Análisis de un método de Galerkin discontinuo hibridizable para el problema de generación de energía en celdas fotovoltaicas

Liliana Marcela Camargo Mazuera

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas

Medellín, Colombia

2019

Análisis de un método de Galerkin discontinuo hibridizable para el problema de generación de energía en celdas fotovoltaicas

Liliana Marcela Camargo Mazuera

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Doctora en Ciencias Matemáticas

Director:
Ph.D. Mauricio Andres Osorio L.

Co-Directora:
Ph.D. Bibiana López Rodríguez.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2019

Agradecimientos

En primer lugar quiero destacar el apoyo emocional y académico que me brindaron mis asesores de tesis Mauricio Osorio y Bibiana López Rodríguez durante todos los años de mis estudios de doctorado. Gracias a todas las horas que dedicamos al proyecto que nos propusimos realizar y a las estancias de investigación en la Universidad de Concepción bajo la asesoría de Manuel Solano, logramos cumplir varios de nuestros objetivos.

A Colfuturo y Colciencias les agradezco la ayuda económica que me fue otorgada por medio de la convocatoria 647.

Además, mi más sincero agradecimiento a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, por su apoyo económico durante las estancias de investigación y la oportunidad de iniciar el Doctorado en Ciencias-Matemáticas.

Resumen

En este documento proponemos un método Galerkin discontinuo hibridizable (HDG) para analizar el problema de absorción y generación de energía en celdas fotovoltaicas. Para aproximarnos gradualmente al problema consideramos tres tipos de problemas en los cuales definimos las ecuaciones de Maxwell en régimen armónico en un dominio no homogéneo y les adicionamos condiciones de frontera y de propagación de onda. Para garantizar que el método HDG propuesto está bien puesto se introduce una condición de no compresibilidad por medio de un multiplicador de Lagrange. Además, para los dos primeros problemas demostramos que el esquema HDG es localmente conservativo, consistente y que tiene una única solución. Posteriormente, para el primer problema verificamos numéricamente los órdenes de convergencia teóricos, los cuales fueron óptimos y los obtuvimos mediante un argumento de dualidad, en el cual usamos operadores de proyección adecuados para deducir estimativos de error en la norma L^2. Para el problema tres que es más cercano a la realidad, realizamos una formulación completa del método HDG y mostramos los primeros pasos de lo que sería un análisis de existencia y unicidad.

Palabras claves: Galerkin discontinuo hibridizable, ecuaciones de Maxwell en régimen armónico, celdas fotovoltaicas, estimativos de error.

Abstract

In this document we propose a hybridizable discontinuous Galerkin (HDG) method for the time harmonic Maxwell's equations, which describes absorption and generation of the energy in photovoltaic cells. In order to gradually approximate the physical problem we consider three types of problems in which the time harmonic Maxwell's equations are defined in an inhomogeneous domain and we add appropriate boundary and wave propagation conditions. Then, we introduce an incompressibility condition using a Lagrange multiplier to guarantee the well-posedness of the proposed HDG method.
After that, it is proved that the HDG scheme is locally conservative, consistent and it has a unique solution. Later, for the first problem we numerically verify the theoretical optimal convergence rates which were obtained by using a duality argument, in which we use a set of convenient projector operators to obtain error estimates in the L^2-norm. For the third problem, the one that is closest to reality, we show a complete HDG formulation and the first steps to an existence and uniqueness analysis.

Keywords: Hybridizable discontinuous Galerkin, time-harmonic Maxwell's equations, photovoltaic cells, error estimates.

Contenido

Agradecimientos **iii**

Resumen **iv**

Abstract **v**

Introducción **viii**

1. PRELIMINARES **1**

1. Descripción del problema 1
2. Espacios funcionales 5
3. Método HDG 7

2. PROBLEMA CON CONDICIÓN TIPO DIRICHLET **11**

1. Planteamiento del problema 11
2. Formulación HDG 19
   - 2.1. Existencia y unicidad 24
3. Estabilidad 27
   - 3.1. Proyectores 27
   - 3.2. Argumento de dualidad 28
4. Estimativos de error 36
5. Resultados numéricos 45

3. PROBLEMA CON CONDICIONES CUASI-PERIÓDICAS 48

1. Análisis de existencia y unicidad 51
2. Estabilidad 54
   2.1. Argumento de dualidad 55
3. Estimativos de error 56

4. PROBLEMA CON CONDICIONES DE RADIACIÓN 58

1. Planteamiento del problema 59
2. Esquema HDG 64

5. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA 70

1. Implementación esquema HDG: problema A 70
2. Implementación esquema HDG: problema B 95
3. Bases de Dubiner 96

Introducción

Una celda solar de película delgada es un dispositivo electrónico que transforma la energía solar en energía eléctrica. Dicha transformación ocurre cuando los fotones, que corresponden a las partículas cuánticas que conforman la luz, tienen la energía suficiente para desprender los electrones en la superficie irradiada. Además, los materiales y las dimensiones que se emplean en la fabricación de celdas fotovoltaicas también influyen en su capacidad para almacenar y generar energía. Los materiales más usados son el silicio amorfo, diseleniuro de cobre en indio, arseniuro de galio y teluro de cadmio. Con respecto a las medidas que se utilizan en su diseño, es conocido que dependen de las longitudes de onda del espectro solar visible, cuyo rango es $[400, 1100]$ nanómetros.

Debido a que está fuente de generación de energía tiene ventajas como la reducción de los costos en la generación de electricidad e inversiones mínimas en su mantenimiento, existe un gran interés en construir estos dispositivos de forma óptima, es decir, se busca que cada una de sus capas acumule y genere la mayor cantidad de energía solar y eléctrica, respectivamente.

Para modelar el fenómeno de absorción y generación de energía en una celda fotovoltaica se consideran las ecuaciones de Maxwell en tiempo armónico definidas en dominios con características periódicas, sujetas a condiciones de contorno y de propagación de onda. Una descripción detallada puede consultarse en el primer capítulo de [33].

En la literatura se pueden encontrar métodos clásicos para aproximar la solución de este tipo de problemas, como por ejemplo el método riguroso de onda acoplada (RCWA) (ver [23, 29]), el método de elementos finitos (FEM) (ver [35]), el método exacto modal (EMM) (ver [22]) y el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) (ver [43]).

El método Galerkin Discontinuo Hibridizable (HDG) es otra alternativa que se ha utilizado en el estudio de las ecuaciones de Maxwell en régimen armónico, debido a que es un método tipo Galerkin Discontinuo (DG) localmente conservativo y estable, el cual permite manejar dominios con geometrías complejas, usar mallas irregulares, considerar aproximaciones con polinomios de distintos grados en diferentes elementos de la discretización del dominio y además, reducir el número de grados de libertad en comparación

con otros métodos DG como Galerkin Discontinuo Local (LDG), Galerkin Discontinuo Compacto (CDG) y el Método de Penalización Interior (IPM). Algunos de los trabajos en los cuales se han verificado sus buenas características son [9–11,17,30,36,44]. En los artículos citados los problemas están definidos en dominios homogéneos y la permitividad eléctrica se define como un número real positivo, excepto en el último, en el cual es un número complejo.

En este trabajo, nuestro dominio es tridimensional y suponemos que la permitividad eléctrica es constante a trozos, es decir, su definición no es homogénea en el dominio porque en una parte su valor es un número real positivo y en la otra un número complejo con parte real negativa. Esto introduce dificultades adicionales que no permiten tratar el problema de la misma manera que se hace en los trabajos existentes y, por lo tanto, su análisis de error a priori y su aproximación numérica son considerados problemas abiertos. Dotar a la permitividad del modelo con tal característica permite describir de forma más real la generación de energía en una celda, tal como se menciona en la Sección 2.2 del Capítulo 2 de [33].

El estudio que presentamos está dividido en tres partes, las cuales dependen del tipo de condiciones a las cuales estén sujetas las ecuaciones de Maxwell. Inicialmente consideramos un problema sujeto a condiciones de frontera tipo Dirichlet, después adicionamos condiciones cuasi-periódicas excepto en la parte superior e inferior del dominio, en las cuales mantenemos las condiciones tipo Dirichlet. En el último caso, reemplazamos las condiciones tipo Dirichlet por condiciones de radiación, con lo cual nos acercamos de manera significativa al problema real.

Con el objetivo de analizar el método HDG que se propone para cada uno de los problemas, es necesario garantizar que son problemas bien puestos y por tal razón se impone una condición de no compresibilidad al campo eléctrico, al igual que en [6,9,11].

Para los dos primeros problemas mostramos que los esquemas HDG asociados son localmente conservativos y consistentes. Además, basándonos en técnicas empleadas para la ecuación de Helmholtz [24] y las ecuaciones de Maxwell con números de onda alto [17], desarrollamos el análisis de error por medio de un argumento de dualidad y un conjunto de proyectores con características adecuadas. Finalmente, en ambos casos deducimos estimativos de error con órdenes óptimos en la norma L^2, ver [6].

En el desarrollo de la implementación numérica del método HDG empleamos rutinas con estructuras similares a las de [19]. Inicialmente, se determina la estructura de cada uno de los bloques que constituyen el local solver, la cual depende de los polinomios de la base y las fórmulas de cuadratura. En este trabajo empleamos bases de Dubiner, cuyos elementos son productos de polinomios de Jacobi, ortogonales con respecto a un conocido producto interno L^2, ver por ejemplo [34]. Para hallar las aproximaciones de las variables definidas en el esqueleto, el cual corresponde al conjunto de las fronteras de los elementos de la discretización del dominio, usamos los bloques convenientes para armar

el sistema de ecuaciones que se obtiene a partir de las relaciones que satisfacen los flujos numéricos. Luego hallamos su solución y la empleamos para obtener las aproximaciones de las incógnitas definidas sobre el volumen.

En el caso del problema con condiciones de radiación y cuasi-periódicas presentamos la técnica *perfectly matched layer*, PML, la cual empleamos para imponer las condiciones de radiación en la parte superior e inferior del dominio físico. Teniendo en cuenta la teoría presentada en la Sección 13.5.3 de [35] hallamos las ecuaciones del problema que definimos en las capas absorbentes que le agregamos al dominio inicial. Para plantear el problema es necesario definir condiciones de frontera, de salto y de interfase para los campos que satisfacen el sistema de ecuaciones. Posteriormente, proponemos una formulación variacional HDG y demostramos una identidad tipo G$\mathring{a}$rding, al igual que en los análisis realizados para los dos primeros problemas. El análisis de error a priori del esquema HDG para este último caso, se presenta de manera parcial y se convierte en un trabajo futuro. Es importante resaltar que, hasta el momento, no hemos encontrado referencias bibliográficas en la literatura, en las cuales se presente un análisis completo del problema con condiciones de radiación y cuasi-periódicas que incluyan permitividad compleja.

La tesis está organizada por capítulos de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se describe el fenómeno electromagnético, se introducen los espacios funcionales, la notación que se emplea en el trabajo y una descripción acerca del método HDG. El dominio truncado a un periodo y el problema con condiciones tipo Dirichlet se introducen en el Capítulo 2. Además, se incluye el estudio de existencia de una única solución de la formulación variacional HDG, vía una identidad tipo G$\mathring{a}$rding. Posteriormente se presenta el análisis de error y algunos ejemplos numéricos. El análisis del problema con condiciones tipo Dirichlet y cuasi-periódicas se desarrolla en el Capítulo 3. En el Capítulo 4 se incluye una descripción de la técnica PML que utilizamos para imponer las condiciones de radiación a las ecuaciones de Maxwell en régimen armónico sujetas a condiciones cuasi-periódicas. La implementación numérica del método HDG para el problema con condición tipo Dirichlet se presenta en la primera sección del Capítulo 5. En su segunda sección describimos la forma en la cual las rutinas empleadas en la implementación numérica del método HDG para el primer problema pueden adaptarse para implementar el método propuesto para el problema con condiciones Dirichlet y cuasi-periódicas. En su última sección presentamos las bases de Dubiner que utilizamos para realizar los ejemplos numéricos.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1. Descripción del problema

La nanociencia y la nanotecnología son áreas de la ciencia que tienen lugar a nivel nanométrico, ambiente en el cual los materiales pueden potenciar propiedades no perceptibles a nivel macroscópico. La nanociencia se dedica al estudio de fenómenos y manipulación de materiales a dicha escala, mientras que la nanotecnología se centra en el diseño, por medio del control de las propiedades de la materia a nanoescala. Sus aplicaciones son ampliamente destacadas en áreas como la física, química, biología molecular, medicina y farmacéutica, a las cuales provee de herramientas para diseñar novedosos materiales molécula a molécula. La primera referencia asociada a la nanotecnología se atribuye a Richard Feynmann, en una conferencia del año 1959, titulada: *There's plenty of room at the bottom*. En dicha conferencia Feynmann hizo referencia a la manipulación y el control de la materia a escalas muy pequeñas, pensando en mejorar computadores y microscopios. Para ampliar la anterior descripción pueden consultarse [39] y la página web www.nano.gov.

Uno de los componentes en los cuales la nanotecnología ha aportado grandes avances es en el diseño de celdas solares, ver por ejemplo [40]. La razón de los diversos estudios de estos dispositivos se debe a que el fenómeno electromagnético de absorción y generación de energía en una celda solar ocurre a escalas nanométricas, cuando la incidencia de una onda electromagnética genera ondas SPP (Surface Plasmon Polariton), las cuales son electrones excitados que se propagan en la interfase entre un dieléctrico con constante dieléctrica positiva y un metal con corrugaciones periódicas, cuya permitividad relativa tiene parte real negativa, ver Sección 2.2 de [33].

En la búsqueda de aumentar la densidad del agujero de electrones, la capacidad de la celda para absorber energía solar y densidad de flujo del espectro solar, se han emplea-

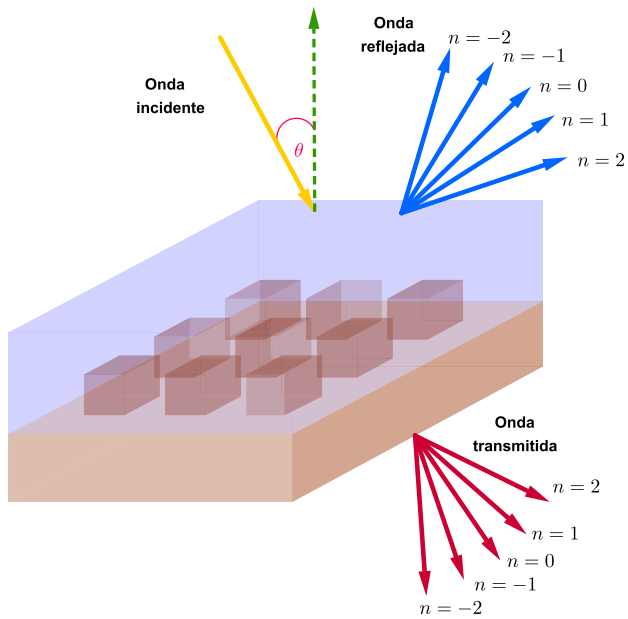

Figura 1.1: Celda solar.

do diversas estructuras en su diseño, entre las que se destacan los paneles solares de silicio amorfo, paneles solares corrugados y dieléctricos isotrópicos multicapas con bases metálicas.

En el estudio de este fenómeno electromagnético se usan las ecuaciones de Maxwell que se obtienen después de suponer que los campos satisfacen una dependencia armónica del tiempo y a las cuales se les denomina ecuaciones de Maxwell en régimen armónico, ver Sección 1.2 de [35],

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= i\,\omega\,\mu_0\,\mathbf{H}, && \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} - i\,\omega\,\epsilon_0\,\epsilon\,\mathbf{E}, && \text{en } \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{E} := e^{-i\omega t}\,\widehat{\mathbf{E}}$ representa el campo eléctrico, $\mathbf{H} := e^{-i\omega t}\,\widehat{\mathbf{H}}$ el campo magnético, $\mathbf{J} := e^{-i\omega t}\,\widehat{\mathbf{J}}$ la densidad de corriente y las constantes positivas ω, μ_0 y ϵ_0 corresponden a la frecuencia angular, la permeabilidad magnética del vacío y la permitividad eléctrica del vacío, respectivamente. Además, $\epsilon_0\epsilon$ se conoce como la permitividad relativa, ver [35, 41].

Es importante resaltar que debido a que los valores de la longitud de onda del espectro solar visible $\lambda_0 \in [400, 1100]$ nanómetros, entonces el número de onda κ y la frecuencia

angular ω son acotados, de acuerdo con las siguientes expresiones

$$\kappa := \frac{2\pi}{\lambda_0}, \qquad \omega := \frac{\kappa}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \tag{1.2}$$

Es conocido que las ecuaciones de Maxwell modelan la oscilación perpendicular del campo eléctrico y el campo magnético. Además, que las oscilaciones del campo eléctrico, las cuales son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, generan el efecto de polarización de la luz, ver [35]. Los estados de polarización se denominan estado de polarización transversal eléctrico, TE y estado de polarización transversal magnético, TM. En el estado TE las componentes $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_z$ y $\mathbf{E}_y$ no se anulan, mientras que en el estado TM las componentes que no se anulan son $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_z$ y $\mathbf{H}_y$. Las ondas SPP se generan en el estado de polarización TM, ver [33], debido a que para algunas de las ondas transmitidas y reflejadas que producen las corrugaciones periódicas en la superficie del metal, se logra obtener la siguiente igualdad

$$\kappa_x^{SPP} = \kappa_x^{inc} + \frac{2\pi n}{L},$$

donde κ_x^{SPP} denota a la componente x del número de onda de la onda SPP, κ_x^{inc} denota a la componente x del número de onda de la onda incidente y $n \in \mathbb{Z}$ representa a una onda reflejada o transmitida, ver Figura 1.1.

En nuestro caso, definimos (1.1) en un dominio truncado, que corresponde a un periodo del dominio que se ilustra en la Figura 1.1, el cual tiene características no homogéneas, ver [31, 32, 36], puesto que ϵ es un número real positivo en la región ocupada por el material dieléctrico isotrópico y un número complejo con parte real negativa y parte imaginaria positiva, en la región donde se encuentra el material conductor.

Para aproximarnos al modelo real de absorción y generación de energía en una celda fotovoltaica es necesario considerar condiciones de frontera y de propagación de onda, ver [41], las cuales motivan el estudio paulatino de tres tipos de problema. El problema A se caracteriza por tener solamente condiciones tipo Dirichlet. El Problema B está sujeto a condiciones tipo Dirichlet en la parte superior e inferior del dominio y cuasi-periódicas en el resto. Finalmente, el problema C conserva las condiciones cuasi-periódicas del Problema B y reemplazamos las condiciones tipo Dirichlet por condiciones de radiación.

La condición tipo Dirichlet que consideramos no corresponde a la de un conductor perfecto, puesto que es de la forma $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es una función no nula definida sobre la frontera del dominio, ver Sección 1.3 de [35].

Las condiciones cuasi-periódicas son usadas comunmente en la modelación de problemas definidos en dominios con características periódicas (ver Secciones 3.1 y 3.3 de [26] y

Sección 2 de [46]), puesto que las soluciones de dichos problemas son de tipo cuasi-periódico. Las soluciones de tipo cuasi-periódico satisfacen que, en fronteras paralelas del dominio, difieren por un factor exponencial complejo.

Para definir las condiciones cuasi-periódicas es necesario tener en cuenta que el campo eléctrico del rayo que incide sobre la cara superior de la frontera de la celda tiene la forma de una onda plana, es decir,

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{A}e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}, \tag{1.3}$$

donde $\mathbf{A}$ denota la polarización y satisface que $\mathbf{A}\cdot(\alpha,\beta,\gamma)=0$, con

$$\begin{aligned}\alpha &:= \kappa\sin\theta\cos\phi,\\ \beta &:= \kappa\sin\theta\sin\phi,\\ \gamma &:= \kappa\cos\theta,\end{aligned}$$

para $\theta\in[0,\pi]$ y $\phi\in[0,2\pi]$, ver Sección 1.3 de [35].
Como las condiciones cuasi-periódicas no las imponemos en la parte inferior, ni en la parte superior de la celda truncada $(0,L)\times(0,L)\times(0,M)$ entonces el campo $\mathbf{E}$ satisface que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(L,y,z) &= e^{i\alpha L}\mathbf{E}(0,y,z),\\ \mathbf{E}(x,L,z) &= e^{i\beta L}\mathbf{E}(x,0,z),\end{aligned}$$

y por su forma sabemos que las funciones $e^{-i\alpha L}\mathbf{E}(L,y,z)$ y $e^{-i\beta L}\mathbf{E}(x,L,z)$ también son soluciones cuasi-periódicas del problema.

En la literatura, se pueden encontrar diversas formas de imponer condiciones de radiación a las ecuaciones de Maxwell en tiempo armónico, ver por ejemplo [25]. Las más modernas y efectivas se denominan aproximaciones locales convergentes y corresponden a la técnica *perfectly matched layer* (PML) y la aproximación por sucesiones de condiciones de frontera locales, ver [25]. De las anteriores técnicas la que se sugiere para problemas tridimensionales es la aproximación PML, la cual empleamos para plantear el Problema C. Esta técnica fue introducida por Berenger, ver [3,4], para truncar dominios no acotados introduciendo fronteras artificiales, las cuales permiten simular capas absorbentes que rodean al dominio físico en el cual está definido el problema. Dichas capas PML se caracterizan por absorber y no reflejar las ondas electromagnéticas, lo cual es consecuencia de la función σ que puede ser acotada o no acotada y cuya integral se supone con un valor muy grande, ver por ejemplo Sección 2 de [3], Sección 13.5.3 de [35], Sección 3 de [38]. Además, la interfase entre el dominio y la PML se define de tal forma que no genere reflexiones que se denominan falsas en el interior del dominio físico.

Para obtener el planteamiento del problema C agregamos dos PML al dominio físico, una en la parte inferior y otra en la parte superior. Después consideramos un sistema

de coordenadas en el cual la variable z depende de la función σ que suponemos no acotada y con integral no finita en las capas absorbentes, como en la Sección 3 de [38], para definir las ecuaciones en dichas capas. Estas ecuaciones contienen la información de unas nuevas variables que representan a los campos de las ecuaciones de Maxwell en las PML. Además, debido a las características de la técnica PML es necesario adicionar condiciones adecuadas en las interfases y las fronteras exteriores de las capas absorbentes.

2. Espacios funcionales

Sean $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera $\partial\mathcal{O}$ Lipschitz continua, $s \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $s = m + \sigma$ con $\sigma \in (0,1)$. El espacio de Sobolev $\mathrm{W}^{s,p}(\mathcal{O})$ se define como el espacio de distribuciones $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})'$ tales que $u \in \mathrm{W}^{m,p}(\mathcal{O})$ y

$$\int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{N+\sigma p}} < \infty,$$

para el multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ cuyo orden es $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i = m$. Este espacio está dotado de la norma

$$\|w\|_{s,p,\mathcal{O}} := \left\{ \|w\|_{m,p,\mathcal{O}}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathcal{O}}\int_{\mathcal{O}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^{1/p}}{|x-y|^{N+\sigma p}} \right\}.$$

Cuando $p = 2$ y $s \geq 0$, $\mathrm{H}^s(\mathcal{O}) := \mathrm{W}^{s,2}(\mathcal{O})$ y $\mathrm{H}^s(\partial\mathcal{O}) := \mathrm{W}^{s,2}(\partial\mathcal{O})$, ver Sección 3.2 de [35].

Para $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\mathrm{H}^s(\mathcal{O}) := \left\{ \mathbf{w} \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}) : \partial^\alpha \mathbf{w} \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O}), \forall \alpha, |\alpha| \leq s \right\},$$

donde

$$\partial^\alpha \mathbf{w} = \frac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{w}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

corresponde a la derivada de w en sentido débil. El espacio de Sobolev $\mathrm{H}^s(\mathcal{O})$ está dotado de la norma

$$\|w\|_{s,\mathcal{O}} := \left\{ \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha w\|_s^2 \right\}^{1/2}$$

y la siguiente seminorma

$$|w|_{s,\mathcal{O}} := \left\{ \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha w\|_s^2 \right\}^{1/2}.$$

Caracterizaciones más detalladas de los espacios de Sobolev pueden consultarse en [8, 16, 35].
En el caso $s = 0$, los espacios se denotan $\mathrm{L}^2(\mathcal{O})$ y $\mathrm{L}^2(\partial\mathcal{O})$, en vez de $\mathrm{H}^0(\mathcal{O})$ y $\mathrm{H}^0(\partial\mathcal{O})$. Las normas asociadas a cada espacio las denotamos $\|\cdot\|_{s,\mathcal{O}}$ para $\mathrm{H}^s(\mathcal{O})$, $[\mathrm{H}^s(\mathcal{O})]^3$ y $\|\cdot\|_{s,\partial\mathcal{O}}$ para $\mathrm{H}^s(\partial\mathcal{O})$, $[\mathrm{H}^s(\partial\mathcal{O})]^3$; cuando $s = 0$ se omite el subíndice s. Las seminormas de $\mathrm{H}^s(\mathcal{O})$ y $[\mathrm{H}^s(\mathcal{O})]^3$ las denotamos $|\cdot|_{s,\mathcal{O}}$ y para referirnos a productos $\mathrm{L}^2(\cdot)$ definidos en los complejos empleamos $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{O}}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\mathcal{O}}$. Adicionalmente, se introducen los siguientes espacios

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\mathcal{O}) &:= \{\mathbf{w} \in [\mathrm{L}^2(\mathcal{O})]^3 : \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{w}) \in \mathrm{L}^2(\mathcal{O})\},\\
\mathrm{H}(\mathbf{div}^0;\mathcal{O}) &:= \{\mathbf{w} \in [\mathrm{L}^2(\mathcal{O})]^3 : \nabla\cdot\mathbf{w} = 0\},\\
\mathrm{H}(\mathbf{div}^0_\epsilon;\mathcal{O}) &:= \{\mathbf{w} \in [\mathrm{L}^2(\mathcal{O})]^3 : \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{w}) = 0\},\\
\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O}) &:= \{\mathbf{w} \in [\mathrm{L}^2(\mathcal{O})]^3 : \nabla\times\mathbf{w} \in [\mathrm{L}^2(\mathcal{O})]^3\},\\
\mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\mathcal{O}) &:= \{\mathbf{w} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O}) : \mathbf{w}\times\mathbf{n}|_{\partial\mathcal{O}} = 0\},
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}$ representa el vector normal unitario a $\partial\mathcal{O}$.

Para introducir los espacios de trazas y las conocidas identidades de Green en los espacios $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{O})$ y $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O})$, definimos los siguientes operadores

$$\begin{aligned}
\gamma_0 : C^\infty(\mathcal{O}) &\to \mathrm{L}^2(\partial\mathcal{O})\\
\varphi &\to \gamma_0(\varphi) := \varphi\,|_{\partial\mathcal{O}},\\
\gamma_{\mathbf{n}} : [C^\infty\left(\overline{\mathcal{O}}\right)]^3 &\to [\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{O})]^3\\
\varphi &\to \gamma_{\mathbf{n}}(\varphi) := \varphi\cdot\mathbf{n}\,|_{\partial\mathcal{O}},\\
\gamma_t : [C^\infty\left(\overline{\mathcal{O}}\right)]^3 &\to [\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{O})]^3\\
\varphi &\to \gamma_t(\varphi) := \varphi\times\mathbf{n}\,|_{\partial\mathcal{O}}\ .
\end{aligned}$$

donde $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ es el espacio dual de $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathcal{O})$. Los anteriores operadores se conocen, en su orden, como operador traza, operador traza normal y operador traza tangencial. Además, de acuerdo con los Teoremas 3.9, 3.24 y 3.29 de [35], las aplicaciones pueden extenderse por continuidad y densidad de $C^\infty\left(\overline{\mathcal{O}}\right)$ en $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$ y de $[C^\infty\left(\overline{\mathcal{O}}\right)]^3$ en $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{O})$ y $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O})$.

Los espacios de Sobolev $\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ y $\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$, en los cuales están definidas las trazas de las funciones de $\mathrm{H}^1(\mathcal{O})$, $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{O})$ y $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O})$, también pueden definirse teniendo en cuenta los conjuntos formados por las imágenes de cada operador, así

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^{1/2}(\partial\mathcal{O}) &:= \gamma_0(\mathrm{H}^1(\mathcal{O})),\\
[\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{O})]^3 &:= \gamma_{\mathbf{n}}(\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{O})),\\
\mathrm{Y}(\partial\mathcal{O}) &:= \gamma_t(\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O})),
\end{aligned}$$

donde $\mathrm{Y}(\partial\mathcal{O}) \subset \left[\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\mathcal{O})\right]^3$.

Veamos ahora las identidades de Green (secciones 3.5.1 y 3.5.3 de [35]).

- Para todo $\mathbf{u} \in \mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{O})$ y $\varphi \in [\mathrm{H}^1(\mathcal{O})]^3$, la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{O})$ es

$$(\mathbf{u}, \nabla\varphi) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, \varphi) = \langle \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}), \gamma_0(\varphi)\rangle_{\partial\mathcal{O}} \,.$$

- Para todo $\mathbf{u}, \varphi \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O})$ la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O})$ corresponde a

$$(\mathbf{u}, \nabla \times \varphi) - (\nabla \times \mathbf{u}, \varphi) = -\langle \gamma_\tau(\mathbf{u}), \gamma_t(\varphi)\rangle_{\partial\mathcal{O}} \,,$$

  donde γ_τ denota la componente tangencial y $\gamma_\tau(\mathbf{u}) := \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n})$.

En la literatura, ver por ejemplo [6, 14], el espacio usado para estudiar los campos de las ecuaciones de Maxwell en tiempo armónico corresponde a

$$\mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\mathcal{O}) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\mathcal{O})$$

y teniendo en cuenta que $\mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\mathcal{O}) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\mathcal{O}) \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{O})$ entonces el espacio de trazas lo denotamos como $\gamma_t(\mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\mathcal{O}) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\mathcal{O}))$.

En este trabajo, $A \lesssim B$ se emplea para denotar la existencia de una constante $C > 0$ tal que $A \leq C\,B$.

Además, en las justificaciones de varios procedimientos utilizamos las siguientes identidades

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\,\mathbf{c} \times \mathbf{b}, \tag{1.4a}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \tag{1.4b}$$

$$\nabla \times (\nabla p) = 0, \tag{1.4c}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0. \tag{1.4d}$$

3. Método HDG

El método HDG es un método tipo Galerkin discontinuo (DG) (ver [1]), por lo cual tiene características similares a las del método de Galerkin continuo (CG) y a las del método de volúmenes finitos. Sus bases datan de 1965 cuando se hibridizó por primera vez un método numérico aplicado a las ecuaciones de elasticidad lineal. Veinte años después, usando hibridización para analizar formulaciones asociadas a los métodos mixtos Brezzi-Douglas-Marini (BDM) y Raviart-Thomas (RT), fue posible obtener información de la solución exacta a partir de las variables de la formulación variacional. Alrededor del año 2009 Bernardo Cockburn, Jayadeep Gopalakrishnan y Raytcho Lazarov hacen uso de estas técnicas para introducir el método HDG, ver [12].

Los métodos discontinuos se pueden usar para analizar problemas definidos en dominios no homogéneos, por lo cual en este trabajo se propone un método HDG para realizar el estudio de los tres problemas. Después de proponer un método HDG, es necesario mostrar que dicho esquema es consistente y localmente conservativo, ver Sección 3.2 de [36]. Se dice que un esquema HDG es consistente si la solución exacta del problema satisface la formulación variacional HDG y cuando se clasifica como localmente conservativo, es porque el salto de los flujos numéricos es cero, es decir, son univaluados. Para entender mejor el último concepto definimos las nociones de salto de una función y de flujo numérico.

Sean K^-, K^+ elementos adyacentes de una triangulación $\mathcal{T}_h$ de un dominio dado con vectores normales $\mathbf{n}^-$ y $\mathbf{n}^+$, respectivamente. Si F es una cara en común de los elementos, es decir, $\partial K \cap \partial \overline{K} = F$, el salto de una función $\sigma = (\sigma_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ se define como

$$[\![\sigma]\!] := \sigma^- \cdot \mathbf{n}^- + \sigma^+ \cdot \mathbf{n}^+,$$

donde $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$.

Los flujos numéricos representan la aproximación de la traza de una variable del problema y corresponden a nuevas variables que se introducen en la formulación integral local asociada al problema, para unificar los valores de las funciones sobre las caras interiores de los elementos, debido a que el método de aproximación no es continuo. Dichas variables nos permiten sumar sobre todos los elementos de la triangulación en la formulación integral local, para obtener la formulación integral sobre toda la triangulación. Además, entre los flujos numéricos se proponen relaciones que permiten disminuir la cantidad de incógnitas de la formulación variacional HDG.

El método HDG se resalta entre los métodos DG debido a que permite reducir una de sus desventajas, la cual es consecuencia del aumento en la cantidad de grados de libertad debido a la duplicación de nodos en las fronteras interiores de los elementos. La reducción de los grados de libertad que se logra al hibridizar un método DG se consigue porque el sistema de ecuaciones que se resuelve de manera global tiene como incógnitas funciones que están definidas solo sobre las caras de los elementos. Posteriormente, dicha solución que corresponde a los flujos numéricos se utiliza para hallar las aproximaciones locales de las variables definidas en el volumen.

Para ilustrar el procedimiento que se utiliza para plantear un método HDG vamos a aplicarlo a un problema elíptico de segundo orden. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$, un dominio poliédrico. Dado $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ consideremos el siguiente problema con valores en la frontera:
Hallar $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en}\, \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre}\, \partial\Omega. \end{aligned}$$

Definiendo $\sigma := \nabla u$, el anterior problema se puede reescribir como:
Hallar $(u, \sigma) \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathrm{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} \sigma &= \nabla u, && \text{en}\,\Omega, \\ \nabla \cdot \sigma &= -f, && \text{en}\,\Omega, \\ u &= 0, && \text{sobre}\,\partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación de $\overline{\Omega}$ formada por triángulos o por tetraedros regulares. Se definen el conjunto de lados o caras de los elementos $\partial\mathcal{T}_h := \{\partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$ y el esqueleto $\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_\Gamma$, donde $\mathcal{E}_I$ representa a los lados o caras interiores de los elementos y $\mathcal{E}_\Gamma$ los lados o caras de frontera.

Dado $K \in \mathcal{T}_h$ tomamos dos funciones de prueba $\mathbf{w}$ y z suficientemente suaves definidas en K. Dadas (u_h, σ_h) las aproximaciones de (u, σ), testeamos las dos primeras ecuaciones de la versión discreta de (1.5) y aplicamos la identidad de Green de $\mathrm{H}(\mathbf{div}, \Omega)$

$$\begin{aligned} (\sigma_h, \mathbf{w})_K = (\nabla u_h, \mathbf{w})_K &= -(u_h, \nabla \cdot \mathbf{w})_K + \langle u_h, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K}\,, \\ (f, z) = (\nabla \cdot \sigma_h, z)_K &= -(\sigma_h, \nabla z)_K + \langle \sigma_h \cdot \mathbf{n}, z \rangle_{\partial K}\,. \end{aligned}$$

Después introducimos los flujos numéricos $\hat{u}_h$ y $\hat{\sigma}_h$ en el anterior sistema de ecuaciones, los cuales corresponden a las aproximaciones de la traza de $\mathbf{u}_h$ y la traza normal de σ_h,

$$\begin{aligned} (\sigma_h, \mathbf{w})_K = (\nabla u_h, \mathbf{w})_K &= -(u_h, \nabla \cdot \mathbf{w})_K + \langle \hat{u}_h, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K}\,, \\ (f, z) = (\nabla \cdot \sigma_h, z)_K &= -(\sigma_h, \nabla z)_K + \langle \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}, z \rangle_{\partial K}\,. \end{aligned}$$

Luego, dado un parámetro de estabilización positivo $\hat{\tau}$ proponemos la siguiente relación entre los flujos numéricos

$$\hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} := \sigma_h \cdot \mathbf{n} + \hat{\tau}(u_h - \hat{u}_h)$$

e introducimos los siguientes espacios polinomiales de dimensión finita

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_h &:= \left\{ \mathbf{w} \in [\mathrm{L}^2(\Omega)]^n : \mathbf{w}\,|_K \in\, [\mathbb{P}_k(K)]^n, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ \mathrm{Z}_h &:= \left\{ z \in \mathrm{L}^2(\Omega) : z\,|_K \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \,\in\, \mathcal{T}_h \right\}, \\ \mathrm{N}_h &:= \left\{ \eta \in \mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h) : \eta\,|_F \in\, \mathbb{P}_k(F), \forall\, F \in \mathcal{E}_h \right\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la formulación variacional HDG consiste en:
Hallar $(\sigma_h, u_h, \hat{u}_h) \in \mathrm{W}_h \times \mathrm{Z}_h \times \mathrm{N}_h$ tales que

$$\begin{aligned} (\sigma_h, \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} + (u_h, \nabla \cdot \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - \langle \hat{u}_h, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0, \\ -(\sigma_h, \nabla z)_{\mathcal{T}_h} + \langle \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}, z \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= (f, z), \\ \langle \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}, \eta \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

para todo $(\mathbf{w}, z, \eta) \in \mathrm{W}_h \times \mathrm{Z}_h \times \mathrm{N}_h$.

Para hibridizar el método discontinuo planteado en (1.6) consideramos el siguiente sistema lineal que se denomina local solver

$$
\begin{aligned}
(\sigma_h, \mathbf{w})_K + (u_h, \nabla \cdot \mathbf{w})_K &= \langle \hat{u}_h, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K}\,, \\
-(\sigma_h, \nabla z)_K + \langle \sigma_h \cdot \mathbf{n}, z \rangle_{\partial K} + \langle \hat{\tau} u_h, z \rangle_{\partial K} &= (f, z)_K - \langle \hat{\tau} \hat{u}_h, z \rangle_{\partial K}\,.
\end{aligned}
$$

Debido a su estructura la cantidad de grados de libertad que debemos hallar para resolver el problema (1.6) se reduce a los asociados a la variable $\hat{u}_h$, la cual está definida en el esqueleto.

Para obtener los grados de libertad asociados a $\hat{u}_h$ resolvemos el sistema de ecuaciones que se obtiene después de usar la relación entre los flujos numéricos en la tercera ecuación de (1.6).

Capítulo 2

PROBLEMA CON CONDICIÓN TIPO DIRICHLET

En este capítulo se presenta el análisis del esquema HDG que proponemos para estudiar las ecuaciones de Maxwell en tiempo armónico (1.1), sujetas a una condición de frontera tipo Dirichlet.

1. Planteamiento del problema

Dados L y M números positivos, consideremos un dominio correspondiente a un periodo de la celda solar que ilustramos en la Figura 1.1 del Capítulo 1, el cual definimos como $\Omega := (0,L)\times(0,L)\times(0,M) \subset \mathbb{R}^3$. Dicho dominio es por lo tanto acotado y tiene frontera poligonal conexa $\Gamma := \partial\Omega$. Luego, dado $L_m < M$, se divide a Ω en dos regiones, Ω_m y Ω_d, usando una interfase plana a trozos. La región $\Omega_m := (0,L)\times(0,L)\times(0,L_m)$ está ocupada por un metal con permitividad relativa $\epsilon_m \in \mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}(\epsilon_m) < 0$ y $\mathrm{Im}(\epsilon_m) > 0$. La región $\Omega_d := (0,L)\times(0,L)\times(L_m,M)$ la ocupa un dieléctrico con permitividad relativa $\epsilon_d \in \mathbb{R}^+$.

Dados $\hat{\mathbf{g}} \in \gamma_t(\mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega)\cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\Omega))$ y $\mathbf{J} \in \mathrm{H}(\mathbf{div}^0;\Omega)$, consideremos el problema con valores de contorno

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E} &= i\,\omega\,\mu_0\,\mathbf{H}, && \text{en } \Omega,\\ \nabla\times\mathbf{H} &= \mathbf{J} - i\,\omega\,\epsilon_0\,\epsilon\,\mathbf{E}, && \text{en } \Omega,\\ \mathbf{E}\times\mathbf{n} &= \hat{\mathbf{g}}, && \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde,

$$\epsilon := \begin{cases} \epsilon_m, & \text{en } \Omega_m,\\ \epsilon_d, & \text{en } \Omega_d. \end{cases}$$

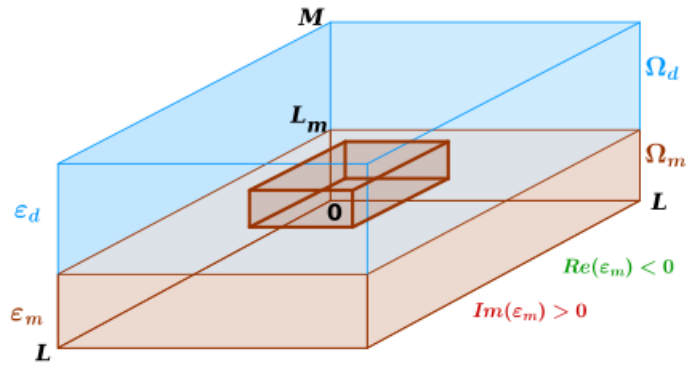

Figura 2.1: Dominio con interfase plana.

Debido a que los valores conocidos de la permitividad del vacío ϵ_0 y la permeabilidad magnética del vacío μ_0, son $8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{Fm}^{-1}$ y $4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{Hm}^{-1}$, respectivamente, se introduce el cambio de variable $\mathbf{u} := \epsilon_0^{1/2}\,\mathbf{E}$ y $\mathbf{v} := i\kappa\mu_0^{1/2}\mathbf{H}$ en (2.1), con el fin de obtener un sistema de primer orden cuya matriz este bien condicionada, ver Sección 1.2 de [35]. Entonces, teniendo en cuenta que $\omega = \frac{\kappa}{\epsilon_0^{1/2}\mu_0^{1/2}}$, se obtiene el siguiente sistema equivalente a (2.1)

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \frac{1}{\epsilon_0^{1/2}}\mathbf{u} &= \frac{i\kappa\mu_0}{\epsilon_0^{1/2}\mu_0^{1/2}}\frac{1}{i\kappa\mu_0^{1/2}}\,\mathbf{v} = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2}}\mathbf{v},\\
\nabla \times \frac{1}{i\kappa\mu_0^{1/2}}\mathbf{v} &= \mathbf{J} - \frac{i\kappa\epsilon_0\epsilon}{\mu_0^{1/2}\epsilon_0^{1/2}}\frac{1}{\epsilon_0^{1/2}}\mathbf{u} = \mathbf{J} - \frac{i\kappa\epsilon}{\mu_0^{1/2}}\mathbf{u},\\
\frac{1}{\epsilon_0^{1/2}}\mathbf{u}\times\mathbf{n} &= \hat{\mathbf{g}},
\end{aligned}
$$

de donde,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} - \nabla\times\mathbf{u} &= 0, && \text{en } \Omega,\\
\nabla\times\mathbf{v} - \kappa^2\epsilon\mathbf{u} &= i\kappa\mu_0^{1/2}\mathbf{J}, && \text{en } \Omega,\\
\mathbf{u}\times\mathbf{n} &= \epsilon_0^{1/2}\hat{\mathbf{g}}, && \text{sobre } \Gamma.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Ahora, para garantizar que (2.2) está bien puesto se impone la condición de no compresibilidad del campo eléctrico que se deriva de la segunda ecuación, lo cual hace necesario introducir una variable auxiliar p, ver por ejemplo [9, 11], la cual es cero sobre Γ. Entonces, definiendo $\mathbf{f} := i\kappa\mu_0^{1/2}\,\mathbf{J}$, $\mathbf{g} := \epsilon_0^{1/2}\hat{\mathbf{g}}$ y $\bar{\epsilon}$ como el conjugado de ϵ, de (2.2) resulta el siguiente problema de primer orden:

Hallar $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y p tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{u} &= 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \times \mathbf{v} - \kappa^2 \epsilon \mathbf{u} + \overline{\epsilon} \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) &= 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g}, \quad \text{sobre } \Gamma, \\ p_{|\Gamma} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Entonces, después de sustituir la expresión de $\mathbf{v}$ que se obtiene de la primera ecuación de (2.3), $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u}$, en su segunda ecuación, resulta el siguiente problema de segundo orden con variables $\mathbf{u}$ y p

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \kappa^2 \epsilon \mathbf{u} + \overline{\epsilon} \nabla p &= \mathbf{f}, \quad \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) &= 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g}, \quad \text{sobre } \Gamma, \\ p_{|\Gamma} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para llevar a cabo el análisis de existencia y unicidad de (2.4) seguimos las ideas presentadas en la Sección 5 de [6].
Primero supongamos $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ sobre Γ y definamos

$$\mathrm{X}_0 := \mathrm{H}_0(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}^0_\epsilon; \Omega),$$

dotado con la norma

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathrm{X}_0} := \left(\|\nabla \times \mathbf{w}\|^2_\Omega + \|\mathbf{w}\|^2_\Omega \right)^{1/2}.$$

Luego, consideremos la formulación variacional asociada a (2.4):
Hallar $(\mathbf{u}, p) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tales que

$$(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{w}) - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \tag{2.5a}$$

$$(\overline{\epsilon}\, \nabla p, \nabla q) = (\mathbf{f}, \nabla q), \tag{2.5b}$$

para todo $(\mathbf{w}, q) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

A continuación se demuestra que (2.5) tiene una única solución.

Teorema 1. *Sea $D := \nabla \times \nabla \times$ un operador definido en Ω_d. Si $\kappa^2 \epsilon_d$ no es un valor propio del problema de valores propios $D\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$, entonces (2.5) tiene una única solución $(\mathbf{u}, p) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.*

Demostración. Definamos las formas sesquilineales

$$\begin{aligned} a\colon \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0 &\to \mathbb{C} \\ (\mathbf{u},\mathbf{w}) &\mapsto a(\mathbf{u},\mathbf{w}) := (\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon_m\mathbf{u},\mathbf{w})_{\Omega_m} + \kappa^2(\epsilon_d\mathbf{u},\mathbf{w})_{\Omega_d}, \\ b\colon \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0 &\to \mathbb{C} \\ (\mathbf{u},\mathbf{w}) &\mapsto b(\mathbf{u},\mathbf{w}) := 2\kappa^2(\epsilon_d\mathbf{u},\mathbf{w})_{\Omega_d}. \end{aligned}$$

Veamos que $a(\cdot,\cdot)$ es una forma sesquilineal acotada y elíptica en X_0.

- $$\begin{aligned} |a(\mathbf{u},\mathbf{w})| &\le \left|(\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon_m\mathbf{u},\mathbf{w})_{\Omega_m} + \kappa^2(\epsilon_d\mathbf{u},\mathbf{w})_{\Omega_d}\right| \\ &\le |(\nabla\times\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w})| + \kappa^2\,|\epsilon_m(\mathbf{u},\mathbf{w})| + \kappa^2\,|\epsilon_d(\mathbf{u},\mathbf{w})| \\ &\le \|\nabla\times\mathbf{u}\|_\Omega\,\|\nabla\times\mathbf{w}\|_\Omega + \kappa^2(|\epsilon_m|+\epsilon_d)\,\|\mathbf{u}\|_\Omega\,\|\mathbf{w}\|_\Omega \\ &= (\|\nabla\times\mathbf{u}\|_\Omega\,,\kappa(|\epsilon_m|+\epsilon_d)^{1/2}\,\|\mathbf{u}\|_\Omega)\cdot(\|\nabla\times\mathbf{w}\|_\Omega\,,\kappa(|\epsilon_m|+\epsilon_d)^{1/2}\,\|\mathbf{w}\|_\Omega) \\ &\le (\|\nabla\times\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \kappa^2(|\epsilon_m|+\epsilon_d)\,\|\mathbf{u}\|_\Omega^2)^{1/2}(\|\nabla\times\mathbf{w}\|_\Omega^2 + \kappa^2(|\epsilon_m|+\epsilon_d)\,\|\mathbf{w}\|_\Omega^2)^{1/2} \\ &\le C^*\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0}\,\|\mathbf{w}\|_{\mathrm{X}_0}\,, \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} |a(\mathbf{u},\mathbf{u})| \ge \mathrm{Re}(a(\mathbf{u},\mathbf{u})) &= \|\nabla\times\mathbf{u}\|_\Omega^2 - \kappa^2\mathrm{Re}(\epsilon_m)\,\|\mathbf{u}\|_{\Omega_m}^2 + \kappa^2\epsilon_d\,\|\mathbf{u}\|_{\Omega_d}^2 \\ &\ge \|\nabla\times\mathbf{u}\|_\Omega^2 + \kappa^2\,\text{mín}\,\{|\mathrm{Re}(\epsilon_m)|\,,\epsilon_d\}\,\|\mathbf{u}\|_\Omega^2 \\ &\ge C_*\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0}^2\,, \end{aligned}$$

con $C^* := \text{máx}\,\{1,\kappa^2(|\epsilon_m|+\epsilon_d)\}$ y $C_* := \text{mín}\,\{1,\kappa^2\,\text{mín}\,\{|\mathrm{Re}\,(\epsilon_m)|\,,\epsilon_d\}\}$.
Ahora, sea $\mathrm{A}:\mathrm{X}_0\to\mathrm{X}_0'$ el operador inducido por la forma sesquilineal $a(\cdot,\cdot)$, es decir, $\mathrm{A}\mathbf{u}(\mathbf{v}) = (\mathrm{A}\mathbf{u},\mathbf{v}) = a(\mathbf{u},\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathrm{X}_0$. Entonces $\mathrm{A}\in\mathcal{L}\,(\mathrm{X}_0,\mathrm{X}_0')$ y como $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica se tiene que

$$C_*\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0}^2 \le |a(\mathbf{u},\mathbf{u})| = |(\mathrm{A}\mathbf{u},\mathbf{u})| \le \|\mathrm{A}\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0'}\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0}\,,$$

de donde,

$$\|\mathrm{A}\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0'} \ge C_*\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0}\,,$$

lo cual implica que A es un operador inyectivo con rango, $R(\mathrm{A})$, cerrado (ver Teorema 2.21 de [8]). Luego, de acuerdo con el Teorema 2.19 de [8], el rango del operador adjunto de A, $R(\mathrm{A}')$, es cerrado y el espacio nulo $N(\mathrm{A}') = \{\mathbf{0}\}$. Entonces, por las equivalencias del Teorema 2.20 de [8], se concluye que A es un operador sobreyectivo.

De otro lado, notemos que $b(\cdot,\cdot)$ es una forma sesquilineal acotada, en efecto,

$$|b\,(\mathbf{u},\mathbf{w})| \le 2\kappa^2\epsilon_d\,\|\mathbf{u}\|_\Omega\,\|\mathbf{w}\|_\Omega \le C\,\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{X}_0}\,\|\mathbf{w}\|_{\mathrm{X}_0}\,.$$

Definamos ahora las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned}
\tilde{i} :& \mathrm{X}_0 \to \mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\Omega) \\
\widetilde{\mathrm{K}} :& \mathrm{H}_0(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\Omega) \to \left[L^2(\Omega)\right]^3, \\
\mathcal{R} :& \left(\left[L^2(\Omega)\right]^3\right)' \to \left[L^2(\Omega)\right]^3, \\
i :& \left(\left[L^2(\Omega)\right]^3\right)' \to \mathrm{X}_0'.
\end{aligned}$$

Notemos que $\tilde{i}$, i son inclusiones, por lo tanto son continuas, $\mathcal{R}$ es la aplicación de Riesz y teniendo en cuenta el Teorema 4.7 de [35], se deduce que $\widetilde{\mathrm{K}}$ es una inyección compacta. Luego, como el operador $\mathrm{K} : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_0'$ inducido por la forma sesquilineal $b(\cdot,\cdot)$ se puede descomponer así

$$\mathrm{K} := i \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \widetilde{\mathrm{K}} \circ \tilde{i},$$

resulta ser compacto, debido a que es la composición de aplicaciones continuas con un operador compacto.

Entonces, (2.5a) se puede reescribir como:

$$\text{Hallar } \mathbf{u} \in \mathrm{X}_0 \text{ tal que } (\mathrm{A} - \mathrm{K})\,\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{f}},$$

donde $\widehat{\mathbf{f}} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_0, \mathbb{C})$. Veamos que $\mathrm{A} - \mathrm{K}$ es un operador inyectivo. En efecto, sean $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \in \mathrm{X}_0$ tales que $(\mathrm{A} - \mathrm{K})\,\mathbf{u}_1 = (\mathrm{A} - \mathrm{K})\,\mathbf{u}_2$. Entonces,

$$(\mathrm{A} - \mathrm{K})(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0$$

y por tanto,

$$a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{w}) = 0,$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathrm{X}_0$. Luego, tomando $\phi = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y teniendo en cuenta las definiciones de $a(\cdot,\cdot)$ y $b(\cdot,\cdot)$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
0 &= a(\phi, \mathbf{w}) - b(\phi, \mathbf{w}) \\
&= (\nabla \times \phi, \nabla \times \mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon_m \phi, \mathbf{w})_{\Omega_m} + \kappa^2(\epsilon_d \phi, \mathbf{w})_{\Omega_d} - 2\kappa^2(\epsilon_d \phi, \mathbf{w})_{\Omega_d},
\end{aligned}$$

de donde,

$$(\nabla \times \phi, \nabla \times \mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon\phi, \mathbf{w}) = 0,$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathrm{X}_0$. Entonces, tomando $\mathbf{w} = \phi$ se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla \times \phi, \nabla \times \phi) - \kappa^2(\epsilon\phi, \phi) \\
&= \|\nabla \times \phi\|_\Omega^2 + \kappa^2 |\mathrm{Re}(\epsilon_m)| \, \|\phi\|_{\Omega_m}^2 - i\kappa^2 \,\mathrm{Im}(\epsilon_m) \, \|\phi\|_{\Omega_m}^2 - \kappa^2 \epsilon_d \, \|\phi\|_{\Omega_d}^2
\end{aligned}$$

y tomando parte imaginaria

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Im}\left[\|\nabla\times\phi\|^2_{\Omega_m} + \kappa^2\left|\mathrm{Re}\left(\epsilon_m\right)\right|\|\phi\|^2_{\Omega_m} - i\kappa^2\mathrm{Im}\left(\epsilon_m\right)\|\phi\|^2_{\Omega_m} - \kappa^2\epsilon_d\|\phi\|^2_{\Omega_d}\right] \\ &= -\kappa^2\mathrm{Im}\left(\epsilon_m\right)\|\phi\|^2_{\Omega_m}, \end{aligned}$$

de donde, $\phi = 0$ en Ω_m, puesto que $\mathrm{Im}\left(\epsilon_m\right) > 0$. Por lo tanto,

$$0 = (\nabla\times\phi, \nabla\times\phi) - \kappa^2(\epsilon\phi,\phi) = \|\nabla\times\phi\|^2_{\Omega_d} - \kappa^2\epsilon_d\|\phi\|^2_{\Omega_d},$$

lo cual implica que $\phi = 0$ en Ω_d si y sólo si $\kappa^2\epsilon_d$ no es un valor propio del problema $D\phi = \lambda\phi$. En consecuencia, $\mathrm{A}-\mathrm{K}$ es inyectivo si y sólo si $\kappa^2\epsilon_d$ no es un valor propio de $D\phi = \lambda\phi$. Luego, por la alternativa de Fredholm se concluye que $\mathrm{A}-\mathrm{K}$ es biyectivo. Entonces, existe un único $\mathbf{u}\in\mathrm{X}_0$ que satisface (2.5a).

Resta mostrar que (2.5b) también tiene una única solución. Para desarrollar la prueba se emplea un procedimiento análogo al usado en el caso (2.5a). Primero se definen las formas sesquilineales

$$\begin{aligned} a\colon \mathrm{H}^1_0(\Omega)\times\mathrm{H}^1_0(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ (p,q) &\mapsto a(p,q) := (\overline{\epsilon}\,\nabla p, \nabla q) - i(\nabla p, \nabla q), \\ b\colon \mathrm{H}^1_0(\Omega)\times\mathrm{H}^1_0(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ (p,q) &\mapsto b(p,q) := -i(\nabla p, \nabla q), \end{aligned}$$

las cuales son acotadas. En efecto,

- $$\begin{aligned} |a(p,q)| \le |(\overline{\epsilon}\,\nabla p, \nabla q)| + |i(\nabla p,\nabla q)| &\le \|\overline{\epsilon}\,\nabla p\|_\Omega\|\nabla q\|_\Omega + \|\nabla p\|_\Omega\|\nabla q\|_\Omega \\ &\le \widehat{C}\,\|\nabla p\|_\Omega\|\nabla q\|_\Omega \\ &\le \widehat{C}\,\|p\|_{1,\Omega}\|q\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

- $$|b(p,q)| \le |-i(\nabla p,\nabla q)| \le \|\nabla p\|_\Omega\|\nabla q\|_\Omega \quad \le \|p\|_{1,\Omega}\|q\|_{1,\Omega},$$

donde $\widehat{C} := \text{máx}\left\{|\overline{\epsilon}|, 1\right\}$.
Además, $a(\cdot,\cdot)$ es elíptica por la desigualdad de Poincaré (ver Proposición 5.35 de [7])

$$\begin{aligned} |a(p,p)| \ge \left|\mathrm{Im}\left[(\overline{\epsilon}\nabla p,\nabla p) - i(\nabla p,\nabla p)\right]\right| &= \left|\mathrm{Im}(\overline{\epsilon_m})\|\nabla p\|^2_{\Omega_m} - \|\nabla p\|^2_\Omega\right| \\ &= \left|\mathrm{Im}(\epsilon_m)\|\nabla p\|^2_{\Omega_m} + \|\nabla p\|^2_\Omega\right| \\ &\ge C\|p\|^2_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

De otra parte, sea $\mathrm{K} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)'$ el operador inducido por la forma sesquilineal $b(\cdot,\cdot)$. Veamos que K es un operador compacto. Consideremos las aplicaciones

$$\begin{aligned} i &: \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}^1(\Omega), \\ \widetilde{\mathrm{K}} &: \mathrm{H}^1(\Omega) \to L^2(\Omega), \\ \mathcal{R} &: \left[L^2(\Omega)\right]' \to L^2(\Omega), \\ \tilde{i} &: \left[L^2(\Omega)\right]' \to \left[\mathrm{H}_0^1(\Omega)\right]', \end{aligned}$$

y la siguiente reescritura para el operador K

$$\mathrm{K} := \tilde{i} \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \widetilde{\mathrm{K}} \circ i.$$

Notemos que K es un operador compacto, puesto que es la composición de las funciones continuas i, $\mathcal{R}^{-1}$, $\tilde{i}$ y la inyección compacta $\widetilde{\mathrm{K}}$, ver Teorema 9.11 (Teorema de Rellich) en [20].

Ahora, veamos que $\mathrm{A} - \mathrm{K}$ es inyectivo. Sean p_1, $p_2 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tales que $(\mathrm{A} - \mathrm{K})\, p_1 = (\mathrm{A} - \mathrm{K})\, p_2$. Entonces,

$$(\mathrm{A} - \mathrm{K})\,(p_1 - p_2) = 0$$

y por tanto,

$$a(p_1 - p_2, q) - b(p_1 - p_2, q) = 0,$$

para todo $q \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Luego, tomando $\phi = p_1 - p_2$ y teniendo en cuenta las definiciones de $a(\cdot,\cdot)$ y $b(\cdot,\cdot)$, resulta

$$\begin{aligned} 0 = a(\phi, q) - b(\phi, q) &= (\overline{\epsilon}\nabla\phi, \nabla q) - i(\nabla\phi, \nabla q) + i(\nabla\phi, \nabla q) \\ &= (\overline{\epsilon}\nabla\phi, \nabla q) \\ &= (\overline{\epsilon_m}\nabla\phi, \nabla q)_{\Omega_m} + (\epsilon_d\nabla\phi, \nabla q)_{\Omega_d}, \end{aligned}$$

para todo $q \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Entonces, si $q = \phi$ en la anterior expresión, se tiene que

$$(\mathrm{Re}\,(\epsilon_m) - i\,\mathrm{Im}\,(\epsilon_m))\,\|\nabla\phi\|_{\Omega_m}^2 + \epsilon_d\,\|\nabla\phi\|_{\Omega_d}^2 = 0,$$

y su parte imaginaria satisface

$$\mathrm{Im}\,(\epsilon_m)\,\|\nabla\phi\|_{\Omega_m}^2 = 0,$$

de lo cual $\nabla\phi = 0$ en Ω_m, puesto que $\mathrm{Im}\,(\epsilon_m) > 0$. En consecuencia,

$$0 = (\overline{\epsilon_m}\,\nabla\phi, \nabla q)_{\Omega_m} + (\epsilon_d\nabla\phi, \nabla q)_{\Omega_d} = (\epsilon_d\nabla\phi, \nabla q)_{\Omega_d},$$

de donde, tomando $q = \phi$ se obtiene que $\nabla\phi = 0$ en Ω_d, por que $\epsilon_d > 0$. De lo anterior, ϕ es constante en Ω_m y Ω_d. Luego, teniendo en cuenta que ϕ es cero en Γ, por su definición, entonces $\phi = 0$ en Ω. De lo anterior, $\mathrm{A} - \mathrm{K}$ es inyectivo y por la alternativa de Fredholm se concluye que $\mathrm{A} - \mathrm{K}$ es biyectivo, lo cual implica que (2.5b) tiene una única solución. ■

Ahora veamos que los problemas (2.4) y (2.5) son equivalentes, es decir, existe $p \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \kappa^2 \epsilon \mathbf{u} = \mathbf{f} - \overline{\epsilon} \nabla p,$$

en el sentido de las distribuciones. Notemos que del Teorema 1 existe un único $\mathbf{u} \in \mathrm{X}_0$ el cual es solución de (2.5a), entonces definiendo $\tilde{\mathbf{f}} := \mathbf{f} + \kappa^2 \epsilon \mathbf{u}$, la anterior ecuación puede reescribirse como

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \overline{\epsilon} \nabla p = \tilde{\mathbf{f}}.$$

Ahora bien, dados $\mathbf{w} \in [C_0^\infty(\Omega)]^3$ y $q \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tales que $(\overline{\epsilon}\nabla r, \nabla q) = (\overline{\epsilon}\nabla r, \mathbf{w})$, para todo $r \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, entonces $\mathbf{v} := \mathbf{w} - \nabla q \in \mathrm{X}_0$. En efecto,

- $\mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = \mathbf{w} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} - \nabla q \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0.$
- $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{w} - \nabla \times \nabla q = \nabla \times \mathbf{w} \in \left[\mathrm{L}^2(\Omega)\right]^3$, ver 1.4c.
- Como $(\overline{\epsilon}\nabla r, \nabla q) = (\overline{\epsilon}\nabla r, \mathbf{w})$ entonces usando la identidad de Green de $\mathrm{H}(\mathbf{div};\Omega)$, teniendo en cuenta (2.5b) y que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, resulta

  $$0 = (r, \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{w} - \nabla q)) = (r, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{w})) - (\nabla \cdot \mathbf{f}, q) = (r, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{w})),$$

  para todo $r \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, tomando $r = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{w})$, de lo anterior se obtiene $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{w}) = 0$ y así $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{v}) = 0$.

Notemos entonces que teniendo en cuenta lo anterior y usando identidades de Green, resulta

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}) &= (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \overline{\epsilon}\nabla p, \mathbf{v}) \\
&= (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) + \left\langle (\nabla \times \mathbf{u})^t, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \right\rangle - (p, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{v})) + \langle p, \epsilon \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle \\
&= (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Luego, como

$$\begin{aligned}
(\overline{\epsilon}\nabla p, \mathbf{w}) &= -(p, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{w})) + \langle p, \epsilon \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle = 0, \\
-(\tilde{\mathbf{f}}, \nabla q) &= (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{f}}, q) - \langle \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}, q \rangle = 0,
\end{aligned}$$

entonces,

$$(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{w}) + (\overline{\epsilon}\nabla p, \mathbf{w}) = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}) = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{w}),$$

de donde, por la identidad de Green de $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \overline{\epsilon}\,\nabla p, \mathbf{w}) = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{w})$$

y por tanto, como $\mathbf{w} \in [C_0^\infty(\Omega)]^3$ es arbitrario, entonces

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \overline{\epsilon}\,\nabla p = \tilde{\mathbf{f}},$$

en $[\mathcal{D}(\Omega)']^3$.

Ahora, sea $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ en (2.4). introducimos el espacio

$$\mathrm{X}_{\mathbf{g}} := \left\{ \mathbf{w} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}^0_\epsilon;\Omega) : \gamma_t(\mathbf{w}) = \mathbf{g} \right\},$$

donde γ_t es el operador traza tangencial, $\gamma_t : \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \to [\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)]^3$, el cual no es sobreyectivo, ver Observación 3.30 de [35].
Notemos que $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}^0_\epsilon;\Omega) \subset \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)$ y si

$$\mathbf{g} \in \gamma_t \left(\mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}^0_\epsilon;\Omega) \right) \subset [\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)]^3,$$

entonces existe $\varphi \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}^0_\epsilon;\Omega)$ tal que $\gamma_t(\varphi) = \mathbf{g}$. Definiendo $\chi := \mathbf{u} - \varphi$, se tiene que $\gamma_t(\chi) = \gamma_t(\mathbf{u}) - \gamma_t(\varphi) = 0$ sobre Γ y $\nabla \cdot (\epsilon\chi) = 0$, lo cual implica que $\chi \in \mathrm{X}_0$ y $\mathbf{u} := \chi + \varphi$. Luego, teniendo en cuenta lo anterior en (2.5a), resulta

$$(\nabla \times \chi, \nabla \times \mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon\chi, \mathbf{w}) = (\mathbf{f} + \kappa^2\epsilon\varphi, \mathbf{w}) - (\nabla \times \varphi, \nabla \times \mathbf{w}),$$

para todo $(\mathbf{w}, q) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Entonces, si definimos $\overset{\star}{\mathbf{f}} : \mathrm{X}_0 \to \mathbb{C}$ como

$$\overset{\star}{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) := (\mathbf{f} + \kappa^2\epsilon\varphi, \mathbf{w}) - (\nabla \times \varphi, \nabla \times \mathbf{w}),$$

notemos que $\nabla \cdot \overset{\star}{\mathbf{f}} = 0$ (ver 1.4d) y la formulación variacional asociada a (2.4) consiste en:
Hallar $(\chi, p) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} (\nabla \times \chi, \nabla \times \mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon\chi, \mathbf{w}) &= (\overset{\star}{\mathbf{f}}, \mathbf{w}), \\ (\overline{\epsilon}\,\nabla p, \nabla q) &= (\overset{\star}{\mathbf{f}}, \nabla q), \end{aligned} \tag{2.6}$$

para todo $(\mathbf{w}, q) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

La existencia de una única solución de (2.6) es consecuencia del Teorema 1 y para demostrar su equivalencia con (2.4), se procede como en el caso $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Los argumentos anteriores garantizan la existencia y unicidad de la solución del problema con condición Dirichlet no homogénea, $(\mathbf{u}, p) \in \mathrm{X}_{\mathbf{g}} \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

2. Formulación HDG

En está sección se plantea un esquema HDG para (2.3), el cual demostramos que es localmente conservativo y consistente.

Consideremos las triangulaciones cuasi-uniformes $\{\mathcal{T}_h^m\}_{h>0}$ y $\{\mathcal{T}_h^d\}_{h>0}$ de $\overline{\Omega}_m$ y $\overline{\Omega}_d$, respectivamente, con la característica de que los elementos están completamente contenidos en los conjuntos y no tienen elementos comunes. Teniendo en cuenta lo anterior, se define la triangulación $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ como la unión de $\mathcal{T}_h^m$ y $\mathcal{T}_h^d$, la cual, como puede consultarse en la definición 4.4.13 de [7], satisface que existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$\operatorname*{mín}_{K\in\mathcal{T}_h} h_K \geq c_1 h, \qquad\qquad h_K \leq c_2 h,$$

donde $h := \text{máx}_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. Además, se definen $\partial\mathcal{T}_h := \{\partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$ y el esqueleto $\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_\Gamma \cup \mathcal{E}_I$ como el conjunto de todas las caras inducidas por $\mathcal{T}_h$, donde $\mathcal{E}_\Gamma$ representa las caras en la frontera del dominio y $\mathcal{E}_I$ las caras internas. Teniendo en cuenta lo anterior, se definen los subespacios de dimensión finita Q_h, M_h, V_h y M_h^t, así

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_h &:= \left\{q \in \mathrm{L}^2(\Omega) : q\,|_K \in \mathbb{P}_k(K),\ \forall\ K \in \mathcal{T}_h\right\},\\
\mathrm{M}_h &:= \left\{\mu \in \mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h) : \mu\,|_F \in \mathbb{P}_k(F),\ \forall\ F \in \mathcal{E}_h\right\},\\
\mathrm{V}_h &:= \left\{\mathbf{w} \in \left[\mathrm{L}^2(\Omega)\right]^3 : \mathbf{w}\,|_K \in \left[\mathbb{P}_k(K)\right]^3,\ \forall\ K \in \mathcal{T}_h\right\},\\
\mathrm{M}_h^t &:= \left\{\beta \in \left[\mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h)\right]^3 : \beta\,|_F \in \left[\mathbb{P}_k(F)\right]^3, (\beta\cdot\mathbf{n})\,|_F = 0,\ \forall\ F \in \mathcal{E}_h\right\},
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{P}_k(W)$ denota el espacio de polinomios de grado menor o igual a k, definidos en W. Los productos interiores L^2 en los complejos, definidos en $\mathcal{T}_h$, $\partial\mathcal{T}_h$ y Γ corresponden a los siguientes productos internos quebrados

$$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{T}_h} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\cdot,\cdot)_K, \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial K}, \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma := \sum_{F\in\mathcal{E}_\Gamma} \langle\cdot,\cdot\rangle_F.$$

Ahora, planteamos la formulación variacional HDG asociada a (2.3), mediante la cual aproximamos $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y p con $\mathbf{v}_h$, $\mathbf{u}_h$ y p_h. Dado $K \in \mathcal{T}_h$ sean $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ y t funciones de prueba suficientemente suaves definidas en K. Entonces, testeando las tres primeras ecuaciones de (2.3) y usando identidades de Green, resulta

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{v}_h,\mathbf{w})_K - (\nabla\times\mathbf{u}_h,\mathbf{w})_K = (\mathbf{v}_h,\mathbf{w})_K - (\mathbf{u}_h,\nabla\times\mathbf{w})_K - \langle\gamma_\tau(\mathbf{u}_h),\gamma_t(\mathbf{w})\rangle_{\partial K},\\
(\mathbf{f},\mathbf{z})_K &= (\nabla\times\mathbf{v}_h,\mathbf{z})_K - \left(\kappa^2\epsilon\mathbf{u}_h,\mathbf{z}\right)_K + (\bar{\epsilon}\nabla p_h,\mathbf{z})_K\\
&= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\mathbf{z})_K + \langle\gamma_\tau(\mathbf{v}_h),\gamma_t(\mathbf{z})\rangle_{\partial K} - \kappa^2(\epsilon\mathbf{u}_h,\mathbf{z})_K - (p_h,\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_K\\
&\quad + \langle p_h,\epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial K},\\
0 &= (\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{u}_h),t)_K = -(\epsilon\mathbf{u}_h,\nabla t)_K + \langle\epsilon\mathbf{u}_h^n\cdot\mathbf{n},t\rangle_{\partial K}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Debido a que el método HDG es discontinuo entonces los valores de $\mathbf{v}_h$, $\mathbf{u}_h$ y p_h no coinciden en las caras interiores de los elementos de $\mathcal{T}_h$, por tal razón se introducen unas nuevas variables, $\widehat{\mathbf{u}}_h^t$, $\widehat{\mathbf{v}}_h^t$, $\widehat{p}_h$ y $\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}$, que se conocen como flujos numéricos y corresponden a las aproximaciones de $\gamma_\tau(\mathbf{v}_h)$, $\gamma_\tau(\mathbf{u}_h)$, $\gamma_0(p_h)$ y $\gamma_{\mathbf{n}}(\epsilon\mathbf{u}_h^n)$ sobre el esqueleto,

respectivamente. Entonces de (2.7) resulta

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \mathbf{w})_K - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{w})_K - \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \gamma_t(\mathbf{w}) \rangle_{\partial K} &= 0, \\
(\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{z})_K + \langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \gamma_t(\mathbf{z}) \rangle_{\partial K} - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{z})_K & \\
- (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{z}))_K + \langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= (\mathbf{f}, \mathbf{z}), \\
- (\epsilon \mathbf{u}_h, \nabla t)_K + \langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, t \rangle_{\partial K} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

y sumando sobre todo $K \in \mathcal{T}_h$ en (2.8), se obtiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \gamma_t(\mathbf{w}) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= 0, \\
(\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \gamma_t(\mathbf{z}) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} & \\
- (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= (\mathbf{f}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}, \\
- (\epsilon \mathbf{u}_h, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= 0.
\end{aligned}$$

Notemos que el anterior sistema tiene como incógnitas $\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \widehat{p}_h, \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n}$ que se pueden reducir a $\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \widehat{p}_h$ por medio de las siguientes relaciones entre los flujos numéricos definidos sobre $\mathcal{E}_h$

$$\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t + \tau(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t), \tag{2.9a}$$

$$\widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n} = \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n} + \tau_n (p_h - \widehat{p}_h), \tag{2.9b}$$

donde τ y τ_n son parámetros de estabilización positivos que se definirán posteriormente.

Teniendo en cuenta lo anterior, se plantea la siguiente formulación variacional HDG para (2.3): Hallar $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_h^t \times M_h$ tales que

$$(\mathbf{v}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \gamma_t(\mathbf{w}) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{2.10a}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \gamma_t(\mathbf{z}) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} & \\
- (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= \mathbf{F}(\mathbf{z}),
\end{aligned} \tag{2.10b}$$

$$- (\epsilon\, \mathbf{u}_h, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{2.10c}$$

$$\langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \eta \rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = 0, \tag{2.10d}$$

$$\langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \mu \rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = 0, \tag{2.10e}$$

$$\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \eta \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{g}, \eta \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma}, \tag{2.10f}$$

$$\langle \widehat{p}_h, \mu \rangle_{\Gamma} = 0, \tag{2.10g}$$

para todo $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t, \eta, \mu) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_h^t \times \mathrm{M}_h$. Aquí, se introduce el funcional $\mathbf{F} : \left[\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)\right]^3 \to \mathbb{C}$, con el fin de generalizar el análsis de error y el estimativo de estabilidad. Notemos que en (2.10), $\mathbf{F}(\mathbf{z}) := (\mathbf{f}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}$ y (2.10f), (2.10g) son consecuencia inmediata de la cuarta y quinta ecuación de (2.3), respectivamente. Más aún, para imponer la continuidad de la traza tangencial de $\mathbf{v}_h$ y la traza normal de $\epsilon \mathbf{u}_h$, se incluyen

las ecuaciones (2.10d) y (2.10e), respectivamente.

A continuación, usamos procedimientos análogos a los presentados en la Sección 3.2 de [36] para demostrar que (2.10) es localmente conservativa y consistente.

Lema 1. *La formulación HDG (2.10) es localmente conservativa y consistente.*

Demostración. Primero veamos que (2.10) es localmente conservativa.
Supongamos que $\langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \eta \rangle_{\mathcal{E}_I} = 0$, para todo $\eta \in \mathrm{M}_h^t$. Luego, como $\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \in \mathrm{M}_h^t$, tomando $\eta = \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t$ se tiene que

$$0 = \left\langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \eta \right\rangle_{\mathcal{E}_I} = \left\langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\mathcal{E}_I} = \left\| \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\|_{\mathcal{E}_I}^2,$$

de donde $\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t = 0$ en $\mathcal{E}_I$. Entonces, teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (2.9a) y la definición de salto dada en la tercera sección del primer capítulo, resulta

$$\begin{aligned} 0 = [\![\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t]\!] &= [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t + \tau(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t)]\!] \\ &= [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] + [\![\tau(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t)]\!] \\ &= [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] + \tau((\mathbf{u}_h^{t^+} - \widehat{\mathbf{u}}_h^{t^+}) + (\mathbf{u}_h^{t^-} - \widehat{\mathbf{u}}_h^{t^-})). \end{aligned}$$

Luego, dado que $\widehat{\mathbf{u}}_h^{t^+} = \widehat{\mathbf{u}}_h^{t^-} = \widehat{\mathbf{u}}_h^t$, de lo anterior

$$2\tau \widehat{\mathbf{u}}_h^t = [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] + \tau(\mathbf{u}_h^{t^+} + \mathbf{u}_h^{t^-})$$

y por tanto

$$\widehat{\mathbf{u}}_h^t = \frac{1}{2\tau}[\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] + \frac{\mathbf{u}_h^{t^+} + \mathbf{u}_h^{t^-}}{2},$$

de donde, como $\widehat{\mathbf{v}}_h^t = \mathbf{v}_h^t + \tau(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t) \times \mathbf{n}$ por (2.9a), entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{v}}_h^t &= \mathbf{v}_h^t + \tau \left(\mathbf{u}_h^t - \frac{1}{2\tau}[\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] - \frac{(\mathbf{u}_h^{t^+} + \mathbf{u}_h^{t^-})}{2} \right) \times \mathbf{n} \\ &= \mathbf{v}_h^t + \frac{1}{2}(2\tau\, \mathbf{u}_h^t - [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] - \tau(\mathbf{u}_h^{t^+} + \mathbf{u}_h^{t^-})) \times \mathbf{n}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{v}}_h^{t^+} &= \mathbf{v}_h^{t^+} + \frac{1}{2}(2\tau\, \mathbf{u}_h^{t^+} - [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] - \tau(\mathbf{u}_h^{t^+} + \mathbf{u}_h^{t^-})) \times \mathbf{n}^+ \\ &= \mathbf{v}_h^{t^+} + \frac{1}{2}(\tau\, \mathbf{u}_h^{t^+} - [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] - \tau\, \mathbf{u}_h^{t^-}) \times \mathbf{n}^+ \\ &= \mathbf{v}_h^{t^+} + \frac{1}{2}(\tau\, \mathbf{u}_h^{t^+} \times \mathbf{n}^+ - [\![\mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t]\!] \times \mathbf{n}^+ - \tau\, \mathbf{u}_h^{t^-} \times \mathbf{n}^+) \end{aligned} \tag{2.11}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{v}}_h^{t^-} &= \mathbf{v}_h^{t^-} + \frac{1}{2}(2\tau\mathbf{u}_h^{t^-} - [\![\mathbf{n}\times\mathbf{v}_h^t]\!] - \tau(\mathbf{u}_h^{t^+} + \mathbf{u}_h^{t^-}))\times\mathbf{n}^- \\ &= \mathbf{v}_h^{t^-} + \frac{1}{2}(\tau\mathbf{u}_h^{t^-} - [\![\mathbf{n}\times\mathbf{v}_h^t]\!] - \tau\mathbf{u}_h^{t^+})\times\mathbf{n}^- \\ &= \mathbf{v}_h^{t^-} + \frac{1}{2}(\tau\mathbf{u}_h^{t^-}\times\mathbf{n}^- - [\![\mathbf{n}\times\mathbf{v}_h^t]\!]\times\mathbf{n}^- - \tau\mathbf{u}_h^{t^+}\times\mathbf{n}^-). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ahora veamos que $\widehat{\mathbf{v}}_h^{t^+} = \widehat{\mathbf{v}}_h^{t^-}$. En efecto,

$$\begin{aligned}[\![\mathbf{n}\times\mathbf{v}_h^t]\!]\times\mathbf{n}^+ &= (\mathbf{n}^+\times\mathbf{v}_h^{t^+} + \mathbf{n}^-\times\mathbf{v}_h^{t^-})\times\mathbf{n}^+ \\ &= \mathbf{n}^+\times(\mathbf{v}_h^{t^+}\times\mathbf{n}^+) + \mathbf{n}^-\times(\mathbf{v}_h^{t^-}\times\mathbf{n}^+) \\ &= ((\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{n}^+)\mathbf{v}_h^{t^+} - (\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{v}_h^{t^+})\mathbf{n}^+) + ((\mathbf{n}^-\cdot\mathbf{n}^+)\mathbf{v}_h^{t^-} - (\mathbf{n}^-\cdot\mathbf{v}_h^{t^-})\mathbf{n}^+) \\ &= \mathbf{v}_h^{t^+} - \mathbf{v}_h^{t^-},\end{aligned}$$

puesto que $\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{v}_h^{t^+} = \mathbf{n}^-\cdot\mathbf{v}_h^{t^-} = 0$ y además,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h^{t^+}\times\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^+\times(\mathbf{u}_h^+\times\mathbf{n}^+)\times\mathbf{n}^+ &= ((\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{n}^+)\mathbf{u}_h^+ - (\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{u}_h^+)\mathbf{n}^+)\times\mathbf{n}^+ \\ &= \mathbf{u}_h^+\times\mathbf{n}^+ - (\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{u}_h^+)\mathbf{n}^+\times\mathbf{n}^+ \\ &= \mathbf{u}_h^+\times\mathbf{n}^+.\end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene que $[\![\mathbf{n}\times\mathbf{v}_h^t]\!]\times\mathbf{n}^- = \mathbf{v}_h^{t^-} - \mathbf{v}_h^{t^+}$ y $\mathbf{u}_h^{t^-}\times\mathbf{n}^- = \mathbf{u}_h^-\times\mathbf{n}^-$. Luego, sustituyendo lo obtenido en (2.11) y (2.12) resulta

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{v}}_h^{t^+} &= \mathbf{v}_h^{t^+} + \frac{1}{2}(\tau\,\mathbf{u}_h^+\times\mathbf{n}^+ - \mathbf{v}_h^{t^+} + \mathbf{v}_h^{t^-} - \tau\,\mathbf{u}_h^-\times\mathbf{n}^+) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_h^{t^+} + \mathbf{v}_h^{t^-} + \tau(\mathbf{u}_h^+ - \mathbf{u}_h^-)\times\mathbf{n}^+)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{v}}_h^{t^-} &= \mathbf{v}_h^{t^-} + \frac{1}{2}(\tau\,\mathbf{u}_h^{t^-}\times\mathbf{n}^- - \mathbf{v}_h^{t^-} + \mathbf{v}_h^{t^+} - \tau\,\mathbf{u}_h^{t^+}\times\mathbf{n}^-) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_h^{t^-} + \mathbf{v}_h^{t^+} + \tau(\mathbf{u}_h^- - \mathbf{u}_h^+)\times\mathbf{n}^-).\end{aligned}$$

Entonces, como $\widehat{\mathbf{v}}_h^{t^+} = \widehat{\mathbf{v}}_h^{t^-}$, el flujo $\widehat{\mathbf{v}}_h^t$ es conservativo. Mediante un argumento análogo se demuestra que $\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}$ también es un flujo conservativo y de acuerdo con la definición se concluye que (2.10) es localmente conservativa.

Para demostrar que el esquema HDG es consistente, notemos que la solución exacta de (2.5) es tal que $(\mathbf{u}, p) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, lo cual implica que $\widehat{\mathbf{u}}^t = \mathbf{u}^t$, $\widehat{\epsilon\mathbf{u}^n} = \epsilon\mathbf{u}^n$ y $\widehat{p} = p$ en $\mathcal{E}_h$. De lo anterior y (2.9a) se tiene que $\widehat{\mathbf{v}}^t = \mathbf{v}^t$. Entonces, teniendo en cuenta lo anterior en (2.10a), (2.10b), (2.10c) y aplicando las identidades de Green, se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}^t - \widehat{\mathbf{u}}^t, \mathbf{w} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}, \\
\mathbf{F}(\mathbf{z}) &= \left(\nabla \times \mathbf{v} - \kappa^2 \epsilon \mathbf{u} + \overline{\epsilon}\, \nabla p, \mathbf{z}\right)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\mathbf{v}}^t - \mathbf{v}^t, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= \left(\nabla \times \mathbf{v} - \kappa^2 \epsilon \mathbf{u} + \overline{\epsilon}\, \nabla p, \mathbf{z}\right)_{\mathcal{T}_h}, \\
0 &= (\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}), t)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\epsilon\mathbf{u}^n} - \epsilon\mathbf{u}^n, t \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}), t)_{\mathcal{T}_h},
\end{aligned}$$

para todo $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h$. Entonces, lo anterior implica que la solución exacta de (2.3) satisface (2.10) y por tanto, el método HDG es consistente. ■

A continuación se presenta el análisis de la existencia de una única solución de (2.10).

2.1. Existencia y unicidad

Inicialmente se deduce una identidad tipo G$\mathring{a}$rding, siguiendo los lineamientos del Lema 4.3 de [15].

Lema 2. *Las incógnitas* $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_h^t \times \mathrm{M}_h$ *de (2.10) satisfacen la siguiente identidad tipo G$\mathring{a}$rding*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\
&\qquad + \kappa^2 \left(|Re\,(\epsilon_m)| + i\, Im\,(\epsilon_m)\right) \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 = \kappa^2 \epsilon_d \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 + \overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right) - \left\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $\overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right)$ *representa el conjugado de* $\mathbf{F}\left(\mathbf{u}_h\right)$.

Demostración. Tomando $\mathbf{w} := \mathbf{v}_h$, $\mathbf{z} := \mathbf{u}_h$ y $t := p_h$ en (2.10), resulta

$$(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0, \tag{2.14a}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} &+ \langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2 \left(\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&- (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h))_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}_h\right),
\end{aligned} \tag{2.14b}$$

$$-\left(\epsilon\, \mathbf{u}_h, \nabla p_h\right)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0. \tag{2.14c}$$

Ahora bien, aplicando la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{curl}; \mathcal{T}_h)$ al segundo término de (2.14a) y la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h)$ al primer término de (2.14c), se obtiene

$$(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla \times \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0,$$

$$(\nabla \cdot (\epsilon\, \mathbf{u}_h)\,, p_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \epsilon\, \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0.$$

Luego, después de sumar las anteriores expresiones con el conjugado de (2.14b), simplificar y aplicar (1.4a), resulta la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - \left\langle \mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 \left(\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h\right)_{\mathcal{T}_h} \\ + \langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h),\end{aligned}$$

de lo cual, sumando y restando $\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$ y $\langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$ se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \left(\widehat{\mathbf{v}}_h^t - \mathbf{v}_h^t\right) \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 \left(\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h\right)_{\mathcal{T}_h} \\ + \langle (\widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} - \epsilon \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{n}, p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h),\end{aligned}$$

que de acuerdo con (2.9), (2.10f) y (2.10g) es equivalente a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \tau \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 \left(\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h\right)_{\mathcal{T}_h} \\ + \langle \tau_n (p_h - \widehat{p}_h), p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right).\end{aligned}$$

Además, de (2.10d) y (2.10f), resulta

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma} + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma} = \left\langle \mathbf{g}, \mathbf{n} \times \left(\widehat{\mathbf{v}}_h^t \times \mathbf{n}\right) \right\rangle_{\Gamma} \\ = \left\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma}\end{aligned}$$

y después de sustituirlo en la expresión anterior y usar la definición de ϵ, se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \left\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma} - \kappa^2 \overline{\epsilon_m} \left\|\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 - \kappa^2 \epsilon_d \left\|\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 \\ + \left\|\tau_n^{1/2} \left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 = \overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right),\end{aligned}$$

de lo cual,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2 \left(\left|\mathrm{Re}\left(\epsilon_m\right)\right| + i\, \mathrm{Im}\left(\epsilon_m\right)\right) \left\|\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 \\ + \left\|\tau_n^{1/2} \left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 = \kappa^2 \epsilon_d \left\|\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 + \overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right) - \left\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma}.\end{aligned}$$

■

En el siguiente teorema se demuestra que la solución de (2.10) existe y es única, usando la identidad tipo G$\mathring{a}$rding dada en el lema.

Teorema 2. *Si $\kappa^2\epsilon_d$ no es un valor propio del problema de valores propios: Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\varphi_h, \psi_h, \sigma_h, \widehat{\psi}_h^t, \widehat{\sigma}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_h^t \times \mathrm{M}_h$ tales que*

$$\begin{aligned}
(\varphi_h, \mathbf{s})_{\mathcal{T}_h} - (\psi_h, \nabla \times \mathbf{s})_{\mathcal{T}_h} - \langle \widehat{\psi}_h^t, \gamma_t(\mathbf{s})\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0,\\
(\varphi_h, \nabla \times \mathbf{q})_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\varphi}_h^t, \gamma_t(\mathbf{q})\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2 \left(\epsilon_m \psi_h, \mathbf{q}\right)_{\mathcal{T}_h^m} &\\
- \left(\sigma_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{q})\right)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\sigma}_h, \epsilon \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= \lambda \left(\psi_h, \mathbf{q}\right)_{\mathcal{T}_h^d},\\
- \left(\epsilon\, \psi_h, \nabla r\right)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \psi_h^n} \cdot \mathbf{n}, r\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0,\\
\left\langle \mathbf{n} \times \widehat{\varphi}_h^t, \eta\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} &= 0,\\
\langle \widehat{\epsilon\, \psi_h^n} \cdot \mathbf{n}, \zeta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} &= 0,\\
\langle \widehat{\psi}_h^t, \eta\rangle_{\Gamma} &= 0,\\
\langle \widehat{\sigma}_h, \zeta\rangle_{\Gamma} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{q}, r, \eta, \zeta) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_h^t \times \mathrm{M}_h$, donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times \widehat{\varphi}_h^t &= \mathbf{n} \times \varphi_h^t + \tau(\psi_h^t - \widehat{\psi}_h^t),\\
\widehat{\epsilon\psi_h^n} \cdot \mathbf{n} &= \epsilon\psi_h^n \cdot \mathbf{n} + \tau_n(\sigma_h - \widehat{\sigma}_h),
\end{aligned}$$

entonces (2.10) tiene solución única.

Demostración. Para desarrollar la demostración se tienen en cuenta las ideas usadas en la Proposición 2 de [36]. Si consideramos el sistema homogéneo asociado a (2.10), entonces del Lema 2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2 \left(|\mathrm{Re}\,(\epsilon_m)| + i\,\mathrm{Im}\,(\epsilon_m)\right) \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 &\\
+ \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 = \kappa^2\epsilon_d \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 .&
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Mediante un procedimiento análogo al desarrollado en la demostración del Lema 2 aplicado a (2.15) se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\varphi_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}(\psi_h^t - \widehat{\psi}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2(|\mathrm{Re}(\epsilon_m)| + i\,\mathrm{Im}(\epsilon_m)) \|\psi_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 &\\
+ \left\|\tau_n^{1/2}\left(\sigma_h - \widehat{\sigma}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 = \lambda \|\psi_h\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 .&
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Notemos que por la estructura de (2.16) y (2.17) $\mathbf{u}_h = 0$ en $\mathcal{T}_h^d$, puesto que en caso contrario $\kappa^2\epsilon_d$ resulta ser un valor propio de (2.15), lo cual es una contradicción. Así, de (2.16) resulta

$$\begin{aligned}
0 = \|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2 \left|\mathrm{Re}(\epsilon_m)\right| \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 + i\kappa^2\,\mathrm{Im}(\epsilon_m) \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 &\\
+ \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 ,&
\end{aligned}$$

cuya parte real satisface

$$\|\mathbf{v}_h\|^2_{\mathcal{T}_h} + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2\left|\mathrm{Re}(\epsilon_m)\right|\|\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h^m} + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} = 0$$

y de donde,

$$\mathbf{v}_h = 0 \text{ en } \mathcal{T}_h,\ \ \mathbf{u}_h^t = \widehat{\mathbf{u}}_h^t \text{ en } \partial\mathcal{T}_h\ ,\ \ \mathbf{u}_h = 0 \text{ en } \mathcal{T}_h^m \ y\ p_h = \widehat{p}_h \text{ en } \partial\mathcal{T}_h,$$

puesto que τ, $\kappa^2\left|\mathrm{Re}(\epsilon_m)\right|$ y τ_n son constantes positivas. En consecuencia, $\mathbf{u}_h = 0$ en $\mathcal{T}_h$, lo cual implica que $\mathbf{u}_h^t = 0$ y como $\mathbf{u}_h^t = \widehat{\mathbf{u}}_h^t$ entonces $\widehat{\mathbf{u}}_h^t = 0$. Luego, teniendo en cuenta lo anterior y (2.9a) en (2.10b), se obtiene

$$0 = -\left(p_h, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z})\right)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle p_h, \epsilon\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}$$

y después de aplicar la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{T}_h)$, resulta

$$0 = \left(\nabla p_h, \epsilon\mathbf{z}\right)_{\mathcal{T}_h}, \qquad \forall\mathbf{z}\in\mathrm{V}_h.$$

Entonces, tomando $\mathbf{z} := \bar{\epsilon}\nabla p_h$, de lo anterior se obtiene que $\nabla p_h = 0$; lo cual implica que p_h es una función constante a trozos en $\mathcal{T}_h$. Más aún, dado que $\widehat{p}_h$ se anula sobre Γ y $p_h = \widehat{p}_h$ entonces $p_h = 0$ en Ω.
Finalmente, $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \widehat{p}_h) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, 0)$ es la solución del sistema homogéneo asociado a (2.10). Entonces, dado que dicho sistema es lineal, cuadrado y los espacios V_h, Q_h, M_h^t y M_h tienen dimensión finita, se concluye que (2.10) tiene una única solución. ■

3. Estabilidad

El análisis de estabilidad que desarrollamos en está sección sigue los lineamientos dados en [11]. Los resultados que presentamos tienen como fundamentos la elección apropiada de los proyectores y un argumento de dualidad.

3.1. Proyectores

A continuación se introducen los proyectores que utilizamos en la deducción de los estimativos de error del esquema HDG (2.10). Las demostraciones de la buena definición y sus cotas pueden consultarse en el Lema 1.58 de [16] y el Apéndice de [13].

Para todo $K\in\mathcal{T}_h$ y $k\geq 1$, $P_{\mathrm{V}}\mathbf{v}$ denota el proyector ortogonal L^2 sobre V_h, mientras que $\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}\in\left[\mathbb{P}_k(K)\right]^3$ y $\Pi_{\mathrm{Q}}p\in\mathbb{P}_k(K)$ satisfacen

$$\begin{aligned}
\left(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}, \mathbf{z}\right)_K &= \left(\mathbf{u}, \mathbf{z}\right)_K, && \forall\,\mathbf{z}\in\left[\mathbb{P}_{k-1}(K)\right]^3,\\
\left(\Pi_{\mathrm{Q}}p, t\right)_K &= \left(p, t\right)_K, && \forall\,t\in\mathbb{P}_{k-1}(K),\\
\left\langle\epsilon\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \tau_n\Pi_{\mathrm{Q}}p, \eta\right\rangle_F &= \left\langle\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \tau_n p, \eta\right\rangle_F, && \forall\,\eta\in\mathbb{P}_k(F),\ \forall\,F\in\partial K.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Sabemos que, dados $l_{\mathbf{w}}$, $l_{\mathbf{z}}$, $l_q \in [0,k]$ se tiene que si $\mathbf{w} \in \left[\mathrm{H}^{l_{\mathbf{w}}+1}(\mathcal{T}_h)\right]^3$, $\mathbf{z} \in \left[\mathrm{H}^{l_{\mathbf{z}}+1}(\mathcal{T}_h)\right]^3$ y $q \in \mathrm{H}^{l_q+1}(\mathcal{T}_h)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|P_{\mathrm{V}}\mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{\mathcal{T}_h} &\lesssim h^{l_{\mathbf{w}}+1} |\mathbf{w}|_{l_{\mathbf{w}}+1,\mathcal{T}_h}, \\
\|P_{\mathrm{V}}\mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{\partial\mathcal{T}_h} &\lesssim h^{l_{\mathbf{w}}+1/2} |\mathbf{w}|_{l_{\mathbf{w}}+1,\mathcal{T}_h}, \\
\|\Pi_{\mathrm{Q}}q - q\|_{\mathcal{T}_h} &\lesssim h^{l_q+1} |q|_{l_q+1,\mathcal{T}_h}, \\
\|\Pi_{\mathrm{Q}}q - q\|_{\partial\mathcal{T}_h} &\lesssim h^{l_q+1/2} |q|_{l_q+1,\mathcal{T}_h}, \\
\|\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{z} - \mathbf{z}\|_{\partial\mathcal{T}_h} &\lesssim h^{l_{\mathbf{z}}+1/2} |\mathbf{z}|_{l_{\mathbf{z}}+1,\mathcal{T}_h} \\
\|\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{z} - \mathbf{z}\|_{\mathcal{T}_h} &\lesssim h^{l_{\mathbf{z}}+1} |\mathbf{z}|_{l_{\mathbf{z}}+1,\mathcal{T}_h} + \frac{h^{l_q+1}}{\text{mín}\{\tau_n\}} |q|_{l_q+1,\mathcal{T}_h}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Similarmente, se definen los proyectores ortogonales L^2, $P_{M_h^t} : [\mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h)]^3 \to M_h^t$ y $P_{M_h} : \mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h) \to M_h$; tales que para l_η, $l_\mu \in [0,k]$ dados, si $\eta \in \left[\mathrm{H}^{l_\eta+1}(\mathcal{E}_h)\right]^3$ y $\mu \in \mathrm{H}^{l_\mu+1}(\mathcal{E}_h)$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|P_{\mathrm{M}_h^t}\eta - \eta\|_{\mathcal{E}_h} &\lesssim h^{l_\eta+1} |\eta|_{l_\eta+1,\mathcal{E}_h}, \\
\|P_{\mathrm{M}_h}\mu - \mu\|_{\mathcal{E}_h} &\lesssim h^{l_\mu+1} |\mu|_{l_\mu+1,\mathcal{E}_h}.
\end{aligned}$$

3.2. Argumento de dualidad

El estudio que realizamos en está sección está basado en los procedimientos que se presentan en la Sección 3 de [24] para la ecuación de Helmholtz y los que se emplean para desarrollar el análisis de estabilidad de las ecuaciones de Maxwell en tiempo armónico con número de onda alto, en la Sección 3 de [17].

Para iniciar el argumento de dualidad, dado $\Theta \in [L^2(\Omega)]^3$ consideramos un problema auxiliar, el cual consiste en: Hallar $(\phi, \psi, \rho) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \times \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tales que

$$\phi - \nabla \times \psi = 0, \quad \text{en } \Omega, \tag{2.20a}$$

$$\nabla \times \phi - \kappa^2 \overline{\epsilon}\psi + \overline{\epsilon}\nabla\rho = \Theta, \quad \text{en } \Omega, \tag{2.20b}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon\psi) = 0, \quad \text{en } \Omega, \tag{2.20c}$$

$$\psi \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \tag{2.20d}$$

$$\rho_{|\Gamma} = 0, \tag{2.20e}$$

donde (2.20c), (2.20d) y (2.20e) son consecuencia de la definición de los espacios de las incógnitas del problema auxiliar (2.20).

En lo sucesivo C representa una constante independiente del tamaño de la malla que puede cambiar de expresión a expresión.

Observación 1. *Notemos que la formulación variacional: Hallar* $(\psi, \rho) \in \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *tales que*

$$(\nabla \times \psi, \nabla \times \mathbf{v}) - \kappa^2 (\bar{\epsilon}\psi, \mathbf{v}) = (\Theta, \mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{X}_0, \tag{2.21a}$$

$$(\bar{\epsilon}\, \nabla \rho, \nabla q) = (\Theta, \nabla q), \qquad \forall q \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \tag{2.21b}$$

es equivalente a (2.20), de acuerdo con el procedimiento que se usó en la Sección 1 para mostrar la equivalencia entre (2.4) con $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ *y (2.5). Además, por el Teorema 1 el problema (2.21a) tiene una única solución* $\psi \in X_0$ *si y sólo si* $\kappa^2 \epsilon_d$ *no es un valor propio del operador* $D := \nabla \times \nabla \times$. *Más aún, por el Corolario* 2.7 *de [8] se tiene que*

$$\|\psi\|_{X_0} \leq C \, \|\Theta\|_{\Omega} \, . \tag{2.22}$$

Además, el Teorema 1 también garantiza la existencia de una única solución $\rho \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *del problema (2.21b); la cual, por un argumento similar al anterior, satisface*

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq C \, \|\Theta\|_{\Omega} \, .$$

Adicional a lo anterior, por regularidad elíptica, ver expresión 4.10 *del Lema* 4.1 *de [21], se tiene que* $\rho \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ *y*

$$\|\rho\|_{2,\Omega} \leq C \, \|\Theta\|_{\Omega} \, . \tag{2.23}$$

Observación 2. *Como* Ω *es simplemente conexo y la interfase entre* Ω_m *y* Ω_d *es plana a trozos, de acuerdo con el Teorema 7.1 de [14],* $\psi|_{\Omega_j} \in [\mathrm{H}^{s+1}(\Omega_j)]^3$, *para todo* $s \in (0,1)$ *y* $j \in \{m, d\}$. *Por lo tanto, existe una constante positiva* C *tal que*

$$\|\epsilon_d \psi\|_{s+1,\Omega_d} + \|\epsilon_m \psi\|_{s+1,\Omega_m} \leq C \|\Theta\|_{\Omega}. \tag{2.24}$$

Además, dado que $\phi := \nabla \times \psi$ *entonces por lo anterior* $\phi|_{\Omega_j} \in [\mathrm{H}^s(\Omega_j)]^3$ *y*

$$\|\phi\|_{s,\Omega} \leq C \, \|\Theta\|_{\Omega} \, . \tag{2.25}$$

La identidad que se demuestra a continuación es la que nos permite deducir una cota para $\epsilon \mathbf{u}_h$ y determinar la forma del estimativo de estabilidad que se presenta al final de esta sección.

Lema 3. *(Dualidad) Si* $(\phi, \psi, \rho) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \times \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *es solución de (2.20) y* $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \widehat{p}) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_h^t \times \mathrm{M}_h$ *es solución de (2.10), entonces*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h, \Theta)_{\mathcal{T}_h} = {} & \langle \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t \right), \tau^{1/2} \left(\Pi_V \psi - \psi \right) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \kappa^2 \left(\epsilon \mathbf{u}_h, \Pi_V \psi - \psi \right)_{\mathcal{T}_h} \\
& + \mathbf{F}(\Pi_V \psi) + \langle \tau^{1/2} (\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t), \tau^{-1/2} (P_V \phi - \phi) \times \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
& + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon (\Pi_V \psi - \psi) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \tau_n \left(p_h - \widehat{p}_h \right), \Pi_Q \rho - \rho \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
& + \langle \mathbf{g}, P_{M_h^t} (\phi^t) \rangle_{\Gamma}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Demostración. Notemos que después de testear (2.20b) con $\mathbf{u}_h$ se obtiene

$$(\mathbf{u}_h, \Theta)_{\mathcal{T}_h} = (\mathbf{u}_h, \nabla \times \phi)_{\mathcal{T}_h} - \left(\mathbf{u}_h, \kappa^2 \overline{\epsilon} \psi\right)_{\mathcal{T}_h} + (\mathbf{u}_h, \overline{\epsilon}\, \nabla \rho)_{\mathcal{T}_h}\,, \tag{2.27}$$

donde $(\mathbf{u}_h, \nabla \times \phi)_{\mathcal{T}_h}$ y $(\mathbf{u}_h, \overline{\epsilon}\, \nabla \rho)_{\mathcal{T}_h}$ se pueden reescribir de la siguiente forma:

- usando la identidad de Green de $\mathrm{H}(\mathbf{curl}; \mathcal{T}_h)$ y la ortogonalidad de P_{V} en la siguiente expresión, se obtiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h, \nabla \times \phi)_{\mathcal{T}_h} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{u}_h, \nabla \times \phi)_K \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[(\nabla \times \mathbf{u}_h, \phi)_K - \left\langle \mathbf{u}_h^t, \phi \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} \right] \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[(\nabla \times \mathbf{u}_h, P_{\mathrm{V}} \phi)_K - \left\langle \mathbf{u}_h^t, \phi \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} \right] \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[(\mathbf{u}_h, \nabla \times P_{\mathrm{V}} \phi)_K + \left\langle \mathbf{u}_h^t, (P_{\mathrm{V}} \phi - \phi) \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} \right] \\
&= (\mathbf{u}_h, \nabla \times P_{\mathrm{V}} \phi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t, (P_{\mathrm{V}} \phi - \phi) \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

- De manera similar, usando la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h)$ y la ortogonalidad de Π_{Q}, resulta

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h, \overline{\epsilon}\, \nabla \rho)_{\mathcal{T}_h} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} -\left(\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h), \rho\right)_K + \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, \rho \rangle_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} -\left(\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h), \Pi_{\mathrm{Q}} \rho\right)_K + \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, \rho \rangle_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\epsilon \mathbf{u}_h, \nabla \Pi_{\mathrm{Q}} \rho)_K - \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, \Pi_{\mathrm{Q}} \rho - \rho \rangle_{\partial K} \\
&= (\epsilon \mathbf{u}_h, \nabla \Pi_{\mathrm{Q}} \rho)_{\mathcal{T}_h} - \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, \Pi_{\mathrm{Q}} \rho - \rho \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Así, teniendo en cuenta (2.28) y (2.29) en (2.27) y usando (2.10a), se obtiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h, \Theta)_{\mathcal{T}_h} &= (\mathbf{u}_h, \nabla \times P_{\mathrm{V}} \phi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t, (P_{\mathrm{V}} \phi - \phi) \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \left(\mathbf{u}_h, \kappa^2 \overline{\epsilon} \psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + (\epsilon \mathbf{u}_h, \nabla \Pi_{\mathrm{Q}} \rho)_{\mathcal{T}_h} - \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, \Pi_{\mathrm{Q}} \rho - \rho \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&= (\mathbf{v}_h, P_{\mathrm{V}} \phi)_{\mathcal{T}_h} - \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, P_{\mathrm{V}} \phi \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t, (P_{\mathrm{V}} \phi - \phi) \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\
&\quad - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \psi)_{\mathcal{T}_h} + (\epsilon \mathbf{u}_h, \nabla \Pi_{\mathrm{Q}} \rho)_{\mathcal{T}_h} + \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, \rho - \Pi_{\mathrm{Q}} \rho \rangle_{\partial \mathcal{T}_h},
\end{aligned}$$

de donde, sumando y restando $\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \phi \times \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$, $\langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \rho \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$, teniendo en cuenta (1.4b),

(2.10c), (2.20a) y usando la ortogonalidad de los proyectores, resulta

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h,\Theta)_{\mathcal{T}_h} &= (\mathbf{v}_h,\phi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t, (P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \phi\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\quad - \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h} + \left(\epsilon\mathbf{u}_h,\nabla\Pi_{\mathrm{Q}}\rho\right)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \epsilon\mathbf{u}_h^n\cdot\mathbf{n}, \rho-\Pi_{\mathrm{Q}}\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t, (P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \left\langle \mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t, \phi^t\right\rangle_{\Gamma} \\
&\quad - \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n}, \Pi_{\mathrm{Q}}\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \left\langle \epsilon\mathbf{u}_h^n\cdot\mathbf{n}, \rho-\Pi_{\mathrm{Q}}\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right), \tau^{-1/2}(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad - \left\langle \mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t, P_{M_h^t}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma} + \left\langle (\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n} - \epsilon\mathbf{u}_h^n)\cdot\mathbf{n}, \Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n}, \rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right), \tau^{-1/2}(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad - \left\langle \mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t, P_{M_h^t}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma} + \left\langle (\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n} - \epsilon\mathbf{u}_h^n)\cdot\mathbf{n}, \Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n}, P_{\mathrm{M}_h}\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si en la anterior expresión se tienen en cuenta (2.9b), (2.10e), (2.10f) y que $\rho_{|\Gamma} = 0$, se obtiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h,\Theta)_{\mathcal{T}_h} &= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right), \tau^{-1/2}(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad - \left\langle \mathbf{g}, (P_{M_h^t}(\phi^t)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}\right\rangle_{\Gamma} + \left\langle \tau_n\left(p_h - \widehat{p}_h\right), \Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right), \tau^{-1/2}(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \left\langle \mathbf{g}, \mathbf{n}\times(P_{M_h^t}(\phi^t)\times\mathbf{n})\right\rangle_{\Gamma} + \left\langle \tau_n\left(p_h - \widehat{p}_h\right), \Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right), \tau^{-1/2}(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \left\langle \mathbf{g}, P_{M_h^t}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma} + \left\langle \tau_n\left(p_h - \widehat{p}_h\right), \Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}. \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que iniciando con un procedimiento análogo al realizado en (2.28) y usando (2.10b), se tiene que

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h} &= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\Pi_{\mathrm{V}}\psi)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{v}_h^t, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= \left\langle \mathbf{v}_h^t, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \Pi_{\mathrm{V}}\psi\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\Pi_{\mathrm{V}}\psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \left(p_h,\nabla\cdot(\epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\psi)\right)_{\mathcal{T}_h} - \left\langle \widehat{p}_h, \epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\psi\cdot\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}\left(\Pi_{\mathrm{V}}\psi\right),
\end{aligned}
$$

de lo cual, sumando y restando $\langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \psi\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}$, aplicando la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{T}_h)$, usando la ortogonalidad de los proyectores, sumando y restando

$\langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\psi \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}$, usando (2.9a), (2.20d), (2.20c) y la ecuación (2.10d), resulta

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \nabla \times \psi)_{\mathcal{T}_h} &= \left\langle \mathbf{v}_h^t - \widehat{\mathbf{v}}_h^t, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \psi \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2 (\epsilon\mathbf{u}_h, \Pi_{\mathrm{V}}\psi)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad - (\nabla p_h, \epsilon\, \Pi_{\mathrm{V}}\psi)_{\mathcal{T}_h} + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\, \Pi_{\mathrm{V}}\psi \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi) \\
&= \left\langle \tau \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \times \mathbf{n}, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \left\langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \psi^t\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} \\
&\quad + \kappa^2 (\epsilon\mathbf{u}_h, \Pi_{\mathrm{V}}\psi)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla p_h, \epsilon\,\psi)_{\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi) + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\psi \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= \left\langle \tau \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \times \mathbf{n}, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, P_{M_h^t}(\psi^t)\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} \\
&\quad + \kappa^2 (\epsilon\mathbf{u}_h, \Pi_{\mathrm{V}}\psi)_{\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi) + (p_h, \nabla \cdot (\epsilon\psi))_{\mathcal{T}_h} - \langle p_h, \epsilon\psi \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\psi \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= \left\langle \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \times \mathbf{n}, \tau^{1/2} (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2 (\epsilon\mathbf{u}_h, \Pi_{\mathrm{V}}\psi)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \langle \widehat{p}_h, \epsilon\psi \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi).
\end{aligned}$$

Luego, como $\epsilon\psi \in \mathrm{H}(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h)$, $\widehat{p}_h$ es univaluado y de acuerdo con (2.10g), $\widehat{p}_{h\,|\Gamma} = 0$, de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \nabla \times \psi)_{\mathcal{T}_h} &= \left\langle \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \times \mathbf{n}, \tau^{1/2} (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2 (\epsilon\mathbf{u}_h, \Pi_{\mathrm{V}}\psi)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \mathbf{F}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi) + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

Notemos entonces que sustituyendo lo anterior en (2.30), se obtiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_h, \Theta)_{\mathcal{T}_h} &= \left\langle \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \times \mathbf{n}, \tau^{1/2} (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2 (\epsilon\mathbf{u}_h, \Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \mathbf{F}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi) + \left\langle \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right), \tau^{-1/2} (P_{\mathrm{V}}\phi - \phi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\, (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \cdot \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{g}, P_{M_h^t}(\phi^t)\rangle_{\Gamma} \\
&\quad + \langle \tau_n (p_h - \widehat{p}_h), \Pi_{\mathrm{Q}}\rho - \rho\rangle_{\partial\mathcal{T}_h},
\end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \times \mathbf{n}, \tau^{1/2} (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi) \times \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\qquad = \left\langle \tau^{1/2} \mathbf{n} \times \left(\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right) \times \mathbf{n}\right), \tau^{1/2} (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi)\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\qquad = \left\langle \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right), \tau^{1/2} (\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi)\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h},
\end{aligned}$$

resulta (2.26). ■

El siguiente lema es una consecuencia directa de la identidad que demostramos en el lema anterior.

Lema 4. *Sean* $(\phi, \psi, \rho) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \times \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *y* $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_h^t \times M_h$ *soluciones de (2.20) y (2.10), respectivamente. Si* τ, τ_n *son de orden constante y* $k \geq 1$, *entonces existen* $h_0 > 0$ *y* $C > 0$, *tales que*

$$\|\epsilon\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 \lesssim \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3, \mathbb{C})}^2 + h^{-1} \|\mathbf{g}\|_{\Gamma}^2, \tag{2.31}$$

para todo $h < h_0$.

Demostración. Notemos que del Lema 3

$$
\begin{aligned}
|(\mathbf{u}_h,\Theta)_{\mathcal{T}_h}| \leq\ & |\langle \tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t),\tau^{1/2}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}| + |\kappa^2(\epsilon\mathbf{u}_h,\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)_{\mathcal{T}_h}| \\
& + |\mathbf{F}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi)| + |\langle \tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t),\tau^{-1/2}(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi)\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}| \\
& + |\langle p_h-\widehat{p}_h,\epsilon\,(\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}| + |\langle \tau_n(p_h-\widehat{p}_h),\Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}| \\
& + |\langle \mathbf{g},P_{M_h^t}\left(\phi^t\right)\rangle_{\Gamma}|, \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

entonces usando la desigualdad de Cauchy Schwarz, las desigualdades (2.19), (2.23), (2.24) y (2.25), teniendo en cuenta que $\tau^* := \text{máx}_{F\in\mathcal{E}_h}\{\tau_F\}$, $\widehat{\tau}^* := \text{máx}_{F\in\mathcal{E}_h}\{\tau_F^{-1}\}$, $\tau_* := \text{máx}_{F\in\mathcal{E}_h}\{\tau_n^F\}$ y $\widehat{\tau}_* := \text{máx}_{F\in\mathcal{E}_h}\{(\tau_n^F)^{-1}\}$ y aplicando la desigualdad inversa, ver Lema 1.46 de [16], se obtienen las siguientes cotas para los términos del lado derecho de (2.32)

- $$
\begin{aligned}
& |\langle \tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t),\tau^{1/2}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}| \\
& \qquad \leq \left\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\left\|\tau^{1/2}(\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\
& \qquad \leq C(\tau^*)^{1/2}\,h^{s+1/2}\,|\psi|_{s+1,\Omega}\left\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\
& \qquad \leq C(\tau^*)^{1/2}\,h^{s+1/2}\,\|\psi\|_{s+1,\Omega}\left\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\
& \qquad \leq C(\tau^*)^{1/2}\,h^{s+1/2}\left\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\|\Theta\|_{\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\left|\kappa^2(\epsilon\mathbf{u}_h,\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)_{\mathcal{T}_h}\right| & \leq \left\|\kappa^2\epsilon\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h}\|\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi\|_{\mathcal{T}_h} \\
& \leq Ch^{s+1}\kappa^2\,\|\epsilon\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}\left(|\psi|_{s+1,\Omega}+\widehat{\tau}_*\,|\rho|_{s+1,\Omega}\right) \\
& \leq Ch^{s+1}\kappa^2\,\|\epsilon\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}\left(\|\psi\|_{s+1,\Omega}+\widehat{\tau}_*\,\|\rho\|_{s+1,\Omega}\right) \\
& \leq Ch^{s+1}(1+\widehat{\tau}_*)\,\|\epsilon\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}\|\Theta\|_{\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
|\langle p_h-\widehat{p}_h,\epsilon\,(\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}| & \leq \left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\left\|\tau_n^{-1/2}\epsilon(\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi)\cdot\mathbf{n}\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\
& \leq C(\widehat{\tau}_*)^{1/2}\left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\|\Pi_{\mathrm{V}}\psi-\psi\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\
& \leq C(\widehat{\tau}_*)^{1/2}h^{s+1/2}\,|\psi|_{s+1,\Omega}\left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\
& \leq C(\widehat{\tau}_*)^{1/2}h^{s+1/2}\,\|\psi\|_{s+1,\Omega}\left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\
& \leq C(\widehat{\tau}_*)^{1/2}h^{s+1/2}\left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\|\Theta\|_{\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
|\mathbf{F}\,(\Pi_{\mathrm{V}}\psi)| & \leq \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)}\|\Pi_{\mathrm{V}}\psi\|_{\mathcal{T}_h} \\
& \leq C\,\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)}\|\psi\|_{\mathcal{T}_h} \leq C\,\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)}\|\Theta\|_{\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

- $$\begin{aligned}\left|\left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t\right),\tau^{-1/2}\left(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi\right)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\right| &\\ &\leq \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\left\|\tau^{-1/2}\left(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi\right)\times\mathbf{n}\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\leq \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\left\|\tau^{-1/2}\left(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\leq C(\widehat{\tau}^*)^{1/2}\,h^{s-\frac{1}{2}}\left|\phi\right|_{s,\Omega}\left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\leq C(\widehat{\tau}^*)^{1/2}\,h^{s-\frac{1}{2}}\left\|\phi\right\|_{s,\Omega}\left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\leq C(\widehat{\tau}^*)^{1/2}\,h^{s-\frac{1}{2}}\left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\left\|\Theta\right\|_{\Omega}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left|\langle\mathbf{g},P_{M_h^t}(\phi^t)\rangle_\Gamma\right| &\leq \left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma\left\|P_{M_h^t}(\phi^t)\right\|_\Gamma\\ &\leq \left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma\left\|P_{\mathrm{M}_h^t}\right\|_{([\mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h)]^3,\mathrm{M}_h^t)}\left\|\phi^t\right\|_\Gamma\\ &\leq \left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma\left\|\phi\right\|_\Gamma\\ &\leq Ch^{-1/2}\left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma\left\|\phi\right\|_\Omega\\ &\leq Ch^{-1/2}\left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma\left\|\Theta\right\|_\Omega.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left|\left\langle\tau_n\left(p_h-\widehat{p}_h\right),\Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\right| &\leq \left\|\tau_n\left(p_h-\widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\left\|\Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\leq C\,h^{s+1/2}\left\|\rho\right\|_{s+1,\Omega}\left(\tau_*\right)^{1/2}\left\|\tau_n^{1/2}\,\left(p_h-\widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\leq C\,h^{s+1/2}\left(\tau_*\right)^{1/2}\left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h-\widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\left\|\Theta\right\|_\Omega.\end{aligned}$$

Luego, usando las anteriores cotas en (2.32), tomando $\Theta=\left|\epsilon\right|^2\mathbf{u}_h$ y τ, τ_n de orden constante, se obtiene

$$\begin{aligned}\left\|\epsilon\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h} &\leq C\Big[\left(h^{s+1/2}(\tau^*)^{1/2}+h^{s-1/2}(\widehat{\tau}^*)^{1/2}\right)\left\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}+h^{s+1}\left\|\epsilon\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h}\\ &\quad+\left((\widehat{\tau}_*)^{1/2}\,h^{s+1/2}+(\tau_*)^{1/2}\,h^{s+1/2}\right)\left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}+\left\|\mathbf{F}\right\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}\\ &\quad+h^{-1/2}\left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma\Big],\\ &\lesssim h^{s-1/2}(h+1)\left\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}+h^{s+1}\left\|\epsilon\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h}+h^{s+1/2}\left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\quad+\left\|\mathbf{F}\right\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}+h^{-1/2}\left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma,\end{aligned}$$

de lo cual,

$$\begin{aligned}\left(1-Ch^{2(s+1)}\right)\left\|\epsilon\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h}^2 &\leq C\Big[h^{2(s-1/2)}(h+1)^2\left\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2\\ &\quad+h^{2(s+1/2)}\left\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2\\ &\quad+h^{-1}\left\|\mathbf{g}\right\|_\Gamma^2+\left\|\mathbf{F}\right\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}^2\Big].\end{aligned}\tag{2.33}$$

Notemos que la parte real de (2.13) satisface

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|^2_{\mathcal{T}_h} + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2 \left|\mathrm{Re}\left(\epsilon_m\right)\right| \|\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h^m} \\ \leq \kappa^2 \epsilon_d \|\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h^d} + \left|\overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right)\right| + \left|\left\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t\right\rangle_\Gamma\right|.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Veamos ahora cotas para $\left|\overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right)\right|$ y $|\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t\rangle_\Gamma|$,

- $$\begin{aligned}\left|\overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right)\right| \leq \left\|\overline{\mathbf{F}}\right\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)} \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h} &\leq \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)} \left\|\epsilon\epsilon^{-1}\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h} \\ &\leq \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)} |\epsilon|^{-1} \|\epsilon\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h} \\ &\leq C \|\mathbf{F}\|^2_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)} + \frac{1}{2}\|\epsilon\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$
- Usando (2.9a) y la desigualdad triangular, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t\right\rangle_\Gamma\right| &= \left|\left\langle \mathbf{g}, \mathbf{v}_h^t\right\rangle_\Gamma + \left\langle \mathbf{g}, \tau\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\times\mathbf{n}\right\rangle_\Gamma\right| \\ &\leq \left|\left\langle \mathbf{g}, \mathbf{v}_h^t\right\rangle_\Gamma\right| + \left|\left\langle \mathbf{g}, \tau\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\times\mathbf{n}\right\rangle_\Gamma\right|.\end{aligned}$$

De donde, por desigualdad de Cauchy-Schwarz y desigualdad de la traza (ver Lema 1.46 de [16]), resulta

- $$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathbf{g}, \mathbf{v}_h^t\right\rangle_\Gamma\right| \leq \|\mathbf{g}\|_\Gamma \left\|\mathbf{v}_h^t\right\|_\Gamma \leq \|\mathbf{g}\|_\Gamma \|\mathbf{v}_h\|_\Gamma &\leq C\|\mathbf{g}\|_\Gamma \|\mathbf{v}_h\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= C\|\mathbf{g}\|_\Gamma \sum_{F\in\partial\mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_F \\ &\leq C\|\mathbf{g}\|_\Gamma \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-1/2}\|\mathbf{v}_h\|_K \\ &\leq Ch^{-1/2}\|\mathbf{g}\|_\Gamma \|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h} \\ &\leq Ch^{-1}\|\mathbf{g}\|^2_\Gamma + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_h\|^2_{\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathbf{g}, \tau\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\times\mathbf{n}\right\rangle_\Gamma\right| &\leq (\tau^*)^{1/2}\|\mathbf{g}\|_\Gamma \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\times\mathbf{n}\right\|_\Gamma \\ &\leq (\tau^*)^{1/2}\|\mathbf{g}\|_\Gamma \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\leq C\tau^*\|\mathbf{g}\|^2_\Gamma + \frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathbf{g}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t\right\rangle_\Gamma\right| &\leq Ch^{-1}\|\mathbf{g}\|^2_\Gamma + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_h\|^2_{\mathcal{T}_h} + C\tau^*\|\mathbf{g}\|^2_\Gamma + \frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\leq C\left(h^{-1} + \tau^*\right)\|\mathbf{g}\|^2_\Gamma + \frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_h\|^2_{\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$

Entonces, usando las anteriores cotas en (2.34), resulta

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{v}_h\right\|_{\mathcal{T}_h}^2+\frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2+\left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h-\widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2+\kappa^2\left|\mathrm{Re}\left(\epsilon_m\right)\right|\left\|\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h^m}^2$$
$$\leq\kappa^2\epsilon_d\left\|\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h^d}^2+C\left\|\mathbf{F}\right\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}^2+\frac{1}{2}\left\|\epsilon\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h}^2+C(h^{-1}+\tau^*)\left\|\mathbf{g}\right\|_{\Gamma}^2.$$

Teniendo en cuenta lo anterior en (2.33) y que τ es de orden constante, se obtiene

$$\left(1-Ch^{2(s-1/2)}(h^3+h^2+1)\right)\left\|\epsilon\mathbf{u}_h\right\|_{\mathcal{T}_h}^2\leq C(h^{2(s-1/2)}(h+1)^2+h^{2(s+1/2)}+1)$$
$$\left[\left\|\mathbf{F}\right\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}^2+h^{-1}\left\|\mathbf{g}\right\|_{\Gamma}^2\right],$$

de donde, tomando $s>\frac{1}{2}$ y h suficientemente pequeño de tal manera que $1-Ch^{2(s-1/2)}(h^3+h^2+1)>\frac{1}{2}$ resulta (2.31). ■

Este lema nos permite establecer el estimativo de estabilidad dado en el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea* $(\mathbf{v}_h,\mathbf{u}_h,p_h,\widehat{\mathbf{u}}_h^t,\widehat{p}_h)\in\mathrm{V}_h\times\mathrm{V}_h\times\mathrm{Q}_h\times\mathrm{M}_h^t\times M_h$ *solución de (2.10). Si* τ *y* τ_n *son de orden constante entonces existen* $h_0>0$ *y* $C>0$ *independientes de* h*, tales que*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2+\|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2+\|\tau_n^{1/2}(p_h-\widehat{p}_h)\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2+\kappa^2\|\epsilon\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2&\\ \lesssim\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}^2+h^{-1}\|\mathbf{g}\|_{\Gamma}^2,&\end{aligned}\tag{2.35}$$

para todo $h<h_0$.

Demostración. El estimativo (2.35) es consecuencia directa de los Lemas 2 y 4. ■

Observación 3. *El estimativo (2.35) implica que para* h *suficientemente pequeño, el problema homogéneo asociado a (2.10) tiene como única solución la trivial. Por tanto, el esquema HDG está bien puesto.*

4. Estimativos de error

La deducción de los estimativos de error que presentamos en está parte nos permite caracterizar la convergencia de nuestro esquema HDG. Dicha deducción se realiza por medio de cotas de expresiones que incluyen a los siguientes errores de proyección

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}:=P_{\mathrm{V}}\mathbf{v}-\mathbf{v}_h, &&\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}:=\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}-\mathbf{u}_h, &&\mathbf{e}_h^{p}:=\Pi_{\mathrm{Q}}p-p_h,\\ &\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}:=P_{M_h^t}\mathbf{u}^t-\widehat{\mathbf{u}}_h^t, &&\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}:=P_{M_h}p-\widehat{p}_h, &&\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}:=P_{M_h^t}\mathbf{v}^t-\widehat{\mathbf{v}}_h^t,\\ &\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}:=P_{M_h}\left(\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)-\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

En el siguiente resultado relacionamos los anteriores errores de proyección.

Lema 5. *Sean* $(\mathbf{v},\mathbf{u},p)\in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)\times \mathrm{X}_{\mathbf{g}}\times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *y* $(\mathbf{v}_h,\mathbf{u}_h,p_h,\widehat{\mathbf{u}}_h^t,\widehat{p}_h)\in \mathrm{V}_h\times \mathrm{V}_h\times \mathrm{Q}_h\times \mathrm{M}_h^t\times M_h$ *soluciones de (2.3) y (2.10), respectivamente. Entonces los errores de proyección* $\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}$, $\mathbf{e}_h^{p}$, $\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}$, $\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}$, $\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}$ *y* $\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}$ *satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones*

$$(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\nabla\times\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}+\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\times\mathbf{n},\mathbf{w}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}=0, \tag{2.37a}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}+\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t},\mathbf{z}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}-\kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}&\\ -(\mathbf{e}_h^{p},\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h}+\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}&=-\kappa^2(\Pi_V\mathbf{u}-\mathbf{u},\bar{\epsilon}\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h},\end{aligned} \tag{2.37b}$$

$$-(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\nabla t)_{\mathcal{T}_h}+\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n},t\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}=0, \tag{2.37c}$$

$$\langle \mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t},\eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h\setminus\Gamma}=0, \tag{2.37d}$$

$$\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n},\mu\rangle_{\partial\mathcal{T}_h\setminus\Gamma}=0, \tag{2.37e}$$

$$\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t},\eta\rangle_{\Gamma}=0, \tag{2.37f}$$

$$\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\mu\rangle_{\Gamma}=0, \tag{2.37g}$$

para todo $(\mathbf{w},\mathbf{z},t,\eta,\mu)\in \mathrm{V}_h\times \mathrm{V}_h\times \mathrm{Q}_h\times M_h^t\times \mathrm{M}_h$, *donde*

$$\mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}=\mathbf{n}\times(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}})^t+\tau((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t-\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}), \tag{2.37h}$$

$$\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}=\epsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^n\cdot\mathbf{n}+\tau_n(\mathbf{e}_h^{p}-\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}). \tag{2.37i}$$

Demostración. Primero notemos que sustituyendo las expresiones de $\mathbf{v}_h$, $\mathbf{u}_h$ y $\widehat{\mathbf{u}}_h^t$ que se obtienen a partir de (2.36) en (2.10a), resulta

$$\begin{aligned}0&=(P_{\mathrm{V}}\mathbf{v}-\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}-\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\nabla\times\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-\langle P_{M_h^t}\mathbf{u}^t-\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t},\mathbf{w}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &=(P_{\mathrm{V}}\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}+(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\nabla\times\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-\langle P_{M_h^t}\mathbf{u}^t,\mathbf{w}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\quad+\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t},\mathbf{w}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h},\end{aligned}$$

de donde, después de organizar, usar la ortogonalidad de los proyectores, la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{T}_h)$ y la consistencia del método HDG, se obtiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\nabla\times\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t},\mathbf{w}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}&\\ =(P_{\mathrm{V}}\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-\langle P_{M_h^t}\mathbf{u}^t,\mathbf{w}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}&\\ =(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\mathbf{u},\nabla\times\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-\left\langle \mathbf{u}^t,\mathbf{w}\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}&\\ =(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}-(\nabla\times\mathbf{u},\mathbf{w})_{\mathcal{T}_h}+\left\langle \mathbf{u}^t,\mathbf{w}\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}-\left\langle \mathbf{u}^t,\mathbf{w}\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}&\\ =0,&\end{aligned}$$

que corresponde a (2.37a).

Del mismo modo, reemplazando las expresiones de $\mathbf{v}_h$, $\mathbf{u}_h$, p_h y $\widehat{p}_h$ en términos de los proyectores y los errores de proyección en (2.10b), se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{z}) &= (P_{\mathrm{V}}\mathbf{v} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, \nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{v}^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}, \mathbf{z}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2\left(\epsilon\left(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\right), \mathbf{z}\right)_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad - (\Pi_{\mathrm{Q}}p - \mathbf{e}_h^p, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} + \langle P_{M_h}p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (P_{\mathrm{V}}\mathbf{v}, \nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, \nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle\mathbf{n}\times P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{v}^t, \mathbf{z}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \langle\mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}, \mathbf{z}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\quad - \kappa^2(\epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \kappa^2(\epsilon\,\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - (\Pi_{\mathrm{Q}}p, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} + (\mathbf{e}_h^p, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle P_{M_h}p, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \langle\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h},
\end{aligned}$$

de lo cual, después de organizar y usar la ortogonalidad de los proyectores

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, \nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle\mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}, \mathbf{z}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\,\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{e}_h^p, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} \\
+ \langle\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}(\mathbf{z}) &= (P_{\mathrm{V}}\mathbf{v}, \nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle\mathbf{n}\times P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{v}^t, \mathbf{z}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&\quad - \kappa^2(\epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - (\Pi_{\mathrm{Q}}p, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad + \langle P_{M_h}p, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (\mathbf{v}, \nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \left\langle\mathbf{v}^t, \mathbf{z}\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} \\
&\quad - (p, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} + \langle p, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

Luego, si en el lado derecho de esta expresión usamos las identidades de Green de $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{T}_h)$ y $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{T}_h)$, la ortogonalidad de los proyectores y la consistencia del método HDG, resulta

$$\begin{aligned}
(\nabla\times\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - \left\langle\mathbf{v}^t, \mathbf{z}\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \left\langle\mathbf{v}^t, \mathbf{z}\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + (\nabla p, \epsilon\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} \\
- \langle p, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle p, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= (\nabla\times\mathbf{v}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + (\overline{\epsilon}\nabla p, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} \\
&= -\kappa^2\left(\epsilon\,\left(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{u}\right), \mathbf{z}\right)_{\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}(\mathbf{z}),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, \nabla\times\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle\mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}, \mathbf{z}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\,\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{e}_h^p, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} + \langle\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
= -\kappa^2\left(\epsilon\,\left(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{u}\right), \mathbf{z}\right)_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora (2.10c) y notemos que usando (2.36), se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= -(\epsilon\,\mathbf{u}_h, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle\widehat{\epsilon\,\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n}, t\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= -\left(\epsilon\,\left(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\right), \nabla t\right)_{\mathcal{T}_h} + \langle P_{M_h}(\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}, t\rangle_{\partial\mathcal{T}_h},
\end{aligned}$$

de donde, usando la ortogonalidad de los proyectores, la identidad de Green de $\mathrm{H}(\mathrm{div},\mathcal{T}_h)$ y la consistencia del método HDG, resulta

$$\begin{aligned}
-(\epsilon\,\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}, t\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= -(\epsilon\,\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle P_{M_h}(\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}), t\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= -(\epsilon\mathbf{u}, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, t\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\
&= (\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{u}), t)_{\mathcal{T}_h}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De otro lado, notemos que (2.37d) se obtiene después de reescribir $\widehat{\mathbf{v}}_h^t$ a partir de la definición dada en (2.36), sustituir la expresión resultante en (2.10d), usar la ortogonalidad de $P_{M_h^t}$ y la consistencia del método HDG.
Para obtener (2.37e), basta sustituir la definición dada en (2.36) de $\widehat{\epsilon\,\mathbf{u}_h^n}$ en (2.10e), aplicar la ortogonalidad de P_{M_h} y la consistencia del esquema HDG.
Ahora, si $\widehat{\mathbf{u}}_h^t$ se sustituye por la expresión que se obtiene a partir de (2.36) en (2.10f), resulta

$$\langle P_{M_h^t}\mathbf{u}^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}, \eta\rangle_\Gamma = \langle \mathbf{g}, \eta\times\mathbf{n}\rangle_\Gamma\,,$$

lo cual es equivalente a

$$\langle P_{M_h^t}\mathbf{u}^t, \eta^t\rangle_\Gamma - \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\times\mathbf{n}, \eta\times\mathbf{n}\rangle_\Gamma = \langle \mathbf{g}, \eta\times\mathbf{n}\rangle_\Gamma\,.$$

Entonces, por la ortogonalidad de $P_{\mathrm{M}_h^t}$ y la consistencia del método HDG se llega a (2.37f).
Luego, usando la expresión de $\widehat{p}_h$ que se obtiene de (2.36) en (2.10g), resulta

$$0 = \langle \widehat{p}_h, \mu\rangle_\Gamma = \langle P_{M_h}p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \mu\rangle_\Gamma,$$

de lo cual, después de usar la ortogonalidad de P_{M_h} y $p\mid_\Gamma = 0$, se obtiene (2.37g).
Ahora, veamos la deducción de (2.37h) a partir de (2.9a). Notemos que después de usar las definiciones dadas en (2.36) y testear con $\eta\in\mathrm{M}_h^t$, se obtiene

$$\langle \mathbf{n}\times(P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{v}^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}), \eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = \langle \mathbf{n}\times(P_{\mathrm{V}}\mathbf{v} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}})^t + \tau((\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{u}^t + \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}), \eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h},$$

de donde,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}\times(P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{v}^t - (P_{\mathrm{V}}\mathbf{v})^t) - \tau((\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u})^t - P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{u}^t), \eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ = \langle \mathbf{n}\times(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t} - (\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}})^t) + \tau(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t} - (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t), \eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\end{aligned}$$

y por la ortogonalidad de los proyectores

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{n}\times(P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{v}^t - (P_{\mathrm{V}}\mathbf{v})^t) - \tau((\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u})^t - P_{\mathrm{M}_h^t}\mathbf{u}^t), \eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &= \langle \mathbf{n}\times(\mathbf{v}^t - (P_{\mathrm{V}}\mathbf{v})^t) - \tau((\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u})^t - \mathbf{u}^t), \eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\langle \mathbf{n}\times(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}})^t + \tau(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t} - (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t), \eta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0$$

y tomando $\eta = \mathbf{n}\times(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}})^t + \tau(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t} - (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t)$ se obtiene (2.37h).
Finalmente, teniendo en cuenta (2.36) en (2.9b) y testeando con $\mu\in\mathrm{M}_h$, resulta

$$\langle P_{M_h}(\epsilon\mathbf{u}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}}, \mu\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = \langle \epsilon(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^n\cdot\mathbf{n} + \tau_n(\Pi_{\mathrm{Q}}p - \mathbf{e}_h^p - P_{\mathrm{M}_h}p + \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}), \mu\rangle_{\partial\mathcal{T}_h},$$

de lo cual,

$$\begin{aligned}\langle P_{M_h}(\epsilon\mathbf{u}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n}) - \epsilon\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \tau_n(\Pi_{\mathrm{Q}}p - P_{\mathrm{M}_h}p), \mu\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ = \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n} - \epsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^n\cdot\mathbf{n} + \tau_n(\mathbf{e}_h^{\widehat{p}} - \mathbf{e}_h^p), \mu\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\end{aligned}$$

Luego, usando la ortogonalidad de los proyectores y la tercera ecuación de (2.18), se obtiene

$$\langle \epsilon\mathbf{u}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{n} - \epsilon\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \tau_n(\Pi_{\mathrm{Q}}p - p), \mu\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0,$$

lo cual implica que

$$\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n} - \epsilon(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^n\cdot\mathbf{n} + \tau_n(\mathbf{e}_h^{\widehat{p}} - \mathbf{e}_h^p), \mu\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0.$$

Entonces, después de tomar $\mu = \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n} - \epsilon\,(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^n\cdot\mathbf{n} + \tau_n(\mathbf{e}_h^{\widehat{p}} - \mathbf{e}_h^p)$ en la anterior expresión, resulta (2.37i). ■

En el siguiente resultado demostramos que los errores de proyección (2.36) satisfacen un estimativo de estabilidad que tiene una estructura análoga al estimativo (2.35).

Teorema 4. *Sean* $(\mathbf{v},\mathbf{u},p) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)\times \mathrm{X}_{\mathbf{g}}\times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *y* $(\mathbf{v}_h,\mathbf{u}_h,p_h,\widehat{\mathbf{u}}_h^t,\widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h\times \mathrm{V}_h\times \mathrm{Q}_h\times \mathrm{M}_h^t\times M_h$ *soluciones de (2.3) y (2.10), respectivamente. Entonces, dados* $l_{\mathbf{u}}, l_p \in [0,k]$ *y* $(\mathbf{u},p)\in[\mathrm{H}^{l_{\mathbf{u}}+1}(\Omega)]^3\times \mathrm{H}^{l_p+1}(\Omega)$, *los errores de proyección* $\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}$, $\mathbf{e}_h^p$, $\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}$ *y* $\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}$ *satisfacen*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2\,\|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 \\ \lesssim h^{2(l_{\mathbf{u}}+1)}\,|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h}^2 + h^{2(l_p+1)}\,|p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}^2\,.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Demostración. Notemos que la formulación (2.37) tiene la misma estructura de (2.10), donde $\tilde{\mathbf{F}} : [\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)]^3 \to \mathbb{C}$, definida como

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}) := -\kappa^2\,(\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{u}, \bar{\epsilon}\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}\,, \tag{2.39}$$

corresponde a $\mathbf{F}$ y $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Entonces, del Teorema 3 existen $h_0 > 0$ y $C > 0$ independientes de h, los cuales satisfacen

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ + \kappa^2\|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 \le C\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)}^2,\end{aligned} \tag{2.40}$$

para todo $h < h_0$.

Así, dado $\mathbf{z}\in[\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)]^3$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.19), se obtiene

$$\begin{aligned}|\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z})| &\lesssim \|\Pi_{\mathrm{V}}\mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{T}_h} \\ &\lesssim \left(h^{l_{\mathbf{u}}+1}|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1} + h^{l_p+1}|p|_{l_p+1}\right)\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{T}_h},\end{aligned}$$

de donde, $\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)} \lesssim h^{l_{\mathbf{u}}+1}|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1} + h^{l_p+1}|p|_{l_p+1}$. Sustituyendo esto en (2.40), resulta (2.38). ■

Observación 4. *El siguiente procedimiento nos permite obtener un estimativo de estabilidad análogo al dado en (2.38), en el cual se emplea la tercera ecuación de (2.18), pero el orden obtenido es sub-óptimo.*
Sean $\mathbf{w} := \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{z} := \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}$ *y* $t := \mathbf{e}_h^{p}$ *en (2.37). Luego, si sumamos el conjugado de (2.37a), con el conjugado de (2.37c) y le adicionamos (2.37b), teniendo en cuenta las definiciones de las funciones test, resulta*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{T}_h} - (\nabla\times\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + (\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},\nabla\times\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ -\kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{e}_h^{p},\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}))_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - (\nabla\mathbf{e}_h^{p},\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{p},\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ = -\kappa^2(\Pi_V\mathbf{u}-\mathbf{u},\overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h},\end{aligned}$$

de donde, después de simplificar y usar las identidades de Green de $\mathrm{H}(\mathbf{curl};\mathcal{T}_h)$ *y* $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{T}_h)$*, se tiene que*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{T}_h} - \langle \mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t-\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}\\ -\langle \mathbf{e}_h^{p}-\mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{p},\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = -\kappa^2(\Pi_V\mathbf{u}-\mathbf{u},\overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$

Luego, sumando y restando $\langle \mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t},\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}$ *y* $\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}$ *a lo anterior, se obtiene*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{n}\times(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}-\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}),(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t-\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t},\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}\\ +\langle \mathbf{e}_h^{p}-\mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}-\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = -\kappa^2(\Pi_V\mathbf{u}-\mathbf{u},\overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}\end{aligned}$$

entonces como $\langle \mathbf{n}\times\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t},\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0$ *y* $\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = 0$*, de acuerdo con (2.37d), (2.37e), (2.37f) y (2.37g), se obtiene*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{T}_h} +\langle \mathbf{n}\times(\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}-\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}),(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t-\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}\\ + \langle \mathbf{e}_h^{p}-\mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}-\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = -\kappa^2(\Pi_V\mathbf{u}-\mathbf{u},\overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$

Si en la anterior ecuación se tienen en cuenta las definiciones de $\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}$ *y* $\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}$ *dadas en (2.36), notemos que se llega a lo siguiente*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{T}_h} +\langle \mathbf{n}\times(P_{M_h^t}\mathbf{v}^t-\widehat{\mathbf{v}}_h^t-\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}),(\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t-\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}\\ + \langle \mathbf{e}_h^{p}-\mathbf{e}_h^{\widehat{p}},P_{M_h}(\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})-\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n}-\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = -\kappa^2(\Pi_V\mathbf{u}-\mathbf{u},\overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h},\end{aligned}$$

más aún, usando la ortogonalidad de $P_{M_h^t}$ *y* P_{M_h}*, de lo anterior se obtiene*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v}-\widehat{\mathbf{v}}_h^t-\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}},((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t-\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &+ \langle \mathbf{e}_h^{p}-\mathbf{e}_h^{\widehat{p}},\epsilon\mathbf{u}\cdot n-\widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot n-\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}},\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h} = -\kappa^2(\Pi_V\mathbf{u}-\mathbf{u},\overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h},\end{aligned}$$

de lo cual,

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}_h^t - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, ((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}) \times \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &+ \langle \mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon\mathbf{u}\cdot n - \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot n - \epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = \kappa^2(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h} - \kappa^2(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}, \bar{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})_{\mathcal{T}_h}.\end{aligned} \tag{2.41}$$

A continuación, se presenta la deducción de expresiones equivalentes a $\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}_h^t - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}$ *y* $\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n} - \epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}$,

- $$\begin{aligned}\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}_h^t - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}} &= \mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}_h^t - (P_V\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ &= \mathbf{v} - P_V\mathbf{v} + \mathbf{v}_h - \widehat{\mathbf{v}}_h^t \\ &= \mathbf{v} - P_V\mathbf{v} - \tau\left(\mathbf{u}_h^t - \widehat{\mathbf{u}}_h^t\right)\times\mathbf{n} \\ &= \mathbf{v} - P_V\mathbf{v} - \tau\left((\Pi_V\mathbf{u})^t - (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t\right)\times\mathbf{n} + \tau(P_{M_h^t}\mathbf{u}^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\times\mathbf{n} \\ &= \mathbf{v} - P_V\mathbf{v} + \tau(P_{M_h^t}\mathbf{u}^t - (\Pi_V\mathbf{u})^t)\times\mathbf{n} + \tau((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\times\mathbf{n} \\ &= \mathbf{v} - P_V\mathbf{v} + \tau\left(\mathbf{u} - \Pi_V\mathbf{u}\right)^t\times\mathbf{n} + \tau(P_{M_h^t}\mathbf{u}^t - \mathbf{u}^t)\times\mathbf{n} \\ &\quad + \tau((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\times\mathbf{n}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n} - \epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n} &= \epsilon\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot\mathbf{n} - \epsilon\left(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\right)\cdot\mathbf{n} \\ &= \epsilon\left(\mathbf{u} - \Pi_V\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{n} + (\epsilon\mathbf{u}_h - \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n})\cdot\mathbf{n} \\ &= \epsilon\left(\mathbf{u} - \Pi_V\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{n} - \tau_n\left(p_h - \widehat{p}_h\right) \\ &= \epsilon\left(\mathbf{u} - \Pi_V\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{n} - \tau_n\left(\Pi_Q p - \mathbf{e}_h^p\right) + \tau_n(P_{M_h}p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}) \\ &= \epsilon(\mathbf{u} - \Pi_V\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} + \tau_n(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}) + \tau_n\left(P_{M_h}p - \Pi_Q p\right).\end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta lo anterior, la definición de los proyectores y (1.4b)

- $$\begin{aligned}\langle \mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}_h^t - \mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, ((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= \langle \mathbf{v} - P_V\mathbf{v}, ((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\times\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\quad + \langle \tau\left(\mathbf{u} - \Pi_V\mathbf{u}\right), (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\quad + \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}&\langle \mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon\mathbf{u}\cdot n - \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}\cdot n - \epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= \langle \mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon\left(\mathbf{u} - \Pi_V\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{n} + \tau_n(p - \Pi_Q p)\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &= \left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h}.\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo las anteriores expresiones en (2.41), resulta

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ = \langle P_V\mathbf{v} - \mathbf{v}, ((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}) \times \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle \tau(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}), (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ - \kappa^2 \left(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}, \overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\right)_{\mathcal{T}_h} + \kappa^2 \left(\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\right)_{\mathcal{T}_h},\end{aligned}$$

lo cual implica que,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ \leq \left|\langle P_V\mathbf{v} - \mathbf{v}, ((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}) \times \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\right| + \left|\langle \tau(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}), (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\right| \\ + \left|\kappa^2 \left(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}, \overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\right)_{\mathcal{T}_h}\right| + \kappa^2 \|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 . \qquad (2.42)\end{aligned}$$

Veamos ahora las cotas para los tres primeros términos del lado derecho de la anterior expresión.

- $$\begin{aligned}\left|\langle P_V\mathbf{v} - \mathbf{v}, ((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}) \times \mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\right| &\leq \|P_V\mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{\partial\mathcal{T}_h} \left\|((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}) \times \mathbf{n}\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\leq C(\widehat{\tau}^*)^{1/2} h^{l_{\mathbf{v}}+1/2} |\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h} \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left|\langle \tau(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}), (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\right| &\leq (\tau^*)^{1/2} \|\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{\partial\mathcal{T}_h} \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\leq C\,(\tau^*)^{1/2}\, h^{l_{\mathbf{u}}+1/2} |\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h} \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left|\kappa^2 \left(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}, \overline{\epsilon}\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\right)_{\mathcal{T}_h}\right| &\leq \kappa^2 \|\epsilon\left(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}\right)\|_{\mathcal{T}_h} \|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h} \\ &\leq C\left(h^{l_{\mathbf{u}}+1} |\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h} + \widehat{\tau}_*\, h^{l_p+1} |p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}\right) \|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h} .\end{aligned}$$

Luego, usando las anteriores cotas en (2.42), se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ \leq \kappa^2\|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + C\Big[(\widehat{\tau}^*)^{1/2} h^{l_{\mathbf{v}}+1/2}|\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h}\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\|_{\partial\mathcal{T}_h} \\ + h^{l_{\mathbf{u}}+1/2}((\tau^*)^{1/2}\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\|_{\partial\mathcal{T}_h} + (\widehat{\tau}_*)^{1/2}\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\|_{\partial\mathcal{T}_h})|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h} \\ + ((\tau_*)^{1/2} h^{l_p+1/2}\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\|_{\partial\mathcal{T}_h} + \widehat{\tau}_*\, h^{l_p+1}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h})|p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h} \\ + h^{l_{\mathbf{u}}+1}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h}\Big] .\end{aligned}$$

Notemos además que aplicando la desigualdad de Young y agrupando de manera conveniente, a partir de lo anterior se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 &+ \frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ &\lesssim \widehat{\tau}^* h^{2(l_{\mathbf{v}}+1/2)}\,|\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h}^2 + ((\tau^* + \widehat{\tau}_*)h^{2(l_{\mathbf{u}}+1/2)} + h^{2(l_{\mathbf{u}}+1)})\,|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h}^2 \\ &\quad + \left(\tau_* h^{2(l_p+1/2)} + (\widehat{\tau}_*)^2\, h^{2(l_p+1)}\right)|p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2\,\|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2\,,\end{aligned}$$

de donde, usando (2.31) con $\mathbf{g} = 0$*, resulta*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 &+ \frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ &\lesssim \widehat{\tau}^* h^{2(l_{\mathbf{v}}+1/2)}\,|\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h}^2 + ((\tau^* + \widehat{\tau}_*)h^{2(l_{\mathbf{u}}+1/2)} + h^{2(l_{\mathbf{u}}+1)})\,|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h}^2 \\ &\quad + \left(\tau_* h^{2(l_p+1/2)} + (\widehat{\tau}_*)^2\, h^{2(l_p+1)}\right)|p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}^2 + \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}^2\,. \qquad (2.43)\end{aligned}$$

De otro lado, teniendo en cuenta que la estructura de (2.10) es similar a (2.37) entonces se define

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := -\kappa^2\,(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u}, \overline{\epsilon}\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}\left([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C}\right)} = \sup_{\mathbf{z}\in[L^2(\mathcal{T}_h)]^3}\frac{|\mathbf{F}(\mathbf{z})|}{\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{T}_h}} &\le \kappa^2\,\|\overline{\epsilon}\,(\Pi_V\mathbf{u} - \mathbf{u})\|_{\mathcal{T}_h} \\ &\lesssim h^{l_{\mathbf{u}}+1}\,|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h} + \widehat{\tau}_*\,h^{l_p+1}\,|p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}\,.\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo lo anterior en (2.43), resulta la siguiente expresión después de simplificar

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 &+ \frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 \\ &\le C\left[\widehat{\tau}^* h^{2(l_{\mathbf{v}}+1/2)}\,|\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h}^2 + \left((\tau^* + \widehat{\tau}_*)\,h^{2(l_{\mathbf{u}}+1/2)} + h^{2(l_{\mathbf{u}}+1)}\right)|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h}^2\right. \\ &\quad \left. + \left(\tau_* h^{2(l_p+1/2)} + (\widehat{\tau}_*)^2\, h^{2(l_p+1)}\right)|p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}^2\right].\end{aligned}$$

Además, para completar el estimativo anterior agregamos $\kappa^2\,\|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2$*, el cual puede acotarse aplicando argumentos análogos a los presentados en la prueba del lema (4), debido a la similitud entre las estructuras de (2.10) y (2.37). Veamos entonces la expresión resultante*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 &+ \frac{1}{2}\left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \frac{1}{2}\left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2\,\|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 \\ &\le C\left[\widehat{\tau}^* h^{2(l_{\mathbf{v}}+1/2)}\,|\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h}^2 + \left((\tau^* + \widehat{\tau}_*)\,h^{2(l_{\mathbf{u}}+1/2)} + h^{2(l_{\mathbf{u}}+1)}\right)|\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h}^2\right. \\ &\quad \left. + \left(\tau_* h^{2(l_p+1/2)} + (\widehat{\tau}_*)^2\, h^{2(l_p+1)}\right)|p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}^2\right],\end{aligned}$$

más aún, suponiendo τ^*, τ_*, $\widehat{\tau}^*$ y $\widehat{\tau}_*$ de orden constante, resulta

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{u}}_h^t})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^p - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}})\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2 \|\epsilon\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 \\ \lesssim h^{2(l_{\mathbf{v}}+1/2)} |\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h}^2 + h^{2(l_{\mathbf{u}}+1/2)} |\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h}^2 \\ + h^{2(l_p+1/2)} |p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}^2 .\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta el estimativo (2.38) demostrado en el Teorema 4, enunciamos el siguiente resultado.

Corolario 1. *Asumiendo las mismas hipótesis del Teorema (4), si $l := \min\{l_{\mathbf{v}}, l_{\mathbf{u}}, l_p\}$, entonces*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h} + \|\epsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathcal{T}_h} \lesssim \left(|\mathbf{v}|_{l_{\mathbf{v}}+1,\mathcal{T}_h} + |\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1,\mathcal{T}_h} + |p|_{l_p+1,\mathcal{T}_h}\right) h^{l+1}. \tag{2.44}$$

5. Resultados numéricos

Los experimentos numéricos se llevan a cabo en el cubo $\Omega := [0,1]^3$, el cual dividimos en los subdominios Ω_d y Ω_m. Las triangulaciones que usamos son cuasi-uniformes y están formadas por tetraedros. Más aún, para cada $K \in \mathcal{T}_h$ se tiene que $\overset{\circ}{K}$ está en Ω_d o en Ω_m.

Para definir los parámetros físicos del problema nos basamos en la sección de resultados numéricos de [41], en la cual se toma la longitud de onda del vacío como $\lambda_0 = 4.5$ (450 nm), se supone que Ω_d está formada por oxinitruro de silicio, cuya permitividad eléctrica es $\epsilon_d = 2.7124$ y Ω_m se asume que contiene plata evaporada, de la cual se conoce que la permitividad relativa es $\epsilon_m = -5.8828 + i\,0.6650$. Los valores de las permitividades relativas dependen de λ_0 al igual que el número de onda, el cual resulta ser $\kappa = 1.3963$, de acuerdo a la definición dada en (1.2).

Los parámetros de estabilización τ y τ_n los tomamos como 1 en todos los ejemplos y los ordenes de convergencia que presentamos en las tablas los calculamos así

$$r(w) := \frac{\log\left(\|w - w_h\|_{\mathcal{T}_h} / \|w - w_h\|_{\mathcal{T}_{\tilde{h}}}\right)}{\log(h/\tilde{h})},$$

donde h y $\tilde{h}$ representan los tamaños de dos mallas consecutivas y $w \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, p\}$.

Ejemplo 1:
En esta simulación $\Omega_d := [0,1]\times[0,1]\times[0,1/2]$, $\Omega_m := [0,1]\times[0,1]\times[1/2,1]$, tomamos $p(x,y,z) = 0$ y consideramos el siguiente valor exacto para $\mathbf{u}(x,y,z) := (\mathbf{0}, \mathbf{u}_2(x,y,z), \mathbf{0})^T$, con

$$\mathbf{u}_2(x,y,z) = \begin{cases} \mathbf{u}_d(x,y,z), & \text{if } z \geq 0.5, \\ \mathbf{u}_m(x,y,z), & \text{if } z < 0.5, \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{u}_d(x,y,z) = exp\left(-ik_0\sqrt{\epsilon_d}\,(z-0.5)\right) + exp\left(ik_0\sqrt{\epsilon_d}\,(z-0.5)\right),$$
$$\mathbf{u}_m(x,y,z) = exp\left(-ik_0\sqrt{\epsilon_m}\,(z-0.5)\right) + exp\left(ik_0\sqrt{\epsilon_m}\,(z-0.5)\right).$$

Las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ quedan determinadas a partir de los valores de $\mathbf{u}$ y p.

Los ordenes de convergencia y errores obtenidos en la simulación aparecen en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Ordenes de convergencia y errores de la simulación 1

Grado k	Orden v	Orden u	Orden p	Nelts	$\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}$	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}$	$\|p-p_h\|_{\mathcal{T}_h}$
	-	-	-	48	1.4117e-01	2.5022e-01	1.9122e-01
	1.96	2.41	1.24	384	3.6382e-02	4.7241e-02	8.0744e-02
1	1.82	2.03	2.51	3072	1.0280e-02	1.1567e-02	1.4166e-02
	1.87	1.99	2.49	24576	2.8218e-03	2.9133e-03	2.5182e-03
	-	-	-	48	2.1954e-02	2.7236e-02	2.4103e-01
	2.68	2.31	2.31	384	3.4161e-03	5.4944e-03	4.8506e-02
2	2.85	2.90	2.89	3072	4.7249e-04	7.3397e-04	6.5483e-03
	2.93	3.00	2.97	24576	6.1861e-05	9.1955e-05	8.3516e-04
	-	-	-	48	3.5477e-03	1.2115e-02	1.3306e-01
	3.68	3.64	3.63	384	2.7665e-04	9.7457e-04	1.0771e-02
3	3.95	3.83	3.88	3072	1.7914e-05	6.8709e-05	7.2993e-04
	4.05	3.94	3.97	24576	1.0826e-06	4.4708e-06	4.6515e-05

Ejemplo 2:
Para realizar esta simulación solamente modificamos el valor de p del ejemplo 1, en este caso tomamos $p(x,y,z) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)$. En la tabla 2.2 se presentan los errores y ordenes de convergencia obtenidos.

Ejemplo 3:
En este ejemplo definimos

$$\Omega_m := [0,1]\times[0,1]\times[0,0.5]\cup([0.25,0.75]\times[0.25,0.75]\times[0.5,0.75])$$

y $\Omega_d := \Omega\setminus\Omega_m$. Teniendo en cuenta el modelamiento de celdas fotovoltaicas, suponemos $\mathbf{f} := 0$ y que un rayo ilumina la parte superior del dominio, la cual, en nuestro caso corresponde al plano $z = 1$. El campo que describe a la onda incidente está dado por $\mathbf{u}(x,y,1) := (0, u_2(x,y,1), 0)^T$, con $\mathbf{u}_2(x,y,z) = \exp\left(-i\left[\kappa_x x + \kappa_y y - \kappa_z(z-1)\right]\right)$, donde $\kappa_x = \kappa\sin\theta\cos\phi$, $\kappa_y = \kappa\sin\theta\sin\phi$, $\kappa_z = \kappa\cos\theta$, $\theta = \pi/4$ y $\phi = 0$. El dato $\mathbf{g}$ definido sobre la frontera del dominio lo calculamos teniendo en cuenta $\mathbf{u}$.

En la Figura 2.4 mostramos la aproximación de la intensidad del campo eléctrico que denotamos $|\mathbf{u}_h|$.

Tabla 2.2: Ordenes de convergencia y errores de la simulación 2

Grado k	Orden v	Orden u	Orden p	Nelts	$\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}$	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}$	$\|p-p_h\|_{\mathcal{T}_h}$
	-	-	-	48	9.7455e-02	1.4749e-01	1.8858e-02
	1.54	1.89	1.60	384	3.3616e-02	3.9763e-02	6.2176e-03
1	1.73	1.93	1.91	3072	1.0150e-02	1.0404e-02	1.6601e-03
	1.85	1.96	1.94	24576	2.8184e-03	2.6685e-03	4.3362e-04
	-	-	-	48	2.1492e-02	2.3376e-02	3.4517e-03
	2.71	2.85	2.95	384	3.2891e-03	3.2332e-03	4.4790e-04
2	2.86	2.94	2.84	3072	4.5457e-04	4.2035e-04	6.2567e-05
	2.94	3.00	2.91	24576	5.9395e-05	5.2433e-05	8.3503e-06
	-	-	-	48	1.5614e-03	2.0326e-03	3.2012e-04
	3.53	3.68	3.62	384	1.3546e-04	1.5808e-04	2.6109e-05
3	3.81	3.89	3.79	3072	9.6377e-06	1.0693e-05	1.8916e-06
	3.92	3.96	3.90	24576	6.3701e-07	6.8644e-07	1.2705e-07

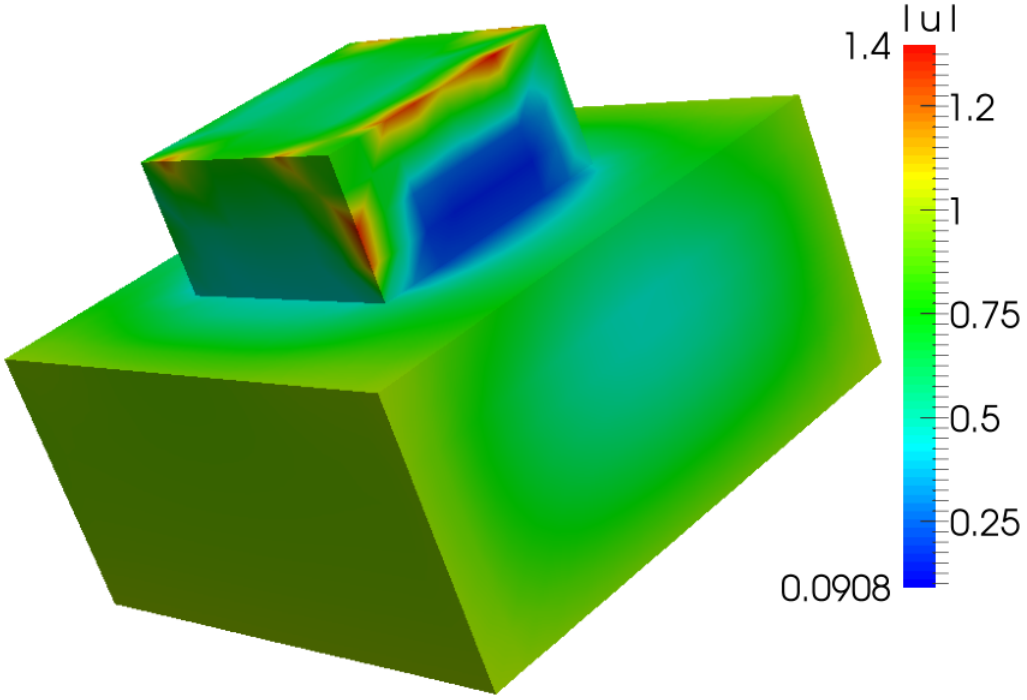

Figura 2.4: Dominio Ω_m con corrugación, $|\mathbf{u}_h|$ para $k = 1$ y 24576 elementos.

Capítulo 3

PROBLEMA CON CONDICIONES CUASI-PERIÓDICAS

El esquema HDG que analizamos en este capítulo corresponde a (2.10) sujeto a condiciones de frontera tipo Dirichlet y condiciones cuasi-periódicas.

Para definir las condiciones de frontera del dominio Ω que consideramos en el Capítulo 2 suponemos que $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_B \cup \Gamma_T$, como se puede observar en la figura 3.3.

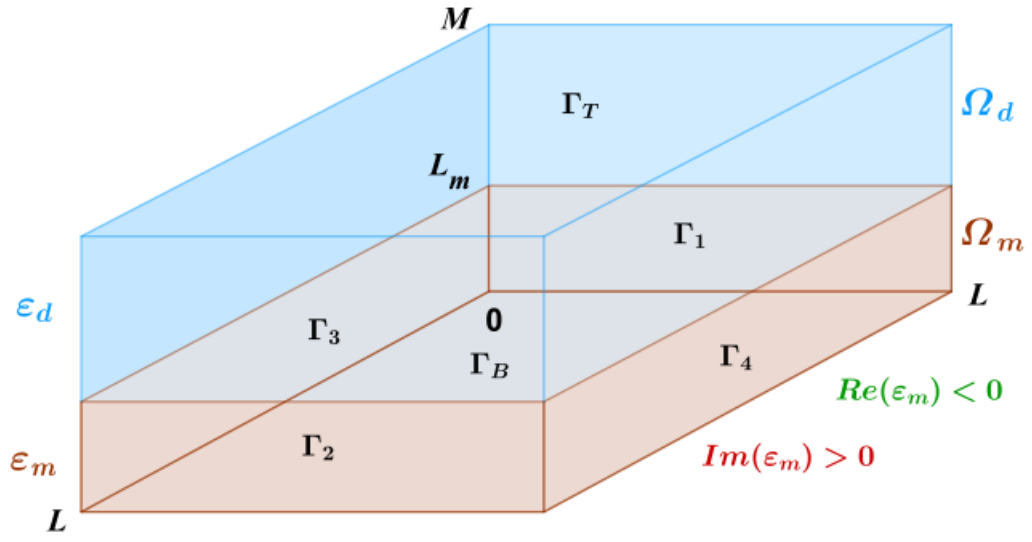

Figura 3.3: Dominio con interfase plana y frontera $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_B \cup \Gamma_T$.

Si imponemos condiciones cuasi-periódicas en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, entonces el campo

eléctrico satisface lo siguiente

$$\mathbf{u}\,(L,y,z) := e^{i\alpha L}\mathbf{u}\,(0,y,z)\,,$$
$$\mathbf{u}\,(x,L,z) := e^{i\beta L}\mathbf{u}\,(x,0,z)\,,$$

donde $\alpha := \kappa\sin\theta\cos\phi$, $\beta := \kappa\sin\theta\sin\phi$, κ se definió en (1.2) y los ángulos θ y ϕ toman valores en los intervalos $[0,\pi]$ y $[0,2\pi]$, respectivamente.

Ahora bien, dado $\tilde{\mathbf{g}} \in [\mathrm{L}^2(\Gamma_B \cup \Gamma_T)]^3$ consideremos el problema con condiciones de frontera Dirichlet solo sobre $\Gamma_B \cup \Gamma_T$, el cual consiste en: Hallar $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y p tales que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} - \nabla\times\mathbf{u} &= 0, && \text{en } \Omega,\\
\nabla\times\mathbf{v} - \kappa^2\epsilon\mathbf{u} + \bar{\epsilon}\nabla p &= \mathbf{f}, && \text{en } \Omega,\\
\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{u}) &= 0, && \text{en } \Omega,\\
\mathbf{u}\times\mathbf{n} &= \tilde{\mathbf{g}}, && \text{sobre } \ \Gamma_B\cup\Gamma_T,\\
\mathbf{u}_{|\Gamma_2} &= e^{i\alpha L}\mathbf{u}_{|\Gamma_1}, &&\\
\mathbf{u}_{|\Gamma_4} &= e^{i\beta L}\mathbf{u}_{|\Gamma_3}, &&\\
p_{|\Gamma} &= 0, &&
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\tilde{\mathbf{g}} := \epsilon_0^{1/2}\hat{\mathbf{g}}_{|\Gamma_B\cup\Gamma_T}$ y $\hat{\mathbf{g}}$, $\mathbf{f}$, ϵ están definidos como en el capítulo anterior.
Para demostrar que (3.1) tiene una única solución consideramos el siguiente problema equivalente

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} - \kappa^2\epsilon\mathbf{u} + \bar{\epsilon}\nabla p &= \mathbf{f}, && \text{en } \Omega,\\
\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{u}) &= 0, && \text{en } \Omega,\\
\mathbf{u}\times\mathbf{n} &= \tilde{\mathbf{g}}, && \text{sobre } \ \Gamma_B\cup\Gamma_T,\\
\mathbf{u}_{|\Gamma_2} &= e^{i\alpha L}\mathbf{u}_{|\Gamma_1}, &&\\
\mathbf{u}_{|\Gamma_4} &= e^{i\beta L}\mathbf{u}_{|\Gamma_3}, &&\\
p_{|\Gamma} &= 0, &&
\end{aligned} \tag{3.2}$$

e introducimos los espacios

$$\mathrm{X}_{QP} := \left\{\mathbf{w}\in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)\cap \mathrm{H}(\mathbf{div}^0_\epsilon;\Omega):\ \mathbf{w}\times\mathbf{n}_{|\Gamma_B\cup\Gamma_T} = 0, \mathbf{w}\,|_{\Gamma_2} = e^{i\alpha L}\mathbf{w}\,|_{\Gamma_1}, \mathbf{w}\,|_{\Gamma_4} = e^{i\beta L}\mathbf{w}\,|_{\Gamma_3}\right\},$$
$$\tilde{\mathrm{X}} := \left\{\mathbf{w}\in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)\cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon;\Omega):\ \mathbf{w}\times\mathbf{n}\in \left[\mathrm{L}^2\left(\Gamma\right)\right]^3\right\},$$

dotados con las normas

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathrm{X}_{QP}} := \left(\|\nabla\times\mathbf{w}\|^2_\Omega + \|\mathbf{w}\|^2_\Omega\right)^{1/2},$$
$$\|\mathbf{w}\|_{\tilde{\mathrm{X}}} := \left(\|\nabla\times\mathbf{w}\|^2_\Omega + \|\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{w})\|^2_\Omega + \|\mathbf{w}\|^2_\Omega\right)^{1/2}.$$

Después, tomando $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$ y usando argumentos análogos a los desarrollados en la demostración del Teorema (1), se concluye que la formulación variacional: Hallar $(\mathbf{u}, p) \in \mathrm{X}_{QP} \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tales que

$$(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \tag{3.3a}$$

$$(\overline{\epsilon}\, \nabla p, \nabla q) = (\mathbf{f}, \nabla q), \tag{3.3b}$$

para todo $(\mathbf{w}, q) \in \mathrm{X}_{QP} \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tiene una única solución.
Es importante resaltar que por la forma de las condiciones de frontera del problema (3.2), para justificar la compacidad del operador

$$K : \mathrm{X}_{QP} \to \mathrm{X}'_{QP},$$

inducido por la forma sesquilineal $b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 2\kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}, \mathbf{w})_{\Omega_d}$, lo reescribimos como $K := i \circ \mathcal{R}^{-1} \circ \widetilde{\mathrm{K}} \circ \tilde{i}$, donde

$$\begin{aligned} \tilde{i} :& \mathrm{X}_{QP} \to \tilde{\mathrm{X}} \\ \mathcal{R} :& ([L^2(\Omega)]^3)' \to [L^2(\Omega)]^3, \\ i :& ([L^2(\Omega)]^3)' \to \mathrm{X}'_{QP}, \end{aligned}$$

son aplicaciones continuas y $\widetilde{\mathrm{K}} : \tilde{\mathrm{X}} \hookrightarrow [\mathrm{L}^2(\Omega)]^3$ es una inyección compacta, de acuerdo con los argumentos presentados en la Observación 7.5 de [18] y el Teorema 4.1 de [2].

En el caso $\tilde{\mathbf{g}} \neq \mathbf{0}$ primero definimos el espacio

$$\mathrm{X}_{\tilde{\mathbf{g}}} := \left\{ \mathbf{w} \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon^0; \Omega) : \mathbf{w} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_B \cup \Gamma_T} = \tilde{\mathbf{g}} \right\}. \tag{3.4}$$

Entonces, si

$$\tilde{\mathbf{g}} \in \gamma_t \left(\mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon^0; \Omega) \right) \subset [\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)]^3,$$

existe $\varphi \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_\epsilon^0; \Omega)$ tal que $\gamma_t(\varphi) = \tilde{\mathbf{g}}$. Luego, si definimos $\chi := \mathbf{u} - \varphi$ entonces $\gamma_t(\chi) = \gamma_t(\mathbf{u}) - \gamma_t(\varphi) = 0$ sobre $\Gamma_B \cup \Gamma_T$ y $\nabla \cdot (\epsilon \chi) = 0$, lo cual implica que $\chi \in \mathrm{X}_{QP}$ y $\mathbf{u} := \chi + \varphi$. Teniendo en cuenta lo anterior en (3.3a) resulta la siguiente formulación variacional: Hallar $(\chi, p) \in \mathrm{X}_{QP} \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} (\nabla \times \chi, \nabla \times \mathbf{w}) - \kappa^2(\epsilon \chi, \mathbf{w}) &= \overset{\vee}{\mathbf{f}}(\mathbf{w}), \\ (\overline{\epsilon}\, \nabla p, \nabla q) &= (\overset{\vee}{\mathbf{f}}, \nabla q), \end{aligned}$$

para todo $(\mathbf{w}, q) \in \mathrm{X}_{QP} \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Aquí, $\overset{\vee}{\mathbf{f}}(\mathbf{w}) := (\mathbf{f} + \kappa^2 \epsilon \varphi, \mathbf{w}) - (\nabla \times \varphi, \nabla \times \mathbf{w})$.

Para plantear el esquema HDG de (3.1) consideramos, como en el Capítulo 2, la discretización cuasi-uniforme de Ω, $\mathcal{T}_h$, las definiciones de los espacios de aproximación V_h, Q_h, M_h e introducimos el espacio

$$\mathrm{M}_{QP} := \left\{ \lambda \in \mathrm{M}_h^t : \ \lambda_{|\Gamma_2} = e^{i\alpha L} \lambda_{|\Gamma_1}, \ \lambda_{|\Gamma_4} = e^{i\beta L} \lambda_{|\Gamma_3} \right\}. \tag{3.5}$$

Adicionalmente, debido a las condiciones cuasi-periódicas, el flujo numérico $\tilde{\mathbf{u}}_h$ se define así

$$\tilde{\mathbf{u}}_h \mid_{\mathcal{E}_h \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_4)} := \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \quad \tilde{\mathbf{u}}_h \mid_{\Gamma_2} := e^{i\alpha L} \widehat{\mathbf{u}}_h^t \mid_{\Gamma_1}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_h \mid_{\Gamma_4} := e^{i\beta L} \widehat{\mathbf{u}}_h^t \mid_{\Gamma_3} . \tag{3.6}$$

Aplicándole a (3.1) un procedimiento similar al que presentamos en el capítulo anterior para deducir (2.10) a partir de (2.3), obtenemos el esquema HDG: Hallar $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \tilde{\mathbf{u}}_h, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$ tales que

$$(\mathbf{v}_h, \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - \langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \gamma_t(\mathbf{w}) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{3.7a}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \gamma_t(\mathbf{z}) \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} \\ - (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{z}))_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \mathbf{F}(\mathbf{z}), \end{aligned} \tag{3.7b}$$

$$- (\epsilon\, \mathbf{u}_h, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{3.7c}$$

$$\left\langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \eta \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = 0, \tag{3.7d}$$

$$\langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \mu \rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = 0, \tag{3.7e}$$

$$\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \eta \rangle_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} = \langle \tilde{\mathbf{g}}, \eta \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_B \cup \Gamma_T}, \tag{3.7f}$$

$$\langle \widehat{p}_h, \mu \rangle_{\Gamma} = 0, \tag{3.7g}$$

para todo $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t, \eta, \mu) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$. Notemos que por medio de (3.7d), (3.7e), (3.7f) y (3.7g) imponemos la continuidad de la traza tangencial de $\widehat{\mathbf{v}}_h^t$, la continuidad de la traza normal de $\widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n}$ y las condiciones sobre la frontera para $\widehat{\mathbf{u}}_h^t$ y $\widehat{p}_h$. Aquí, $\mathbf{F}$ se define igual que en el Capítulo 2 y los flujos numéricos satisfacen las siguientes relaciones

$$\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t = \begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t + \tau(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h), & \text{sobre} \quad \mathcal{E}_h \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_4), \\ -e^{i\alpha L} (\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t)_{|\Gamma_1}, & \text{sobre} \quad \Gamma_2, \\ -e^{i\beta L} (\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t)_{|\Gamma_3}, & \text{sobre} \quad \Gamma_4, \end{cases} \tag{3.7h}$$

$$\widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n} = \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n} + \tau_n (p_h - \widehat{p}_h), \tag{3.7i}$$

con τ y τ_n parámetros de estabilización positivos.

1. Análisis de existencia y unicidad

Para iniciar el análisis de existencia de una única solución de (3.7), primero se deduce una identidad tipo G$\mathring{a}$rding, al igual que en el capítulo anterior.

Lema 6. *Las incógnitas* $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \tilde{\mathbf{u}}_h, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$ *de (3.7) satisfacen la siguiente identidad tipo G$\mathring{a}$rding*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\| \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h \right) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2 \left(|Re(\epsilon_m)| + i\, Im(\epsilon_m) \right) \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 \\ + \left\| \tau_n^{1/2} (p_h - \widehat{p}_h) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 = \kappa^2 \epsilon_d \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 + \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h) - \left\langle \tilde{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Demostración. Tomando $\mathbf{w} := \mathbf{v}_h$, $\mathbf{z} := \mathbf{u}_h$ y $t := p_h$ en (3.7), resulta

$$(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{3.9a}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} \\ - (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h))_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h),\end{aligned} \tag{3.9b}$$

$$- (\epsilon\, \mathbf{u}_h, \nabla p_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0. \tag{3.9c}$$

Ahora bien, aplicando la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{curl}; \mathcal{T}_h)$ al segundo término de (3.9a) y la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h)$ al primer término de (3.9c), se obtiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla \times \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \\ (\nabla \cdot (\epsilon\, \mathbf{u}_h), p_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \epsilon\, \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0.\end{aligned}$$

Después de sumar las anteriores expresiones con el conjugado de (3.9b), simplificar y aplicar la propiedad (1.4a) resulta la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{u}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\ - \kappa^2 (\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Luego, sumando y restando $\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$ y $\langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$ a (3.10), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \left(\widehat{\mathbf{v}}_h^t - \mathbf{v}_h^t\right) \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 (\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} \\ + \langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} - \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h),\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \tau \left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h\right) \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\ - \kappa^2 (\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \tau_n (p_h - \widehat{p}_h), p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h),\end{aligned} \tag{3.11}$$

de acuerdo con (3.7i), (3.7e) y (3.7g).
Además, usando (3.6), (3.7d) y (3.7f), se obtiene que

$$\begin{aligned}\left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= \left\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{n} \times \left(\widehat{\mathbf{v}}_h^t \times \mathbf{n}\right) \right\rangle_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n}_2 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_2} \\ &\quad + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_3} + \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n}_4 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_4} \\ &= \left\langle \tilde{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_1} - \left\langle e^{i\alpha L}\, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_1 \times e^{i\alpha L}\, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_1} \\ &\quad + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_3} - \left\langle e^{i\beta L}\, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_3 \times e^{i\beta L}\, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_3} \\ &= \left\langle \tilde{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_1} - |e^{i\alpha L}| \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_1} \\ &\quad + \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_3} - |e^{i\beta L}| \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_3} \\ &= \left\langle \tilde{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\Gamma_B \cup \Gamma_T}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Entonces, sustituyendo (3.12) en (3.11) y usando la definición de ϵ, resulta

$$\|\mathbf{v}_h\|^2_{\mathcal{T}_h} + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} + \left\langle \tilde{\mathbf{g}}, \widehat{\mathbf{v}}_h^t\right\rangle_{\Gamma_B\cup\Gamma_T} - \kappa^2\overline{\epsilon_m}\,\|\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h^m} - \kappa^2\epsilon_d\,\|\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h^d} + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}\left(\mathbf{u}_h\right),$$

de lo cual se obtiene (3.8). ■

El siguiente resultado nos permite garantizar que (3.7) tiene una única solución.

Teorema 5. *Si $\kappa^2\epsilon_d$ no es un valor propio del problema de valores propios: Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\varphi_h, \psi_h, \sigma_h, \tilde{\psi}_h, \widehat{\sigma}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$ tales que*

$$\begin{aligned}
(\varphi_h, \mathbf{s})_{\mathcal{T}_h} - (\psi_h, \nabla\times\mathbf{s})_{\mathcal{T}_h} - \langle\tilde{\psi}_h, \gamma_t(\mathbf{s})\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0,\\
(\varphi_h, \nabla\times\mathbf{q})_{\mathcal{T}_h} + \left\langle\widehat{\varphi}_h^t, \gamma_t(\mathbf{q})\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} - \kappa^2\left(\epsilon_m\psi_h, \mathbf{q}\right)_{\mathcal{T}_h^m}&\\
- \left(\sigma_h, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{q})\right)_{\mathcal{T}_h} + \langle\widehat{\sigma}_h, \epsilon\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= \lambda\left(\psi_h, \mathbf{q}\right)_{\mathcal{T}_h^d},\\
-\left(\epsilon\,\psi_h, \nabla r\right)_{\mathcal{T}_h} + \langle\widehat{\epsilon\,\psi_h^n}\cdot\mathbf{n}, r\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0,\\
\left\langle\mathbf{n}\times\widehat{\varphi}_h^t, \eta\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h\setminus\Gamma} &= 0,\\
\langle\widehat{\epsilon\,\psi_h^n}\cdot\mathbf{n}, \zeta\rangle_{\partial\mathcal{T}_h\setminus\Gamma} &= 0,\\
\langle\widehat{\psi}_h^t, \eta\rangle_{\Gamma_B\cup\Gamma_T} &= 0,\\
\langle\widehat{\sigma}_h, \zeta\rangle_{\Gamma} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

para todo $(\mathbf{s}, \mathbf{q}, r, \eta, \zeta) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$, donde

$$\mathbf{n}\times\widehat{\varphi}_h^t = \begin{cases}\mathbf{n}\times\varphi_h^t + \tau(\psi_h^t - \tilde{\psi}_h), & \textit{sobre} \quad \mathcal{E}_h\setminus(\Gamma_2\cup\Gamma_4),\\ -e^{i\alpha L}(\mathbf{n}\times\widehat{\varphi}_h^t)_{|\Gamma_1}, & \textit{sobre} \quad \Gamma_2,\\ -e^{i\beta L}(\mathbf{n}\times\widehat{\varphi}_h^t)_{|\Gamma_3}, & \textit{sobre} \quad \Gamma_4.\end{cases}$$

$$\widehat{\epsilon\psi_h^n}\cdot\mathbf{n} = \epsilon\psi_h^n\cdot\mathbf{n} + \tau_n(\sigma_h - \widehat{\sigma}_h).$$

Entonces, (3.7) tiene solución única.

Demostración. Si consideramos el sistema homogéneo asociado a (3.7), entonces de (3.8) se tiene que

$$\|\mathbf{v}_h\|^2_{\mathcal{T}_h} + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2\left(|\mathrm{Re}\left(\epsilon_m\right)| + i\,\mathrm{Im}\left(\epsilon_m\right)\right)\|\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h^m} + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} = \kappa^2\epsilon_d\,\|\mathbf{u}_h\|^2_{\mathcal{T}_h^d}. \tag{3.14}$$

De otro lado, notemos que después de analizar (3.13) mediante un procedimiento análogo al desarrollado en la prueba del Lema 6, se obtiene la siguiente expresión

$$\|\varphi_h\|^2_{\mathcal{T}_h} + \left\|\tau^{1/2}(\psi_h^t - \tilde{\psi}_h)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2(|\mathrm{Re}(\epsilon_m)| + i\,\mathrm{Im}(\epsilon_m))\,\|\psi_h\|^2_{\mathcal{T}_h^m} + \left\|\tau_n^{1/2}\left(\sigma_h - \widehat{\sigma}_h\right)\right\|^2_{\partial\mathcal{T}_h} = \lambda\,\|\psi_h\|^2_{\mathcal{T}_h^d}. \tag{3.15}$$

Notemos que por la forma de (3.14) y (3.15) $\mathbf{u}_h$ debe ser cero en $\mathcal{T}_h^d$, porque en caso contrario $\kappa^2\epsilon_d$ sería un valor propio de (3.13). Entonces,

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2\left|\mathrm{Re}(\epsilon_m)\right|\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + i\kappa^2\,\mathrm{Im}(\epsilon_m)\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 = 0,$$

lo cual implica que la parte real satisface la siguiente ecuación

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\|\tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2\left|\mathrm{Re}(\epsilon_m)\right|\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h - \widehat{p}_h\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h}^2 = 0,$$

a partir de la cual se tiene que

$$\mathbf{v}_h = 0 \text{ en } \mathcal{T}_h,\ \ \mathbf{u}_h^t = \tilde{\mathbf{u}}_h \text{ sobre } \partial\mathcal{T}_h\ ,\ \ \mathbf{u}_h = 0 \text{ en } \mathcal{T}_h^m \ y\ p_h = \widehat{p}_h \text{ sobre } \partial\mathcal{T}_h,$$

puesto que τ, $\kappa^2\left|\mathrm{Re}(\epsilon_m)\right|$ y τ_n son constantes positivas.
En consecuencia, $\mathbf{u}_h = 0$ en $\mathcal{T}_h$ y $0 = \mathbf{u}_h^t = \tilde{\mathbf{u}}_h$ sobre $\partial\mathcal{T}_h$. Además, teniendo en cuenta lo anterior y (3.7h) en (3.7b), se obtiene

$$0 = -\left(p_h, \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{z})\right)_{\mathcal{T}_h} + \langle p_h, \epsilon\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\,,$$

de donde, después de aplicar la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div};\mathcal{T}_h)$, resulta

$$0 = (\nabla p_h, \epsilon\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} - \langle p_h, \epsilon\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \langle p_h, \epsilon\,\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = (\nabla p_h, \epsilon\mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}\,,\ \ \forall\mathbf{z}\in\mathrm{V}_h.$$

Entonces, tomando $\mathbf{z} := \bar{\epsilon}\nabla p_h$, de lo anterior se obtiene que $\nabla p_h = 0$; lo cual implica que p_h es una función constante a trozos en $\mathcal{T}_h$. Más aún, dado que $p_h = \widehat{p}_h$ y $\widehat{p}_h$ se anula sobre Γ entonces $p_h = 0$ en Ω.
Finalmente, $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \tilde{\mathbf{u}}_h, \widehat{p}_h) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, 0)$ es la solución del sistema homogéneo asociado a (3.7). Entonces, dado que dicho sistema es lineal, cuadrado y los espacios V_h, Q_h, M_{QP} y M_h tienen dimensión finita, se concluye que (3.7) tiene una única solución. ■

2. Estabilidad

La deducción del estimativo de estabilidad para el problema con condiciones Dirichlet y cuasi-periódicas que presentamos en este capítulo es similar a la realizada en la Sección 3 del capítulo anterior. Además, usamos los proyectores definidos en (2.18), P_{M_h} y las cotas dadas en (2.19). Debido a la definición de las condiciones cuasi-periódicas el proyector ortogonal L^2, $P_{\mathrm{M}_h^t}$ es reemplazado por $P_{\mathrm{M}_{QP}} : \left[\mathrm{L}^2\left(\mathcal{E}_h\right)\right]^3 \to \mathrm{M}_{QP}$, el cual para un $l_\eta \in [0,k]$ dado, satisface

$$\|P_{\mathrm{M}_{QP}}\eta - \eta\|_{\mathcal{E}_h} \lesssim h^{l_\eta+1}\left|\eta\right|_{l_\eta+1,\mathcal{E}_h}\,,$$

para todo $\eta \in [\mathrm{H}^{l_\eta+1}(\mathcal{E}_h)]^3$.

2.1. Argumento de dualidad

Para desarrollar el argumento de dualidad consideramos el problema auxiliar (2.20), el cual tiene una única solución y satisface (2.22), (2.23), (2.24) y (2.25).

En el siguiente lema establecemos una identidad que hace posible la deducción del estimativo de estabilidad del método HDG propuesto para el problema con condiciones tipo Dirichlet y condiciones cuasi-periódicas.

Lema 7. *(DualidadQP) Si* $(\phi,\psi,\rho)\in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega)\times \mathrm{X}_0\times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *es solución de (2.20) y* $(\mathbf{v}_h,\mathbf{u}_h,p_h,\tilde{\mathbf{u}}_h,\widehat{p}_h)\in \mathrm{V}_h\times \mathrm{V}_h\times \mathrm{Q}_h\times \mathrm{M}_{QP}\times \mathrm{M}_h$ *es solución de (3.7), entonces*

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_h,\Theta)_{\mathcal{T}_h} &= \left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\tilde{\mathbf{u}}_h\right),\tau^{1/2}\left(\Pi_V\psi-\psi\right)\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}+\kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\Pi_V\psi-\psi\right)_{\mathcal{T}_h}\\ &\quad+\left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\tilde{\mathbf{u}}_h\right),\tau^{-1/2}\left(P_V\phi-\phi\right)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}+\left\langle p_h-\widehat{p}_h,\epsilon\left(\Pi_V\psi-\psi\right)\cdot\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\quad+\mathbf{F}\left(\Pi_V\psi\right)+\langle\tilde{\mathbf{g}},P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\rangle_\Gamma+\left\langle\tau_n\left(p_h-\widehat{p}_h\right),\Pi_Q\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}. \end{aligned}\tag{3.16}$$

Demostración. Las ideas de la prueba están basadas en las utilizadas para demostrar el Lema 3 del Capítulo 2. Inicialmente, se obtiene la siguiente reescritura de $(\mathbf{u}_h,\Theta)_{\mathcal{T}_h}$, teniendo en cuenta que el flujo numérico se denota $\tilde{\mathbf{u}}_h$ y el proyector $P_{\mathrm{M}_h^t}$ se reemplaza por $P_{\mathrm{M}_{QP}}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_h,\Theta)_{\mathcal{T}_h} &= (\mathbf{v}_h,\nabla\times\psi)_{\mathcal{T}_h}+\left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t-\tilde{\mathbf{u}}_h\right),\tau^{-1/2}\left(P_{\mathrm{V}}\phi-\phi\right)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}\\ &\quad-\langle\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{u}}_h,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\rangle_\Gamma-\kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h,\psi\right)_{\mathcal{T}_h}\\ &\quad+\left\langle\tau_n\left(p_h-\widehat{p}_h\right),\Pi_{\mathrm{Q}}\rho-\rho\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h}, \end{aligned}\tag{3.17}$$

de donde, usando la definición (3.6) del flujo numérico $\tilde{\mathbf{u}}_h$, la del espacio M_{QP} y (3.7f), resulta

$$\begin{aligned}\left\langle\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{u}}_h,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_\Gamma &= \left\langle\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_B\cup\Gamma_T}+\left\langle\mathbf{n}_1\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_1}\\ &\quad+\left\langle\mathbf{n}_2\times\tilde{\mathbf{u}}_h,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_2}+\left\langle\mathbf{n}_3\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_3}\\ &\quad+\left\langle\mathbf{n}_4\times\tilde{\mathbf{u}}_h,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_4}\\ &= \left\langle\tilde{\mathbf{g}},\left(P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\times\mathbf{n}\right)\times\mathbf{n}\right\rangle_{\Gamma_B\cup\Gamma_T}+\left\langle\mathbf{n}_1\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}\left(\phi^t\right)\right\rangle_{\Gamma_1}\\ &\quad-\left\langle\mathbf{n}_1\times e^{i\alpha L}\,\widehat{\mathbf{u}}_h^t,e^{i\alpha L}\,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_1}+\left\langle\mathbf{n}_3\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}\left(\phi^t\right)\right\rangle_{\Gamma_3}\\ &\quad-\left\langle\mathbf{n}_3\times e^{i\beta L}\,\widehat{\mathbf{u}}_h^t,e^{i\beta L}\,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_3}\\ &= -\left\langle\tilde{\mathbf{g}},\mathbf{n}\times\left(P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\times\mathbf{n}\right)\right\rangle_{\Gamma_B\cup\Gamma_T}+\left\langle\mathbf{n}_1\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_1}\\ &\quad-\left|e^{i\alpha L}\right|\left\langle\mathbf{n}_1\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_1}+\left\langle\mathbf{n}_3\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_3}\\ &\quad-\left|e^{i\beta L}\right|\left\langle\mathbf{n}_3\times\widehat{\mathbf{u}}_h^t,P_{\mathrm{M}_{QP}}(\phi^t)\right\rangle_{\Gamma_3}\\ &= -\left\langle\tilde{\mathbf{g}},P_{\mathrm{M}_{QP}}\left(\phi^t\right)\right\rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

Ahora bien, sustituyendo lo anterior y la expresión equivalente para $(\mathbf{v}_h, \nabla \times \psi)_{\mathcal{T}_h}$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_h, \nabla \times \psi)_{\mathcal{T}_h} &= \left\langle \tau^{1/2}\left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h\right), \tau^{1/2}\left(\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi\right)\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \kappa^2\left(\epsilon\mathbf{u}_h, \Pi_{\mathrm{V}}\psi\right)_{\mathcal{T}_h} \\ &\quad + \left\langle p_h - \widehat{p}_h, \epsilon\left(\Pi_{\mathrm{V}}\psi - \psi\right)\cdot\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} + \mathbf{F}\left(\Pi_{\mathrm{V}}\psi\right),\end{aligned}$$

en (3.17), se obtiene (3.16). ■

Del anterior lema se deriva el siguiente resultado.

Lema 8. *Sean* $(\phi, \psi, \rho) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \times \mathrm{X}_0 \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *y* $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \tilde{\mathbf{u}}_h, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$ *soluciones de (2.20) y (3.7), respectivamente. Si* τ, τ_n *son de orden constante y* $k \geq 1$, *entonces existen* $h_0 > 0$ *y* $C > 0$, *tales que*

$$\|\epsilon\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h}^2 \lesssim \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{L}([\mathrm{L}^2(\mathcal{T}_h)]^3,\mathbb{C})}^2 + h^{-1}\|\tilde{\mathbf{g}}\|_{\Gamma}^2, \tag{3.18}$$

para todo $h < h_0$.

Demostración. Notemos que el procedimiento para demostrar (3.18) es análogo al desarrollado en el capítulo anterior para el Lema 4. Además, es necesario tener en cuenta (3.16), la definición del flujo numérico $\tilde{\mathbf{u}}_h$ dada en (3.6) y la definición del proyector $P_{\mathrm{M}_{QP}}$. ■

3. Estimativos de error

En está sección, los errores de proyección que utilizamos en la deducción de los estimativos de error para el esquema (3.7) coinciden con los definidos en (2.36), salvo los siguientes

$$\mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h} = P_{M_{QP}}\mathbf{u}^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \;\; \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t} = P_{M_{QP}}\mathbf{v}^t - \widehat{\mathbf{v}}_h^t. \tag{3.19}$$

Veamos el sistema de ecuaciones que nos permite relacionar los errores de proyección.

Lema 9. *Sean* $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, p) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl};\Omega) \times \mathrm{X}_{\tilde{\mathbf{g}}} \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *y* $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \tilde{\mathbf{u}}_h, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$ *soluciones de (3.1) y (3.7), respectivamente. Entonces los errores de*

proyección $\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}$, $\mathbf{e}_h^{p}$, $\mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h}$, $\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}$, $\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}$ *y* $\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}$ *satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones*

$$(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \nabla \times \mathbf{w})_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h} \times \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{3.20a}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}, \nabla \times \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \kappa^2 (\epsilon \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h} \\ - (\mathbf{e}_h^{p}, \nabla \cdot (\epsilon z))_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \epsilon z \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = -\kappa^2 (\Pi_V \mathbf{u} - \mathbf{u}, \bar{\epsilon} z)_{\mathcal{T}_h},\end{aligned} \tag{3.20b}$$

$$- (\epsilon \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}, \nabla t)_{\mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}, t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{3.20c}$$

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}, \eta \rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = 0, \tag{3.20d}$$

$$\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n}, \mu \rangle_{\partial \mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = 0, \tag{3.20e}$$

$$\langle \mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h}, \eta \rangle_{\Gamma} = 0, \tag{3.20f}$$

$$\langle \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}, \mu \rangle_{\Gamma} = 0, \tag{3.20g}$$

para todo $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t, \eta, \mu) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$, *donde*

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t} = \begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}})^t + \tau((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h}), & \textit{sobre} \quad \mathcal{E}_h \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_4), \\ -e^{i\alpha L}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}) \mid_{\Gamma_1}, & \textit{sobre} \quad \Gamma_2, \\ -e^{i\beta L}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}) \mid_{\Gamma_3}, & \textit{sobre} \quad \Gamma_4. \end{cases} \tag{3.20h}$$

$$\mathbf{e}_h^{\widehat{\epsilon\mathbf{u}}_h^n} = \epsilon\, (\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^n \cdot \mathbf{n} + \tau_n(\mathbf{e}_h^{p} - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}). \tag{3.20i}$$

Demostración. Notemos que la deducción de las ecuaciones (3.20a)-(3.20i) es análoga a la presentada en la demostración del Lema 5 del capítulo anterior, teniendo en cuenta la definición del flujo $\tilde{\mathbf{u}}_h$ dada en (3.6) y el proyector $P_{M_{QP}}$.

■

A continuación presentamos el resultado a partir del cual deducimos los ordenes de convergencia de las incógnitas de (3.7).

Teorema 6. *Sean* $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, p) \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega) \times \mathrm{X}_{\tilde{\mathbf{g}}} \times \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *solución de (3.1) y* $(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, p_h, \tilde{\mathbf{u}}_h, \widehat{p}_h) \in \mathrm{V}_h \times \mathrm{V}_h \times \mathrm{Q}_h \times \mathrm{M}_{QP} \times \mathrm{M}_h$ *solución de (3.7). Entonces, para* $l_{\mathbf{u}}, l_p \in [0, k]$ *y* $(\mathbf{u}, p) \in [\mathrm{H}^{l_{\mathbf{u}}+1}(\Omega)]^3 \times \mathrm{H}^{l_p+1}(\Omega)$, *los errores de proyección* $\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}$, $\mathbf{e}_h^{p}$, $\mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h}$ *y* $\mathbf{e}_h^{\widehat{p}}$ *satisfacen*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_h^{\mathbf{v}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\| \tau^{1/2}((\mathbf{e}_h^{\mathbf{u}})^t - \mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h}) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \left\| \tau_n^{1/2}(\mathbf{e}_h^{p} - \mathbf{e}_h^{\widehat{p}}) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \kappa^2 \|\epsilon\, \mathbf{e}_h^{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{T}_h}^2 \\ \lesssim h^{2(l_{\mathbf{u}}+1)} |\mathbf{u}|_{l_{\mathbf{u}}+1, \mathcal{T}_h}^2 + h^{2(l_p+1)} |p|_{l_p+1, \mathcal{T}_h}^2 .\end{aligned} \tag{3.21}$$

Demostración. El estimativo (3.21) resulta después de usar argumentos análogos a los utilizados en el Teorema 4 del segundo capítulo, teniendo en cuenta las modificaciones en las definiciones de los errores de proyección $\mathbf{e}_h^{\tilde{\mathbf{u}}_h}$ y $\mathbf{e}_h^{\widehat{\mathbf{v}}_h^t}$, dadas en (3.19). ■

Finalmente, las variables $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_h$ y $\mathbf{u}_h$ de los problemas (3.1) y (3.7) satisfacen un resultado similar al Corolario 1 enunciado en el segundo capítulo.

Capítulo 4

PROBLEMA CON CONDICIONES DE RADIACIÓN

En este capítulo planteamos y analizamos parcialmente un problema en el que las ecuaciones de Maxwell en régimen armónico están sujetas a condiciones cuasi-periódicas y de radiación, el cual nos permite modelar el problema de absorción y generación de energía en una celda fotovoltaica de una forma más real en comparación con los problemas A y B estudiados en los Capítulos 2 y 3, respectivamente.

Para plantear el problema C nos basamos en el estudio presentado para la ecuación de Helmholtz en [38] y en la sección 13.5.3 de [35]. En ambas referencias se utiliza el método de aproximación *perfectly matched layer*, PML, para incluir las condiciones de tipo radiación o transmisión a un problema definido en un dominio periódico con condiciones cuasi-periódicas. Esta técnica permite modelar el comportamiento de las ondas reflejadas y trasmitidas en el infinito, en dominios admisibles para estudios computacionales.

Debido a la forma que adquiere la permitividad relativa en las fronteras artificiales que se adicionan al dominio inicial cuando se emplea la técnica PML, el análisis de existencia y unicidad de la formulación HDG que proponemos en la Sección 2 de este capítulo, difiere de manera significativa de lo realizado en los capítulos anteriores, por lo tanto, no presentamos un análisis completo de error (se dejará para trabajos futuros) . Específicamente, la permitividad relativa está dada en términos de una matriz diagonal, cuyas entradas dependen de una función no acotada y cuya integral suponemos no finita. Es importante resaltar que la formulación HDG acá presentada es inédita (hasta donde conocemos) y, por si misma, constituye un aporte significativo en el área.

1. Planteamiento del problema

Al igual que en el problema B consideramos el dominio $\Omega := \Omega_m \cup \Omega_d$ con frontera $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_B \cup \Gamma_T$, dado en la Figura 3.3. Luego, para $\delta_1, \delta_2 > 0$ dados definimos las PML $\Omega_-^A := (0, L) \times (0, L) \times (-\delta_2, 0)$ y $\Omega_+^A := (0, L) \times (0, L) \times (M, M + \delta_1)$ conectadas con el dominio Ω por medio de las interfases Γ_T y Γ_B, como se ilustra en la Figura 4.1. Las PML o dominios absorbentes los denotamos $\Omega^A := \Omega_+^A \cup \Omega_-^A$ y sus fronteras $\partial\Omega_+^A$ y $\partial\Omega_-^A$, las definimos así

$$\begin{aligned} \partial\Omega_-^A &:= \Gamma_B \cup \Gamma_B^- \cup \Gamma_{1,A}^- \cup \Gamma_{2,A}^- \cup \Gamma_{3,A}^- \cup \Gamma_{4,A}^-, \\ \partial\Omega_+^A &:= \Gamma_T \cup \Gamma_T^+ \cup \Gamma_{1,A}^+ \cup \Gamma_{2,A}^+ \cup \Gamma_{3,A}^+ \cup \Gamma_{4,A}^+. \end{aligned} \tag{4.1}$$

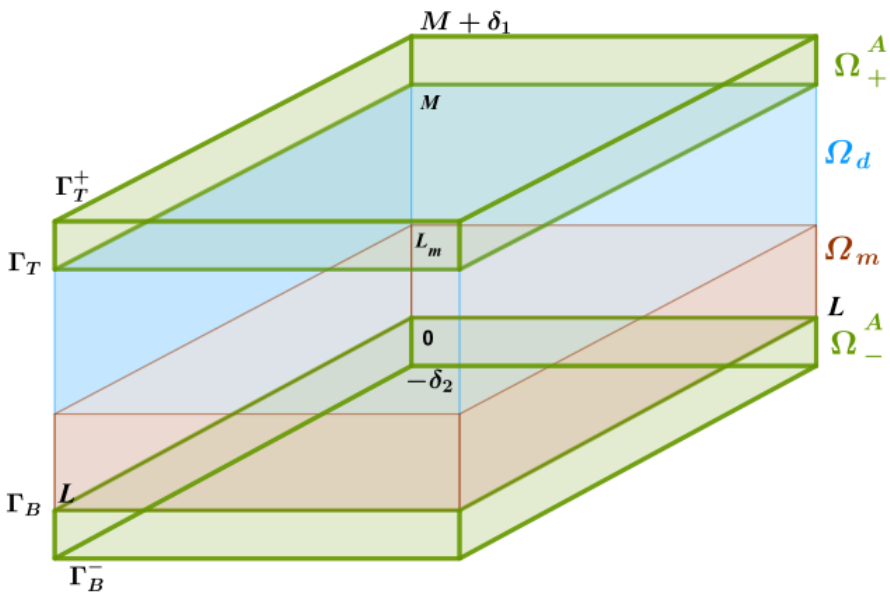

Figura 4.1: Dominio $\Omega^R := \overline{\Omega} \cup \Omega^A$

Debido a que el dominio Ω^A está formado por aire entonces la permeabilidad $\mu_r = 1$ y la permitividad $\epsilon_r = 1$. Además, consideramos el sistema de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y dado que las PML se incluyen en la parte superior e inferior del dominio, se tiene que

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := \begin{cases} (x, y, M + (1+i)\int_M^z \sigma(s)\,\mathrm{d}s), & \text{si } z \in (M, M + \delta_1), \\ (x, y, z), & \text{si } z \in (0, M), \\ (x, y, -(1+i)\int_z^0 \sigma(s)\,\mathrm{d}s), & \text{si } z \in (-\delta_2, 0), \end{cases}$$

donde σ es la siguiente función de valor real

$$\sigma(z) : (-\delta_2, 0) \cup (M, M+\delta_1) \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \sigma(z) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa(z+\delta_2)}, & \text{si } z \in (-\delta_2, 0), \\ \frac{1}{\kappa(M+\delta_1-z)}, & \text{si } z \in (M, M+\delta_1). \end{cases}$$

La función σ es una parte importante de la técnica PML, ver por ejemplo [5], porque su definición permite controlar las ondas que se disipan y las que son reflejadas. Por tal motivo a está función se le denomina función de absorción y se caracteriza por tener asíntotas verticales. En nuestro caso, sus asíntotas verticales son $z = -\delta_2$ y $z = M + \delta_1$.

Para determinar la forma de las ecuaciones del problema de primer orden en el dominio Ω^A, que se obtiene después de definir $\mathbf{u} := \mathbf{E}$ y $\mathbf{v} := \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{u}$ en las ecuaciones de Maxwell (1.1) es necesario realizar el cambio de variable de $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ a (x, y, z). Inicialmente definimos $\tilde{\mathbf{u}} := (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$, $\tilde{p} := \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y

$$(d_1, d_2, d_3) := \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}z}\right) = (1, 1, (1+i)\sigma(z)),$$

en Ω^A para reescribir $\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\nabla}\tilde{p}$ y $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}}$ en las variables (x, y, z) usando matrices y escalares adecuadamente.

Supongamos que $\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{u}} = A\nabla \times B\,\tilde{\mathbf{u}}$, para

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_{\tilde{x}} & \partial_{\tilde{y}} & \partial_{\tilde{z}} \\ \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 & \tilde{u}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix}$$

y

$$A\nabla \times B\tilde{\mathbf{u}} = A \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ b_1\tilde{u}_1 & b_2\tilde{u}_2 & b_3\tilde{u}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_3 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{y}} - a_1 b_2 d_3 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{z}} \\ a_2 b_1 d_3 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{z}} - a_2 b_3 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}} \\ a_3 b_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}} - a_3 b_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix}.$$

Entonces, como bajo nuestro supuesto las anteriores expresiones coinciden, se deben cumplir las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 b_3 =& 1 = a_1 b_2 d_3, \\ a_2 b_1 d_3 =& 1 = a_2 b_3, \\ a_3 b_2 =& 1 = a_3 b_1. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación $\frac{1}{b_2} = a_3 = \frac{1}{b_1}$, es decir, $b_2 = b_1 = 1$. Sustituyendo $b_1 = 1$ en la segunda ecuación se obtiene que $\frac{1}{d_3} = a_2 = \frac{1}{b_3}$, de lo cual, $b_3 = d_3$. Finalmente, de la primera ecuación se deduce que $a_1 = \frac{1}{d_3}$. Por lo anterior,

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{d_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, supongamos que $\tilde{\nabla}\tilde{p} = C\nabla\tilde{p}$ con

$$C := \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, dado que las siguientes expresiones deben ser iguales

$$\tilde{\nabla}\tilde{p} = (\partial_{\tilde{x}}\tilde{p}, \partial_{\tilde{y}}\tilde{p}, \partial_{\tilde{z}}\tilde{p}) \;\text{ y }\; C\nabla\tilde{p} = (c_1\partial_{\tilde{x}}\tilde{p}, c_2\partial_{\tilde{y}}\tilde{p}, c_3 d_3\partial_{\tilde{z}}\tilde{p}),$$

se concluye que $C = B^{-1}$.

Nos resta reescribir $\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}}$ y para ello suponemos $\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{e}\,\nabla\cdot E\tilde{\mathbf{u}}$, donde $\tilde{e}$ es una función escalar y

$$E := \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Luego, como

$$\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{u}} = \partial_{\tilde{x}}\tilde{u}_1 + \partial_{\tilde{y}}\tilde{u}_2 + \partial_{\tilde{z}}\tilde{u}_3 \quad \text{y} \quad \tilde{e}\,\nabla\cdot E\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{e}(e_1\partial_{\tilde{x}}\tilde{u}_1 + e_2\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}_2 + e_3 d_3\partial_{\tilde{z}}\tilde{u}_3)$$

entonces las anteriores expresiones coinciden si $\tilde{e}E = B^{-1}$, lo cual se tiene si $E = A^{-1}$ y $\tilde{e} = \frac{1}{d_3}$.

Ahora veamos que usando la expresión $A\nabla \times B\tilde{\mathbf{u}}$ equivalente a $\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{u}}$ en la ecuación $\mu_r \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{u}} = 0$ y definiendo $\mathbf{u}^A := B\tilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}^A := B\tilde{\mathbf{v}}$, obtenemos la siguiente ecuación en el dominio Ω^A

$$0 = \mu_r \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{v}} - A\nabla \times B\tilde{\mathbf{u}} = B^{-1}\mathbf{v}^A - A\nabla \times \mathbf{u}^A$$

de donde

$$A^{-1}B^{-1}\mathbf{v}^A - \nabla \times \mathbf{u}^A = 0$$

y tomando $\mu_0^A := A^{-1}B^{-1}$ resulta

$$\mu_0^A \mathbf{v}^A - \nabla \times \mathbf{u}^A = 0. \tag{4.2}$$

Para deducir la segunda ecuación en Ω^A iniciamos con $\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r \tilde{\mathbf{u}} = 0$ y después de usar de manera adecuada la expresión equivalente para $\tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}}$, las definiciones de las variables $\mathbf{u}^A$, $\mathbf{v}^A$ y que $\epsilon_r = 1$, resulta

$$0 = \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{v}} - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r \tilde{\mathbf{u}} = A\nabla \times \mathbf{v}^A - \omega^2 \epsilon_0 B^{-1}\mathbf{u}^A = \nabla \times \mathbf{v}^A - \omega^2 \epsilon_0 A^{-1}B^{-1}\mathbf{u}^A,$$

de donde, definiendo $\epsilon^A := A^{-1}B^{-1}$ se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{v}^A - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon^A \mathbf{u}^A = 0. \tag{4.3}$$

La siguiente ecuación es la asociada con la condición de incompresibilidad del campo eléctrico y para su deducción partimos de $\tilde{\nabla} \cdot (\epsilon_r \tilde{\mathbf{u}}) = 0$. Entonces, como

$$0 = \tilde{\nabla} \cdot (\epsilon_r \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{d_3} \nabla \cdot (A^{-1}\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{d_3} \nabla \cdot (A^{-1}B^{-1}\mathbf{u}^A),$$

se obtiene que

$$\nabla \cdot (\epsilon^A \mathbf{u}^A) = 0. \tag{4.4}$$

Para imponer (4.4) en el sistema de ecuaciones definido en Ω^A incluímos la variable auxiliar p^A, al igual que en la primera sección del Capítulo 2. Entonces, teniendo en cuenta que $\tilde{\nabla}\tilde{p} = B^{-1}\nabla\tilde{p}$, $\tilde{p} = p^A$ y la deducción de (4.3), resulta el siguiente sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \mu_0^A \mathbf{v}^A - \nabla \times \mathbf{u}^A &= 0, \quad \text{en } \Omega^A, \\ \nabla \times \mathbf{v}^A - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon^A \mathbf{u}^A + \overline{\epsilon^A}\, \nabla p^A &= 0, \quad \text{en } \Omega^A, \\ \nabla \cdot (\epsilon^A \mathbf{u}^A) &= 0, \quad \text{en } \Omega^A, \\ p^A \mid_{\partial\Omega^A} &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $\overline{\epsilon^A} := \begin{pmatrix} \overline{d_3} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\overline{d_3}} \end{pmatrix}$, $\overline{d_3} = (1-i)\sigma(z)$ y $\frac{1}{\overline{d_3}} = \frac{1+i}{2\sigma(z)}$.

Sea $\Omega^R := \overline{\Omega} \cup \Omega^A$ un dominio acotado con frontera poligonal conexa

$$\Gamma^R := \Gamma_T^+ \cup \Gamma_B^- \cup \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R \cup \Gamma_3^R \cup \Gamma_4^R, \tag{4.6}$$

donde $\Gamma_j^R := \Gamma_{j,A}^+ \cup \Gamma_j \cup \Gamma_{j,A}^-$, para $j = 1, \cdots, 4$.

Los espacios que consideramos en el análisis del problema C son $\mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega^R)$, $\mathrm{H}_0^1(\Omega^R)$ y

$$\mathrm{X}_R := \left\{ \mathbf{w}^R \in \mathrm{H}(\mathbf{curl}; \Omega^R) \cap \mathrm{H}(\mathbf{div}_{\epsilon^R}^0; \Omega^R) : \mu_0^R \mathbf{w}^R, \epsilon^R \mathbf{w}^R \in [\mathrm{L}^2(\Omega^R)]^3 \right\}.$$

Teniendo en cuenta el planteamiento del problema B dado en (3.1), las caracterizaciones de las PML y el sistema (4.5) planteamos el problema C, el cual consiste en: Hallar $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, p, $\mathbf{v}^A$, $\mathbf{u}^A$, p^A tales que

$$\begin{aligned}
\mu_0 \mathbf{v} - \nabla \times \mathbf{u} &= 0, && \text{en } \Omega, \\
\nabla \times \mathbf{v} - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon \mathbf{u} + \overline{\epsilon} \nabla p &= \mathbf{f}, && \text{en } \Omega, \\
\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) &= 0, && \text{en } \Omega, \\
\mu_0^A \mathbf{v}^A - \nabla \times \mathbf{u}^A &= 0, && \text{en } \Omega^A, \\
\nabla \times \mathbf{v}^A - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon^A \mathbf{u}^A + \overline{\epsilon}^A \nabla p^A &= 0, && \text{en } \Omega^A, \\
\nabla \cdot \left(\epsilon^A \mathbf{u}^A\right) &= 0, && \text{en } \Omega^A, \\
\mathbf{u}\,|_{\Gamma_2} &= e^{i\alpha L} \mathbf{u}\,|_{\Gamma_1}, \\
\mathbf{u}\,|_{\Gamma_4} &= e^{i\beta L} \mathbf{u}\,|_{\Gamma_3}, \\
\mathbf{u}^A\,|_{\Gamma_{2,A}^+ \cup \Gamma_{2,A}^-} &= e^{i\alpha L} \mathbf{u}^A\,|_{\Gamma_{1,A}^+ \cup \Gamma_{1,A}^-}, \\
\mathbf{u}^A\,|_{\Gamma_{4,A}^+ \cup \Gamma_{4,A}^-} &= e^{i\beta L} \mathbf{u}^A\,|_{\Gamma_{3,A}^+ \cup \Gamma_{3,A}^-}, \\
\mathbf{u} - \mathbf{u}^A &= \mathbf{u}_{inc}, && \text{sobre } \Gamma_T, \\
\mathbf{u} - \mathbf{u}^A &= 0, && \text{sobre } \Gamma_B, \\
\mathbf{u}^A &= 0, && \text{sobre } \Gamma_T^+ \cup \Gamma_B^-, \\
\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^A) &= \mathbf{n} \times \mathbf{v}_{inc}, && \text{sobre } \Gamma_T, \\
\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^A) &= 0, && \text{sobre } \Gamma_B, \\
p = p^A &= 0, && \text{sobre } \Gamma_T \cup \Gamma_B, \\
p &= 0, && \text{sobre } \Gamma^R,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $\mathbf{u}_{inc}$ denota el campo de la onda que incide sobre Γ_T^+, $\alpha := \kappa \sin\theta \cos\phi$, $\beta := \kappa \sin\theta \sin\phi$ y $\mathbf{v}_{inc} := \nabla \times \mathbf{u}_{inc}$. Las condiciones sobre las interfases Γ_T y Γ_B

se incluyen para describir la relación entre la onda incidente que llega a Γ_T, la que viaja a través del dominio inicial y la que proviene de las PML, la cual se disipa en ambas interfases.

Si definimos $\mathbf{v}^R$, $\mathbf{u}^R$, p^R, $\mathbf{f}^R$, ϵ^R y μ_0^R en Ω^R así

$$\mathbf{v}^R := \begin{cases} \mathbf{v}, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{v}^A, & \text{en } \Omega^A, \end{cases} \qquad \mathbf{u}^R := \begin{cases} \mathbf{u}, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u}^A, & \text{en } \Omega^A, \end{cases} \qquad p^R := \begin{cases} p, & \text{en } \Omega, \\ p^A, & \text{en } \Omega^A, \end{cases}$$

$$\mathbf{f}^R := \begin{cases} \mathbf{f}, & \text{en } \Omega, \\ 0, & \text{en } \Omega^A, \end{cases} \qquad \epsilon^R := \begin{cases} \epsilon, & \text{en } \Omega, \\ \epsilon^A, & \text{en } \Omega^A, \end{cases} \qquad \mu_0^R := \begin{cases} \mu_0, & \text{en } \Omega, \\ \mu_0^A, & \text{en } \Omega^A, \end{cases}$$

entonces el problema (4.7) puede reescribirse de forma equivalente como: Hallar $\mathbf{v}^R$, $\mathbf{u}^R$, p^R tales que

$$\mu_0^R \mathbf{v}^R - \nabla \times \mathbf{u}^R = 0, \qquad \text{en } \Omega^R, \tag{4.8a}$$

$$\nabla \times \mathbf{v}^R - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon^R \mathbf{u}^R + \overline{\epsilon}^R \nabla p^R = \mathbf{f}^R, \qquad \text{en } \Omega^R, \tag{4.8b}$$

$$\nabla \cdot \left(\epsilon^R \mathbf{u}^R\right) = 0, \qquad \text{en } \Omega^R, \tag{4.8c}$$

$$\mathbf{u}^R \mid_{\Gamma_2^R} = e^{i\alpha L} \mathbf{u}^R \mid_{\Gamma_1^R}, \tag{4.8d}$$

$$\mathbf{u}^R \mid_{\Gamma_3^R} = e^{i\beta L} \mathbf{u}^R \mid_{\Gamma_4^R}, \tag{4.8e}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^A = \mathbf{u}_{inc}, \qquad \text{sobre } \Gamma_T, \tag{4.8f}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^A = 0, \qquad \text{sobre } \Gamma_B, \tag{4.8g}$$

$$\mathbf{u}^A = \mathbf{0}, \qquad \text{sobre } \Gamma_T^+ \cup \Gamma_B^-, \tag{4.8h}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^A) = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_{inc}, \qquad \text{sobre } \Gamma_T, \tag{4.8i}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^A) = 0, \qquad \text{sobre } \Gamma_B, \tag{4.8j}$$

$$p = p^A = 0, \qquad \text{sobre } \Gamma_T \cup \Gamma_B, \tag{4.8k}$$

$$p = 0, \qquad \text{sobre } \Gamma^R. \tag{4.8l}$$

2. Esquema HDG

En está sección presentamos la deducción de la formulación variacional HDG asociada al problema (4.8), basándonos en la Sección 3 de [27].

Dada $\{\mathcal{T}_h^A\}_{h>0}$ una triangulación cuasi-uniforme de Ω^A definimos una triangulación para Ω^R como la unión de $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ y $\{\mathcal{T}_h^A\}_{h>0}$, la cual denotamos $\{\mathcal{T}_h^R\}_{h>0}$. Dicha triangulación resulta ser cuasi-uniforme y sus elementos satisfacen que están completamente contenidos en Ω, Ω^A y las interfases Γ_T y Γ_B están formadas por caras comunes entre elementos de $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ y $\{\mathcal{T}_h^A\}_{h>0}$. Al conjunto de todas las caras inducidas por $\{\mathcal{T}_h^R\}_{h>0}$ lo denotamos $\mathcal{E}_h^R := \mathcal{E}_{\Gamma^R} \cup \mathcal{E}_I^R$, donde $\mathcal{E}_{\Gamma^R}$ denota las caras sobre la frontera de Ω^R y $\mathcal{E}_I^R$ representa las caras internas del dominio. Además, $\partial\mathcal{T}_h^R := \partial\mathcal{T}_h \cup \partial\mathcal{T}_h^A$.

Los subespacios de dimensión finita que empleamos son

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}_h^R &:= \left\{q^R \in \mathrm{L}^2(\Omega^R) : q^R\,|_K \in \mathbb{P}_k(K),\ \forall\ K \in \mathcal{T}_h^R\right\},\\
\mathrm{M}_h^R &:= \left\{\mu^R \in \mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h^R) : \mu^R\,|_F \in \mathbb{P}_k(F),\ \forall\ F \in \mathcal{E}_h^R\right\},\\
\mathrm{V}_h^R &:= \left\{\mathbf{w}^R \in [\mathrm{L}^2(\Omega^R)]^3 : \mu_0^R\mathbf{w}^R, \epsilon^R\mathbf{w}^R \in [\mathrm{L}^2(\Omega^R)]^3,\ \mathbf{w}^R\,|_K \in [\mathbb{P}_k(K)]^3,\ \forall\ K \in \mathcal{T}_h^R\right\},\\
\mathrm{M}_{h,R}^t &:= \{\beta^R \in [\mathrm{L}^2(\mathcal{E}_h^R)]^3 : \beta^R\,|_F \in [\mathbb{P}_k(F)]^3, (\beta^R \cdot \mathbf{n})\,|_F = 0,\ \forall\ F \in \mathcal{E}_h^R\},\\
\mathrm{M}_{QP}^R &:= \{\lambda^R \in \mathrm{M}_{h,R}^t :\ \lambda^R\,|_{\Gamma_2^R} = e^{i\alpha L}\lambda^R\,|_{\Gamma_1^R},\ \lambda^R\,|_{\Gamma_4^R} = e^{i\beta L}\lambda^R\,|_{\Gamma_3^R}\},
\end{aligned}
$$

donde $\alpha := \kappa \sin\theta \cos\phi$ y $\beta := \kappa \sin\theta \sin\phi$.

Ahora, dado $K \in \mathcal{T}_h^R$ tomamos $\mathbf{w}^R$, $\mathbf{z}^R$ y t^R funciones de prueba suficientemente suaves definidas en K, tales que

$$
\mathbf{w}^R := \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{en } \Omega,\\ \mathbf{w}^A, & \text{en } \Omega^A, \end{cases}
\qquad
\mathbf{z}^R := \begin{cases} \mathbf{z}, & \text{en } \Omega,\\ \mathbf{z}^A, & \text{en } \Omega^A, \end{cases}
\qquad
t^R := \begin{cases} t, & \text{en } \Omega,\\ t^A, & \text{en } \Omega^A. \end{cases}
$$

Entonces, usando procedimientos análogos a los desarrollados en (2.7) y (2.8) en (4.8a), (4.8b) y (4.8c), resultan las siguientes ecuaciones después de sumar sobre todo $K \in \mathcal{T}_h^R$

$$
\begin{aligned}
\mu_0^R\left(\mathbf{v}_h^R, \mathbf{w}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} - \left(\mathbf{u}_h^{R,t}, \nabla \times \mathbf{w}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} - \langle \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \gamma_t(\mathbf{w}^R)\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} &= 0,\\
\left(\mathbf{v}_h^R, \nabla \times \mathbf{z}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} + \langle \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}, \gamma_t(\mathbf{z}^R)\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} - \omega^2\epsilon_0\left(\epsilon^R\mathbf{u}_h^R, \mathbf{z}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R}&\\
- \left(p_h^R, \nabla \cdot \left(\epsilon^R\mathbf{z}^R\right)\right)_{\mathcal{T}_h^R} + \left\langle \widehat{p}_h^R, \epsilon^R\mathbf{z}^R \cdot \mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} &= 0,\\
- \left(\epsilon^R\mathbf{u}_h^R, \nabla t^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} + \langle \widehat{\epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}} \cdot \mathbf{n}, t^R\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} &= 0,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

donde $\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}$, $\tilde{\mathbf{u}}_h^R$, $\widehat{p}_h^R$ y $\widehat{\epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}}$ son las aproximaciones de $\gamma_\tau(\mathbf{v}_h^R)$, $\gamma_\tau(\mathbf{u}_h^R)$, $\gamma_0(p_h^R)$ y $\gamma_{\mathbf{n}}(\epsilon^R\mathbf{u}_h^R)$ sobre $\mathcal{E}_h^R$. En este caso,

$$
\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} := \begin{cases} \widehat{\mathbf{v}}_h^t, & \text{en } \mathcal{E}_h,\\ \widehat{\mathbf{v}}_h^{A,t}, & \text{en } \mathcal{E}_h^A, \end{cases}
\qquad
\widehat{p}_h^R := \begin{cases} \widehat{p}_h, & \text{en } \mathcal{E}_h,\\ \widehat{p}_h^A, & \text{en } \mathcal{E}_h^A, \end{cases}
\qquad
\widehat{\epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}} := \begin{cases} \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^n}, & \text{en } \mathcal{E}_h,\\ \widehat{\epsilon^A\mathbf{u}_h^{A,n}}, & \text{en } \mathcal{E}_h^A, \end{cases}
$$

y de acuerdo con las ecuaciones (4.8d) a (4.8g), el flujo $\tilde{\mathbf{u}}_h^R$ se define así

$$
\tilde{\mathbf{u}}_h^R := \begin{cases} e^{i\alpha L}\widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}\,|_{\Gamma_1^R}, & \text{sobre } \Gamma_2^R,\\ e^{i\beta L}\widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}\,|_{\Gamma_3^R}, & \text{sobre } \Gamma_4^R,\\ \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t} + \mathbf{u}_{inc}^t, & \partial K \cap \Gamma_T \neq \emptyset \text{ y } K \in \mathcal{T}_h,\\ \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, & \text{en otro caso.} \end{cases}
\tag{4.10}
$$

Con el objetivo de reducir las variables del sistema (4.9) vamos a definir relaciones convenientes entre los flujos numéricos. Las incógnitas del sistema de ecuaciones (4.9)

son $\mathbf{v}_h^R, \mathbf{u}_h^R, p_h^R, \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}, \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \widehat{p}_h^R, \widehat{\epsilon\mathbf{u}_h^{R,n}}$ y después de introducir las siguientes expresiones

$$\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} := \begin{cases} \mathbf{n}\times\mathbf{v}_h^{R,t} + \tau(\mathbf{u}_h^{R,t} - \tilde{\mathbf{u}}_h^R), & \text{sobre } \mathcal{E}_h^R \setminus (\Gamma_2^R \cup \Gamma_4^R), \\ -e^{i\alpha L}(\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t})\mid_{\Gamma_1^R}, & \text{sobre } \Gamma_2^R, \\ -e^{i\beta L}(\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t})\mid_{\Gamma_3^R}, & \text{sobre } \Gamma_4^R, \end{cases} \tag{4.11a}$$

$$\widehat{\epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}}\cdot\mathbf{n} := \epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}\cdot\mathbf{n} + \tau_n(p_h^R - \widehat{p}_h^R), \tag{4.11b}$$

se reducen a $\mathbf{v}_h^R, \mathbf{u}_h^R, p_h^R, \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \widehat{p}_h^R$.

Entonces, la formulación variacional HDG asociada al problema C (4.8) consiste en: Hallar $(\mathbf{v}_h^R, \mathbf{u}_h^R, p_h^R, \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \widehat{p}_h^R) \in \mathrm{V}_h^R \times \mathrm{V}_h^R \times \mathrm{Q}_h^R \times \mathrm{M}_{QP}^R \times \mathrm{M}_h^R$ tales que

$$\mu_0^R\left(\mathbf{v}_h^R, \mathbf{w}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} - \left(\mathbf{u}_h^R, \nabla\times\mathbf{w}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} - \left\langle\tilde{\mathbf{u}}_h^R, \gamma_t(\mathbf{w}^R)\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} = 0, \tag{4.12a}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{v}_h^R, \nabla\times\mathbf{z}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} + \left\langle\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}, \gamma_t(\mathbf{z}^R)\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} - \omega^2\epsilon_0\left(\epsilon^R\mathbf{u}_h^R, \mathbf{z}^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} \\ - \left(p_h^R, \nabla\cdot\left(\epsilon^R\mathbf{z}^R\right)\right)_{\mathcal{T}_h^R} + \left\langle\widehat{p}_h^R, \epsilon^R\mathbf{z}^R\cdot\mathbf{n}\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} = \mathbf{F}^R(\mathbf{z}),\end{aligned} \tag{4.12b}$$

$$-\left(\epsilon^R\,\mathbf{u}_h^R, \nabla t^R\right)_{\mathcal{T}_h^R} + \langle\widehat{\epsilon^R\,\mathbf{u}_h^{R,n}}\cdot\mathbf{n}, t^R\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R} = 0, \tag{4.12c}$$

$$\left\langle\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}, \eta^R\right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R\setminus\Gamma^R} - \left\langle\mathbf{n}\times\mathbf{v}_{inc}^t, \eta^R\right\rangle_{\Gamma_T} = 0, \tag{4.12d}$$

$$\langle\widehat{\epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}}\cdot\mathbf{n}, \mu^R\rangle_{\partial\mathcal{T}_h^R\setminus(\Gamma_1^R\cup\Gamma_2^R\cup\Gamma_3^R\cup\Gamma_4^R)} - \langle\mathbf{u}_{inc}^n, \eta^R\rangle_{\Gamma_T} = 0, \tag{4.12e}$$

$$\langle\widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \eta^R\rangle_{\Gamma_T} = \langle\mathbf{u}_{inc}^t, \eta^R\rangle_{\Gamma_T}, \tag{4.12f}$$

$$\langle\tilde{\mathbf{u}}_h^R, \eta^R\rangle_{\Gamma_T^+\cup\Gamma_B^-} = 0, \tag{4.12g}$$

$$\left\langle\widehat{p}_h^R, \mu^R\right\rangle_{\Gamma^R\cup\Gamma_T\cup\Gamma_B} = 0, \tag{4.12h}$$

para todo $\left(\mathbf{w}^R, \mathbf{z}^R, t^R, \eta^R, \mu^R\right) \in \mathrm{V}_h^R\times\mathrm{V}_h^R\times\mathrm{Q}_h^R\times\mathrm{M}_{QP}^R\times\mathrm{M}_h^R$. Notemos que por medio de las ecuaciones (4.12d) a (4.12h) imponemos la continuidad de la traza tangencial de $\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}$, la continuidad de la traza normal de $\widehat{\epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}}$, las condiciones sobre las interfases para $\tilde{\mathbf{u}}_h^R$, $\widehat{\epsilon^R\mathbf{u}_h^{R,n}}$, $\widehat{p}_h^R$ y las condiciones sobre la frontera para $\tilde{\mathbf{u}}_h^R$ y $\widehat{p}_h^R$. Aquí, $\mathbf{F}^R : \left[\mathrm{L}^2\left(\mathcal{T}_h^R\right)\right]^3 \to \mathbb{C}$ y

$$\mathbf{F}^R(\mathbf{z}) := \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{z}) = (\mathbf{f}, \mathbf{z})_{\mathcal{T}_h}, & \text{en } \mathcal{T}_h, \\ 0, & \text{en } \mathcal{T}_h^A. \end{cases}$$

Lema 10. *Las incógnitas* $\left(\mathbf{v}_h^R, \mathbf{u}_h^R, p_h^R, \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \widehat{p}_h^R\right) \in \mathrm{V}_h^R\times\mathrm{V}_h^R\times\mathrm{Q}_h^R\times\mathrm{M}_{QP}^R\times\mathrm{M}_h^R$ *de (4.12) satisfacen la siguiente identidad tipo Gårding*

$$\begin{aligned}\mu_0^R\left\|\mathbf{v}_h^R\right\|_{\mathcal{T}_h^R}^2 + \|\tau^{1/2}(\mathbf{u}_h^{R,t} - \tilde{\mathbf{u}}_h^R)\|_{\partial\mathcal{T}_h^R}^2 + \omega^2\epsilon_0\left(|Re\,(\epsilon_m)| + i\,Im\,(\epsilon_m)\right)\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 \\ + \left\|\tau_n^{1/2}\left(p_h^R - \widehat{p}_h^R\right)\right\|_{\partial\mathcal{T}_h^R}^2 = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h) + \omega^2\epsilon_0\epsilon_d\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 - \langle\mathbf{u}_{inc}^t, \mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}\rangle_{\Gamma_T} \\ + \omega^2\epsilon_0\left(\mathbf{u}_h^A, \epsilon^A\mathbf{u}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A},\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h)$ *representa el conjugado de* $\mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$.

Demostración. Tomando $\mathbf{w} := \mathbf{v}_h$, $\mathbf{z} := \mathbf{u}_h$, $t := p_h$, $\mathbf{w}^A := \mathbf{v}_h^A$, $\mathbf{z}^A := \mathbf{u}_h^A$ y $t^A := p_h^A$ en (4.12) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mu_0 (\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{4.14a}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \mathbf{u}_h \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \omega^2 \epsilon_0 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} \\ - (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h))_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h),\end{aligned} \tag{4.14b}$$

$$- (\epsilon\, \mathbf{u}_h, \nabla p_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = 0, \tag{4.14c}$$

$$\mu_0^A \left(\mathbf{v}_h^A, \mathbf{v}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} - \left(\mathbf{u}_h^A, \nabla \times \mathbf{v}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} - \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \mathbf{v}_h^A \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} = 0, \tag{4.14d}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{v}_h^A, \nabla \times \mathbf{u}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} + \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_h^{A,t}, \mathbf{u}_h^A \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} - \omega^2 \epsilon_0 \left(\epsilon^A \mathbf{u}_h^A, \mathbf{u}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} \\ - \left(p_h^A, \nabla \cdot \left(\epsilon^A \mathbf{u}_h^A\right)\right)_{\mathcal{T}_h^A} + \left\langle \widehat{p}_h^A, \epsilon^A \mathbf{u}_h^A \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} = 0,\end{aligned} \tag{4.14e}$$

$$- \left(\epsilon^A\, \mathbf{u}_h^A, \nabla p_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} + \langle \widehat{\epsilon^A\, \mathbf{u}_h^{A,n}} \cdot \mathbf{n}, p_h^A \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} = 0. \tag{4.14f}$$

Luego, aplicando la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{curl}; \mathcal{T}_h^R)$ al segundo término de (4.14a) y (4.14d) y la identidad de Green en $\mathrm{H}(\mathbf{div}; \mathcal{T}_h^R)$ al primer término de (4.14c) y (4.14f), se obtienen

$$\begin{aligned}\mu_0 (\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (\nabla \times \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= 0, \\ (\nabla \cdot (\epsilon\, \mathbf{u}_h), p_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \epsilon\, \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= 0, \\ \mu_0^A \left(\mathbf{v}_h^A, \mathbf{v}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} - \left(\nabla \times \mathbf{u}_h^A, \mathbf{v}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} + \left\langle \mathbf{u}_h^{A,t} - \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \mathbf{v}_h^A \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} &= 0, \\ \left(\nabla \cdot \left(\epsilon^A\, \mathbf{u}_h^A\right), p_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} - \left\langle \epsilon^A\, \mathbf{u}_h^A \cdot \mathbf{n}, p_h^A \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} + \langle \widehat{\epsilon^A\, \mathbf{u}_h^{A,n}} \cdot \mathbf{n}, p_h^A \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} &= 0,\end{aligned}$$

y después de sumar las dos primeras expresiones con el conjugado de (4.14b) y las dos últimas con el conjugado de (4.14e), simplificar y aplicar la propiedad (1.4a) resultan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}&\mu_0 (\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \mathbf{u}_h^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\ &- \omega^2 \epsilon_0 (\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \langle \epsilon \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_h),\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}&\mu_0^A \left(\mathbf{v}_h^A, \mathbf{v}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} - \langle \mathbf{u}_h^{A,t} - \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^{A,t} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} + \langle \mathbf{u}_h^{A,t}, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{A,t} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} \\ &- \omega^2 \epsilon_0 \left(\mathbf{u}_h^A, \epsilon^A \mathbf{u}_h^A\right)_{\mathcal{T}_h^A} + \langle \widehat{\epsilon^A \mathbf{u}_h^{A,n}} \cdot \mathbf{n}, p_h^A \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} - \left\langle \epsilon^A \mathbf{u}_h^{A,n} \cdot \mathbf{n}, p_h^A - \widehat{p}_h^A \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} = 0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Ahora, sumando y restando $\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$, $\langle \widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}$ a (4.15) y $\langle \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{A,t} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A}$,

$\langle \widehat{\epsilon^A \mathbf{u}_h^{A,n}} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h^A \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A}$ a (4.16), resultan las siguientes expresiones

$$\mu_0 \left\| \mathbf{v}_h \right\|_{\mathcal{T}_h}^2 + \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \left(\widehat{\mathbf{v}}_h^t - \mathbf{v}_h^t \right) \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \omega^2 \epsilon_0 \left(\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h \right)_{\mathcal{T}_h}$$
$$+ \langle (\widehat{\epsilon \mathbf{u}_h^n} - \epsilon \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{n}, p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}} \left(\mathbf{u}_h \right),$$

$$\mu_0^A \left\| \mathbf{v}_h^A \right\|_{\mathcal{T}_h^A}^2 + \langle \mathbf{u}_h^{A,t} - \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{v}}_h^{A,t} - \mathbf{v}_h^{A,t}) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} + \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{v}}_h^A)^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} - \omega^2 \epsilon_0 (\mathbf{u}_h^A, \epsilon^A \mathbf{u}_h^A)_{\mathcal{T}_h^A}$$
$$+ \langle (\widehat{\epsilon^A \mathbf{u}_h^{A,n}} - \epsilon^A \mathbf{u}_h^{A,n}) \cdot \mathbf{n}, p_h - \widehat{p}_h^A \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} + \langle \widehat{\epsilon^A\, \mathbf{u}_h^{A,n}} \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h^A \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} = 0,$$

de donde,

$$\begin{aligned} \mu_0 \left\| \mathbf{v}_h \right\|_{\mathcal{T}_h}^2 &+ \left\langle \mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h, \tau \left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h \right) \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} + \left\langle \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\ &- \omega^2 \epsilon_0 \left(\mathbf{u}_h, \epsilon \mathbf{u}_h \right)_{\mathcal{T}_h} + \langle \tau_n (p_h - \widehat{p}_h), p_h - \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \overline{\mathbf{F}} \left(\mathbf{u}_h \right), \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} \mu_0^A \left\| \mathbf{v}_h^A \right\|_{\mathcal{T}_h^A}^2 &+ \langle \mathbf{u}_h^{A,t} - \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \tau (\mathbf{u}_h^{A,t} - \tilde{\mathbf{u}}_h^A) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} + \langle \tilde{\mathbf{u}}_h^A, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{A,t} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} \\ &- \omega^2 \epsilon_0 \left(\mathbf{u}_h^A, \epsilon^A \mathbf{u}_h^A \right)_{\mathcal{T}_h^A} + \left\langle \tau_n (p_h^A - \widehat{p}_h^A), p_h^A - \widehat{p}_h^A \right\rangle_{\partial \mathcal{T}_h^A} = 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

de acuerdo con (4.10), (4.11a), (4.11b) y (4.12h). Además, usando (4.12d), (4.12f), (4.12g) y la cuasi-periodicidad de $\widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t}$ y $\tilde{\mathbf{u}}_h^R$ se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\partial \mathcal{T}_h^R} &= \langle \mathbf{u}_{inc}^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_T} + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_1^R} + \langle \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \mathbf{n}_2 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_2^R} \\ &\quad + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_3^R} + \langle \tilde{\mathbf{u}}_h^R, \mathbf{n}_4 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_4^R} \\ &= \langle \mathbf{u}_{inc}^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_T} + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_1^R} - \langle e^{i\alpha L}\, \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_1 \times e^{i\alpha L}\, \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_1^R} \\ &\quad + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_3^R} - \langle e^{i\beta L}\, \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_3 \times e^{i\beta L}\, \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_3^R} \\ &= \langle \mathbf{u}_{inc}^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_T} + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_1^R} - |e^{i\alpha L}| \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_1 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_1^R} \\ &\quad + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_3^R} - |e^{i\beta L}| \langle \widehat{\mathbf{u}}_h^{R,t}, \mathbf{n}_3 \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_3^R} \\ &= \langle \mathbf{u}_{inc}^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_T}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Entonces, sustituyendo (4.19) y usando la definición de ϵ y ϵ^A en la expresión que resulta después de sumar (4.17) y (4.18), se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_0 \left\| \mathbf{v}_h \right\|_{\mathcal{T}_h}^2 &+ \left\| \tau^{1/2} \left(\mathbf{u}_h^t - \tilde{\mathbf{u}}_h \right) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \omega^2 \epsilon_0 \left(|\mathrm{Re}\, (\epsilon_m)| + i\, \mathrm{Im}\, (\epsilon_m) \right) \left\| \mathbf{u}_h \right\|_{\mathcal{T}_h^m}^2 - \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_d \left\| \mathbf{u}_h \right\|_{\mathcal{T}_h^d}^2 \\ &+ \left\| \tau_n^{1/2} \left(p_h - \widehat{p}_h \right) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h}^2 + \mu_0^A \left\| \mathbf{v}_h^A \right\|_{\mathcal{T}_h^A}^2 + \left\| \tau^{1/2} \left((\mathbf{u}_h^A)^t - \tilde{\mathbf{u}}_h^A \right) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h^A}^2 + \left\| \tau_n^{1/2} \left(p_h^A - \widehat{p}_h^A \right) \right\|_{\partial \mathcal{T}_h^A}^2 \\ &+ \langle \mathbf{u}_{inc}^t, \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^{R,t} \rangle_{\Gamma_T} - \omega^2 \epsilon_0 \left(\mathbf{u}_h^A, \epsilon^A \mathbf{u}_h^A \right)_{\mathcal{T}_h^A} = \overline{\mathbf{F}} \left(\mathbf{u}_h \right). \end{aligned}$$

Organizando la anterior expresión resulta (4.13). ■

En nuestros trabajos futuros pretendemos garantizar la existencia y unicidad de la solución de (4.12) vía la identidad tipo G$\mathring{a}$rding (4.13), después de mejorar la forma de los dos últimos términos de su lado derecho. Las posibilidades que estamos considerando incluyen análisis similares a los desarrollados en los Capítulos 2 y 3, es decir, considerando un problema de valores propios conveniente o mediante un argumento de dualidad, para el cual sería necesario definir un problema auxiliar adecuado.

Capítulo 5

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En este capítulo detallamos los pasos y las herramientas que empleamos en el desarrollo de la implementación del método HDG para las ecuaciones de Maxwell en régimen armónico sujetas a condiciones de frontera tipo Dirichlet y cuasi-periódicas. La documentación del método HDG en tres dimensiones [19] se usó como guía para estructurar los programas en MATLAB.

1. Implementación esquema HDG: problema A

Inicialmente se define el local solver, el cual, de acuerdo con el método HDG (2.10), para todo $K \in \mathcal{T}_h$, corresponde a hallar $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, p_h) \in [\mathbb{P}_k(K)]^3 \times [\mathbb{P}_k(K)]^3 \times \mathbb{P}_k(K)$ tales que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \mathbf{w})_K - (\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{w})_K &= \left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{w} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K}, \\
(\mathbf{v}_h, \nabla \times \mathbf{z})_K + \left\langle \mathbf{v}_h^t, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} + \left\langle \tau\, \mathbf{u}_h^t \times \mathbf{n}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} & \\
-\kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{z})_K - (p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{z}))_K &= -\left\langle \widehat{p}_h, \epsilon \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} + (\mathbf{f}, \mathbf{z})_K \\
&\quad + \left\langle \tau\, \widehat{\mathbf{u}}_h^t \times \mathbf{n}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K}, \\
(\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h), t)_K + \langle \tau_n p_h, t \rangle_{\partial K} &= \langle \tau_n \widehat{p}_h, t \rangle_{\partial K},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

para todo $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, t) \in [\mathbb{P}_k(K)]^3 \times [\mathbb{P}_k(K)]^3 \times \mathbb{P}_k(K)$, de acuerdo con la definición de los espacios V_h y Q_h.

Sea $d_3 := \dim [\mathbb{P}_k(K)]$, entonces

$$\mathbb{P}_k(K) = \mathrm{gen}\{p_i : 1 \leq i \leq d_3\}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior se define la base para $[\mathbb{P}_k(K)]^3$ de la siguiente manera

$$[\mathbb{P}_k(K)]^3 = \mathrm{gen}\{\varphi_i : 1 \leq i \leq 3d_3\},$$

donde los φ_i satisfacen

- para $1 \leq i \leq d_3$, $\varphi_i := \begin{pmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- para $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$, $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i-d_3} \\ 0 \end{pmatrix}$,
- y para $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$, $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{i-2d_3} \end{pmatrix}$.

Los polinomios p_i son los elementos de la base de Dubiner para $\mathbb{P}_k(K)$, la cual describiremos en la Sección 3 de este capítulo.

Para determinar la estructura de cada uno de los bloques del local solver (5.1) empleamos fórmulas de cuadratura adecuadas y para almacenarlos usamos arreglos. La reducción en el uso de ciclos en su construcción la conseguimos haciendo uso del producto de Kronecker, que corresponde a una función de MATLAB.

Ahora bien, usando la base de $[\mathbb{P}_k(K)]^3$ y la de $\mathbb{P}_k(K)$, se definen:

$$\mathbf{v}_h := \sum_{i=1}^{3d_3} (\alpha_K)_i \, \varphi_i, \qquad \mathbf{u}_h := \sum_{j=1}^{3d_3} (\beta_K)_j \, \varphi_j, \qquad p_h := \sum_{l=1}^{d_3} (\lambda_K)_l \, p_l.$$

Veamos entonces la forma matricial asociada a cada uno de los términos del local solver. Es importante notar que las ecuaciones (5.1) son válidas para todo $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in [\mathbb{P}_k(K)]^3$ y $t \in \mathbb{P}_k(K)$, entonces para determinar la estructura de cada uno de los bloques tomaremos las funciones test $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ y t como algún elemento de la base correspondiente.

Bloque asociado a $(\mathbf{v}_h, \mathbf{w})_K$

Para $j = 1, \cdots, 3d_3$,

$$(\mathbf{v}_h, \varphi_j)_K = \sum_{i=1}^{3d_3} (\alpha_K)_i \int_K \varphi_i \cdot \varphi_j.$$

De acuerdo con la estructura de los elementos de la base de $[\mathbb{P}_k(K)]^3$, se deben considerar los siguientes casos

- si $1 \leq i \leq d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$ entonces $\left(M^K\right)_{ji} := (p_i, p_j)_K$,
- si $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ y $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$ entonces $\left(M^K\right)_{ji} := (p_{i-d_3}, p_{j-d_3})_K$,
- si $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$ y $2d_3 + 1 \leq j \leq 3d_3$ entonces $\left(M^K\right)_{ji} := (p_{i-2d_3}, p_{j-2d_3})_K$,
- en los otros casos, $\left(M^K\right)_{ji} := 0$,

de donde resulta la siguiente matriz diagonal por bloques

$$A^K := \begin{bmatrix} M^K & 0 & 0 \\ 0 & M^K & 0 \\ 0 & 0 & M^K \end{bmatrix}_{3d_3 \times 3d_3}.$$

Bloque asociado a $-\kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{z})_K$

Para $i = 1, \cdots, 3d_3$,

$$-\kappa^2 (\epsilon \mathbf{u}_h, \varphi_i)_K = -\kappa^2 \sum_{j=1}^{3d_3} (\beta_K)_j \int_K \epsilon \varphi_j \cdot \varphi_i.$$

Nuevamente, teniendo en cuenta la estructura de los elementos de la base de $[\mathbb{P}_k(K)]^3$,

- si $1 \leq i \leq d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$ entonces $\left(M_\epsilon^K\right)_{ij} := (\epsilon p_j, p_i)_K$,
- si $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ y $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$ entonces $\left(M_\epsilon^K\right)_{ij} := (\epsilon p_{j-d_3}, p_{i-d_3})_K$,
- si $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$ y $2d_3 + 1 \leq j \leq 3d_3$ entonces $\left(M_\epsilon^K\right)_{ij} := (\epsilon p_{j-2d_3}, p_{i-2d_3})_K$,
- en los otros casos, $\left(M_\epsilon^K\right)_{ij} := 0$,

de lo cual se obtiene una matriz diagonal por bloques

$$A_\kappa^K := -\kappa^2 \begin{bmatrix} M_\epsilon^K & 0 & 0 \\ 0 & M_\epsilon^K & 0 \\ 0 & 0 & M_\epsilon^K \end{bmatrix}_{3d_3 \times 3d_3}.$$

Bloque asociado a $(\mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbf{w})_K$

Para $i = 1, \cdots, 3d_3$,

$$(\mathbf{u}_h, \nabla \times \varphi_i)_K = \sum_{j=1}^{3d_3} (\beta_K)_j \int_K \varphi_j \cdot \nabla \times \varphi_i.$$

Primero determinemos la estructura de $\nabla \times \varphi_i$.

- Si $1 \leq i \leq d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$$\nabla \times \varphi_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ p_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z p_i \\ -\partial_y p_i \end{pmatrix}.$$

- Si $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i-d_3} \\ 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$$\nabla \times \varphi_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & p_{i-d_3} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ \partial_x p_{i-d_3} \end{pmatrix}.$$

- Si $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{i-2d_3} \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$$\nabla \times \varphi_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & p_{i-2d_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y p_{i-2d_3} \\ -\partial_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, usando lo anterior se obtiene

- para $1 \leq i \leq d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z p_i \\ -\partial_y p_i \end{pmatrix} = 0,$$

- para $1 \leq i \leq d_3$ y $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z p_i \\ -\partial_y p_i \end{pmatrix} = \int_K p_{j-d_3} \partial_z p_i = (C_z)^T_{ij},$$

  donde C_z^T está dada por

$$\begin{pmatrix} \int_K p_1 \partial_z p_1 & \cdots & \int_K p_{d_3} \partial_z p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_K p_1 \partial_z p_{d_3} & \cdots & \int_K p_{d_3} \partial_z p_{d_3} \end{pmatrix}.$$

- Para $1 \leq i \leq d_3$ y $2d_3 + 1 \leq j \leq 3d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z p_i \\ -\partial_y p_i \end{pmatrix} = -\int_K p_{j-2d_3} \partial_y p_i = -(C_y)^T_{ij},$$

  donde C_y^T se define de forma similar a C_z^T.

- Para $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ \partial_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} = -\int_K p_j \partial_z p_{i-d_3} = -(C_z)^T_{ij}.$$

- Para $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ y $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ \partial_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} = 0.$$

- Para $d_3+1 \leq i \leq 2d_3$ y $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ \partial_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} = \int_K p_{j-2d_3} \partial_x p_{i-d_3} = (C_x)^T_{ij},$$

donde C_x^T se define de forma similar a C_z^T.

- Para $2d_3+1 \leq i \leq 3d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y p_{i-2d_3} \\ -\partial_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_K p_j \partial_y p_{i-2d_3} = (C_y)^T_{ij}.$$

- Para $2d_3+1 \leq i \leq 3d_3$ y $d_3+1 \leq j \leq 2d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y p_{i-2d_3} \\ -\partial_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_K p_{j-d_3} \partial_x p_{i-2d_3} = -(C_x)^T_{ij}.$$

- Para $2d_3+1 \leq i \leq 3d_3$ y $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$,

$$(\varphi_j, \nabla \times \varphi_i)_K = \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y p_{i-2d_3} \\ -\partial_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

De lo anterior,

$$B^K := \begin{bmatrix} 0 & C_z^T & -C_y^T \\ -C_z^T & 0 & C_x^T \\ C_y^T & -C_x^T & 0 \end{bmatrix}_{3d_3 \times 3d_3}.$$

Bloque asociado a $\langle \mathbf{v}_h^t, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K}$

Primero notemos que usando la propiedad del producto mixto (1.4a) y la definición de la componente tangencial, resulta

$$\left\langle \mathbf{v}_h^t, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} = \left\langle \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t, \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h, \mathbf{z} \rangle_{\partial K}.$$

Entonces,

$$\langle \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \sum_{i=1}^{3d_3} (\beta_K)_i \int_{\partial K} (\mathbf{n} \times \varphi_i) \cdot \varphi_j, \quad j = 1, \cdots, 3d_3.$$

Ahora consideremos los siguientes casos para determinar la estructura de $\mathbf{n} \times \varphi_i$.

- Si $1 \leq i \leq d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y así

$$\mathbf{n} \times \varphi_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ p_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_z p_i \\ -n_y p_i \end{pmatrix}.$$

- Si $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i-d_3} \\ 0 \end{pmatrix}$ y así

$$\mathbf{n} \times \varphi_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ 0 & p_{i-d_3} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -n_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ n_x p_{i-d_3} \end{pmatrix}.$$

- Si $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{i-2d_3} \end{pmatrix}$ y así

$$\mathbf{n} \times \varphi_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & p_{i-2d_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} n_y p_{i-2d_3} \\ -n_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

- si $1 \leq j \leq d_3$ y $1 \leq i \leq d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ n_z p_i \\ -n_y p_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

- si $1 \leq j \leq d_3$ y $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} -n_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ n_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_{\partial K} n_z p_{i-d_3} p_j = -n_z (PP)_{ji},$$

donde

$$PP := \begin{pmatrix} \int_{\partial K} p_1 p_1 & \cdots & \int_{\partial K} p_{d_3} p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\partial K} p_1 p_{d_3} & \cdots & \int_{\partial K} p_{d_3} p_{d_3} \end{pmatrix}.$$

- Si $1 \leq j \leq d_3$ y $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$ entonces

$$(\mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j)_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} n_y p_{i-2d_3} \\ -n_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} n_y p_{i-2d_3} p_j = n_y (PP)_{ji}.$$

- Si $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$ y $1 \leq i \leq d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ n_z p_i \\ -n_y p_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} n_z p_i p_{j-d_3} = n_z (PP)_{ji}.$$

- Si $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$ y $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} -n_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ n_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

- Si $d_3+1 \leq j \leq 2d_3$ y $2d_3+1 \leq i \leq 3d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} n_y p_{i-2d_3} \\ -n_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_{\partial K} n_x p_{i-2d_3} p_{j-d_3}$$
$$= -n_x (PP)_{ji}.$$

- Si $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$ y $1 \leq i \leq d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ n_z p_i \\ -n_y p_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} = -\int_{\partial K} n_y p_i p_{j-2d_3} = -n_y (PP)_{ji}.$$

- Si $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$ y $d_3+1 \leq i \leq 2d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} -n_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ n_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} = \int_{\partial K} n_x p_{i-d_3} p_{j-2d_3}$$
$$= n_x (PP)_{ji}.$$

- Si $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$ y $2d_3+1 \leq i \leq 3d_3$ entonces

$$\langle \mathbf{n} \times \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} n_y p_{i-2d_3} \\ -n_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, la forma del bloque es

$$A_2^K := \begin{bmatrix} 0 & -n_z PP & n_y PP \\ n_z PP & 0 & -n_x PP \\ -n_y PP & n_x PP & 0 \end{bmatrix}_{3d_3 \times 3d_3}.$$

Bloque asociado a $\langle \tau\, \mathbf{u}_h^t \times \mathbf{n}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K}$

Notemos que después de aplicar (1.4a) y la definición de la componente tangencial, resulta la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\left\langle \tau\, \mathbf{u}_h^t \times \mathbf{n}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} &= \left\langle \tau\, \mathbf{n} \times \left(\mathbf{u}_h^t \times \mathbf{n} \right), \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} \\
&= \left\langle \tau\, \mathbf{u}_h^t, \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} \\
&= \left\langle \tau\, \mathbf{n} \times \left(\mathbf{u}_h \times \mathbf{n} \right), \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} \\
&= \left\langle \tau\, \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\langle \tau \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} = \sum_{j=1}^{3d_3} \left(\alpha_K \right)_j \tau \int_{\partial K} \left(\varphi_j \times \mathbf{n} \right) \cdot \left(\varphi_i \times \mathbf{n} \right).$$

Luego,

- si $1 \leq i \leq d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_{\partial K} \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_j \\ n_y p_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_i \\ n_y p_i \end{pmatrix} \\
&= \int_{\partial K} \left(n_z^2 + n_y^2 \right) p_j p_i \\
&= (n_z^2 + n_y^2)(PP)_{ij}.
\end{aligned}$$

- Si $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_{K} \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_j \\ n_y p_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} \\
&= -\int_{\partial K} n_y n_x p_j p_{i-d_3} \\
&= -n_y n_x (PP)_{ij}.
\end{aligned}$$

- Si $2d_3+1 \leq i \leq 3d_3$ y $1 \leq j \leq d_3$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_j \\ n_y p_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_y p_{i-2d_3} \\ n_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\int_{\partial K} n_z n_x p_j p_{i-2d_3} \\ &= -n_z n_x (PP)_{ij}.\end{aligned}$$

- Si $1 \leq i \leq d_3$ y $d_3+1 \leq j \leq 2d_3$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_K \begin{pmatrix} n_z p_{j-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{j-d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_i \\ n_y p_i \end{pmatrix} \\ &= -\int_{\partial K} n_x n_y p_{j-d_3} p_i \\ &= -n_x n_y (PP)_{ij}.\end{aligned}$$

- Si $d_3+1 \leq i \leq 2d_3$ y $d_3+1 \leq j \leq 2d_3$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_K \begin{pmatrix} n_z p_{j-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{j-d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} \\ &= \left(n_z^2 + n_x^2\right) p_{j-d_3} p_{i-d_3} \\ &= \left(n_z^2 + n_x^2\right) (PP)_{ij}.\end{aligned}$$

- Si $2d_3+1 \leq i \leq 3d_3$ y $d_3+1 \leq j \leq 2d_3$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_K \begin{pmatrix} n_z p_{j-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{j-d_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_y p_{i-2d_3} \\ n_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\int_{\partial K} n_z n_y p_{j-d_3} p_{i-2d_3} \\ &= -n_z n_y (PP)_{ij}.\end{aligned}$$

- Si $1 \leq i \leq d_3$ y $2d_3 + 1 \leq j \leq 3d_3$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_K \begin{pmatrix} -n_y p_{j-2d_3} \\ n_x p_{j-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_i \\ n_y p_i \end{pmatrix} \\
&= -\int_{\partial K} n_x n_z p_{j-2d_3} p_i \\
&= -n_x n_z (PP)_{ij}.
\end{aligned}$$

- Si $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ y $2d_3 + 1 \leq j \leq 3d_3$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_K \begin{pmatrix} -n_y p_{j-2d_3} \\ n_x p_{j-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_z p_{i-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{i-d_3} \end{pmatrix} \\
&= -\int_{\partial K} n_y n_z p_{j-2d_3} p_{i-d_3} \\
&= -n_y n_z (PP)_{ij}.
\end{aligned}$$

- Si $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$ y $2d_3 + 1 \leq j \leq 3d_3$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_j \times \mathbf{n}, \varphi_i \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} &= \int_{\partial K} \begin{pmatrix} -n_y p_{j-2d_3} \\ n_x p_{j-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_y p_{i-2d_3} \\ n_x p_{i-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(n_y^2 + n_x^2\right) p_{j-2d_3} p_{i-2d_3} \\
&= \left(n_y^2 + n_x^2\right) (PP)_{ij}.
\end{aligned}$$

En este caso el bloque es de la siguiente forma

$$A_3^K := \tau \begin{bmatrix} \left(n_y^2 + n_z^2\right) PP & -n_y n_x PP & -n_z n_x PP \\ -n_x n_y PP & \left(n_z^2 + n_x^2\right) PP & -n_z n_y PP \\ -n_x n_z PP & -n_y n_z PP & \left(n_y^2 + n_x^2\right) PP \end{bmatrix}_{3d_3 \times 3d_3}.$$

Bloques asociados a $(p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{z}))_K$ y $(\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h), t)_K$

Notemos que

$$(p_h, \nabla \cdot (\epsilon \varphi_i))_K = \sum_{l=1}^{d_3} (\lambda_K)_l \int_K p_l \, \nabla \cdot (\epsilon \varphi_i) \,, \quad i = 1, \cdots, 3d_3$$

y la estructura de $\nabla \cdot (\epsilon \varphi_i)$ se puede determinar así

- Si $1 \leq i \leq d_3$ y $1 \leq l \leq d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla \cdot (\epsilon \varphi_i) = \partial_x (\epsilon \, p_i)$ y

$$\int_K p_l \, \nabla \cdot (\epsilon \varphi_i) = \int_K p_l \, \epsilon \, \partial_x p_i = \epsilon_K \, (C_x)^T_{il} \,.$$

- Si $d_3 + 1 \leq i \leq 2d_3$ y $1 \leq l \leq d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ p_{i-d_3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla \cdot (\epsilon \varphi_i) = \partial_y (\epsilon p_{i-d_3})$ y

$$\int_K p_l \, \nabla \cdot (\epsilon \varphi_i) = \int_K p_l \, \epsilon \, \partial_y p_{i-d_3} = \epsilon_K \, (C_y)^T_{il} \,.$$

- Si $2d_3 + 1 \leq i \leq 3d_3$ y $1 \leq l \leq d_3$ entonces $\varphi_i := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{i-2d_3} \end{pmatrix}$, $\nabla \cdot (\epsilon \varphi_i) = \partial_z (\epsilon p_{i-2d_3})$ y

$$\int_K p_l \, \nabla \cdot (\epsilon \varphi_i) = \int_K p_l \, \epsilon \, \partial_z p_{i-2d_3} = \epsilon_K \, (C_z)^T_{il} \,.$$

Usando lo anterior, se definen los bloques

$$C^T := -\epsilon_K \, \left[C_x^T, C_y^T, C_z^T \right]_{d_3 \times 3d_3} \quad \text{y} \quad C := \epsilon_K \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}_{3d_3 \times d_3} ,$$

los cuales representan a $(p_h, \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{z}))_K$ y $(\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}_h), t)_K$, respectivamente.

Bloque asociado a $\langle \tau_n\, p_h, t\rangle_{\partial K}$

Para $i = 1, \cdots, d_3$,

$$\langle \tau_n p_h, p_i\rangle_{\partial K} = \sum_{l=1}^{d_3} (\lambda_K)_l\, \tau_n \int_{\partial K} p_l\, p_i,$$

por lo tanto, el bloque es de la forma

$$[\tau_n PP]_{d_3\times d_3}\,.$$

Veamos ahora la forma de los términos que están al lado derecho del local solver (5.1). Debido a que tres de ellos incluyen a los flujos numéricos $\widehat{\mathbf{u}}_h^t$ y $\widehat{p}_h$, entonces es necesario introducir una base apropiada. Para definir dicha base primero consideramos una cara $\widehat{F} \subset \mathbb{R}^2$ del tetraedro de referencia, con vértices

$$\widehat{w_1} := (0,0), \quad \widehat{w_2} := (1,0), \quad \widehat{w_3} := (0,1),$$

y definimos la siguiente parametrización de las caras de un tetraedro en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\Phi_F : \widehat{F} \subset \mathbb{R}^2 &\to F \subset \mathbb{R}^3\\ (r,t) &\mapsto \Phi_F(r,t) := r(w_2 - w_1) + t(w_3 - w_1) + w_1,\end{aligned}$$

donde F está determinada por sus vértices $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$. Matricialmente,

$$\Phi_F(r,t) = A \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} + w_1,$$

con $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ dada por $A := [w_2 - w_1 \;\; w_3 - w_1]$.

Luego, definimos la siguiente base para el espacio M_h^t en la cara de referencia $\widehat{F}$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_h^t\left(\widehat{F}\right) := \mathrm{gen}\Bigg\{ &\begin{pmatrix} \widehat{D}_1(r,t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{D}_2(r,t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \widehat{D}_{d_2}(r,t) \\ 0 \end{pmatrix},\\ &\begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{D}_1(r,t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{D}_2(r,t) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{D}_{d_2}(r,t) \end{pmatrix}\Bigg\},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{pmatrix} \widehat{D}_i \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D_i \circ \Phi_F \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{D}_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ D_i \circ \Phi_F \end{pmatrix},$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, d_2$. Aquí, $\widehat{D}_i$ y D_i representan funciones de la base de Dubiner 2D en $\widehat{F}$ y F, respectivamente.

Notemos que $A\begin{pmatrix} \widehat{D}_i \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{D}_i \end{pmatrix}$, con $i = 1, 2, \cdots, d_2$, son elementos de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes tales que

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} \widehat{D}_i \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} &= A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{D}_i \cdot ((w_2 - w_1) \times (w_3 - w_1)) \\ &= (w_2 - w_1)\, \widehat{D}_i \cdot ((w_2 - w_1) \times (w_3 - w_1)) = 0, \\ A\begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{D}_i \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} &= A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \widehat{D}_i \cdot ((w_2 - w_1) \times (w_3 - w_1)) \\ &= (w_3 - w_1)\, \widehat{D}_i \cdot ((w_2 - w_1) \times (w_3 - w_1)) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto generan el espacio $\mathrm{M}_h^t(F)$. Veamos entonces la base para $\mathrm{M}_h^t(F)$, con dimensión $2d_2 = 2\dim[\mathbb{P}_k(F)]$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_h^t(F) &:= \operatorname{gen}\left\{\eta_s^F : s = 1, 2, \ldots, 2d_2\right\} \\ &:= \operatorname{gen}\left\{ A\begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} D_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} D_{d_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \right. \\ &\qquad \left. A\begin{pmatrix} 0 \\ D_1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ D_2 \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} 0 \\ D_{d_2} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, definimos

$$\widehat{\mathbf{u}}_h^t := \sum_{l=1}^{4} \sum_{i=1}^{2d_2} (\gamma_{F_l})_i\, \eta_i^{F_l}.$$

En lo sucesivo $A^1 := A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^0 := A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y por componentes

$$A^1 := \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \end{pmatrix}, \qquad A^0 := \begin{pmatrix} A_1^0 \\ A_2^0 \\ A_3^0 \end{pmatrix}.$$

Es importante resaltar que algunos bloques incluyen productos de variables definidas en términos de los elementos de la base de Dubiner 2D con variables definidas en términos

de los elementos de la base de Dubiner 3D; por lo cual, en su construcción se deben tener en cuenta la numeración local de las caras de cada tetraedro y su orientación. De acuerdo con lo presentado en la Sección 2.4 de [19], dado un tetraedro $K \in \mathcal{T}_h$ con vértices v_1, v_2, v_3, v_4, la orientación de sus cuatro caras queda completamente determinada por el siguiente orden de los vértices

$$\begin{aligned} F_1^K &\to (v_1, v_2, v_3), \\ F_2^K &\to (v_1, v_2, v_4), \\ F_3^K &\to (v_1, v_3, v_4), \\ F_4^K &\to (v_4, v_2, v_3). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Debido a que al recorrer cada elemento de la triangulación los vértices de sus caras no necesariamente tienen el orden dado en (5.2), entonces antes de construir el bloque asociado al elemento se deben ordenar. Recordemos que para ordenar los elementos de una tripla existen seis posibles formas, lo cual justifica las siguientes parametrizaciones que aparecen en la Sección 2.5 de [19]

$$\begin{aligned} E_1(s,t) &= (s,t), \\ E_2(s,t) &= (t,s), \\ E_3(s,t) &= (t, 1-s-t), \\ E_4(s,t) &= (s, 1-s-t), \\ E_5(s,t) &= (1-s-t, s), \\ E_6(s,t) &= (1-s-t, t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Cada una de las anteriores parametrizaciones las incluímos en una matriz de permutación que denotamos T.perm usando un número de 1 a 6, de acuerdo con el orden dado en (5.3). Dicha matriz tiene tamaño $4 \times Nelts$, donde $Nelts$ corresponde al número de elementos de la malla y 4 es el número de caras de cada elemento. Entonces se define un ciclo sobre las caras, digamos l entre 1 y 4 y otro ciclo para j entre 1 y 6. Luego, dado un valor para l, en el segundo ciclo multiplicamos cada entrada del bloque correspondiente por $T.perm(l,:) == j$, que denota una instrucción en la cual comparamos cada entrada de la fila de T.perm con el valor de j. Lo que se obtiene después de realizar la comparación es un 0 si el orden de los vértices de la cara no coincide y un 1 si el orden coincide.

Veamos entonces la forma de los bloques restantes del local solver (5.1).

Bloque asociado a $\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{w} \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K}$

Usando el teorema de cambio de variable, para $j = 1, \cdots, 3d_3$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \varphi_j \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K} &= \sum_{l=1}^{4} \sum_{i=1}^{2d_2} (\gamma_{F_l})_i \int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot (\varphi_j \times \mathbf{n}) \\ &= \sum_{l=1}^{4} \sum_{i=1}^{2d_2} 2\,|F_l|\,(\gamma_{F_l})_i \int_{\widehat{F}_l} \eta_i^{\widehat{F}_l} \cdot (\widehat{\varphi}_j \times \mathbf{n}),\end{aligned}$$

donde $|F_l|$ representa el área de la cara F_l del elemento K, para $l = 1, \cdots, 4$.

Consideremos los siguientes casos,

- si $1 \leq i \leq d_2$ y $1 \leq j \leq d_3$ entonces

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_j \\ n_y p_j \end{pmatrix} = \left(-A_2^1 n_z + A_3^1 n_y\right) \int_{F_l} p_j\, D_i,$$

- si $d_2 + 1 \leq i \leq 2d_2$ y $1 \leq j \leq d_3$ entonces

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^0 D_{i-d_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z p_j \\ n_y p_j \end{pmatrix} = \left(-A_2^0 n_z + A_3^0 n_y\right) \int_{F_l} p_j\, D_{i-d_2},$$

- si $1 \leq i \leq d_2$ y $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$ entonces

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot \begin{pmatrix} n_z p_{j-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{j-d_3} \end{pmatrix} = \left(A_1^1 n_z - A_3^1 n_x\right) \int_{F_l} p_{j-d_3}\, D_i,$$

- si $d_2 + 1 \leq i \leq 2d_2$ y $d_3 + 1 \leq j \leq 2d_3$ entonces

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^0 D_{i-d_2} \cdot \begin{pmatrix} n_z p_{j-d_3} \\ 0 \\ -n_x p_{j-d_3} \end{pmatrix} = \left(A_1^0 n_z - A_3^0 n_x\right) \int_{F_l} p_{j-d_3}\, D_{i-d_2},$$

- si $1 \leq i \leq d_2$ y $2d_3 + 1 \leq j \leq 3d_3$ entonces

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot \begin{pmatrix} -n_y p_{j-2d_3} \\ n_x p_{j-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-A_1^1 n_y + A_2^1 n_x\right) \int_{F_l} p_{j-2d_3}\, D_i,$$

- si $d_2+1 \leq i \leq 2d_2$ y $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$ entonces

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^0 D_{i-d_2} \cdot \begin{pmatrix} -n_y p_{j-2d_3} \\ n_x p_{j-2d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-A_1^0 n_y + A_2^0 n_x\right) \int_{F_l} p_{j-2d_3}\, D_{i-d_2}.$$

Usando la anterior caracterización para cada cara del tetraedro se obtiene un sub-bloque con la siguiente forma

$$\left[\mathbf{n} \times A^1\, \mathbf{n} \times A^0\right]_{3\times 2} \otimes (DP)_{d_3 \times d_2} = A_4^{F_l} \in \mathbb{R}^{3d_3 \times 2d_2},$$

donde

$$(DP)_{ji} := \int_{F_l} p_j\, D_i.$$

Entonces, el bloque se puede describir así

$$A_4^K := \left[A_4^{F_1}\, A_4^{F_2}\, A_4^{F_3}\, A_4^{F_4}\right] \in \mathbb{R}^{3d_3 \times 4(2d_2)}.$$

Bloque asociado a $\langle \tau \widehat{\mathbf{u}}_h^t \times \mathbf{n}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K}$

Como $\widehat{\mathbf{u}}_h^t \in \mathrm{M}_h^t$ entonces $\widehat{\mathbf{u}}_h^t \cdot \mathbf{n} = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} \left\langle \tau \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} &= \left\langle \tau \left(\mathbf{n} \times \left(\widehat{\mathbf{u}}_h^t \times \mathbf{n}\right)\right), \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} + \left\langle \tau\, \mathbf{n} \left(\widehat{\mathbf{u}}_h^t \cdot \mathbf{n}\right), \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} \\ &= \left\langle \tau \left(\mathbf{n} \times \left(\widehat{\mathbf{u}}_h^t \times \mathbf{n}\right)\right), \mathbf{z} \right\rangle_{\partial K} \\ &= \left\langle \tau \widehat{\mathbf{u}}_h^t \times \mathbf{n}, \mathbf{z} \times \mathbf{n} \right\rangle_{\partial K}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \left\langle \tau\, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \varphi_j \right\rangle_{\partial K} &= \sum_{l=1}^{4} \sum_{i=1}^{2d_2} (\gamma_{F_l})_i \int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot \varphi_j \\ &= \sum_{l=1}^{4} \sum_{i=1}^{2d_2} 2\,|F_l|\,(\gamma_{F_l})_i \int_{\widehat{F}_l} \eta_i^{\widehat{F}_l} \cdot \widehat{\varphi}_j \end{aligned}$$

y de acuerdo con los siguientes casos,

- para $1 \leq i \leq d_2$ y $1 \leq j \leq d_3$,

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{F_l} p_j\, A_1^1 D_i,$$

- para $d_2+1 \leq i \leq 2d_2$ y $1 \leq j \leq d_3$,

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^0 D_{i-d_2} \cdot \begin{pmatrix} p_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{F_l} p_j \; A_1^0 D_{i-d_2},$$

- para $1 \leq i \leq d_2$ y $d_3+1 \leq j \leq 2d_3$,

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{F_l} p_{j-d_3} \; A_2^1 D_i,$$

- para $d_2+1 \leq i \leq 2d_2$ y $d_3+1 \leq j \leq 2d_3$,

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^0 D_{i-d_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p_{j-d_3} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{F_l} p_{j-d_3} \; A_2^0 D_{i-d_2},$$

- para $1 \leq i \leq d_2$ y $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$,

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} = \int_{F_l} p_{j-2d_3} \; A_3^1 D_i,$$

- para $d_2+1 \leq i \leq 2d_2$ y $2d_3+1 \leq j \leq 3d_3$,

$$\left\langle \eta_i^{F_l}, \varphi_j \right\rangle_{F_l} = \int_{F_l} A^0 D_{i-d_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{j-2d_3} \end{pmatrix} = \int_{F_l} p_{j-2d_3} \; A_3^0 D_{i-d_2}.$$

Entonces, usando lo anterior resulta el sub-bloque

$$\left[A^1 \; A^0\right]_{3\times 2} \otimes (\tau DP)_{d_3 \times d_2} = A_5^{F_l} \in \mathbb{R}^{3d_3 \times 2d_2},$$

donde

$$(\tau DP)_{ji} := \int_{F_l} \tau p_j \; D_i,$$

lo cual implica que el bloque es de la forma

$$A_5^K := \left[A_5^{F_1}\ A_5^{F_2}\ A_5^{F_3}\ A_5^{F_4}\right] \in \mathbb{R}^{3d_3\times 4(2d_2)}.$$

De otro lado, definamos $\mathrm{M}_h := \mathrm{gen}\left\{D_s\colon 1 \le s \le d_2\right\}$ y

$$\widehat{p}_h := \sum_{l=1}^{4}\sum_{s=1}^{d_2} \left(\theta_{F_l}\right)_s D_s,$$

con D_s una función de la base de Dubiner 2D.

Bloque asociado a $\langle \widehat{p}_h, \epsilon\mathbf{z}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial K}$

Usando la definición de $\widehat{p}_h$, para $i = 1, \cdots, 3d_3$, se tiene que

$$\langle \widehat{p}_h, \epsilon\varphi_i\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial K} = \sum_{l=1}^{4}\sum_{s=1}^{d_2} \left(\theta_{F_l}\right)_s \int_{F_l} D_s\,\epsilon\varphi_i\cdot\mathbf{n},$$

más aún,

- si $1 \le i \le d_3$ y $1 \le s \le d_2$ entonces

$$\int_{F_l} D_s\,\epsilon\varphi_i\cdot\mathbf{n} = \int_{F_l} D_s\,\epsilon p_i n_x = \epsilon n_x\left(DP\right)_{is},$$

- si $d_3+1 \le i \le 2d_3$ y $1 \le s \le d_2$ entonces

$$\int_{F_l} D_s\,\epsilon\varphi_i\cdot\mathbf{n} = \int_{F_l} D_s\,\epsilon p_i n_y = \epsilon n_y\left(DP\right)_{is},$$

- si $2d_3+1 \le i \le 3d_3$ y $1 \le s \le d_2$ entonces

$$\int_{F_l} D_s\,\epsilon\varphi_i\cdot\mathbf{n} = \int_{F_l} D_s\,\epsilon p_i n_z = \epsilon n_z\left(DP\right)_{is}.$$

Notemos que lo anterior se puede expresar, en cada cara, así

$$\mathbf{n}_{F_l}\otimes\left(\epsilon DP\right)_{d_3\times d_2} = A_{pn}^{F_l} \in \mathbb{R}^{3d_3\times d_2},$$

de lo cual,

$$(A_p^n)_K := \left[\begin{array}{cccc} A_{pn}^{F_1} & A_{pn}^{F_2} & A_{pn}^{F_3} & A_{pn}^{F_4}\end{array}\right] \in \mathbb{R}^{3d_3\times 4d_2}.$$

Bloque asociado a $\langle \tau_n \widehat{p}_h, t\rangle_{\partial K}$

Primero notemos que para $i = 1, \cdots, d_3$

$$\langle \tau_n \, \widehat{p}_h, p_i\rangle_{\partial K} = \sum_{l=1}^{4} \sum_{s=1}^{d_2} (\theta_{F_l})_s \int_{F_l} \tau_n \, D_s \, p_i,$$

luego, como por cada cara se tiene un bloque de tamaño $d_3 \times d_2$, entonces el bloque completo es de la forma

$$(\tau_n DP)_K := \left[\tau_n DP^{F_1} \quad \tau_n DP^{F_2} \quad \tau_n DP^{F_3} \quad \tau_n DP^{F_4}\right]_{d_3 \times 4d_2}.$$

Bloque asociado a $(\mathbf{f}, \mathbf{z})_K$

Dado φ_i en la base del espacio $[\mathbb{P}_k(K)]^3$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{f} := (f_1, f_2, f_3)$, entonces para $i = 1, \cdots, 3d_3$ el término $(\mathbf{f}, \varphi_i)_K$ lo representamos con el siguiente bloque

$$A_f^K := \left[\int_K f_1 p_1, \cdots, \int_K f_1 p_{d_3}, \int_K f_2 p_1, \cdots, \int_K f_2 p_{d_3}, \int_K f_3 p_1, \cdots, \int_K f_3 p_{d_3} \right]^T_{3d_3 \times 1}.$$

Veamos ahora la forma matricial del local solver (5.1)

$$\begin{bmatrix} A^K & -B^K & 0 \\ B^K + A_2^K & -A_\kappa^K + A_3^K & C^T \\ 0 & C & (\tau_n PP)_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_h]_K \\ [\mathbf{u}_h]_K \\ [p_h]_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_4^K & 0 \\ A_5^K & -(A_p^n)_K \\ 0 & (\tau_n DP)_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\widehat{u}_h^t]_K \\ [\widehat{p}_h]_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_f^K \end{bmatrix}$$

y notemos que definiendo

$$B_1^K := \begin{bmatrix} A^K & -B^K & 0 \\ B^K + A_2^K & -A_\kappa^K + A_3^K & C^T \\ 0 & C & (\tau_n PP)_K \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad MM^K := \begin{bmatrix} A_4^K & 0 \\ A_5^K & -(A_p^n)_K \\ 0 & (\tau_n DP)_K \end{bmatrix},$$

en la anterior ecuación, resulta lo siguiente

$$B_1^K \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_h]_K \\ [\mathbf{u}_h]_K \\ [p_h]_K \end{bmatrix} = MM^K \begin{bmatrix} [\widehat{u}_h^t]_K \\ [\widehat{p}_h]_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_f^K \end{bmatrix},$$

de donde,

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{v}_h]_K \\ [\mathbf{u}_h]_K \\ [p_h]_K \end{bmatrix} = \left(B_1^K\right)^{-1} MM^K \begin{bmatrix} [\widehat{u}_h^t]_K \\ [\widehat{p}_h]_K \end{bmatrix} + \left(B_1^K\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ A_f^K \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Para resolver (5.4) hallamos los grados de libertad asociados a $\widehat{u}_h^t$ y $\widehat{p}_h$, teniendo en cuenta la continuidad de las trazas tangencial y normal de $\widehat{u}_h^t$ y $\widehat{\epsilon\,\mathbf{u}_h^n}$. Veamos entonces la estructura por bloques de la cuarta ecuación de la formulación variacional HDG (2.10), la cual, después de usar (2.37h), corresponde a

$$0 = \left\langle \mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{v}}_h^t, \eta \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = \left\langle \mathbf{n} \times \mathbf{v}_h^t, \eta \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} + \left\langle \tau \mathbf{u}_h^t, \eta \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} - \left\langle \tau \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \eta \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma}, \tag{5.5}$$

para todo $\eta \in \mathrm{M}_h^t$. Ahora bien, por la forma de A_4^K y A_5^K se tiene que el primer término de (5.5) es $\left(A_4^K\right)^T$ y el segundo término corresponde a $\left(A_5^K\right)^T$. Además, dado $F_t \in \partial K$ y tomando $\eta = \eta_s^{F_t}$, entonces la estructura del tercer término de (5.5) es la siguiente

$$\left\langle \tau\, \widehat{\mathbf{u}}_h^t, \eta_s^{F_t} \right\rangle_{\partial K} = \sum_{l=1}^{4} \sum_{i=1}^{2d_2} \left(\gamma_{F_l}\right)_i \tau \int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot \eta_s^{F_t},$$

para $i = 1, \cdots, 2d_2$ y donde $\eta_i^{F_l} \cdot \eta_s^{F_t} = 0$, si $l \neq t$. Consideremos entonces los siguientes casos

- para $1 \leq i \leq d_2$ y $1 \leq s \leq d_2$,

$$\int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot \eta_s^{F_t} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot A^1 D_s = A^1 \cdot A^1 \int_{F_l} D_i\, D_s,$$

- para $1 \leq i \leq d_2$ y $d_2 + 1 \leq s \leq 2d_2$,

$$\int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot \eta_s^{F_t} = \int_{F_l} A^0 D_i \cdot A^1 D_s = A^0 \cdot A^1 \int_{F_l} D_i\, D_s,$$

- para $d_2 + 1 \leq i \leq 2d_2$ y $1 \leq s \leq d_2$,

$$\int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot \eta_s^{F_t} = \int_{F_l} A^1 D_i \cdot A^0 D_s = A^1 \cdot A^0 \int_{F_l} D_i\, D_s,$$

- para $d_2 + 1 \leq i \leq 2d_2$ y $d_2 + 1 \leq s \leq 2d_2$,

$$\int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot \eta_s^{F_t} = \int_{F_l} A^0 D_i \cdot A^0 D_s = A^0 \cdot A^0 \int_{F_l} D_i\, D_s.$$

Por lo tanto, la estructura del bloque es

$$(\tau DD)_{\partial K} := \begin{bmatrix} \tau DD^{F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau DD^{F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau DD^{F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau DD^{F_4} \end{bmatrix}_{4(2d_2)\times 4(2d_2)},$$

donde, para $l = 1, \cdots, 4$

$$\tau DD^{F_l} := \begin{bmatrix} A^1 \cdot A^1 & A^1 \cdot A^0 \\ A^0 \cdot A^1 & A^0 \cdot A^0 \end{bmatrix} \otimes (\tau DD)_{2d_2\times 2d_2} \in \mathbb{R}^{2d_2\times 2d_2}.$$

Entonces, la forma matricial de (5.5) en K es

$$\left(A_4^K\right)^T [\mathbf{v}_h]_K + \left(A_5^K\right)^T [u_h]_K - (\tau DD)_{\partial K} [\widehat{u}_h]_{\partial K} = 0. \tag{5.6}$$

Ahora veamos la estructura por bloques de la quinta ecuación de la formulación variacional HDG, después de aplicar (2.37i)

$$0 = \left\langle \widehat{\epsilon\, \mathbf{u}_h^n} \cdot \mathbf{n}, \mu \right\rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} = \langle \epsilon\, \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}, \mu \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} + \langle \tau_n p_h, \mu \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma} - \langle \tau_n \widehat{p}_h, \mu \rangle_{\partial\mathcal{T}_h \setminus \Gamma}, \tag{5.7}$$

para todo $\mu \in \mathrm{M}_h$. Teniendo en cuenta la construcción de los bloques $(A_p^n)_K$, $(\tau_n DP)_K$ y $(\tau DD)_K$ notemos que la forma matricial de (5.7) es

$$\left(A_p^n\right)_K^T [\mathbf{u}_h]_K + (\tau_n DP)_K^T [p_h]_K - (\tau_n DD)_{\partial K} [\widehat{p}_h]_{\partial K} = 0. \tag{5.8}$$

Ahora bien, uniendo (5.6) y (5.8), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \left(A_4^K\right)^T & \left(A_5^K\right)^T & 0 \\ 0 & \left(A_p^n\right)_K^T & (\tau_n DP)_K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_h]_K \\ [\mathbf{u}_h]_K \\ [p_h]_K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\tau DD)_{\partial K} & 0 \\ 0 & (\tau_n DD)_{\partial K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\widehat{u}_h^t]_K \\ [\widehat{p}_h]_K \end{bmatrix} = 0, \tag{5.9}$$

de donde, si denotamos

$$MC^K := \begin{bmatrix} \left(A_4^K\right)^T & \left(A_5^K\right)^T & 0 \\ 0 & \left(A_p^n\right)_K^T & (\tau_n DP)_K^T \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_6^{\partial K} := \begin{bmatrix} (\tau DD)_{\partial K} & 0 \\ 0 & (\tau_n DD)_{\partial K} \end{bmatrix},$$

entonces teniendo en cuenta (5.4), (5.9) es equivalente a

$$\left(-MC^K\left(B_1^K\right)^{-1} MM^K + A_6^{\partial K}\right)\begin{bmatrix} [\widehat{u}_h^t]_{\partial K} \\ [\widehat{p}_h]_{\partial K} \end{bmatrix} = MC^K\left(B_1^K\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ A_f^K \end{bmatrix}$$

y al ensamblar debemos resolver el siguiente sistema

$$\left(-MC\left(B_1\right)^{-1} MM + A_6\right)\begin{bmatrix} [\widehat{u}_h^t] \\ [\widehat{p}_h] \end{bmatrix} = MC\left(B_1\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ A_f \end{bmatrix},$$

de donde obtenemos los grados de libertad asociados a los flujos $\widehat{u}_h^t$ y $\widehat{p}_h$, en todo el esqueleto. Antes de usar los flujos numéricos para obtener las aproximaciones de las variables definidas en el volumen, es necesario tener en cuenta los datos que conocemos de $\mathbf{u}\times\mathbf{n}$ en la frontera del dominio.

Condición de frontera:

Para incluir la condición de frontera $\mathbf{u}\times\mathbf{n}=\mathbf{g}$ en nuestro esquema numérico tenemos en cuenta que el flujo numérico $\widehat{u}_h^t$ es la aproximación de la componente tangencial de $\mathbf{u}_h$ sobre $\mathcal{E}_h$. Entonces, como $\widehat{u}_h^t\times\mathbf{n}=\Pi\left(\mathbf{g}\right)$, para $F\in\mathcal{E}_\Gamma$ dado, se tiene que

$$\left\langle\widehat{u}_h^t,\eta\right\rangle_F = \left\langle\widehat{u}_h^t,\mathbf{n}\times\left(\eta\times\mathbf{n}\right)\right\rangle_F = \left\langle\widehat{u}_h^t\times\mathbf{n},\eta\times\mathbf{n}\right\rangle_F = \left\langle\Pi\left(\mathbf{g}\right),\eta\times\mathbf{n}\right\rangle_F = \left\langle\mathbf{g},\eta\times\mathbf{n}\right\rangle_F,$$

para todo $\eta\in\left[\mathbb{P}_K\left(F\right)\right]^3$, tal que $\eta\cdot\mathbf{n}=0$.

Ahora bien, sea $\eta:=\eta_s^{F_t}$. Entonces,

$$\left\langle\widehat{u}_h^t,\eta_s^{F_t}\right\rangle_{F_l} = \sum_{i=1}^{2d_2}\left(\gamma_{F_l}\right)_i\int_{F_l}\eta_i^{F_l}\cdot\eta_s^{F_t}.$$

Luego,

- Si $1\le i\le d_2$ y $1\le s\le d_2$ entonces

$$\int_{F_l}\eta_i^{F_l}\cdot\eta_s^{F_t} = \int_{F_l}A^1D_i\cdot A^1D_s = A^1\cdot A^1\int_{F_l}D_i\,D_s$$

- Si $1\le i\le d_2$ y $d_2+1\le s\le 2d_2$ entonces

$$\int_{F_l}\eta_i^{F_l}\cdot\eta_s^{F_t} = \int_{F_l}A^0D_i\cdot A^1D_s = A^0\cdot A^1\int_{F_l}D_i\,D_s$$

- Si $d_2+1\le i\le 2d_2$ y $1\le s\le d_2$ entonces

$$\int_{F_l}\eta_i^{F_l}\cdot\eta_s^{F_t} = \int_{F_l}A^1D_i\cdot A^0D_s = A^1\cdot A^0\int_{F_l}D_i\,D_s$$

- Si $d_2+1 \leq i \leq 2d_2$ y $d_2+1 \leq s \leq 2d_2$ entonces

$$\int_{F_l} \eta_i^{F_l} \cdot \eta_s^{F_t} = \int_{F_l} A^0 D_i \cdot A^0 D_s = A^0 \cdot A^0 \int_{F_l} D_i \, D_s.$$

Entonces, la estructura del bloque para cada $F \in \mathcal{E}_\Gamma$ es la siguiente

$$\begin{bmatrix} A^1 \cdot A^1 & A^0 \cdot A^1 \\ A^1 \cdot A^0 & A^0 \cdot A^0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \otimes (DD)_{d_2 \times d_2} = A_7^F \in \mathbb{R}^{2d_2 \times 2d_2}.$$

Consideremos ahora el lado derecho de la condición de frontera para $\eta := \eta_s^{F_t}$ y $l = 1, \cdots, 4$

- Si $1 \leq s \leq d_2$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{g}, \eta_s^{F_t} \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \left\langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \eta_s^{F_t} \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \left\langle \mathbf{u}, \eta_s^{F_t} \right\rangle_{F_l} &= \int_{F_l} \mathbf{g} \cdot A^1 \, D_s \\ &= \int_{F_l} \left(g_1 A_1^1 + g_2 A_2^1 + g_3 A_3^1 \right) D_s \end{aligned}$$

- Si $d_2+1 \leq s \leq 2d_2$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{g}, \eta_s^{F_t} \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \left\langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \eta_s^{F_t} \times \mathbf{n} \right\rangle_{F_l} = \left\langle \mathbf{u}, \eta_s^{F_t} \right\rangle_{F_l} &= \int_{F_l} \mathbf{g} \cdot A^0 \, D_s \\ &= \int_{F_l} \left(g_1 A_1^0 + g_2 A_2^0 + g_3 A_3^0 \right) D_s. \end{aligned}$$

Usando lo anterior se define el siguiente vector para cada cara de frontera,

$$\begin{bmatrix} \int_F \left(g_1 A_1^1 + g_2 A_2^1 + g_3 A_3^1 \right) D \\ \int_F \left(g_1 A_1^0 + g_2 A_2^0 + g_3 A_3^0 \right) D \end{bmatrix} = H_F \in \mathbb{R}^{2d_2 \times 1}$$

y denotamos por H al bloque cuyas columnas son los H_F, es decir, $H \in \mathbb{R}^{2d_2 \times |\mathcal{E}_\Gamma|}$.

Lo anterior nos permite determinar los valores del flujo numérico en las caras que están en $\mathcal{E}_\Gamma$, a las cuales denominamos dirfaces.

Después usando condensación estática imponemos las condiciones de frontera de la siguiente forma

$$H(\text{free}, \text{free}) \left[\widehat{\mathbf{y}}(\text{free}) \right] = G(\text{free}) - H(\text{free}, \text{dirfaces}) \left[\widehat{\mathbf{y}}(\text{dirfaces}) \right],$$

donde

$$H := -MC\,(B_1)^{-1}\,MM + A_6, \quad [\widehat{\mathbf{y}}] := \begin{bmatrix} [\widehat{u}_h^t] \\ [\widehat{p}_h] \end{bmatrix}, \quad G := MC\,(B_1)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ A_f \end{bmatrix}$$

y free representa las caras que están en $\mathcal{E}_I$, en las cuales no conocemos el valor del flujo numérico.

Finalmente, los grados de libertad de las variables definidas sobre el volumen los obtenemos hallando la solución de cada uno de los sistemas locales descritos en (5.4), en los cuales usamos los grados de libertad $[\widehat{\mathbf{y}}]$ de manera conveniente, es decir, dependiendo del elemento.

2. Implementación esquema HDG: problema B

Para implementar el método HDG (3.7) propuesto para las ecuaciones de Maxwell sujetas a condiciones tipo Dirichlet y cuasi-periódicas usamos como base las rutinas desarrolladas para el problema A. Notemos que la estructura del local solver del problema B es similar a (5.1) y que las relaciones entre los flujos numéricos dadas en (3.7h) y (3.7i) inicialmente las construimos sobre toda la frontera. Entonces dado que los problemas analizados en los Capítulos 2 y 3 tienen condiciones de frontera distintas, al imponerlas aparece la diferencia entre las implementaciones.

Teniendo en cuenta (3.6) definimos una matriz P que nos permita representar que los grados de libertad asociados al flujo $\widehat{\mathbf{u}}_h^t$ sobre Γ_2 y Γ_4 coinciden con los grados de libertad del flujo sobre Γ_1 por un factor $e^{i\alpha L}$ y sobre Γ_3 por un factor $e^{i\beta L}$, respectivamente. Es decir,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_h \\ \widehat{p}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\mathcal{E}_h \setminus \Gamma} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_2} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_3} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_4} \\ \widehat{p}_h \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\mathcal{E}_h \setminus \Gamma} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_1} \\ \tilde{\mathbf{u}}_h\,|_{\Gamma_3} \\ \widehat{p}_h \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

donde

$$P := \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha L}\mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\beta L}\mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}, \tag{5.11}$$

para I representando la matriz identidad.

Debido a que las condiciones Dirichlet y cuasi-periódicas las agregamos al sistema por medio de condensación estática entonces es necesario determinar las posiciones de los grados de libertad. Para representar las posiciones correspondientes a los valores conocidos sobre la frontera, es decir, los datos Dirichlet de $\mathbf{u}$ y p usamos *nonfree* y para denotar a los valores no conocidos empleamos *free*. Entonces, teniendo en cuenta (5.10) y (5.11), el sistema que resolvemos para hallar el vector de grados de libertad correspondientes a las incógnitas definidas sobre $\mathcal{E}_h$ es el siguiente

$$rhsP = rhsP(free) - MP(free, nonfree) * Uhat(nonfree).$$

donde $Uhat$ representa al vector de grados de libertad asociados a $\tilde{\mathbf{u}}_h$, $MP := P^T MP$, rhs es el lado derecho de nuestro sistema de ecuaciones y $rhsP := P^T rhs$.

3. Bases de Dubiner

Para definir las bases de los espacios polinomiales $[\mathbb{P}_k(\cdot)]^3$ y $\mathbb{P}_k(\cdot)$ utilizamos elementos de la base de Dubiner. Los polinomios de la base de Dubiner corresponden a productos de polinomios de Jacobi $P_n^{a,b}$, los cuales se pueden definir así

$$(1-x)^a(1+x)^b P_n^{a,b}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\ \frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}x}[(1-x)^{n+a}(1+x)^{n+b}],$$

donde n representa el grado del polinomio en la variable x con coeficientes que dependen de los parametros $a > -1$ y $b > -1$. Además, los polinomios de Jacobi también pueden

definirse de forma recursiva, por medio de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
P_0^{a,b}(x) &= 1, \\
P_1^{a,b}(x) &= \frac{a-b}{2} + \left(1 + \frac{a+b}{2}\right) x, \\
P_{n+1}^{a,b}(x) &= \tilde{c} \left\{ \left[(2n+a+b+1)(a^2-b^2) + \frac{(2n+a+b+2)!}{(2n+a+b-1)!} x \right] P_n^{a,b}(x) \right. \\
&\quad \left. -2(n+a)(n+b)(2n+a+b+2) P_{n-1}^{a,b}(x) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

donde $\tilde{c} := \frac{1}{2(n+1)(n+a+b+1)(2n+a+b)}$.

Una característica importante de los polinomios de Jacobi es que son ortogonales en $[-1, 1]$, de acuerdo con la relación

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b P_n^{a,b}(x) P_q^{a,b}(x) \mathrm{d}x = \gamma_n^{(a,b)} \delta_{n,q},$$

donde $\delta_{n,q}$ representa el delta de Kronecker y

$$\gamma_n^{(a,b)} := \frac{2^{a+b+1}}{2n+a+b+1} \frac{\Gamma(n+a+1)\Gamma(n+b+1)}{n!\Gamma(n+a+b+1)}.$$

Lo anterior puede consultarse en la Sección 4.3 de [42].

Veamos entonces las definiciones de las bases de Dubiner que utilizamos en la implementación numérica del método. Los polinomios de la base de Dubiner 2D con grado $n+m$ son de la forma

$$\widetilde{P}_{nm}(r,s) := P_n^{0,0}(\eta_1) P_m^{2n+1,0}(\eta_2) \left(\frac{1-s}{2}\right)^n, \tag{5.13}$$

donde $(\eta_1, \eta_2) := (2\left(\frac{1+r}{1-s}\right) - 1, s)$ define una transformación del elemento de referencia

$$\widehat{K} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda_1, 0 \leq \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\}$$

en el dominio físico y $(r, s) := (2\lambda_1 - 1, 2\lambda_2 - 1)$.

La ortogonalidad de las funciones de la base con respecto al producto L^2 se hereda de los polinomios de Jacobi y como se demuestra en el Apéndice B de [34], se tiene que

$$\int_{\widehat{K}} \widetilde{P}_{nm} \widetilde{P}_{n'm'} \mathrm{d}x = \gamma_n^{(0,0)} \frac{\gamma_m^{(2n+1,0)}}{2^{2n+1}} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}.$$

En el caso de la base de Dubiner 3D, los polinomios están dados por la siguiente expresión

$$\widetilde{P}_{nmq}(r,s,t) := P_n^{0,0}(\eta_1)P_m^{2n+1,0}(\eta_2)P_q^{2n+2m+2,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^n\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^{n+m}, \quad (5.14)$$

donde $(\eta_1,\eta_2,\eta_3) := (-2\left(\frac{1+r}{s+t}\right)-1, 2\left(\frac{1+s}{1-t}\right)-1, t)$ define una transformación del tetraedro de referencia

$$\widehat{K} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \lambda_1, 0 \leq \lambda_2, 0 \leq \lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \leq 1\}$$

en el dominio físico, para $(r,s,t) := (2\lambda_1-1, 2\lambda_2-1, 2\lambda_3-1)$.

Los polinomios de la base de Dubiner 3D satisfacen la siguiente propiedad de ortogonalidad con respecto al producto L^2, de acuerdo con lo demostrado en el Apéndice B de [34],

$$\int_{\widehat{K}} \widetilde{P}_{nmq}\widetilde{P}_{n'm'q'}\mathrm{d}x = \gamma_n^{(0,0)}\frac{\gamma_m^{(2n+1,0)}}{2^{2n+1}}\frac{\gamma_q^{(2n+2m+2,0)}}{2^{2n+2m+2}}\delta_{n,n'}\delta_{m,m'}\delta_{q,q'}.$$

Para ampliar las caracterizaciones anteriores pueden consultarse [28, 34, 37].

Ahora veamos, para el caso $k=2$, la forma de los polinomios D_i que utilizamos para definir las bases de los espacios que usamos en la sección anterior para construir los bloques que constituyen el local solver (5.1).

Teniendo en cuenta que los polinomios de grado dos en dos variables tienen seis coeficientes, entonces la dimensión de la base de Dubiner en dos dimensiones para $k=2$ es $d_2=6$. Veamos la forma de cada uno de sus elementos usando (5.12) y (5.13).

- Si $n=0$ y $m=0$ entonces

$$\widetilde{P}_{00}(r,s) = P_0^{0,0}(\eta_1)P_0^{1,0}(\eta_2)\left(\frac{1-s}{2}\right)^0 = 1.$$

- Si $n=1$ y $m=0$ entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{10}(r,s) = P_1^{0,0}(\eta_1)P_0^{3,0}(\eta_2)\left(\frac{1-s}{2}\right) &= \eta_1\left(\frac{1-s}{2}\right)\\ &= \left(2\left(\frac{1+r}{1-s}\right)-1\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}(1+2r+s).\end{aligned}$$

- Si $n = 0$ y $m = 1$ entonces

$$\widetilde{P}_{01}(r,s) = P_0^{0,0}(\eta_1)P_1^{1,0}(\eta_2)\left(\frac{1-s}{2}\right)^0 = \frac{3}{2} + \frac{\eta_2}{2} = \frac{1}{2}(3+s).$$

- Si $n = 1$ y $m = 1$ entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{11}(r,s) = P_1^{0,0}(\eta_1)P_1^{3,0}(\eta_2)\left(\frac{1-s}{2}\right) &= \eta_1\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\eta_2\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\\ &= \left(2\left(\frac{1+r}{1-s}\right)-1\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\eta_2\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}(5+8s+10r+6rs+3s^2).\end{aligned}$$

- Si $n = 0$ y $m = 2$ entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{02}(r,s) = P_0^{0,0}(\eta_1)P_2^{1,0}(\eta_2)\left(\frac{1-s}{2}\right)^0 &= \frac{1}{36}\left[\left(4+\frac{5!}{2!}\eta_2\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\eta_2}{2}\right)-20\right]\\ &= \frac{1}{36}\left[2\left(1+15s\right)\left(3+s\right)-20\right]\\ &= \frac{1}{9}\left(-\frac{7}{2}+23s+\frac{15}{2}s^2\right).\end{aligned}$$

- Si $n = 2$ y $m = 0$ entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{20}(r,s) = P_2^{0,0}(\eta_1)P_0^{5,0}(\eta_2)\left(\frac{1-s}{2}\right)^2 &= \frac{1}{16}\left(24\eta_1^2-8\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{3}{2}\left(2\left(\frac{1+r}{1-s}\right)-1\right)^2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-s}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\left(3r+2s+3rs+3r^2+\frac{s^2}{2}+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Entonces la base es

$$\begin{aligned}B_{2D} &:= \{D_1,\cdots,D_6\}\\ &:= \left\{1, \frac{1}{2}(3+s), \frac{1}{2}(1+2r+s), \frac{1}{4}(5+8s+10r+6rs+3s^2), \frac{1}{9}\left(-\frac{7}{2}+23s+\frac{15}{2}s^2\right),\right.\\ &\qquad \left.\frac{1}{2}\left(3r+2s+3rs+3r^2+\frac{s^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Veamos ahora la construcción de la base de Dubiner en tres dimensiones para $k = 2$ usando (5.12) y (5.14), cuya dimensión es $d_3 = 10$.

- Para $n = 0$, $m = 0$ y $q = 0$

$$\widetilde{P}_{000}(r,s,t) = P_0^{0,0}(\eta_1)P_0^{1,0}(\eta_2)P_0^{2,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^0\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^0 = 1.$$

- Para $n = 1$, $m = 0$ y $q = 0$

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{100}(r,s,t) &= P_1^{0,0}(\eta_1)P_0^{3,0}(\eta_2)P_0^{4,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)\\ &= \eta_1\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)\\ &= \left(-2\frac{1+r}{s+t}-1\right)\left(1-\frac{1+s}{1-t}\right)\left(\frac{1-t}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2+2r+s+t\right).\end{aligned}$$

- Para $n = 0$, $m = 1$ y $q = 0$

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{010}(r,s,t) &= P_0^{0,0}(\eta_1)P_1^{1,0}(\eta_2)P_0^{4,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^0\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)\\ &= \left(\frac{3}{2}+\frac{\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2-t+s\right).\end{aligned}$$

- Para $n = 0$, $m = 0$ y $q = 1$

$$\widetilde{P}_{001}(r,s,t) = P_0^{0,0}(\eta_1)P_0^{1,0}(\eta_2)P_1^{2,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^0\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^0 = 2+t.$$

- Para $n = 1$, $m = 1$ y $q = 0$

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{110}(r,s,t) &= P_1^{0,0}(\eta_1)P_1^{3,0}(\eta_2)P_0^{6,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^2\\ &= \eta_1\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\eta_2\right)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^2\\ &= \frac{(1-t)^2}{16}\left(-2\left(\frac{1+r}{s+t}\right)-1\right)\left(2+6\left(\frac{1+s}{1-t}\right)\right)\left(2-2\left(\frac{1+s}{1-t}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(8+2t+10s+8r-2rt+6rs+2ts+3s^2-t^2\right).\end{aligned}$$

- Para $n = 1$, $m = 0$ y $q = 1$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{101}(r,s,t) &= P_1^{0,0}(\eta_1)P_0^{3,0}(\eta_2)P_1^{4,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)\\
&= \eta_1\left(3+2\eta_3\right)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^2\\
&= \frac{(1-t)(3+2t)}{2}\left(-2\left(\frac{1+r}{s+t}\right)-1\right)\left(1-\left(\frac{1+s}{1-t}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(6+7t+6r+4rt+3s+2st+2t^2\right).
\end{aligned}$$

- Para $n = 0$, $m = 1$ y $q = 1$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{011}(r,s,t) &= P_0^{0,0}(\eta_1)P_1^{1,0}(\eta_2)P_1^{4,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^0\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(3+\eta_2\right)\left(3+2\eta_3\right)\left(1-\eta_3\right)\\
&= \frac{(1-t)(3+2t)}{2}\left(2+2\left(\frac{1+s}{1-t}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(6+t+3s+2st-2t^2\right).
\end{aligned}$$

- Para $n = 2$, $m = 0$ y $q = 0$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{200}(r,s,t) &= P_2^{0,0}(\eta_1)P_0^{5,0}(\eta_2)P_0^{6,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^2\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{16}\left(24\eta_1^2-8\right)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^2\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^2\\
&= \left(\frac{3}{2}\left(-2\left(\frac{1+r}{s+t}\right)-1\right)^2-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1+s}{1-t}\right)\right)^2\left(\frac{1-t}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left(6+12r+6r^2+6s+6t+6rs+6rt-s^2-2st-t^2\right).
\end{aligned}$$

- Para $n = 0$, $m = 2$ y $q = 0$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{020}(r,s,t) &= P_0^{0,0}(\eta_1)P_2^{1,0}(\eta_2)P_0^{6,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^0\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{36}\left(\left(4+\frac{5!}{2!}\eta_2\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\eta_2}{2}\right)-20\right)\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{36}\left(27+22t-19t^2+76s-16st+30s^2\right).
\end{aligned}$$

- Para $n = 0$, $m = 0$ y $q = 2$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{002}(r,s,t) &= P_0^{0,0}(\eta_1)P_0^{1,0}(\eta_2)P_2^{2,0}(\eta_3)\left(\frac{1-\eta_2}{2}\right)^0\left(\frac{1-\eta_3}{2}\right)^0 \\
&= \frac{1}{64}\left(\left(20+\frac{6!}{3!}\eta_3\right)(2+\eta_3)-36\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(1+65t+30t^2\right).
\end{aligned}$$

Por lo anterior, la base es la siguiente

$$\begin{aligned}
B_{3D} &:= \{p_1,\cdots,p_{10}\} \\
&:= \Bigg\{1, \frac{1}{2}(2+2r+s+t), \frac{1}{4}(2-t+s), 2+t, \\
&\quad \frac{1}{4}\left(8+2t+10s+8r-2rt+6rs+2ts+3s^2-t^2\right) \\
&\quad \frac{1}{2}\left(6+7t+6r+4rt+3s+2st+2t^2\right), \frac{1}{2}\left(6+t+3s+2st-2t^2\right), \\
&\quad \frac{1}{4}\left(6+12r+6r^2+6s+6t+6rs+6rt-s^2-2st-t^2\right), \\
&\quad \frac{1}{36}\left(27+22t-19t^2+76s-16st+30s^2\right), \frac{1}{16}\left(1+65t+30t^2\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Las ventajas que nos proporciona el uso de bases de Dubiner para definir los espacios de aproximación que usamos en la implementación numérica del método HDG, están asociadas con el tipo de matrices que conforman los sistemas que se resuelven, las cuales son matrices bien condicionadas. Además, es posible ejecutarlo para diferentes grados polinomiales sin modificar su estructura cada vez que se cambia el grado, como en el caso de las bases nodales.

En [45] pueden consultarse comparaciones entre bases nodales y bases de Dubiner.

Conclusiones

En este trabajo inicialmente desarrollamos un análisis de error de un método HDG propuesto para una versión simplificada del problema de generación de energía en una celda fotovoltaica. Para corroborar los resultados de convergencia teóricos realizamos experimentos numéricos en un dominio correspondiente a un periodo de una celda no corrugada y otro en un periodo de una celda con una corrugación. Aunque el modelo estudiado no es el que más se aproxima al real porque imponemos una condición tipo Dirichlet sobre toda la frontera del dominio, lo catalogamos como una base confiable debido a que los resultados teóricos y numéricos que obtuvimos fueron óptimos.

Para acercarnos un poco al modelo real realizamos un estudio similar al inicial pero para un problema con condiciones cuasi-periódicas en las fronteras laterales del dominio truncado y una condición tipo Dirichlet en la parte superior e inferior. En el análisis de este problema se puede observar que la definición de los flujos numéricos no coincide con la que usamos en el problema con condición tipo Dirichlet, lo cual genera cambios en las ecuaciones del esquema HDG, los espacios en los cuales buscamos las aproximaciones de las variables del problema y la definición de los proyectores ortogonales. En este caso, los órdenes de convergencia teóricos que presentamos también son óptimos.

Consideramos que las rutinas que empleamos para verificar los resultados teóricos que obtuvimos poseen una buena estructura, pero debido a que almacenamos la información de los bloques en arreglos que aumentan a medida que incrementamos la cantidad de elementos entonces los tiempos y la memoria que se requieren para obtener los ordenes de convergencia y los errores, limitan la cantidad de experimentos numéricos que podemos realizar, sin embargo, teniendo en cuenta la disminución inherente en los grados de libertad que poseen los métodos HDG, pudimos trabajar con mallas mucho más pequeñas de las que hubiésemos podido utilizar en otros métodos tipo DG.

Finalmente, proponemos un esquema HDG para un problema con condiciones cuasi-periódicas y de radiación, el cual es considerado como el mejor modelo para describir la generación de energía en celdas fotovoltaicas y resulta totalmente inédito hasta nuestro conocimiento. Debido a que el análisis de error a priori del esquema HDG en este caso,

difiere a lo realizado para los casos anteriores, mostramos solo unas etapas del proceso y lo demás constituirá trabajo futuro. No conocemos trabajos culminados que incluyan estudios de este tipo de problemas,pero somos confidentes en pensar que los órdenes de convergencia resultarán óptimos.

Bibliografía

[1] Douglas N Arnold, Franco Brezzi, Bernardo Cockburn, and L Donatella Marini. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 39(5):1749–1779, 2002.

[2] Sebastian Bauer, Dirk Pauly, and Michael Schomburg. The maxwell compactness property in bounded weak lipschitz domains with mixed boundary conditions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 48(4):2912–2943, 2016.

[3] Jean-Pierre Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2):185–200, 1994.

[4] Jean-Pierre Berenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 127(2):363–379, 1996.

[5] Alfredo Bermúdez, Luis Hervella-Nieto, Andrés Prieto, R Rodrı, et al. An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems. *Journal of Computational Physics*, 223(2):469–488, 2007.

[6] Andrea Bonito, Jean-Luc Guermond, and Francky Luddens. Regularity of the Maxwell equations in heterogeneous media and Lipschitz domains. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 408(2):498–512, 2013.

[7] Susanne Brenner and Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2007.

[8] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[9] Rommel Bustinza, Bibiana Lopez-Rodriguez, and Mauricio Osorio. An a priori error analysis of an HDG method for an eddy current problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(7):2795–2810, 2018.

[10] Gang Chen, Jintao Cui, and Liwei Xu. Analysis of hybridizable discontinuous Galerkin finite element method for time-harmonic Maxwell's equations part I : Zero frequency. *arXiv preprint arXiv:1805.09291*, 2018.

[11] Huangxin Chen, Weifeng Qiu, Ke Shi, and Manuel Solano. A superconvergent HDG method for the Maxwell equations. *Journal of Scientific Computing*, 70(3):1010–1029, 2017.

[12] Bernardo Cockburn, Jayadeep Gopalakrishnan, and Raytcho Lazarov. Unified hybridization of discontinuous galerkin, mixed, and continuous galerkin methods for second order elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2):1319–1365, 2009.

[13] Bernardo Cockburn, Jayadeep Gopalakrishnan, and Francisco-Javier Sayas. A projection-based error analysis of HDG methods. *Mathematics of Computation*, 79(271):1351–1367, 2010.

[14] Martin Costabel, Monique Dauge, and Serge Nicaise. Singularities of maxwell interface problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(3):627–649, 1999.

[15] Jintao Cui and Wujun Zhang. An analysis of hdg methods for the helmholtz equation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 34(1):279–295, 2013.

[16] Daniele Antonio Di Pietro and Alexandre Ern. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, volume 69. Springer Science & Business Media, 2011.

[17] Xiaobing Feng, Peipei Lu, and Xuejun Xu. A hybridizable discontinuous Galerkin method for the time-harmonic Maxwell equations with high wave number. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 16(3):429–445, 2016.

[18] Paolo Fernandes and Gianni Gilardi. Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 7(07):957–991, 1997.

[19] Zhixing Fu, Luis F Gatica, and Francisco-Javier Sayas. Matlab tools for HDG in three dimensions. *arXiv preprint arXiv:1305.1489*, 2013.

[20] Gabriel N Gatica. *Introducción al análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Reverté, 2014.

[21] Gabriel N Gatica. A simple introduction to the mixed finite element method. *Theory and Applications. Springer Briefs in Mathematics. Springer, London*, 2014.

[22] Boris Gralak. Exact modal methods. In Evgeny Popov, editor, *Gratings: Theory and Numeric Applications*, chapter 10. Université dÁix-Marseille, Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, Institut Fresnel UMR 7249,13397 Marseille, France, 2014.

[23] Gérard Granet, Lala Bakonirina Andriamanampisoa, Karyl Raniriharinosy, Ana Maria Armeanu, and Kofi Edee. Modal analysis of lamellar gratings using the moment method with subsectional basis and adaptive spatial resolution. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(6):1303–1310, Jun 2010.

[24] Roland Griesmaier and Peter Monk. Error analysis for a hybridizable discontinuous Galerkin method for the Helmholtz equation. *Journal of Scientific Computing*, 49(3):291–310, 2011.

[25] Thomas Hagstrom and Stephen Lau. Radiation boundary conditions for maxwell's equations: a review of accurate time-domain formulations. *Journal of Computational Mathematics*, pages 305–336, 2007.

[26] Martin Huber, Joachim Schöberl, Astrid Sinwel, and Sabine Zaglmayr. Simulation of diffraction in periodic media with a coupled finite element and plane wave approach. *SIAM journal on scientific computing*, 31(2):1500–1517, 2009.

[27] LNT Huynh, NC Nguyen, J Peraire, and BC Khoo. A high-order hybridizable discontinuous galerkin method for elliptic interface problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(2):183–200, 2013.

[28] Robert C Kirby. Singularity-free evaluation of collapsed-coordinate orthogonal polynomials. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 37(1):5, 2010.

[29] Philippe Lalanne and G. Michael Morris. Highly improved convergence of the coupled-wave method for tm polarization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(4):779–784, Apr 1996.

[30] Liang Li, Stephane Lanteri, and Ronan Perrussel. Numerical investigation of a high order hybridizable discontinuous galerkin method for 2d time-harmonic maxwell's equations. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 32(3):1112–1138, 2013.

[31] Liang Li, Stéphane Lanteri, and Ronan Perrussel. A hybridizable discontinuous galerkin method combined to a schwarz algorithm for the solution of 3d time-harmonic maxwell's equation. *Journal of Computational Physics*, 256:563–581, 2014.

[32] Liang Li, Stéphane Lanteri, and Ronan Perrussel. A class of locally well-posed hybridizable discontinuous galerkin methods for the solution of time-harmonic maxwell's equations. *Computer Physics Communications*, 192:23–31, 2015.

[33] Stefan Alexander Maier. *Plasmonics: fundamentals and applications.* Springer Science & Business Media, 2007.

[34] Jens Markus Melenk and Tobias Wurzer. On the stability of the boundary trace of the polynomial l2-projection on triangles and tetrahedra. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(4):944–965, 2014.

[35] Peter Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations.* Oxford University Press, 2003.

[36] Ngoc Cuong Nguyen, Jaume Peraire, and Bernardo Cockburn. Hybridizable discontinuous Galerkin methods for the time-harmonic Maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, 230(19):7151–7175, 2011.

[37] Richard Pasquetti and Francesca Rapetti. Spectral element methods on triangles and quadrilaterals: comparisons and applications. *Journal of Computational Physics*, 198(1):349–362, 2004.

[38] Cinthya Rivas, Rodolfo Rodríguez, and Manuel E Solano. A perfectly matched layer for finite-element calculations of diffraction by metallic surface-relief gratings. *Wave Motion*, 78:68–82, 2018.

[39] Amretashis Sengupta and Chandan Kumar Sarkar. *Introduction to nano: basics to nanoscience and nanotechnology.* Springer, 2015.

[40] VK Sethi, Mukesh Pandey, and Ms Priti Shukla. Use of nanotechnology in solar pv cell. *International journal of chemical engineering and applications*, 2(2):77, 2011.

[41] Manuel E Solano, Muhammad Faryad, Akhlesh Lakhtakia, and Peter B Monk. Comparison of rigorous coupled-wave approach and finite element method for photovoltaic devices with periodically corrugated metallic backreflector. *JOSA A*, 31(10):2275–2284, 2014.

[42] Gabor Szeg. *Orthogonal polynomials*, volume 23. American Mathematical Soc., 1939.

[43] Allen Taflove and Susan C Hagness. *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method.* Artech house, 2005.

[44] F. Vidal-Codina, N.C. Nguyen, S.-H. Oh, and J. Peraire. A hybridizable discontinuous galerkin method for computing nonlocal electromagnetic effects in three-dimensional metallic nanostructures. *Journal of Computational Physics*, 355:548 – 565, 2018.

[45] D Wirasaet, S Tanaka, EJ Kubatko, JJ Westerink, and C Dawson. A performance comparison of nodal discontinuous galerkin methods on triangles and quadrilaterals. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 64(10-12):1336–1362, 2010.

[46] Deyue Zhang and Fuming Ma. A finite element method with perfectly matched absorbing layers for the wave scattering by a periodic chiral structure. *Journal of Computational Mathematics*, pages 458–472, 2007.