UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

"**Didáctica del pensamiento y sistemas numéricos mediante la comprensión de las magnitudes relativas y operaciones básicas en contextos reales y concretos.**"

Carlos Disarly Valencia Álvarez

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en enseñanza de las ciencias exactas y naturales

Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

Facultad de ciencias, UNAL.

Medellín, Antioquia.

2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

"**Didáctica del pensamiento y sistemas numéricos mediante la comprensión de las magnitudes relativas y operaciones básicas en contextos reales y concretos.**"

Carlos Disarly Valencia Álvarez

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en enseñanza de las ciencias exactas y naturales

Director

D. Sc. Fabián Humberto Zuluaga Giraldo

Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

Facultad de ciencias, UNAL.

Medellín, Antioquia.

2023

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi amada esposa por su apoyo incondicional durante todo este proceso. Tu amor, paciencia, comprensión y apoyo constante han sido fundamentales para que pueda completar este trabajo de grado. Gracias por estar siempre a mi lado y por ser mi mayor motivación junto a nuestro hijo.

Gracias y gran reconocimiento a mi asesor Fabián Humberto Zuluaga Giraldo, por su guía experta e invaluable durante la elaboración de este trabajo. Su dedicación, conocimiento y orientación han sido fundamentales para dar forma a mis ideas y llevar a cabo esta investigación. Estoy sinceramente agradecido por su tiempo, paciencia y compromiso.

Quiero expresar mi gratitud a todos mis docentes de la maestría por su valiosa contribución a mi formación académica. Su experiencia, enseñanzas y comentarios constructivos han sido fundamentales en mi desarrollo como profesional. Agradezco sinceramente su dedicación, pasión por la enseñanza y por brindarme las herramientas necesarias para alcanzar mis metas.

Contenido

Lista de figuras 6
Lista de tablas 7
Introducción 9
Resumen 11
ASPECTOS PRELIMINARES 13
Delimitación del Tema 13
Planteamiento del Problema 13
Antecedentes 13
Descripción del Problema 15
Formulación de la Pregunta 16
Justificación 17
Objetivos 18
General 18
Específicos 18
Hans Freudenthal – Educación matemática realista (EMR) 19
Número entero 33
Marco legal 37
Marco espacial 40
Diseño metodológico 41
Enfoque 41
Diagnóstico 42
Plan de acción 42
Acción y observación 43
Evaluación 43
Instrumentos de recolección de recolección de información 43
Población y muestra 44
Impacto esperado 44
Planificación de actividades 45
Actividades y análisis 49
Prueba diagnóstica 49
Actividad 1 suma y resta 60
Actividad 2: resta de enteros 71
Actividad 3: representación en la recta numérica de vectores (flechas) 78
Actividad 4: problemas aditivos. 82
Conclusiones 88
Recomendaciones 89
Anexos 91
Prueba diagnóstica 91
Actividad 1: Suma de números enteros con el modelo de neutralización 93
Actividad 2: Resta de números enteros con el modelo de neutralización 96

Actividad 3: suma y resta de vectores (flechas) 99
Actividad 4: Problemas aditivos 103
Referencias 112

Lista de figuras

Figura 1 Obstaculos epistemológicos (Glaeser, 1981)....24
Figura 2 Estructuras de problemas aditivos (Bruno, 2004)....30
Figura 3 Transferencias entre dimensiones (Bruno 1997)....31
Figura 4 Ilustración entre las transferencias (Bruno, 1997)....32
Figura 5. Ejercicio 1 prueba diagnóstica....50
Figura 6 Respuestas respecto al nivel del mar....50
Figura 7 Respuestas estudiantes al ejercicio 1....51
Figura 8 Ejercicio 2 prueba diagnóstica....51
Figura 9 Respuestas temperaturas positivos y negativos....52
Figura 10 Respuestas enteros negativos....52
Figura 11 Respuestas sin ordenar....52
Figura 12 Ejercicio 3 prueba diagnóstica....53
Figura 13 Respuesta de estudiante que utiliza recta numérica y operación. 53
Figura 14 Números representados en la recta....53
Figura 15 Ejercicio 4 prueba diagnóstica....54
Figura 16 Representación recta numérica vertical....54
Figura 17 Números negativos....55
Figura 18 Estudiante no concibe el número relativo. 55
Figura 19 Ejercicio 5 prueba diagnóstica....55
Figura 20 Diferencia entre meses del año....56
Figura 21 Respuesta relacionada con ganancias y pérdidas....56
Figura 22 Ejercicio 6 prueba diagnóstica....57
Figura 23 Operaciones para encontrar el valor de la temperatura 57
Figura 24 Ejercicio 7 prueba diagnóstica....57
Figura 25 Los estudiantes no utilizan algoritmos para dar soluciones....58
Figura 26 Ejercicio 8 prueba diagnóstica....59
Figura 27 El estudiante no resuelve el ejercicio con número signado....59
Figura 28 Respuestas correctas al ejercicio 8....60
Figura 29 Respuesta actividad color de las fichas (estudiante que no logró realizarlo)....62
Figura 30 Respuestas de los estudiantes actividad color de las fichas....62
Figura 31 Respuestas actividad numeral a 63
Figura 32 Respuesta al literal b 63
Figura 33 Respuesta al literal b 63
Figura 34 Respuesta al literal c....64
Figura 35 Respuesta al literal c....64
Figura 36 Respuesta literal d estudiante 3 64
Figura 37 Respuesta literal d estudiante 4 65
Figura 38 Respuesta literal d estudiante 5 65
Figura 39 Respuesta literal d estudiante 14 65
Figura 40 Respuesta literal e estudiante 15 65
Figura 41 Respuesta literal a del estudiante 11 68
Figura 42 Respuesta literal a del estudiante 20 68
Figura 43 Respuesta literal b del estudiante 11 68
Figura 44 Respuesta literal e del estudiante 35 69
Figura 45 Respuesta literal e del estudiante 24 69
Figura 46 Respuesta literal e del estudiante 7 69
Figura 47 Respuesta literal e del estudiante 31 69

Figura 48 Respuesta literal f estudiante 27 70
Figura 49 Respuesta literal f estudiantes 23 70
Figura 50 Respuesta literal f estudiante 7 71
Figura 51 Respuesta literal a del estudiante 31 74
Figura 52 Respuesta literal b del estudiante 1 75
Figura 53 Respuesta literal b del estudiante 31 75
Figura 54 Respuesta literal c del estudiante 34 76
Figura 55 Respuesta literal d del estudiante 5 76
Figura 56 Respuesta literal d del estudiante 6 76
Figura 57 Respuesta literal e del estudiante 4 77
Figura 58 Respuesta literal e del estudiante 6 78
Figura 59 Ejercicio 1 actividad 3 78
Figura 60 Respuestas actividad 3 del estudiante 21 79
Figura 61 Respuestas actividad 3 del estudiante 18 80
Figura 62 Respuestas actividad 3 del estudiante 14 80
Figura 63 Ejercicio 2 actividad 3 80
Figura 64 Respuestas ejercicio 2 actividad 3 del estudiante 21 81
Figura 65 Ejercicio 3 actividad 3 81
Figura 66 Ejercicio 4 actividad 3 82
Figura 67 Ejercicio 1 actividad 4 83
Figura 68 Respuesta ejercicio 1 actividad 4 84
Figura 69 Respuesta ejercicio 1 actividad 4 del estudiante 34 84
Figura 70 Ejercicio 2 actividad 4 84
Figura 71 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 21 85
Figura 72 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 27 85
Figura 73 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 32 85
Figura 74 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 34 86
Figura 75 Ejercicio 3 actividad 4 87
Figura 76 Respuesta ejercicio 3 actividad 4 del estudiante 31 87

Lista de tablas

Tabla 1 Normativa estándares básicos en matemáticas. 39
Tabla 2 Planificación de Actividades 47
Tabla 3. Cronograma de actividades 48
Tabla 4. Resultados respuestas ejercicio 1 prueba diagnóstica 50
Tabla 5 Resultados respuestas ejercicio 2 prueba diagnóstica 51
Tabla 6 Resultados respuestas ejercicio 3 prueba diagnóstica 53
Tabla 7 Resultados respuestas ejercicio 4 prueba diagnóstica 54
Tabla 8 Resultados respuestas pregunta 5 prueba diagnóstica 56
Tabla 9 Resultados de las respuestas ejercicio 6 prueba diagnóstica 57
Tabla 10 Resultados de las respuestas ejercicio 7 prueba diagnóstica 58
Tabla 11 Resultados respuestas ejercicio 8 prueba diagnóstica 59
Tabla 12 Ejercicio 1 actividad suma 61
Tabla 13 Resultados ejercicio 1 actividad suma 61
Tabla 14 Respuesta actividad color de las fichas 66
Tabla 15 Resultados ejercicio actividad suma con signo contrario 66
Tabla 16 Respuesta actividad color de las fichas del estudiante 31 67

Tabla 17 Respuesta actividad color de las fichas del estudiante 20 67
Tabla 18 Respuestas actividad 2 72
Tabla 19 Respuesta actividad 2 del estudiante 4 73
Tabla 20 Respuesta actividad 2 de estudiantes que no conciben la resta como la suma 74
Tabla 21 Actividad 4 83
Tabla 22 Combinación, comparación y variación 86

Introducción

Las matemáticas se consideran una actividad humana. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. Freudenthal (1991).

La enseñanza de las matemáticas se ha preocupado por estudiar y construir diferentes estrategias para que los estudiantes desarrollen el pensamiento matemático, algunas más centradas en la matemática moderna y en procesos de abstracción sin un antecedente contextual. Otras, en otro extremo, han abusado de los modelos concretos que se han estudiado para la enseñanza, en particular, de los números enteros de las operaciones de suma y resta, sin construir algoritmos o procesos de abstracción propios de esta ciencia.

Autores como Freudenthal (1919) pretenden que la matemática tenga presente tanto la parte contextual como la parte abstracta, de modo que ésta se aprenda *"haciendo matemática"*, partiendo desde situaciones reales para ir construyendo y ordenado el sentido común y construyendo conceptos matemáticos cada vez más abstractos y no viceversa.

La situación anterior la apoya el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998), que frente a la enseñanza de los números plantea que se deben generar estrategias para que los estudiantes comprendan los números y sus relaciones, que conozcan magnitudes relativas y el efecto de las operaciones entre ellos y que desarrollen puntos de referencia para cantidades y medidas.

Cid (2016) ha estudiado los trabajos de autores como Glaeser (1981), Scchubrin (1986) y Lizcano (1993) para analizar los obstáculos que sea han presentado en la aceptación del número entero en grandes pensadores matemáticos. Gallardo (2002) también en su trabajo plantea que estas mismas dificultades se han evidenciado en los estudiantes que están aprendiendo los números enteros (número sustractivo). El análisis de los procedimientos de estos matemáticos para desarrollar y comprender las soluciones negativas de ecuaciones deja claro que han utilizado formas semánticas equivalentes y sintácticas para aceptar dichas soluciones (números negativos). Así pues, la presentación y enseñanza de

números enteros centrada en formas semánticas y sintácticas puede eliminar estas brechas de la comprensión de los números enteros y sus múltiples relaciones.

Por ello el uso diferentes actividades guiadas, ayuda al estudiante a comprender y a construir algoritmos de suma y resta de números enteros, empezando desde situaciones reales, con actividades concretas orientadas para construir la definición de estos algoritmos en estudiantes del grado octavo. Otras actividades como las de los vectores ayudan a comprender la equivalencia semántica de la resta y la diferencia, permitiendo otras situaciones diferentes a la de sustraer en esta operación. Estas equivalencias se tratan desde las estructuras semánticas y sintácticas equivalentes en operaciones y situaciones que le permitan al estudiante comprender la suma y diferencia de números enteros.

La estructura del documento es la siguiente:

- **Aspectos generales:** En esta sección encontramos la justificación, antecedentes y la motivación que lleva a la idea de este trabajo.
- **Conceptualización de la teoría de Hanz Freudenthal:** La teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), la conceptualización de número entero y su aplicación en la educación tradicional.
- **Actividades y análisis:** La parte principal del trabajo. En esta se exponen las actividades implementadas basadas en la teoría EMR y su posterior análisis.
- **Conclusiones y referencias:** Abstracción de los resultados de la implementación de las actividades y una discusión respecto a la educación tradicional para estas asignaturas.

Resumen

Se tiene como objetivo principal mejorar la práctica educativa de la comprensión de los números enteros, las cantidades relativas y operaciones de suma y resta en este conjunto numérico que se evidenciaron en el análisis de un diagnóstico sobre los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante para resolver situaciones en contextos tanto matemáticos como abstractos que implican dichas operaciones.

En ese sentido se diseñó e implementó una propuesta didáctica basada en las ideas de Freudenthal (1981) de la matemática realista, diseñando y aplicando actividades de modelos concretos, así como de contextos reales, para construir algoritmos y conceptos más sistematizados que le permitan al estudiante una mejor comprensión del concepto de número entero, pero también una mejor estructuración del mismo.

Palabras claves: Números enteros, educación matemática realista, modelos concretos, problemas aditivos, obstáculos epistemológicos.

Abstract

Didactics of thinking and numerical systems through the understanding of relative magnitudes and basic operations in real and concrete contexts

The main objective, in this work, is to improve the educational practice of understanding integer numbers, relative quantities,as well as addition and subtraction operations in this numerical set that were noticed in the analysis of a diagnosis on the mathematical resources available to the student for solving in both mathematical and abstract contexts that imply such operations.

In this sense, a didactic proposal was designed and implemented based on Freudenthal's (1981) ideas of realistic mathematics, designing and applying activities of concrete models, as well as real contexts, to build more systematized algorithms and concepts that allow the

student a better understanding of the concept of an integer, but also a better structuring of it.

Keywords: Integer numbers, realistic mathematics education, concrete models, additive problems, epistemological obstacles.

ASPECTOS PRELIMINARES

Delimitación del Tema

Enseñanza de las operaciones de suma y resta para desarrollar el pensamiento numérico en los estudiantes del grado octavo del colegio VID mediante contextos reales y concretos.

Planteamiento del Problema

Antecedentes

En este apartado se describen algunas investigaciones que han contribuido al desarrollo del pensamiento numérico y al sistema numérico de los enteros desde estudios que se han realizado tanto a nivel local como internacional.

En este sentido son diversas las investigaciones que han intentado comprender y cambiar las prácticas tradicionales en la enseñanza de los números enteros y las operaciones básicas del mismo conjunto. Se realizó un análisis de las investigaciones estudiadas y se han clasificado en dos categorías: desde las situaciones problema y estrategias didácticas utilizadas; y desde un análisis epistemológico, de cómo se ha dado la construcción de los números enteros, sus operaciones y de algunos estudios que se han realizado entorno a la aceptación de estos números en la comunidad científica de las matemáticas.

De los trabajos que se realizaron desde las situaciones contextualizadas, Mena (2017) utiliza el aprendizaje basado en problemas para enseñar los números enteros y las operaciones por medio de una guía didáctica que involucra a los estudiantes del grado octavo del barrio Doce de Octubre en la ciudad de Medellín; generando ambientes significativos mediante proyectos de aula, como estrategia didáctica para la enseñanza de la matemática en este grado. Esto dado que en la institución Doce de Octubre

existen grandes dificultades en los procesos generales de la enseñanza, como

> *son, el planteamiento y la resolución de problemas, el razonamiento matemático, el lenguaje y la comunicación de las ciencias, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, en el contexto desde las situaciones problemas de la vida diaria del estudiante* (Mena,2017, p. 26).

El autor genera situaciones potencialmente significativas utilizando el contexto de su barrio como base para generar situaciones donde el estudiante comprenda el concepto de número entero y las diferentes operaciones (suma resta, multiplicación y división) para qué después las utilice en otros contextos.

Vílchez (2015) por su parte, en su unidad didáctica, trabaja los números relativos, los números enteros, la suma y la resta, generando problemas de cantidades relativas con números relativos en contextos reales, planteando problemas de orden y de cantidades relativas con números enteros endichos contextos. En su trabajo, este último también hace una reflexión desde una mirada histórica de la construcción de los números negativos

> *la evolución de los números negativos ha sido prolongada y se puede decir que el concepto de número entero, que proporciona la interpretación formalmente más adecuada, es relativamente reciente. Ha planteado importantes problemas a los matemáticos a lo largo de la historia, por lo que no es de extrañar que los alumnos de hoy en día encuentren dificultades y tengan dudas acerca de lo que es un número entero y qué sentido darle (Vilchez, 2015, p. 11).*

Otros autores se han enfocado en propuestas que contienen herramientas concretas y virtuales para que el estudiante interactúe con ellas. Castañeda (2018) plantea una propuesta de una cartilla didáctica virtual para la enseñanza de la suma y resta de los números enteros, con la cual se pretende que los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Benedikta Zur Nieden, de la ciudad de Itagüí, alcancen un aprendizaje significativo. Con una herramienta virtual, Rúa (2013) diseña una propuesta de enseñanza de la suma de números enteros mediada por la plataforma Moodle donde se evidencian varias actividades como el de *"la escalera de vida"* y el uso de fichas que representan unidades negativas y positivas para que el estudiante comprenda el concepto de la operación de suma.

Por otra parte, Maz y Rico (2009) muestran la gran diversidad de contextos donde

se pueden trabajar los números enteros realizando un estudio sobre las representaciones utilizadas para los números negativos en los libros de texto de matemáticas que fueron publicados en España durante los siglos XVIII y XIX. En este análisis se distinguen cuatro tipos de fenómenos más representativos donde se utilizan los números enteros para la enseñanza: físicos, contables, temporales y de las propias matemáticas.

Descripción del Problema

Son diferentes las estrategias y concepciones que se han implementado para la contribución del desarrollo del pensamiento matemático y los sistemas de numeración. Muchas veces éstas se quedan en la mera enunciación o intención, sin generar un efecto positivo y sin lograr que los estudiantes que están aprendiendo realmente construyan un pensamiento numérico y "comprendan los números y sus múltiples relaciones, que reconozcan las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos y que desarrollen puntos de referencia para cantidades y medidas" (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998).

Tanto las causas como los posibles efectos de estas estrategias y conceptos que no han permitido un verdadero desarrollo del pensamiento numérico se han categorizado en este trabajo de la siguiente manera: motivación del docente hacia el estudiante con el uso de las herramientas didácticas y la estructuración del conjunto de los números enteros.

En el uso de las herramientas que se han implementado para contribuir a que los niños tengan la habilidad de utilizar los números en diferentes contextos para comunicar, interpretar información, resolver situaciones problemas o tomar decisiones, y que no han surtido efecto, aparecen los materiales didácticos mediado por las TIC con herramientas interactivas que se enfocan en colocar el resultado de las operaciones; juegos didácticos que no relacionan sus reglas con el concepto matemático de manera directa; la metodología que se utiliza es tradicional. Todo esto es "desde el énfasis tan grande que se les ha dado a los algoritmos para efectuar cálculos, los cuales se tratan a veces de una forma mecánica sin considerar la comprensión de los conceptos que los fundamentan" (MEN, 1998).

Lo que genera que el estudiante responda de manera mecánica a un algoritmo pero que realmente no pueda reconocer los números, sus múltiples relaciones y

operaciones.

Desde la estructuración de los números y sus operaciones están los algoritmos mal enunciados en la enseñanza tradicional, como es el caso de la suma de números enteros con signos diferentes “para sumar números enteros con signos diferentes se restan y al resultado se coloca el símbolo del número mayor”, refleja ambigüedad pues resulta necesario precisar el “mayor” ¿en los enteros o en los naturales?; dificultad al operar con números negativos dado el constante trabajo con los números naturales; concepto muy arraigado de la suma como aumento y no como adición; la resta como sustracción y no como diferencia. Esta manera de trabajar el pensamiento numérico hace que el estudiante no comprenda ampliamente el concepto de operación y las utilice en pocas situaciones de la vida cotidiana, al respecto el MEN (1998) plantea que:

> *La mayoría del trabajo dedicado al significado de las operaciones se ha limitado a resolver problemas “verbales o de enunciados” un poco artificiales y a menudo los alumnos no saben cuándo utilizar una operación porque les falta conocer diversas situaciones específicas que dan origen a éstas. Se les suele enseñar la adición como “poner juntos o reunir “y la sustracción como “quitar”, a pesar de que existen muchas otras situaciones que implican operaciones de sumar y de restar. Es muy importante que los alumnos conozcan y trabajen en la resolución de diferentes tipos de problemas verbales (p. 31).*

Formulación de la Pregunta

¿Qué estrategias didácticas contribuyen a la comprensión de las operaciones de suma, y resta en el conjunto de los números enteros en el grado octavo del colegio VID cuando utilizan contextos concretos y reales?

Justificación

En el diagnóstico inicial que se realizó con el grado octavo del colegio VID, en la asignatura de matemáticas, se evidenció la dificultad que presentaban la mayoría de los integrantes al resolver operaciones en el sistema de los números racionales, lo mismo que en los números enteros. La principal dificultad que se manifestó fue la confusión en el cálculo de las operaciones de suma, resta y multiplicación de números enteros. Lo que hace pensar que en el desarrollo del pensamiento numérico no hubo un aprendizaje significativo que quedara en la estructura cognoscitiva de los estudiantes y que, en vez de haberse adquirido un pensamiento de este tipo, en su momento se memorizaron los diferentes algoritmos, por lo que en el presente estos no se recuerdan con claridad y se utilizan indistintamente para la suma y la multiplicación.

En ese sentido el pensamiento numérico "se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos" (MEN,1998)

Por ello se hace ineludible utilizar estrategias en contextos en los que el estudiante tenga más relación con los materiales, las herramientas de trabajo y situaciones que sean potencialmente significativas para él.

Objetivos

General

Diseñar una propuesta didáctica que contribuya a la comprensión de las operaciones de suma y resta en el conjunto de los números enteros en el grado octavo del colegio VID mediante contextos reales y concretos.

Específicos

- Identificar cuáles son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante, cómo los utiliza y cómo los monitorea en la aplicación de algoritmos matemáticos para la suma y resta de números enteros.
- Implementar una secuencia didáctica con actividades con material “concreto” y contextos reales que le permitan al estudiante comprender la suma y diferencia de números enteros.
- Validar los efectos que genera la aplicación de la secuencia didáctica a la comprensión de los números y sus operaciones y el desarrollo de estrategias para utilizarlos.

Hans Freudenthal – Educación matemática realista (EMR)

La matemática realista nace como oposición a la matemática moderna de los años 70, que se centraba en la matemática abstracta (estructuras) y a la teoría de conjuntos. En 1970 en el instituto creado por Freudenthal empiezan todas las bases para la corriente de educación matemática realista. No se considera como una teoría general del aprendizaje, sino como una teoría global que aparece en contraposición a la enseñanza tradicional matemática; se trata de pensar la matemática como una "actividad humana", denominada por este autor como "**matematización"** y entendida ésta como la actividad de resolver problemas contextualizados, que hagan parte de la vida real, pero también, de organizarlos y estructurarlos por medio de las matemáticas.

Es decir, **matematizar** es abordar los temas de la realidad que van a ser organizados de acuerdo a unos patrones matemáticos. Es una combinación entre matemáticas puras y matemáticas aplicadas, sin la necesidad de que sea una traducción directa de la primera a la segunda, lo que podría verse como una transposición didáctica que parte desde el contenido formal a un conocimiento que debe ser aplicado.

En este sentido, la enseñanza de las matemáticas no puede convertirse en la enseñanza de "herramientas matemáticas" como productos ya terminados que se aplican a una situación. Enseñar las matemáticas de este modo, dice Freudenthal (1991), sugeriría que estamos tomando el camino equivocado, ya que las matemáticas deben ser una ***actividad humana*** (Bressan, 2016)

Para Freudenthal (1991, citado por Bressan, 2016), matematizar es un proceso que involucra

- Reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos;
- Descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos;
- Ejemplificar ideas generales;
- Encarar situaciones problemáticas de manera paradigmática;

- La irrupción repentina de nuevos objetos mentales y operaciones;
- Buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas; y
- Reflexionar acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas (p.30)

Las ideas principales que trata la educación matemática realista son:

- ***Partir de los contextos y situaciones reales:***

Freudenthal piensa que la mayor parte de la matemática surge como una herramienta con la que se matematizó el entorno físico y social y que es por ello que la educación matemática debe pensarse en la organización y estructura de estas situaciones. En ese mismo sentido Bressan (2016) concibe que el contexto provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Se trata pues de trabajar la enseñanza matemática basado en situaciones y contextos de la vida cotidiana del estudiante, de modo que ellos las puedan imaginar y a partir de ahí utilizar el sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos y estructuras matemáticos. Cabe resaltar que los contextos pueden ser también desde las matemáticas mismas en tanto tengan significado para los estudiantes presentándolos de manera interactiva como juegos, desafíos y competencias como la búsqueda de patrones, de regularidades en tablas, construcción de pirámides numéricas, entre otros.

- ***Utilizar modelos:***

Para Freudenthal, la matemática no es otra cosa que una forma del sentido común, solo que más organizada. Para transformar el sentido común en matemática “pura” o genuina, este debe ser sistematizado y organizado. De este modo, el sentido común deriva en reglas que a su vez se van convirtiendo en sentido común, pero con un nivel más alto. Es por eso que dicho proceso no es acabado, se va convirtiendo en una reinvención constante del sentido común que va pasando de un nivel de jerárquico a otro más formal y estructurado.

El autor denomina, a la búsqueda de estos contextos y modelos que, de una manera

natural, dan lugar a la matemátización, como fenomenología didáctica. Ésta consiste en revisar los diferentes usos de algún contenido u objeto matemático en la realidad, y a partir de allí construir la didáctica de dicho objeto. (Bressan, 2016).

Retomando la transformación del sentido común en matemática, hay dos maneras en las que se da este proceso, la matematización horizontal y la vertical:

> *La matematización horizontal conduce desde el mundo de la vida al mundo de los símbolos. En el mundo de la vida se vive, se actúa, se sufre; en el otro se crean los símbolos, se recrean y manipulan, mecánicamente, comprensivamente, reflexivamente: esto es matematización vertical. (Freudenthal, 1991).*

Cabe preguntarse cómo pasa entonces el estudiante del conocimiento informal al formal. Para responder a esta pregunta es necesario recurrir a los niveles de comprensión que se inscriben en el proceso de reinvención que se dan de manera horizontal y vertical, estando en el primero el nivel situacional; en el segundo, el nivel referencial; luego el general y el formal.

- En nivel situacional es entonces aquel donde el estudiante hace el uso de conocimientos informales, las situaciones vividas y el sentido común para interpretarlas y describirlas con las matemáticas para descubrir relaciones y regularidades con otras.
- El nivel referencial (inicio de la matemátización vertical) es donde los estudiantes hacen representaciones mediante esquemas, gráficos, mapas que sintetizan la situación, es decir se hacen los “modelos de” la situación dada.
- El nivel general es un nivel que supera al anterior en tanto se da un proceso reflexivo sobre el mismo: los conceptos, modelos, estrategias y procedimientos utilizados para superar la situación contextual y donde los estudiantes se puedan dar cuentan que pueden ser utilizados en situaciones análogos.
- El nivel formal es en el cual hay un mayor acercamiento y se trabaja con los procedimientos, convenciones, notaciones y en la solución de situaciones propias de la matemáticas, como las operaciones, desde un nivel enteramente formal. (Freudenthal, 1991).

- ***Reinvención guiada:***

El aula de clase debe ser un ambiente que permita la reinvención de las ideas de los estudiantes y herramientas matemáticas organizando y sistematizando las situaciones contextualizadas. Allí, el docente juega un papel muy importante, en el sentido de que es él quien debe regular sutilmente entre las producciones informales de los estudiantes y las formales ya institucionalizadas de la matemática como disciplina.

- ***El aprendizaje de las matemáticas es una actividad social:***

En la enseñanza de la matemática realista la interacción social juega un papel importante, ya que es mediante la interacción donde los estudiantes pueden discutir las diferentes interpretaciones que tienen sobre una situación, los procedimientos y la argumentación de las soluciones que pueden construir de ella.

La EMR en el sentido social, también considera que la matemática debe ser para todos y no solo para una élite:

> Freudenthal destaca que no todos los estudiantes son futuros matemáticos: para la mayoría, toda la matemática que usarán por siempre debiera ser la que usen para resolver problemas en las situaciones de la vida diaria. Sin embargo, familiarizar a los estudiantes con un abordaje matemático de este tipo de resolución de problemas merece ser de la más alta prioridad en la educación matemática. Este objetivo se puede combinar con el objetivo de tener estudiantes que matematicen situaciones que puedan pertenecer a experiencias reales para ellos (Gravemeijer & Terwel, 2000, p.4).

Es por ello por lo que la enseñanza de la matemática debe centrarse en los contextos que sean imaginables para los estudiantes, donde puedan hacer, tanto del sentido común como de la experiencia, un modelo generalizado y estructurado mediante los objetos matemáticos.

Obstáculos epistemológicos en los números enteros: Eva Cid.

Los números negativos como los conocemos hoy, han atravesado diferentes "dificultades" tanto en la comunidad científica como en la sociedad en general. Las diferentes concepciones sobre las matemáticas, en especial la de número, han creado dificultades para la emergencia del número negativo en toda su historia. En este sentido, nos centraremos en este apartado en el estudio realizado por Cid (2016) donde se plantean los posibles obstáculos que se han presentado en la historia de los números enteros desde la época de Diofanto hasta el siglo XIX tratando de justificar la existencia de estos.

La autora se refiere a la noción de obstáculo epistemológico que toma de la epistemología de las ciencias experimentales de Bachelard (1938) y que es retomada por Brousseau (1976) para extenderlo al ámbito didáctico, entendido este como aquel que "se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos en determinada época y ha tenido que tomar conciencia de él y de su superación". Esta noción, Glaeser (1981) la menciona por primera vez en los números enteros realizando una lista provisional de lo que serían los principales obstáculos epistemológicos en la aceptación de los números negativos y de algunos de los grandes matemáticos que pasaron por algunos de estos obstáculos:

1. Incapacidad para manipular cantidades aisladas
2. Dificultad para dar sentido a cantidades negativas aisladas.
3. Dificultad para unificar la recta numérica
4. La ambigüedad de los dos ceros
5. Estancamiento en la etapa de operaciones concretas
6. Deseo de un modelo unificador

En la figura 1 se presentan los obstáculos y los autores. Se denota por medio del signo más, la superación del obstáculo; por el signo menos cuando no se alcanzó; por el signo de interrogación aquellos a los que el autor no pudo determinar porque los textos citados no fueron suficientes para ilustrarlos, o porque la simplificación del código

provisionalmente adoptado no permitió la presentación de matices que dejaran entrever la superación del obstáculo por el matemático.

OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
DIOFANTES	-					
SIMON STEVIN	+	-	-	-	-	-
RENÉ DE SCARTES	+	?	-	?		
COLIN MACLAURIN	+	+	-	-	+	+
LEONARD EULER	+	+	+	?	-	-
JEAN D'ALEMBERT	+	-	-	-	-	-
LAZARE CARNOT	+	-	-	-	-	-
PIERRE DE LAPLACE	+	+	+	?	-	?
AUGUSTIN CAUCHY	+	+	-	-	+	?
HERMAN HANKEL	+	+	+	+	+	+

Figura 1 Obstaculos epistemológicos (Glaeser, 1981).

A Diofanto se le atribuye el origen de la “regla de signos”, pese a que este autor no hace referencia a los números negativos; Stevin, D’Alembert y Carnot conciben la existencia de números negativos en la solución de ecuaciones pero no las aceptan como cantidades reales; estos dos últimos junto a Cauchy y Maclaurin concebían tanto los positivos como los negativos de naturaleza distinta, lo positivo oponiéndose a lo negativo, neutralizándose entre sí lo cual no facilitaba la unificación en la recta numérica, permitiendo dos semirrectas opuestas entre sí, funcionando separadamente; el único matemático que considera la ambigüedad del cero es Hankel ya que, entre los demás, de algunos no se puede inferir y los otros tenían dificultad para pasar de un cero absoluto a un cero de origen elegido arbitrariamente; el obstáculo número 5 es la dificultad de alejarse de la atribución de un sentido concreto a los números; por último, solo Maclaurin y Hankel pueden abandonar el deseo de un modelo unificador que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros, modelos como la ganancia-pérdida justifican bien la primera estructura más no la segunda (Glaeser, 1981).

A raíz de las investigaciones de Glaeser, surgen también nuevos trabajos como los de Duroux (1982) y los del mismo Broeusseau (1983).

Duroux se apoya en la definición de obstáculo epistemológico planteada por Broueseau y de la condición que exige el obstáculo, la de ser un conocimiento y no una ausencia de él.

En este sentido, considera que la "dificultad de aptitud para manipular cantidades aisladas" y "la dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas" no deberían considerarse como obstáculos, ya que estas son un déficit de conocimiento y no un conocimiento. Se podría pensar entonces, que la "dificultad para unificar la recta real no puede considerarse un obstáculo por ser un déficit. Sin embargo, ésta, es precisamente, una concepción, por considerar los números negativos como objetos de una naturaleza distinta a la de los positivos

Brouseeau (1983), siguiendo la misma línea de Douroux insiste en que se debe considerar la diferencia entre un obstáculo y una dificultad y menciona que lo que propone Glaeser son dificultades:

> *Muy a menudo, es entre las "dificultades" donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un obstáculo es un conocimiento, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la "dificultad" que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (Brouseeau, 1983, p.190).*

Pero no solo se deben tener en cuenta las dificultades y los errores de los obstáculos. También es necesario identificar sus éxitos. En el caso de los números enteros, el carácter relativo de los números positivos y negativos puedo jugar un papel importante en su aceptación, y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

Siguiendo con el estudio del camino difícil que han tenido los negativos para su aceptación mencionamos a Schubring (1986) quien también realiza un análisis de textos escritos, particularmente de alemanes, para explicar la dificultad de la emergencia de los números negativos recurriendo al termino obstáculo, pero con un tinte diferente a la concepción de los autores anteriores. A las principales dificultades las categoriza en tres obstáculos

diferentes:

- Obstáculos internos a las matemáticas: Para Schubring, esta categoría señala la dificultad para distinguir entre la cantidad, magnitud y número.
- Obstáculos epistemológicos: estos obstáculos tienen que ver con la transmisión de saber científico a la sociedad en general definiendo la epistemología como las diferentes concepciones sobre las condiciones de existencia de las entidades matemáticas. Entre ellas hace dos clasificaciones:
    - Una sustancialista, según la cual los conceptos se justifican por reducción a unos entes a los que se concede una existencia semejante a la del mundo físico.
    - y otra sistemática, donde la existencia está justificada por la coherencia del campo conceptual y los conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas (Schubring, 1986, p. 23).
- Arquitectura de las matemáticas: esta tiene que ver con el grado de importancia que se le da a las distintas ramas de la matemáticas; si se considera la geometría con un mayor grado de importancia que el álgebra, entonces la cantidad se convierte en la noción básica de las matemáticas; si por el contrario es el álgebra la disciplina fundamental, entonces será la cantidad la que pase a un segundo plano y la geometría pasará a ser un campo de aplicación de ella, quedando el numero como noción básica (Cid, 2006)

Otro de los autores que hace aportes a la epistemología de las matemáticas y en particular a los números enteros es Lizcano (1993) concluyendo que las representaciones simbólicas, formas de razonamiento y técnicas de cada sociedad determinan en gran medida las matemáticas que se pueden considerar creadas en esa sociedad. Estudia tres culturas diferentes para mostrar cómo diferentes imaginarios sociales permiten a la cultura china construir ciertas formas de negatividad que eran completamente impensables en la antigua Grecia y solo parcialmente asumidas en el periodo alejandrino, cuando la idea del paradigma aristotélico-euclidiano perdió fuerza. El autor no se expresa en términos de obstáculos, pero sí hace un estudio de algunas de las características de la cultura griega que impidieron la aceptación de ciertas formas de negatividad pero que en la cultura china

se desarrollaron sin problema:

> las principales diferencias entre las matrices fundamentales de los imaginarios griego y chino son: i) Pensar por abstracción (aphaıresis) y determinación, en términos de géneros y especies, vs. pensar por analogía, simetría o equivalencias; ii) Asumir principios como el de identidad o no-contradicción como principios primeros (tanto del ser como del pensar) vs. una matriz preconceptual que predispone (la realidad y el pensamiento) según criterios de alternancia de contrarios y oposiciones en torno a un hueco (wu) o centro; iii) Suponer un espacio (y, en particular, un espacio de representación) que es extensión delimitada vs. un espacio simbólico marcado por la oposición, en el que los lugares significan; esto es, un espacio extenso vs. un espacio tenso; iv) la negatividad se ve así obligada a pensarse, en una tradición en términos de sustracción (aphaıresis) y del posible sentido de expresiones como 'nada', 'menos que nada', 'lado de un cuadrado de superficie menor que nada', 'sustraer una magnitud mayor de una menor', etc., mientras que, desde la otra tradición, se piensa en términos de opuestos articulados en torno a un quicio que, rigiendo su enfrentamiento, rige también su anulación recíproca (jin). (Lizcano, 1993, p. 266-267)

Formas de negatividad: Aurora Gallardo.

En las diferentes culturas han estado presente diferentes formas de negatividad que de algún modo también han posibilitado y han dado paso a la aceptación de los números enteros. Esas formas de negatividad pueden estar presente también en las diferentes instituciones educativas en los cursos de pensamiento y sistemas numéricos, en particular, con los números negativos. Por ello, Gallardo (1994) realizó un estudio documental que reveló una larga serie de formas de negatividad acuñada por Lizcano en el contexto de las ecuaciones algebraicas. La historia comienza en la antigüedad y termina a fines del siglo XIX cuando finalmente se resolvió el debate sobre los números negativos en matemáticas. Uno de los logros clave de este viaje a través de la historia del pensamiento fue la identificación de diferentes niveles conceptuales de negatividad incrustados en los procesos de resolución de problemas que se encuentran en textos matemáticos de diferentes culturas. Estos niveles irreductibles de diversificación abren un amplio abanico

de posibilidades, definiendo y enriqueciendo con éxito las categorías de negatividad inicialmente imprecisas que creó Lizcano. Estos niveles se identifican e interpretan a continuación:

• *Número sustractivo.* Donde la noción de número está subordinada a la magnitud. En la resta de dos cantidades a - b, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene un carácter binario en el nivel de la operación de sustracción.

• *Número signado*. Es el número natural al que se le asigna un signo más o un signo menos. Surge la dualidad del signo: binario (signo de la operación de adición o sustracción) y unario (signo asociado al número natural).

• *Número relativo.* Se hace presente cuando se puede concebir la idea de opuestos en situaciones discretas, así como la idea de simetría en situaciones continuas.

• *Número aislado.* Surge cuando se acepta un número negativo como la solución de una operación, un problema o una ecuación (Gallardo, 2009, p.33)

Gallardo (2009) retoma ese estudio histórico a la luz de un estudio teórico sobre la solución de problemas aditivos (Bruno y Martinón, 1997) examinando algunos problemas en las obras de dos matemáticos: la obra *Ars Magna* de Cardano (1545) y la *Triparty en la Science Des Nombres* de Chuquet (1484) infiriendo que

> "*estos autores utilizaron un lenguaje vernáculo para dar una explicación adicional que justificara la negatividad de las soluciones, con oraciones muy similares a las propuestas en Bruno y Martinón (1997) y definidas por estos investigadores como formas semánticas equivalentes" (Gallardo, 2009, p.70)*

Este nuevo análisis se hace paralelo a un análisis empírico que se realizó con estudiantes de 12 y 13 años en el que se observaron también los niveles conceptuales de los negativos en la resolución de tareas aritmético-algebraicas (Gallardo, 2002). Se termina concluyendo que las formas semánticas equivalentes y las equivalencias sintácticas permiten que la suma y la resta de números signados se conciban como una única operación, a su vez, ponen al descubierto los distintos niveles de negatividad: sustractivo, signado, relativo y aislado.

Así pues, de los dos estudios mencionados anteriormente, la autora identifica que al igual que en los textos históricos, en el presente, los estudiantes extienden su noción de número de manera paulatina transitando por los distintos niveles de negatividad y apoyándose fuertemente en el uso del lenguaje natural para validar sus interpretaciones. De allí, la importancia de promover la riqueza de contextos pertenecientes a una diversidad de formas semánticas en el planteamiento del problema, pues este podría contribuir a la extensión de números naturales a la de los enteros.

Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos

De acuerdo con Vergnaud y Durand (1983), los problemas de tipo aditivo son problemas cuyas soluciones implican solamente sumas y restas.

Los problemas aditivos se pueden clasificar centrándose en la estructura funcional y semántica entendiendo la primera como el tipo de situaciones numéricas (estados, comparaciones y variaciones); la segunda como el modo de expresar dichas situaciones (Bruno,1997 a) apoyada en Nesher (1983); Castro et al (1992) y Fuson (1992). No son estas las únicas cuestiones que subyacen en la clasificación de los problemas aditivos permitiendo analizar también, tanto el contexto como la posición de la incógnita en la situación problema. Bruno (1994) se centra en los contextos y las estructuras de los problemas aditivos simples con números negativos donde trata cinco contextos usados frecuentemente en los libros de texto: deber-tener, temperatura, cronología, nivel del mar, carreteras. El autor expone algunos resultados obtenidos de una experiencia que se realizó con 111 estudiantes del grado séptimo entre los 12-14 años con material curricular donde se presentan los números negativos a través de situaciones concretas. Aquel termina concluyendo que el contexto que permite una mayor comprensión de los números negativos es el deber-tener (situaciones con dinero); en una dificultad media están las situaciones referidas a situaciones con temperatura y el nivel del mar. El más complicado, resulta ser el cronológico.

Las estructuras en el enunciado de problemas aditivos pueden ser ilustrados mediante los siguientes problemas que corresponden al esquema x+y=z por lo que parecen ser similares:

a) Si una persona tiene 8 pesetas y debe 11 pesetas. ¿Cuál es su situación

económica?

b) Una persona nació en el año 123 antes de Cristo y vivió 65 años. ¿En qué año murió?

c) La temperatura en Madrid es de 5 grados centígrados sobre cero, en Paris hay 9 grados centígrados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?

d) Un avión descendió 600 metros para huir de una tormenta y posteriormente subió 350 metros. ¿Cómo cambió la posición del avión con respecto a la que tenía antes de estos dos movimientos?

El problema a) se denomina de **combinación de estados**, porque hay un estado total y dos parciales; el problema b) es de **variación de un estado**, porque tenemos un estado inicial, se produce un cambio o variación y se alcanza uno final; el problema c) es de **comparación de estados**, porque hay dos estados y la comparación de ambos; y, por el último, el problema d) es un problema de **combinación de variaciones** sucesivas, porque hay dos variaciones o cambios sucesivos y la variación total. De las cuestiones mencionadas anteriormente la incógnita permite obtener varias situaciones aditivas según su posición (Bruno, 2001).

En resumen, podrían clasificarse los siguientes problemas aditivos atendiendo únicamente a su estructura y posición de incógnita como lo muestra la figura 2.

Incógnita / **Estructura**	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_2}$	$\mathbf{I_3}$
Cambio	$¿?+v=e_f$ Cambio 1	$e_i+¿?=e_f$ Cambio 2	$e_i+v=¿?$ Cambio 3
Combinación	$¿?+e_2=e_t$ Combinación 1	$e_1+¿?=e_t$ Combinación 2	$e_1+e_2=¿?$ Combinación 3
Comparación	$¿?+c=e_2$ Comparación 1	$e_1+¿?=e_2$ Comparación 2	$e_1+c=¿?$ Comparación 3
Dos cambios	$¿?+v_2=v_t$ Dos cambios 1	$v_1+¿?=v_t$ Dos cambios 2	$v_1+v_2=¿?$ Dos cambios 3

Figura 2 Estructuras de problemas aditivos (Bruno, 2004)

Por otra parte, estas situaciones problemas no son las únicas que se deben trabajar con los números negativos. Es necesario que hagan parte también otros dos aspectos relativos a los mismos, pues, además del contexto (problemas aditivos), estos comparten una dimensión abstracta, como estructuras bien formadas, donde el simbolismo juega un papel importante para su comprensión y una dimensión de recta donde se realizan representaciones de los números con puntos o con vectores. Pero no basta únicamente con trabajar estas dimensiones por separado, es imperativo que haya una relación y comunicación entre ellas, permitiendo pasar del uso de una representación a otra (Bruno, 1997) como lo ilustra la figura 3.

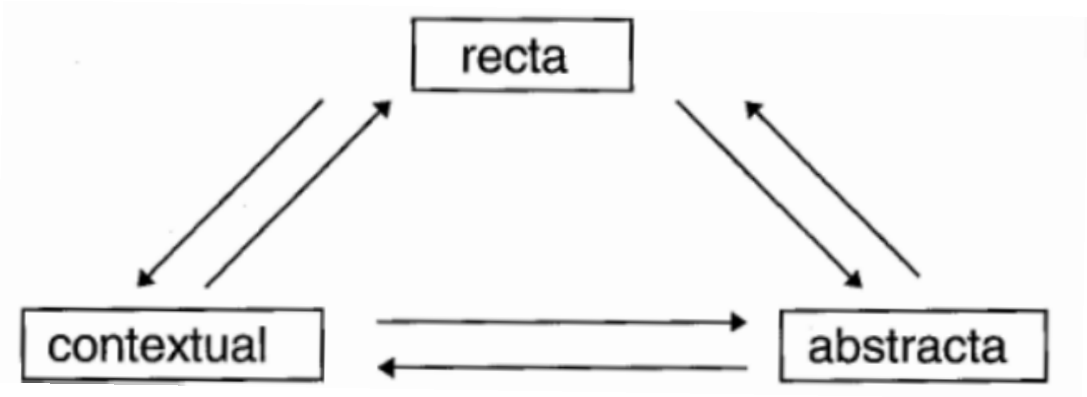


Figura 3 Transferencias entre dimensiones (Bruno 1997)

Para comprender un poco más la transición de las tres dimensiones podemos remitirnos a la figura 4. Donde se ilustra con algunas situaciones las seis posibles transiciones entre ellas.

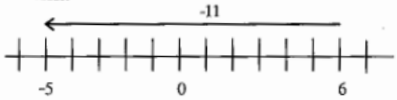
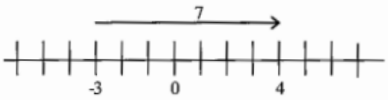
transferencia abstracto → recta Representa en la recta la operación: –4+10=6	**transferencia recta→ abstracto** Dime una operación que pueda ser representada en la recta de la siguiente forma 
transferencia abstracto → contextual Dime una situación que pueda ser resuelta con la siguiente operación: –4+7=3	**transferencia contextual → abstracto** Dime una operación que pueda resolver la siguiente situación: *La temperatura en Madrid es de 9 grados sobre cero. En París hay 12 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?*
transferencia contextual → recta Representa la siguiente situación en la recta *Un ascensor estaba en el piso 5 del sótano y subió 7 pisos. ¿Cuál era la posición del ascensor después de esta subida?*	**transferencia recta → contextual** Dime una situación que pueda ser representada de la siguiente forma: 

Figura 4 Ilustración entre las transferencias (Bruno, 1997)

El estatus de los números enteros.

Es en la matemática moderna donde se les da el verdadero estatus a los números enteros cuando Hankel utiliza la idea de Peacock sobre el principio de permanencia de las operaciones formales, donde postulaba que al hacer cada nueva ampliación numérica, se deben conservar las leyes formales de uniformidad, asociatividad, conmutatividad y distributividad; además, las definiciones de las operaciones en campos cada vez más amplios, conservando las leyes formales, permiten generalizar sin nueva demostración los teoremas obtenidos para campos más restringidos**.** Hankel en 1867 justifica los números negativos con el principio de permanencia de las leyes formales, introducido por Peacok dando un salto de lo concreto a lo formal que permitirá justificar los diversos sistemas numéricos. La aceptación de este principio genera un efecto:

La consecuencia lógica de conservar las leyes formales al hacer cada nueva

ampliación numérica es que dejaba de ser necesario demostrar para el nuevo sistema las reglas del cálculo aritmético, y que las definiciones de las operaciones en campos cada vez más amplios, conservando las leyes formales, permitían generalizar sin nueva demostración los teoremas obtenidos para campos más restringidos. A partir de aquí, la palabra número iba a ser redefinida, así como sus dos operaciones fundamentales: adición y multiplicación. Esto no se hacía arbitrariamente sino cumpliendo condiciones (Gomez, 1999).

Número entero

Definiremos el número entero (Negrete, 2021) tal como se presenta en la actualidad desde la matemática moderna, la de las estructuras: supongamos la ecuación $a = b + x$ tomada de la pareja ordenada (a, b) del producto $\mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}$ con solución perteneciente a $\mathbb{N}$. Podemos observar que hay varias parejas (c, d) distintas, de este producto, donde una misma x resuelve las ecuaciones $a = b + x$ y $c = d + x$. Es decir, los valores $a = 8, b = 3; c = 11, d = 6$ muestran como la pareja $(11,6)$ es, como solución de la ecuación, igual a la pareja (8,3) y son muchas otras parejas las que tienen la misma solución.

$$8 = 3 + 5$$
$$11 = 6 + 5$$

Buscamos que un número entero sea la clase de equivalencia cuyos elementos sean todas las parejas $(c, d) \in \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}$, para las que una misma x $\in \mathbb{N}$ resuelva $c = d + x$. De ellas se elegirá un representante (a, b) que dará nombre a cada clase, pero más importante es distinguir que todo elemento de cada clase refiere a un mismo número entero.

Sean $(a, b) \in \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}$ y $(c, d) \in \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}$. $a = b + x$ y $c = d + x$ tienen la misma solución si y sólo si $a + d = b + c$

La proposición anterior motiva entonces la siguiente definición para todas las parejas (a, b), no solo para aquellas con $a \geq b$

Definición. Sean $(a, b) \sim (c, d)$ parejas de números naturales. Diremos que $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si $a + d = b + c$.

Podemos decir que $\sim$ es una relación de equivalencia por que se cumple:

- **La propiedad reflexiva:**

Para toda (a,b) se cumple que $(a,b)\sim(a,b)$.
Por propiedad de la suma en los naturales $a+b=b+a$ Por lo tanto $(a,b)\sim(a,b)$

- **La propiedad simétrica:**
  Para todo $(a,b),(c,d)$. Si $(a,b)\sim(c,d)$ entonces $(c,d)\sim(a,b)$.
  Si $(a,b)\sim(c,d)$, entonces $a+d=b+c$. Por simetría de la igualdad y por conmutatividad de la suma tenemos $c+b=d+a$. Por lo tanto $(c,d)\sim(a,b)$.

- **La propiedad transitiva:**

  Pata todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\, x\, \mathbb{N}$ de manera que $(a,b)\sim(c,d) \wedge (c,d)\sim(e,f)$ entonces $(a,b)\sim(e,f)$.
  Si $(a,b)\sim(c,d)$, entonces $a+d=b+c$ y Si $(c,d)\sim(e,f)$ entonces $c+f=d+e$ Sumando ambas ecuaciones se obtiene $a+f+c+d=b+e+c+d$ por la ley cancelativa $a+f=b+e$. Por lo tanto, $(a,b)\sim(e,f)$.

Es decir, la relación definida es una relación de equivalencia porque cumple las tres propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva.
Definición. Un número entero es una clase de equivalencia de $\sim$

$$\overline{(a,b)} := \{(c,d) \in \mathbb{N}\, x\, \mathbb{N} : a+d=b+c\}$$

Definición. la suma en los enteros es la función $\hat{+}: \mathbb{Z}\, x\, \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que;
$\overline{(a+b}\hat{+}\overline{(c+d}=\overline{(a+c=b+d)}$ (Negrete, 2021)

Importancia de la enseñanza de los números enteros.
La enseñanza de las magnitudes relativas, de los números enteros, sus relaciones y operaciones ha sido objeto de estudio por las dificultades que se evidencian en la falta de significados construidos por los estudiantes en la básica secundaria. Y es que, en particular, la difícil aceptación, tanto de las cantidades negativas como de los números enteros en la historia de la matemática, puede ser parte del reflejo de las dificultades para darle significado a todas aquellas.

Los números naturales no resultan ser suficientes para resolver ecuaciones de tipo x+1=0,

es por ello entonces, que se hace necesario para la solución de la ecuación anteriormente mencionada, sin que sea la única causa, ampliar el conjunto numérico de los números naturales a uno más amplio, el de los enteros, que permita la solución de dichas ecuaciones. Sin embargo, matemáticos como Carnot, D´Alembert encuentran y utilizan soluciones de dicha ecuación con cantidades negativas, pero estas no se conciben como reales, sino como magnitudes aisladas (ficticias). Esta es una muestra de que la aceptación de los números negativos, en la historia, ha sido “obstaculizada”, sin decir con esto que no se aceptara o se empezara a hablar, por lo menos, en diferentes culturas, de magnitudes relativas (deber, tener; el bien, el mal; arriba, abajo).

Pero no solo es reconocer la importancia y necesidad de ampliar dicho conjunto sino de reconocer también la importancia de, como menciona Freudenthal (1991), estructurar y sistematizar el sentido común de las operaciones y que ese sentido común ya estructurado derive en reglas que a su vez se vayan convirtiendo en sentido común para un nuevo conocimiento, a un nivel más alto. Por lo que podríamos pensar que las reglas, que se convirtieron en sentido común en las operaciones con números enteros, pueden seguir estructurandose para nuevos conocimientos y así, podría abordarse el campo de los números racionales y sus operaciones, que nos ofrecen un espectro más amplio de situaciones que podemos resolver.

Comprender los algoritmos de las diferentes operaciones al igual que darles significados, además de relacionarlas, permite que el estudiante se vaya haciendo explícitos procesos de algoritmos propios de otras situaciones en las matemáticas mismas o en la vida cotidiana que pueden ir “negociando con el docente” de manera que este siempre esté cómo guía. Pero no es importante solo para formar sus propias estructuras de las operaciones, también lo es para darle un significado a las cantidades relativas y modelar las operaciones de un modo concreto que tengan un significado para ellos. Entonces es posible organizar y estructurar el sentido común subyacente en el proceso de manipular objetos matemáticos e ir convirtiéndolo en una matemática formal mediante la simbolización.

Por otro lado, la enseñanza de las operaciones con números enteros también es indispensable para otras ciencias diferentes a la matemática para la estimación y el cálculo en diferentes situaciones. Entre ellos el cálculo de desplazamientos, velocidades, recorridos

en física; diferencias de temperaturas que utilicen las magnitudes relativas; la utilidad para manejar finanzas en el campo de la economía; etc.

Por eso, como lo plantea el MEN refiriéndose al pensamiento numérico, en este caso a las operaciones con números enteros:

> *son indispensables para muchas de las actividades que experimentan las personas a diario en el sentido que permiten y ayudan a formular y solucionar situaciones de la vida cotidiana*

Una de las practicas que los colombianos viven en la cotidianidad es el manejo del estado financiero en los hogares que tiene que ver con facturas y recibos donde se evidencian créditos, débitos, descuentos, saldos, entre otros. Donde es imperativo, para poder realizar un análisis del estado de esas facturas, reconocer dichas cantidades signadas (deudas, ganancias) y operarlas entre sí. Además de ello, fenómenos como la crisis climática que azota a todo el mundo hoy en día, sugieren hacer un reconocimiento en cambios o diferencias de temperaturas para tener una mejor comprensión de las causas, efectos y discutir posibles mitigaciones del fenómeno.

Desde los lineamientos curriculares se evidencia también la intención de volver a trabajar en las operaciones básicas con algunos conjuntos numéricos, entre ellos los enteros, dado los resultados estériles que se estaban generando por el énfasis que se le estaba dando a la matemática moderna, aquella basada en conjuntos.

Marco legal

En el siguiente normograma se presenta un resumen de las diferentes normas a nivel local, nacional e internacional que obedecen a la enseñanza de las matemáticas y en particular de las magnitudes relativas y operaciones con números enteros.

Normograma

Norma	Texto de la Norma	Contexto normativo
Conferencia Mundial sobre la Educación para Todos: Satisfacción de las Necesidades Básicas de Aprendizaje (artículo 1)	Artículo 1: Cada persona –niño, joven o adulto– deberá estar en condiciones de aprovechar las oportunidades educativas ofrecidas para satisfacer sus necesidades básicas de aprendizaje. Estas necesidades confiere a los miembros de una sociedad la posibilidad y, a la vez, la responsabilidad de respetar y enriquecer su herencia cultural, lingüística y espiritual común, de promover la educación de los demás, de defender la causa de la justicia social, de proteger el medio ambiente y de ser tolerante con los sistemas sociales, políticos y religiosos que difieren de los propios, velando por el respeto de los valores humanistas y de los derechos humanos comúnmente aceptados, así como de trabajar por la paz y la solidaridad	Enmarcados en este propósito mundial, la propuesta pretende, brindarles diferentes herramientas para el aprendizaje de las magnitudes relativas y las operaciones con números enteros para que participe plenamente del desarrollo suyo y de su contexto, mejore su calidad de vida y que participe y tome decisiones fundamentales en su vida.

	internacionales en un mundo interdependiente.	
Ley 115 de febrero 8 de 1994. Artículo 5: fines de la educación (numerales 5 y 9)	La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber. El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.	El aprendizaje de las magnitudes relativas y las operaciones con números enteros propios de la mayoría de las ciencias permitirá que el estudiante pueda conocer y hacer un análisis crítico y reflexivo de algunos de los fenómenos de su contexto y participe en la búsqueda de alternativas para el progreso social y económico.
Ley 115 de febrero 8 de 1994. Artículo 78:	Regulación del currículo. El MEN diseñará los lineamientos generales de los procesos curriculares y, en la educación formal establecerá los	En particular se estable el pensamiento numérico como uno de los pensamientos que los

	indicadores de logros para cada grado de los niveles educativos.	estudiantes deben desarrollar de acuerdo a cada una de los sistemas matemáticos (métrico, numérico, variacional y demás) que se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos.
Estándares básicos en competencias en matemáticas MEN 2006	Los estándares básicos de competencias constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo y la evaluación externa e interna es el instrumento por excelencia para saber qué tan lejos o tan cerca se está de alcanzar la calidad establecida con los estándares.	Específicamente se trata de que el estudiante sea capaz de justificar procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones en el conjunto de los números enteros.
Derechos básicos de aprendizaje V2 2016	El MEN presenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) como un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once, en el área de matemáticas.	El derecho básico que justica este proyecto es la comprensión y solución de problemas que involucran los números enteros en los diferentes contextos del estudiante.

Tabla 1 Normativa estándares básicos en matemáticas.

Marco espacial

Colegio Vid ubicado en el barrio Córdoba de la ciudad de Medellín se encuentra estratificado en los niveles 2 y 3. Es una institución educativa de carácter formal, mixta, privada, de jornada diurna, calendario A, católica, sin ánimo de lucro y con una preocupación constante por la formación espiritual de los estudiantes, en los niveles educativos de prescolar, básica primara, básica secundaria y media. Cuenta con una población superior a los 900 estudiantes.

Es una obra de la Congregación Mariana, con un proyecto educativo enmarcado en los fines de la educación colombiana y los principios éticos y humanísticos de la Iglesia Católica; inspirada en el deseo de servicio apostólico, para formar personas en el ser, el saber, el hacer y la responsabilidad ambiental.

El Colegio como obra de la Organización VID-Congregación Mariana, se articula a las acciones corporativas que, desde las diferentes Obras de salud, comunicaciones y de familia trabajan por el bienestar integral de las personas a quienes atiende. Con base en lo anterior, la Comunidad Educativa se beneficia de los servicios y programas que ofrecen; además de los diversos convenios interinstitucionales por el carácter de institución educativa privada. Además, tiene un enfoque en la profundización de la informática, considerando que facilita los procesos de transformación cultural y fortalece aquello que queda de la tradición cultural como patrimonio digno de conservar.

En el 2018 el colegio VID se posicionó en el primer lugar dentro de los colegios de la comuna y en su núcleo; en el puesto 25 a nivel local y en el 45 a nivel departamental por lo que este proyecto pretende seguir mejorando los desempeños de los estudiantes en la asignatura de matemáticas. Además de aumentar los resultados en pruebas estandarizadas, se espera que los estudiantes del colegio VID, en particular, lleguen a comprender los números enteros, sus relaciones, operaciones aplicándolas a situaciones de la vida cotidiana, además de generar un cambio en la modalidad de la enseñanza de las matemáticas que se centra en los modelos tradicionales basados en el enunciado de reglas y algoritmos que no se enmarcan en contextos reales que generan significados errados y falencias en la resolución de problemas que de su entorno y dentro de las matemáticas mismas.

Diseño metodológico

Enfoque

Este proyecto se enmarca en la metodología de investigación acción con un enfoque cualitativo interpretativo donde se realiza un estudio profundo y reflexivo sobre la práctica de enseñanza con el fin de mejorar la calidad de la acción, en particular, de la comprensión de los números enteros -mediante el diseño e implementación de una secuencia didáctica- que vincula dos procesos de forma simultánea para mejorar las prácticas sociales en un determinado campo. En este caso, la institución educativa, tanto el de los avances teóricos (en la medida que se hace una reflexión crítica en torno a los procesos de investigación), como el de cambios sociales mediante la acción y la participación.

Además, es una metodología que se da de forma cíclica, conservando tres procesos fundamentales que se repiten en el tiempo, detectando, en primera instancia, una situación problemática en un campo social; luego formular una o varias estrategias de acción que permitan dar soluciones a la problemática anteriormente detectada; después de la implementación de ese plan de acción, será analizado y evaluado el alcance para realizar diagnósticos posteriores (y luego sus otras dos etapas siguientes nuevamente). Esto permite mejorar cada vez más la práctica profesional (en este caso el de las prácticas de enseñanza) para el autodesarrollo y generar cambios en los significados construidos por los estudiantes en torno a las magnitudes relativas y las operaciones con números enteros en este caso.

En este sentido, Elliot (1993, citado por Murillo 2010), entiende la investigación acción como una reflexión sobre las acciones humanas y las situaciones vividas por el profesorado que tiene como objetivo ampliar la comprensión (diagnóstico) de los docentes de sus problemas prácticos.

Así pues, la investigación acción permitirá a este proyecto hacer un análisis autorreflexivo evidenciado una problemática sobre la enseñanza tradicional de las operaciones con números enteros donde por medio de un plan de acción, que será implementado, se evaluará y analizará con el propósito de mejorar dicha práctica de enseñanza.

Diagnóstico

Esta es la primera fase que se enmarca dentro de la metodología investigación-acción y que en este caso en particular se encontró, en la práctica de enseñanza del pensamiento numérico, poca comprensión de los números enteros y sus múltiples relaciones. El poco reconocimiento de las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos, debido a modelos tradicionales basados en el enunciado de reglas y algoritmos que no se enmarcan en contextos reales y significativos, por lo que surge la pregunta que se ha planteado al inicio y que direccionará la resolución del problema encontrado aplicando las ideas principales que trata la educación matemática realista de Hans Freudenthal que parte de contextos y situaciones reales como modelo en la enseñanza de la matemática; trazando como objetivo principal el diseñar una propuesta didáctica que contribuya a la comprensión de las operaciones de suma y resta; identificando cuáles son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante, cómo los utiliza y cómo los monitorea en la aplicación de algoritmos matemáticos para la suma y resta de números enteros; Implementando la secuencia didáctica con actividades digitales y concretas diseñadas desde contextos reales y; por último, validando los efectos que genera la aplicación del proyecto de medicación docente a la comprensión sobre los números y sus operaciones y el desarrollo de estrategias para utilizarlos.

Plan de acción

El plan de acción se encaminará en la elaboración de una secuencia didáctica, enfocada a desarrollar el pensamiento numérico (definido en los lineamientos curriculares del MEN) mediante una serie de actividades que buscará mejorar las prácticas de enseñanza, en particular de la comprensión de los números enteros, operaciones, relaciones y el reconocimiento de las magnitudes relativas y el efecto de las operaciones entre ellas, establecidas en los Estándares y DBA, pero también de la dotación significados, con estudiantes del grado octavo del colegio VID y, que al igual que la estrategia, cuenta con un proyecto enmarcado en los fines de la educación planteados en la ley 115 de febrero de 1994, particularmente, los numerales 5 y 9.

Se realizarán estrategias virtuales con apoyo de las herramientas, GeoGebra y con material

concreto mediante el uso del modelo de neutralización, basadas en las ideas de la Educación Matemática Realista de Freudenthal. Comenzando una valoración, mediante una prueba diagnóstica de los pre-conceptos o significados que se han construido al iniciar la implementación de la estrategia didáctica planteada; continuando con el desempeño de la comprensión por medio de las actividades desarrolladas con las herramientas virtuales (Geogebra) y concretas, que se realizarán con los estudiantes para adquirir la comprensión. Finalmente, se desarrolla una actividad final para dar cuenta del alcance obtenido con la estrategia.

Todo ello con un enfoque cualitativo interpretativo, realizando un estudio profundo y reflexivo sobre las practica de enseñanza con el fin de mejorar la calidad de la acción, en particular, de la comprensión de los números enteros,

Acción y observación

Se realizará una prueba diagnóstica para evaluar conocimientos previos, significados construidos y evaluar si los estudiantes pueden aplicar las operaciones a situaciones de la vida real; de la intervención que se hará en el aula se realizarán actividades utilizando el modelo concreto de neutralización y de desplazamientos para comprender la suma y la resta de números enteros desde otra perspectiva, así como el uso y solución de situaciones reales estructuradas mediante sus formas semánticas.

Evaluación

En esta fase se analizará la información que se obtendrá al aplicar la propuesta enmarcada en las ideas de Freudenthal respecto a la educación matemática realista, recolectando la información mediante la realización de un diagnóstico inicial con un formulario, la aplicación talleres y actividades escritas que están en la secuencia didáctica donde se analiza y se realiza el comparativo de los significados construidos antes de aplicar la secuencia y los que construyeron después de aplicar esta propuesta para analizar el impacto, o no, de la propuesta.

Instrumentos de recolección de recolección de información

Para evidenciar los significados que han desarrollado los estudiantes basada en la

enseñanza tradicional de reglas y de algoritmos para la comprensión de los números enteros, las magnitudes relativas y las operaciones entre ellas, además de identificar si los estudiantes pueden relacionar las operaciones con situaciones de la vida cotidiana se realizará un diagnóstico mediante una actividad que cuenta con un **cuestionario** de 7 ejercicios de conceptos de números enteros como orden, representación en la recta numérica y operaciones de suma y resta tanto nivel abstracto como contextual.

Posteriormente, en el desarrollo de la secuencia didáctica se plantearán **actividades escritas de los modelos de neutralización y modelos de desplazamientos** donde se plantean diferentes ejercicios de operaciones con números enteros registrando y justificando las respuestas de cada uno de los estudiantes utilizando el material concreto y con cuestionarios sobre situaciones (el termómetro, el ascensor, las latitudes por encima y por debajo del nivel del mar) que presentarán de forma interactiva, el modelo de desplazamientos. También, se diseñarán **actividades con situaciones aditivas** (diversos contextos donde se evidencian las magnitudes relativas y las operaciones entre ellas).

Población y muestra

La población con la cual se desarrollará esta propuesta son los estudiantes de la jornada de la mañana del colegio VID, y la población serán los estudiantes del grado octavo con una cantidad entre los 30 y 40 estudiantes de edades entre 13 y 14 años.

Impacto esperado

Se espera por medio de este proyecto mejorar la práctica de enseñanza para que los estudiantes puedan comprender y darles un significado real a las operaciones con números enteros y magnitudes relativas evitando así la memorización de reglas que a largo plazo se van olvidando y así poder hacerlas más significativas. Además, se espera que los estudiantes del colegio VID puedan desarrollar el pensamiento matemático a partir de clases más interactivas con las herramientas virtuales y el material concreto utilizado en esta secuencia didáctica.

Planificación de actividades

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Diagnóstico	Identificar problema Formular pregunta Formular objetivos generales Formular objetivos específicos Identificar metodologías que permitan el desarrollo del pensamiento numérico	1.1. Revisión bibliográfica sobre modelos para trabajar las operaciones con números enteros de manera concreta. 1.2. Revisión bibliográfica de los lineamientos y estándares del MEN basados en el desarrollo del pensamiento numérico 1.3. Revisión bibliográfica de obstáculos epistemológicos para comprender los números enteros. 1.4 Revisión bibliográfica sobre la teoría de educación matemática realista.
Fase 2: Diseño	Diseñar material y actividades de enseñanza y evaluación para la intervención en el aula desde un enfoque cualitativo interpretativo, y a la luz de las ideas de la Educación Matemática Realista	2.1 Diseño y construcción de actividades para evaluación de los preconceptos. 2.2 Diseño y construcción de actividades evaluativas durante la implementación de estrategia. 2.3 Diseño y construcción de la

		secuencia didáctica. 2.4 Diseño y construcción de actividades didácticas utilizando las TIC y material concreto.
Fase 3: Intervención en el aula.	Aplicar las actividades propuestas	3.1. Aplicar actividades propuestas para la evaluación de preconceptos. 3.2 Intervención en el aula de la estrategia didáctica de enseñanza propuesta basada en modelos de neutralización y desplazamiento. 3.3 Aplicar actividades propuestas evaluativas para la evaluación final del proyecto desde un enfoque cualitativo interpretativo, y a la luz de las ideas de la Educación Matemática Realista
Fase 4: Evaluación	Evaluar el desempeño de la estrategia didáctica o de la propuesta	4.1. Realización del análisis de los resultados obtenidos al implementar la estrategia didáctica en los estudiantes de octavo grado del colegio VID. 4.2 Valoración continua de las actividades que se harán dentro

		de la propuesta, fundamentada desde la educación matemática realista.
Fase 5: Conclusiones y recomendaciones	Determinar el alcance acorde con los objetivos específicos que se plantearon al inicio de su trabajo final y la profundización en su práctica docente.	5.1 Las conclusiones deben generar sus respectivas recomendaciones. Estas deben ser claras, bien sustentadas y justificadas. Deben dar los lineamientos para la posterior implementación de las acciones propuestas.

Tabla 2 Planificación de Actividades

Actividades	**Semanas**																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1.1	**X**	**x**																		
1.2			**x**	**x**																
1.3					**x**	**x**														
1.4							**x**	**x**	**x**	**x**										
2.1											**X**	**x**	**x**							
2.2											**X**	**x**	**x**							

2.3											**X**	**x**	**x**	**X**	**x**					
2.4														**X**	**x**					
3.1													**x**	**X**	**x**	**X**	**X**			
3.2													**x**	**X**	**x**	**X**	**X**	**x**		
3.3													**x**	**X**	**x**	**X**	**X**	**x**		
4.1																**X**	**X**	**x**	**x**	**X**
4.2																			**x**	**X**
5.1																			**x**	**X**

Tabla 3. Cronograma de actividades

Actividades y análisis

El análisis que se realizó de las actividades que presentaron los estudiantes se dividieron en dos momentos: en primer lugar, el diagnóstico inicial; posteriormente, las diferentes actividades utilizando el material concreto y situaciones en contextos reales los cuales están en los anexos de este trabajo.

Prueba diagnóstica

Con esta actividad se pretende evidenciar cuáles son los recursos con los que cuenta el estudiante para identificar cantidades relativas; aplicación de operaciones como la suma y resta tanto en contextos reales como en los propios de las matemáticas; qué procedimientos y algoritmos realizan para resolver dichas situaciones.

Se realiza a la actividad con un total de 33 estudiantes. La prueba contiene 7 ejercicios que pretenden analizar las respuestas de los estudiantes sobre la noción de cantidades relativas, la traslación de las diferentes dimensiones de numero entero y sus operaciones (dimensión contextual, dimensión de recta y la dimensión abstracta): el primero hace referencia a las cantidades relativas, si reconoce los números negativos en situaciones de la vida cotidiana como las ubicaciones con respecto al nivel del mar (por encima, por debajo); el segundo pretende identificar la noción de relación de orden en los números enteros; los siguientes cuatro puntos son problemas aditivos con números enteros en contextos temporales, de temperatura, de altura a nivel del mar, de ganancias y pérdidas; los dos puntos finales se centran en la operación de suma y resta de números enteros.

Ejercicio 1.

1. Si el avión está ubicado a 600 metros respecto al nivel del mar, qué valor le asignarías al búho; a la parte más alta del árbol; a la superficie de la pelota que está haciendo contacto con el mar; y, al caballito de mar.

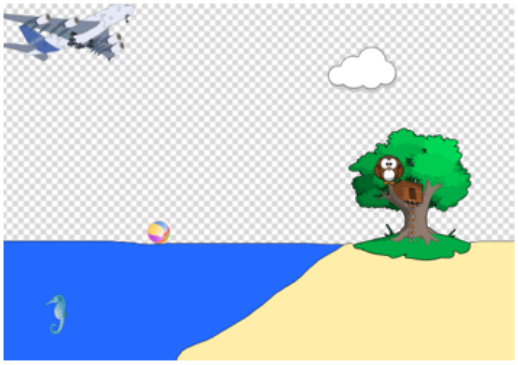


Figura 5. Ejercicio 1 prueba diagnóstica

Este ejercicio tiene como objetivo analizar si los estudiantes son capaces de reconocer los números negativos y utilizarlos en diferentes situaciones para realizar representaciones de cantidades relativas de la vida real.

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco
14	9	10

Tabla 4. Resultados respuestas ejercicio 1 prueba diagnóstica

13 estudiantes fueron capaces de identificar y emplear el número negativo para describir “niveles” por encima y por debajo del mar dando valores negativos a los objetos que se encuentran por debajo del nivel de referencia. Este es el caso de la estudiante 4 que representa la ubicación de los objetos que están sobre el nivel del mar como cantidades positivas y la del caballo de mar como una cantidad negativa.

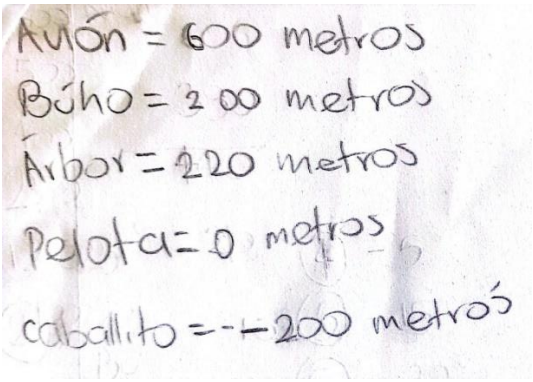


Figura 6 Respuestas respecto al nivel del mar

10 de los estudiantes no se atrevieron a realizar una representación de la situación; 8 no le asignan números negativos y tampoco hacen explícito que hay objetos por debajo del nivel del mal, solo representa con el número positivo como el estudiante 2 que ubica el 100 como positivo en la recta, pero lo expresa como número negativo.

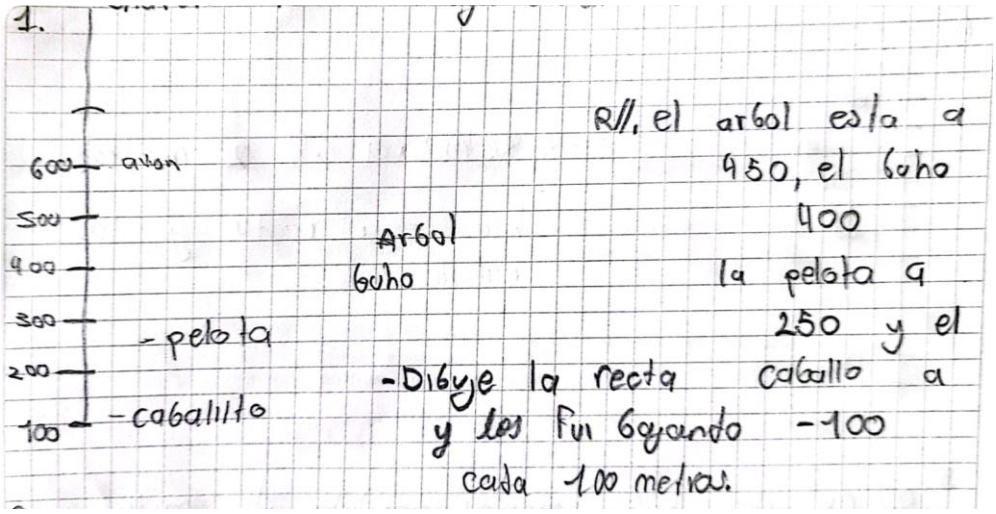


Figura 7 Respuestas estudiantes al ejercicio 1

Ejercicio 2.

2. Ordena de mayor a menor las siguientes temperaturas (°C) registradas en una reconocida ciudad de Europa durante el año.
   -32° 23° -38° -3° -5° 27° -15°

Figura 8 Ejercicio 2 prueba diagnóstica

Con este ejercicio se pretende que los estudiantes identifiquen la relación de orden de los números enteros aplicando el concepto en situaciones reales (en el contexto de temperaturas) donde se menciona el registro de varias temperaturas en determinada ciudad para ubicarlas de mayor a menor.

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco
19	14	0

Tabla 5 Resultados respuestas ejercicio 2 prueba diagnóstica

Se identificó que 19 de los estudiantes logran ubicar u ordenar de mayor a menor las diferentes temperaturas, sin embargo, ninguno de ellos utiliza el símbolo “mayor que” o

“menor que” (los ordenan de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo), es el caso del estudiante 4.

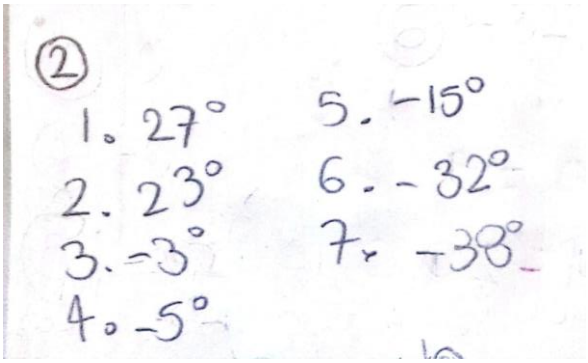


Figura 9 Respuestas temperaturas positivos y negativos

Los que no lograron responder correctamente, en su mayoría, tiene claro que los positivos son mayores que los negativos, pero confunde la relación de orden en los negativos manifestando que -3 es mayor -2, por ejemplo. Como el estudiante 20 que expresa que -38 es mayor -32.

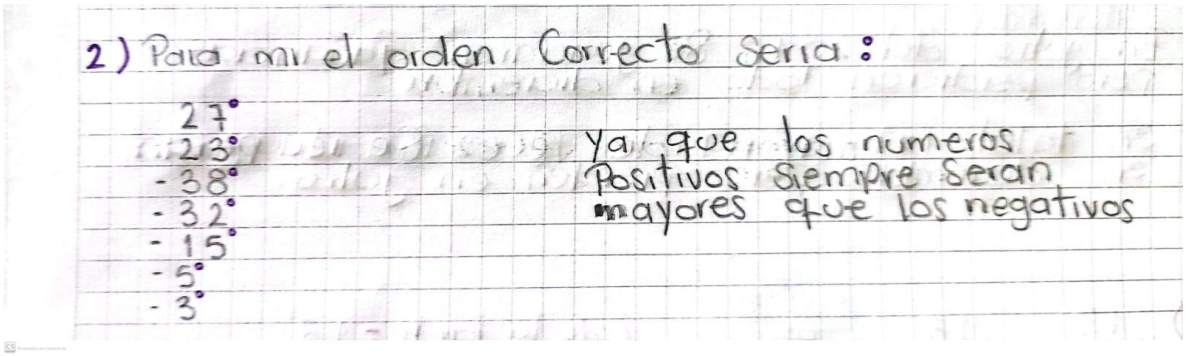


Figura 10 Respuestas enteros negativos

Otra pequeña parte, de la que hace parte el estudiante 2, no toma en cuenta el signo para ordenar las cantidades, ubicando un numero negativo entre dos positivos.

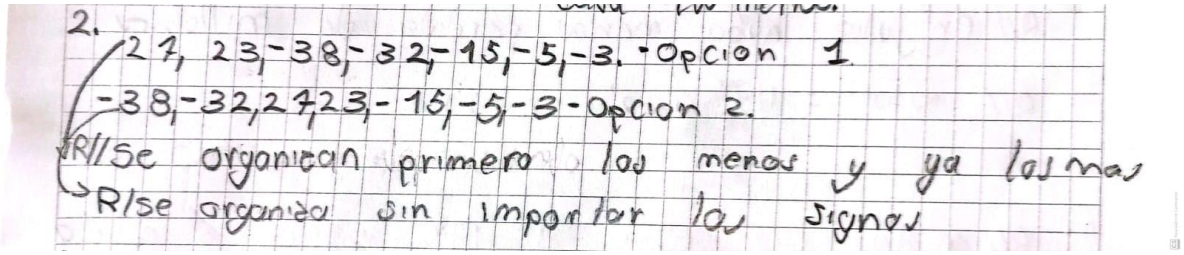


Figura 11 Respuestas sin ordenar

Ejercicio 3

3. El matemático Tales de Mileto nació en el 624 a.C. y vivió 78 años. ¿En qué año murió? Representa la situación en la recta numérica.

Figura 12 Ejercicio 3 prueba diagnóstica

Éste, es un problema aditivo de los que categoriza (Bruno, 2001) como “variación de estado” en un contexto temporal con incógnita en el estado final. Se pretende analizar si el estudiante es capaz de utilizar la recta numérica como recurso para la solución de situaciones reales.

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco
11	19	3

Tabla 6 Resultados respuestas ejercicio 3 prueba diagnóstica

En total 11 de ellos lograron contestar correctamente; la mayoría no utiliza la recta numérica para apoyarse, sino directamente con la operación. El estudiante 33 utiliza ambas.

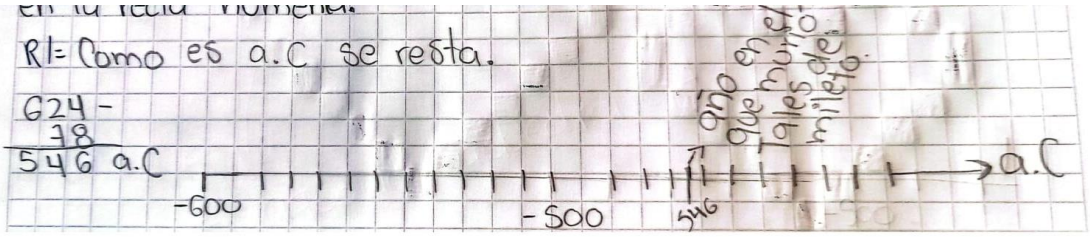


Figura 13 Respuesta de estudiante que utiliza recta numérica y operación.

Los estudiantes que no supieron resolver, la mayoría no logran ubicar los números negativos en la recta de manera ordenada y no utiliza signos o alguna referencia que discrimine a.c. con d.c, como el estudiante 6 que no tiene en cuenta el signo de los números.

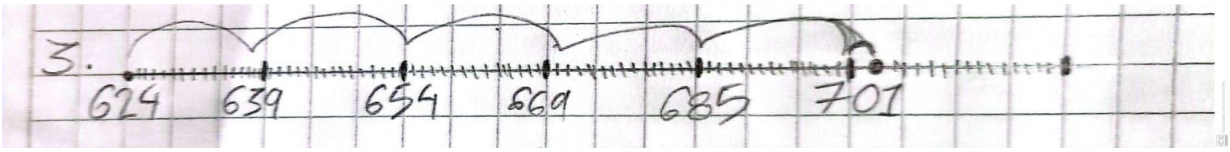


Figura 14 Números representados en la recta

Ejercicio 4.

4. Un pez globo que está a 9 metros bajo el nivel del mar, primero desciende 3 metros y luego baja 5 metros, ¿a qué nivel del mar se encuentra el pez ahora?

Figura 15 Ejercicio 4 prueba diagnóstica

Esta es una situación de una “combinación de variaciones” con contexto “nivel del mar” donde se pregunta por el estado final de un pez globo que hace varios descensos.

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco
18	14	1

Tabla 7 Resultados respuestas ejercicio 4 prueba diagnóstica

En este punto se registró 18 respuestas correctas, pocos responden utilizando una representación de la situación con operaciones. De los que no contestaron acertadamente, hacen la operación de restas (descenso), sin embargo, el 9 del estado inicial lo toman como positivo por lo que a muchos les da uno positivo en su respuesta y lo interpretan como tal (quedó a un metro por encima del nivel del mar).

El estudiante 4 logra representar la situación con la recta numérica pero no hace una referencia a alguna operación que permita obtener el mismo resultado.

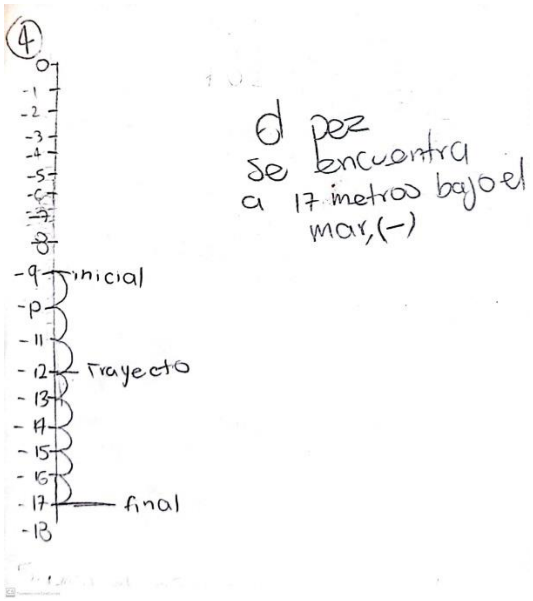


Figura 16 Representación recta numérica vertical

El estudiante 19 logra representarlo de manera correcta mediante las operaciones, tomando los descensos como agregar números negativos.

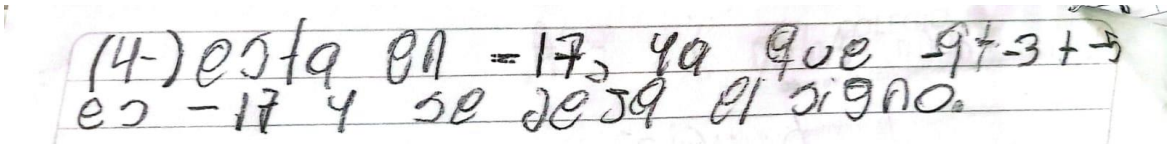

(4-) está en -17, ya que -9+-3+-5 es -17 y se deja el signo.

Figura 17 Números negativos

El estudiante 32 aplica la operación de resta para indicar el descenso, sin embargo, no tiene en cuenta los signos negativos de la posición inicial. No concibe el número relativo (Gallardo, 2009)

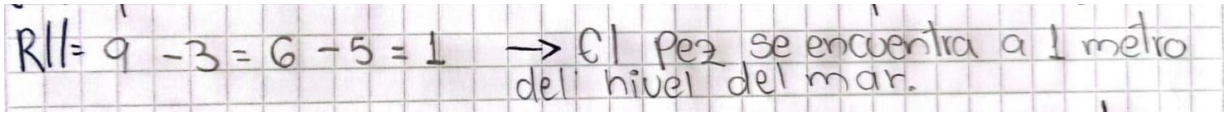

R// = 9 - 3 = 6 - 5 = 1 → El pez se encuentra a 1 metro del nivel del mar.

Figura 18 Estudiante no concibe el número relativo.

Ejercicio 5

5. Una empresa en cada año realiza dos estados de ganancias y pérdidas (julio y diciembre). La tabla muestra las ganancias o las pérdidas en miles de millones. ¿Cuál es la diferencia entre los resultados entre julio y diciembre en cada año? ¿Cuál es el balance total?

Año	Julio	Diciembre
2017	-11	25
2018	9	-18
2019	0	6
2020	-1	-4

Figura 19 Ejercicio 5 prueba diagnóstica

Esta es un problema aditivo de “combinación de estados” con la incógnita en el estado final donde se pretende reconocer si los estudiantes tienen la noción de equivalencia semántica de la diferencia y la resta de dos cantidades (si las consideran como una misma operación) Dentro del mismo ejercicio se propone calcular el balance total, la suma de todos los estados.

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco

0	27	6

Tabla 8 Resultados respuestas pregunta 5 prueba diagnóstica

Sólo unos cuantos estudiantes utilizan la operación de resta para expresar la diferencia. Sin embargo, estos estudiantes no tienen un algoritmo claro y correcto que le permita hallar la diferencia o resta entre dos números enteros, por lo que no pueden encontrar el resultado como se puede ver en la respuesta del estudiante 32.

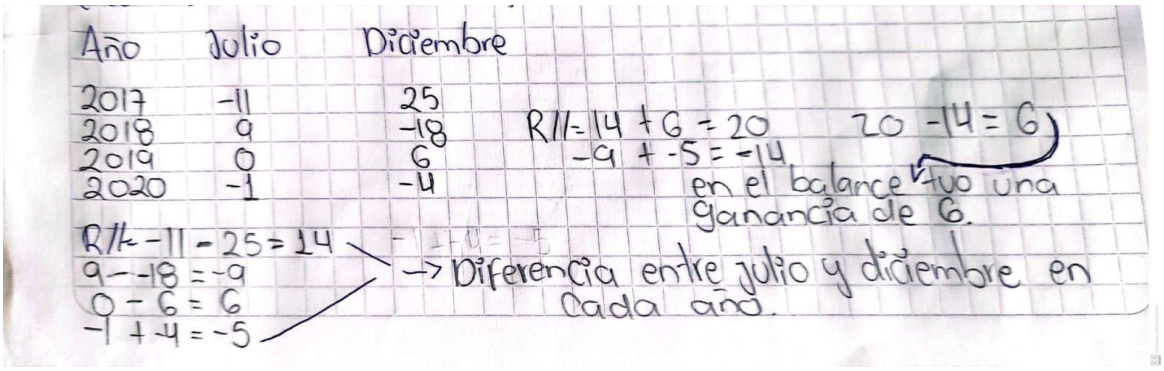


Figura 20 Diferencia entre meses del año

Una gran cantidad de estudiantes se limita a expresar los diferentes estados en cada año describiendo la ganancia o pérdida en cada uno de los estados (estudiante 15). Esto, provoca a su vez, que la respuesta que dan sobre el balance general sea errónea ya que se suma cantidades que no son las correctas.

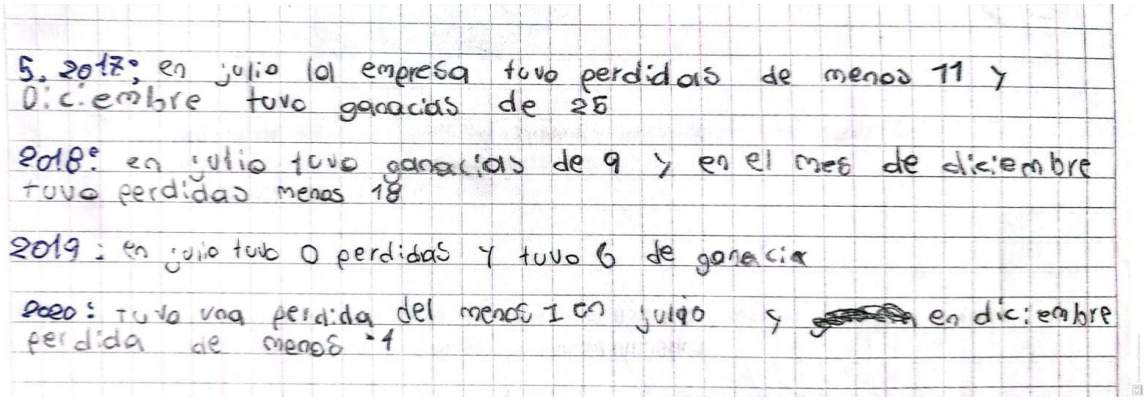


Figura 21 Respuesta relacionada con ganancias y pérdidas

Ejercicio 6

6. En una ciudad, un termómetro marca a las 9 de la mañana 13°C, a las 2 de la tarde ha subido 5°, a las 6 de la tarde baja 12° y a las 11 de la noche baja 9° más ¿Cuál es la temperatura que marcaba el termómetro a las 2 de la tarde, a las 6 y, finalmente, a las 11 de la noche??

Figura 22 Ejercicio 6 prueba diagnóstica

El ejercicio es una sucesión de variaciones en un contexto de temperatura donde hay un estado inicial y se debe calcular un estado final. Se busca con este ejercicio rastrear si el estudiante utiliza una dimensión abstracta (representación simbólica) y la recta numérica para conocer las temperaturas finales en cada uno de los momentos.

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco
17	14	2

Tabla 9 Resultados de las respuestas ejercicio 6 prueba diagnóstica

De los estudiantes que contestaron correctamente pocos resuelven mediante operaciones; de los que cometieron errores, algunos no tienen en cuenta los signos. Por ejemplo; el estudiante 24 logra resolver la situación mediante operaciones.

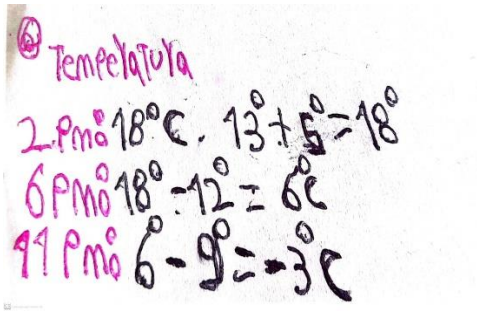


Figura 23 Operaciones para encontrar el valor de la temperatura

Ejercicio 7

7. Realiza las siguientes operaciones, apóyate en la recta numérica. Realiza el gráfico.

a) (12) + (-4) =
b) (-9) - (-3) =
c) (-11) + (-8) =
d) (-17) - (+6) =
e) (-15) + (-3) =

Figura 24 Ejercicio 7 prueba diagnóstica

Este ejercicio pretende reconocer si los estudiantes aplicaban algoritmos y cuando los aplicaban cuáles fueron; si superan los distintos niveles de negatividad que menciona (Gallardo, 2009)

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco
0	24	9

Tabla 10 Resultados de las respuestas ejercicio 7 prueba diagnóstica

Ningún estudiante utiliza un algoritmo que pueda dar solución de manera correcta a todas las sumas y restas. La mayoría de los estudiantes resuelven algunas sumas de enteros (la de signos iguales); sin embargo, se les dificulta realizar la suma de números con distinto signo y las restas con cualquier entero; la operación del literal d) es la que ningún estudiante puede resolver, lo que da a pensar que la resta es una operación complicada para los estudiantes. Son muy pocos los que la hacen en la recta y la mayoría se remite aplicar directamente la operación. La respuesta del estudiante 19 ilustra lo anterior.

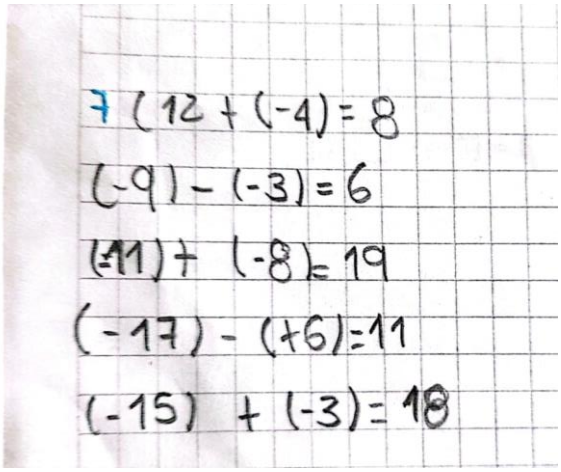


Figura 25 Los estudiantes no utilizan algoritmos para dar soluciones

Ejercicio 8.

8. Encuentra el valor faltante

a) $2 + \square = 5$

b) $5 - \square = 2$

c) $-2 + \square = -5$

d) $2 + \square = 5$

e) $-2 - \square = 1$

f) $\square - 7 = 5$

g) $\square + (-3) = 5$

Figura 26 Ejercicio 8 prueba diagnóstica

En este ejercicio se analiza si el estudiante tiene la capacidad y utiliza algún procedimiento para encontrar los valores de ecuaciones “sencillas” aplicando la suma y resta con números enteros.

Resultados de las respuestas		
Correctas	Incorrectas	En blanco
1	30	2

Tabla 11 Resultados respuestas ejercicio 8 prueba diagnóstica

Sólo un estudiante logra contestar todos los puntos correctamente. La operación con la menor cantidad de respuestas acertadas es la ecuación del literal e, pues implica una resta entre enteros, algo similar a lo que sucedió en el punto anterior. El estudiante 32 logra realizar la mayoría, menos la resta de números signados

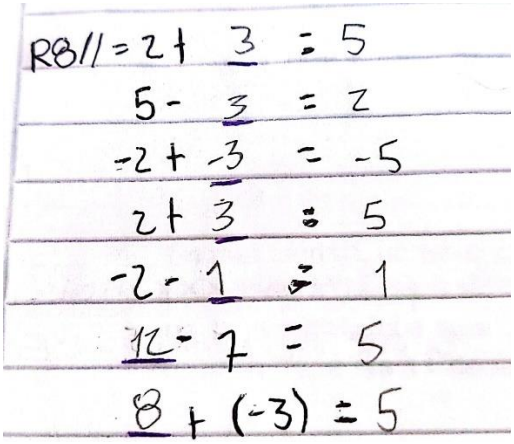


Figura 27 El estudiante no resuelve el ejercicio con número signado

El estudiante 33 es el único que resuelve correctamente todas las operaciones

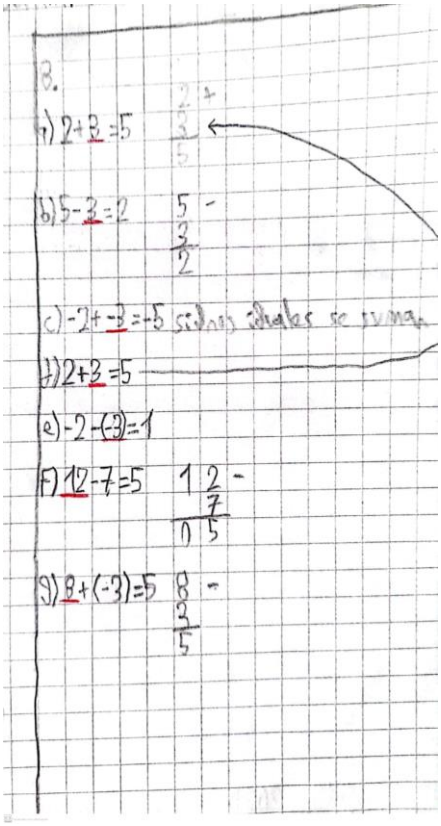


Figura 28 Respuestas correctas al ejercicio 8

Actividad 1 suma y resta

Con igual signo

Esta actividad se usa como introducción a las operaciones de suma con números enteros. Se pretende con ella que el estudiante interactúe con las cantidades relativas utilizando el modelo concreto de neutralización para que él vaya construyendo algoritmos (Freudenthal, 1991) para calcular la suma de números enteros.

Acá, el estudiante interactúa mediante la guía del docente y se van realizando las operaciones propuestas utilizando el material concreto de fichas bicolores que se neutralizan entre sí, realizando la suma de operaciones, en primer lugar, con igual signo y, posteriormente, con diferente signo.

Ejercicio: completar la tabla

Suma	Primer sumando	Segundo sumando	Representación de la suma con las fichas	Cuántas fichas quedan en total	Qué tipo de fichas se suman	Qué tipo de fichas quedan	Resultado
-3+(-5)	-3 ●●●	-5 ●●●●●	●●● ●●●●●	-8 ●●●●●●●●	Rojas	Rojo	-8
8+7	8 ●●●●●●●●	7 ●●●●●●●	●●●●●●●● ●●●●●●●	15 ●●●●●●●●●●●●●●●	Verdes	Verde	15
3+5							
-7+(-2)							
12+7							
-11+(-6)							
+8+9							

Tabla 12 Ejercicio 1 actividad suma

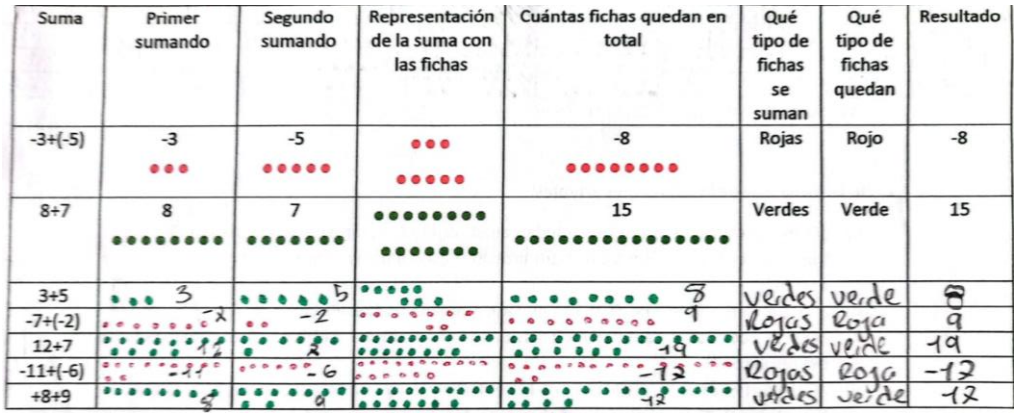
La primera parte es la de completar la tabla utilizando el modelo de fichas para representar la suma de números enteros de igual signo como se ilustra en los ejemplos de las dos filas que están completamente desarrolladas.

Resultados del ejercicio		
Correctas	Incorrectas	En blanco
33	2	0

Tabla 13 Resultados ejercicio 1 actividad suma

Casi la totalidad del grupo logra desarrollar completamente la actividad y de manera correcta, como el estudiante 16, tanto los procedimientos como en el resultado final de las operaciones; solo dos estudiantes no expresan el resultado de manera correcta, pues no manifiestan las cantidades relativas con su respectivo signo.

Respuesta del estudiante que no logró desarrollarlo



Suma	Primer sumando	Segundo sumando	Representación de la suma con las fichas	Cuántas fichas quedan en total	Qué tipo de fichas se suman	Qué tipo de fichas quedan	Resultado
-3+(-5)	-3	-5		-8	Rojas	Rojo	-8
8+7	8	7		15	Verdes	Verde	15
3+5	3	5		8	verdes	verde	8
-7+(-2)	-7	-2		9	Rojas	Roja	9
12+7	12	7		19	verdes	verde	19
-11+(-6)	-11	-6		-12	Rojas	Roja	-12
+8+9	8	9		12	verdes	verde	12

Figura 29 Respuesta actividad color de las fichas (estudiante que no logró realizarlo)

Esta actividad tiene, además de la parte concreta, preguntas orientadoras que inducen al estudiante a construir o definir un proceso para llegar a los resultados de estas operaciones para que en situaciones posteriores no se manifieste la necesidad de utilizar este modelo de fichas y que el estudiante tenga un nivel mayor de abstracción y puedo utilizarlo en situaciones reales y propias de las matemáticas (Freudenthal,1991). A continuación, se muestran los resultados de dichas preguntas:

Literal a

La pregunta tiene que ver con la acción que se debe ejecutar para sumar números del mismo signo teniendo en cuenta el color de las fichas ya previamente establecidas: el signo más para el color verde y negativo para el rojo (pude ser una distribución diferente).

La mayoría de los estudiantes coincide en que hay que sumar la cantidad de fichas que representan ambos sumandos como lo enuncia el estudiante 34.

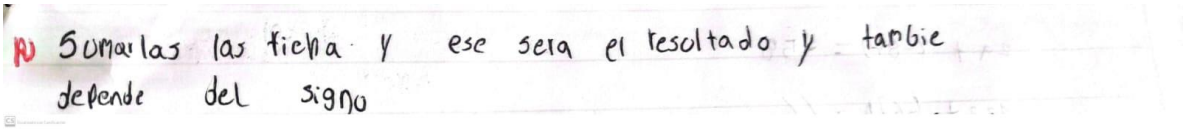


Figura 30 Respuestas de los estudiantes actividad color de las fichas

Algunos, como el estudiante 12, mencionan que se suman y se aventuran a decir que se coloca el signo del mayor aun cuando esto no era lo que se estaba preguntando. Por otra parte, el signo mayor no aplica en este caso, por lo que se podría pensar que el estudiante ya tuvo un primer acercamiento al aprendizaje de las operaciones con números enteros y a los algoritmos que se enseñan de la manera tradicional sin un contexto.

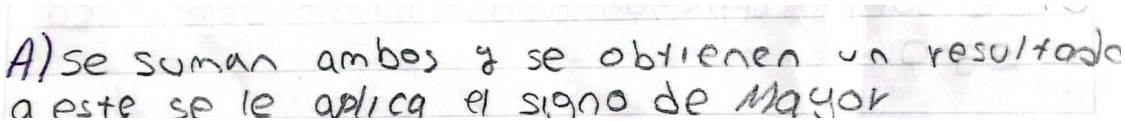

A) se suman ambos y se obtienen un resultado
a este se le aplica el signo de Mayor

Figura 31 Respuestas actividad numeral a

Literal b

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes se percaten que en la suma de números enteros del mismo signo el resultado está vinculado directamente con el signo de los sumandos iniciales y de la cantidad total de fichas que hay de los sumandos (son iguales). Como se esperaba, gran parte de los estudiantes coincide en que el signo (color) de los sumandos era el mismo que el del resultado como lo muestra el estudiante 21.

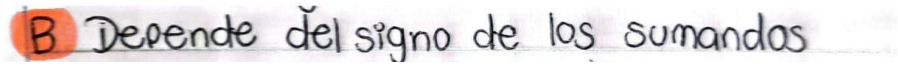

B Depende del signo de los sumandos

Figura 32 Respuesta al literal b

Otros, como el estudiante 26, mencionan que el signo depende del signo de la mayor cantidad de fichas.

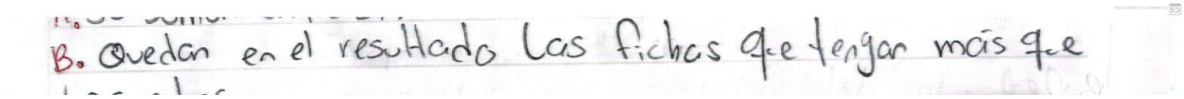

B. Quedan en el resultado Las fichas que tengan más que

Figura 33 Respuesta al literal b

Literal c

El sentido de esta pregunta es hacer notar la dependencia del signo del resultado final (color de fichas) con el signo de los sumandos.

Pasa algo similar a la anterior, aun continua el arraigo en algunos estudiantes manifestando que la dependencia del signo es debido al signo la cantidad que tiene más fichas; por otra parte, la mayoría se sitúa en el contexto y responde correctamente a la pregunta respondiendo que la dependencia del signo final es producto del signo de los sumandos (igual).

El estudiante 21 postula que el signo del resultado depende de los sumandos

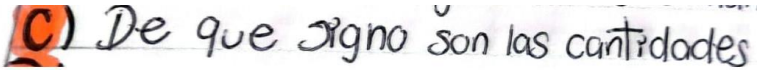


Figura 34 Respuesta al literal c

El estudiante 8 muestra la respuesta no acertada de la dependencia entre los signos mencionados anteriormente.

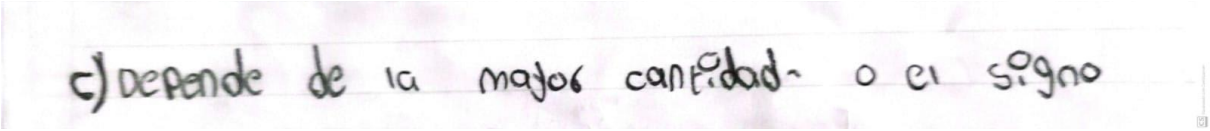


Figura 35 Respuesta al literal c

Literal d

Esta pregunta cuenta con nivel mayor de abstracción, pues pide al estudiante que se "separe" del modelo concreto de las fichas y que defina un procedimiento para sumar cantidades con el mismo signo.

Cuando se pide al estudiante que formule un procedimiento para sumar dos números enteros sin la necesidad de utilizar las fichas, la mayoría coincide en que se debe sumar las cantidades; sin embargo, solo algunos estudiantes terminan construyendo completamente el algoritmo de la suma de enteros con igual signo; la otra parte lo realiza parcialmente, pues se les olvida mencionar, en su definición, la dependencia del signo del resultado (se le coloca al final el signo en común) con el signo de los sumandos. Es importante mencionar que en el proceso de generalización se reduce, significativamente, la cantidad de estudiantes que venían contestando acertadamente.

Por ejemplo, los estudiantes 3,4 y 5 construyeron la definición de suma de igual signo

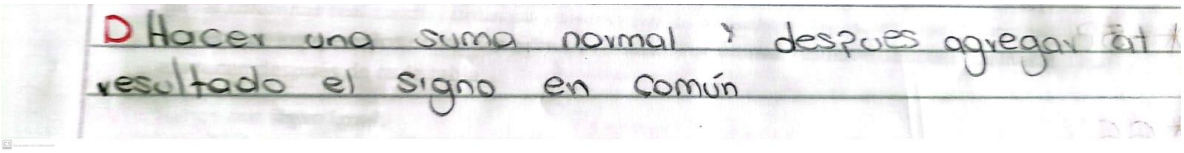


Figura 36 Respuesta literal d estudiante 3

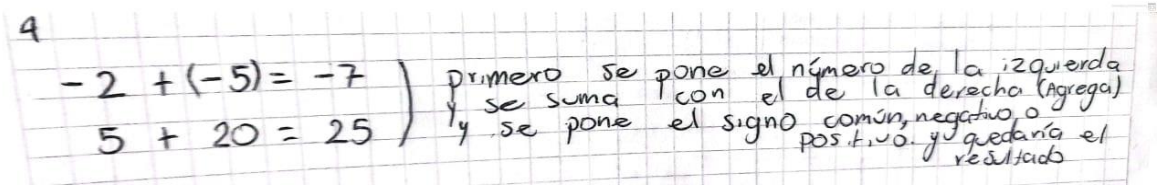


Figura 37 Respuesta literal d estudiante 4

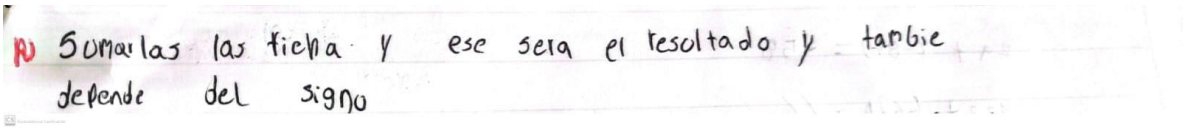


Figura 38 Respuesta literal d estudiante 5

Este estudiante (14) define el proceso de manera parcial, pues no menciona algo sobre el signo del resultado de la operación.

Figura 39 Respuesta literal d estudiante 14

Literal e

En este ejercicio se postulan nuevamente una serie de ejercicios de suma de números enteros con igual signo donde la mayoría de los estudiantes resuelve correctamente todas las operaciones, pese al declive, que se evidenció en el punto anterior, en la asertividad de las respuestas. Hay un algoritmo ya introducido en el estudiante, sin embargo, cuando lo tiene que explicitar se le hace más complicado.

Estudiante 15 realiza todas las operaciones de forma correcta

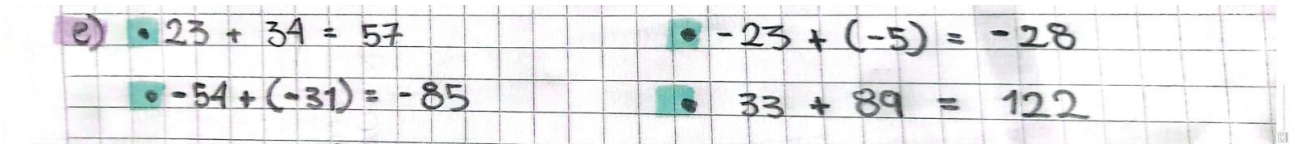


Figura 40 Respuesta literal e estudiante 15

Con signo diferente

Suma	Primer sumando	Segundo sumando	Representación de la suma	Neutralización	Cuántas fichas quedan en total (después de la neutralización)	Qué tipo de fichas hay más antes de la neutralización	Qué tipo de fichas quedan	Resultado
-3+(5)	-3	5			2	Verde	Verde	2
4+(-7)	4	-7			-3	Rojo	Rojo	-3
-8+(3)								
-9+17								
7+(-12)								
12+(-7)								
8+(-12)								

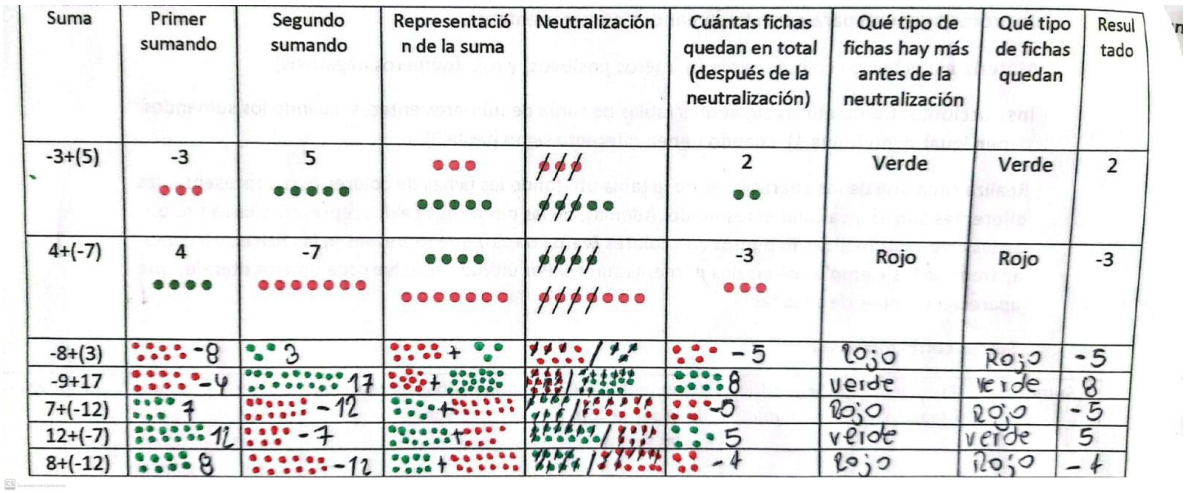
Tabla 14 Respuesta actividad color de las fichas

Resultados del ejercicio		
Correctas	Incorrectas	En blanco
33	2	0

Tabla 15 Resultados ejercicio actividad suma con signo contrario

La segunda parte de la actividad de la manipulación del material concreto era la suma de enteros con diferente signo (color). Y al igual que en la suma de enteros de igual signo, acá la misma cantidad de estudiantes resuelve de manera acertada la actividad con todos sus procedimientos y sus resultados; asimismo, solo dos estudiantes no logran dar con el resultado de manera completa, pues no aparecen los signos. Indicio de que no aceptan el número relativo.

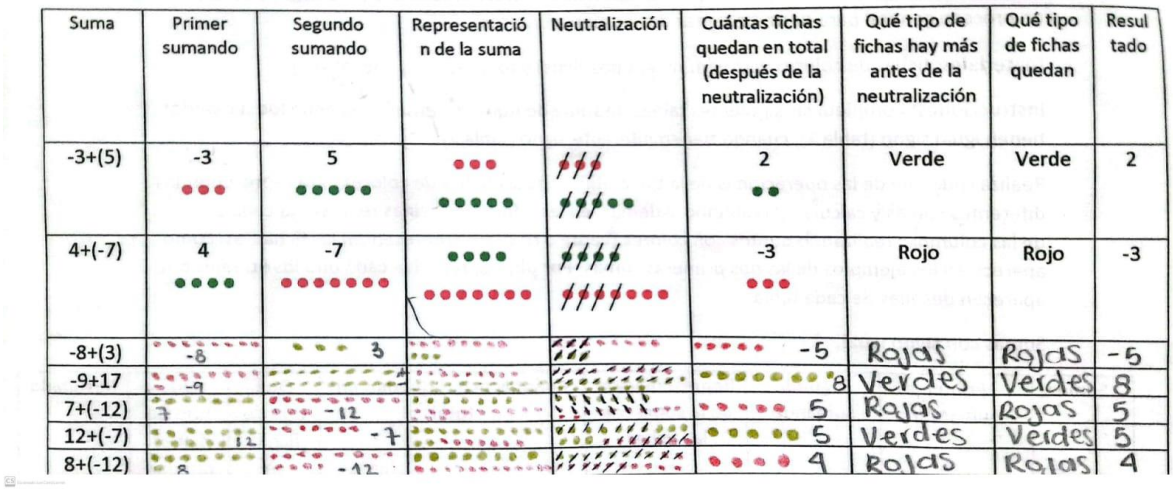
El estudiante 31 logra realizar todos los procesos de manera correcta con el material concreto de fichas.



Suma	Primer sumando	Segundo sumando	Representación de la suma	Neutralización	Cuántas fichas quedan en total (después de la neutralización)	Qué tipo de fichas hay más antes de la neutralización	Qué tipo de fichas quedan	Resultado
-3+(5)	-3	5			2	Verde	Verde	2
4+(-7)	4	-7			-3	Rojo	Rojo	-3
-8+(3)	-8	3			-5	Rojo	Rojo	-5
-9+17	-4	17			8	verde	verde	8
7+(-12)	7	-12			-5	Rojo	Rojo	-5
12+(-7)	12	-7			5	verde	verde	5
8+(-12)	8	-12			-4	Rojo	Rojo	-4

Tabla 16 Respuesta actividad color de las fichas del estudiante 31

Un caso diferente le sucede al estudiante 20, quien no le coloca el signo a las cantidades que se establecieron inicialmente como negativas.



Suma	Primer sumando	Segundo sumando	Representación de la suma	Neutralización	Cuántas fichas quedan en total (después de la neutralización)	Qué tipo de fichas hay más antes de la neutralización	Qué tipo de fichas quedan	Resultado
-3+(5)	-3	5			2	Verde	Verde	2
4+(-7)	4	-7			-3	Rojo	Rojo	-3
-8+(3)	-8	3			-5	Rojas	Rojas	-5
-9+17	-9				8	Verdes	Verdes	8
7+(-12)	7	-12			5	Rojas	Rojas	5
12+(-7)	12	-7			5	Verdes	Verdes	5
8+(-12)	8	-12			4	Rojas	Rojas	4

Tabla 17 Respuesta actividad color de las fichas del estudiante 20

Literal a y b

Estas preguntas se emplean para orientar al estudiante a analizar la dependencia del signo (color) de las fichas de las que hay más cantidad en los sumandos y el signo del resultado final.

Una cantidad significativa (aproximadamente las dos terceras partes) responde correctamente en ambas preguntas; otros no logran percibir la igualdad entre los signos de las cantidades anteriores; algunos estudiantes no contestan a esta pregunta.

El estudiante 11 es uno de los que determina la igualdad entre los signos de la cantidad

mayor y los de los resultados.

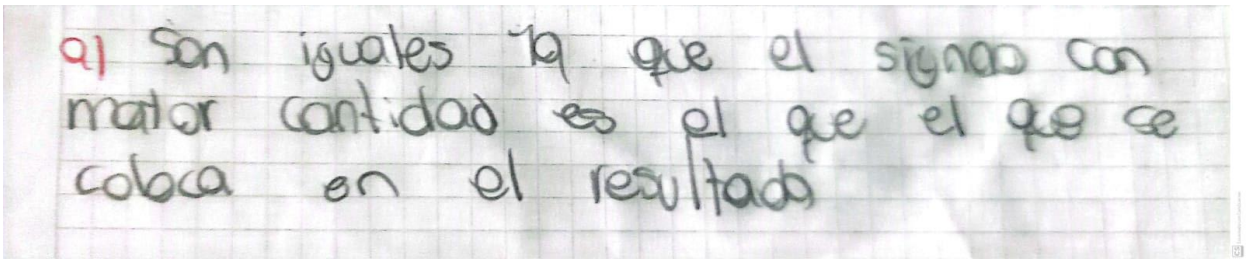

a) Son iguales ya que el signo con mayor cantidad es el que el que se coloca en el resultado

Figura 41 Respuesta literal a del estudiante 11

Por otra parte, se presenta el caso en el que no se puede discernir la relación entre los signos de las cantidades mayores de fichas y los de los resultados (estudiante 20)

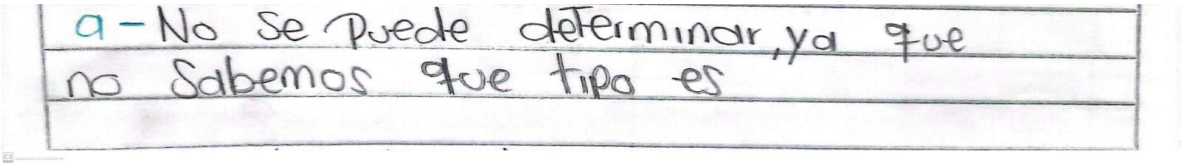

a - No Se Puede determinar, ya que no Sabemos que tipo es

Figura 42 Respuesta literal a del estudiante 20

Para la pregunta del literal b) algunos estudiantes dicen que depende de la neutralización y no dan muchos detalles de ello, dan una respuesta general. Sin embargo, la mitad de ellos logra discernir que el signo del resultado depende del color de las fichas de las que hay más cantidad como es estudiante 11.

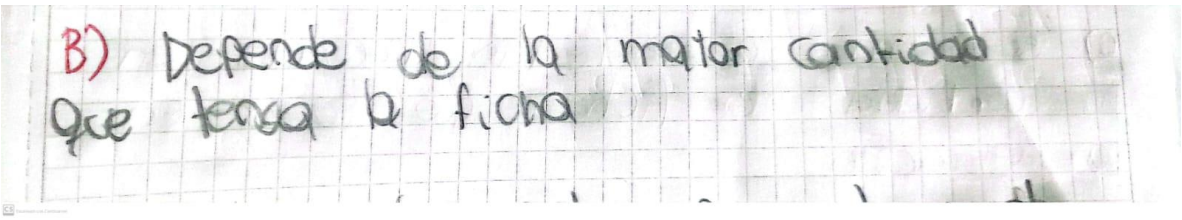

B) Depende de la mayor cantidad que tenga la ficha

Figura 43 Respuesta literal b del estudiante 11

Literal c, d y e

La construcción de la definición de un procedimiento para la suma de números enteros con diferente signo se pretende evidenciar por medio de estas tres cuestiones sin necesidad de utilizar el modelo concreto de las fichas.

En la definición que construyen los estudiantes para sumar los números con igual signo hay un procedimiento común: manifiestan que se deben restar las cantidades de fichas; sin embargo, sólo la tercera parte (como los estudiantes 35,24 y 7) logra construir un procedimiento completo y claro mencionando que, además del resultado de la resta, se le debe agregar el signo de las fichas que tiene más cantidad.

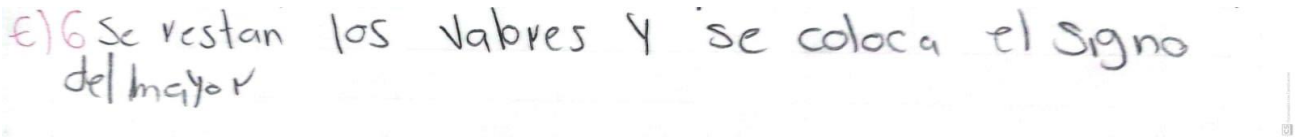

e) 6 Se restan los valores y se coloca el signo del mayor

Figura 44 Respuesta literal e del estudiante 35

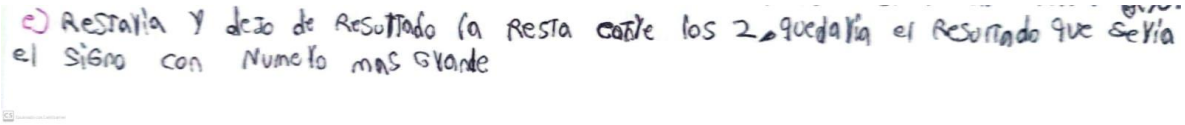

e) Restaria y dejo de Resultado la Resta entre los 2, quedaria el Resultado que seria el signo con Numero mas grande

Figura 45 Respuesta literal e del estudiante 24

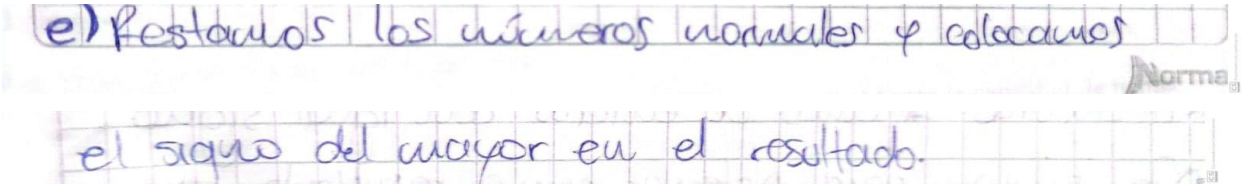

e) Restamos los números normales y colocamos el signo del mayor en el resultado.

Figura 46 Respuesta literal e del estudiante 7

El estudiante 31 no se atreve a expresar una definición de un proceso general, pues lo contextualiza.

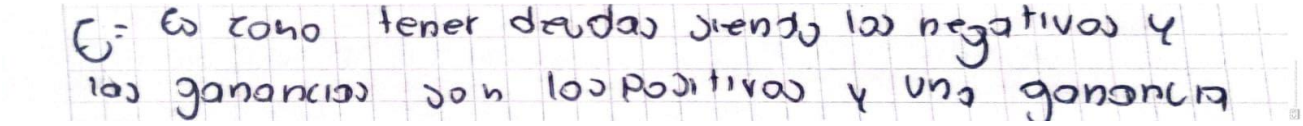

E= Es como tener deudas siendo los negativos y las ganancias son los positivos y una ganancia

Figura 47 Respuesta literal e del estudiante 31

Literal f

En este ejercicio se pretende que el estudiante resuelva sumas con números enteros sin necesidad de utilizar el modelo.

De nuevo, como en los literales a) y b), las dos terceras partes de los estudiantes, aproximadamente, logra contestar bien todas las operaciones, evidenciando nuevamente

que el estudiante tiene un algoritmo interiorizado. Sin embargo, como se evidenció en los literales c), d) y e), se les dificulta expresar sus procesos, explicitar sus ideas.

Uno de los estudiantes que no responde bien es el 27, quien no resuelve las operaciones. Se mantiene la noción de la suma como operación de agregar y no reconoce equivalencia semántica.

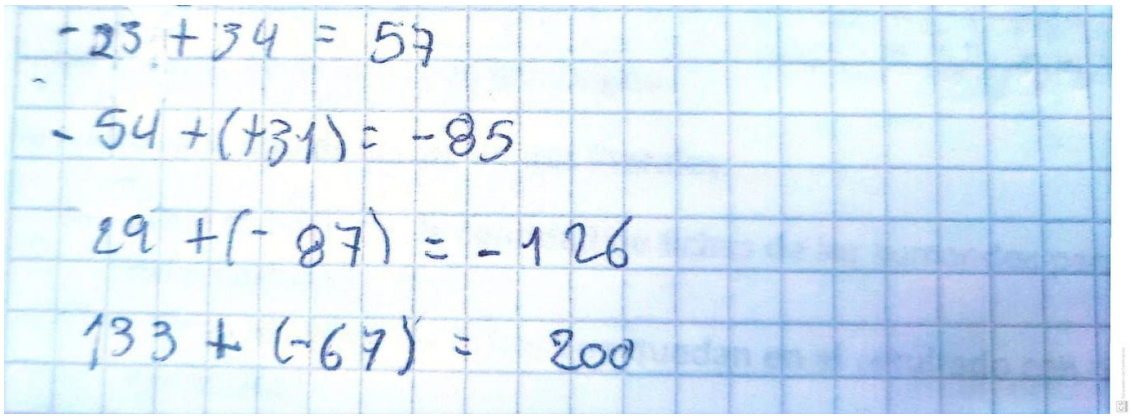


Figura 48 Respuesta literal f estudiante 27

Ejemplo de los estudiantes que respondieron bien las operaciones de suma con signos iguales (23 y 7)

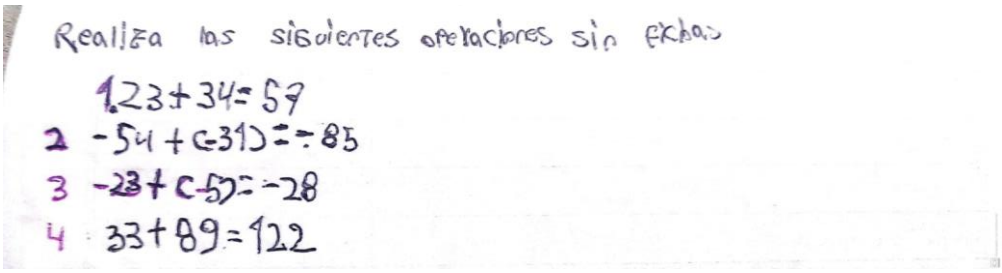


Figura 49 Respuesta literal f estudiantes 23

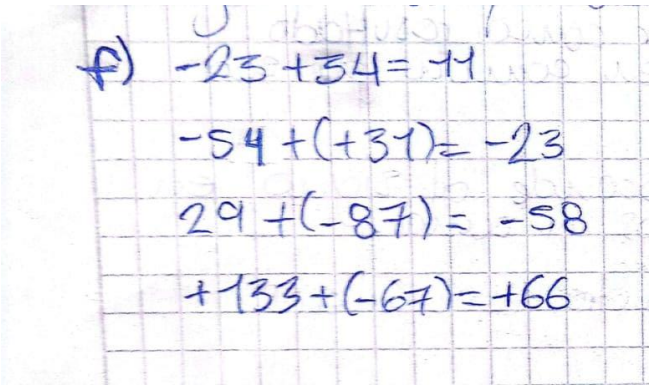


Figura 50 Respuesta literal f estudiante 7

Actividad 2: resta de enteros

Esta actividad se desarrolló con el fin de mostrar la suma y la resta de dos números enteros como una operación equivalente, como una misma operación. Y que los estudiantes descubran las forma sintáctica equivalente que menciona (Bruno, 2001) a-(-b)=a+b y a-b=a+(-b). Además de construir una definición de un procedimiento para la resta de dos enteros de cualquier signo.

Al igual que en la actividad de la suma con el modelo de neutralización, se pretende que en esta actividad interactúe nuevamente con las fichas, esta vez utilizando un procedimiento clave para la resta de números enteros con este modelo y muestra la equivalencia sintáctica utilizando la ambigüedad del cero (Cid, 2016)

Resta-sustracción.	Minuendo	Sustraendo	Minuendo con neutro	Operación de "quitarle" el sustraendo	Operación equivalente con el minuendo	Resultado de la nueva operación
-3-(-7)	-3 ●●●	-7 ●●●●●●●	-3 ●●● ●●●●●●● ●●●●●●●	-3-(-7) ●●● ~~●●●●●●●~~ ●●●●●●●	-3+7 ●●● ●●●●●●●	4 ●●●●
-4-5	-4 ●●●●	5 ●●●●●	-4 ●●●● ●●●●● ●●●●●	-4-5 ●●●● ~~●●●●●~~ ●●●●●	-4+(-5) ●●●● ●●●●●	-9 ●●●●●●●●●
-5-(-4)	-5 ●●●●●	-4 ●●●●	-5 ●●●●● ●●●● ●●●●	-5-(-4) ●●●●● ~~●●●●~~ ●●●●	-5+(4) ●●●●● ●●●●	-1 ●
-2-4						
-4-(1)						
7-(-3)						
5-7						

Tabla 18 Respuestas actividad 2

En la tabla se analizan dos partes importantes: la primea es la columna de la equivalencia sintáctica de la resta y la suma (la sexta columna de izquierda a derecha); y la otra es la del resultado de las nuevas operaciones (última columna).

En este modelo de neutralización sólo dos estudiantes no lograron resolver la actividad de suma de signos iguales y de signos diferentes; sin embargo, en esta actividad (resta), tres no logran obtener el resultado de las operaciones planteadas; pese a esto último, 10 estudiantes seguían colocando la resta como la "nueva" operación o no cambiaron el signo del sustraendo y unos pocos no indican ninguna. Hay arraigo en la resta como sustractivo

y del obstáculo de la ambigüedad del cero (Cid, 2016).

El estudiante 4 es un ejemplo de los que construyen la tabla de forma clara en todos los procedimientos; además que calcula bien el resultado de las operaciones planteadas.

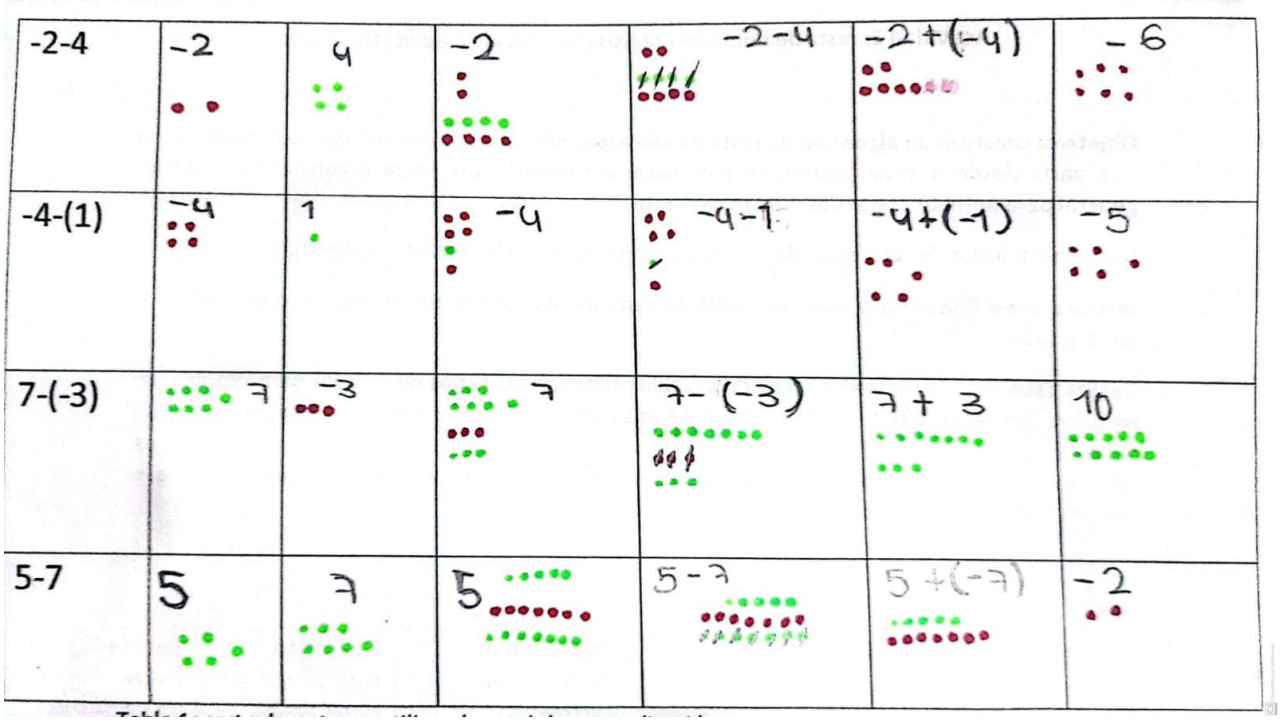


Tabla 19 Respuesta actividad 2 del estudiante 4

Ejemplo del proceso de los estudiantes que construyen bien la tabla en la representación de las fichas en cada columna, pero no las operaciones, no conciben la resta como suma.

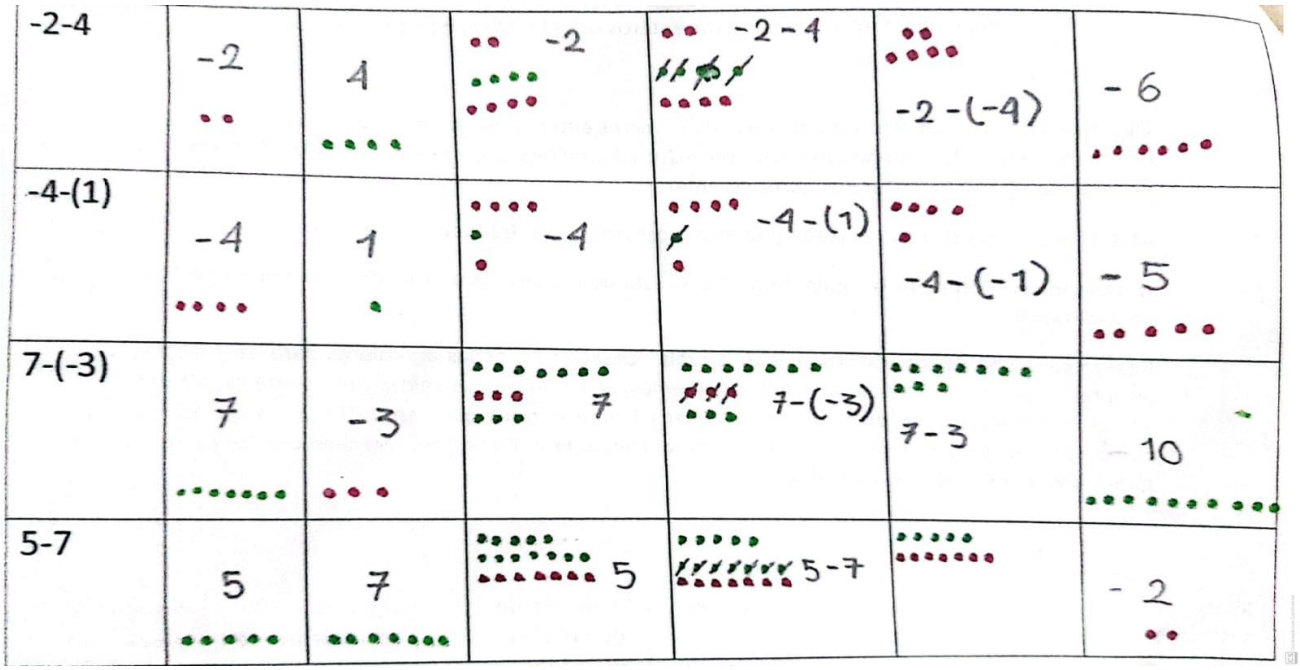
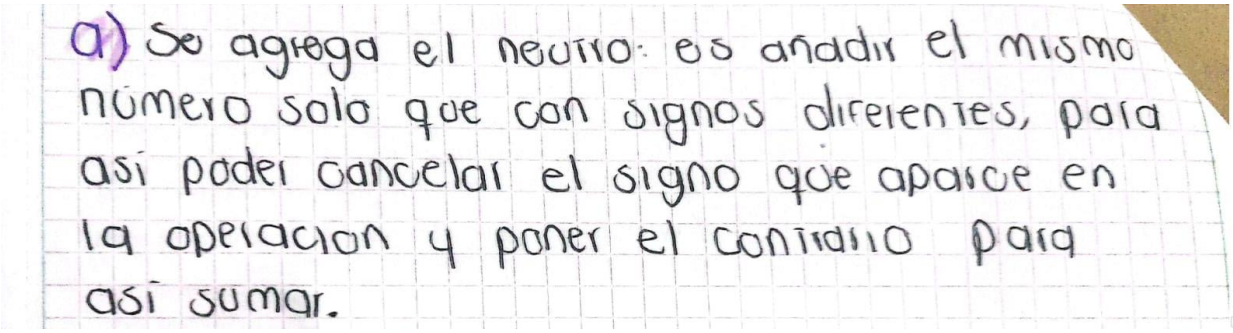


Tabla 20 Respuesta actividad 2 de estudiantes que no conciben la resta como la suma

Literal a

Con esta pregunta se pretende que los estudiantes identifiquen el cero, no como la ausencia de todo, sino como un cero neutro y de la posibilidad de utilizarlo para sustraer la cantidad que me indica la operación inicial en aquellas situaciones donde no se pude realizar directamente.

Aproximadamente 30 estudiantes coinciden en que se debe agregar una cantidad de pares de fichas opuestas entre sí, de cantidad igual a las del sustraendo. Ellos han superado el obstáculo de la ambigüedad del cero, como se puede ver en la respuesta del estudiante 31.



a) Se agrega el neutro: es añadir el mismo número solo que con signos diferentes, para así poder cancelar el signo que aparce en la operacion y poner el contrario para así sumar.

Figura 51 Respuesta literal a del estudiante 31

Literal b

Con esta pregunta se pretende saber si los estudiantes pueden volver a las operaciones de la aritmética donde el minuendo es mayor que el sustraendo.

Casi las dos terceras partes de ellos dicen que no se puede restar números sin la necesidad de agregar la cantidad de las parejas opuestas iguales a la cantidad del sustraendo. Se hace necesario hacer un mayor énfasis ya que se olvidan procedimientos propios de la aritmética donde directamente se puede sustraer 3 de 7, por ejemplo. El estudiante 1 menciona lo siguiente:

B. No, porque este depende del signo del sustraer.

Figura 52 Respuesta literal b del estudiante 1

Por otra parte, el estudiante 31 vuelve a los números naturales, percatándose que hay sustracciones que se pueden hacer directamente.

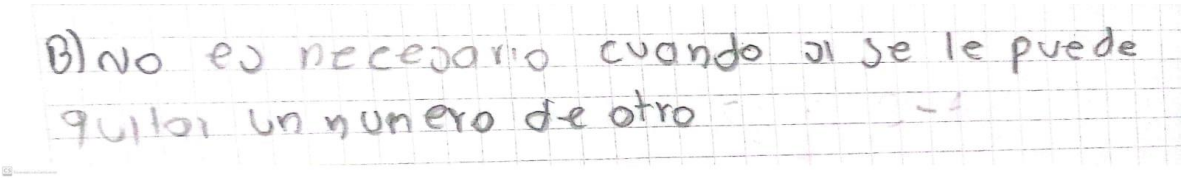

B) No es necesario cuando si se le puede quitar un numero de otro

Figura 53 Respuesta literal b del estudiante 31

Literal c

El objetivo en esta cuestión es que el estudiante identifique que la operación de la resta tiene una equivalencia sintáctica con la suma del minuendo y el opuesto del sustraendo (Bruno, 1997).

La gran mayoría coincide en que la resta se termina convirtiendo en una suma (como el estudiante 34), esto pese a que, como se indicó en el resultado de la primera parte de la tabla, 10 estudiantes no indicaron la operación en la que se convertía la suma. Es decir, hay una convicción por parte del estudiante de la equivalencia mencionada que en algunas

ocasiones no se logra poner de manifiesto.

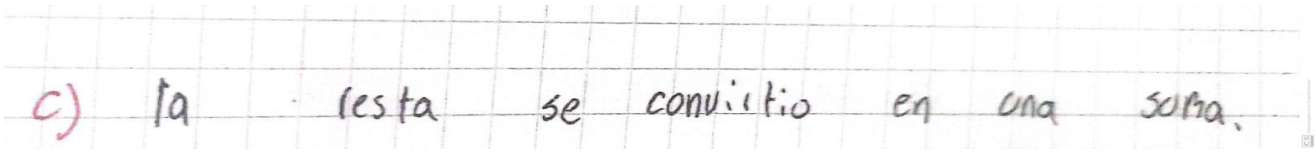

c) la resta se convirtio en una suma.

Figura 54 Respuesta literal c del estudiante 34

Literal d

Como en todas las actividades realizadas con el modelo de neutralización, se pretende que el estudiante proponga un algoritmo claro y funcional de la resta de números enteros sin necesidad de utilizar dicho modelo.

Las dos terceras partes de los estudiantes logra definir un proceso para restar enteros, explicitando que se cambia la resta por suma y el sustraendo por el opuesto como lo hace el estudiante 5.

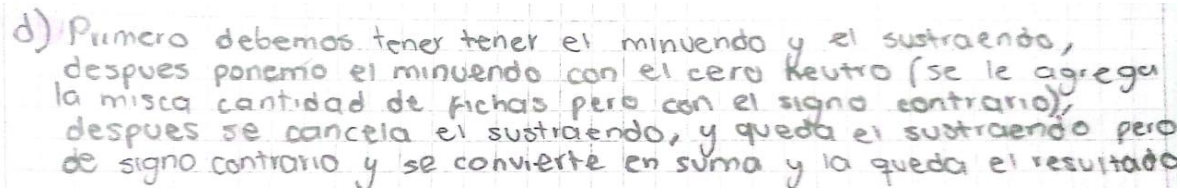

d) Primero debemos tener tener el minuendo y el sustraendo, despues ponemo el minuendo con el cero Neutro (se le agrega la misca cantidad de fichas pero con el signo contrario), despues se cancela el sustraendo, y queda el sustraendo pero de signo contrario y se convierte en suma y la queda el resultado

Figura 55 Respuesta literal d del estudiante 5

La mayoría de los demás estudiantes también construye su definición del proceso, pero lo realiza de manera parcial como el estudiante 6.

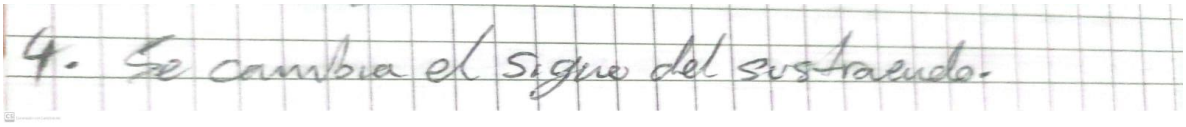

4. Se cambia el signo del sustraendo.

Figura 56 Respuesta literal d del estudiante 6

Literal e

Se proponen 8 ejercicios de resta de números enteros sin utilizar el modelo de fichas, esto con el propósito de evidenciar si los estudiantes interiorizan su propio constructo del algoritmo para la resta de enteros.

20 estudiantes logran calcular el resultado de todos los literales obteniéndose un poco menos de resultados correctos respectos a los de la suma.

Ejemplo de estudiante (4) que efectuó todas operaciones de manera correcta a excepción de una de ellas.

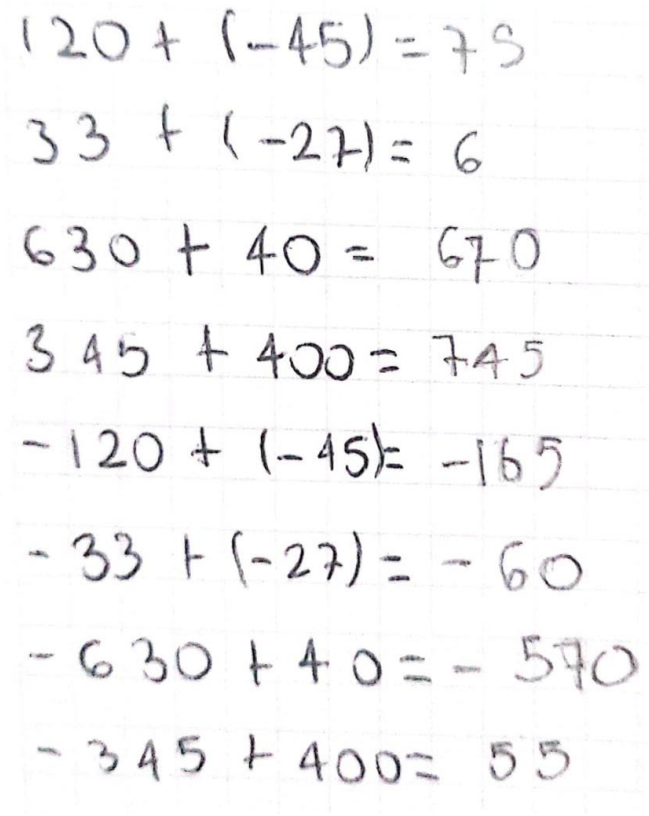


Figura 57 Respuesta literal e del estudiante 4

El estudiante 6 es un claro ejemplo de la ejecución de la operación según la noción que tiene de resta. Lo hace de manera parcial, pues en alguno no logra cambiar tanto resta por suma como el sustraendo por su opuesto.

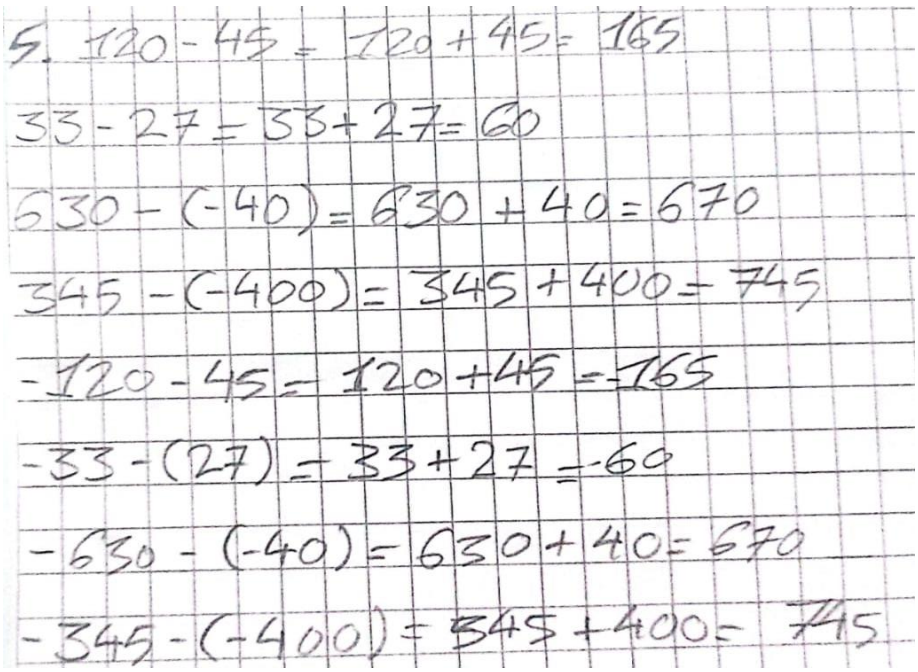


Figura 58 Respuesta literal e del estudiante 6

Actividad 3: representación en la recta numérica de vectores (flechas)

La representación de números en la recta numérica y de las operaciones de suma y resta, permiten que el estudiante tenga una mejor comprensión de los números enteros. Con ella se puede visualizar y ofrecer la otra perspectiva de la operación de la resta y que muchas veces pasa a un segundo plano: operación vista como la diferencia entre dos cantidades. Por lo general, se tiene la idea de que la resta solo es quitar, sustraer.

1. Representa con flechas la suma a + b de los siguientes vectores (flecha) mostrando la flecha resultante, además especifica la operación y su resultado.

a)

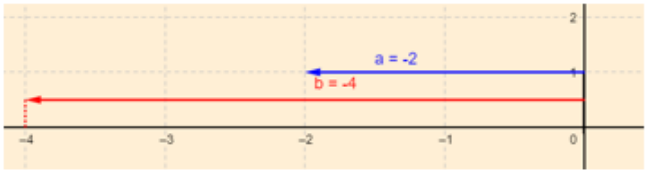


Figura 59 Ejercicio 1 actividad 3

Con el primer ejercicio se quiere que el estudiante comprenda la representación de la suma por medio de este modelo agregando un vector a otro, colocando el vector que se va a

sumar a continuación del otro, la cabeza de un vector estará unida a la cola del siguiente utilizando libremente la movilidad de las flechas. La suma a+b es la flecha que va desde la cola de a hasta la cabeza de b. Así, la suma de dos números enteros quedaría representada de la siguiente forma.

.

Se pudo percibir, que la mayoría de los estudiantes se les hace menos complicado representar las operaciones y los resultados de la suma de dos números enteros con este modelo. Es un resultado muy similar al de la suma con el modelo de fichas, casi la totalidad de los estudiantes llegan a resultados correctos de todas las operaciones. Un ejemplo de ello son las respuestas de los estudiantes 14,18 y 21.

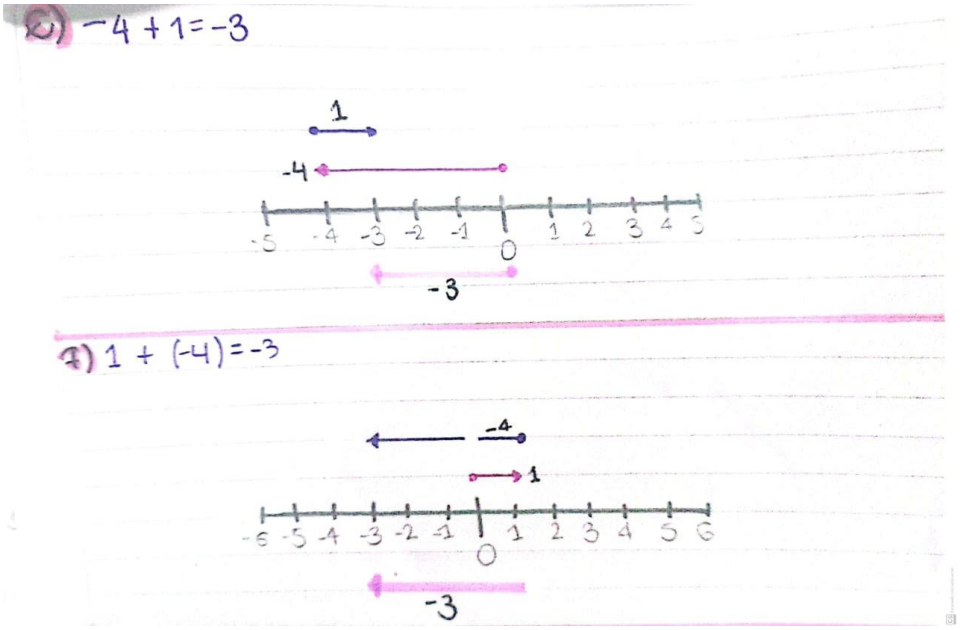


Figura 60 Respuestas actividad 3 del estudiante 21

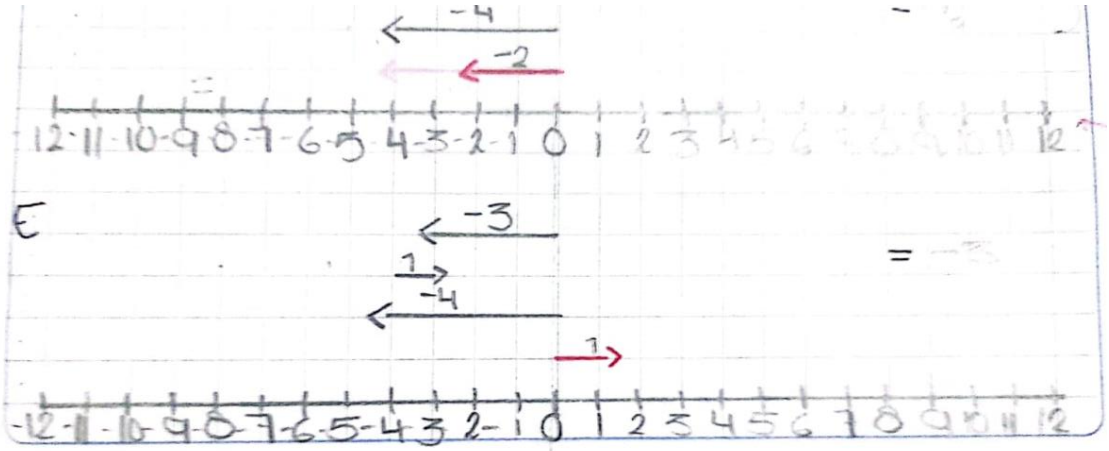


Figura 61 Respuestas actividad 3 del estudiante 18

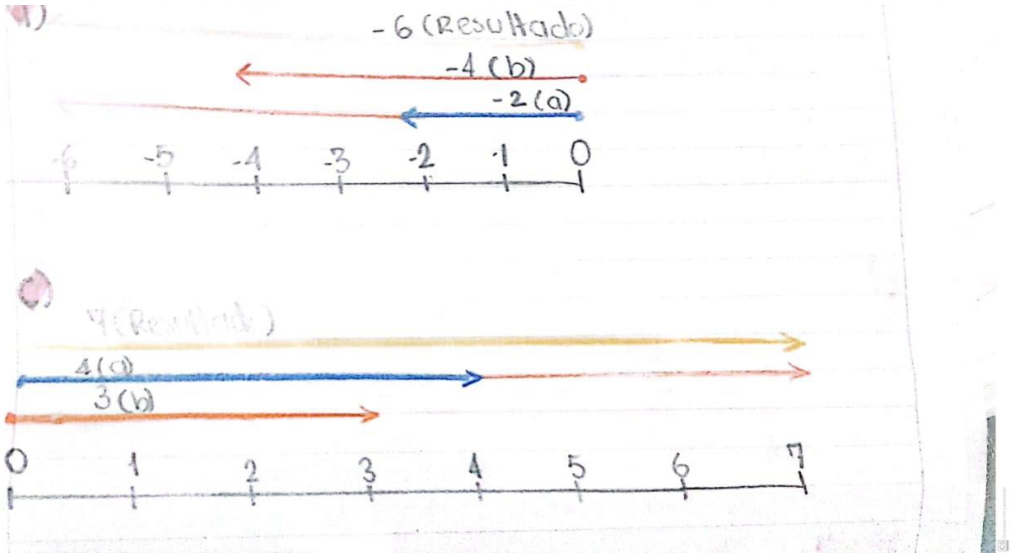


Figura 62 Respuestas actividad 3 del estudiante 14

2. Realiza la representación y el cálculo de las restas a-b de los números que aparecen en cada uno de las imágenes y que se encuentran representados por medio de flechas.

a)

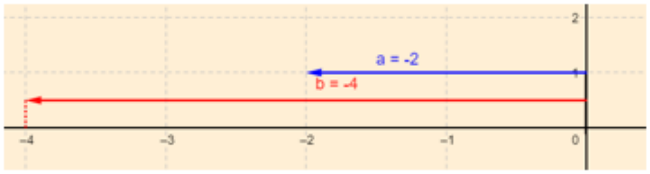


Figura 63 Ejercicio 2 actividad 3

Con la resta, además que comprenda la representación de la resta por medio de este modelo en la recta numérica se quiere mostrar la identidad sintáctica entre suma y resta. Además de mostrar la resta como una diferencia y no tanto como su equivalencia semántica de quitar.

A diferencia del modelo de fichas la resta con este modelo se hace más comprensible y genera mejores resultados teniendo un par de estudiantes que no referencian el signo de las flechas o de los resultados de las operaciones. Los estudiantes vuelven a percibir la operación de la resta como una diferencia al explicitar en algunos ejercicios que el resultado de a-b es el vector que se debe agregar al vector b para llegar a a.

Algunos estudiantes olvidan el concepto de diferencia y confunden la resta “lo que le falta agregar a b para llegar a a” con la suma “agregar el vector a al vector b”. Un ejemplo de la ejecución de la resta como la diferencia es la del estudiante 21.

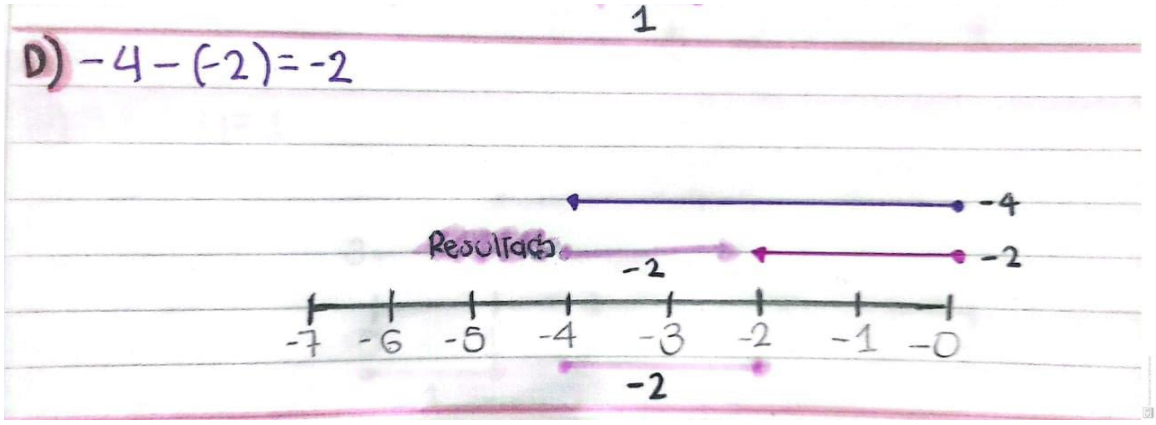


Figura 64 Respuestas ejercicio 2 actividad 3 del estudiante 21

3. Representa las siguientes sumas con las flechas graficando en la recta numérica los dos sumandos y el resultado de la operación. Además, coloca al frente de cada una, su resultado.

a) 2+3=
b) 3+(-2) =
c) 2+(-3) =
d) -2+(-3) =
e) -3+2=
f) -2+3=

Figura 65 Ejercicio 3 actividad 3

El punto 3 pretende reconocer un proceso inverso donde se da la parte abstracta la operación y se desea que el estudiante pueda representarlo en la recta numérica, Bruno (1997), hacer la transición de una dimensión a otra.

Los estudiantes no presentan dificultad en la representación de los números o en la transición de la operación simbólica a la operación concreta en la recta numérica.

4. Representa las siguientes restas con las flechas graficando en la recta numérica el minuendo el sustraendo y el resultado de la operación. Además, coloca al frente de cada una, su resultado.

a) 2-(-3) =
b) 3-2=
c) 2-3=
d) -2-3=
e) -3-(-2) =
f) -2-(-3) =

Figura 66 Ejercicio 4 actividad 3

Este ejercicio tiene el objetivo de que el estudiante haga la transición de la dimensión abstracta a la dimensión de recta numérica siguiendo con el concepto la resta como la diferencia entre cantidades y la relación de esta con la suma.

Al igual que en la representación anterior de la resta, los mismos estudiantes siguen aplicando la suma de vector a con el vector b como la diferencia entre ellos. Sin embargo, la mayoría ejecuta bien la representación de los números y de diferencia entre los dos.

Actividad 4: problemas aditivos.

En esta actividad se pretende trabajar la dimensión contextual y su relación con la dimensión abstracta y de recta resolviendo algunos problemas aditivos de varias estructuras (variación, combinación y comparación) en varios contextos (temperatura, temporal, ascensor, deudas y ganancias) y con incógnita 3 en su mayoría (Bruno, 2001). El estudiante al resolver la actividad sabrá descifrar que tipo de estructura es, cuáles son las componentes de cada estructura y la posición de la incógnita; además sabrá expresar operaciones y representar en la recta numérica las situaciones que se le planteen.

1. En las siguientes situaciones explicita la estructura (combinación, comparación o variación) completando la tabla. Marca con una x la estructura correspondiente a lasituación de cada literal.

a) Pedro comienza una partida con 6 pesos y termina debiendo 5 pesos. Es decir, perdió 11 pesos.

b) Un pez globo está a 15 metros bajo el nivel del mar, otro se encuentra a 5 metros por debajo de él. Por lo que el otro pez se encuentra a 20 metros por debajo del nivel del mar.

c) Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está a 11 kilómetros a la derecha del coche. Por lo que la moto está a 5 kilómetros a la derechadel cero.

d) Elvira estaba buceando a 3 metros bajo el nivel del mar y descendió 4 metros. Al final quedó en 7 metros por debajo del nivel del mar.

e) Un edificio tiene 15 plantas más 5 plantas del sótano. El ascensor del edificio antesde moverse estaba en la planta 8 y después de moverse, en la planta 3 del sótano.Por lo que bajó 11 plantas.

f) Sandra tiene 545 puntos para reclamar un premio. Si para reclamarlo necesita 600,entonces lo que le falta a ella para poder obtenerlo son 55.

g) La temperatura en Londres es de 5 grados por encima de cero a las 8:00 a.m. y a las 10:00 p.m. de 8 grados bajo cero. Para que la temperatura de la mañana sea igual a la de la tarde, debe bajar 13 grados.

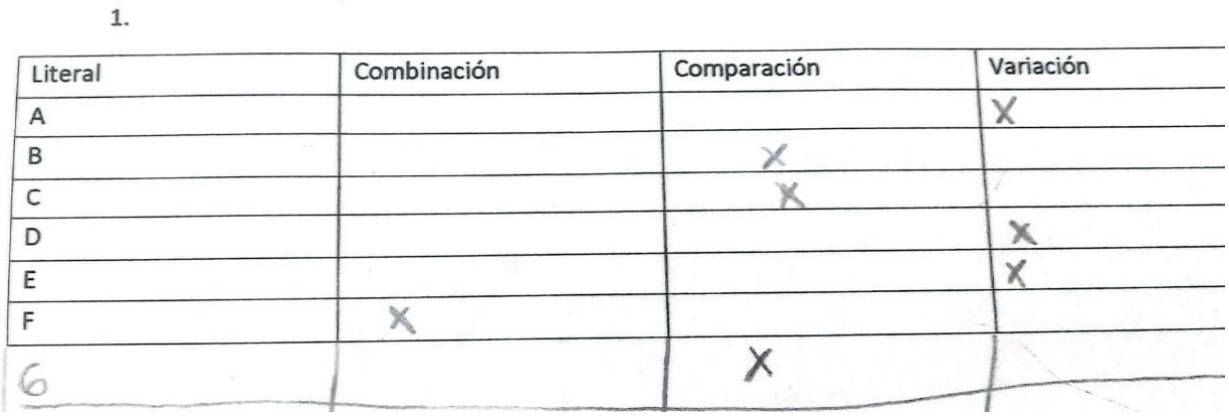
h) María tiene 450 pesos en su casa y debe en el banco 35, entonces su situación económica es 415.

Figura 67 Ejercicio 1 actividad 4

Literal	Combinación	Comparación	Variación
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

Tabla 21 Actividad 4

El primer punto se plantean una serie de situaciones dónde se mencionan todos los datos y no hay un dato que hallar. El estudiante deberá indicar el tipo de estructura al cual pertenece cada situación apoyándose en la tabla.

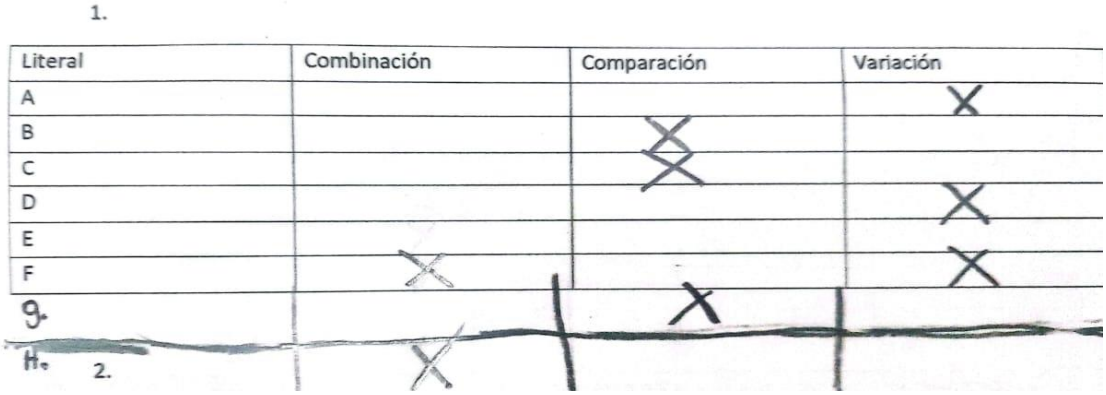


1.

Literal	Combinación	Comparación	Variación
A			X
B		X	
C		X	
D			X
E			X
F	X		
6		X	

Figura 68 Respuesta ejercicio 1 actividad 4

Los estudiantes comprenden y en su mayoría clasifica bien las estructuras correspondientes a cada situación. Se percibe un error muy frecuente y es el de considerar la situación h) como una comparación ya que al ser una variación en un contexto de temperatura se menciona el estado (la temperatura en determinado instante) por encima o por debajo de cero. Lo que confunde un poco al estudiante. Cabe resaltar que se indagó a los estudiantes sobre la enseñanza de problemas aditivos aritméticos en grados inferiores y la respuesta de ellos fue negativa.



1.

Literal	Combinación	Comparación	Variación
A			X
B		X	
C		X	
D			X
E			
F	X		X
9.		X	
H. 2.	X		

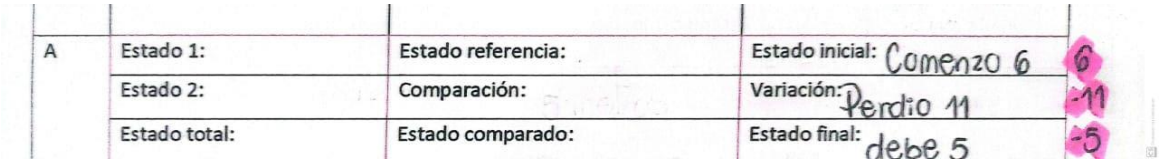
Figura 69 Respuesta ejercicio 1 actividad 4 del estudiante 34

2. En las estructuras anteriores señala cada componente: para las combinaciones describe quiénes son los estados parciales y el estado total; para las variaciones quién es el estado inicial, el estado final y la variación; y, para las comparaciones, quién es el estado de referencia quién es el estado comparado y cuál es la comparación. Completa la tabla descifrando la estructura y colocando al frente la descripción de cada elemento de ella según cada situación.

Figura 70 Ejercicio 2 actividad 4

En este ejercico se plantean las mismas situaciones que en punto anterior,sin embargo acá se deben plantear una por una las componentes de cada estructura. En el literal a), un contexto deudas y ganancias, se identifica tanto la estructura como cada uno de sus componentes y su respectivo signo (como lo hace el estuiante 21)

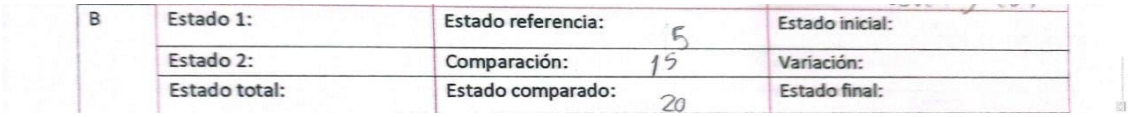
21



A	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial: Comenzo 6	6
	Estado 2:	Comparación:	Variación: Perdio 11	-11
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final: debe 5	-5

Figura 71 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 21

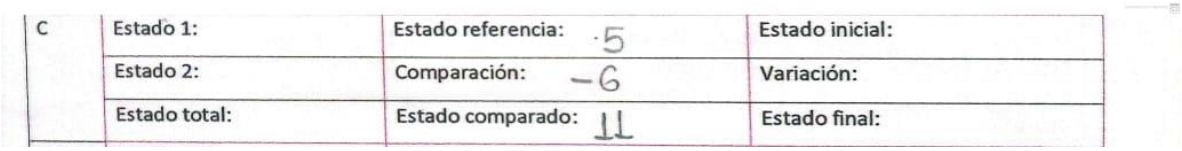
En la siuación b, que es de comparación, es confusa para algunos estudiantes, pues si bien la identifican como tal, no descifran cuál es el estado comparado y con respecto a qué estado se está comparando. El estudiante 27 es de las pocos que confunde pero ademas no especifica los signos.



B	Estado 1:	Estado referencia: 5	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación: 15	Variación:
	Estado total:	Estado comparado: 20	Estado final:

Figura 72 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 27

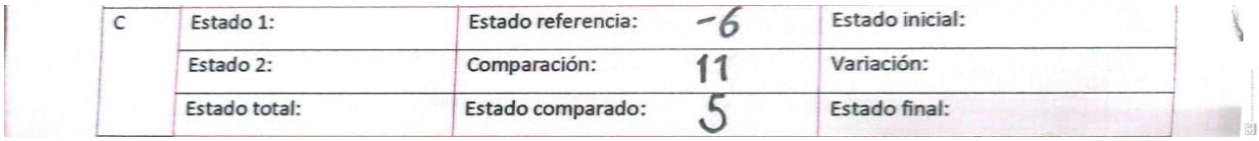
La situación donde más se presentó confusión fue en la situación c, pues si bien la reconocen como una comparación, al igual que la situación anterior, se les difculta reconocer el estado de referencia, la comparación y el estado comparado como lo hace el estudiante 32



C	Estado 1:	Estado referencia: 5	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación: −6	Variación:
	Estado total:	Estado comparado: 11	Estado final:

Figura 73 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 32

Estudiante 34 que representa bien las componentes de la estructura de comparación.



C	Estado 1:	Estado referencia: -6	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación: 11	Variación:
	Estado total:	Estado comparado: 5	Estado final:

Figura 74 Respuesta ejercicio 2 actividad 4 del estudiante 34

En los estados siguientes, en su mayoria variaciones, el estudiante acierta a cada una de las componentes en diferentes contextos. Parece ser que las variaciones son la estructura más simple de comprender.

Punto	Combinación	Comparación	Variación
A	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
B	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
C	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
D	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
E	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
F	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
G	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
H	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:

Tabla 22 Combinación, comparación y variación

3. Resuelve cada una de las siguientes situaciones siguiendo los siguientes pasos utilizando la recta y completando las tablas para cada uno de los puntos:

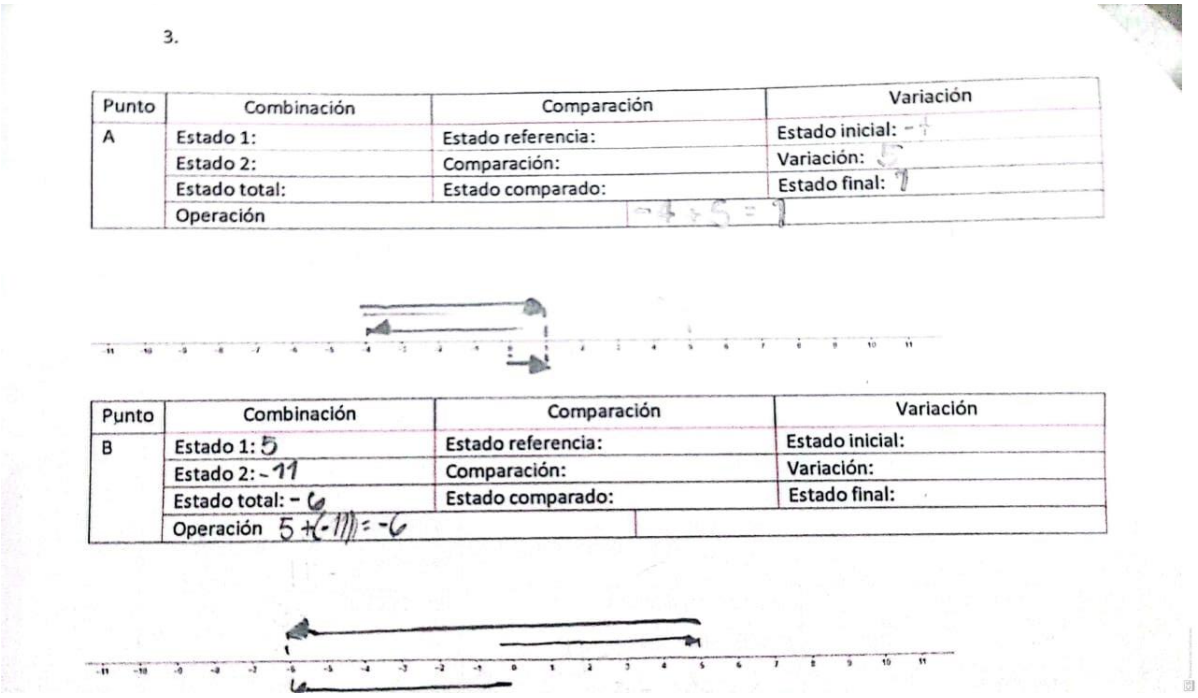
- Identifica la estructura
- Identifica cada uno de los componentes de la estructura y los valores
- Representa en la recta numérica la suma especificando los valores con cada flecha
- Representa la situación con una operación.

a) En una partida Carlos empieza perdiendo 4 y gana 5 después. ¿Cuánto tiene en total?
b) Carlos tiene 5 pesos en su casa y debe 11 ¿Cuál es su situación actual?
c) Una gaviota está a 5 metros por encima del nivel del mar y un pez está 17 metros por debajo de ella. ¿A qué altura se encuentra el pez?
d) Esneider tiene 6 dólares y Cristián tiene 12 dólares menos que Esneider. ¿cuántos dólares tiene Cristian?
e) La temperatura en Londres en la mañana era de 5 grados bajo cero, en la tarde subió 6 grados. ¿cuál fue la temperatura en la tarde?
f) Andrés debía 17 pesos luego apostó y perdió 5 ¿Cuál fue su situación final?

Figura 75 Ejercicio 3 actividad 4

Este ejercicio son situaciones de incógnita 3 donde se pretende relacionar las tres dimensiones: contextuales, recta y de abstracción. Se generan situaciones para representarlas por medio de una operación y se representan por medio de la recta numérica.

La mayoría de los estudiantes obtuvo una respuesta acertada como lo ilustra el ejemplo del estudiante 31.



3.

Punto	Combinación	Comparación	Variación
A	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial: -4
	Estado 2:	Comparación:	Variación: 5
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final: 1
	Operación	-4+5=1	

Punto	Combinación	Comparación	Variación
B	Estado 1: 5	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2: -11	Comparación:	Variación:
	Estado total: -6	Estado comparado:	Estado final:
	Operación 5+(-11)=-6		

Figura 76 Respuesta ejercicio 3 actividad 4 del estudiante 31

Las situaciones tipo 2 y 3 fueron las que generaron mucha confusión solo unos pocos lograron realizar el procedimiento completo, pero con algunos errores.

Conclusiones

La enseñanza basada en enunciados de algoritmos tradicionales con estudiantes del grado octavo del colegio Vid ha producido poco desarrollo del pensamiento numérico en la estructura de los números enteros. Además de ello, también está el fuerte arraigo a la enseñanza de procesos aritméticos en el conjunto de los números naturales: se suele enseñar la adición como “poner juntos o reunir “y la sustracción como “quitar”, a pesar de que existen muchas otras situaciones que implican operaciones de sumar y de restar (MEN,1988). Esto produce que:

- Olviden fácilmente los algoritmos de resolución de las operaciones de suma y resta dado la descontextualización y la falta de aprendizaje significativo
- No representen en situaciones contextuales los números enteros, en particular cantidades relativas (representación de una cantidad respecto a un punto de referencia) en diferentes contextos como los temporales, niveles del mar, temperaturas, etc (Gallardo, 2009).
- Se les dificulte utilizar, por ejemplo, la recta numérica para representar cantidades relativas y operaciones en diferentes contextos y que posibilitan formas semánticas equivalentes de la resta como diferencia y sustracción, permitiendo al estudiante tener una posibilidad mayor de interpretación de las situaciones aditivas.
- La concepción del número como sustractivo donde la noción de número se subordina a la magnitud. En la resta de dos cantidades a – b, siempre b será menor que a, donde a, b son números naturales, es decir, el signo menos sólo tiene un carácter binario a nivel de la operación de sustracción (Gallardo, 2009)

De la enseñanza de las matemáticas desde contextos reales y concretos que van a ser organizados de acuerdo con unos patrones matemáticos, a diferencia de la enseñanza de herramientas matemáticas como productos ya terminados que se aplican, puede concluirse que:

- Las actividades realizadas con las fichas de colores funcionan muy bien por analogía, ayudan a representa las operaciones de suma y resta de números enteros obteniendo resultados muy acertados frente a estas operaciones. Presentando

mayor dificultad en la resta que en la suma. Ésta es producto del obstáculo epistemológico de la ambigüedad del cero presente también en los estudiantes (Cid, 2016).

- La actividad con el modelo de desplazamiento (flechas) además de funcionar por analogía ayuda al estudiante a entender otras equivalencias semánticas y sintácticas de la suma y resta de números negativos como: $(c = a - b \leftrightarrow a = b + c)$
- Si bien se mantiene el algoritmo interiorizado, en el modelo de las fichas se le hace difícil al estudiante explicitar las ideas de este algoritmo, por lo que la falta de actividades comunicativas donde tenga la oportunidad de debatir sus ideas pudo ser factor determinante en la apropiación del algoritmo para hacerlo explícito.
- La transición de las tres dimensiones (contextual, recta y abstracta) permite que el estudiante tenga una mayor diversidad en herramientas para resolver situaciones de la vida cotidiana o desde la matemática permitiendo cualquiera de los sentidos (Bruno, 2001)

Recomendaciones

Los modelos y las situaciones deben servir como herramientas para introducir los números enteros y para la construcción de algoritmos propios de estas operaciones y comprender equivalencias sintácticas y semánticas entre las operaciones de suma-resta. Los modelos no deben convertirse en la justificación de los números enteros.

El uso desproporcionado de los modelos concretos sin actividades que guíen el pensamiento del estudiante puede impedir la construcción de conceptos cada vez más abstractos, propios también de las matemáticas.

Es necesario que en las estructuras se maneje una amplia gama de situaciones y no se limite a algunas, por lo que se hace necesario contar con el suficiente tiempo para manejar las diferentes actividades que permitan hacer diferentes transiciones entre las dimensiones que menciona Bruno.

La discusión debe ser fundamental en el aula de clase para debatir ideas y organizarlas.

Esto es porque se evidenció en algunos aspectos que el estudiante tiene algunas nociones interiorizadas, sin embargo, cuando le toca exponerlas se confunde.

Anexos

Prueba diagnóstica

Nombre: _____

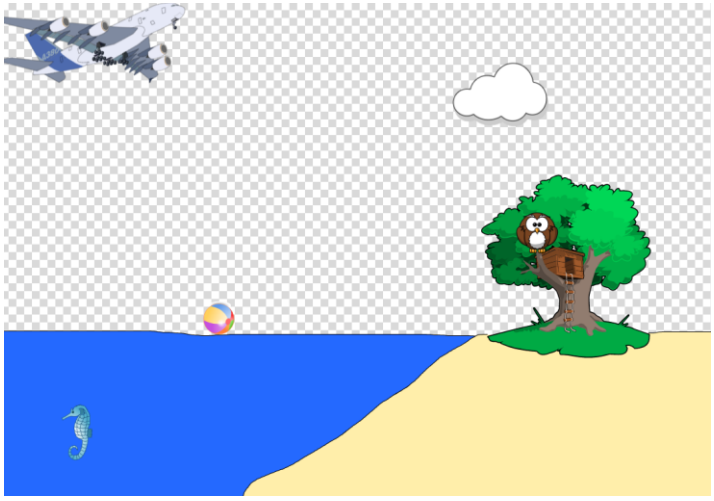
Grado: ___

Docente: Carlos Disarly Valencia Álvarez

Objetivo: Identificar cuáles son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante, cómo los utiliza y cómo los monitorea en la aplicación de algoritmos matemáticas para la suma y resta de números enteros.

Instrucción: Resuelve cada una de las siguientes situaciones de forma clara y concisa dejando como evidencia cada uno de los procedimientos que utilizó para llegar a la respuesta.

1. Si el avión está ubicado a 600 metros respecto al nivel del mar, qué valor le asignarías al búho; a la parte más alta del árbol; a la superficie de la pelota que está haciendo contacto con el mar; y, al caballito de mar.



2. Ordena de mayor a menor las siguientes temperaturas (°C) registradas en una reconocida ciudad de Europa durante el año.

-32° 23° -38° -3° -5° 27° -15°

3. El matemático Tales de Mileto nació en el 624 a.C. y vivió 78 años. ¿En qué año murió? Representa la situación en la recta numérica.

4. Un pez globo que está a 9 metros bajo el nivel del mar, primero desciende 3 metros y luego baja 5 metros, ¿a qué nivel del mar se encuentra el pez ahora?

5. Una empresa en cada año realiza dos estados de ganancias y pérdidas (julio y diciembre). La tabla muestra las ganancias o las pérdidas en miles de millones. ¿Cuál es la diferencia entre los resultados entre julio y diciembre en cada año? ¿Cuál es el balance total?

Año	Julio	Diciembre
2017	-11	25
2018	9	-18
2019	0	6
2020	-1	-4

6. En una ciudad, un termómetro marca a las 9 de la mañana 13°C, a las 2 de la tarde ha subido 5°, a las 6 de la tarde baja 12° y a las 11 de la noche baja 9° más ¿Cuál es la temperatura que marcaba el termómetro a las 2 de la tarde, a las 6 y, finalmente, a las 11 de la noche??
7. Realiza las siguientes operaciones, apóyate en la recta numérica. Realiza el gráfico.
   a) (12) + (-4) =
   b) (-9) - (-3) =
   c) (-11) + (-8) =
   d) (-17) - (+6) =
   e) (-15) + (-3) =

8. Encuentra el valor faltante
   a) $2 + \square = 5$
   b) $5 - \square = 2$
   c) $-2 + \square = -5$
   d) $2 + \square = 5$
   e) $-2 - \square = 1$
   f) $\square - 7 = 5$
   g) $\square + (-3) = 5$

Actividad 1: Suma de números enteros con el modelo de neutralización

Objetivo: construir un algoritmo de suma de números enteros mediante un modelo constructivista que parta desde la experimentación con material concreto para llegar a construir un proceso general para permitir sumar dos números enteros.

Materiales: fichas de colores verde (números positivos) y rojo (números negativos).

Instrucciones: Completa las siguientes tablas de suma de números enteros; cuando los sumandos tienen igual signo (tabla 1); cuando tienen diferente signo (tabla 2).

Realiza cada una de las operaciones de la tabla utilizando las fichas de colores para representar las diferentes sumas y calcular el resultado. Además, en las diferentes celdas representa cada título de las columnas realizando puntos con colores (verde o rojo) que representen las fichas, así como aparece en los ejemplos de las dos primeras sumas. Por último, resuelve cada uno los literales que aparecen después de cada tabla.

Sumas con signo igual.

Suma	Primer sumando	Segundo sumando	Representación de la suma con las fichas	Cuántas fichas quedan en total	Qué tipo de fichas se suman	Qué tipo de fichas quedan	Resultado
-3+(-5)	-3 •••	-5 •••••	••• •••••	-8 ••••••••	Rojas	Rojo	-8
8+7	8 ••••••••	7 •••••••	•••••••• •••••••	15 •••••••••••••••	Verdes	Verde	15
3+5							
-7+(-2)							
12+7							
-11+(-6)							
+8+9							

Tabla 1. Suma de enteros con igual signo.

Resuelve cada uno de los siguientes literales:

a) ¿Qué se hace con la cantidad de fichas de los sumandos para obtener la cantidad de fichas del resultado?

b) ¿Cómo es el tipo de fichas que quedan en el resultado con respecto al tipo de fichas de lossumandos?

c) ¿De qué depende el tipo de fichas que me quedan en el resultado?

d) Expresa una forma genera para sumar números del mismo signo

e) Realiza las siguientes operaciones sin necesidad de utilizar las fichas

- 23+34
- -54+(-31)
- -23+(-5)
- +33+89

Suma	Primer sumando	Segundo sumando	Representación de la suma	Neutralización	Cuántas fichas quedan en total (después de la neutralización)	Qué tipo de fichas hay más antes de la neutralización	Qué tipo de fichas quedan	Resultado
-3+(5)	-3	5			2	Verde	Verde	2
4+(-7)	4	-7			-3	Rojo	Rojo	-3
-8+(3)								
-9+17								
7+(-12)								
12+(-7)								
8+(-12)								

Tabla 2. Suma de enteros con diferente signo

Resuelve cada uno de los siguientes literales:

a) ¿Cómo es el tipo de fichas que quedan en el resultado con respecto al tipo de fichas quetenía más cantidad antes de la neutralización? ¿son iguales, diferentes o no se pueden determinar?

b) ¿De qué depende el tipo de fichas que me quedan en el resultado?

c) ¿Qué se hace con la cantidad de fichas de los sumandos para obtener la cantidad de fichasdel resultado?

d) ¿Cuántas fichas quedan después de la neutralización y qué proceso harías para encontrarla cantidad de fichas que quedan sin necesidad de utilizar las fichas?

e) Expresa una forma general para sumar números enteros de diferente signo

f) Realiza las siguientes operaciones sin necesidad de utilizar las fichas

- -23+34
- -54+(+31)
- 29+(-87)
- +133+(-67)

Actividad 2: Resta de números enteros con el modelo de neutralización

Objetivo: construir un algoritmo de resta de números enteros mediante un modelo constructivista que parta desde la experimentación con material concreto para llegar a construir un proceso general para permitir restar dos números enteros.

Materiales: fichas de colores verde (números positivos) y rojo (números negativos).

Instrucciones: Completa la siguiente tabla de resta de números enteros; utilizando el modelo de neutralización.

Realiza cada una de las operaciones de la tabla utilizando las fichas de colores para representar las diferentes restas y calcular el resultado. Además, en las diferentes celdas representa cada título de las columnas realizando puntos con colores (verde o rojo) que representen las fichas, así como aparece en los ejemplos de las dos primeras sumas. Por último, resuelve cada uno los literales que aparecen después de cada tabla.

Resta-sustracción.	Minuendo	Sustraendo	Minuendo con neutro	Operación de "quitarle" el sustraendo	Operación equivalente con el minuendo	Resultado de la nueva operación
-3-(-7)	-3 ●●●	-7 ●●●●●●●	-3 ●●● ●●●●●●● ●●●●●●●	-3-(-7) ●●● ~~●●●●●●●~~ ●●●●●●●	-3+7 ●●● ●●●●●●●	4 ●●●●
-4-5	-4 ●●●●	5 ●●●●●	-4 ●●●● ●●●●● ●●●●●	-4-5 ●●●● ~~●●●●●~~ ●●●●●	-4+(-5) ●●●● ●●●●●	-9 ●●●●●●●●●
-5-(-4)	-5 ●●●●●	-4 ●●●●	-5 ●●●●● ●●●● ●●●●	-5-(-4) ●●●●● ~~●●●●~~ ●●●●	-5+(4) ●●●●● ●●●●	-1 ●
-2-4						
-4-(1)						
7-(-3)						
5-7						

Tabla 1: resta de enteros utilizando modelo neutralización

Resuelve cada uno de los siguientes literales:

a) ¿Qué debes agregar cuando en una operación no se puede sustraer directamente un número?

b) ¿Es necesario agregar fichas (tercera columna) en todas las operaciones? De no ser así, ¿en cuáles no y por qué?

c) ¿En qué operación se termina convirtiendo la resta de la columna 5 a la 6?

d) De acuerdo a los procesos que acabas de hacer y a los de la actividad 1, ¿Cómo expresarás la resta de dos números convirtiendo la operación en una suma?

e) Resuelve las siguientes restas convirtiéndolas primero en una suma y aplicando los procedimientos para sumar dos enteros como lo hiciste en la actividad 1.

- 120-45
- 33-27
- 630-(-40)
- 345-(-400)
- -120-45
- -33-(+27)
- -630-(-40)
- -345-(-400)

Actividad 3: suma y resta de vectores (flechas)

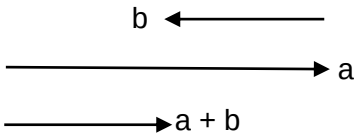
Objetivo: introducir a los números enteros mediante la representación de números enteros y la operación de suma y resta en la recta numérica por medio de vectores, flechas (cola-cabeza).

Vectores equivalentes

Un punto a en la recta numérica se interpreta al mismo tiempo como una flecha de 0 hasta a, es decir, como una flecha arbitrariamente móvil, un vector. Los números son entendidos, como flechas con igualdad longitud y dirección. Es recomendable poner el nombre de la flecha en su cabeza. Además, las flechas de adición deben definirse explícitamente:

Suma de flechas:

Añadir flechas significa ponerlas de cola sobre la cabeza, utilizando libremente la movilidad de las flechas. La suma a+b es la flecha que va desde la cola de a hasta la cabeza de b. Así, la suma de dos números enteros quedaría representada de la siguiente forma:

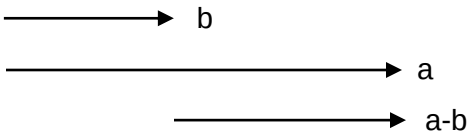


Resta de flechas:

El resultado c de la resta de dos vectores a y b (a-b) se puede interpretar como el vector que se debe agregar al vector b para obtener el vector a.

$$c = a - b \leftrightarrow a = b + c$$

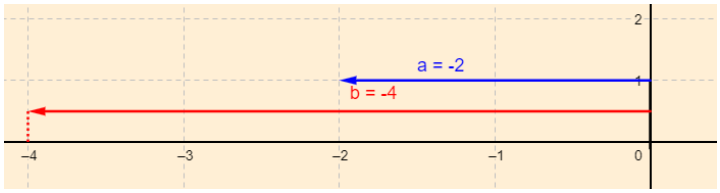
Entonces a - b se obtiene como la flecha que va de la cabeza de b a la de a siempre que las flechas a, b estén unidas por sus colas. En ese sentido, la resta de dos números enteros estaría dada por la siguiente representación (Freudenthal, 1983).



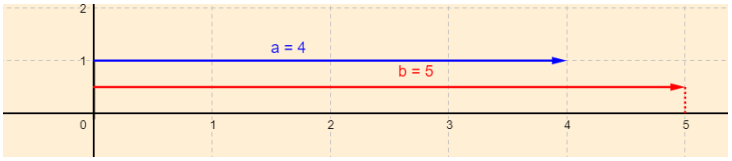
Actividad

1. Representa con flechas la suma a + b de los siguientes vectores (flecha) mostrando la flecha resultante, además especifica la operación y su resultado.

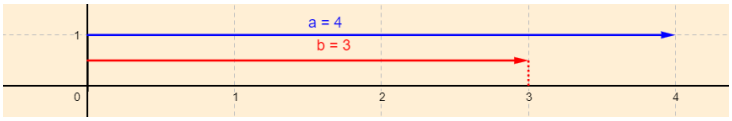
a)



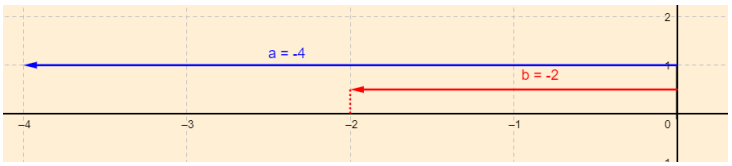
b)



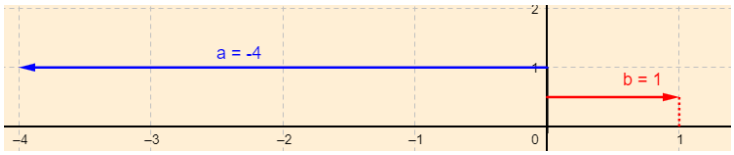
c)



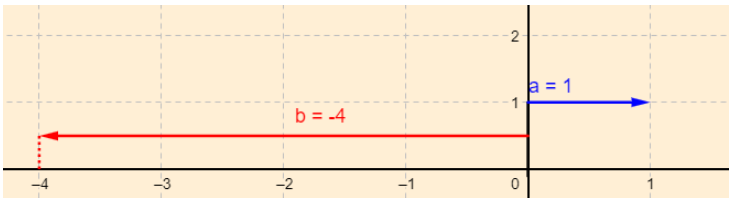
d)



e)

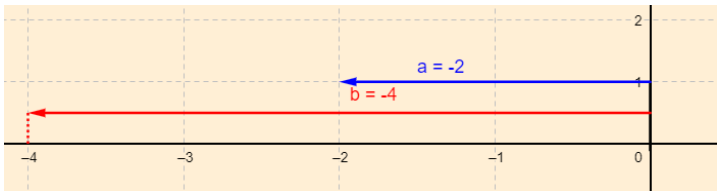


f)

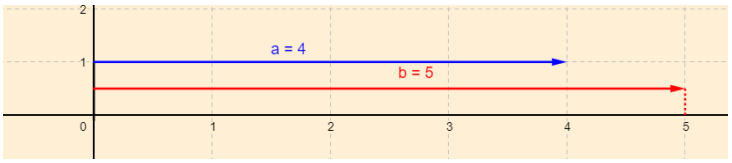


2. Realiza la representación y el cálculo de las restas a-b de los números que aparecen en cada una de las imágenes y que se encuentran representados por medio de flechas.

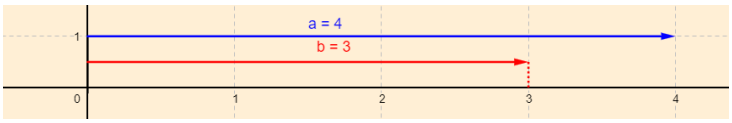
a)



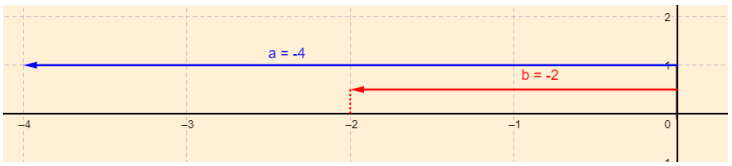
b)



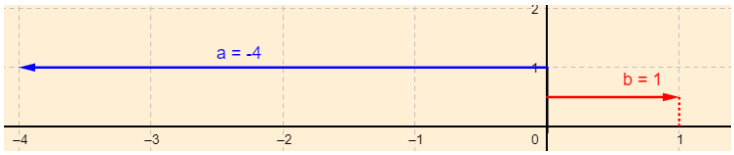
c)



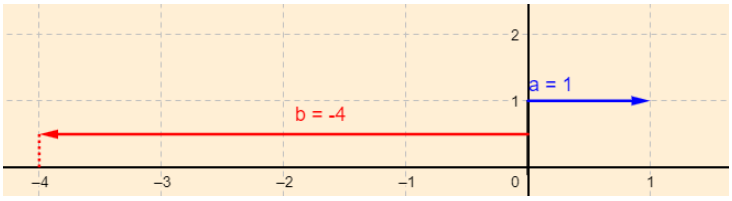
d)



e)



f)



3. Representa las siguientes sumas con las flechas graficando en la recta numérica los dos sumandos y el resultado de la operación. Además, coloca al frente de cada una, su resultado.

a) 2+3=
b) 3+(-2) =
c) 2+(-3) =
d) -2+(-3) =
e) -3+2=
f) -2+3=

4. Representa las siguientes restas con las flechas graficando en la recta numérica el minuendo el sustraendo y el resultado de la operación. Además, coloca al frente de cada una, su resultado.

a) 2-(-3) =
b) 3-2=
c) 2-3=
d) -2-3=
e) -3-(-2) =
f) -2-(-3) =

Actividad 4: Problemas aditivos

Objetivo lo que se pretende con esta actividad es reconocer algunos contextos, estructuras formas semánticas con los cuales se puede hacer la introducción, comprensión de los números enteros con la operación de suma, así como su equivalencia sintáctica con la resta. Además de ello, se busca que el estudiante unifique la dimensión contextual, dimensión tanto de la recta como la abstracta de los números enteros utilizando aprendizajes de experiencias anteriores (de la dimensión de recta y la abstracta) permitiendo transitar de una a otra.

Problemas aditivos:

En problemas aditivos simples podemos encontrar estados (tiene 8 pesetas), variaciones (vivió 65 años) y comparaciones (en París hay 9 grados menos que en Madrid). Atendiendo a esos tipos de sentencias, las tres situaciones siguientes pueden clasificarse como combinación de estados, variación de un estado y comparación de estados, respectivamente (Bruno, 2001)

a) Si una persona tiene 8 dólares y debe 11 dólares. ¿Cuál es su situación económica?
b) Una persona nació en el año 50 antes de Cristo y vivió 65 años. ¿En qué año murió?
c) La temperatura en Madrid es de 5 grados sobre cero, en París hay 9 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?

El problema a) se denomina de combinación de estados, porque hay dos estados parciales y un estado total; el problema b) es de variación de un estado, porque tenemos un estado inicial, se produce un cambio o variación y se alcanza un estado final; el problema c) es de comparación de estados, porque hay dos estados y la comparación de ambos. (Bruno, 2001)

1. En las siguientes situaciones explicita la estructura (combinación, comparación o variación) completando la tabla. Marca con una x la estructura correspondiente a la situación de cada literal.

a) Pedro comienza una partida con 6 pesos y termina debiendo 5 pesos. Es decir, perdió 11 pesos.

b) Un pez globo está a 15 metros bajo el nivel del mar, otro se encuentra a 5 metros por debajo de él. Por lo que el otro pez se encuentra a 20 metros por debajo del nivel del mar.
c) Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está a 11 kilómetros a la derecha del coche. Por lo que la moto está a 5 kilómetros a la derecha del cero.
d) Elvira estaba buceando a 3 metros bajo el nivel del mar y descendió 4 metros. Al final quedó en 7 metros por debajo del nivel del mar.
e) Un edificio tiene 15 plantas más 5 plantas del sótano. El ascensor del edificio antes de moverse estaba en la planta 8 y después de moverse, en la planta 3 del sótano. Por lo que bajó 11 plantas.
f) Sandra tiene 545 puntos para reclamar un premio. Si para reclamarlo necesita 600, entonces lo que le falta a ella para poder obtenerlo son 55.
g) La temperatura en Londres es de 5 grados por encima de cero a las 8:00 a.m. y a las 10:00 p.m. de 8 grados bajo cero. Para que la temperatura de la mañana sea igual a la de la tarde, debe bajar 13 grados.
h) María tiene 450 pesos en su casa y debe en el banco 35, entonces su situación económica es 415.

Literal	Combinación	Comparación	Variación
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

2. En las estructuras anteriores señala cada componente: para las combinaciones describe quiénes son los estados parciales y el estado total; para las variaciones quién es el estado inicial, el estado final y la variación; y, para las comparaciones,

quién es el estado de referencia quién es el estado comparado y cuál es la comparación. Completa la tabla descifrando la estructura y colocando al frente la descripción de cada elemento de ella según cada situación.

Punto	Combinación	Comparación	Variación
A	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
B	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
C	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
D	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
E	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
F	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
G	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
H	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:

Las situaciones anteriores pueden representarse como la suma de dos números en la recta

numérica. Por ejemplo, la situación de variación “carlos debe 3 dólares y pierde 9 luego, por lo que en este momento debe 12 dólares” puede representarse en la recta numérica: siendo el estado inicial (flecha azul) “Carlos debe 3 dólares”; la variación (flecha roja), el cambio que se realizará “perdió 9”; y, por último, el estado final (suma: flecha verde) “debe 12”.

Figura representación del problema aditivo con vectores.

3. Resuelve cada una de las siguientes situaciones siguiendo los siguientes pasos utilizando la recta y completando las tablas para cada uno de los puntos:

- Identifica la estructura
- Identifica cada uno de los componentes de la estructura y los valores
- Representa en la recta numérica la suma especificando los valores con cada flecha
- Representa la situación con una operación.

Como aparece en el siguiente ejemplo:

La temperatura en Madrid es tres grados bajo cero. La temperatura en Tokio es 4 grados menor que en Madrid ¿cuál es la temperatura en Tokio?

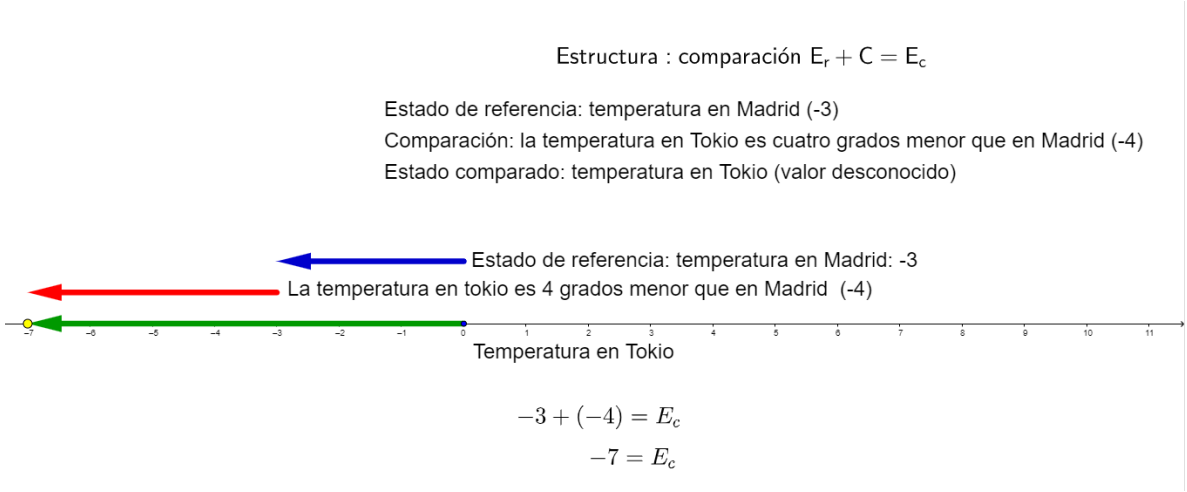


Figura. Ejemplo solución del ejercicio 3

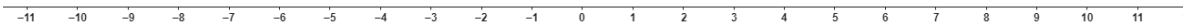
APORTE AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO

En una partida Carlos empieza perdiendo 4 y gana 5 después. ¿Cuánto tiene en total?

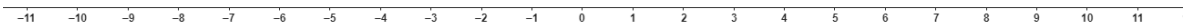
a) Carlos tiene 5 pesos en su casa y debe 11 ¿Cuál es su situación actual?
b) Una gaviota está a 5 metros por encima del nivel del mar y un pez está 17 metros por debajo de ella. ¿A qué altura se encuentra el pez?
c) Esneider tiene 6 dólares y Cristián tiene 12 dólares menos que Esneider. ¿cuántos dólares tiene Cristian?
d) La temperatura en Londres en la mañana era de 5 grados bajo cero, en la tarde subió 6 grados. ¿cuál fue la temperatura en la tarde?

Utiliza la tabla de cada literal para indicar la estructura, las componentes de cada una de ellas y la operación que representa; y, la recta para, la representación de estas.

Punto	Combinación	Comparación	Variación
A	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		

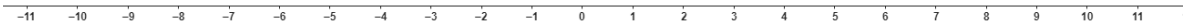


Punto	Combinación	Comparación	Variación
B	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		

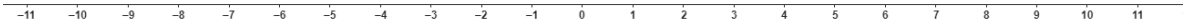


Punto	Combinación	Comparación	Variación
C	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:

	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		



Punto	Combinación	Comparación	Variación
D	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		



Punto	Combinación	Comparación	Variación
E	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		

En las situaciones del punto anterior, la incógnita es la componente que se encuentra en el lado derecho de la igualdad de la estructura a+b=x, (estado total, estado final o estado comparado) por lo que la categorizamos como incógnita 3. Sin embargo, cuando en los problemas aditivos la incógnita aparece en el primer sumando (estado parcial 1, estado inicial o estado de referencia) la categorizamos como incógnita 1; o en el segundo sumando (estado parcial dos, comparación o variación) la categorizamos como incógnita 2. Estos dos últimos se pueden resolver como una diferencia.

Por ejemplo, las situaciones de estructura “variación” se puede resolver mediante la siguiente definición

$e_1 + v = e_2 \; si \; y \; solo \; si \; e_2 - v = \; e_1 \qquad cuando \; la \; incógnita \; es \; el \; estado \; 1 \; (e_1)$

o

$e_1 + v = e_2 \; si \; y \; solo \; si \; e_2 - e_1 = v \qquad cuando \; la \; incógnita \; es \; la \; variación \; (v)$

Así pues, la situación de variación ($e_1 + v = e_2$)"Un ascensor desciende 13 niveles y termina en el sótano 4 ¿cuál era su posición antes de empezar a descender?" se puede plantear así:

$¿? + v = e_2 \qquad ¿? = e_2 - v$

4. Resuelve cada una de las siguientes situaciones siguiendo los siguientes pasos y utilizando la recta y completando las tablas para cada uno de los puntos:

- Identifica la estructura
- Identifica valores
- Representa en la recta numérica la resta especificando los valores con cada flecha
- Represéntala con la operación.

Como aparece en el siguiente ejemplo:

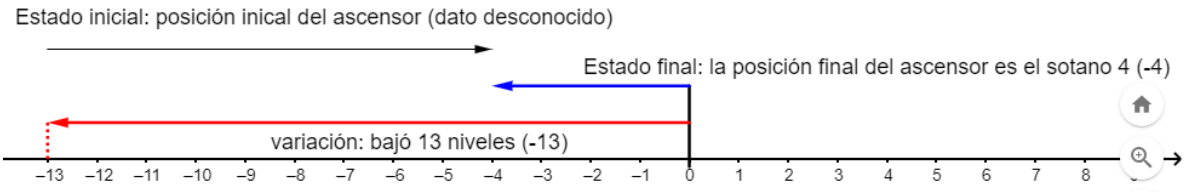
Un ascensor desciende 13 niveles y termina en el sótano 4 ¿cuál era su posición antes de empezar a descender?"

Estructura: variación e1=e2-v

Estado inicial: posición inicial del ascensor (valor desconocido)

Variación: bajó 13 niveles (-13)

Estado final: la posición final del ascensor es el sotano 4 (-4)



a) Un ascensor baja 5 niveles y termina en el sótano 4 ¿en dónde estaba el ascensor?

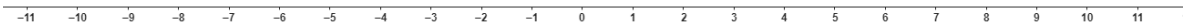
b) Carlos debe 4 pesos y termina teniendo 6 ¿Cuánto ganó o perdió?

c) Un ascensor estaba en el piso 3 y luego de un movimiento termina en el sótano 4 ¿Cuánto bajo o subió?

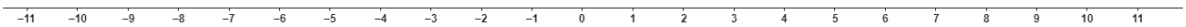
d) La temperatura en la mañana en Medellín es de 9 grados por encima de cero y en la noche de 2 grados por debajo de cero. ¿Cuál fue la variación de temperatura?

Utiliza la tabla de cada literal para indicar la estructura, las componentes de cada una de ellas y la operación que representa; y, la recta para, la representación de las mismas.

Punto	Combinación	Comparación	Variación
A	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		

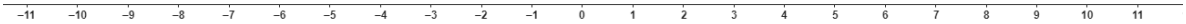


Punto	Combinación	Comparación	Variación
B	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		

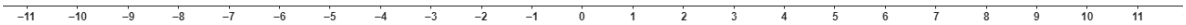


Punto	Combinación	Comparación	Variación
C	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		

APORTE AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO



Punto	Combinación	Comparación	Variación
D	Estado 1:	Estado referencia:	Estado inicial:
	Estado 2:	Comparación:	Variación:
	Estado total:	Estado comparado:	Estado final:
	Operación		



Referencias

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique*. París: Librairie Philosophique J. Vrin. Edición original: 1938.

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*. GPDM- Bariloche. Argentina.

Brousseau, G. (1976). *Les obstacles ´epist´emologiques et les probl`emes en math´ematiques*. Comptes-rendus de la XVIIIe rencontre de la CIEAEM, Louvain-la-Neuve, 101-117.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématique*s. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 165-198

Bruno Castañeda, Alicia (2001). *La enseñanza de los números negativos: formaismo y significado*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española Vol. 4 Núm. 2 Pág. 415-428

Bruno, A. (2004). *Estructuras Aditivas*. Recuperado: file:///C:/Users/Angela%20Johana/Desktop/Pr%C3%A1ctica/Documentos%20consulta/Situaciones%20aditivas.pdf

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). *Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos*. Educación Matemática, 9 (1), 33-46.

Bruno, Alicia; Martinón, Antonio (1994). *Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos.* SUMA, 16, pp. 9-18

Castañeda, C. (2018). *Diseño de una cartilla didáctica virtual como herramienta para la enseñanza de la suma y resta de números enteros*. Recuperado de https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/68864/1036613726.2018

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Recupeado de https://zaguan.unizar.es/record/112529/files/TESIS-2022-085.pdf

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*. Memoria de DEA. Publications de l'IREM, Burdeos.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.

Gallardo, A. (1994). *El Estatus de los Números Negativos en la Resolución de Ecuaciones Algebraicas*. Tesis de Doctorado. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del I P N, México.

Gallardo, A. (2002), *"The extension of natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra*", Educational Studies in Mathematics. An International Journal, Anna Sierpinska (ed.), vol. 49, núm. 2, pp. 171-192.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2009). *Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente*. Educación Matemática, 21(3), 67-94

Glaeser, G. (1981). *Epistémologie des nombres relatifs*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(3), 303-346.

Gómez, B. (1999). *Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud*. 9.as Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (JAEM), Lugo, España.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000) *Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory*. Journal of Curriculum Studies. Vol. 32, Nº. 777-796 Traducción N.Seggesse,Fernanda Gallego y Ana Bressan (GPDM)

Lizcano, E. (1993). I*maginario colectivo y creación matemática*. Barcelona: Editorial Gedisa

Maz Machado, A,. Rico Romero, L,. (2009). *Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones*. Universidad de Granada. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/556/1/15378184.pdf

Mena, R. (2017). *Propuesta didáctica que fortalezca la comprensión de la ley designos, en las operaciones básicas en el conjunto de números enteros para el desarrollo en la solución de problemas*. Recuperado de https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/62212/35892265.2017

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares*.Bogotá : Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles89869_archivo_pdf9.pdf.

Murillo, J. 2010. *Investigación acción*. Métodos de investigación en Educación Especial 3a Educación Especial Curso: 2010- 2011

Negrete. (2021) *Construcción de los números enteros*. recuperado de http://ofeliayorquesta.com/notas/AlgebraSuperior2_Enteros_001.pdf

Rua, G. (2013). *Implementación de una estrategia de enseñanza mediada por la plataforma Moodle para el aprendizaje significativo de la suma de números enteros en el grado sexto de la Institución Educativa Cisneros*. Recuperado de https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21123/98568533.2014

Schubring, G. (1986). *Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs.* Petit x, 12, 5-32.

Vergnaud, G. y C. Durand, (1983). *Estructuras aditivas y complejidad psicogenética*. En Coll. C. (Comp.). Psicología genética y aprendizajes escolares. Madrid, España. Siglo XXI

Vílchez, M. (2015). *Propuesta de unidad didáctica: números entero*s. Universidad de Granada, España. Recuperado de https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_M.Vilchez.pdf