

Universidad Nacional de Colombia
sede Medellín

Series de Poincaré multivariantes de
singularidades de curvas sobre campos
finitos e integración respecto a la
característica de Euler

Autor: Holmes Alberto Chavarría Arboleda
Director: Jhon Jader Mira Albanes

2014

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS.

Agradecimientos

Agradezco al profesor Jhon Jader Mira por su entrega generosa y desinteresada en dirigir este trabajo; a la Escuela de Matemáticas, por brindarme la oportunidad de dar mis primeros pasos de docente. Finalmente, quiero agradecer a Colciencias, por financiar parcialmente este trabajo.

Contenido

Introducción	iv
1 Anillos de valuación discreta y dominios de Dedekind.	1
1.1 ¿Porqué estudiar anillos de valuación discreta?	1
1.2 Valuaciones y anillos de valuación	5
1.3 Dominios de Dedekind e ideales fraccionarios.	18
2 Series de Poincaré	21
3 Series de Poincaré como una integral sobre la característica de Euler	27
3.1 La característica de Euler	28
3.2 Integrales con respecto a la característica de Euler.	31
3.3 Zeta funciones globales.	35

Introducción

André Weil, en 1949, formuló una conjetura acerca del número de soluciones de ecuaciones polinomiales sobre campos finitos; esta conjetura estableció un puente entre las variedades algebraicas aritméticas sobre campos finitos y la topología de variedades algebraicas definida sobre los números complejos. Esta conjetura surgió al estudiar zeta funciones de algunas variedades especiales. En las zeta funciones asociadas a curvas algebraicas sobre campos finitos, existen propiedades, de naturaleza aritmética, codificadas. En el caso del modelo no singular, la teoría está completa con el teorema de Hasse-Weil, acerca de la hipótesis de Riemann para curvas, y el teorema de Deligne para variedades de dimensión superior tratadas en la conjetura de Weil. En 1973, Galkin [Gal] estudió zeta funciones en campos globales que muestran el número de ideales de normas dadas en el semiplano complejo. Su función zeta satisface una ecuación funcional únicamente en el caso Gorenstein. Green [Gr], en un artículo de 1989, obtuvo una nueva zeta función en términos de ideales fraccionarios no nulos, que satisface la ecuación funcional, pero no está determinada por la curva. Se necesitaba, entonces, una zeta función, que estuviera únicamente determinada por la curva, que debiera satisfacer la ecuación funcional y, en el caso Gorenstein, coincidiera con la zeta función de Galkin. Esto fue posible en 1998 en un artículo publicado por Stöhr [St2], su zeta función está definida en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}$ por la serie de Dirichlet absolutamente convergente

$$\zeta(\mathcal{O}, s) := \sum_{\mathfrak{d} \supseteq \mathcal{O}} \#(\mathfrak{d}/\mathcal{O})^{-s}, \Re(s) > 0.$$

La suma es tomada sobre los ideales fraccionarios positivos del anillo local \mathcal{O} de una curva algebraica completa, geoméricamente irreducible X . Stöhr generalizó la serie anterior para ideales fraccionarios

$$\zeta(\mathfrak{a}, s) := \sum_{\mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{a}} \#(\mathfrak{d}/\mathfrak{a})^{-s}, \Re(s) > 0,$$

donde $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}$ son ideales fraccionarios de \mathcal{O} . Esta serie, a su vez, se puede ver como una suma finita de zeta funciones locales parciales

$$\zeta(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{d} \sim \mathfrak{b} \\ \mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{a}}} \#(\mathfrak{d}/\mathfrak{a})^{-s}, \Re(s) > 0,$$

que se puede escribir como una serie de potencias $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t)$ en $t = q^{-s}$.

Este trabajo se centra principalmente en las series de Poincaré estudiadas en [St] y mostraremos que dichas series se pueden expresar como una integral respecto a la característica de Euler.

Más específicamente, dado que para cualquier dominio local noetheriano \mathcal{O} con campo de constantes finito \mathbb{F}_q , con q elementos y campo de fracciones \mathcal{K} , el anillo de fracciones de la completación $\widehat{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} es localmente compacto; existe una medida de Haar normalizada μ tal que $\mu(\mathcal{O}) = 1$ y además, en el sistema \mathcal{M} formado por los ideales fraccionarios \mathfrak{a} de \mathcal{O} y por traslaciones $z + \mathfrak{a}$ con operaciones booleanas de unión e intersección y complementos, $\mu(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{a})$ para cada ideal fraccionario \mathfrak{a} de \mathcal{O} y $\chi(\mathfrak{a})$ es la característica de Euler de \mathfrak{a} . Mostraremos que la serie multivariable de Poincaré estudiada en [St], respecto de la integral sobre la característica de Euler, es

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = \frac{q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \int_{\mathfrak{b}} q^{\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{v}}(g)} \mathfrak{t}^{\bar{\mathfrak{v}}(g)} d\chi.$$

En particular, la función zeta local de Stöhr en términos de la integral sobre la característica de Euler está dada por

$$Z(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, t) = \frac{t^{\deg(\mathfrak{b})} q^\rho}{[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}](q^\rho - 1)} \int_{\mathfrak{b}} (qt)^{\bar{\mathfrak{v}}(g) \cdot \mathfrak{r}} d\chi,$$

donde $\rho := \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ siendo \mathfrak{p} el único ideal maximal del anillo local \mathcal{O} .

En el Capítulo 1 se presentan las bases para el estudio de los anillos de valuación discreta y de los dominios de Dedekind, que servirán para el desarrollo de este trabajo. Los anillos de valuación discreta están ligados al concepto de curva algebraica completa geoméricamente irreducible. Los puntos de dicha curva son anillos de valuación discreta, excepto un número finito de puntos que son anillos locales. Estos anillos locales, que no son anillos de valuación discreta, son las singularidades de la curva. Cada singularidad \mathcal{O} induce una serie multivariable formal de potencias llamada la serie de Poincaré, que es el objeto de estudio en el Capítulo 2. En dicho capítulo, se definen y se muestran propiedades importantes de la serie de Poincaré. Stöhr introdujo la serie de Poincaré $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t})$ para cualquier par de clases de \mathcal{O} -ideales $[\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}]$. Las series $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t)$, $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t^{r_1}, \dots, t^{r_m})$ están relacionadas así:

$$Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t) = t^{\dim(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{a}) - \dim(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{b})} \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t^{r_1}, \dots, t^{r_m}).$$

Finalmente, en el Capítulo 3 se estudia la relación de la serie de Poincaré con la integral, y la existencia de una medida que se relaciona con la característica de Euler. Además, estos resultados se aplicarán a un contexto global sobre la curva algebraica.

Capítulo 1

Anillos de valuación discreta y dominios de Dedekind.

La serie de Poincaré se define en términos de ideales fraccionarios sobre un anillo local y sobre variables inducidas por la clausura algebraica de dicho anillo. La clausura algebraica es la intersección de anillos de valuación discreta que contienen al anillo local y además es un dominio de Dedekind, por lo que es muy importante estudiar estas clases de anillos.

1.1 ¿Porqué estudiar anillos de valuación discreta?

Los anillos de valuación son una clase de anillos locales y los anillos de valuación discreta una clase particular de estos. Se verá que un punto de una curva algebraica es no singular si y sólo si su dominio local asociado es un anillo de valuación discreta. Además, estos anillos serán importantes para definir las series multivariantes de Poincaré.

A lo largo de esta sección usaremos [D.F].

Definición 1 Sea K un campo algebraicamente cerrado, sea V una variedad en $\mathbb{A}^n(K)$. Se sabe que $I(V)$, el ideal asociado a V , es un ideal primo en $K[x_1, \dots, x_n]$. Luego, el anillo de coordenadas

$$K[V] \cong \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I(V)}$$

es un dominio entero y el campo de fracciones de $K[V]$, denotado por $K(V)$, es llamado el campo de funciones racionales de V , a los elementos de $K(V)$ se les llama funciones racionales.

Definición 2 Dado $r \in V$, se dice que $f \in K(V)$ está definido en r si existen $g, h \in K[V]$ tales que

$$f = \frac{g}{h} \text{ y } h(r) \neq 0.$$

Se define $\mathcal{O}_{r,V} := \{f \in K(V) \mid f \text{ está definido en } r\}$.

El anillo $\mathcal{O}_{r,V}$ es un anillo local que tiene a $K(V)$ como campo de fracciones y contiene a $K[V]$. Además, su único ideal maximal es

$$\mathfrak{m}_{r,V} = \left\{ \frac{h}{g} \mid h(r) = 0, g(r) \neq 0 \right\}.$$

El anillo $\mathcal{O}_{r,V}$ es llamado el *anillo local* de V en r . Este anillo puede ser usado para definir, algebraicamente, lo que se conoce como *curva suave* (en el sentido de la existencia de tangentes). Suponga que $V = Z(f)$ es una hipersuperficie en $\mathbb{A}^n(K)$ definida por los ceros de un polinomio irreducible $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Para cada $r = (r_1, \dots, r_n) \in V$ sea

$$D_r(f)(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(r)}{\partial x_i} (x_i - r_i),$$

con $\frac{\partial f(r)}{\partial x_i}$ la derivada parcial usual. Se sigue que si $T := Z(D_r(f)(x_1, \dots, x_n))$, es el conjunto de ceros de $D_r(f)$, entonces la *traslación* $r + T$ es *tangente* a la hipersuperficie V en r . Lo anterior se extiende a cualquier variedad V en $\mathbb{A}^n(K)$.

Definición 3 Sea V una variedad en $\mathbb{A}^n(K)$. **El espacio tangente** a V en $r \in V$ es la variedad lineal $T_{r,V} = Z\{D_r(f)(x_1, \dots, x_n) \mid f \in I(V)\}$

Si $I(V) = (f_1, \dots, f_m)$ entonces

$$T_{r,V} = \bigcap_{i=1}^m Z(D_r(f_i)).$$

(Ver [D.F] pag. 724).

Obsérvese que $T_{r,V}$ es un subespacio vectorial de K^n , al ser intersección de espacios vectoriales.

Definición 4 La *dimensión* de una variedad V , denotada por $\dim V$, es el grado de trascendencia de $K(V)$ sobre K .

Una variedad de dimensión 1 es llamada *curva*, de dimensión 2 una *superficie*.

Definición 5 Una variedad V es no singular en $r \in V$ (o r es un punto no singular de V) si

$$\dim_K(T_{r,V}) = \dim V.$$

De manera equivalente, una variedad V es no singular en r si

$$\dim_K \begin{pmatrix} \mathfrak{m}_{r,V} \\ \mathfrak{m}_{r,V}^2 \end{pmatrix} = \dim V, \quad (\text{Ver [D.F] Proposición 15.52}).$$

En general, para cada punto $r \in V$, $\dim V \leq \dim_K(T_{r,V}) \leq n$. La variedad V es no singular o suave si no es singular en cada punto. Si V es una curva, entonces V es suave si y sólo si

$K[V]$ es enteramente cerrado (Ver [D.F] pag. 726).

Ahora, el resultado trascendental, que responde la pregunta planteada, consiste en lo siguiente: suponga que r es un punto de una curva afín irreducible C sobre un campo algebraicamente cerrado K ; entonces, C es no singular en r si y sólo si el anillo local $\mathcal{O}_{r,C}$ es un anillo de valuación discreta (Ver [D.F] Proposición 16.2.12).

Estudiemos las singularidades sobre el anillo $K[x, y]$. Sea $Z(f)$ una variedad irreducible en $\mathbb{A}^2(K)$, con $f \in K[x, y]$ irreducible. El punto $r = (a, b) \in Z(f)$ es *simple* si $f_x(r) \neq 0$ o $f_y(r) \neq 0$. En este caso la línea

$$f_x(r)(x - a) + f_y(r)(y - b) = 0$$

es llamada la *línea tangente* a f en r . El polinomio irreducible f se puede escribir como una suma de *formas* (monomios de varias variables)

$$f = f_m + f_{m+1} + \cdots + f_n, \quad f_i \text{ es una forma de grado } i, \quad f_m \neq 0.$$

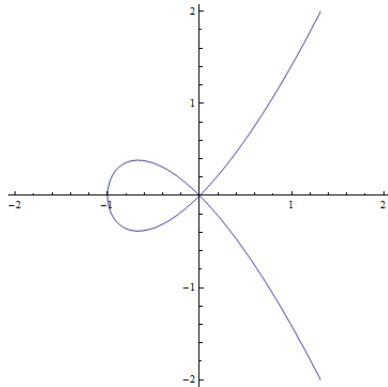
Si $r = (0, 0)$ entonces r es un *punto simple* si $m_r(f) := m = 1$. Si $m = 2$, r es llamado un *punto doble*, si $m = 3$ *punto triple*, etc. Como f_m es una forma en dos variables, entonces

$$f_m = \prod L_i^{r_i}$$

donde L_i son líneas distintas llamadas las *líneas tangentes* en $r = (0, 0)$ y r_i la multiplicidad de la tangente. Si f tiene m tangentes distintas en r , entonces se dice que r es un *punto múltiple ordinario* de f .

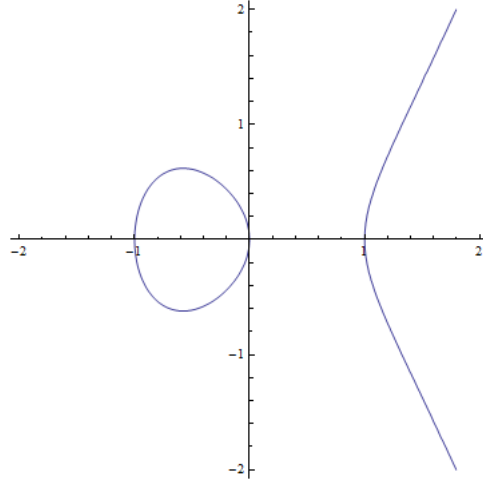
Ejemplo 1

La curva $f = y^2 - x^3 - x^2 = (y + x)(y - x) - x^3$, con $m_{(0,0)}(f) = 2$, tiene dos tangentes, en $r = (0, 0)$. A saber, las rectas $y = -x, y = x$. El punto $(0, 0)$ es el único punto singular y es un nodo.



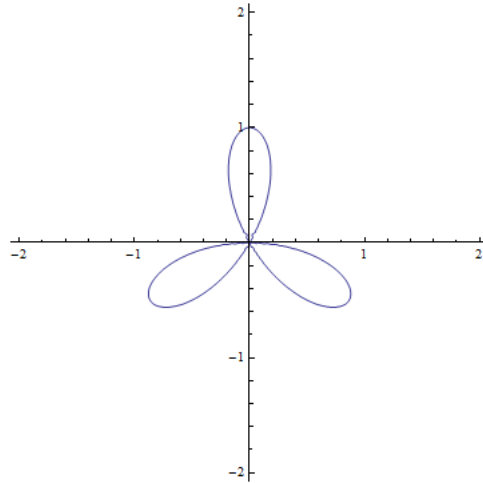
Ejemplo 2

La curva $f = y^2 - x^3 + x$ es una curva no singular.



Ejemplo 3

La curva $f = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = (x^2 + y^2)^2 + y(\sqrt{3}x + y)(\sqrt{3}x - y)$. El punto $r = (0, 0)$ es el único punto singular, es un punto triple ordinario y tiene las tres líneas tangentes $y = 0, y = -\sqrt{3}x, y = \sqrt{3}x$.



Sea $r = (a, b) \in Z(f)$, sea T la traslación $T(x, y) = (x + a, y + b)$, luego $T(0, 0) = r$. Sea $f_T = f(x + a, y + b)$, se define $m_r(f) := m_{(0,0)}(f_T)$. Es decir, $f_T = G_m + G_{m+1} + \dots + G_n$, G_i forma de grado i , $G_m \neq 0$, y sea $m = m_r(f)$. Si $G_m = \prod L_i^{r_i}$, $L_i = \alpha_i x + \beta_i y$, las líneas

$$\alpha_i(x - a) + \beta_i(y - b) = 0,$$

son las líneas tangentes a f en r . Como $f_x(r) = (f_T)_x(0, 0)$ y $f_y(r) = (f_T)_y(0, 0)$, puede probarse que r es un punto simple de f si y sólo si $m_r(f) = 1$, y así las dos definiciones de línea tangente a un punto simple coinciden.

Sea X una curva algebraica, geoméricamente irreducible, definida sobre un campo K y sea \mathcal{K} el campo de las funciones racionales sobre X . Esto significa que \mathcal{K} es el campo de funciones en una variable con campo constante K y X es el conjunto de índices de la colección $\{\mathcal{O}_P\}_{P \in X}$ de K -álgebras locales, propiamente contenidas en \mathcal{K} , con campo de fracciones \mathcal{K} , que satisfacen:

1. Para casi todo $P \in X$, \mathcal{O}_P es un anillo de valuación discreta.
2. Para cada anillo de valuación discreta R de $\mathcal{K}|K$ existe un único $P \in X$ tal que $\mathcal{O}_P \subseteq R$.

De acuerdo a la primera condición, el número de puntos singulares es finito, ya que en el caso de una curva afín plana, el anillo local correspondiente a un punto no singular de una curva es un anillo de valuación discreta (Ver [D.F] Proposición 16.2.12).

1.2 Valuaciones y anillos de valuación

Las bases fundamentales del presente trabajo, por lo realizado en la sección anterior, se encuentran en esta clase particular de anillos. A lo largo de esta sección usaremos [Gol].

Definición 6 Sea \mathcal{K} un campo que contiene al subdominio \mathcal{O} . Se dice que \mathcal{O} es un anillo de valuación si, para todo x en \mathcal{K} , se tiene que $x \in \mathcal{O}$ ó $x^{-1} \in \mathcal{O}$.

En particular, \mathcal{K} es el campo de fracciones de \mathcal{O} .

Sea $\mathfrak{p} = \{x \in \mathcal{K} | x^{-1} \notin \mathcal{O}\}$. Entonces, \mathfrak{p} es el único ideal maximal de \mathcal{O} , ya que es el conjunto de las no unidades de \mathcal{O} , y este conjunto es un ideal. Luego $(\mathcal{O}, \mathfrak{p})$ es un anillo local.

Notación: Sea \mathcal{K} un campo o anillo conmutativo unitario (con unidad). Se denota por \mathcal{K}^\times el subgrupo de las unidades de \mathcal{K} . Sea $\mathbf{v} : \mathcal{K}^\times \rightarrow \frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}^\times}$ el homomorfismo canónico de subgrupos. El grupo $\frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}^\times}$ es abeliano, por lo que se utilizará el símbolo aditivo, es decir $\mathbf{v}(x \cdot y) = \mathbf{v}(x) + \mathbf{v}(y) = \bar{x} + \bar{y}$, para todo $x, y \in \mathcal{K}^\times$.

Se define la siguiente relación en $\frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}^\times}$: para todo $x, y \in \mathcal{K}^\times$,

$$\bar{x} \leq \bar{y} \text{ si y sólo si } x^{-1}y \in \mathcal{O}.$$

La relación \leq es una relación de orden total en $\frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}^\times}$. Se puede extender \mathbf{v} a todo \mathcal{K} definiendo $\mathbf{v}(0) = \infty$.

Afirmación 1 El homomorfismo \mathbf{v} satisface $\mathbf{v}(a + b) \geq \min\{\mathbf{v}(a), \mathbf{v}(b)\}$.

Razón: Suponga sin pérdida de generalidad que $\mathbf{v}(a) = \min\{\mathbf{v}(a), \mathbf{v}(b)\}$. Entonces $\mathbf{v}(b) \geq \mathbf{v}(a)$, luego $a^{-1}b \in \mathcal{O}$ y así $a^{-1}(a + b) = 1 + a^{-1}b \in \mathcal{O}$. Por tanto, $\mathbf{v}(a + b) \geq \mathbf{v}(a)$. \square

De lo anterior se sigue que, si \mathcal{O} es un anillo de valuación, entonces $\mathbf{v} : \mathcal{K}^\times \rightarrow \frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}^\times}$ convierte a $V = \frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}^\times}$ en un grupo totalmente ordenado que satisface:

1. $v(a.b) = v(a) + v(b)$.
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Definición 7 Sea \mathcal{K} un campo, G un grupo totalmente ordenado y $v: \mathcal{K}^\times \rightarrow G$ una función no trivial tal que:

1. $v(a.b) = v(a) + v(b)$; $a, b \in \mathcal{K}^\times$.
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$; $a, b \in \mathcal{K}^\times$.

Entonces a v se le llama una **valuación**.

Dada una valuación $v: \mathcal{K}^\times \rightarrow G$, entonces

$$\mathcal{O}_v := \{x \in \mathcal{K}^\times \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\},$$

es un anillo de valuación. Además, $\mathfrak{p}_v := \{x \in \mathcal{K}^\times \mid v(x) > 0\}$ es el único ideal maximal de \mathcal{O}_v . Luego \mathcal{O}_v es un anillo local. Por Teorema de isomorfismos, $\frac{\mathcal{K}^\times}{\mathfrak{p}_v} \cong \mathbf{Im}(v)$. De ahí que en adelante tomaremos las valuaciones como homomorfismos sobreyectivos. De este modo, existe una biyección entre las valuaciones y los anillos de valuación.

Teorema 1 Sea $v: \mathcal{K}^\times \rightarrow G$ una valuación y a, b, a_1, \dots, a_n elementos en \mathcal{K}^\times . Entonces

1. Si $v(a) > v(b)$, entonces $v(a + b) = v(b)$.
2. $v(1) = 0$.
3. $v(-1) = 0$.
4. $v(-c) = v(c)$, $c \in \mathcal{K}^\times$.
5. $v(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \min\{v(a_1), v(a_2), \dots, v(a_n)\}$.
6. Si $\min\{v(a_1), v(a_2), \dots, v(a_n)\}$ se alcanza una sola vez, entonces

$$v(a_1 + \dots + a_n) = \min\{v(a_1), v(a_2), \dots, v(a_n)\}.$$

7. Si $a_1 + \dots + a_n = 0$ entonces $\min\{v(a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$, se alcanza por lo menos dos veces.

Demostración:

1. Si $v(a) > v(b)$ entonces $b^{-1}a \in \mathcal{O}_v$ y $a^{-1}b \notin \mathcal{O}_v$. Luego $b^{-1}a \in \mathfrak{p}_v$ y por consiguiente

$$1 + b^{-1}a \in \mathcal{O}_v^\times.$$

Así $v(1 + b^{-1}a) = 0$ y $v(b) + v(1 + b^{-1}a) = v(b)$.

Como $v(b) + v(1 + b^{-1}a) = v(b(1 + b^{-1}a)) = v(a + b)$, se sigue que $v(a + b) = v(b)$.

Por tanto, $v(a + b) = \min\{v(a), v(b)\}$.

2. $\mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(cc^{-1}) = \mathbf{v}(c) - \mathbf{v}(c) = 0$.
3. $0 = \mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(-1) + \mathbf{v}(-1) \in \mathcal{K}^\times$. Luego, $\mathbf{v}(-1) = -\mathbf{v}(-1)$. Como G es totalmente ordenado, se sigue que $\mathbf{v}(-1) = 0$.
4. $\mathbf{v}(-c) = \mathbf{v}(-1c) = \mathbf{v}(-1) + \mathbf{v}(c) = \mathbf{v}(c)$.
5. Se sigue por inducción.
6. Razonemos por contradicción, podemos suponer que, sin pérdida de generalidad, $\mathbf{v}(a_1) < \mathbf{v}(a_i)$, $i = 2, \dots, n$ y supongamos que $\mathbf{v}(a_1 + \dots + a_n) > \mathbf{v}(a_1)$. Luego,

$$\mathbf{v}(a_1) = \mathbf{v}(a_1 + \dots + a_n - a_2 - \dots - a_n) \geq \min\{\mathbf{v}(a_1 + \dots + a_n), \mathbf{v}(a_2), \dots, \mathbf{v}(a_n)\} > \mathbf{v}(a_1).$$

$$\mathbf{v}(a_1) > \mathbf{v}(a_1).$$
 Absurdo.
7. El resultado se sigue pues en caso contrario podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el mínimo se alcanza una sola vez, digamos en $\mathbf{v}(a_1)$, es decir, $\mathbf{v}(a_1) < \mathbf{v}(a_i), i = 2, \dots, n$. Luego,

$$\mathbf{v}(a_1) = \mathbf{v}(-a_2 - \dots - a_n) \geq \min\{\mathbf{v}(a_2), \dots, \mathbf{v}(a_n)\} > \mathbf{v}(a_1).$$

Así, $\mathbf{v}(a_1) > \mathbf{v}(a_1)$, lo cual es absurdo. □

Definición 8 Sean K, \mathcal{K} campos tales que $K \subseteq \mathcal{K}$. Se dice que $\mathbf{v} : \mathcal{K}^\times \rightarrow G$ es una K -valuación si \mathbf{v} es una valuación y para todo $x \in K^\times$, $\mathbf{v}(x) = 0$.

Notemos que cuando \mathbf{v} es una K -valuación, $K^\times \subseteq \mathcal{O}_\mathbf{v}^\times$.

Teorema 2 (Teorema de extensión) Sea R un subanillo de un campo \mathcal{K} , sea \mathfrak{p} un ideal primo no nulo de R . Entonces existe un anillo de valuación \mathcal{O} de \mathcal{K} con ideal maximal \mathfrak{m} tal que $R \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{K}$ y $\mathfrak{m} \cap R = \mathfrak{p}$.

Demostración: Consideremos la colección

$$\mathfrak{F} := \{(A, Q) \mid A \text{ subanillo de } \mathcal{K}, Q \text{ ideal primo de } A, \text{ con } R \subseteq A \subseteq \mathcal{K} \text{ y } Q \cap R = \mathfrak{p}\},$$

la cual está parcialmente ordenada por la inclusión $(A_1, Q_1) \leq (A_2, Q_2)$ si y sólo si $A_1 \subseteq A_2$ y $Q_2 \cap A_1 = Q_1$. Note que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ ya que $(R, \mathfrak{p}) \in \mathfrak{F}$. Por el Lema de Zorn existe un elemento $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ maximal en \mathfrak{F} . Es decir, $R \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{K}, \mathfrak{m} \cap R = \mathfrak{p}$. Como $0 \neq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ entonces $\mathfrak{m} \neq 0$. Luego, \mathcal{O} no es campo, y así $\mathcal{O} \neq \mathcal{K}$. El anillo local $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$ representa la localización de \mathcal{O} en \mathfrak{m} . Como \mathcal{O} es dominio entero, entonces \mathcal{O} se embebe en $\mathcal{O}_\mathfrak{m}$. De donde $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}\mathcal{O}_\mathfrak{m} \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$. Luego $(\mathcal{O}, \mathfrak{m}) \leq (\mathcal{O}_\mathfrak{m}, \mathfrak{m}\mathcal{O}_\mathfrak{m})$. Por la maximalidad de $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ se tiene que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\mathcal{O}_\mathfrak{m}$, luego $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ es un anillo local. Sea $x \in \mathcal{K}$, mostraremos que $x \in \mathcal{O}$ o $x^{-1} \in \mathcal{O}$. En efecto, si $\mathfrak{m}_1 \subsetneq \mathcal{O}[x^{-1}]$ es un ideal generado por \mathfrak{m} entonces $(\mathcal{O}[x^{-1}], \mathfrak{m}_1) \geq (\mathcal{O}, \mathfrak{m})$. Por la maximalidad de $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ se sigue que $\mathcal{O} = \mathcal{O}[x^{-1}]$ y así

$x^{-1} \in \mathcal{O}$. Ahora, si \mathfrak{m} no genera a ningún ideal propio de $\mathcal{O}[x^{-1}]$ entonces $\mathcal{O}[x^{-1}] = \mathfrak{m}\mathcal{O}[x^{-1}]$, por consiguiente, existen $a_0, \dots, a_n \in \mathfrak{m}$ tales que

$$1 = \sum_{i=0}^n a_i x^{-i}.$$

Como \mathfrak{m} es maximal entonces $1 - a_0$ es unidad en \mathcal{O} . Dividiendo por $(1 - a_0)x^{-n}$ entonces x satisface un polinomio mónico, con coeficientes en \mathfrak{m} . Luego x es entero sobre \mathcal{O} , de donde $\mathcal{O}[x]$ es un \mathcal{O} -módulo finitamente generado. Por el Lema de Nakayama (ver [D.F]), $\mathfrak{m}\mathcal{O}[x] \subsetneq \mathcal{O}[x]$, $\mathfrak{m}\mathcal{O}[x]$ es primo y $\mathfrak{m}\mathcal{O}[x] \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$.

De este modo, $(\mathcal{O}[x], \mathfrak{m}\mathcal{O}[x]) \geq (\mathcal{O}, \mathfrak{m})$. Por la maximalidad de \mathcal{O} , se tiene que $\mathcal{O}[x] = \mathcal{O}$ y así $x \in \mathcal{O}$.

Por tanto, \mathcal{O} es un anillo de valuación. □

Corolario 1 *Suponga que $K \subseteq \mathcal{K}$ son campos y $x \in \mathcal{K}$. Si x es trascendente sobre K , existe una K -valuación \mathbf{v} de \mathcal{K} tal que $\mathbf{v}(x) > 0$. Si x es algebraico sobre K , $\mathbf{v}(x) = 0$ para todas las K -valuaciones \mathbf{v} .*

Demostración: Supongamos que x es trascendente sobre K , y denotemos por $R := K[x]$ el anillo de polinomios en x . Entonces $R^\times = K^\times$. Sea $\mathfrak{p} = (x)$ el ideal generado por x en R . Por el Teorema 2, existe un anillo de valuación $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ tal que $K[x] \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{K}$, $K[x] \cap \mathfrak{m} = (x) \subseteq \mathfrak{m}$ y $K^\times \subseteq \mathcal{O}^\times$. Luego, con la correspondiente valuación \mathbf{v} de \mathcal{O} , se tiene que $\mathbf{v}(x) > 0$ y $\mathbf{v}(c) = 0$, para todo $c \in K^\times$. Así \mathbf{v} es una K -valuación.

Supongamos ahora que x es algebraico sobre K , luego

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0; \quad a_0, \dots, a_n \in K.$$

Sea \mathbf{v} una K -valuación de \mathcal{K} . Entonces

$$\mathbf{v}(x^n) = n\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}\left(-\sum_{i < n} a_i x^i\right) = \mathbf{v}\left(\sum_{i < n} a_i x^i\right).$$

Si $\mathbf{v}(x) \neq 0$, entonces $\min\{\mathbf{v}(a_i x^i) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ es alcanzado una sola vez. Luego en virtud del Teorema 1

$$\mathbf{v}(x^n) = n\mathbf{v}(x) = i\mathbf{v}(x) \text{ para algún } i \in \{0, \dots, n-1\},$$

por consiguiente $n = i$ y, de ahí, $n \leq n-1$, lo cual es absurdo.

Por tanto $\mathbf{v}(x) = 0$, para todas las K -valuaciones \mathbf{v} . □

Proposición 1 *Sea R un subanillo de un campo \mathcal{K} . Si $x \in R[x^{-1}]$, entonces x es entero sobre R .*

Demostración: Como $x \in R[x^{-1}]$ existen $r_i \in R, i = 0, \dots, n$, tales que

$$x = \sum_{i=0}^n r_i x^{-i}.$$

Si se multiplica a ambos lados por x^n , entonces se sigue que x es entero sobre R . \square

Corolario 2 *Sea R un subanillo de un campo \mathcal{K} . Entonces, la clausura entera de R en \mathcal{K} , denotada por \tilde{R} , es la intersección de los anillos de valuación que contienen a R .*

Demostración: Si $x \in \tilde{R}$, entonces existen $r_0, \dots, r_{n-1} \in R$ tales que

$$r_0 + r_1 x + \dots + x^n = 0.$$

Sea \mathbf{v} una valuación de \mathcal{K} no negativa sobre R . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x^n) = n\mathbf{v}(x) &= \mathbf{v}(r_0 + \dots + r_{n-1}x^{n-1}) \\ &\geq \min_{0 \leq i \leq n-1} \{\mathbf{v}(r_i x^i)\} = \min_{0 \leq i \leq n-1} \{\mathbf{v}(r_i) + i\mathbf{v}(x)\} \\ &\geq \min_{0 \leq i \leq n-1} \{i\mathbf{v}(x)\}. \end{aligned}$$

Luego, $n\mathbf{v}(x) \geq i_0\mathbf{v}(x)$ para algún $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$, y de ahí $\mathbf{v}(x) \geq 0$. Como \mathbf{v} es una valuación de \mathcal{K} no negativa sobre R ; entonces x está en la intersección de los anillos de valuación de \mathcal{K} . Así,

$$\tilde{R} \subseteq \mathcal{O} := \bigcap_{\mathbf{v} \in K(\mathbf{v}, R)} \mathcal{O}_{\mathbf{v}},$$

donde $K(\mathbf{v}, R)$ denota el conjunto de las valuaciones de \mathcal{K} que contienen a R .

Probemos $\mathcal{O} \subseteq \tilde{R}$. En efecto, por la Proposición 1 si x no es entero se sigue que $x \notin R[x^{-1}]$. Por consiguiente, el ideal (x^{-1}) de $R[x^{-1}]$ es propio. Así, existe un ideal maximal \mathfrak{p} de $R[x^{-1}]$ que contiene a (x^{-1}) . En particular, $x^{-1} \in \mathfrak{p}$. Por el Teorema 2, existe una valuación de \mathcal{K} , suponga $\mathbf{v}_{\mathfrak{p}}$, que es positiva en x^{-1} , es decir, $\mathbf{v}_{\mathfrak{p}}(x^{-1}) > 0$, y por consiguiente $\mathbf{v}_{\mathfrak{p}}(x) < 0$. Observe que $\mathbf{v}_{\mathfrak{p}} \in K(\mathbf{v}, R)$ y así $x \notin \mathcal{O}$.

Se ha probado que, si $x \notin \tilde{R}$, entonces $x \notin \mathcal{O}$. Por tanto, $\mathcal{O} \subseteq \tilde{R}$. \square

Dado un campo \mathcal{K} y un anillo de valuación \mathcal{O} , se contempla el caso en el que el grupo de valores $V := \frac{\mathcal{K}^{\times}}{\mathcal{O}^{\times}}$ es cíclico infinito y V es identificado con \mathbb{Z} . El anillo \mathcal{O} es llamado *anillo de valuación discreta*, y la correspondiente valuación \mathbf{v} se le llama *valuación discreta*. Cualquier elemento t en \mathcal{O} tal que $\mathbf{v}(t) = 1$, es llamado *parámetro local en \mathbf{v}* (parámetro uniformizante o parámetro local en \mathfrak{p}).

Lema 1 *Sea \mathcal{O} subanillo de un campo \mathcal{K} , sea $t \in \mathcal{O}$. Entonces \mathcal{O} es un anillo de valuación discreta de \mathcal{K} con parámetro local t si y sólo si cada elemento $x \in \mathcal{K}^{\times}$ puede escribirse de la forma $x = ut^i$ con $i \in \mathbb{Z}$, para alguna unidad $u \in \mathcal{O}$.*

Demostración: Si \mathcal{O} es un anillo de valuación discreta con parámetro local t , entonces existe una valuación discreta, suponga \mathbf{v} . Sea $x \in \mathcal{K}$ y sea $i := \mathbf{v}(x)$; entonces

$$\mathbf{v}(x^{-1}t^i) = -\mathbf{v}(x) + i\mathbf{v}(t) = -\mathbf{v}(x) + \mathbf{v}(x)1 = 0.$$

Luego, $x^{-1}t^i = u \in \mathcal{O}^\times$ y así $x = u^{-1}t^i$.

Se muestra ahora la condición suficiente. Sea $\mathcal{O}_0 := \{ut^i | i \geq 0\} \subseteq \mathcal{O}$. Entonces \mathcal{O}_0 es un anillo de valuación de \mathcal{K} y es un subanillo maximal, bajo inclusión, de \mathcal{K} . Además, $\frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}_0^\times}$ es un grupo cíclico infinito (De hecho $\mathcal{O}_0^\times = \mathcal{O}^\times$). Luego $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$ es un anillo de valuación discreta con parámetro local t . \square

De lo anterior se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3 *Sea \mathcal{O} un anillo de valuación discreta de \mathcal{K} . Entonces \mathcal{O} es un subanillo maximal de \mathcal{K} y si t es un parámetro local, cada ideal de \mathcal{O} es generado por una potencia de t .*

Demostración: Si \mathcal{O}' es otro subanillo de \mathcal{K} tal que $\mathcal{O} \subsetneq \mathcal{O}'$, entonces $t^{-1} \in \mathcal{O}'$ y así $\mathcal{O}' = \mathcal{K}$. Luego, \mathcal{O} es subanillo maximal. Sea $I \subseteq \mathcal{O}$ ideal. Escogiendo el menor entero positivo i tal que $t^i \in I$, se sigue que $I = (t^i)$. \square

Sea R un dominio de factorización única (DFU) y sea $p \in R$ un elemento primo. Para cada $x \in R$, x se puede escribir como $x = p^e x_0$, donde p no divide a x_0 y defina $\mathbf{v}_p(x) = e$. Se extiende \mathbf{v}_p al campo de fracciones de R definiendo

$$\mathbf{v}_p\left(\frac{x}{y}\right) = \mathbf{v}_p(x) - \mathbf{v}_p(y).$$

Observe que $\mathcal{O}_{\mathbf{v}_p} = R_{(p)}$ (anillo local en p). La valuación \mathbf{v}_p es llamada la *valuación p -ádica* de R .

Lema 2 *Sea \mathbf{v} una valuación de $\mathcal{K} := K(x)$ y sea K un campo. Si $\lambda \neq p$ con λ y p polinomios mónicos irreducibles, entonces $\mathbf{v}(\lambda) = 0$.*

Demostración: El máximo común divisor de λ y p es 1, luego, por el Lema de Bézout (ver [D.F]), existen $\pi, \theta \in K[x]$ tales que $1 = \lambda\pi + \theta p$. Luego,

$$0 = \mathbf{v}(1) \geq \min\{\mathbf{v}(\lambda\pi), \mathbf{v}(\theta p)\} \geq \min\{\mathbf{v}(\lambda), \mathbf{v}(p)\}.$$

Como $\mathbf{v}(p) > 0$, entonces $\mathbf{v}(\lambda) \leq 0$; y de ahí $\mathbf{v}(\lambda) = 0$. \square

A continuación se clasificarán las valuaciones para el campo $\mathcal{K} := K(x)$.

Proposición 2 *Sea \mathbf{v} una valuación de $\mathcal{K} := K(x)$ y sea K un campo. Entonces, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p$ para algún polinomio irreducible $p \in K[x]$ o $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty$, donde $\mathbf{v}_\infty(f(x)/g(x)) = \deg(g) - \deg(f)$ con $f(x), g(x) \in K[x]$ y $\deg(f)$ es el grado del polinomio f .*

Demostración: Suponga que $\mathbf{v}(x) \geq 0$. Entonces para todo $p(x) \in K[x]$, $\mathbf{v}(p(x)) \geq 0$. Luego $K[x] \subseteq \mathcal{O}_{\mathbf{v}}$. Por ser \mathbf{v} sobreyectiva, existe $q(x) \in K[x]$ tal que $\mathbf{v}(q(x)) > 0$. Como $K[x]$ es DFU,

$$q(x) = a \prod_{i=1}^n p_i^{e_i},$$

con p_i polinomio mónico irreducible, $e_i \geq 0$ entero positivo y $a \in K$. De donde,

$$\mathbf{v}(q(x)) = \sum_{i=1}^n e_i \mathbf{v}(p_i) > 0$$

y así existe $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$ tal que $\mathbf{v}(p) > 0$. Por el lema 2 se sigue que para todo $q(x) \in K[x]$, $\mathbf{v}(q(x)) = e_q \mathbf{v}(p)$, $e_q \geq 0$. Ahora, si $r \in K(x)$ entonces r se escribe de manera única como

$$r = a \prod_{i=1}^n p_i^{e_i} p^{e_r},$$

con p_i mónico irreducible, $e_i, e_r \in \mathbb{Z}$. Luego $\mathbf{v}(r) = e_r \mathbf{v}(p)$.

Se ha probado: para todo $r \in K(x)$, $\mathbf{v}(r) = e_r \mathbf{v}(p)$ con $e_r \in \mathbb{Z}$. Esto significa que \mathbb{Z} es generado por $\mathbf{v}(p)$, pero los únicos elementos que pueden generar a \mathbb{Z} son 1 y -1 , como $\mathbf{v}(p) > 0$, entonces $\mathbf{v}(p) = 1$. Luego, para todo $r \in K(x)$, $\mathbf{v}(r) = e_r = \mathbf{v}_p(r)$. Por tanto, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p$, definida en el comentario anterior a esta proposición.

Ahora suponga que $\mathbf{v}(x) < 0$. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$. Entonces

$$\mathbf{v}(f(x)) \geq \min\{i\mathbf{v}(x)\}, i = 1, \dots, n.$$

Como $\mathbf{v}(x) < 0$, entonces $n\mathbf{v}(x) < i\mathbf{v}(x)$, $i = 1, \dots, n-1$. Por tanto,

$$\min\{i\mathbf{v}(x)\} = n\mathbf{v}(x), i = 1, \dots, n.$$

Por propiedad 6 Teorema 1, $\mathbf{v}(f(x)) = n\mathbf{v}(x) = \deg(f)\mathbf{v}(x)$.

Ahora bien, si $h \in K^\times(x)$, digamos $h = \frac{f}{g}$, con $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$; entonces

$$\mathbf{v}(h) = \mathbf{v}(f) - \mathbf{v}(g) = [\deg(f) - \deg(g)]\mathbf{v}(x).$$

Luego, como \mathbf{v} es sobre esto indica que $\mathbf{v}(x)$ genera a \mathbb{Z} . Como $\mathbf{v}(x) < 0$, entonces $\mathbf{v}(x) = -1$, y así, $\mathbf{v}(h) = \deg(g) - \deg(f)$, es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty$. □

Teorema 3 (De la aproximación débil)

Sea \mathcal{K} un campo, sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ valuaciones discretas distintas y sean $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ y $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{K}$. Entonces existe $z \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathbf{v}_i(z - h_i) > n_i, i = 1, \dots, m.$$

Demostración: Sea n lo suficientemente grande tal que

$$\mathbf{v}_i(h_j) + n > n_i, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (1.1)$$

Paso 1 Existe $z \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{v}_1(z) > 0, \mathbf{v}_2(z) < 0$.

Razón: Por el Corolario 3, \mathcal{O}_{v_1} y \mathcal{O}_{v_2} son subdominios maximales de \mathcal{K} . Luego, existen $x \in \mathcal{O}_{v_1} - \mathcal{O}_{v_2}$ y $y \in \mathcal{O}_{v_2} - \mathcal{O}_{v_1}$, de ahí $\mathbf{v}_1(x) \geq 0, \mathbf{v}_2(x) < 0$ y $\mathbf{v}_1(y) < 0, \mathbf{v}_2(y) \geq 0$. Así, $z = \frac{x}{y}$ satisface las propiedades requeridas.

Paso 2 Existe $x \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{v}_1(x) > 0, \mathbf{v}_j(x) < 0, j = 2, \dots, m$.

Razón: Se procede por induccion. Si $m = 2$, se aplica el Paso 1. Suponga $m > 2$. Por hipótesis de inducción, existe $y \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathbf{v}_1(y) > 0, \mathbf{v}_j(y) < 0, \quad j = 2, \dots, m - 1.$$

Suponga que $\mathbf{v}_m(y) \geq 0$. Por el Paso 1, existe $z \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathbf{v}_1(z) > 0, \mathbf{v}_m(z) < 0.$$

Sea $x = y + z^r$, donde $r \in \mathbb{Z}$ es un entero positivo suficientemente grande tal que si $\mathbf{v}_i(z) < 0$, entonces

$$r\mathbf{v}_i(z) < \mathbf{v}_i(y), \quad i = 2, \dots, m \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1(x) \geq \min\{\mathbf{v}_1(y), r\mathbf{v}_1(z)\} > 0.$$

Para cada $i = 2, \dots, m$ se tiene

i) Si $\mathbf{v}_i(z) < 0$, para algún i , entonces $\mathbf{v}_i(x) \geq \min\{\mathbf{v}_i(y), r\mathbf{v}_i(z)\}$. Como el mínimo se alcanza una sola vez, entonces

$$\mathbf{v}_i(x) = r\mathbf{v}_i(z) < 0.$$

ii) Si $\mathbf{v}_i(z) \geq 0, i = 2, \dots, m - 1$, entonces $\mathbf{v}_i(x) = \mathbf{v}_i(y) < 0, i = 2, \dots, m - 1$.

Luego, $\mathbf{v}_1(x) > 0, \mathbf{v}_j(x) < 0, j = 2, \dots, m$.

Paso 3 Para cada entero positivo N , existe $y \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathbf{v}_1(y - 1) \geq N, \mathbf{v}_j(y) \geq N, \quad j = 2, \dots, m.$$

Razón: Por el Paso 2, existe $x \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathbf{v}_1(x) > 0, \mathbf{v}_j(x) < 0, \quad j = 2, \dots, m.$$

Sea $y = \frac{1}{1 + x^N}$. Entonces $\mathbf{v}_1(y - 1) > 0$. Para cada $i = 2, \dots, m$ se tiene

$$\mathbf{v}_i(y) = -\mathbf{v}_i(1 + x^N).$$

Pero $\mathbf{v}_i(x) < 0$, entonces $\mathbf{v}_i(1 + x^N) < 0$, y de ahí, $\mathbf{v}_i(y) > 0, i = 2, \dots, m$.

Paso 4 En el paso anterior, escoja $N = n$. Luego, para cada $i = 1, \dots, m$ existe $y_i \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathbf{v}_i(y_i - 1) > n, \mathbf{v}_j(y_i) > n, \quad i \neq j.$$

Sea $z := h_1y_1 + \cdots + h_my_m$. Entonces, por la F3rmula 1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i(z - h_i) &\geq \min\{\mathbf{v}_i(h_j) + \mathbf{v}_i(y_j), \mathbf{v}_i(h_i) + \mathbf{v}_i(y_i - 1)\} \\ &> \min\{\mathbf{v}_i(h_j) + n\} \\ &> n_i, \quad 1 \leq i, j \leq m. \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{v}_i(z - h_i) > n_i, i = 1, \dots, m$. □

Con las mismas condiciones del Teorema 3, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4 *Existe $x \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{v}_i(x - h_i) = n_i, i = 1, \dots, m$.*

Demostraci3n: Sean $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{K}$ tales que $\mathbf{v}_i(f_i) = n_i, i = 1, \dots, m$. Por el Teorema de la aproximaci3n d3bil, existen $y, z \in \mathcal{K}$ tales que

$$\mathbf{v}_i(y - f_i) > n_i, \quad \mathbf{v}_i(z - h_i) > n_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sea $x = y + z$. Entonces, $x - h_i = (y - f_i) + (z - h_i) + f_i$. Luego

$$\mathbf{v}_i(x - h_i) = \mathbf{v}_i(f_i) = n_i, \quad i = 1, \dots, m$$

□

Corolario 5 *Suponga que \mathcal{K} es un campo, V un conjunto finito de valuaciones discretas de \mathcal{K} y que cada anillo de valuaci3n de \mathcal{K} que contiene a*

$$K(V, 0) := \{x \in \mathcal{K} \mid \mathbf{v}(x) \geq 0, \text{ para todo } \mathbf{v} \in V\}$$

es discreto. Entonces, $K(V, 0)$ es un DIP e $I \subseteq K(V, 0)$ es un ideal no nulo si y s3lo si $I = K(V, m) = \{x \in \mathcal{K} \mid \mathbf{v}(x) \geq m(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V\}$ para alguna funci3n

$m : V \rightarrow \mathbb{Z}$ no negativa, 3nicamente determinada por I . Adem3s, $\frac{K(V, 0)}{K(V, m)}$ tiene una $K(V, 0)$ -serie de composici3n que consiste de exactamente $m(\mathbf{v})$ factores de composici3n isomorfos (como $K(V, 0)$ -m3dulos) al campo residual $F_{\mathbf{v}} := \frac{\mathcal{O}_{\mathbf{v}}}{\mathfrak{p}_{\mathbf{v}}}$ para cada $\mathbf{v} \in V$.

Demostraci3n: De las definiciones, se sigue que $K(V, 0)$ es anillo, $K(V, m)$ es un $K(V, 0)$ -m3dulo para todo m y que si $m \geq m'$ entonces $K(V, m) \subseteq K(V, m')$. En particular, $K(V, m)$ es un ideal de $K(V, 0)$ para $m \geq 0$.

Suponga que $0 \neq I = K(V, m)$ y veamos que I es principal. Para cada $\mathbf{v} \in V$, defina $m(\mathbf{v}) = \min\{\mathbf{v}(x) \mid x \in I\}$. Por Corolario 4, existe $x_m \in \mathcal{K}$ tal que

$$\mathbf{v}(x_m) = m(\mathbf{v}), \text{ para todo } \mathbf{v} \in V.$$

Adem3s, $m(\mathbf{v}) \geq 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$, de aqu3 $x_m \in K(V, 0)$, y $x_m^{-1}I$ es un ideal de $K(V, 0)$, pues si $\mathbf{v} \in V$ y $t \in I$ entonces, $\mathbf{v}(t) \geq \mathbf{v}(x_m)$ implica que $\mathbf{v}(x_m^{-1}t) \geq 0$. Luego,

$x_m^{-1}t \in K(V, 0)$ para todo $t \in I$. De esto, $x_m^{-1}I \subseteq K(V, 0)$, y así $x_m^{-1}I$ es ideal. Observe que $x_m^{-1}I$ no está contenido en el ideal maximal \mathfrak{p}_v de \mathcal{O}_v , para todo $v \in V$.

Afirmación: $x_m^{-1}I = K(V, 0)$.

Razón: Razonemos por contradicción. Supongamos $x_m^{-1}I \subsetneq K(V, 0)$. Por el Teorema de extensión, existiría un anillo de valuación $\mathcal{O}_{v'}$ conteniendo a $K(V, 0)$ tal que $x_m^{-1}I \subseteq \mathfrak{p}_{v'}$, y así $v' \notin V$. Además v' es discreta. Como consecuencia del Paso 2, en la prueba del Teorema de la aproximación débil, existe $y \in K(V, 0)$ tal que $v'(y) < 0$. Pero $K(V, 0) \subseteq \mathcal{O}_{v'}$ y así $v'(y) \geq 0$. Luego, $v'(y) < 0$ y $v'(y) \geq 0$. Absurdo.

De ahí $x_m^{-1}I = K(V, 0)$ y así $I = x_m K(V, 0)$. Por tanto, el ideal I es principal.

Como el mínimo es único se sigue que m es única.

En particular, el $K(V, 0)$ -módulo $\frac{K(V, m)}{K(V, m + \delta_v)}$ es irreducible, donde δ_v es el delta de Króncker en V .

Sea t un parámetro local en v . Defina $\eta : K(V, m) \rightarrow F_v$ por

$$\eta(x) = t^{-m(v)}x + \mathfrak{p}_v.$$

La función η es homomorfismo y su núcleo es $\ker(\eta) = K(V, m + \delta_v)$.

Además η es sobre. En efecto, sea $y \in \mathcal{O}_v$. Por el Teorema de aproximación débil, existe $x \in \mathcal{K}$ tal que $v'(x) \geq m(v')$ para $v' \in V$. Si $v \neq v'$ y $v(x - t^{m(v)}y) \geq m(v) + 1$, entonces $x \in K(V, m)$ y $\eta(x) = y + \mathfrak{p}_v$.

Luego, η induce un isomorfismo de $K(V, 0)$ -módulos $\frac{K(V, m)}{K(V, m + \delta_v)} \cong F_v$. Por un argumento

de inducción, se muestra que $\frac{K(V, 0)}{K(V, m)}$ tiene una serie de composición de $m(v)$ factores isomorfos al campo F_v para cada $v \in V$. □

Sea $\mathcal{K}|\mathcal{K}$ una extensión finita de campos. Por el Teorema de extensión, para cada valuación discreta de \mathcal{K} existe un anillo de valuación \mathcal{O}' de \mathcal{K} conteniendo a \mathcal{O}_v cuyo ideal maximal $\mathfrak{p}_{v'}$ contiene a \mathfrak{p}_v .

Definición 9 Sea $\mathcal{K}|\mathcal{K}$ una extensión finita de campos. Si v' es la valuación asociada de \mathcal{K} , se dice que v' divide a v y se escribe $v'|v$. Se denota $\Gamma_v := \frac{\mathcal{K}^\times}{\mathcal{O}_v^\times}$, el grupo de valores de v .

Así, existe un homomorfismo inyectivo $\Gamma_v \hookrightarrow \Gamma_{v'}$, pues $\mathcal{O}_{v'}^\times \cap \mathcal{K} = \mathcal{O}_v^\times$. Identificamos $\Gamma_v \subseteq \Gamma_{v'}$.

Teorema 4 Suponga que v es una valuación discreta de un campo \mathcal{K} , $\mathcal{K}|\mathcal{K}$ es una extensión finita y $v'|v$. Entonces:

1. $(\Gamma_{\mathfrak{v}'} : \Gamma_{\mathfrak{v}}) \leq [\mathcal{K} : \mathcal{K}]$, donde $(\Gamma_{\mathfrak{v}'} : \Gamma_{\mathfrak{v}})$ es el índice del grupo $\Gamma_{\mathfrak{v}}$ en el grupo $\Gamma_{\mathfrak{v}'}$, y $[\mathcal{K} : \mathcal{K}]$ es el grado de la extensión del campo \mathcal{K} sobre el campo \mathcal{K} .
2. La valuación \mathfrak{v}' es discreta y existe un entero $e \geq 0$ tal que la restricción de \mathfrak{v}' a \mathcal{K} es $\mathfrak{v}'|_{\mathcal{K}} = e \cdot \mathfrak{v}$

Al índice $e := (\Gamma_{\mathfrak{v}'} : \Gamma_{\mathfrak{v}})$ se le llama *índice de ramificación*. El índice e es denotado también como $e_{\mathfrak{v}'|\mathfrak{v}}$.

Demostración:

1. Sea $C = \{y_1, \dots, y_n\}$ un conjunto de elementos de \mathcal{K}^\times tales que las clases $\mathfrak{v}'(y_i) + \Gamma_{\mathfrak{v}}$ en $\frac{\Gamma_{\mathfrak{v}'}}{\Gamma_{\mathfrak{v}}}$ sean diferentes entre si.
Suponga que existen escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{K}$ no nulos, en la combinación lineal con elementos de C . Luego,

$$\mathfrak{v}'\left(\sum_{i=1}^n a_i y_i\right) = \min\{\mathfrak{v}'(a_i) + \mathfrak{v}'(y_i)\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

(El mínimo se alcanza una sola vez, pues dos clases son diferentes entre si). Entonces,

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i \neq 0 \text{ y así } C \text{ es linealmente independiente sobre } \mathcal{K}.$$

Por tanto, el número de clases laterales es menor o igual a $[\mathcal{K} : \mathcal{K}]$.

Luego $(\Gamma_{\mathfrak{v}'} : \Gamma_{\mathfrak{v}}) \leq [\mathcal{K} : \mathcal{K}]$.

2. Por el literal anterior $e = (\Gamma_{\mathfrak{v}'} : \Gamma_{\mathfrak{v}})$ es finito. El grupo aditivo $\Gamma_{\mathfrak{v}'}$ es libre de torsión (pues es totalmente ordenado) luego,

$$\Gamma_{\mathfrak{v}'} \cong e \cdot \Gamma_{\mathfrak{v}} \subseteq \Gamma_{\mathfrak{v}} \cong \mathbb{Z}.$$

(Pues e es el orden del grupo $\frac{\Gamma_{\mathfrak{v}'}}{\Gamma_{\mathfrak{v}}}$ y así $ey \in \Gamma_{\mathfrak{v}}$, para todo $y \in \Gamma_{\mathfrak{v}'}$.) Además, $\Gamma_{\mathfrak{v}} \cong \mathbb{Z}$. Luego, $\Gamma_{\mathfrak{v}'}$ es isomorfo a un subgrupo no nulo de \mathbb{Z} . Como \mathbb{Z} no contiene, salvo isomorfismos, subgrupos no triviales entonces $\Gamma_{\mathfrak{v}'} \cong \mathbb{Z}$. Luego, \mathfrak{v}' es discreta. \square

Lema 3 Sea \mathcal{O} un anillo de valuación discreta con campo de fracciones \mathcal{K} , ideal maximal \mathfrak{p} y campo residual F . Sea M un \mathcal{O} -módulo libre de torsión con $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} M = n$. Entonces $\dim_F \frac{M}{\mathfrak{p}M} \leq n$.

Demostración: Suponga que $x_1, \dots, x_m \in M$. Si se tiene una relación de dependencia no trivial $\sum_{i=1}^m a_i x_i = 0$, con $a_i \in \mathcal{K}$, entonces, eliminando denominadores, se puede suponer que $a_i \in \mathcal{O}$ y no todos los $a_i \in \mathfrak{p}$. De donde, si x_1, \dots, x_m son linealmente independientes módulo $\mathfrak{p}M$, entonces x_1, \dots, x_m son linealmente independientes sobre \mathcal{K} . Luego,

$$\dim_F \frac{M}{\mathfrak{p}M} \leq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \otimes M = n$$

\square

Lema 4 Sea $n := [\mathcal{K} : \mathcal{K}]$ el grado de la extensión $\mathcal{K}|K$, sea \mathcal{O}_v un anillo de valuación discreta de \mathcal{K} y sea R cualquier subanillo de \mathcal{K} que contiene la clausura entera de \mathcal{O}_v en \mathcal{K} . Entonces la función $\phi : \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_v} R \rightarrow \mathcal{K}$, definida por

$$\phi(x \otimes y) = xy$$

es un isomorfismo de \mathcal{K} -espacios vectoriales. En particular, si $\mathfrak{v}'|\mathfrak{v}$, entonces el campo residual $F_{\mathfrak{v}'}$ es una extensión del campo residual $F_{\mathfrak{v}}$ de \mathfrak{v} , de grado a lo sumo n .

Demostración: La función ϕ es un homomorfismo y es inyectiva. En efecto, sea t un parámetro local para \mathfrak{v} . Por el Lema 1 se tiene que si $x \in \ker(\phi)$, entonces $x = \sum_{i=0}^n t^{-e_i} \otimes x_i$,

con $e_0 = \max\{e_i | i = 0, \dots, n\}$ y $\phi(x) = \sum_{i=0}^n t^{-e_i} x_i = 0$. Luego,

$$t^{e_0} x = \sum_{i=0}^n t^{e_0 - e_i} \otimes x_i = 1 \otimes \left[\sum_{i=0}^n t^{e_0 - e_i} x_i \right] = 0.$$

Es decir, $t^{e_0} x = 0$ y así $x = 0$. Por tanto, ϕ es inyectiva.

La función ϕ es sobreyectiva. En efecto, sea $y \in \mathcal{K}$. Entonces $\sum_{i=0}^n a_i y^i = 0$ para $a_i \in \mathcal{K}$ no todos cero. Como \mathcal{K} es el campo de fracciones de \mathcal{O}_v , eliminando denominadores se puede asumir sin pérdida de generalidad que $a_i \in \mathcal{O}_v$; $i = 0, \dots, n$. Multiplicando por a_n^{n-1} , en ambos miembros de la igualdad, se sigue que $a_n y$ es entero sobre \mathcal{O}_v y de ahí $z := a_n y \in R$. Como $y = \frac{z}{a_n} = \frac{1}{a_n} z$ entonces $y \in \mathcal{K}R$. Luego, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}R$ y así $\mathcal{K} = \mathcal{K}R = \text{Im}(\phi)$. Por tanto, ϕ es isomorfismo.

Como $\mathcal{O}_{\mathfrak{v}'}$ es enteramente cerrado en \mathcal{K} entonces $\mathcal{O}_{\mathfrak{v}'}$ contiene la clausura entera de \mathcal{O}_v en \mathcal{K} , en particular, tomando $R = \mathcal{O}_{\mathfrak{v}'}$ se tiene que

$$\dim \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_v} \mathcal{O}_{\mathfrak{v}'} = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} = n.$$

Luego, por el Lema 3, $\dim_F \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{v}'}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{v}'}} \leq \dim_F \frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{v}'}}{\mathfrak{p} \mathcal{O}_{\mathfrak{v}'}} \leq n$.

Por tanto, $F_{\mathfrak{v}'}|F_{\mathfrak{v}}$ es una extensión de campos con $[F_{\mathfrak{v}'} : F_{\mathfrak{v}}] \leq n$. □

Definición 10 Al grado de la extensión del campo residual se le llama **grado residual de \mathfrak{v}' sobre \mathfrak{v}** , denotado por $f(\mathfrak{v}'|\mathfrak{v})$, o algunas veces $f(\mathfrak{p}'|\mathfrak{p})$.

Teorema 5 (Desigualdad fundamental)

Sea $\mathcal{K}|K$ una extensión finita, suponga que $n = [\mathcal{K} : K]$, y sea \mathcal{O} un anillo de valuación discreta de \mathcal{K} , con ideal maximal \mathfrak{p} y campo residual F . Sean $\{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r\}$ anillos de valuación distintas de \mathcal{K} conteniendo a \mathcal{O} y sea R su intersección. Sea \mathfrak{p}_i el ideal maximal de \mathcal{O}_i y $e_i := e(\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p})$, $f_i := f(\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p})$, $i = 1, \dots, r$. Entonces

1. El anillo R contiene un parámetro local t_i para cada \mathcal{O}_i , $\mathfrak{p}_i \cap R = t_i R$ y $\mathcal{O}_i = R + \mathfrak{p}_i$ para cada $i = 1, \dots, r$.

2.

$$\dim_F \frac{R}{\mathfrak{p}R} = \sum_{i=1}^r e_i f_i \leq [\mathcal{K} : \kappa].$$

En particular, existen finitos anillos de valuación, distintos de \mathcal{K} , que contienen a \mathcal{O} .

Demostración:

1. Sea \mathbf{v}_i la valuación asociada a \mathcal{O}_i para todo $i = 1, \dots, r$ y sea $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$. Observe que $K(V, 0) = R$ y cualquier anillo de valuación de \mathcal{K} que contiene a R también contiene a \mathcal{O} . Luego, por Teorema 4, R es un anillo de valuación discreta. Por Corolario 5, $K(V, 0) = R$ es un DIP y los ideales maximales de R son $K(V, \delta_{ij}) = \mathfrak{p}_i \cap R$ para $i = 1, \dots, r$; donde $\delta_i(\mathbf{v}_j) := \delta_{ij}$. Además,

$$K(V, \delta_{ij}) = \mathfrak{p}_i \cap R = t_i R,$$

donde t_i debe ser un parámetro local en \mathfrak{p}_i . Como $R \subseteq \mathcal{O}_i$, $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathcal{O}_i$, entonces $R + \mathfrak{p}_i \subseteq \mathcal{O}_i$ para todo i .

Ahora, sea $x \in \mathcal{O}_i$. Por el Teorema de la aproximación débil, existe $x' \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{v}_i(x - x') \geq 1$, además $\mathbf{v}_j(x') \geq 0$ para todo $j \neq i$. Esto significa que $y = x - x' \in \mathfrak{p}_i$ y así $x' = x - y \in \mathcal{O}_i$ y $x' \in \mathcal{O}_j$, para todo $j \neq i$. Si $x' \in R$, entonces $x = x' + y \in R + \mathfrak{p}_i$. Por tanto, $x \in R + \mathfrak{p}_i$ y así, $\mathcal{O}_i \subseteq R + \mathfrak{p}_i$.

De lo anterior se sigue que $\mathcal{O}_i = R + \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \dots, r$.

2. Sea t un parámetro local para \mathfrak{p} . Entonces $\mathbf{v}_i(t) = e_i$ (pues $\mathbf{v}_i|_{\mathcal{K}} = e\mathbf{v}$ por Teorema 4) para todo $i = 1, \dots, r$.

Debido a que $\mathfrak{p}R = Rt = K(\mathbf{v}, e)$ para alguna única función $e : V \rightarrow \mathbb{Z}$, entonces por el Corolario 5 se tiene que $e(\mathbf{v}_i) = e_i$ para todo $i = 1, \dots, r$ y además $\frac{R}{\mathfrak{p}R}$ tiene exactamente e_i factores de composición, cada uno isomorfo al campo residual de \mathcal{O}_i para todo $i = 1, \dots, r$. De ahí,

$$\dim_F \frac{R}{\mathfrak{p}R} = \sum_{i=1}^r e_i f_i.$$

Ahora, como \mathcal{O}_i contiene la clausura entera de \mathcal{O} en \mathcal{K} para todo $i = 1, \dots, r$, entonces R contiene la clausura entera de \mathcal{O} en \mathcal{K} . Por el Lema 4, $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \otimes_{\mathbf{v}} R = \dim_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) = n$ y así, por el Lema 3, $\dim_F \frac{R}{\mathfrak{p}R} \leq n$.

Por tanto,

$$\dim_F \frac{R}{\mathfrak{p}R} = \sum_{i=1}^r e_i f_i \leq n = [\mathcal{K} : \kappa]$$

□

Corolario 6 *En las condiciones del teorema anterior, sean $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r$ los anillos de valuación discreta que contienen al anillo de valuación discreta \mathcal{O} . Entonces, la clausura entera $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}}$ de \mathcal{O} en \mathcal{K} , cumple*

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{K}} = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{O}_i = R = K(V, 0).$$

Demostración: Se sigue del Corolario 2. □

1.3 Dominios de Dedekind e ideales fraccionarios.

Haremos un pequeño estudio para esta clase de dominios, ya que la clausura entera de un dominio local y los anillos de valuación discreta son dominios de Dedekind. Sus ideales se descomponen de manera única, salvo orden, como un producto finito de ideales Primos. Determinaremos, de manera sencilla, los ideales fraccionarios para este tipo de dominios. Los ideales fraccionarios son necesarios para estudiar las series de Poincaré en el siguiente capítulo.

A lo largo de esta sección usaremos [D.F].

Definición 11 *Sea R un dominio entero con campo de fracciones \mathcal{K} . Un ideal fraccionario de R es un R -submódulo Q de \mathcal{K} tal que $dQ \subseteq R$ para algún $d \in R - \{0\}$.*

Observe que dQ es un ideal de R . Equivalentemente, Q es un ideal fraccionario de R si existe un ideal $I \subseteq R$ y un elemento $d \in R$ invertible tal que $Q = d^{-1}I$. De ahí se sigue, en particular, que los ideales fraccionarios contenidos en R son los ideales de R .

Definición 12 *Para cada $x \in \mathcal{K}$, el ideal fraccionario $Rx = \{rx | r \in R\}$, es llamado el **ideal fraccionario principal generado por x** .*

Dados dos ideales fraccionarios A, B el producto AB es el conjunto de las sumas finitas de elementos ab , con $a \in A, b \in B$. Luego, existen ideales I_1, I_2 en R y elementos no nulos $d_1, d_2 \in R$ tales que

$$A = d_1^{-1}I_1, B = d_2^{-1}I_2 \text{ y } AB = (d_1d_2)^{-1}I_1I_2.$$

De donde, el producto de ideales fraccionarios es un ideal fraccionario.

Definición 13 *Un ideal fraccionario Q se dice invertible si existe un ideal fraccionario A tal que $QA = R$.*

El ideal fraccionario A es único. En efecto, si B es otro ideal fraccionario tal que $QB = R$, entonces $QA = QB$ implica que $B = BR = B(QA) = (BQ)A = R(A) = A$. Denotamos por Q^{-1} el inverso del ideal fraccionario Q .

Teorema 6 *Sea R un dominio entero y sea Q un ideal fraccionario de R .*

1. Si Q es un ideal fraccionario principal no nulo, entonces Q es invertible.
2. Si $Q \neq \{0\}$ entonces $(R : Q) = \{x \in \mathcal{K} \mid xQ \subseteq R\}$ es un ideal fraccionario de R . En general $(R : Q)Q \subseteq R$ y $(R : Q)Q = R$ si y sólo si Q es invertible, en este caso $Q^{-1} = (R : Q)$.
3. Si Q es un ideal fraccionario invertible de R , entonces Q es finitamente generado.
4. El conjunto de los ideales fraccionarios invertibles forma un grupo abeliano bajo multiplicación con identidad R . El conjunto de los ideales fraccionarios principales de R forma un subgrupo.

Para la prueba ver ([D.F] Proposición 16.2.9).

El grupo cociente, formado por el grupo de los ideales fraccionarios invertibles con el subgrupo de los ideales fraccionarios principales de R , es llamado *el grupo clase* de R , y el orden de este grupo es llamado *el número clase* de R .

Un hecho fundamental con la teoría de los anillos de valuación discreta es que si R es un dominio entero local que no es campo, entonces R es un anillo de valuación discreta si y sólo si todos sus ideales fraccionarios no nulos son invertibles (ver [D.F] Proposición 16.2.11).

Es bien conocido que la *dimensión de Krull*, de un anillo R , es el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos ordenados por inclusión.

Definición 14 Un **dominio de Dedekind** es un dominio entero Noetheriano, enteramente cerrado, y *dimensión de Krull* 1.

Si R es un anillo de valuación discreta, entonces se sabe que es un dominio local de ideales principales, enteramente cerrado y además los únicos ideales primos son $\{0\}$ y su ideal maximal \mathfrak{m} . En efecto, supongamos $\mathfrak{m} = (t)$, donde t es un parámetro local. Si \mathfrak{p} es un ideal primo no nulo entonces $\mathfrak{p} = (t^n)$, con $n \in \mathbb{N}$ y por consiguiente, $t \in \mathfrak{p}$. De esta manera la *dimensión de Krull* de R es 1, y así, R es un dominio de Dedekind. Más generalmente, todo dominio de ideales principales es un dominio de Dedekind (ver [D.F] Proposición 16.3.14).

Uno de los hechos más interesantes de los dominios de Dedekind es que sus ideales fraccionarios son invertibles y cada ideal se descompone, de manera única (salvo orden), como un producto finito de ideales primos. Más específicamente, R es un dominio de Dedekind si y sólo si sus ideales fraccionarios no nulos forman un grupo abeliano bajo producto si y sólo si cada ideal propio, $I \subsetneq R$, se escribe de manera única, salvo orden, como producto de ideales primos

$$I = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n,$$

o de manera equivalente $I = \mathfrak{p}_1^{t_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{t_k}$; donde $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ son ideales primos distintos y $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}$ (ver [D.F] Teorema 16.3.15). Por tanto, dados $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_k$ anillos de valuación discreta de \mathcal{K} , el anillo $T := \bigcap_{i=1}^k \mathcal{O}_i$ es un dominio semilocal de Dedekind cuyos ideales

maximales son $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$. Además, aplicando Lema 1 y la discusión anterior, se sigue que para cualquier ideal fraccionario Q de T , existen enteros n_1, \dots, n_k tales que

$$Q = \mathfrak{p}_1^{n_1} \mathfrak{p}_2^{n_2} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}.$$

Este resultado lo usaremos con frecuencia en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Series de Poincaré

Las series de Poincaré muestran propiedades intrínsecas de naturaleza aritmética de una curva, su origen está ligado con la función zeta local. La finalidad del presente trabajo es expresar esta serie como una integral respecto a la característica de Euler, por lo que es importante saber de dicha serie y de sus propiedades, esta es la razón de estudio del presente capítulo.

Sea X una curva algebraica, geoméricamente irreducible, definida sobre un campo K y sea \mathcal{K} el campo de las funciones racionales sobre X . Es bien sabido que el anillo local correspondiente a un punto no singular de una curva es un anillo de valuación discreta. Por lo que se vió en Capítulo 1, el número de puntos singulares es finito. Sea \tilde{X} el conjunto de anillos de valuación discreta del campo de funciones $\mathcal{K}|K$, llamado el *modelo no singular* de X , y así existe un morfismo

$$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$$

el cual, por el Teorema 2, es sobreyectivo.

Para cada $P \in X$ los elementos de la fibra $\pi^{-1}(P)$ se llaman *las ramas de X centradas en P* . De hecho, el número de ramas centradas en P es finito, ya que son los ceros de cada función racional que se anulan en P . De acuerdo a lo anterior, y por el Corolario 2, si $\mathcal{O}_{v_1}, \dots, \mathcal{O}_{v_m}$ son las ramas centradas en P , entonces la clausura entera $\tilde{\mathcal{O}}_P$ en \mathcal{K} es

$$\tilde{\mathcal{O}}_P = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_{v_i}.$$

De aquí en adelante se denotará $\mathcal{O} := \mathcal{O}_P$, $\tilde{\mathcal{O}} := \tilde{\mathcal{O}}_P$ y el campo constante será $K = \mathbb{F}_q$, el campo finito con q elementos. Además para cualquier subanillo R de \mathcal{K} , diremos que un ideal fraccionario no cero de R es un R -ideal.

En lo que resta de este capítulo se usará [St].

La clausura entera $\tilde{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} en \mathcal{K} es un dominio semilocal de ideales principales, por tanto es un dominio de Dedekind, cuyos ideales maximales, digamos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$, se corresponden biyectivamente con las ramas centradas en la singularidad de la curva. Sean v_1, \dots, v_m las

valuaciones discretas correspondientes. Para cada $\tilde{\mathcal{O}}$ -ideal, suponga $\mathbf{p}^{\mathbf{n}} := \mathbf{p}_1^{n_1} \cdots \mathbf{p}_m^{n_m}$, donde $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$, se define su *multiexponente* por $\mathbf{v}(\mathbf{p}^{\mathbf{n}}) := \mathbf{n}$. Para cada función racional no cero $z \in \mathcal{K}^\times$ se define

$$\mathbf{v}(z) = \mathbf{v}(\tilde{\mathcal{O}}z) := (\mathbf{v}_1(z), \dots, \mathbf{v}_m(z)) \in \mathbb{Z}^m.$$

Sea $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$ el vector de variables t_1, \dots, t_m , denote $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = t_1^{n_1} \cdots t_m^{n_m}$ para cada $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$.

Definición 15 *La serie de Poincaré asociada al par de clases \mathcal{O} -ideales $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}]$, es definida como la serie formal multivariable de potencias*

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) := \sum \eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_m]],$$

cuyos coeficientes son las cardinalidades

$$\eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \#\{\mathcal{O}\text{-ideales } \mathfrak{d} \text{ que satisfacen } \mathfrak{d} \supseteq \mathbf{a}, \mathfrak{d} \sim \mathbf{b} \text{ y } \mathfrak{d}\tilde{\mathcal{O}} = \mathbf{a}\mathbf{p}^{-\mathbf{n}}\}$$

donde \sim es la relación de equivalencia sobre el conjunto de $\tilde{\mathcal{O}}$ -ideales definida por $\mathfrak{d} \sim \mathfrak{b}$ si y sólo si existe $z \in \mathcal{K}^\times$ tal que $\mathfrak{d} = z^{-1}\mathfrak{b}$

Más adelante se verá que estas cardinalidades son finitas y que el dominio de convergencia es el poldisco unitario.

En el caso en que \mathbf{b} es $\tilde{\mathcal{O}}$ -ideal tal que $\mathbf{b} \sim \tilde{\mathcal{O}}$, \mathfrak{d} un $\tilde{\mathcal{O}}$ -ideal con $\mathfrak{d} \sim \tilde{\mathcal{O}}$ conteniendo a \mathbf{a} , entonces

$$\mathfrak{d} = \mathbf{a}\mathbf{p}^{-\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$$

y así, $\mathfrak{d}\tilde{\mathcal{O}} = \mathfrak{d} = \mathbf{a}\mathbf{p}^{-\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$. Luego, $\eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \tilde{\mathcal{O}}) = 1$, por tanto

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}, \tilde{\mathcal{O}}, \mathbf{t}) = \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \frac{1}{(1-t_1) \cdots (1-t_m)}.$$

Para cada $i = 1, \dots, m$ se denota por $r_i := \dim_K \left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathbf{p}_i} \right)$. Por el Teorema chino del residuo (ver [D.F] Teorema 7.6.17),

$$\dim_K \left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathbf{p}^{\mathbf{n}}} \right) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^m r_i n_i, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^m.$$

En [Mad] se prueba que $\dim_K \left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} \right) < \infty$. Además, para cada par de $\tilde{\mathcal{O}}$ -ideales \mathbf{a}, \mathbf{b} si $\mathbf{b} \supseteq \mathbf{a}$,

$$\dim_K \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \right) < \infty \text{ (ver [St] Teorema 2.2.2).}$$

Definición 16 Se define el grado $\deg(\mathfrak{d})$ de un \mathcal{O} -ideal \mathfrak{d} por las propiedades $\deg(\mathcal{O}) = 0$ y $\dim_K \left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}} \right) = \deg(\mathfrak{d}) - \deg(\mathfrak{a})$, siempre que $\mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{a}$.

Es posible relacionar el grado así definido con las valuaciones dadas anteriormente: $\deg(\mathfrak{a}) - \deg(z\mathfrak{a}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(z) = \sum_{i=1}^m r_i \mathbf{v}_i(z)$ para todo $z \in \mathcal{K}^\times$ (ver [St] Lema 2.2). En particular, si $\mathfrak{a} = \mathcal{O}$ entonces

$$\mathbf{deg}(\mathcal{O}) - \mathbf{deg}(z\mathcal{O}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(z)$$

y así $\mathbf{deg}(z\mathcal{O}) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(z)$.

Ahora se exhibe otra presentación para las series de Poincaré, que necesitaremos para el capítulo siguiente.

En la Definición 15 se tiene que, si $\tilde{\mathfrak{d}}\tilde{\mathcal{O}} = \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-\mathbf{n}}$, entonces $\mathfrak{p}^{\mathbf{n}}\tilde{\mathcal{O}} = \mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{\mathfrak{d}}^{-1}\tilde{\mathcal{O}})$.

Es decir,

$$\mathbf{n} + \mathbf{v}(\tilde{\mathcal{O}}) = \mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - \mathbf{v}(\tilde{\mathfrak{d}}\tilde{\mathcal{O}}),$$

de ahí que

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - \mathbf{v}(\tilde{\mathfrak{d}}\tilde{\mathcal{O}}).$$

Luego,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathbf{t}) = \sum_{\substack{\tilde{\mathfrak{d}} \sim \mathfrak{b} \\ \tilde{\mathfrak{d}} \supseteq \mathfrak{a}}} \mathbf{t}^{\mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - \mathbf{v}(\tilde{\mathfrak{d}}\tilde{\mathcal{O}})},$$

la suma tomada sobre los \mathcal{O} -ideales que contienen a \mathfrak{a} y que son equivalentes a \mathfrak{b} . Estos ideales son de la forma $z^{-1}\mathfrak{b}$ donde z varía sobre un sistema completo de representantes del cociente $(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) - \{0\}$ con con la acción del grupo

$$U_{\mathfrak{b}} = \{z \in \mathcal{K}^\times \mid z\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\},$$

llamado *las unidades* de \mathfrak{b} .

Si A es el conjunto de \mathcal{O} -ideales que contienen a \mathfrak{a} y son equivalentes a \mathfrak{b} , entonces la función

$$\phi : A \longrightarrow \frac{(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) - \{0\}}{U_{\mathfrak{b}}}$$

definida por

$$\phi(\delta) = \phi(z^{-1}\mathfrak{b}) = \{gz \mid g \in U_{\mathfrak{b}}\} \text{ (la órbita de } z)$$

es biyectiva. Luego,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathbf{t}) = \sum_{z \in (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) - \{0\} / U_{\mathfrak{b}}} \mathbf{t}^{\mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - \mathbf{v}(z^{-1}\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}})}.$$

Es decir,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathbf{t}) = \sum_{z \in (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) - \{0\} / U_{\mathfrak{b}}} \mathbf{t}^{\mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - \mathbf{v}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + \mathbf{v}(z)}. \quad (2.1)$$

En particular, si $\mathbf{t} = (t^{r_1}, \dots, t^{r_m})$ entonces

$$\begin{aligned} t^{v(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - v(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + v(z)} &= t^{(v(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - v(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + v(z)) \cdot r} \\ &= t^{r \cdot v(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - r \cdot v(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + r \cdot v(z)} \\ &= t^{-\mathbf{deg}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) + \mathbf{deg}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + r \cdot v(z)} \quad (\text{por Lema 2.2 de [St]}) \end{aligned}$$

y así

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t^{r_1}, t^{r_2}, \dots, t^{r_m}) = \sum_{z \in (\mathfrak{b}:\mathfrak{a}) - \{0\}/U_{\mathfrak{b}}} t^{-\mathbf{deg}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) + \mathbf{deg}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + r \cdot v(z)} \quad (2.2)$$

Definición 17 La función zeta local parcial está definida por

$$Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t) := \sum_{\substack{\mathfrak{d} \sim \mathfrak{b} \\ \mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{a}}} t^{\dim_K(\mathfrak{d}/\mathfrak{a})}$$

donde la suma está tomada sobre los ideales fraccionarios \mathfrak{d} que contienen a \mathfrak{a} y que son equivalentes a \mathfrak{b} y K es el campo de constantes de \mathcal{O} .

De la misma forma como en la serie de Poincaré, la función zeta local parcial se puede expresar como

$$Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t) = \sum_{z \in (\mathfrak{b}:\mathfrak{a}) - \{0\}/U_{\mathfrak{b}}} t^{\dim_K(z^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{a})}.$$

Por (Lema 2.2 de [St]) se tiene que

$$\begin{aligned} \dim(z^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) &= \deg(z^{-1}\mathfrak{b}) - \deg(\mathfrak{a}) \\ &= -(\deg(\mathfrak{b}) - \deg(z^{-1}\mathfrak{b})) - \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}) \\ &= -r \cdot v(z^{-1}) - \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}) \\ &= \deg(\mathfrak{b}) - \deg(\mathfrak{a}) + r \cdot v(z) \end{aligned}$$

Luego,

$$Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t) = \sum_{z \in (\mathfrak{b}:\mathfrak{a}) - \{0\}/U_{\mathfrak{b}}} t^{\mathbf{deg}(\mathfrak{b}) - \mathbf{deg}(\mathfrak{a}) + r \cdot v(z)}.$$

Ahora bien, por definición

$$\dim_K \left(\frac{\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}}{\mathfrak{a}} \right) - \dim_K \left(\frac{\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}}{\mathfrak{b}} \right) + \deg(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) - \deg(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) = \deg(\mathfrak{b}) - \deg(\mathfrak{a}).$$

Luego,

$$t^{\dim_K(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{a}) - \dim_K(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{b})} t^{\mathbf{deg}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) - \mathbf{deg}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) + r \cdot v(z)} = t^{\mathbf{deg}(\mathfrak{b}) - \mathbf{deg}(\mathfrak{a}) + r \cdot v(z)}$$

y así utilizando la Ecuación (2.2) se sigue que

$$Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t) = t^{\dim_K(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{a}) - \dim_K(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{b})} \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, t^{r_1}, \dots, t^{r_m}).$$

Esta última ecuación expresa la relación entre la función zeta local y la serie de Poincaré. Se ha probado entonces el siguiente teorema.

Teorema 7 *La función zeta local parcial se puede expresar en términos de la serie multivariable de Poincaré de la siguiente manera:*

$$Z(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t) = t^{\dim_K(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{a}) - \dim_K(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{b})} \mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t^{r_1}, \dots, t^{r_m})$$

Ahora se estudiarán los coeficientes $\eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de la serie de Poincaré, para mostrar que estas cardinalidades son finitas y que serán menos complicadas de calcular.

Al \mathcal{O} -ideal $\mathfrak{f} := (\mathcal{O} : \tilde{\mathcal{O}})$ se le llama *\mathcal{O} -ideal conductor* y satisface $\mathfrak{f} \subseteq (\mathfrak{b} : \tilde{\mathcal{O}}) : (\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ (ver [St] Lema 3.1). Si $\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}$ entonces $\mathfrak{b} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ y

$$(\mathfrak{b} : \tilde{\mathcal{O}}) : \tilde{\mathcal{O}} \subseteq \mathfrak{b}.$$

Luego, $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$.

Ya que el anillo $\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathfrak{f}}$ es finito (ver [Gal]), entonces se sigue que el índice de $U_{\mathfrak{b}}$ en $U_{\tilde{\mathcal{O}}}$, $[U_{\tilde{\mathcal{O}}} : U_{\mathfrak{b}}]$,

es finito. Además, $[U_{\tilde{\mathcal{O}}} : U_{\mathfrak{b}}] = \# \left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{n}}}{U_{\mathfrak{b}}} \right)$, donde $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{n}} = \{z \in \tilde{\mathcal{O}} \mid \mathbf{v}(z) = \mathbf{n}\}$.

Otro hecho importante es que, si \mathfrak{b} es un \mathcal{O} -ideal, entonces existe un \mathcal{O} -ideal \mathfrak{b}' tal que $\mathfrak{b}' \sim \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b}'\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}$. Basta entonces considerar un representante \mathfrak{b}' en la clase $[\mathfrak{b}]$ tal que $\mathfrak{b}'\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}$. Para cada \mathcal{O} -ideal \mathfrak{b} se define

$$\mathfrak{b}_{\mathbf{n}} := \{z \in \mathfrak{b} \mid \mathbf{v}(z) = \mathbf{n}\}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m.$$

Teorema 8 *Considere la serie de Poincaré $\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) = \sum \eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_m]]$. Entonces,*

1. $0 \leq \eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq [U_{\tilde{\mathcal{O}}} : U_{\mathfrak{b}}]$.
2. $\eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\#(\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathbf{j}}/U_{\mathcal{O}}}{[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]}$, donde $\mathbf{j} = \mathbf{n} - \mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) + \mathbf{v}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}})$.

Demostración: Por la Fórmula 2.1 se tiene que, si $\mathbf{j} = \mathbf{n} - \mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) + \mathbf{v}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}})$, entonces $z \in (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) - \{0\}/U_{\mathfrak{b}}$ si y sólo si $z\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ y $\mathbf{v}(z) = \mathbf{j}$, si y sólo si $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^m$. Es decir,

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^m} \#((\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathbf{j}}/U_{\mathfrak{b}}) \mathbf{t}^{\mathbf{v}(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - \mathbf{v}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + \mathbf{j}}$$

y así,

$$\eta_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \#((\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathbf{j}}/U_{\mathfrak{b}}).$$

Ahora bien, por lo anterior, si se escogen \mathbf{a}, \mathbf{b} tales que $\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}} = \mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}$ entonces $\mathfrak{b} : \mathfrak{a} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ y así,

$$\# \left(\frac{(\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathbf{j}}}{U_{\mathfrak{b}}} \right) \leq \# \left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}_{\mathbf{j}}}{U_{\mathfrak{b}}} \right) = [U_{\tilde{\mathcal{O}}} : U_{\mathfrak{b}}] < \infty$$

lo cual prueba la afirmación 1.

Si se restringe la acción de $U_{\mathfrak{b}}$ a $U_{\mathcal{O}}$ entonces

$$\# \left(\frac{(\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathfrak{j}}}{U_{\mathcal{O}}} \right) = \# \left(\frac{(\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathfrak{j}}}{U_{\mathfrak{b}}} \right) [U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]$$

y así la afirmación 2 se sigue. □

En el teorema anterior, por la Propiedad 1, se tiene que los coeficientes de Poincaré son finitos, y la Propiedad 2 muestra otra presentación para dichos coeficientes. Luego,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = \sum_{\mathfrak{j} \in \mathbb{Z}^m} \frac{\#((\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathfrak{j}}/U_{\mathcal{O}})}{[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \mathfrak{t}^{v(\mathfrak{a}\tilde{\mathcal{O}}) - v(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) + \mathfrak{j}} \quad (2.3)$$

Por último, sea $\mathfrak{p} := v((\mathfrak{b} : \tilde{\mathcal{O}}) : \mathfrak{b})$. Entonces $0 \leq \mathfrak{p} \leq v(\mathfrak{f})$, donde \leq es el orden parcial en \mathbb{Z}^m . Si $\mathfrak{n} \geq \mathfrak{p}$, entonces los coeficientes de Poincaré se estabilizan, en el siguiente sentido

$$\eta_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = [U_{\tilde{\mathcal{O}}} : U_{\mathfrak{b}}]$$

y \mathfrak{p} es el menor multiíndice con esta propiedad (ver [St] Teorema 3.2).

Capítulo 3

Series de Poincaré como una integral sobre la característica de Euler

Este capítulo contiene la parte central de este trabajo, que es expresar la serie de Poincaré como una integral respecto de la característica de Euler. Para ello se introduce una medida μ , llamada medida de Haar, garantizada por un teorema importante de topología aplicado a los espacios localmente compactos. Además, se define la característica de Euler χ , que se relaciona con dicha medida, alcanzando así el objetivo final.

Sea \mathcal{K} el campo de fracciones de un anillo local Noetheriano \mathcal{O} , el cual, contiene al campo constante \mathbb{F}_q , de q elementos. Sea M el sistema de subconjuntos C de \mathcal{K} obtenido de \mathcal{O} -ideales por traslaciones $z + C$, $z \in \mathcal{K}$ y operaciones booleanas de unión $C \cup D$, intersección $C \cap D$ y complemento $C - D$. Como lo establece [St2], existe una medida de Haar $\hat{\mu}$ sobre el anillo cociente, localmente compacto de la completación $\hat{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} , que induce una medida μ sobre M , tal que para cada $C \in M$ se tiene que $\mu(C) \geq 0$, únicamente determinada por los tres axiomas:

1. Normalización: $\mu(\mathcal{O}) = 1$.
2. Invariable bajo traslaciones: $\mu(z + C) = \mu(C)$.
3. Aditividad: $\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D)$, con $C \cap D = \emptyset$.

Por la aditividad se sigue que $\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D) - \mu(C \cap D)$. Si \mathfrak{a} es un ideal de \mathcal{O} , entonces

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^n (z_i + \mathfrak{a})$$

y así, por la aditividad y traslaciones

$$1 = \mu(\mathcal{O}) = \sum_{i=1}^n \mu(z_i + \mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^n \mu(\mathfrak{a}) = n\mu(\mathfrak{a}) = \# \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{a}} \right) \mu(\mathfrak{a}).$$

Luego, $\mu(\mathfrak{a}) = \frac{1}{\# \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{a}} \right)} = q^{\deg \mathfrak{a}}$.

Más generalmente, para cada \mathcal{O} -ideal \mathfrak{a} se tiene que

$$\mu(\mathfrak{a}) = q^{\deg \mathfrak{a}}.$$

3.1 La característica de Euler

En esta sección definiremos lo que es la característica de Euler y veremos que, para los ideales fraccionarios, la característica de Euler y la medida estudiada anteriormente son iguales. Esta propiedad es la que conectará la integral respecto de la medida de Haar con la integral respecto de la característica de Euler.

A lo largo de esta sección usaremos [D.M].

Definición 18 *El anillo de Grothendieck del conjunto V_K , de variedades cuasi proyectivas X definida sobre un campo perfecto K , es el anillo $K_0(V_K)$ de los símbolos $[X]$ tales que*

1. $[X_1] = [X_2]$ si y sólo si X_1 es isomorfo a X_2 .
2. $[X] = [Y] + [X - Y]$ si Y es un cerrado de Zariski en X , para $X \in V_K$.
3. $[X_1 \times_K X_2] = [X_1][X_2]$.

El símbolo de la línea afín $[\mathbb{A}_K^1]$ será denotado por \mathbb{L} . El anillo $K_0(V_K)_{\mathbb{L}}$ denotará el anillo de Grothendieck localizado en \mathbb{L} . Sea V un espacio vectorial de dimensión d sobre K . Sea $SV^v := \bigoplus_{i \geq 0} S^i V^v$ el álgebra simétrica del espacio dual V^v sobre V . Se sabe que si $\{v_1, \dots, v_d\}$ es una base para SV^v , entonces se puede identificar con el anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_d]$, es decir, $SV^v \xrightarrow{\sim} K[x_1, \dots, x_d]$, donde x_i se identifica con v_i . Sea $A[V] = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_d])$, entonces los puntos cerrados de $A[V]$ se pueden identificar con K^d . Ahora, considere un espacio vectorial V con una filtración $V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ por subespacios V_i tales que $W_i = \frac{V}{V_i}$ es de dimensión finita $d_i, i \geq 0$. Entonces, se tiene una sucesión creciente de álgebras simétricas graduadas

$$SW_0^v \hookrightarrow SW_1^v \hookrightarrow \dots$$

tales que $SW_i^v \xrightarrow{\sim} K[x_1, \dots, x_{d_i}]$. Sea $S = \bigcup_{i \geq 0} SW_i$, entonces $S \xrightarrow{\sim} K[x_1, x_2, \dots]$. De manera semejante, $A[V] = \text{Spec}(S)$. Los puntos \bar{K} -racionales (cerrados) de $A[V]$ se pueden identificar con $K^{\mathbb{N}}$, pues S es isomorfo al anillo de polinomios en infinitas variables. Considere los morfismos (contracción) $\lambda_i : A[S] \rightarrow A[W_i]$ inducidos por la inclusión $S(W_i^v) \subseteq S$, entonces, por restricción, los morfismos

$$\lambda_i(K) : A[S](K) \rightarrow A[W_i](K)$$

envían puntos cerrados de $A[S](K)$ en puntos cerrados de $A[W_i](K)$, donde $A[S](K)$ y $A[W_i](K)$ denotan los conjuntos de puntos cerrados de $A[S]$ y $A[W_i]$, respectivamente. Las

indeterminadas x_1, \dots, x_{d_i} corresponden a funciones lineales $x_i : \frac{V}{V_i} \longrightarrow K$ las cuales inducen una función lineal $\phi : V \longrightarrow K^{\mathbb{N}}$ definida por $\phi(v) = (x_1(v), x_2(v), \dots)$. Así,

$$\ker \phi = \bigcap_{i=0}^{\infty} V_i.$$

Si $\ker \phi = \{0\}$, entonces ϕ induce un embebimiento

$$V \hookrightarrow K^{\mathbb{N}}.$$

Obsérvese que la restricción a V de $\lambda_i, \lambda_i|_v$, es la proyección π_i , es decir,

$$\lambda_i|_v = \pi_i : V \longrightarrow \frac{V}{V_i} \cong A[W_i](K).$$

Se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & A[S](K) \cong K^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & A[S] \\ \pi_i \downarrow & & \lambda_i(K) \downarrow & & \lambda_i \downarrow \\ \frac{V}{V_i} & \longrightarrow & A[W_i](K) & \longrightarrow & A[W_i] \end{array}$$

Con el fin de definir la característica de Euler como una medida, se define lo que es un conjunto cilíndrico (la versión, en teoría de la medida, de lo que es un conjunto medible).

Definición 19 *Un subconjunto $X \subseteq A[S]$ es cilíndrico si existe un subconjunto construible $Y \subseteq A[W_i]$ tal que $X = \lambda_i^{-1}(Y)$.*

La característica de Euler generalizada se define como

$$\chi_g(X) := [Y]_{\mathbb{L}}^{-d_i} \in K_0(V_K)_{\mathbb{L}}.$$

La característica de Euler generalizada de X , $\chi_g(X)$, no depende de d_i y por tanto está bien definida (Ver [D.M] Definición (2.4)).

Definición 20 *Se dice que un subconjunto $X \subseteq V$ es cilíndrico si existe un subconjunto cilíndrico Z de $A[S]$ tal que*

$$X = Z \cap V.$$

De la misma forma se define subconjunto cilíndrico en el espacio proyectivo $\mathbb{P}V$.

De lo anterior se tiene que, $X \subseteq V$ es cilíndrico si y sólo si existe un subconjunto construible $Y \subseteq A[W_i]$ tal que

$$X = \lambda_i^{-1}(Y) \cap V = \lambda_i^{-1}(K)(Y \cap A[W_i](K)) \cap V = \pi_i^{-1}(Y \cap A[W_i](K)) = \pi_i^{-1}(Y(K)),$$

donde $Y(K) = Y \cap A[W_i](K)$ es el subconjunto de los puntos K -rationales cerrados en $S(W_i^v)$ del conjunto construible Y .

Considere $K = \mathbb{F}_q$. Si $Y \subseteq A[W_i](K)$, entonces Y es construible (pues es un conjunto finito de puntos cerrados) y así $X \subseteq V$ es cilíndrico si $X = \pi_i^{-1}(Y)$ para $Y \subseteq A[W_i](K)$. En particular, V es cilíndrico.

Por otro lado, observe que $[Y] := \#(Y)$ cumple con los axiomas de anillo de Grothendieck. Luego,

$$[\mathbb{A}^1(K)] = \#(K) = \#(\mathbb{F}_q) = q$$

Definición 21 Se define la característica de Euler χ , para un subconjunto cilíndrico $X \subseteq V$, como

$$\chi(X) := \frac{\#(Y)}{q^{d_i}}.$$

En particular, $\chi(V) = \frac{\# \left(\frac{V}{V_i} \right)}{q^{d_i}} = 1$. Observe que χ no depende de la escogencia de Y , pues π_i es sobreyectiva.

Estamos interesados en el caso en que $V = \mathcal{O}$ es un anillo local Noetheriano y $V_i = \mathfrak{p}^{i+1}$, $i \geq 0$, donde \mathfrak{p} es el único ideal maximal de \mathcal{O} , puesto que es el anillo local que estamos estudiando en las series de Poincaré.

Sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$ un ideal. Como \mathfrak{a} es \mathfrak{p} -primario, existe $i \geq 0$ tal que $\mathfrak{p}^{i+1} \subseteq \mathfrak{a}$. Luego $\pi^{-1}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}^{i+1}}\right) =$

\mathfrak{a} . Como $\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{p}^{i+1}}$ es un espacio vectorial finitamente generado sobre \mathbb{F}_q , entonces todos los subconjuntos de $\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{p}^{i+1}}$ son construibles. En particular $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}^{i+1}}$. Luego, \mathfrak{a} es cilíndrico y

$$\chi(\mathfrak{a}) = \# \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}^{i+1}} \right) q^{-d_i} = q^{\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{i+1}) - \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{i+1})}$$

donde $d_i := \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{i+1})$. En particular, $\chi(\mathfrak{p}^{i+1}) = q^{-d_i}$.

Ahora se extienden todas estas definiciones a cualquier subconjunto $X \subseteq \mathcal{K}$.

Definición 22 Sea $X \subseteq \mathcal{K}$. Se dice que X es cilíndrico si existe un divisor no cero $z \in \mathcal{O}$ tal que $zX \subseteq \mathcal{O}$ y zX es cilíndrico. La característica de Euler de X se define como

$$\chi(X) := \frac{\chi(zX)}{\chi(z\mathcal{O})}.$$

Proposición 3 Sea \mathfrak{a} un \mathcal{O} -ideal. Entonces

$$\chi(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a}).$$

Demostración: Suponga que $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$ es un ideal. Luego, existe $i \geq 0$ tal que $\mathfrak{p}^{i+1} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$. Se sabe, por Teorema de isomorfismo,

$$\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{a}} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{i+1}}{\mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{i+1}}$$

y así

$$\dim_{\mathbb{F}_q} \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{a}} \right) = \dim_{\mathbb{F}_q} \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{p}^{i+1}} \right) - \dim_{\mathbb{F}_q} \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}^{i+1}} \right),$$

es decir,

$$- \dim_{\mathbb{F}_q} \left(\frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{a}} \right) = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{i+1}) - d_i, \text{ con } d_i = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{i+1})$$

Luego, $\chi(\mathfrak{a}) = \#(\mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{i+1})q^{-d_i} = q^{\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{i+1})-d_i} = q^{-\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{O}/\mathfrak{a})} = \frac{1}{\#(\mathcal{O}/\mathfrak{a})} = \mu(\mathfrak{a})$.

Ahora, si \mathfrak{a} es un \mathcal{O} -ideal, entonces existe $z \in \mathcal{O}^\times$ tal que $z\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$. En este caso, Stöhr probó que $\mu(z\mathfrak{a}) = \mu(z\mathcal{O})\mu(\mathfrak{a})$ (ver [St2]). Luego,

$$\mu(\mathfrak{a}) = \frac{\mu(z\mathfrak{a})}{\mu(z\mathcal{O})} = \frac{\chi(z\mathfrak{a})}{\chi(z\mathcal{O})} = \chi(\mathfrak{a}).$$

Por tanto, $\mu(\mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{a})$. □

3.2 Integrales con respecto a la característica de Euler.

Para definir la integral con respecto a la característica de Euler, que es una medida sobre los ideales fraccionarios de acuerdo a Proposición 3, se define lo que es una función cilíndrica. En otras palabras, una función cilíndrica es la versión de función medible en teoría de la medida, cuyo concepto es importante para definir la integral sobre este tipo de funciones.

Definición 23 Sea $\mathbb{P}\mathcal{O}$ el espacio proyectivo del anillo local Noetheriano \mathcal{O} , sea G un grupo abeliano contable. Una función $\psi : \mathbb{P}\mathcal{O} \rightarrow G$ es cilíndrica si, para cada elemento no nulo $a \in G$, la preimagen $\psi^{-1}(a) \subseteq \mathbb{P}\mathcal{O}$ es cilíndrica.

Definición 24 Sea $\psi : \mathbb{P}\mathcal{O} \rightarrow G$ una función cilíndrica. La integral de ψ sobre $\mathbb{P}\mathcal{O}$ con respecto a la característica de Euler se define como

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} \psi d\chi := \sum_{a \in G - \{0\}} \chi(\psi^{-1}(a)).a,$$

si esta suma tiene sentido en $K_0(V_K) \otimes_{\mathbb{Z}} G$, en cuyo caso la función ψ se dice integrable.

Ahora se definen, de manera semejante, funciones cilíndricas sobre el campo de fracciones de \mathcal{O} .

Definición 25 Sea G un grupo abeliano contable, sea $X \subseteq \mathcal{K}$, la función $\psi : X \rightarrow G$ es cilíndrica si, para cada elemento no nulo $a \in G$, $\psi^{-1}(a) \subseteq X$ es cilíndrica. La integral de ψ sobre X , con respecto a la característica de Euler, se define como

$$\int_X \psi d\chi := \sum_{a \in G - \{0\}} \chi(\psi^{-1}(a)).a.$$

Dada una función $\psi : \mathbb{P}\mathcal{O} \rightarrow G$, sea $\tilde{\psi} : \mathcal{O} \rightarrow G$ la función inducida por ψ , con $\tilde{\psi}(0) = 0$. Ahora bien, si $Z \subseteq \mathcal{O} - \{0\}$ es un cono (es decir, si $\lambda \in \mathbb{F}_q - \{0\}$ y para todo $a \in Z$, $\lambda a \in Z$) entonces, Z es cilíndrico si y sólo si $\mathbb{P}Z$ es cilíndrico. En este caso, observe que

$$\#(Z) = (q - 1)\#(\mathbb{P}Z)$$

y así

$$\chi(Z) = (q - 1)\chi(\mathbb{P}Z).$$

Luego, se sigue que la función $\psi : \mathbb{P}\mathcal{O} \rightarrow G$ es cilíndrica si y sólo si la función $\tilde{\psi}$ es cilíndrica. De donde,

$$(q - 1) \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} \psi d\chi = \int_{\mathcal{O}} \tilde{\psi} d\chi \quad (\text{Ver [D.M] Lema 3.3}).$$

Ahora mostraremos la serie multivariable de Poincaré como una integral.

Sea \mathfrak{b} un \mathcal{O} -ideal conteniendo a \mathcal{O} . Considere $\mathfrak{b}_{\mathbf{n}} := \{g \in \mathfrak{b} \mid \vec{v}(g) = \mathbf{n}\}$, donde

$\vec{v}(g) = \vec{v}(\tilde{\mathcal{O}}g) := (\mathbf{v}_1(g), \mathbf{v}_2(g), \dots, \mathbf{v}_m(g))$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m$. En el sentido del producto cartesiano, la función

$$\psi : \mathfrak{b}_{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_m, t_1^{-1}, \dots, t_m^{-1}],$$

definida por $\psi(g) = \mathfrak{t}^{\mathbf{n}}$ es cilíndrica. Además, $\mathfrak{b}_{\mathbf{n}}$ es un cono cilíndrico, pues es un subconjunto del \mathcal{O} -ideal \mathfrak{b} . Es natural tener la siguiente definición.

Definición 26 Sea \mathfrak{b} un \mathcal{O} -ideal conteniendo a \mathcal{O} . Denote $\mathfrak{t}^{\vec{v}(g)} := (t_1^{\mathbf{v}_1(g)}, \dots, t_m^{\mathbf{v}_m(g)})$. Entonces, se define

$$\int_{\mathfrak{b}} \mathfrak{t}^{\vec{v}(g)} d\chi := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \chi(\mathfrak{b}_{\mathbf{n}}) \mathfrak{t}^{\vec{v}(g)}.$$

Stöhr prueba en [St2] que

$$\mu(\mathfrak{b}_{\mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{i}=\vec{0}}^{\vec{1}} (-1)^{|\mathbf{i}|} q^{\deg(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}^{\mathbf{n}+\mathbf{i}})} = \sum_{\mathbf{i}=\vec{0}}^{\vec{1}} (-1)^{|\mathbf{i}|} \mu(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}^{\mathbf{n}+\mathbf{i}}),$$

donde $\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_m)$, $|\mathbf{i}| := i_1 + \dots + i_m$, $\vec{0} := (0, \dots, 0)$, $\vec{1} := (1, \dots, 1)$.

También prueba que

$$\#(\mathfrak{b}_{\mathbf{n}}/U_{\mathcal{O}}) = \frac{q^{\rho}}{q^{\rho} - 1} \sum_{\mathbf{i}=\vec{0}}^{\vec{1}} (-1)^{|\mathbf{i}|} q^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \deg(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}^{\mathbf{n}+\mathbf{i}})} \quad (\text{Ver [St], Teorema 6.1}).$$

Es decir,

$$\#(\mathfrak{b}_{\mathbf{n}}/U_{\mathcal{O}}) = \frac{q^{\rho}}{q^{\rho} - 1} \sum_{\mathbf{i}=\vec{0}}^{\vec{1}} (-1)^{|\mathbf{i}|} \mu(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}^{\mathbf{n}+\mathbf{i}}) q^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} = \frac{q^{\rho}}{q^{\rho} - 1} \mu(\mathfrak{b}_{\mathbf{n}}) q^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}.$$

Como μ y χ coinciden en los \mathcal{O} -ideales, entonces

$$\mu(\mathfrak{b}_n) = \chi(\mathfrak{b}_n) = \frac{q^\rho - 1}{q^\rho} q^{-\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} \#(\mathfrak{b}_n / U_{\mathcal{O}}).$$

Por tanto,

$$\int_{\mathfrak{b}} \mathfrak{t}^{\vec{v}(g)} d\chi = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \chi(\mathfrak{b}_n) \mathfrak{t}^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \frac{q^\rho - 1}{q^\rho} q^{-\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} \#(\mathfrak{b}_n / U_{\mathcal{O}}) \mathfrak{t}^{\mathbf{n}}.$$

De aquí,

$$\int_{\mathfrak{b}} q^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} \mathfrak{t}^{\vec{v}(g)} d\chi = \int_{\mathfrak{b}} (q^{\mathbf{r}} \mathfrak{t})^{\vec{v}(g)} d\chi = \frac{q^\rho - 1}{q^\rho} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \#(\mathfrak{b}_n / U_{\mathcal{O}}) \mathfrak{t}^{\mathbf{n}}.$$

Podemos escoger \mathfrak{b} tal que $\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}$. Luego $\vec{v}(\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}}) = \vec{0}$. Si en la Ecuación (3.3), se hace $\mathfrak{a} = \mathcal{O}$, $\mathbf{j} = \mathbf{n}$ entonces

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \frac{\#(\mathfrak{b}_n / U_{\mathcal{O}})}{[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \mathfrak{t}^{\mathbf{n}}.$$

De estas dos últimas ecuaciones se sigue que

$$\int_{\mathfrak{b}} q^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} \mathfrak{t}^{\vec{v}(g)} d\chi = \frac{q^\rho - 1}{q^\rho} [U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}] \mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}).$$

Por tanto,

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = \frac{q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \int_{\mathfrak{b}} q^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} \mathfrak{t}^{\vec{v}(g)} d\chi.$$

Se ha probado el resultado central de este trabajo.

Teorema 9 *La serie multivariable de Poincaré se expresa en términos de la integral sobre la característica de Euler.*

Más precisamente, si \mathfrak{b} es un \mathcal{O} -ideal conteniendo \mathcal{O} y $\mathfrak{b}\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}$, entonces

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = \frac{q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \int_{\mathfrak{b}} q^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} \mathfrak{t}^{\vec{v}(g)} d\chi.$$

En particular, si $\mathfrak{t} = (t^{r_1}, \dots, t^{r_m})$, entonces se sigue el siguiente corolario.

Corolario 7 *En las condiciones del teorema anterior,*

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, t^{r_1}, \dots, t^{r_m}) = \frac{q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \int_{\mathfrak{b}} (qt)^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} d\chi.$$

Otro importante resultado ocurre cuando se expresa la función Zeta local de Stöhr en términos de la integral sobre la característica de Euler. Más específicamente, si se sustituye $\mathfrak{a} = \mathcal{O}$, $K = \mathbb{F}_q$ en el Teorema 7 y utilizando el Corolario 7 se tiene que,

$$Z(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, t) = \frac{t^{\dim_{\mathbb{F}_q}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) - \dim_{\mathbb{F}_q}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{b})} q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \int_{\mathfrak{b}} (qt)^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} d\chi.$$

Como $\dim_{\mathbb{F}_q}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) - \dim_{\mathbb{F}_q}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{b}) = \deg(\mathfrak{b})$, entonces

$$Z(\mathcal{O}, \mathfrak{b}, t) = \frac{t^{\deg(\mathfrak{b})} q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}}]} \int_{\mathfrak{b}} (qt)^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} d\chi. \quad (3.1)$$

Ejemplo.

Consideremos la curva plana afín con campo de constantes \mathbb{F}_q dada por el polinomio absolutamente irreducible $y^2 - cx^2 - x^3$ donde $c \in \mathbb{F}_q$. Sea \mathcal{O} su anillo local en el origen. Las ramas centradas en el origen se corresponden biyectivamente a los ideales primos minimales de la completación

$$\widehat{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{F}_q[[x, y]] / (y^2 - cx^2 - x^3) \simeq \mathbb{F}_q[[x]][y] / (y^2 - cx^2 - x^3)$$

y luego a los polinomios irreducibles de Weierstrass, que dividen a $y^2 - cx^2 - x^3$ en $\mathbb{F}_q[[x]][y]$.

Si c es un cuadrado distinto de cero en \mathbb{F}_q , entonces hay exactamente dos ramas centradas en el origen y

$$\widehat{\mathcal{O}} = \mathbb{F}_q(1, 1) \oplus (x\mathbb{F}_q[[x]] \times x\mathbb{F}_q[[x]]).$$

Si c no es un cuadrado en \mathbb{F}_q , entonces solo hay una rama centrada en el origen, el ideal maximal de la normalización $\widetilde{\mathcal{O}}$ tiene grado igual a dos y

$$\widehat{\mathcal{O}} = \mathbb{F}_q \oplus x\mathbb{F}_{q^2}[[x]].$$

Finalmente, si $c = 0$ entonces

$$\widehat{\mathcal{O}} = \mathbb{F}_q \oplus \pi^2\mathbb{F}_q[[\pi]], \quad \text{donde } \pi := y/x.$$

Luego,

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathcal{O}, \mathbf{t}) = \frac{1 - t_1 - t_2 + qt_1t_2}{(1 - t_1)(1 - t_2)}$$

si c es un cuadrado distinto de cero en \mathbb{F}_q ,

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathcal{O}, \mathbf{t}) = \frac{1 + qt}{1 - t}$$

si c no es un cuadrado en \mathbb{F}_q y

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathcal{O}, \mathbf{t}) = \frac{1 - t + qt^2}{1 - t}$$

si $c = 0$.

En cada uno de los tres casos, el grado de singularidad $\delta = \dim(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ es igual a uno, y solo hay dos clases de equivalencia de ideales $[\mathcal{O}]$ y $[\widetilde{\mathcal{O}}]$.

Por lo anterior y por el Teorema 9 se obtiene,

$$\int_{\mathcal{O}} q^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} \mathbf{t}^{\vec{v}(g)} d\chi = \frac{(q^\rho - 1)(1 - t_1 - t_2 + qt_1t_2)}{q^\rho (1 - t_1)(1 - t_2)}$$

si c es un cuadrado distinto de cero en \mathbb{F}_q ,

$$\int_{\mathcal{O}} q^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} \mathbf{t}^{\vec{v}(g)} d\chi = \frac{(q^\rho - 1)(1 + qt)}{q^\rho (1 - t)}$$

si c no es un cuadrado en \mathbb{F}_q y

$$\int_{\mathcal{O}} q^{\mathbf{r} \cdot \vec{v}(g)} \mathbf{t}^{\vec{v}(g)} d\chi = \frac{(q^\rho - 1)(1 - t + qt^2)}{q^\rho (1 - t)}$$

si $c = 0$.

3.3 Zeta funciones globales.

Hasta ahora hemos estudiado propiedades muy locales y específicas de una curva algebraica. La finalidad de la presente sección es aplicar los resultados importantes de la sección anterior a una curva algebraica en un contexto global. Además, mostraremos el espectro del género de la curva mediante integrales.

En esta sección usaremos [St2].

Sea X una curva algebraica completa geoméricamente irreducible, de género aritmético g , definida sobre el campo \mathbb{F}_q .

Definiciones:

1. Un divisor \mathfrak{a} de X es un producto formal $\mathfrak{a} := \prod_{P \in X} \mathfrak{a}_P$, donde \mathfrak{a}_P es un ideal fraccionario sobre el anillo local \mathcal{O}_P para cada $P \in X$ ó $\mathfrak{a}_P = \mathcal{O}_P$, para casi todos los puntos $P \in X$. El divisor \mathfrak{a}_P es llamado tallo de X .
2. El grado de un divisor es la suma de los grados de sus tallos.
3. Un divisor \mathfrak{a} de X , es un divisor de Cartier si sus tallos son ideales fraccionarios principales.
4. Un divisor $\mathfrak{a} = \prod_{P \in X} \mathfrak{a}_P$ es positivo, y escribimos $\mathfrak{a} \geq \mathcal{O}_X := \prod_{P \in X} \mathcal{O}_P$, si cada tallo es positivo; es decir, $\mathfrak{a}_P \supseteq \mathcal{O}_P$ para cada $P \in X$.

Los divisores de Cartier forman un grupo abeliano multiplicativo, cuya identidad es \mathcal{O}_X . Consideremos la *serie de Dirichlet* definida en [St2] como

$$\xi(\mathcal{O}_X, s) := \sum_{\mathfrak{a} \geq \mathcal{O}_X} q^{-s \deg(\mathfrak{a})}, \operatorname{Re}(s) > 1,$$

donde la suma es tomada sobre todos los divisores positivos de X . Esta serie se puede escribir como una serie de potencias en $t = q^{-s}$:

$$Z(\mathcal{O}_X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \#\{\text{divisores positivos de } X \text{ de grado } n\} t^n,$$

la cual converge absolutamente en el disco $|t| < \frac{1}{q}$ a una función racional

$$Z(\mathcal{O}_X, t) = \frac{L(\mathcal{O}_X, t)}{(1-t)(1-qt)},$$

donde $L(\mathcal{O}_X, t)$ es un polinomio de grado $2g$ en t , que satisface la ecuación funcional global, o equivalentemente, el polinomio que tiene la propiedad de que el polinomio de Laurent

$t^{-g}L(\mathcal{O}_X, t)$ es invariante cuando t se sustituye por $\frac{1}{qt}$.

Por otro lado, usando la *fórmula producto de Euler* (ver [St2]) para series de potencias formales, se tiene que

$$Z(\mathcal{O}_X, t) = \prod_{P \in X} Z(\mathcal{O}_P, t).$$

Luego,

$$\frac{L(\mathcal{O}_X, t)}{(1-t)(1-qt)} = \prod_{P \in X} Z(\mathcal{O}_P, t). \quad (3.2)$$

Ahora bien, de (Sección 1 [St2]) se sabe que

$$Z(\mathcal{O}_P, t) = \sum_{[\mathfrak{b}]} Z(\mathcal{O}_P, \mathfrak{b}, t),$$

donde \mathfrak{b} es un representante de la clase semigrupo de \mathcal{O}_P . Luego, por la ecuación (3.1) se sigue que

$$Z(\mathcal{O}_P, \mathfrak{b}, t) = \frac{t^{\deg(\mathfrak{b})} q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}_P}]} \int_{\mathfrak{b}} (qt)^{\mathbf{r} \cdot \vec{\nu}(g)} d\chi,$$

y así, por (3.2), se tiene que

$$L(\mathcal{O}_X, t) = (1-t)(1-qt) \prod_{P \in X} \left[\sum_{[\mathfrak{b}]} \frac{t^{\deg(\mathfrak{b})} q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}_P}]} \int_{\mathfrak{b}} (qt)^{\mathbf{r} \cdot \vec{\nu}(g)} d\chi \right].$$

Al comparar los grados de los polinomios resultantes de esta ecuación, se ha probado el siguiente teorema, que permite encontrar el género de una curva por medio de la integral sobre la característica de Euler.

Teorema 10 *Sea X una curva algebraica completa geoméricamente irreducible sobre \mathbb{F}_q , de género aritmético g . Entonces,*

$$g = \frac{1}{2} \text{grado} \left((1-t)(1-qt) \prod_{P \in X} \left[\sum_{[\mathfrak{b}]} \frac{t^{\deg(\mathfrak{b})} q^\rho}{(q^\rho - 1)[U_{\mathfrak{b}} : U_{\mathcal{O}_P}]} \int_{\mathfrak{b}} (qt)^{\mathbf{r} \cdot \vec{\nu}(g)} d\chi \right] \right).$$

Bibliografía

- [C.D] Campillo, A., Delgado, F., Gusein-Zade, S.M : *The Alexander polynomial of plane curve singularity via the ring of functions on it*, Duke Math. J. 117, (2003), 125-156.
- [C.D2] Campillo, A., Delgado, F., Gusein-Zade, S.M: *The Alexander polynomial of plane curve singularity and integrals with respect to the Euler characteristic*, Int. J. Math. 14, (2003), 47-54.
- [D.M] Delgado,F., Moyano,J.J :*On the relation between the generalized Poincaré series and the Stöhr Zeta function*. American Mathematical Society, S 0002-9939(08)09469-0.
- [D.F] Dummit D., y Foot R : *Abstract Algebra*, Third edition, (2004).
- [Gal] Galkin,V.M : *Zeta functions of some one dimensional rings*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat 37,(1973), 3-19.
- [Gr] Green, B. : *Functional equation for zeta functions of non-Gorenstein orders in global fields*, Manuscript Math. 64, (1984), 485-502.
- [Gol] Goldschmidt, D : *Algebraic functions and Projective Curves*, Springer, (2003).
- [Har] Hartshorne, R : *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math., 52, Springer-Verlag (1977).
- [Mad] Madrid M. J.A : *Polos de diferenciales regulares sobre curvas singulares*, tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín (2011).
- [Ser] Serre, J. -P : *Zeta and L functions, Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper and Row, New York, (1965), 82-92.
- [St] Stöhr, K.O : *Multi-variable Poincaré series of algebraic curve singularities over finite fields*, Springer lecture Notes in Mathematics, 850–866 (2008).
- [St2] Stöhr, K.O: *Local and global zeta-functions of singular algebraic curves*. Journal of Number Theory 71, 172-202 (1998).MR1633801 (99e:11087).
- [St3] Stöhr, K. O : *On poles of regular differentials of singular curves*, Bol. Soc. Bras. Mat. 24, (1993), 105-136.
- [Vi] Viro, O : *Topology and geometry*, Rohlin Seminar, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1346, (1988), 127138.