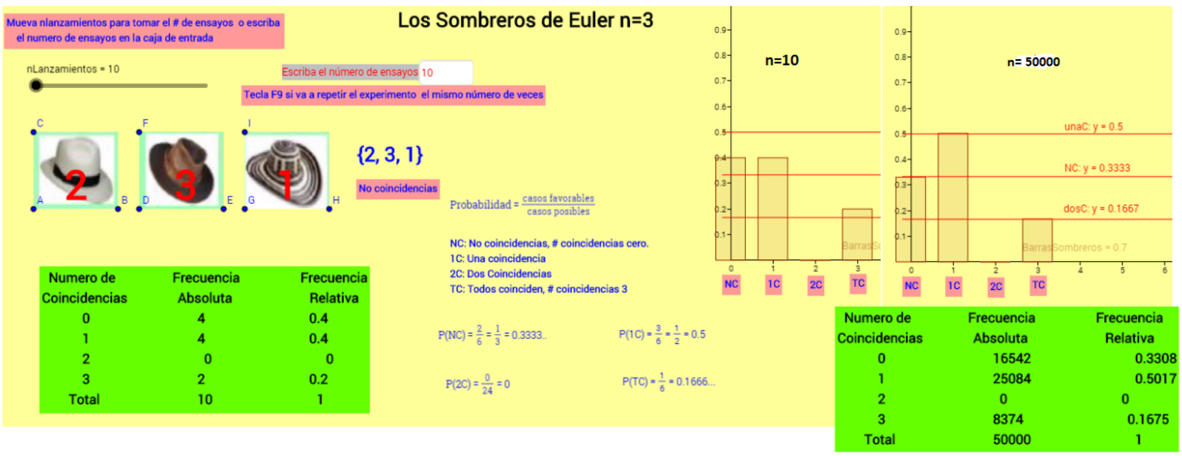
$$P(5) = P(9) = \frac{4}{36} = 0.111.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.111$$

$$P(6) = P(8) = \frac{5}{36} = 0.1388.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.1389$$

$$P(7) = \frac{6}{36} = 0.166.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.1667$$

10.10. Análisis resultados Sombreros de Euler n=3

Figura 16. Gráfico de barras y tablas de frecuencia comparativo sombreros de Euler n=3.



Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m299049. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

Esta actividad se propuso como taller extra clase indicando la dirección web http://www.geogebratube.org/student/m299049 donde se encuentra el applet. Los estudiantes respondieron las preguntas consignadas en el applet.

Para el desarrollo de la actividad fue necesario explicar a los estudiantes sobre la situación problema, indicando los posibles arreglos en que se pueden escoger los sombreros de manera aleatoria y cuándo en los posibles arreglos todos coinciden, hay una coincidencia, ninguna coincidencia.

Si S1: sombrero del señor 1, S2: sombrero del señor 2, S3: sombrero del señor 3 en resumen se obtiene lo siguiente:

Tabla 10. Coincidencias de los sombreros de Euler con n=3

S1	S2	S3	Posición Original
S1	S2	S3	1 **TC**: todos coinciden con su respectivo sombrero
S1	S3	S2	1**C** y 2~***C*** *hay una coincidencia la del señor 1 y 2 no coincidencia*
S2	S1	S3	1**C** y 2~***C***
S2	S3	S2	**NC ninguna coincidencia**
S3	S1	S2	**NC ninguna coincidencia**
S3	S2	S1	1**C** y 2~***C***

Luego de la anterior introducción, se presenta el applet con sus respectivas preguntas. Las preguntas relacionadas al número de grupos que se pueden formar al escoger los sombreros al azar y el número de coincidencias, fue asimilada fácilmente por los estudiantes gracias a la orientación dada en el ejemplo de la tabla anterior.

Para las demás preguntas los estudiantes hicieron la comparación de los resultados en cinco repeticiones cada uno para los siguientes números de ensayos: 10, 100, 1000, 30000, 40000, 50000. Indicaron que para los ensayos 10 y 100 se presenta variabilidad en los resultados, explicaron que las frecuencias relativas todavía no se acercan a las semirrectas y que para los ensayos 1000, 30000, 40000, 50000, a medida que el valor de **n** aumenta en estos ensayos, las frecuencias se aproximan a su probabilidad correspondiente. Representadas por las semirrectas del applet así:

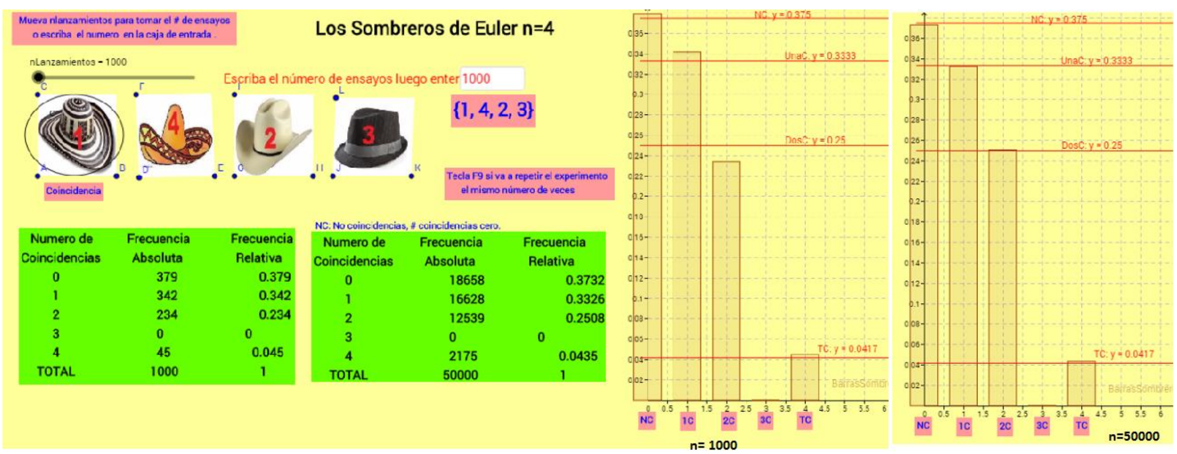
$$P(NC) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.333$$

$$P(1C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{32} = 0.5 \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.5$$

$$P(TC) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} = 0.6666.. \quad que\ corresponde\ a\ la\ semirrecta\ \ y = 0.1667$$

10.11. Análisis resultados Sombreros de Euler n= 4

Figura 17. Gráfico de barras y tablas de frecuencia comparativo sombreros de Euler n=3.



Fuente: http://tube.geogebra.org/student/m299055. Por Jesús Evenson Pérez Arenas

Esta actividad se propone como taller extra clase indicando la dirección web: http://tube.geogebra.org/student/m299055 donde se encuentra el applet. Responden las preguntas consignadas allí.

Para las preguntas P1 hasta P6 explicaron que la realización de la actividad fue mucho más dispendiosa a la anterior, porque los arreglos ya son en grupos de a cuatro indicando que hay 24 formas de escoger los sombreros aleatoriamente, presentaron adecuadamente una tabla de resultados siguiendo la tabla ejemplo Coincidencias de los sombreros de Euler con n=3.

Para las demás preguntas los estudiantes hicieron la comparación de los resultados en cinco repeticiones cada uno para los siguientes números de ensayos: 10, 100, 1000, 30000, 40000, 50000. Indicaron que para los ensayos 10, 100, 1000 se presentó variabilidad en los resultados, explicaron que las frecuencias relativas todavía no se acercan a las semirrectas, pero que es mucho mejor la estabilidad de 1000 ensayos comparada con 100 ensayos y que para los ensayos 10000, 30000, 40000, 50000 a medida que el valor de **n** aumenta de estos ensayos, las frecuencias se aproximan a su probabilidad correspondiente representadas por las semirrectas del applet así:

$$P(NC) = \frac{9}{24} = 0.375 \quad \textit{que corresponde a la semirrecta } \ y = 0.375$$

$$P(1C) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 0.333\ldots \quad \textit{que corresponde a la semirrecta } \ y = 0.3333$$

$$P(2C) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \textit{que corresponde a la semirrecta } \ y = 0.25$$

$$P(TC) = \frac{1}{24} = 0.04166.. \quad \textit{que corresponde a la semirrecta } \ y = 0.0417$$

10.12. Análisis de resultados la Probabilidad de los Sombreros de Euler

Esta actividad se propone como taller extra clase indicando la dirección web: http://tube.geogebra.org/student/m299059 donde se encuentra el applet. Los estudiantes respondieron las preguntas consignadas allí.

Para el desarrollo de la actividad fue necesario explicar previamente a los estudiantes el concepto factorial de un número con el propósito de resolver la fórmula P(n): Nº de permutaciones en las que ninguna ocupa su posición original para resolver las preguntas desde P1 hasta P7 donde deben utilizar las fórmula general y recursivas para hallar P(n) de: P(1) , P(2) , P(3) , P(4) , P(5), P(6), y la fórmula Pn: La probabilidad de no coincidencia con ayuda de la tabla presentada en el applet. Los estudiantes resolvieron las operaciones de forma correcta y comprendieron hasta qué número se puede utilizar la fórmula general y recursivas.

Para las preguntas P8 hasta P12 donde deben hacer una comparación entre la fórmula Pn con la función $f(n) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$, afirmaron que a medida que el valor de **n** aumentan los valores de la función, se aproximan a algunas probabilidades de Pn. (La probabilidad de no coincidencia). Y de la pregunta P13: Ver gráfico del applet. ¿Qué relación encuentras con los gráficos de barras, la ecuación de la semirrecta y el gráfico de la función f(n)? Explica.

Los estudiantes dedujeron positivamente que la semirrecta representa el valor de aproximación de Pn cuando n va aumentando, los gráficos de barras explican que a medida que se aumentan los números de sombreros, la probabilidad de no coincidencias se acerca a la semirrecta $y = 0.36788$ y la función, a medida que n crece, este se aproxima a 0.36788 acercándose a la semirrecta.

10.13. Análisis de resultados desarrollo del instructivo applet lanzamiento de una moneda n veces.

Este ejercicio se realizó con cinco estudiantes de cada grado resolvieron paso a paso el instructivo diseñado para la construcción del applet lanzamiento de una moneda n veces en Geogebra.

Para esta actividad a cada estudiante se le entregó el instructivo en un documento de Word. Se dio la orientación de seguir los pasos ilustrados en el documento, es de anotar, que para el desarrollo de este taller, se seleccionaron los estudiantes con mejor dominio del programa Geogebra, ante lo cual se observó:

Es necesario que el profesor orientador esté presente para resolver las dudas de las instrucciones.

Este es un proceso más lento, en los talleres anteriores sólo se interactuaba con el applet y se resolvían las preguntas, en esta actividad había que seguir el instructivo, para lo cual se requiere de un esfuerzo y habilidad para entender lo que se está desarrollando en el applet.

Los estudiantes expresaron lo interesante cuando vieron ejecutar el aplicativo de manera adecuada y comprendieron la importancia de llevar el control de las instrucciones, afirmando que se debe tener una lógica correcta para obtener buenos resultados.

10.14. Resultados presentaciones proyecto applets “ley de los grandes números”

Dos estudiantes del grado décimo mostraron en un ejercicio de prácticas novedosas de enseñanza aprendizaje, el proceso realizado en las clases con la exposición de applets ley de los grandes números. Este trabajo ha sido presentado en algunas ferias; primero a nivel interno en la institución educativa Antonio Donado Camacho; luego a nivel municipal en Rionegro. También, en el VI congreso internacional de formación y modelación en ciencias básicas en la universidad de Medellín el 8 de mayo de 2014 y su presentación más reciente fue en el VII congreso internacional de formación y modelación en ciencias básicas en la universidad de Medellín el 29 y 30 de abril de 2015.

En la primera fase, 2 de octubre de 2014, se expuso en la feria del emprendimiento al interior de la institución educativa, donde estudiantes de todos los grados, es decir, de preescolar a once, además de docentes y padres de familia tuvieron la oportunidad de conocerlo. En esta ocasión, los estudiantes explicaron con su propio lenguaje y sustentaron los conocimientos aprendidos en clase, usando la herramienta tecnológica software Geogebra. Además, resolvieron los cuestionamientos recibidos por las personas que visitaban el módulo, “ley de los grandes números”. Argumentaron sus respuestas: afirmando que a medida que se aumentan los ensayos, las frecuencias relativas de los experimentos aleatorios se acercan a un número llamado probabilidad, términos usados con gran propiedad por los estudiantes expositores. Es de resaltar que el proyecto fue elegido para exponerse en la segunda fase a nivel municipal.

En una segunda fase, a nivel municipal en noviembre 20 de 2014, en la feria de la creatividad, innovación y emprendimiento escolar 2014, los estudiantes expositores se enfrentaron con un público diverso: estudiantes pares de otras instituciones, docentes, profesionales afines a la educación en el municipio y estudiantes universitarios. Los expositores demostraron seguridad y dominio del tema, usando la herramienta tecnológica software Geogebra con los aplicativos applets "ley de los grandes números". Asimismo socializaron la forma como adquirieron el conocimiento de la probabilidad frecuentista, describiendo el proceso al que los llevó el profesor de una manera didáctica y lúdica al aprendizaje de la teoría de la probabilidad con los diferentes experimentos aleatorios, haciendo uso de las TIC. El proyecto contó con la aceptación e interés del público visitante recibiendo comentarios positivos por parte del jurado calificador. Se afirmó que es una estrategia atractiva para que los estudiantes puedan adquirir conocimientos abstractos mediante juegos de azar, interactuando con las TIC.

Este proyecto también fue presentado como ponencia en el VI Congreso internacional de formación y modelación en ciencias básicas en la universidad de Medellín el 8 de mayo de 2014, con el título *"Diseño de instrumento para la enseñanza de la probabilidad a través de Geogebra como herramienta de modelización en la educación media de la institución educativa Antonio Donado Camacho en el municipio de Rionegro, Antioquia"*. En él estuvieron como ponentes Jesús Evenson Pérez Arenas y Juan Carlos Salazar Uribe.

La relevancia de la ponencia radica en el uso de las TIC en la educación media, demostrando conocimientos de: ¿Cómo utilizar un software educativo para mejorar la comprensión del concepto de probabilidad frecuentista en los estudiantes de básica media? (El software al que se hace referencia es Geogebra).

La presentación más reciente de este proyecto se llevó a cabo en el VII congreso internacional de formación y modelación en ciencias básicas en la universidad de Medellín el 29 y 30 de abril de 2015, evento en el que fue aceptado y presentado como cursillo. Para su aprobación se presentó un resumen del proyecto, haciendo relevancia en la construcción "applets ley de los grandes números diseñados en la página wiki" (Pérez, 2014). Esta Wiki está disponible para todos los públicos como instrumento didáctico y educativo. A junio 2015 ha recibido más de 6700 visitas, aspecto que refleja el interés por el tema: ley de los grandes números o la estrategia utilizada para la enseñanza aprendizaje.

El diseño de elaboración de las guías didácticas para la construcción de los applets con sus respectivas instrucciones, utilizando Geogebra como modelo para representar los ensayos de los experimentos aleatorios desde 0 hasta 50000 repeticiones Exponiendo el proceso realizado con los estudiantes de la institución educativa Antonio Donado Camacho.

La exposición más reciente, se presentó con el título del cursillo: "Diseño de instrumento para la enseñanza de la ley probabilística de los grandes números a través de Geogebra como herramienta de modelización en la educación media de la institución educativa Antonio Donado Camacho en el municipio de Rionegro, Antioquia." Durante este evento y con una intensidad de tres horas, se explicó el instructivo del lanzamiento de una moneda n veces y la situación problema, los sombreros de Euler con n=3.

Lo más relevante del cursillo fue el acompañamiento de dos estudiantes de grado once como monitores en la presentación del curso. Al final los asistentes hicieron referencia a la facilidad de interacción con los applets y la importancia de comparar las frecuencias relativas, conforme el número de ensayos va aumentando con las probabilidades clásicas tal como explica la ley de los grandes números.

11. Conclusiones y Recomendaciones

11.1. Conclusiones

El diseño applets “Ley de los grandes números” con el programa Geogebra y disposición en la web, son unos recursos útiles y didácticos para facilitar en los estudiantes la asimilación del concepto de probabilidad frecuentista, es así como mediante la comparación de las frecuencias relativas de los experimentos aleatorios, a medida que los n ensayos van aumentando, las frecuencias relativas se aproximan a su probabilidad. Estos applets pueden ser utilizados por otros profesores donde pueden formular sus propias preguntas para desarrollar las actividades en clase.

Podría decirse que una de las bondades de este diseño es que es de fácil comprensión para los estudiantes, ya que la representación de las gráficas de frecuencias relativas con sus respectivas tablas de frecuencia comparando las probabilidades de cada suceso aleatorio, representado en ecuaciones de semirrectas, nos proporcionan ayuda para deducir que si el número de ensayos es pequeño no es representativo, hay variabilidad en los resultados aleatorios; pero que a medida que el número de ensayos aumenta, las frecuencias relativas se estabilizan, es decir, tienden a su probabilidad.

Durante la implementación de esta propuesta, se abordaron conceptos teóricos en probabilidad con objetos reales, en experimentos aleatorios simples con una moneda y un dado, acercando en un primer momento, las TIC con el software educativo Geogebra. Se continúa subiendo el nivel de complejidad con el fin de introducir experimentos aleatorios compuestos con un mayor número de elementos como el caso de dos monedas y dos dados, donde los estudiantes demuestran en las prácticas con los applets, el conocimiento de probabilidad frecuentista. También usan argumentos con mayor propiedad e independencia en el seguimiento de instructivos en los que predicen los resultados, ejecutando los experimentos aleatorios que se aproximen a las semirrectas de las probabilidades a medida que el número de ensayos es mayor.

Por otra parte, el proceso de seguir instrucciones se ejercita con los instructivos “applets ley de los grandes números” ya que son actividades que requieren práctica, conocimiento de las herramientas de software, para este caso, Geogebra; al tiempo que los estudiantes incorporan habilidades y destrezas como proceso lógico para obtener resultados y se orientan con mayor interés hacia la comprensión del funcionamiento de los programas de software.

Además, el desarrollo del applet en Geogebra, las coincidencias de los sombreros de Euler, son un ejemplo donde los estudiantes deben buscar las alternativas de solución e indicar el número de formas posibles, conformando arreglos para obtener el espacio muestral y de estos descubrir las probabilidades de las coincidencias, incluyendo de forma simple el concepto de permutaciones como fue el caso de los sombreros de Euler cuando n=3, en este caso se forman arreglos de 3 en 3, donde no se permite las repeticiones y donde influye el orden de sus elementos dentro del arreglo, concepto ampliado en los sombreros de Euler cuando n=4.

Otro importante applet, un poco diferente a los demás incluidos en el diseño, fue el applet probabilidad de las coincidencias de los sombreros de Euler, se considera interesante en el sentido de que se orienta al estudiante a verificar el descubrimiento de las fórmulas demostradas por Euler, como es caso de P(n): Nº de permutaciones, en las que ninguna ocupa su posición original, sus formas recursivas de solución combinando el concepto de Pn: la probabilidad de no coincidencias comparada con la función $f(n) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$ incluyendo el concepto de límite de Pn, esto es cuando n va creciendo indefinidamente, esta función se aproxima a el número $\frac{1}{e} = 0.36788$ donde se estabiliza la probabilidad de no coincidencias representado gráficamente tal como lo demostró Euler. Actividades como estas desarrollan en los estudiantes alternativas de solución de problemas, el seguimiento de instrucciones facilitando la deducción de las demostraciones.

Es evidente cómo la incorporación de los elementos tecnológicos como los software educativos en este caso particular, Geogebra, donde la aplicación del programa es gratuita, de libre uso y con funcionamiento sin necesidad de conexión a internet, nos ofrece nuevas alternativas en los métodos de enseñanza aprendizaje, de forma interactiva y lúdica, donde los estudiantes muestran buena disposición para la adquisición de nuevos conocimientos, manifestando asombro cuando, con el uso de los software, pueden resolver de forma rápida las tablas de frecuencia, los gráficos de frecuencias, los gráficos de las funciones.

El uso del software Geogebra, también permite la aplicación de las fórmulas de probabilidades, facilitando las explicaciones temáticas y las demostraciones de una manera práctica, consolidando los conocimientos abstractos en forma real con los aplicativos. Se evidenció cómo los estudiantes, a través de los applets construidos en Geogebra, fueron afianzando más el concepto de probabilidad frecuentista asociada a la "ley de los grandes números".

11.2. Recomendaciones

El estudio Applets "ley de los grandes números" puede ser ampliado con el mismo programa utilizando las probabilidades de las frecuencias relativas relacionadas con sucesos con y sin reposición, como es el caso de las balotas en grupos de diferentes colores o de igual forma utilizando cartas de la baraja y otros estudios relacionados como es el principio fundamental de conteo, las variaciones, permutaciones y combinaciones.

Otro de los alcances mencionados, es el caso de lanzar un dado 6 veces es posible que las frecuencias absolutas sean igual a uno, es decir, que se obtenga en la lista "resultado"= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, indiferente el orden o el caso de lanzar un dado n veces hasta obtener un 1, es utilizar estos applets para verificar las funciones de probabilidad discretas, como son la distribución geométrica y la distribución binomial que tiene un comando en geogebra disponible para resolver estas situaciones problema

12. Referencias

Álvarez, A., Gastélum, D. & Insunza, S. (2009). *Desarrollo de software para El aprendizaje y razonamiento probabilístico: El caso de SIMULAPROB*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, pp 135-149 Recuperado de http://www.pucrs.br/famat/viali/doutorado/sat/literatura/artigos/pacotes/Union_018_015.pdf

Amos, J. (2010). *Fundamentos de la abreviada rapidez en la enseñanza en Didáctica Magna* (pp 94 - 108). (19ª Edición).México: Editorial Porrúa.

Amos, J. (1983): *Didáctica Magna*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/2359Socarras-Maq.pdf

Batanero, C. (2006). *Razonamiento probabilístico n la vida cotidiana: un desafío educativo*. Universidad de Granada, España.

Constitución política de Colombia actualizada. Recuperado de http://wsp.presidencia.gov.co/Normativa/Documents/Constitucion-Politica-Colombia.pdf

Fernández, S. (2013) *¿Es predecible el azar?* Recuperado de http://academica-e.unavarra.es/bitstream/handle/2454/10272/Santiago_Fernandez.pdf?sequence=1 pdf.

Godino & Batanero. *Estocástica y su Didáctica para maestros*. Proyecto Edumat - Maestros. Universidad de Granada, octubre de 2004. http:/ www.ugr.es/local/godino/ Edumat - Maestros/.

GODINO, J., Roa, R., Recio, Á., Ruiz, F., & Pareja, J. (2007). *Análisis didáctico de un proceso de estudio de la ley empírica de los grandes números*. Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156, 8(2). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ley_grandes_números.pdf

Gutiérrez, C. (1994). *Filosofía de la estadística*. (pp 32). España: Servicio de publicaciones universidad de valencia Recuperado de http://books.google.com.co/books?id=rp057peo95QC&pg=PA32&dq=ley+grandes+números+Poisson+(1837),&hl=es&sa=X&ei=afRSVNqjBoikgwTo4IKoCA&ved=0CCEQ6AEwAQ#v=onepage&q=ley%20grandes%20números%20Poisson%20(1837)%2C&f=false

Hernández, Fernández & Baptista. *Metodología de la investigación*. Cuarta Edición. Editorial McGrawHill. México. 2007.

ICFES, (2013). *Resultados de noveno grado en el área de matemáticas*. Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jspx

Jiménez, L & Jiménez, J. (2004). *Enseñar probabilidad en primaria y secundaria ¿Para que? Y ¿Por que?*. Programa de matemática en matemática educativa. Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

José, R. (Octubre 2008). *Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática*. Revista Iberoamericana de Educación. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/2359Socarras-Maq.pdf

Klein, J. (1997).*Statistical Visions in Time: A History of Time Series Analysis*.(pp 158). Estados unidos: Cambridge University Press Recuperado de http://books.google.com.co/books?id=rlBUTabMo4wC&pg=PA158&dq=Chebyshev+(1867)&hl=es&sa=X&ei=afxSVLuRLYqrgwS-1YK4BA&ved=0CDIQ6AEwAw#v=onepage&q=Chebyshev%20(1867)&f=false

La Ley General de Educación (Ley 115 de 1994). Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Lara, J. (1997): "*Estrategias para un aprendizaje significativo-constructivista*", en: Revista Enseñanza, 15, pp. 29-50. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/2359Socarras-Maq.pdf

Markus Hohenwarter, (2009). *Manual Oficial de la Versión 3.2 Geogebra*. Universidad de Salzburgo,Austria. Recuperado de http://www.geogebra.org

Martin, F. (2011). *Diccionario de Estadística Económica y Empresarial*. (pp 92). España: ECOBOOK editorial del economista. Recuperado de http://books.google.com.co/books?id=E29TovZnjgoC&pg=PA92&dq=Cantelli++ley+fuerte+de+los+grandes+números&hl=es&sa=X&ei=BBFTVKfUIMqqgwTo4YKIBg&ved=0CCIQ6AEwAQ#v=onepage&q=Cantelli%20%20ley%20fuerte%20de%20los%20grandes%20números&f=false

Ministerio de educación nacional. (1998). *Serie Lineamientos curriculares*. pág. 18.

Núñez, R. (2007). *Taller de estadística y probabilidad*. http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Rau__Nunez_Cabello_-_TALLER_DE_ESTADISTICA_Y_PROBABILIDAD.pdf

Perez, J. (2014). *Applets ley de los grandes números*. [Wiki probabilidades] de http://maescentics2.medellin.unal.edu.co/~jeeperezar/wiki/

Pérez, M. (2009). *Una Historia de Las Matemáticas: Retos Y Conquistas a Través de Sus Personajes*. (pp 316.) España: Editorial visión libros. Recuperado de http://books.google.com.co/books?id=4YOfMzU5bCUC&pg=PA316&dq=Ley+de+los+grandes+números:+Ars+Conjectandi&hl=es&sa=X&ei=7YVSVOz7GYWUNoLug9gP#v=onepage&q=Ley%20de%20los%20grandes%20números%3A%20Ars%20Conjectandi&f=false

Posada, M. (2005).*Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas.* (1ra ed.) Medellin, Colombia: Editorial prensa libre S.A. pág. 117.

Salinero, P. *Historia de la Teoría de la Probabilidad.* Recuperado de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/salinero_probabilidad.pdf.

Schmidt, M. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Ministerio de educación nacional. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf

Triola, M. (2009). *Estadística*. (10ma Edición).México: Pearson Educación.

Yáñez, G & Jaimes, E. (2013). *Efectos de la simulación en la comprensión de la ley de los grandes números.* Revista Integración, pp. 69-86 Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327028023007 .