Es claro que : $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(n,m) \longmapsto n+m$ $\qquad (n,m) \longmapsto n \cdot m = nm$

donde $+$ y $\cdot$ son la suma y el producto usuales entre números enteros, son leyes de composición internas binarias en $\mathbb{Z}$, que son conmutativas y asociativas; sin embargo: $- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(n,m) \longmapsto n-m = n+(-m)$ es

operación binaria en $\mathbb{Z}$ que no es ni conmutativa, ni asociativa, ya que por ejemplo: $1-2 = -1 \neq 1 = 2-1$, es decir, $-(1,2) \neq -(2,1)$

$$(1-2)-3 = -4 \neq 2 = 1-(2-3) \;.$$

Si $\boxed{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, también: $\div \; \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$
$\mathbb{R} - \{0\}$

$(a,b) \longmapsto a \div b = a \cdot b^{-1}$. es ley de

composición interna binaria en $\mathbb{R}^*$ que no es ni conmutativa, ni asociativa.

2.- Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) / \alpha_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\ldots,n\}$

En $\mathbb{R}^n$ la igualdad está definida así:

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ si y sólo si $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i=1,2,\ldots,n$.

Una operación binaria en $\mathbb{R}^n$ es, $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha + \beta$.

donde si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ entonces:

$$\alpha + \beta \underset{\uparrow}{=} (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$$

Suma componente a componente.

Esta operación binaria en $\mathbb{R}^n$ se dirá la suma usual en $\mathbb{R}^n$.

NOTA: las sumas $\alpha_i + \beta_i$, $i=1,2,\ldots,n$. son sumas de números reales y $+$ denota aquí la suma usual en $\mathbb{R}$.

3.- Sea $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i / a_i \in \mathbb{R}, i=0,\ldots,n \right\}$. P_n es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ en la indeterminada x que tienen grado a lo más n.

En P_n la igualdad está definida así:

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ si y solo si $a_i = b_i$ para todo $i=0,\dots,n$.

Una ley de composición interna binaria en P_n, es:

$$+ : P_n \times P_n \longrightarrow P_n$$
$$(f, g) \longmapsto f+g,$$

donde si $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, entonces $f+g = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i$.

Las sumas a_i+b_i, $i=0,\dots,n$ son sumas de numeros reales, y $+$ denota aquí la suma usual en $\mathbb{R}$.

La operación binaria definida en P_n es la suma usual de polinomios.

¿Por qué el producto usual de polinomios no es ley de composición interna binaria en P_n?

4.- Sea S un conjunto no-vacío y $\mathcal{F}(S) = \{ f : S \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f \text{ es función} \}$

En $\mathcal{F}(S)$ la igualdad está definida así:

Para $f, g \in \mathcal{F}(S)$, $f = g$ si y solo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$.

Una operación binaria en $\mathcal{F}(S)$ es: $+ : \mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$

$$(f, g) \longmapsto f+g,$$

donde para $f, g \in \mathcal{F}(S)$, $f+g : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Para $x \in S$, $f(x)$ y $g(x)$ son numeros reales, por tanto $f(x)+g(x)$ es una suma de numeros reales, $+$ denota aquí la suma usual en $\mathbb{R}$.

Veamos que en efecto, $+$ es operación binaria en $\mathcal{F}(S)$; para esto hay que mostrar que $+$ es función.

i) Sean $f, g \in \mathcal{F}(S)$, veamos que $f+g \in \mathcal{F}(S)$, es decir, veamos que

$$f+g : S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x),$$ es función.

a) Como $f, g \in \mathcal{F}(S)$, entonces $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: S \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones, así que cualquiera sea $x \in S$, $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$, y entonces $f(x)+g(x) = (f+g)(x) \in \mathbb{R}$.

b) Sean $x_1, x_2 \in S$ tales que $x_1 = x_2$. Entonces $f(x_1) = f(x_2)$ y $g(x_1) = g(x_2)$ (por ser $f, g \in \mathcal{F}(S)$), entonces:

$f(x_1)+g(x_1) = f(x_2)+g(x_2)$ (por ser $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función),

esto es: $(f+g)(x_1) = (f+g)(x_2)$.

De a) y b) se concluye $f+g \in \mathcal{F}(S)$.

ii) Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(S)$ tales que $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$. Veamos que $f_1+g_1 = f_2+g_2$. Para esto, sea $x \in S$ cualquiera.

Como $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$, entonces $f_1 = f_2$ y $g_1 = g_2$, y por la definición de igualdad en $\mathcal{F}(S)$, entonces $f_1(x) = f_2(x)$ y $g_1(x) = g_2(x)$, entonces $f_1(x)+g_1(x) = f_2(x)+g_2(x)$, esto es, $(f_1+g_1)(x) = (f_2+g_2)(x)$, lo que significa que $f_1+g_1 = f_2+g_2$.

Total: $+ : \mathcal{F}(S)\times\mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$
$$(f, g) \longmapsto f+g,$$ es operación binaria en $\mathcal{F}(S)$.

$f+g$ se dirá la suma de las funciones f y g, y $+$ la suma usual en $\mathcal{F}(S)$

Otra ley de composición interna binaria en $\mathcal{F}(S)$ es el producto:

$$\cdot : \mathcal{F}(S)\times\mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$$
$$(f, g) \longmapsto f\cdot g$$

donde para $f, g \in \mathcal{F}(S)$, $f \cdot g : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x).$$

Para $x \in S$, $f(x)g(x)$ es el producto usual de los números reales $f(x)$ y $g(x)$. (Verifíquese).

Cuando $S = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(S)$ lo notamos simplemente $\mathcal{F}$, así que:

$$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función} \}$$

En $\mathcal{F}$ tenemos además de la suma y el producto usuales de funciones, otra ley de composición interna binaria:

$$\circ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$(f, g) \longmapsto f \circ g,$$

donde $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

$f \circ g$ se dice la compuesta de f y g ($f \circ g$ se lee "f compuesto g") y $\circ$ es la composición usual de funciones (Ejercicio).

DEFINICION (LEY DE COMPOSICION EXTERNA BINARIA). Sea E un conjunto no-vacío. Una ley de composición externa binaria en E, ó sobre E, con conjunto auxiliar $K \neq \emptyset$, es cualquier función de $K \times E$ hacia E.

NOTACION.- Si $\cdot : K \times E \longrightarrow E$ es una ley de composición externa binaria en E, entonces para $a \in K$ y $\alpha \in E$, $\cdot(a, \alpha)$ se notará $a \cdot \alpha$.

Por ser $\cdot$ una función se tendrá:

i) Cualesquiera sean $a \in K$ y $\alpha \in E$, $a \cdot \alpha \in E$, es decir, mediante $\cdot$ podemos obtener a partir de un elemento de K y uno de E

con K posiblemente distinto de E, un elemento de E. Lo de EXTERNA, se debe entonces a la participación de elementos fuera de E, cuando K tenga elementos que no están en E.

ii) Cualesquiera sean $a, b \in K$ y $\alpha \in E$, $a = b$ implica $a \cdot \alpha = b \cdot \alpha$.

iii) Cualesquiera sean $a \in K$ y $\alpha, \beta \in E$, $\alpha = \beta$ implica $a \cdot \alpha = a \cdot \beta$.

EJEMPLOS DE LEYES DE COMPOSICION EXTERNA BINARIAS.

1.- Toda ley de composición interna binaria sobre un conjunto no-vacío E puede ser considerada, si así conviene, una ley de composición externa binaria sobre E. Así que los ejemplos dados para leyes de composición interna binarias pueden ser considerados ejemplos de leyes de composición externa binarias.

2.- Tomando $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$, una ley de composición externa binaria en $\mathbb{R}^n$ es:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(a, \alpha) \longmapsto a \cdot \alpha ,$$

donde si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $a \cdot \alpha = (a\alpha_1, a\alpha_2, \dots, a\alpha_n)$, $a \cdot \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ es el producto en $\mathbb{R}$ de a y α_i.

Veamos que $\cdot$ es ley de composición externa binaria en $\mathbb{R}^n$.

i) Es claro que si $a \in \mathbb{R}$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $a \cdot \alpha = (a\alpha_1, a\alpha_2, \dots, a\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ tales que $(a, \alpha) = (b, \beta)$. Veamos que $a \cdot \alpha = b \cdot \beta$.

Como $(a, \alpha) = (b, \beta)$, entonces $a = b$ y $\alpha = \beta$. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, entonces $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ (por definición de igualdad en $\mathbb{R}^n$) y entonces $a\alpha_1 = b\beta_1$, $a\alpha_2 = b\beta_2, \ldots, a\alpha_n = b\beta_n$, así que: $(a\alpha_1, a\alpha_2, \ldots, a\alpha_n) = (b\beta_1, b\beta_2, \ldots, b\beta_n)$, esto es: $a\cdot\alpha = b\cdot\beta$.

3.- Tomando $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}$ una ley de composición externa binaria en $\mathbb{R}$ es:

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(r, a) \longmapsto r.a = ra,$$

donde ra es el producto en $\mathbb{R}$ de a y r.

Será $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$(a, r) \longmapsto a\cdot r = ar$ una ley de composición externa binaria en $\mathbb{Q}$?

4.- Tomando $K = \mathbb{R}$, $E = P_n$, una ley de composición externa binaria en P_n es:

$$\cdot : \mathbb{R} \times P_n \longrightarrow P_n$$
$$(a, f) \longmapsto a\cdot f$$

donde si $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, entonces $a\cdot f = \sum_{i=0}^{n} (aa_i) x^i$, aa_i, $i = 0, 1, \ldots n$ es el producto usual en $\mathbb{R}$ de a y a_i.

5.- Los siguientes son ejemplos de leyes de composición externa binarias en $\mathbb{I}$:
($\mathbb{I}$: conjunto de números irracionales)

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} \quad ; \quad \cdot : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$
$$(a, \alpha) \longmapsto a + \alpha \qquad\qquad (a, \alpha) \longmapsto a\cdot\alpha$$

$$- : \mathbb{Q} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} \quad ; \quad \div : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$$
$$(a, \alpha) \longmapsto a - \alpha \qquad\qquad (a, \alpha) \longmapsto a \div \alpha = \frac{a}{\alpha}.$$

donde $+, \cdot, -, \div$ son las operaciones usuales entre números reales.

6.- Tomando $K = \mathbb{R}$, $E = \mathcal{F}(S)$ una ley de composición externa binanà en $\mathcal{F}(S)$ es:

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathcal{F}(S) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$$
$$(a,\ f) \longmapsto a\cdot f$$

donde para $a\in\mathbb{R}$ y $f\in\mathcal{F}(S)$, $a\cdot f : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (a\cdot f)(x) = af(x)$$

con $af(x)$ el producto usual en $\mathbb{R}$ de los reales a y $f(x)$.

ESTRUCTURA ALGEBRAICA.

Una estructura algebráica sobre un conjunto no-vacío E está dada por una ó varias leyes de composición (sobre E) internas ó externas que satisfacen una lista de propiedades que se acostumbran llamar AXIOMAS de la respectiva estructura y que son simplemente los puntos de partida para el estudio de dicha estructura.

Los tipos principales de estructuras algebráicas son los siguientes:

La de GRUPO, con una ley de composición interna; tiene como fuente el conjunto de todas las permutaciones de un conjunto con la ley de composición interna "producto o composición de permutaciones".

La de ANILLO, con dos leyes de composición internas; tiene como fuente a $\mathbb{Z}$, conjunto de números enteros, con la suma, $+$, y el producto, $\cdot$, usuales de enteros.

La de CUERPO ó CAMPO, caso particular de anillo, tiene como modelo a $\mathbb{R}$ con la suma, $+$, y el producto, $\cdot$, usuales de números reales.

La de ESPACIO VECTORIAL, con dos leyes de composición, una interna notada $+$, y otra externa notada, $\cdot$; tiene como fuente el conjunto de los vectores geométricos en el plano con las leyes de composición "suma de vectores" y "multiplicación de un vector por un número". Haremos un estudio elemental de las estructuras de grupo y anillo.

CAPITULO I: PERMUTACIONES

DEFINICION.- Sea A un conjunto no-vacío. Una permutación en A o sobre A es una biyección de A en A.

Una permutación se denota comunmente con la letra s o una letra siguiente a s; también se usan las letras griegas $\sigma, \tau, \ldots$, para denotar permutaciones.

El conjunto de todas las permutaciones sobre un conjunto A se acostumbra notar S_A, y en el caso en que A sea finito con n-elementos escribimos S_n.

Consideremos el conjunto S_n de las permutaciones sobre el conjunto $A_n=\{1,2,\ldots,n\}$.

Sea $s \in S_n$. Para cada entero $i \in A_n$, $s(i)$ es un entero en A_n, y como s es uno a uno, $s(i)=s(j)$ si y solo si $i=j$. Como s también es sobre, se tiene que $\{s(1), s(2), \ldots, s(n)\} = A_n$.

Por consiguiente, el efecto de s sobre A_n puede ser visto como un reordenamiento de los enteros $1,2,\ldots,n$.

Una forma de escribir la permutación s es:

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i \ldots & n \\ s(1) & s(2) & \ldots & s(i) \ldots & s(n) \end{pmatrix}$$

donde la imagen $s(i)$ de i bajo s está escrita directamente debajo de i.

Por ejemplo,

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

es la permutación en A_3 definida por $s(1)=2$, $s(2)=3$ y $s(3)=1$.

Es claro que cualquier arreglo de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$$