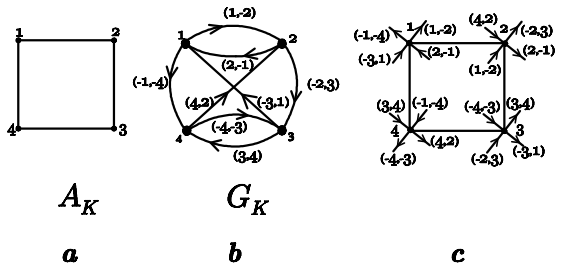

Figura 1-13: Ejemplo de un grafo G_K.

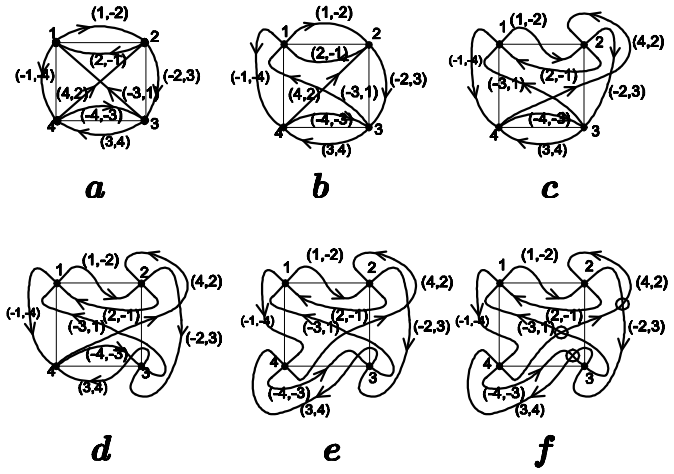

Figura 1-14: Organización de las aristas de G_K.

Por último cambiemos cada vértice de G_K por un cruce clásico de acuerdo a la regla mostrada en la Figura 1-15.

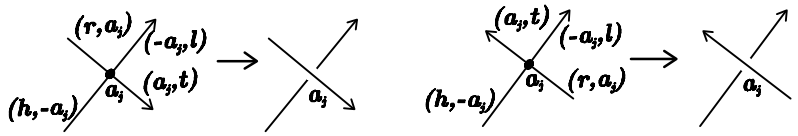

Figura 1-15: Transformación de vértices en cruces.

Haciendo tales cambios sobre todos los vértices de G_K producimos un diagrama de un nudo virtual, que denotaremos por D_K, con la propiedad de que $(C(D_K), S(D_K)) = K$, ver Figura 1-16.

Por otro lado, podemos obtener realizaciones de K que no provienen del proceso anterior, por ejemplo, la Figura 1-17 muestra una de tales realizaciones de K, donde se resume la prueba de ser virtualmente equivalente a uno de los diagramas producidos a partir de realizaciones de

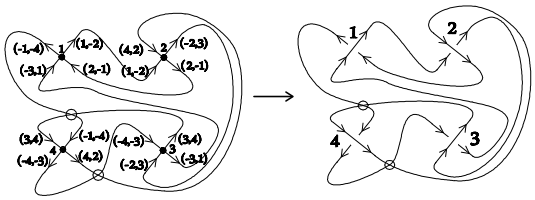

Figura 1-16: Construcción de un diagrama de un nudo virtual para K.

G_K.

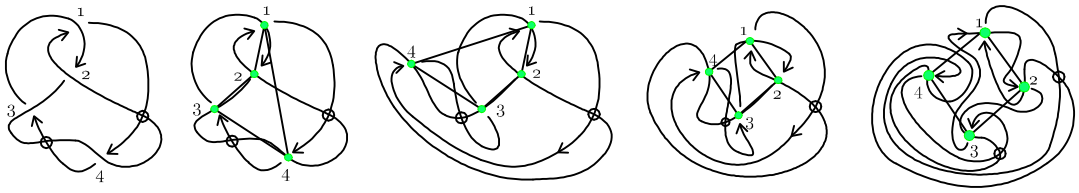

Figura 1-17: Realización de K.

La demostración del siguiente teorema es una extensión de lo hecho en el ejemplo anterior.

Teorema 1.4.1 *Todo código nudal $K = ((i_1, ..., i_{2n}), (e_1, ..., e_n))$ representa un único nudo virtual, salvo movimientos atajos.*

Prueba. Sea $K = ((i_1, ..., i_{2n}), (e_1, ..., e_m))$ un código nudal y sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $\{i_1, ..., i_{2n}\} = \{a_1, ..., a_n\} \cup \{-a_1, ..., -a_n\}$ y $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

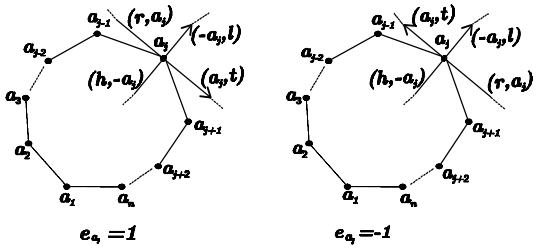

Figura 1-18: Organización de los vértices de G_K.

Construyamos un n-ágono regular y etiquetemos sus vértices con los números $a_1, ..., a_n$ en el sentido de las manecillas de reloj, denotemos dicho n-ágono por A_K. Ahora consideremos el grafo dirigido G_K cuyos vértices son $V(G_K) = \{a_1, \cdots, a_n\}$ y sus aristas, $E(G_K) = \{(|i_1|, |i_2|),...,(|i_{2n}|, |i_1|)\}$. Notemos que se permiten aristas repetidas y bucles. Las aristas

se etiquetarán por $\{(i_1, i_2),...,(i_{2n}, i_1)\}$, donde (i_k, i_{k+1}) denota una arista orientada desde $|i_k|$ hasta $|i_{k+1}|$.

Ahora bien, para todo cruce a_j de K, $j = 1, 2, ..., n$, existen $r = r(j), t = t(j)$, $h = h(j)$, $l = l(j) \in \{i_1, ..., i_n\}$ tales que $(h, -a_j)$, $(-a_j, l)$, (r, a_j), $(a_j, t) \in E(G_K)$, entonces G_K es un grafo 4 valente y, además, los grados de salida y entrada de sus vértices son iguales, entonces podemos encontrar una realización de G_K de tal forma que, en cada vértice a_j del grafo G_K, las aristas $(h, -a_j)$ y $(-a_j, l)$ formen entre sí un ángulo de 180° y se orienten hacia afuera del polígono; las aristas (r, a_j) y (a_j, t) formen un ángulo entre sí de $180°$ y el segmento formado sea perpendicular al segmento $(h, -a_j)$, $(-a_j, l)$, de acuerdo al signo del cruces a_j, como se muestra Figura 1-18. Es posible que tales realizaciones de G_K no sean planas, en este caso, a las intersecciones transversales, que no sean vértices, las tomaremos como cruces virtuales, además G_K no es único, pues depende de cómo conectamos los vértices entre sí. En un primer paso, sólo consideraremos realizaciones de G_K en las que sus vértices conservan la forma mostrada en la Figura 1-18.

Ahora reemplacemos cada vértice de G_K por un cruce clásico, como se indica en la Figura 1-15, obtenemos un diagrama de un nudo virtual, que denotaremos por D_K, con la propiedad $(C(D_K), S(D_K)) = K$.

Como dijimos anteriormente G_K no es único, por tanto D_K no es un diagrama único, con lo que debemos ver que todos esos diagramas deben ser virtualmente equivalentes entre si. En efecto, sea K un código nudal y sean D_K y D'_K dos diagramas de nudos virtuales construidos, a partir de K, mediante el procedimiento anterior. Empecemos considerando el caso en que D_K y D'_K difieren en la forma en cómo conectamos los vértices a_i y a_j mediante la arista $(-a_i, a_j)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen dos puntos a y b en $(-a_i, a_j)$ tales que D_K y D'_K difieren en como conectamos los puntos a y b. Sean $A_{(a,b)}$ y $\widetilde{A}_{(a,b)}$ los segmentos que unen a y b relativos a los diagramas D_K y D'_K, respectivamente. Puesto que $A_{(a,b)}$ y $\widetilde{A}_{(a,b)}$ están contenidas en aristas de dos realizaciones de G_K, ellas sólo pasan por cruces virtuales, por tanto podemos aplicar el respectivo movimiento atajo sobre D_K y obtener D'_K. En general, si D_K y D'_K son dos diagramas asociados a K, mediante el procedimiento anterior, entonces existen D^i_K, $i = 0, 1, 2, ..., s, s+1$, tales que $D^0_K = D_K$, $D^{s+1}_K = D'_K$, D^i_K y D^{i+1}_K son iguales excepto por la forma en que se conectaron dos vértices de G_K. Por lo anterior, D^i_K es virtualmente equivalente a D^{i+1}_K, $i = 0, ..., s$, con lo que D_K y D'_K son virtualmente equivalentes.

Veamos ahora el caso general. Sea D un diagrama de un nudo virtual con cruces etiquetados con los números $a_1, ..., a_n$, de tal forma que $(C(D), S(D)) = K$. Coloquemos un punto en cada cruce de D y conectemos, mediante una recta, los puntos correspondiente a los cruces a_i y a_{i+1}, $i = 1, ..., n$, donde $a_{n+1} = a_1$. Del proceso anterior construimos un grafo A_D, con vértices etiquetados con los números $a_1, ..., a_n$. Ahora deformemos A_D hasta convertirlo en A_K. Es claro que dicha transformación de A_D conlleva una deformación del diagrama D en un diagrama D'

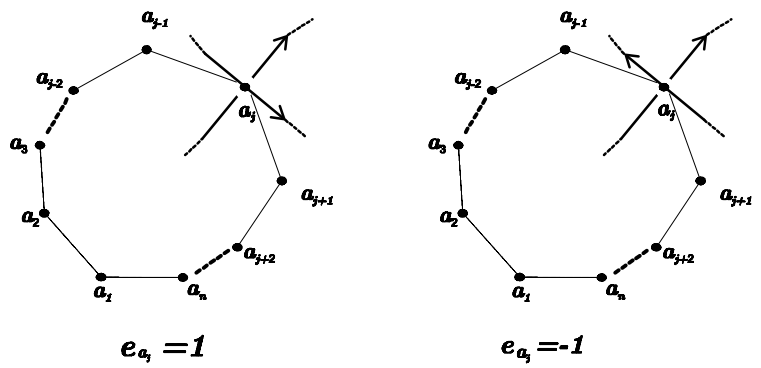

Figura 1-19: Ubicación de los cruces de D sobre los vértices de A_K.

de un nudo virtual con cruces ubicados sobre los vértices de A_K. Haciendo un giro de un cierto ángulo θ_j para una vecindad de $\mathbb{R}^2$ que sólo contenga el cruce a_j de D', $j = 1, ..., n$, dicho cruce quedaría en una de las formas dadas en la Figura 1-19. Repitiendo este proceso para cada cruce de D', se prueba que D' es uno de los diagramas D_K. ■

En el teorema anterior a cada código nudal se le asignó un diagrama de un nudo virtual que tiene dicho código, y se probó que el diagrama es único salvo movimientos atajo, en otras palabras, dos diagramas de nudos virtuales asociados a un mismo código corresponden al mismo nudo virtual. El siguiente teorema muestra que la asignación dada en el teorema anterior se puede extender a clases de equivalencia.

Teorema 1.4.2 *Existe una correspondencia biunívoca entre la categoría de los nudos combinatorios y la de los nudos virtuales.*

Prueba. Sea $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ un código nudal. Por el Teorema 1.4.1 a K se le puede asignar un único nudo virtual, que denotaremos por D_K. La construcción de D_K es independiente de las transformaciones de tipo A, B y C.

Analicemos los movimientos de Reidemeister I, II y III por separado. Supongamos que K_1 y K_2 están en forma estándar, es decir, utilizamos los enteros $1, 2, ..., n$ para etiquetar los vértices.

Tipo I: Vamos a considerar el caso en que $K_1 = ((A, n, -n, B), (e_1, \cdots, e_n))$ y $K_2 = ((A, B), (e_1, \cdots, e_n))$, con $n > 0$. Por el Teorema 1.4.1, podemos suponer que el diagrama D_{K_1} puede ser dibujado de tal forma que, en una vecindad que sólo contenga al cruce n, D_{K_1} se vea como se muestra en la Figura 1-20.

Si aplicamos movimientos Tipo I sobre D_{K_1} obtendremos un diagrama de un nudo virtual, denotado D'_{K_1}. Ahora bien, $(C(D'_{K_1}), S(D'_{K_1})) = K_2$, así, por el Teorema 1.4.1, $D'_{K_1} \approx D_{K_2}$, de donde, $D_{K_1} \approx D_{K_2}$.

Para el otro caso del movimiento de Reidemeister de Tipo I procedemos de forma similar.

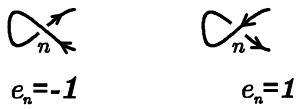

Figura 1-20: Movimiento tipo I.

Tipo II: Consideremos el caso en el que $K_1 = ((A, n-1, n, B, -(n-1), -n, C), (e_1, \cdots, e_n))$, $K_2 = ((A, B, C), (e_1, \cdots, e_n))$ y $e_{n-1} = -e_n$. Por el Teorema 1.4.1, podemos suponer que el diagrama D_{K_1} puede ser dibujado de tal forma que, en una vecindad del cruce n, D_{K_1} se vea como se muestra en la Figura 1-21.

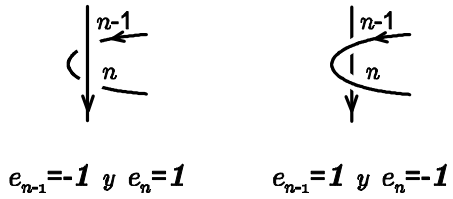

Figura 1-21: Movimiento tipo II.

Si aplicamos movimientos Tipo II sobre D_{K_1} obtendremos un diagrama de un nudo virtual, que denotaremos por D'_{K_1}. Ahora bien, $(C(D'_{K_1}), S(D'_{K_1})) = K_2$, por tanto, por el Teorema 1.4.1, $D'_{K_1} \approx D_{K_2}$, de donde, $D_{K_1} \approx D_{K_2}$.
Para los otros casos del movimiento Tipo II procedemos de forma similar.
Tipo III: La prueba para el movimiento Tipo III es análoga .
Recordemos que NC representa el conjunto de los código nudales y $\mathcal{VD}$ el conjunto de los diagramas de nudos virtuales. Podemos definir la siguiente función: $\varphi : NC/_{\approx} \to \mathcal{VD}/_{\sim}$, dada por $\varphi([K]) = [D_K]$. Debido a que los movimientos extendidos de Reidemeister, en términos de los nudos combinatorios, corresponden a movimientos I, II y III y se prueba fácilmente que: si K_1 y K_2 son nudos combinatorios, tales que $D_{K_1} \approx D_{K_2}$, entonces $K_1 \approx K_2$, con lo que, la función φ es inyectiva.
Por otro lado, sea D un diagrama de un nudo virtual. Entonces $K = (C(D), S(D)) \in NC$ y, por el Teorema 1.4.1, $\varphi(K) = D_K$ es equivalente a D, por tanto φ es sobreyectiva. ■

1.5 Una aproximación topológica a la teoría de los nudos virtuales

En la sección anterior definimos, de una manera intuitiva, diagrama de un nudo sobre una superficie, la cual es parecida a la hecha para el caso clásico, por tanto es natural pensar en los

movimientos de Reidemeister a nivel de este tipo de diagramas.
En esta sección hacemos un estudio más detallado de ese concepto y mostramos que ellos constituyen otra opción para estudiar nudos virtuales. Para ello debemos considerar algunas definiciones, tales como la de equivalencia estable, definida por Carter, Camada y Saito [6], de nudos en superficies engrosadas. Ellos probaron que las clases de equivalencia estable de los embebimientos de S^1 en $\Sigma \times [0,1]$, donde Σ denota una superficie orientable y compacta, están en correspondencia biunívoca con la categoría de los nudos virtuales [6]. Los conceptos de esta sección los incluimos por completes, pero no se usan en el resto del trabajo.

1.5.1 Superficie ambiente de un nudo virtual

En esta sección nos concentraremos en nudos en superficies engrosadas. Las definiciones y resultados que daremos a lo largo de ésta se pueden extender de manera natural a enlaces. Además, sin temor a ambigüedades, usaremos la palabra nudo para referirnos a nudos en superficies engrosadas. En el resto de esta sección Σ denotará una superficie, conexa, orientable y compacta, posiblemente con frontera.
Sea $(\Sigma \times [0,1], K)$ un nudo orientado. Usaremos la convención (Σ, K) para referirnos al nudo $(\Sigma \times [0,1], K)$ y diremos que K es un diagrama de un nudo orientado sobre la superficie Σ o que Σ es una *superficie ambiente* para K, además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que en el caso que Σ tenga frontera se debe cumplir $K \cap \partial\Sigma = \phi$. Los nudos clásicos tendrán la notación (S^2, K) o simplemente K. Los cruces de un diagrama orientado pueden ser clasificados como positivos o negativos.
Al igual a como le asociamos un código a un diagrama de un nudo clásico le asociamos un código a un nudo (Σ, K) orientado y, sin temor a confusión, lo denotaremos por $(C(K), S(K))$.

Definición 1.5.1 *Sea D un diagrama de un nudo virtual y sea (Σ, K) un nudo. Diremos que (Σ, K) es una realización de D si y sólo sí D y (Σ, K) tienen asignados el mismo código nudal, salvo transformaciones de tipo A, B ó C. En este caso diremos que D se pudo embeber en la superficie Σ o que D es realizable sobre la superficie Σ.*

La Figura 1-22 nos ilustra una realización de un diagrama de un nudo virtual sobre el toro. Notemos que los cruces virtuales desaparecen y son vistos sólo al proyectar, de cierta forma, el toro en el plano.
Puesto que no hay una única forma de embeber un diagrama de un nudo virtual en una superficie, hay que tener cuidado en la forma en que se realiza el embebimiento, ya que esto podría afectar la naturaleza del nudo virtual. Por ejemplo, la Figura 1-23 muestra un embebimiento prohibido, sobre el toro, del diagrama del nudo virtual de la Figura 1-22. Usando la teoría de invariantes, ver Capítulos 3 y 4, se puede probar que los diagramas K y K^v, mostrados en la Figura 1-23, no son virtualmente equivalentes.

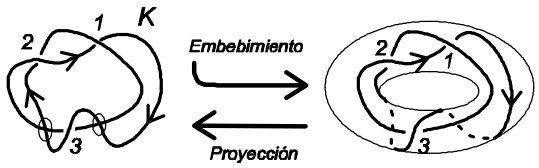

Figura 1-22: Diagrama de nudo virtual en el toro.

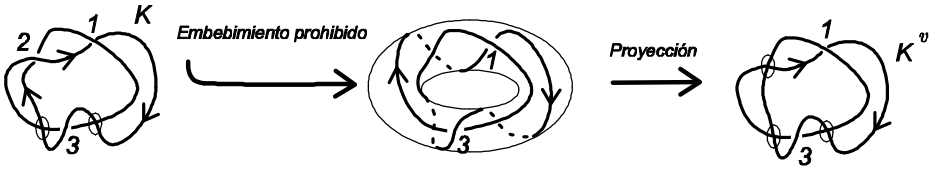

Figura 1-23: Embebimiento prohibido.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del los Teoremas 1.2.3 y 1.4.2.

Teorema 1.5.1 *Sea D un diagrama de un nudo virtual. Entonces existe $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que D se puede realizar sobre $M_D = T\#\cdots\#T$ (g-veces). Además M_D es la superficie de género mínimo entre todas las superficies sobre las cuales se puede realizar D.*

Prueba. Sea D un diagrama de un nudo virtual y sea $\sigma = (C(D), S(D))$ un código nudal asociado a D, entonces la realización de Carter para σ también es una realización para el diagrama D. ■

Por la prueba del teorema anterior podemos hablar de la realización de Carter de un diagrama de un nudo virtual.

Una construcción simple de una realización para un diagrama de un nudo virtual D es la siguiente: por cada cruce virtual se pega una 1-asa a S^2 y se embebe el cruce virtual, en dicha 1-asa, como se muestra en la Figura 1-24.

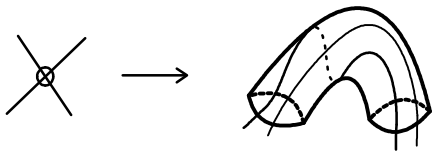

Figura 1-24: Cruce virtual en una 1-asa.

Los cruces clásicos no se alteran. Con este proceso, construimos una superficie F_K de género igual al número de cruces virtuales de D, en la que se puede embeber D sin cruces virtuales.

Hemos mostrado dos métodos para construir embebimientos válidos de diagramas de nudos virtuales sobre superficies, uno es considerando la superficie de Carter y el otro pegando una 1-asa a S^2 por cada cruce virtual del diagrama. Pensemos en el recíproco, es decir, dado un nudo orientado (Σ, K) *¿cómo construir un diagrama de un nudo virtual D tal que (Σ, K) sea una realización de D?* Existen muchas formas de proyectar un nudo en el plano, nosotros ilustraremos una de tales maneras. Sea (Σ, K) un nudo orientado. Puesto que podemos adherir discos a la frontera de Σ, supondremos que Σ no tiene frontera. Entonces Σ es homeomorfo al espacio cociente de un $4g$-gono, que denotaremos por Σ_g, con lados identificados por parejas. Por tanto K puede ser representado por un diagrama en Σ_g, tal que, sus cruces están en $\overset{\circ}{\Sigma}_g$ y las intersecciones con $\partial\Sigma_g$ no sean ni tangenciales ni coincidan con los vértices de Σ_g. Un ejemplo de un diagrama de un nudo en T, donde T es el toro, y su respectivo diagrama en T_2, se muestra en la Figura 1-25. Ahora conectemos, por medio de una curva simple en el exterior de Σ_g, cada

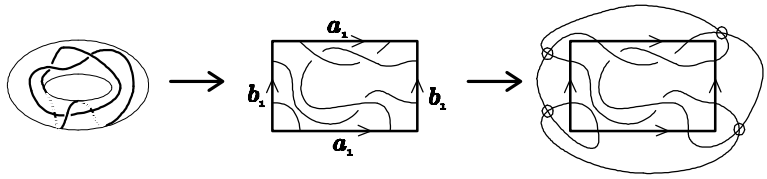

Figura 1-25: Construcción de una cerradura virtual

pareja de puntos identificados de la intersección del diagrama con la frontera de Σ_g, de tal forma que si dos de ellas se llegasen a intersectar, dichas intersecciones deben ser transversales. Si denotamos tales intersecciones por cruces virtuales, el resultado es un diagrama de un nudo virtual, que llamaremos *proyección virtual de* (Σ, K) en $\mathbb{R}^2$.

1.5.2 Equivalencia estable

En esta sección las superficies podrían tener frontera.
Denotemos por $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los nudos (Σ, K). Sean (Σ_1, K_1) y (Σ_2, K_2) en $\mathcal{D}$. Diremos que $(\Sigma_1, K_1) \overset{e}{\sim} (\Sigma_2, K_2)$ si y sólo si existe una superficie Σ_3 y embebimientos, que preservan orientación, $f_i : \Sigma_i \to \Sigma_3$, $i = 1, 2$ tales que $f_1(K_1)$ se puede transformar en $f_2(K_2)$ mediante un número finito de los movimientos de Reidemeister sobre Σ_3.

Definición 1.5.2 *[6] Sean (Σ, K), $(\Sigma', K') \in \mathcal{D}$, diremos que estos dos elementos son* ***establemente equivalentes****, denotado por $(\Sigma, K) \sim (\Sigma', K')$, si existen $(\Sigma_i, K_i) \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, ..., n$, tales que*

$$(\Sigma, K) \overset{e}{\sim} (\Sigma_1, K_1) \overset{e}{\sim} ... \overset{e}{\sim} (\Sigma_n, K_n) \overset{e}{\sim} (\Sigma', K').$$

La relación $\sim$ es, en efecto, una relación de equivalencia sobre $\mathcal{D}$. Para ilustrar la definición anterior consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.1 *Sean $(T\#T, K)$ y (S^2, K') los nudos ilustrados, respectivamente, en la Figura 1-26.*

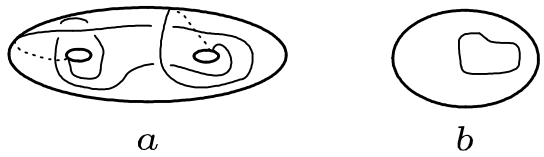

Figura 1-26: Ejemplos de dos nudos establemente equivalentes.

Entonces ellos son establemente equivalentes, ver Figura 1-27.

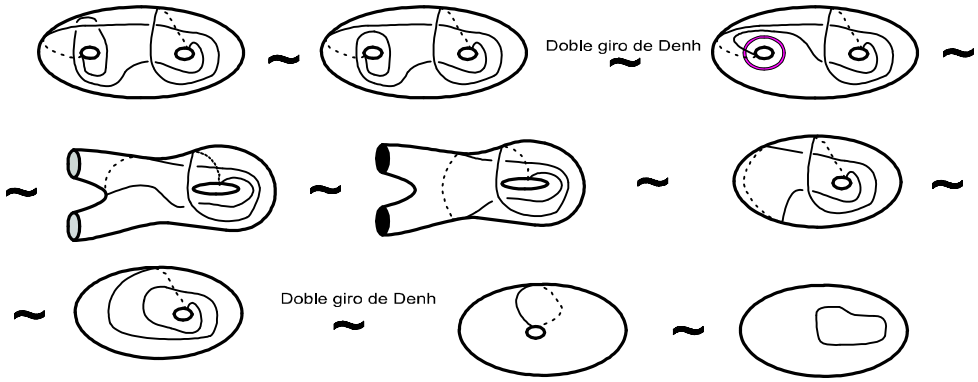

Figura 1-27: Ejemplo de sucesiones de equivalencia estable.

El siguiente resultado muestra la relación que existe entre las clases de equivalencia de diagramas de nudos virtuales y las clases de equivalencia estable de embebimientos de S^1 en superficies engrosadas, ver [6].

Teorema 1.5.2 *Existe una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencia estable de nudos (Σ, K) y las clases de equivalencia de diagramas de nudos virtuales, y por ende con la categoría de los nudos combinatorios.*

Habíamos hablado de realización de un diagrama de un nudo virtual. Por el teorema anterior podemos ahora hablar de realización de un nudo virtual.

Definición 1.5.3 *Sea K un nudo virtual. Diremos que $(\Sigma, \widetilde{K})$ es una realización de K si y sólo si K y $(\Sigma, \widetilde{K})$ tienen asignados códigos nudales equivalentes.*

Podemos ver la relación de equivalencia estable como una sucesión de ciertas operaciones mas simples, que describimos a continuación.
Proceso de reducción y ampliación de género: Sea (Σ, K) un nudo, y sea c una curva simple y cerrada sobre $\Sigma \backslash K$ tal que $c \cap \partial\Sigma = \phi$.
(1) Diremos que c es una curva de **separación** si al cortar Σ a lo largo de c y adherir discos a cada una de las dos componentes de $\partial(\Sigma \backslash \{c\})$, producidas por dicho corte, obtenemos una superficie disconexa con componentes Σ_1 y Σ_2, tal que K está contenida en alguna de dichas componentes, digamos Σ_1, y el género de Σ_2 es mayor o igual a 1. En este caso nos olvidamos de la componente que no contiene a K.
(2) Diremos que c es una curva de **simplificación** si al cortar Σ a lo largo de c y adherir discos a cada una de las dos componentes de la frontera de $\Sigma \backslash \{c\}$, producidas por dicho corte, obtenemos una superficie conexa de género 1 menos que el género de Σ.
A (1) y (2) los llamaremos proceso de reducción de género de (Σ, K). Al proceso inverso lo llamaremos proceso de ampliación de género.
La importancia del siguiente teorema radica en que es más cómodo pensar en procesos de adherir o quitar 1-asas que en embebimientos que preservan la orientación. Su prueba, que omitimos, se hace mediante un análisis de casos técnicos.

Proposición 1.5.3 *Equivalencia estable puede ser descrita como una composición de homeomorfismos de la superficie ambiente, que preservan la orientación, movimientos de Reidemeister y procesos de reducción o ampliación de género.*

Definición 1.5.4 *Sea K un nudo virtual y sea $(\Sigma, \widetilde{K})$ una realización de K. Diremos que dicha realización es una* ***realización minimal*** *si no se le pueden aplicar procesos se reducción de género a cualquier nudo obtenido de $(\Sigma, \widetilde{K})$ por homeomorfismos de Σ en sí misma, que preservan la orientación, y movimientos de Reidemeister.*

La Figura 1-26-a muestra una realización de un nudo virtual que no es minimal.
El siguiente teorema es debido a Kuperberg [32].

Teorema 1.5.4 *A todo nudo virtual le corresponde una única representación minimal, salvo homeomorfismo que preservan la orientación de la superficie ambiente.*

Por el teorema anterior tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.5.5 *Sea K un nudo virtual y sea $(\Sigma, \widetilde{K})$ una realización de K. Definimos el* ***género virtual*** *de K, denotado por $g_v(K)$, como*

$$g_v(K) = \min\{genero(\Sigma') : (\Sigma', K) \sim (\Sigma, \widetilde{K})\}.$$

Es claro que $g_v(K)$ se obtiene en la superficie de Carter de algún representante de K, por tanto la definición anterior se puede dar a nivel de realizaciones de Carter de nudos virtuales o combinatorios. Además tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.5.5 *K es un nudo virtual clásico si y sólo si $g_v(K) = 0$.*

Capítulo 2

Aritmética de nudos combinatorios

En este capítulo estudiaremos los conceptos de: imagen espejo, inverso, suma conexa, suavizaciones, virtualizaciones y número de puentes a nivel de nudos combinatorios. Algunas de las definiciones son simplemente extensiones de las mismas construcciones que en el caso clásico, pero otras son nuevas. Por ejemplo, definimos dos imágenes espejo, que denotaremos $*$ y $\#$, que resultan ser la misma para nudos combinatorios clásicos. Aunque la suma conexa de códigos nudales la definimos de forma similar a la del caso clásico para diagramas, resulta que depende tanto del lugar donde se realice la suma como del representante escogido de la respectiva clase equivalencia. Por tanto todas las definiciones se hacen a nivel de códigos y no de nudos combinatorios. A pesar de esto, damos algunas propiedades interesantes de suma conexa. Sin embargo, podemos dar una definición de código nudal compuesto. Definimos el concepto de presentación en puentes de un nudo virtual y de número de puentes virtuales de un nudo virtual; esto nos enfrenta al problema de determinar si esta "*nueva definición*" de número de puente restringida al conjunto de los nudos clásicos es igual a la existente, ver [3] y [24]. Otro aspecto que hay que resaltar es la existencia de nudos virtuales, no triviales, de un sólo puente, algo que no sucede en los nudos clásicos.

2.1 Imágenes espejo e inverso

La imagen espejo de un nudo clásico se define como el nudo que se obtiene al hacer una reflexión sobre un plano. Usualmente se toma el plano de reflexión como un plano paralelo al plano donde se proyecta el nudo para obtener un diagrama. Al tomar esta reflexión, a nivel de diagramas el resultado es un nuevo diagrama con los cruces y los signos cambiados. Esto se traduce de forma natural para los nudos combinatorios y la denotamos imagen espejo $*$. Pero la imagen espejo se puede obtener si se refleja con respecto a un plano perpendicular al plano de proyección, y a esta la denotamos imagen espejo $\#$. El inverso de un nudo se obtiene simplemente al recorrer las componentes en el otro sentido.

Definición 2.1.1 *Sea $K = ((i_1, ..., i_{2n}), (e_1, ..., e_m))$ un código nudal. Definimos la* ***imagen espejo*** *$*$ de K, denotada por K^*, como el código nudal $((-i_1, ..., -i_{2n}), (-e_1, ..., -e_m))$, la* ***imagen espejo*** *$\#$ de K , denotada por $K^\#$, como el código nudal $((i_1, ..., i_{2n}), (-e_1, ..., -e_m))$ y el* ***inverso*** *de K, denotado por $-K$, como el código nudal $((i_{2n}, ..., i_1), (e_1, ..., e_m))$.*

En el caso clásico se acostumbra estudiar una imagen espejo, ya que todas las reflexiones en $\mathbb{R}^3$ se relacionan por una rotación. Este no es el caso para nudos virtuales. Tenemos así el siguiente lema.

Lema 2.1.1 *Si K es un nudo combinatorio clásico, entonces $K^* = K^{\#}$.*

Prueba. Sea K un nudo combinatorio clásico y D un diagrama que lo realiza. Supongamos que el diagrama se encuentra en el plano $z = 0$. Sea D^* el diagrama obtenido al hacer la reflexión con respecto al plano $z = 0$, y sea $D^{\#}$ el diagrama obtenido al hacer la reflexión con respecto al plano $y = 0$. Si τ es la reflexión con respecto al plano $z = 0$, γ la reflexión con respecto al plano $y = 0$ y ρ la rotación que lleva el plano $z = 0$ en el plano $y = 0$, tenemos que $\gamma = \rho\tau$, por tanto

$$D^{\#} = \gamma\left(D\right) = \rho\tau\left(D\right) = \rho D^*$$

es decir, $D^{\#}$ es una rotación de D^*. Como $D^{\#}$ es una realización de $K^{\#}$ y D^* es una realización de K^*, tenemos que $K^{\#} = K^*$. ■

En el caso que K no sea un nudo clásico, este argumento no se puede utilizar, ya que no se tienen las interpretaciones geométricas de las imágenes espejos $*$ y $\#$.

En general, para los nudos virtuales la igualdad anterior es falsa. Ver Ejemplo 3.5.2.

La Figura 2-1 muestra, a nivel de diagramas de nudos virtuales, cómo es el comportamiento de los dos tipos de imagen espejo y el inverso.

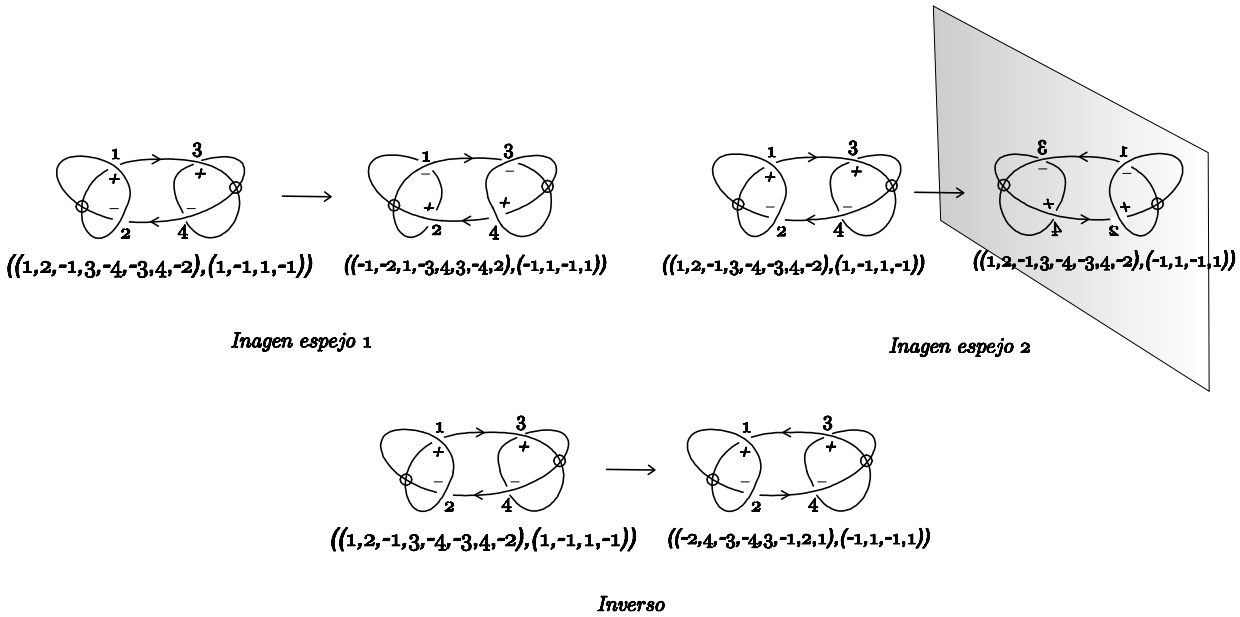

Figura 2-1: Ejemplo de la construcción de los dos tipos de imagenes espejo y el inverso.

Definición 2.1.2 *Un nudo combinatorio* $[K]$ *es* ***anfiqueiral **** *si* $[K] = [K^*]$*, en caso contrario diremos que es* ***chiral ****; *es* ***anfiqueiral*** $\#$ *si* $[K] = [K^{\#}]$*, en caso contrario diremos que es* ***chiral*** $\#$*; y es* ***invertible*** *si* $[K] = [-K]$.

En el Capítulo 3 daremos condiciones necesarias para determinar cuándo un nudo combinatorio es chiral $*$, $\#$ e invertible. Con estas condiciones daremos ejemplos de nudos virtuales que no son chiral $*$, ni chiral $\#$, ni invertibles.

2.2 Suma conexa de códigos nudales

La extensión de suma conexa a nudos combinatorios es más complicada que las definiciones dadas en la sección anterior, debido a que ésta dependerá tanto del lugar donde se realice la suma como del representante escogido de las respectivas clases de equivalencia. Por tal motivo la definición de suma conexa y nudo primo se hará sobre el conjunto de los códigos nudales.

Definición 2.2.1 *Sean* $K_1 = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ *y* $K_2 = ((j_1, j_2, \cdots, j_{2r}), (e'_1, \cdots, e'_t))$ *códigos nudales. Sin perdida de generalidad podemos suponer que* $\{i_1, i_2, \cdots, i_{2n}\} \cap \{j_1, j_2, \cdots, j_{2r}\} = \phi$*. Definimos la* ***suma conexa*** *de* K_1 *y* K_2*, relativa a la pareja ordenada* (i_p, j_q)*, denotado por* $K_1 \#_{(i_p\ ,\ j_q)} K_2$*, como el código nudal*

$$((i_1, ..., i_p, j_q, j_{q+1}, ..., j_{2r}, j_1, ..., j_{q-1}, i_{p+1}, ..., i_{2n},), (\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_g)),$$

donde $g \geq \max\{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_r\}$*,* $\widetilde{e}_{a_i} = e_{a_i}$*,* $i = 1, 2, ..., n$*,* $\widetilde{e}_{b_i} = e'_{b_i}$*,* $i = 1, 2, ..., r$ *y* $\widetilde{e}_h = 1$*,* $h \in \{1, ..., g\} - \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_r\}$*,* $p \in \{1, 2, .., 2n\}$*,* $q \in \{1, 2, ..., 2r\}$.

Nota 2.2.1 *La suma conexa se define para códigos enlaces aplicando la definición anterior sobre alguna de las componentes de los enlaces involucrados. En este caso la suma conexa dependerá también de las componentes escogidas.*

Un ejemplo gráfico se muestra en la Figura 2-2.

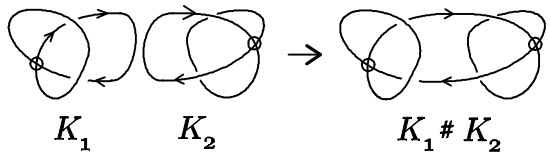

Figura 2-2: Un ejemplo de la suma conexa de dos nudos virtuales.

La suma conexa depende de la pareja ordenada (i_p, j_q) y del representante. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1 *Sea* $K_1 = ((1,2,-1,-2),(1,-1))$ *y* $K_2 = ((3,-4,-3,4),(1,1,1,-1))$*, entonces* $K_1\#_{(-1,3)}K_2$ *es un nudo de Kishino. Un nudo de Kishino es un ejemplo de un nudo virtual no clásico, vease Ejemplo 3.3.1. Notemos que* K_1 *y* K_2 *son nudos virtuales clásicos, pues son equivalentes al nudo trivial.*
Por otro lado
$K_1\#_{(-2,3)}K_2 = ((1,2,-1,-2,3,-4,-3,4),(1,-1,1,-1)) \approx ((1,2,-1,-2),(1,-1)) \approx ((),())$,
con lo que $K_1\#_{(-1,3)}K_2$ *y* $K_1\#_{(-2,3)}K_2$ *no son equivalentes.*
Observemos que K_1 *y* K_2 *son nudos triviales, y* $K_1\#_{(-1,3)}K_2$ *no es trivial, lo que constituye un comportamiento diferente al caso clásico.*

Aunque la suma conexa depende de la pareja ordenada (i_p, j_q) y del representante, por simplicidad la denotaremos por $K_1\#K_2$.

Definición 2.2.2 *Sea* $[K]$ *un nudo combinatorio. Diremos que* $[K]$ *es compuesto si existen códigos nudales no triviales* K_1 *y* K_2*, tales que* $[K] = [K_1\#K_2]$*. En otro caso, diremos que* $[K]$ *es primo.*

En el caso clásico existe una definición de género, que no corresponde a la de género virtual, y que es aditivo con respecto a la suma conexa, [3] y [41]. Con base en esto surge el siguiente interrogante.

¿Existirá alguna relación entre los números $g_v(K\#K')$, $g_v(K)$ *y* $g_v(K')$*?*

El siguiente resultado da una respuesta parcial al interrogante anterior, vease [27].

Teorema 2.2.1 *Sean* $[K_1]$ *y* $[K_2]$ *dos nudos combinatorios (no clásicos) entonces* $g_v[K_1\#K_2] \geq g_v[K_1] + g_v[K_2] - 1$*. Si* $g_v[K_1] = 0$ *o* $g_v[K_2] = 0$ *entonces* $g_v[K_1\#K_2] \geq g_v[K_1] + g_v[K_2]$*.*

Corolario 2.2.2 *Sean* $[K_1]$ *y* $[K_2]$ *dos nudos combinatorios tales que alguna suma conexa* $[K_1\#K_2]$ *es un nudo clásico, entonces* $[K_1]$ *y* $[K_2]$ *son nudos clásicos.*

Prueba. Sean $[K_1]$ y $[K_2]$ dos nudos combinatorios. Supongamos que $[K_1]$ y $[K_2]$ no son nudos combinatorios clásicos, entonces $g_v[K_1] \geq 1$ y $g_v[K_2] \geq 1$. Por el Teorema 2.2.1 $g_v[K_1\#K_2] \geq 1$, de donde $[K_1\#K_2]$ no sería un nudo combinatorio clásico.
Por otro lado, si $[K_1]$ es clásico y $[K_2]$ no es clásico, entonces $g_v[K_1] = 0$ y $g_v[K_2] \geq 1$. Por el Teorema 2.2.1 $g_v[K_1\#K_2] \geq 1$, de donde $[K_1\#K_2]$ no sería clásico. ■
La Figura 2-2, muestra que el recíproco del corolario anterior no es cierto, es decir, la suma conexa de nudos clásicos puede ser no clásica.
Sean $K_1 = (\{C_1, ..., C_p\}, (e_1, ..., e_n))$ y $K_2 = (\{H_1, ..., H_q\}, (\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_m))$ dos enlaces combinatorios. Supongamos que los cruces de K_1 son $1, 2, ..., n$ y que los cruces de K_2 son $n+1, ..., m$.

Definición 2.2.3 *Con la notación anterior, definimos la* ***suma disconexa*** *de K_1 y K_2, denotada por $K_1 \sqcup K_2$, como el código enlace*

$$K_1 \sqcup K_2 = (\{C_1, ..., C_p, H_1, ..., H_q\}, (e_1, ..., e_n, \widetilde{e}_{n+1}, ..., \widetilde{e}_m)).$$

No es dificil ver que la definición anterior se puede extender a la clase de equivalencia de códigos enlaces.

2.3 Suavizaciones

Las suavizaciones constituyen una forma de construir nuevos enlaces a partir de enlaces ya conocidos. Las suavizaciones que estudiaremos en esta sección son las extensiones naturales de las usadas en la teoría clásica de nudos, y que permiten definir relaciones de madeja y fórmulas de recurrencia para calcular polinomios invariantes de nudos, vease [22], [26]. En esta sección debemos trabajar a nivel de enlaces, puesto que algunas suavizaciones de nudos de una componente producen enlaces de dos componentes y recíprocamente. Lo anterior será estudiado en el Capítulo 4. Con la idea de simplificar la notación utilizaremos códigos enlaces en forma estándar.

Definición 2.3.1 *Sea $K = (\{C_1, ..., C_p\}, (e_1, ..., e_n))$ un código enlace de p componentes, donde $C_t = (q_1, ..., q_n)$, $n = n(t)$, fijemos un cruce j de K. No se pierde generalidad si nos concentramos en las componentes C_1 y C_2, pues el orden de las sucesiones no tiene importancia. Consideraremos la notación:*

$$C_1 = (j, A, -j, B) \quad ó \quad C_1 = (j, A) \text{ y } C_2 = (-j, B),$$

donde $A = i_2, ..., i_r$ y $B = i_{r+2}, ..., i_s$. Definimos A^- como la subsucesión $i_r, i_{r-1}, ..., i_2$ y

$$\widetilde{e}_t = \begin{cases} e_t & si \quad \{t, -t\} \subset \{A\} \text{ ó } \{t, -t\} \subset \{B\} \\ -e_t & \qquad en\ otros\ casos \end{cases}$$

(1) La ***suavización Tipo*** *1 es el código enlace K_1 dado por la siguiente regla:*

$$K_1 = \begin{cases} (\{(A), (B), C_2, ..., C_p\}, (e_1, ..., e_n)) & si \quad C_1 = (j, A, -j, B) \text{ y } e_j = 1 \\ (\{(A^-, B), C_2, ..., C_p\}, (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_n)) & si \quad C_1 = (j, A, -j, B) \text{ y } e_j = -1 \\ (\{(A, B), C_3, ..., C_p\}, (e_1, ..., e_n)) & si \quad C_1 = (j, A) \text{ y } C_2 = (-j, B) \text{ y } e_j = 1 \\ (\{(A^-, B), C_3, ..., C_p\}, (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_n)) & si \quad C_1 = (j, A) \text{ y } C_2 = (-j, B) \text{ y } e_j = -1 \end{cases}$$

(2) La ***suavización Tipo*** 0 *es el código enlace* K_0 *dado por la siguiente regla:*

$$K_0 = \begin{cases} (\{(A^-, B), C_2, ..., C_p\}, (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_n)) & si \quad C_1 = (j, A, -j, B) \ y \ e_j = 1 \\ (\{(A), (B), C_2, ..., C_p\}, (e_1, ..., e_n)) & si \quad C_1 = (j, A, -j, B) \ y \ e_j = -1 \\ (\{(A^-, B), C_3, ..., C_p\}, (\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_n)) & si \quad C_1 = (j, A) \ y \ C_2 = (-j, B) \ y \ e_j = 1 \\ (\{(A, B), C_3, ..., C_p\}, (e_1, e_2, ..., e_n)) & si \quad C_1 = (j, A) \ y \ C_2 = (-j, B) \ y \ e_j = -1 \end{cases}$$

Notemos que cada vez que aplicamos un tipo de suavización a un código nudal desaparece un cruce, con base en esta idea podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1 *Sea* K *un código enlace, entonces podemos transformar a* K *en un código enlace trivial usando un número finito de suavizaciones de Tipo* 0 *ó* 1 *sobre todos los cruces de* K*.*

Sea K un código enlace, un *estado* para K lo obtenemos al aplicar, bien sea, una suavización de Tipo 0 o una de Tipo 1 sobre cada uno de los cruces de K. Por la proposición anterior, un estado para un código enlace es un código enlace trivial. Denotaremos el conjunto de todos los estados de K por $\mathcal{S}$. Si K tiene n cruces, entonces $\mathcal{S}$ tiene 2^n elementos. Para simplificar la notación utilizaremos notación multiíndice como sigue: Si $l = (l_1, ..., l_n)$, donde $l_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, ..., n$, entonces K_l denotará el código enlace de componentes vacías obtenido al aplicar una suavización de tipo l_j sobre el cruce j, $j = 1, 2, ..., n$.
Consideremos el estado K_l, $l = (l_1, ..., l_n)$. Definiremos $C(K_l)$ como el número de veces que aparece 0 en l menos el número de veces que aparece 1. $|K_l|$ representará el número de componentes del enlace K_l.

Teorema 2.3.2 *Sea* K *un código enlace, entonces el conjunto* $\mathcal{S}$ *está univocamente determinado por* K*.*

Prueba. Si K es el código enlace trivial, entonces el teorema se cumple ya que $\mathcal{S} = \phi$. Supongamos que K es un código enlace de $n \geq 1$ cruces. Puesto que estamos considerando todas las 2^n posibilidades que se obtienen al aplicar suavizaciones de tipo 0 y 1 sobre cada cruce de K, entonces el conjunto $\mathcal{S}$ es único, salvo permutación de sus elementos. Ahora, como no estamos considerando un orden para $\mathcal{S}$, este sería único para K. ■
La Figura 2-3 muestra en forma gráfica las suavizaciones que definimos. Cabe aclarar que la modificación dada en la Figura 2-3 sólo se aplica sobre cruces clásicos. Los cruces virtuales se dejan inalterados.

Nota 2.3.1 *De la Figura 2-3, podemos concluir que el conjunto de todos los estados de un código nudal* K *no depende de cual subsucesión,* A *ó* B*, hubiéramos reversado. Por la misma razón, los números* $C(K_l)$ *y* $|K_l|$ *están unívocamente determinados por el código.*

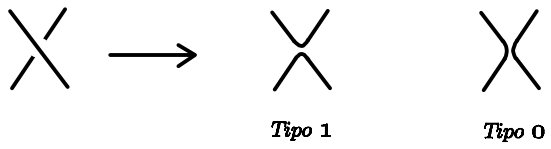

Figura 2-3: Transformaciones Tipo 0 y 1 para un cruce clásico

Computar los estados de un código nudal es una tarea ardua, ya que hay que considerar las 2^n posibilidades, por tanto se ha diseñado una forma "recursiva" para encontrar el conjunto de todos los estados de un código nudal, esta forma es llamada el *grafo anidado de un código nudal*. Para el código nudal $K = ((1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2), (1, -1, 1, -1))$, un grafo anidado se muestra en la Figura 2-4.

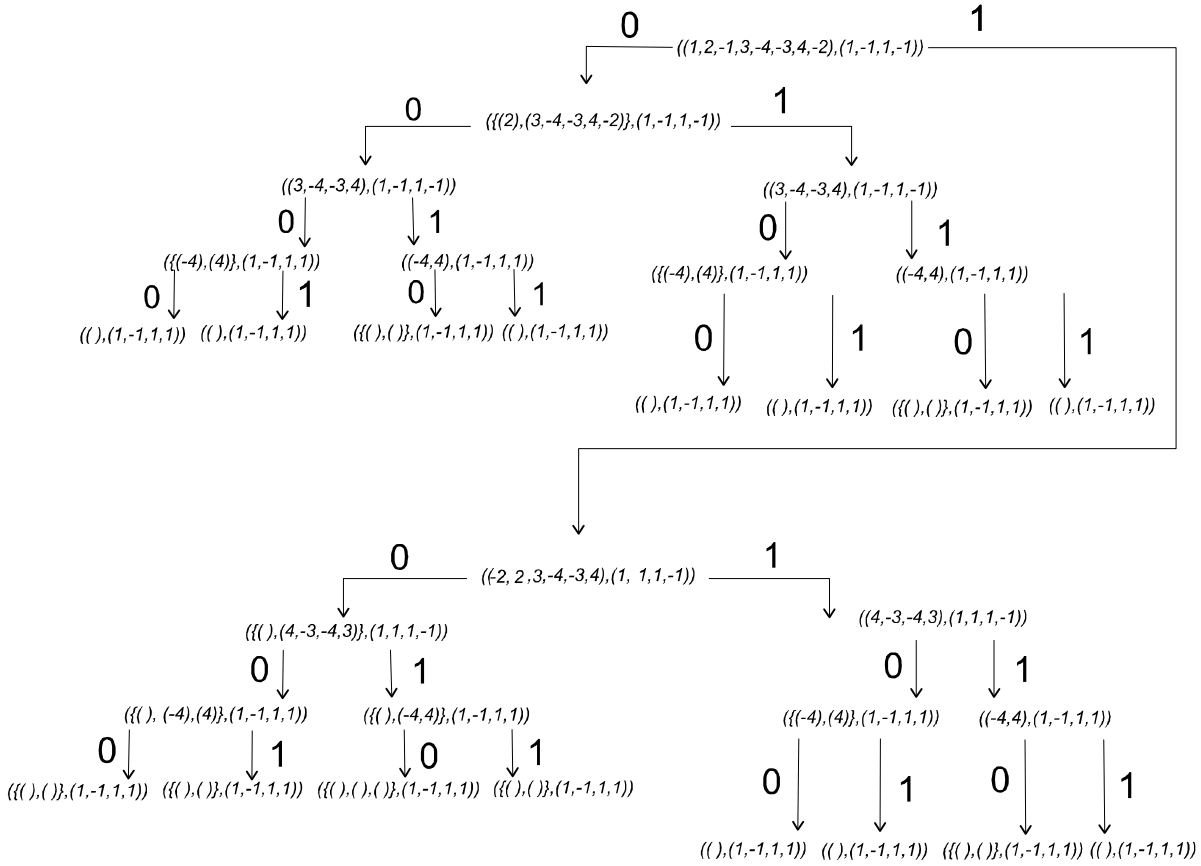

Figura 2-4: Grafo anidado para computar los estados de un código nudal

2.4 Virtualizaciones

Dye y Kauffman [12] definieron un proceso, denominado *virtualización de un cruce*, que produce, a partir del diagrama de un nudo clásico K, dos diagramas de nudos virtuales, que denotaron por K_v y K_{sv}. En esta sección definiremos estas virtualizaciones y una nueva definida por nosotros. También definiremos el cambio de un cruce, que es un proceso muy conocido en la teoría clásica de nudos.

Definición 2.4.1 *Sea K un nudo combinatorio de n cruces y sea m un cruce de K. Supongamos que $K = ((A,m,B,-m),(e_1,...,e_n))$, entonces definimos las virtualizaciones:*
(1) $K_v^m = (A,m,B,-m),(\widetilde{e}_1,...,\widetilde{e}_n))$ donde $\widetilde{e}_i = e_i$ si $i \neq m$, $i = 1, \cdots, n$, y $\widetilde{e}_m = -e_m$
(2) $K_{sv}^m = ((A,-m,B,m),(e_1,...,e_n))$.
(3) $K^m = ((A,B),(\widetilde{e}_1,...,\widetilde{e}_n))$ donde $\widetilde{e}_i = e_i$ si $i \neq m$, $i = 1, \cdots, n$, y $\widetilde{e}_m = -e_m$.
También definimos el cambio del cruce como
(4) $K_s^m = ((A,-m,B,m),(e_1,...,-e_n))$.

Note que se cumple la igualdad $(K_s^m)_v = (K_v^m)_s = K_{sv}^m$.
Una representación local de los diagramas correspondientes a los nudos combinatorios K_v^m, K_s^m y K^m se muestra en la Figura 2-5.

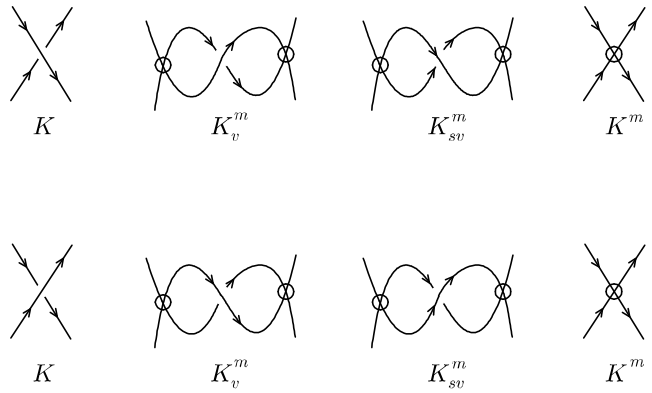

Figura 2-5: Proceso de virtualización de un cruce clásico

Estas virtualizaciones de nudos clásicos han sido fuente de muchos ejemplos de nudos virtuales que satisfacen propiedades que no se cumplen o son preguntas abiertas en la categoría de los nudos clásicos. En el Capítulo 3 estudiaremos la siguiente pregunta: ¿Si K es un diagrama de un nudo clásico, son K_v^m, K_{sv}^m y K^m nudos virtuales no clásicos?
Con base en el cambio de un cruce definimos.

$$K_+^n = \begin{cases} K, & \text{si } e_n = 1 \\ K_s^n & \text{si } e_n = -1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad K_-^n = \begin{cases} K, & \text{si } e_n = -1 \\ K_s^n & \text{si } e_n = 1 \end{cases}$$

Nota 2.4.1 *Estos conceptos de K_+ y K_- son importantes en la teoría clásica de nudos, y un resultado importante allí es que dado cualquier nudo K existe un conjunto finito de cambio de cruces $I = (i_1, \cdots, i_s)$ de tal forma que K_s^I es el nudo suelto. Este resultado no es cierto para nudos virtuales, como se puede comprobar si tomamos el nudo de Kishino, $K = ((1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2), (1, -1, 1, -1))$, ver Ejemplo 3.3.1 y hacemos todos los posible cambios. Nunca podremos soltar el nudo ni obtener un nudo con un número menor de cruces. Esto lo retomaremos cuando estudiemos el polinomio de Jones en la Sección 4.2.*

2.5 Número de puentes de un nudo virtual

En esta sección estudiaremos brevemente presentaciones en puentes de un nudo combinatorio, vease [24] y [2]. Cabe aclarar que esta teoría, no ha sido muy estudiada para el caso de nudos virtuales. Enunciaremos dos problemas abiertos en este tema.
Sea $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, e_2, \cdots, e_m))$ un nudo combinatorio y sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}^+$ sus cruces. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$K = ((-a_1, i_2, \cdots i_r, -a_2, i_{r+2}, ..., -a_n, i_{t+2}, ..., i_{2n}), (e_1, e_2, \cdots, e_n)), \tag{2.1}$$

y entre $-a_i$ y $-a_{i+1}$, $i = 1, ..., n$, donde $-a_{n+1} = -a_1$, no hay números o sólo hay números positivos. Definimos los **arcos** de K como subsucesiones $x_{a_i} = (-a_i, \cdots, -a_{i+1})$, $i = 1, 2, ..., n-1$ y $x_{a_n} = (-a_n, i_{t+2} \cdots, i_{2n}, -a_1)$.
Por ejemplo, los arcos del nudo combinatorio $K = ((-1, 2, -3, -4, 1, -2, 4, 3), (1, -1, 1, 1))$ son: $x_1 = (-1, 2, -3)$, $x_3 = (-3, -4)$, $x_4 = (-4, 1, -2)$ y $x_2 = (-2, 4, 3, -1)$.

Definición 2.5.1 *Sea $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, e_2, \cdots, e_m))$ un nudo combinatorio no trivial y sean x_{a_1}, x_{a_2},..., x_{a_n} los arcos de K. Denotemos por $|x_{a_i}|$ la cardinalidad de x_{a_i}. Diremos que x_{a_i} es un **puente** de K si $|x_{a_i}| > 2$. Para un nudo combinatorio K el número de puentes combinatorios, denotado $br_v(K)$, es definido como el número de puentes de K. Para un nudo combinatorio $[K]$ el número de puentes de $[K]$ es definido como $br_v([K]) = \min\{br_v(K') : K' \approx K\}$.*

La siguiente definición nos una idea intuitiva del significado de puentes.

Definición 2.5.2 *Diremos que un código nudal K, de n cruces, está en forma **de puentes** si está en forma estándar y además su lista de cruces tiene el siguiente comportamiento: $(-1, A_1, -2, A_2, -3, ..., A_{n-1}, -n, A_n)$, donde $\cup_{i=1}^{n} \{A_i\} = \{1, 2, ..., n\}$, y los términos de la unión son mutuamente disjuntos.*

Con la notación de la definición anterior, los puentes de K serán los arcos $x_j = (A_j)$, tales que la cardinalidad de $\{A_j\}$ sea mayor que 2, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

La prueba del siguiente teorema es inmediata, por tanto la omitiremos.

Teorema 2.5.1 *El número de puentes, $br_v([K])$, es un invariante de nudos combinatorios.*

Sea K un nudos combinatorio clásico, entonces definimos el número de puentes clásicos para K, denotado $br(K)$, como

$$br([K]) = \min\{br(K') : K \approx K' \text{ y } K' \text{ es un código nudal geométrico}\}.$$

La definición $br(K)$ es exactamente la definición hecha originalmente para los nudos clásicos, vease [3]. Surgen entonces los siguientes problemas.
Problema 1: *Si* K es un nudo clásico, entonces ¿$br([K]) = br_v([K])$?
La desigualdad $br_v([K]) \leq br([K])$, es obvia para todo nudo combinatorio clásico $[K]$.
Problema 2: Sean K_1 y K_2 códigos nudales y sea $K_1\#K_2$ una suma conexa de ellos. ¿Qué relación existe entre $br_v(K_1\#K_2)$, $br_v(K_1)$ y $br_v(K_2)$? Para los nudos clásicos tenemos:

Teorema 2.5.2 *[3] Sean K_1 y K_2 diagramas de nudos clásicos, y supongamos que $K_1\#K_2$ es también un nudo clásico, entonces*

$$br(K_1\#K_2) = br(K_1) + br(K_2) - 1.$$

Un resultado central en la categoría de los nudos clásicos es el siguiente.

Teorema 2.5.3 *Sea K un nudo clásico, entonces K es trivial si y solo si $br(K) = 1$.*

La siguiente proposición muestra que el resultado anterior es falso para la categoría de los nudos virtuales. La prueba se hará en el Ejemplo 3.5.1.

Proposición 2.5.4 *Para $n \in \mathbb{Z}^+$, definamos los nudos combinatorios*

$$\begin{aligned} K_n^+ &= \{\{1, 2, ..., n, -1, -2, ..., -n\}, \{1, 1, ..., 1\}\} \text{ y} \\ K_n^- &= \{\{1, 2, ..., n, -1, -2, ..., -n\}, \{-1, -1, ..., -1\}\}. \end{aligned}$$

Entonces K_n^+ y K_n^- no son clásicos y por ende no triviales.

Capítulo 3

El invariante Λ de un nudo combinatorio

En este capítulo definimos un nuevo invariante de nudos combinatorios, el cual llamamos invariante Λ, que tiene la propiedad de ser trivial sobre la categoría de los nudos clásicos. Este invariante es una clase de equivalencia de tripletas de la forma (E, A, B), donde E es un vector de n componentes con entradas en el conjunto $\{1, -1\}$, $A \in \mathbb{Z}^n$ y B es una matriz antisimétrica de orden n con entradas enteras. Dicha tripleta está estrechamente relacionada con las matrices basadas definidas por Turaev [47]. Pero nuestra definición tiene más conexión con la solución del problema de la palabra signada de Gauss, dada por Cairns y Elton [5], que con las matrices basadas.

Este capítulo es la parte central de la tesis, y es el aporte original a la teoría de los nudos virtuales; por tal motivo las pruebas se harán con el máximo detalle posible. En las conclusiones ilustraremos una variación de este invariante para aumentar su capacidad de clasificación de nudos virtuales. Dicha modificación no la estudiamos en este trabajo debido a que queda como problema abierto hallar condiciones necesarias y suficientes para saber si una tripleta (E, A, B) es la tripleta de un nudo combinatorio. En este capítulo sólo damos condiciones necesarias.

En la primera parte de este capítulo haremos una motivación acerca de cómo surgió la idea del invariante Λ. Después formalizaremos esas ideas intuitivas estudiando el concepto de tripleta y algunas de sus propiedades. Más tarde, utilizando las ideas de tripleta, definiremos el invariante Λ de un nudo combinatorio. Estudiaremos el comportamiento de Λ con respecto a la imagen espejo $*$ y $\#$, y al inverso. Encontraremos condiciones para determinar cuándo una virtualización de un código nudal geométrico no da lugar a un nudo combinatorio clásico.

En este capítulo trabajamos con nudos de una componente. La definición de Λ para enlaces de más de una componente no la hacemos aquí. Este es uno de los trabajos para futuro desarrollo, en las conclusiones hablaremos brevemente del tema.

3.1 Motivación

En esta sección estudiaremos el problema de la palabra signada de Gauss, que es uno de los pilares de este trabajo. Para más detalles de este problema vease [4] y [5].

En la primera parte haremos un breve repaso sobre la solución del problema de la palabra signada de Gauss dada por Cairns y Elton [5], y su relación con los códigos nudales geométricos.

Después definiremos el vector α y la matriz β de un código nudal, y mediante una serie de ejemplos iremos dando al lector ideas intuitivas, que formalizaremos en las Secciones 3.2 y 3.3, acerca de cómo surgió el invariante Λ de un nudo combinatorio.

3.1.1 El problema de la palabra signada de Gauss y códigos nudales geométricos

Recordemos que una palabra signada de Gauss es una palabra de longitud $2n$, sin letras repetidas, en el alfabeto $\{a_1, ..., a_n\} \cup \{a_1^{-1}, ..., a_n^{-1}\}$, ver Sección 1.2.2.1. El problema de la palabra signada de Gauss consiste en: *¿Dada una palabra signada de Gauss ω, cuándo ω representa la palabra signada de una curva normal plana?* Gauss encontró una condición necesaria, que en términos de palabras signadas se puede enunciar como: *Sea $\omega = a_{i_1}^{j_1} \cdots a_{i_{2n}}^{j_{2n}}$ una palabra signada de Gauss de una curva normal plana, entonces para toda letra a_j de ω existe un número par de letras entre a_j y a_j^{-1}.* Esta condición no es suficiente, la palabra $\omega = a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_1a_4^{-1}a_3^{-1}a_5a_4a_2a_5^{-1}$ satisface la condición anterior, pero no corresponde a ninguna palabra signada de Gauss de una curva normal plana, como veremos en el Ejemplo 3.1.2.

Ya habíamos visto en la Sección 1.2.2 que Carter asocia a una palabra signada de Gauss ω una superficie M_ω, compacta, orientable y sin frontera, que en este caso es conexa, la cual tiene inmersa una curva normal γ_ω cuya palabra signada de Gauss es ω. Con este trabajo y el hecho de que si $H_1(M_\omega, \mathbb{Z}) = 0$, entonces M_ω es homeomorfa a S^2, Cairns y Elton [5] encontraron una condición, que junto con la condición original de Gauss, dan solución al problema de la palabra signada de Gauss.
Sea $\omega = a_{i_1}^{j_1}a_{i_2}^{j_2}...a_{i_{2k}}^{j_{2k}}$, donde $i_r \in \{1, ..., k\}$ y $j_r \in \{1, -1\}$, $r = 1, 2, ..., k$, una palabra signada de Gauss. Por permutación cíclica de las letras de ω podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que a_i ocurre en ω primero que a_i^{-1}. Consideremos los siguientes conjuntos: S_i formado por las letras de ω que están entre a_i y a_i^{-1} y el conjunto $\overline{S_i} = S_i \cup \{a_i, a_i^{-1}\}$. Sea ahora $\alpha_i(\omega)$ la suma de todos los superíndices de los elementos de S_i.

Ejemplo 3.1.1 *Para $\omega = a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_1a_4^{-1}a_3^{-1}a_5a_4a_2a_5^{-1}$ se tiene:*
$S_1 = \{a_4^{-1}, a_3^{-1}, a_5, a_4, a_2, a_5^{-1}\}$, $\overline{S_1} = \{a_1, a_4^{-1}, a_3^{-1}, a_5, a_4, a_2, a_1^{-1}, a_5^{-1}, a_1^{-1}\}$,
$S_2 = \{a_5^{-1}, a_1^{-1}\}$, $\overline{S_2} = \{a_2, a_5^{-1}, a_1^{-1}, a_2^{-1}\}$,
$S_3 = \{a_1, a_4^{-1}\}$, $\overline{S_3} = \{a_3, a_1, a_4^{-1}, a_3^{-1}\}$,
$S_4 = \{a_2, a_5^{-1}, a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3, a_1\}$, $\overline{S_4} = \{a_4, a_2, a_5^{-1}, a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3, a_1, a_4^{-1}\}$,
$S_5 = \{a_4, a_2\}$, $\overline{S_5} = \{a_5, a_4, a_2, a_5^{-1}\}$.
Luego $\alpha_1(\omega) = 0$, $\alpha_2(\omega) = -2$, $\alpha_3(\omega) = 0$, $\alpha_4(\omega) = 0$ y $\alpha_5(\omega) = 2$.

A continuación enunciaremos dos teoremas; el primero es un reenunciado de la condición encontrada por Gauss. El segundo teorema resume los resultados de Cairns y Elton.

Teorema 3.1.1 *(Teorema de Gauss) Si* $\omega = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} ... a_{i_{2k}}^{j_{2k}}$ *es la palabra signada de Gauss de una curva normal plana, entonces* $\alpha_i(w) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$*, para todo* $i = 1, ..., k$*.*

Como ya habíamos notado, esta condición no es suficiente. Definamos S_i^{-1} como el conjunto obtenido de S_i cambiando el signo de los superíndices de todas las letras de S_i. Sean $i, j \in \{1, ..., k\}$ y $\beta_{ij}(\omega)$ la suma de todos los superíndices de las letras de la intersección $\overline{S_i} \cap S_j^{-1}$. Con base en esta notación tenemos el siguiente teorema, el cual da una condición necesaria y suficiente para que una palabra signada de Gauss sea la palabra signada de Gauss de una curva normal plana.

Teorema 3.1.2 *[5] Sea* $\omega = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} ... a_{i_{2k}}^{j_{2k}}$ *una palabra signada de Gauss. Entonces* ω *es la palabra signada de Gauss de una curva normal plana si y sólo si* $\alpha_i(\omega) = 0$ *y* $\beta_{ij}(\omega) = 0$ *para todo* $i, j \in \{1, ..., k\}$*.*

Observemos que el Teorema de Gauss es una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.2. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.2 *Sea* $\omega = a_1^{-1} a_2^{-1} a_3 a_1 a_4^{-1} a_3^{-1} a_5 a_4 a_2 a_5^{-1}$*.* ω *satisface la condición del teorema de Gauss, pues*
$\alpha_1(\omega) = 0$*,* $\alpha_2(\omega) = -2 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$*,* $\alpha_3(\omega) = 0$*,* $\alpha_4(w) = 0$ *y* $\alpha_5(\omega) = 2 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$*,*
pero, $\overline{S_1} \cap S_4^{-1} = \{a_5, a_1, a_2, a_3^{-1}, a_1^{-1}\}$*, por tanto,* $\beta_{12}(\omega) = 1$*. En virtud del teorema anterior, concluimos que dicha palabra no corresponde a ninguna palabra signada de Gauss de una curva normal plana.*

Si retomamos la demostración del Teorema 1.2.3, podemos ver que la realización de Carter para un código nudal se obtiene a partir de una curva normal sobre la superficie de Carter. Por la construcción de la realización de Carter de un código nudal y la definición de w_K dada en el Lema 1.2.1, se tiene la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 3.1.3 *Sea* K *un código nudal, entonces* K *es geométrico si y sólo si* ω_K *es la palabra signada de Gauss de una curva normal plana.*

La siguiente definición contiene la adaptación de los conjuntos y valores esenciales asociados a un código nudal.

Definición 3.1.1 *Sea* $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ *un código nudal y sean* $a_1, ..., a_n \in Z^+$ *sus cruces. Para todo* $j = 1, 2, ..., n$*, definimos* $S_j = S_{a_j}(K)$ *como el conjunto de todos aquellos elementos de* $\{i_1, i_2, \cdots, i_{2n}\}$ *que ocurren en la lista de cruces de* K *entre* $-e_{a_j} a_j$ *y*

$e_{a_j}a_j$, de acuerdo al orden cíclico de dicha lista, $\overline{S}_j = S_{a_j} \cup \{a_j, -a_j\}$, $S_j^{-1} = \{-z : z \in S_{a_j}\}$, $S_{ij} = \overline{S}_i \cap S_j^{-1}$, y también definimos

$$\alpha_j(K) = \sum_{z \in S_j} \varepsilon_z \qquad y \qquad \beta_{ij}(K) = \sum_{z \in S_{ij}} \varepsilon_z, \tag{3.1}$$

donde $\varepsilon_z = -e_z$ si $z > 0$ y $\varepsilon_z = e_{-z}$ si $z < 0$.

Sea K un código nudal y sean a, b cruces de K. Definimos N_a, como el conjunto formado por aquellos elementos $w \in S_a$ tal que $-w \notin S_a$.
Notemos que $\alpha_a(K) = \sum\limits_{w \in N_a} \varepsilon_w$.
El lema a continuación será de mucha ayuda más adelante. Omitiremos su prueba debido a que es inmediato de la definición de ε_z.

Lema 3.1.4 *Sea $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ un código nudal, entonces $\varepsilon_{-z} = -\varepsilon_z$, para todo $z \in \{i_1, i_2, \cdots, i_{2n}\}$, por tanto $\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_{i_j} = 0$.*

El siguiente teorema muestra la relación que existe entre la solución del problema de la palabra signada de Gauss y el problema de determinar si un nudo virtual es clásico.

Teorema 3.1.5 *Sea K un código nudal con cruces $a_1, ..., a_n$, y sea ω_K su correspondiente palabra signada de Gauss, entonces $\alpha_{a_j}(K) = \alpha_{a_j}(\omega_K)$ y $\beta_{a_i a_j}(K) = \beta_{a_i a_j}(\omega_K)$, para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Prueba. Sea $K = ((i_1, ..., i_{2n}), (e_1, ..., e_m))$ un código nudal con cruces $a_1, ..., a_n$, y $\omega_K = \omega_K = |i_1|^{\varepsilon_{i_1}} |i_2|^{\varepsilon_{i_2}} \cdots |i_{2n}|^{\varepsilon_{i_{2n}}}$ su correspondiente palabra signada de Gauss. Para simplificar la prueba tomaremos $a_j = j$, $j = 1, 2, ..., n$. Probemos primero que $z \in S_j(K)$ equivale a $|z|^{\varepsilon_z} \in S_j(\omega_K)$. Sea $z \in S_j(K)$, entonces K tiene la forma

$$K = ((i_1, ..., -e_j j, ..., z, ..., e_j j^{-1}, ..., i_{2n})(e_1, ..., e_m))$$

Ahora bien, si $e_j = 1$, entonces $\varepsilon_{-j} = e_j = 1$ y $\varepsilon_j = -e_j = -1$, o sea que

$$\omega_K = |i_1|^{\varepsilon_{i_1}} \cdots j \cdots |z|^{\varepsilon_z} \cdots j^{-1} \cdots |i_{2n}|^{\varepsilon_{i_{2n}}} .$$

Por otro lado, si $e_j = -1$, entonces $\varepsilon_{-j} = e_j = -1$ y $\varepsilon_j = -e_j = 1$, con lo que

$$\omega_K = |i_1|^{\varepsilon_{i_1}} \cdots j \cdots |z|^{\varepsilon_z} \cdots j^{-1} \cdots |i_{2n}|^{\varepsilon_{i_{2n}}} .$$

En cualquiera de los casos se tiene que $|z|^{\varepsilon_z} \in S_j(\omega_K)$.
El recíproco se prueba de forma similar.

En forma análoga se prueba que: $z \in S_j^{-1}(K)$ equivale a $|z|^{\varepsilon_z} \in S_j^{-1}(\omega_K)$.
Por definición $\alpha_j(\omega_K) = \sum_{|z|^{\varepsilon_z} \in S_j(\omega_K)} \varepsilon_z = \sum_{z \in S_j(K)} \varepsilon_z = \alpha_j(K)$. Análogamente se prueba que $\beta_{ij}(\omega_K) = \beta_{ij}(K)$. ■

Corolario 3.1.6 *Sea K un código nudal, entonces K es geométrico si y sólo si $\alpha_j(K) = 0$ y $\beta_{ij}(K) = 0$, para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.*

3.1.2 El vector α y la matriz β de un código nudal

Con base en los valores definidos en la sección anterior, en esta sección daremos los conceptos de vector α y matriz β de un código nudal. Debido a que nuestra definición de código nudal permite signos que no están asociados a cruces del código, en la definición del vector α y la matriz β debemos tener un cuidado especial.
Consideremos la siguiente definición.

Definición 3.1.2 *Sea $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ un código nudal y sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}^+$ sus cruces.*
Definimos el vector α de K, denotado por $\alpha(K)$, como:

$$\alpha(K) = \begin{pmatrix} \alpha_1(K) \\ \vdots \\ \alpha_m(K) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

donde, para $r = 1, ..., m$,

$$\alpha_r(K) = \begin{cases} \alpha_{a_i}(K) & \text{si } r = a_i, \text{ para algún } i = 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Definimos la matriz β de K, denotado por $\beta(K)$, como:

$$\beta(K) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(K) & \cdots & \beta_{1m}(K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}(K) & \cdots & \beta_{mm}(K) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

donde, para $r, t \in \{1, 2, ..., m\}$

$$\beta_{rt}(K) = \begin{cases} \beta_{a_i a_j}(K) & \text{si } r = a_i \text{ y } t = a_j, \text{ para algunos } i, j \in \{1, 2, ..., n\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Si $K = ((),())$, entonces $\alpha(K)$ es el vector vacío, que denotaremos por $()$, y $\beta(K)$ es la matriz vacía, que denotaremos también por $()$.

Con este nuevo lenguaje, el Corolario 3.1.6 puede ser renunciado como la siguiente proposición

Proposición 3.1.7 *Sea K un código nudal, entonces K es geométrico si y sólo si $\alpha(K)$ es el vector vacío $()$ o el vector cero y $\beta(K)$ es la matriz vacía $()$ o la matriz cero.*

Los siguientes ejemplos mostrarán que el vector α y la matriz β no son invariantes bajo transformaciones de Tipo B y movimientos de Reidemeister I y II, vease Sección 1.2.1. Pero ellos nos ayudarán a entender, de forma intuitiva, cómo varían α y β con estos movimientos, y así definir una relación de equivalencia "adecuada" sobre un conjunto "adecuado", cuyas clases de equivalencias darán lugar a un nuevo invariante de nudos combinatorios, que denotaremos por Λ. Este invariante es muy bueno en detectar si un nudo combinatorio es clásico o no. También es muy bueno en distinguir nudos virtuales, como veremos en el Capítulo 5.
El siguiente ejemplo motivará el comportamiento del vector α y la matriz β con respecto a transformaciones de tipo B.

Ejemplo 3.1.3 *Sea K el código $((1,-2,4,3,-1,-3,-4,2),(1,-1,-1,-1))$, entonces $S_1 = \{-3,-4,2\}$, $S_2 = \{1\}$, $S_3 = \{-1\}$ y $S_4 = \{3,-1,-3\}$. Por tanto*

$$\alpha(K) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \beta(K) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la siguiente permutación $(1\ 3)(2\ 4)$, y sea $\widetilde{K}$ el código obtenido al realizar tal reenumeración sobre K, entonces $\widetilde{K} = ((3,-4,2,1,-3,-1,-2,4),(-1,-1,1,-1))$. Luego

$$\alpha(\widetilde{K}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \beta(\widetilde{K}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, sea P la matriz asociada a la permutación $(1\ 3)(2\ 4)$, entonces

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por computo directo tenemos que

$$P\alpha(\widetilde{K}) = \alpha(K) \quad y \quad P\beta(\widetilde{K})P^T = \beta(K).$$

Por otro lado, sea $\tau = (1\ 5)(2\ 7)(3\ 9)(4\ 8)$ *y sea* L *el código obtenido al aplicar* τ *sobre el código* K*, entonces* $L = ((5,-7,8,9,-5,-9,-8,7),(1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1))$*. Por computo directo encontramos que*

$$\alpha(L) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \beta(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si P *representa la matriz de la permutación* τ*, entonces*

$$P\alpha(L) = \begin{pmatrix} \alpha(K) \\ \mathbf{0}_{5\times 1} \end{pmatrix} \quad y \quad P\beta(L)P^T = \begin{pmatrix} \beta(K) & \mathbf{0}_{4\times 5} \\ \mathbf{0}_{5\times 4} & \mathbf{0}_{5\times 5} \end{pmatrix}$$

El siguiente ejemplo motivará el comportamiento del vector α y la matriz β con respecto a movimientos de Reidemeister de Tipo I.

Ejemplo 3.1.4 *Sean* $K = ((1,-2,4,3,-1,-3,-4,2),(1,-1,-1,-1))$*, y* $\widetilde{K} = ((1,\ -2,\ 4,\ 3,\ -1,\ -3,\ -4,\ 2,\ 5,\ -5),\ (1,\ -1,\ -1,\ -1,\ e))$*, donde* $e \in \{1,-1\}$*.*

Si $e = 1$*, entonces* $\alpha(\widetilde{K}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(K) \\ 0 \end{pmatrix}$ *y*

$$\beta(\widetilde{K}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(K) & \alpha(K) \\ -(\alpha(K))^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $e=-1$, *entonces*

$$\alpha(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(K)\\0\end{pmatrix}\quad y\quad \beta(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}0&1&-1&-2&0\\-1&0&-1&-1&0\\1&1&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta(K)&\mathbf{0}_{4\times1}\\\mathbf{0}_{1\times4}&0\end{pmatrix}.$$

Ahora bien, si consideramos $\widetilde{K}=((1,-2,4,3,-1,-3,-4,2,-5,5),(1,-1,-1,-1,e))$, *donde* $e\in\{1,-1\}$. *Tenemos que*
Si $e=1$, *entonces*

$$\alpha(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(K)\\0\end{pmatrix}\quad y\quad \beta(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}0&1&-1&-2&0\\-1&0&-1&-1&0\\1&1&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta(K)&\mathbf{0}_{4\times1}\\\mathbf{0}_{1\times4}&0\end{pmatrix}.$$

Si $e=-1$, *entonces*

$$\alpha(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(K)\\0\end{pmatrix}\ y\ \beta(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}0&1&-1&-2&-1\\-1&0&-1&-1&-1\\1&1&0&0&1\\2&1&0&0&1\\1&1&-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta(K)&\alpha(K)\\-(\alpha(K))^T&0\end{pmatrix}.$$

El ejemplo a continuación mostrará el comportamiento del vector α y la matriz β con respecto a movimientos de Reidemeister de tipo II.

Ejemplo 3.1.5 *Sea* $K=((1,-2,-1,2),(1,1))$, *entonces*

$$\alpha(K)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\quad y\quad \beta(K)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Si tomamos $\widetilde{K}=((1,-2,3,4,-1,2,-3,-4),(1,1,1,-1))$ *tenemos que*

$$\alpha(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad y\quad \beta(\widetilde{K})=\begin{pmatrix}0&-1&0&-1\\1&0&1&0\\0&-1&0&-1\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$