

### CAPITULO III

#### SOLUCIONES ESPECIALES DE LA ECUACION DE SEGUNDO ORDEN

17. ECUACION EN LA CUAL FALTA LA DERIVADA DE PRIMER ORDEN Y UNA DE LAS VARIABLES EN FORMA EXPLICITA. Para ambos tipos de

ecuaciones se hace  $\frac{dy}{dx} = p$  y se deriva con respecto a la variable

presente, obteniéndose,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

ó,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

según que falte la variable dependiente o la variable independiente, respectivamente. En cualquiera de los casos se tendrá, mediante la substitución respectiva, una ecuación de primer orden y de variables separables, como se demuestra a continuación.

$$\text{Sea } \frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \quad \text{y por lo tanto,} \quad \frac{dp}{dx} = F(x)$$

$$\therefore p = \frac{dy}{dx} = C' + \int F(x) dx$$

y finalmente,

$$y = C + C'x + \int \int F(x) dx \cdot dx \quad (63)$$

solución que podemos expresar también en función de integrales sencillas, aplicando el sistema de integración por partes.

$$\begin{aligned} u &= \int F(x) dx & \therefore & du = F(x) dx \\ dv &= dx & \therefore & v = x \end{aligned}$$

valores que reemplazados en la ecuación (63) nos dan;

$$y = C + C'x + x \int F(x) dx - \int xF(x) dx \quad (64)$$

En cambio, cuando sea  $x$  la variable ausente, se tendrá:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y) \quad \text{y por lo tanto,} \quad p \frac{dp}{dy} = F(y)$$

integrando,

$$\frac{p^2}{2} = C' + \int F(y) dy$$

$$p^2 = C' + 2 \int F(y) dy$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{C' + 2 \int F(y) dy}$$

$$\therefore x = C + \int \frac{dy}{\sqrt{C' + 2 \int F(y) dy}} \quad (65)$$

Ejemplo 1º

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen} x = \frac{dp}{dx}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = C' - \cos x$$

$$y = C + C'x - \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 2º

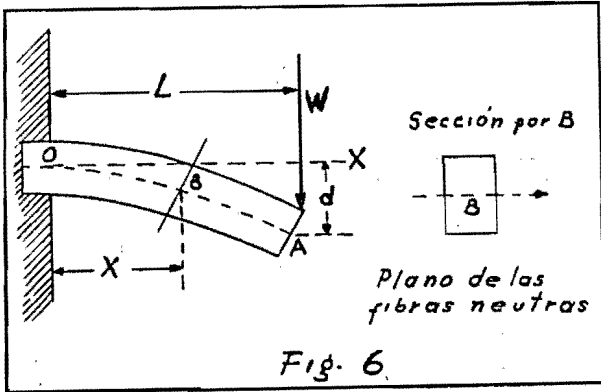
**Curva elástica.** Se llama curva elástica de una viga a la curva que adopta el eje centroidal de una viga cargada en cualquier forma, siempre que el esfuerzo unitario, en el punto más esforzado de ella, no exceda del límite proporcional del material. En otras palabras, es la curva que adoptan las fibras neutras de una viga.



En resistencia de materiales se demuestra que el radio de curvatura, en un punto cualquiera de la curva elástica, vale

$$r = \frac{EI}{M}$$

fórmula en la cual  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  el momento de inercia de la sección con respecto al eje determinado por las fibras neutras en el punto que se considera, y  $M$  el momento de las fuerzas externas que obran sobre la viga, con respecto al plano de la sección.



Sea una viga  $OA$  de longitud  $L$ , fija por una extremidad y cargada con un peso  $W$  sobre el extremo libre.

Como se demuestra en el cálculo,

$$r = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2)$$

Si la deflexión en la viga es muy pequeña, como ocurre en las estructuras corrientes, el valor de la primera derivada, en cualquier punto de la curva  $OBA$ , es tan pequeño que el numerador de (2) es

prácticamente igual a la unidad pudiendo por consiguiente tomarse como valor del radio de curvatura,

$$r = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (3)$$

Igualando esta última ecuación con la ecuación (1) se tendrá:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4)$$

Para el ejemplo ilustrado en la figura  $M = W(L-x)$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W(L-x)}{EI} = \frac{dp}{dx} \quad (5)$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{W}{EI} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C' \quad (6)$$

$$y = \frac{W}{EI} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C'x + C \quad (7)$$

La ecuación (7) es la solución general de la (5) pero si se toma como eje de las  $X$  a la horizontal que pasa por 0, podemos determinar que ambas constantes  $C'$  y  $C$  son nulas, puesto que, en tal

caso, para  $x = 0$ ,  $y = 0$  y además  $\frac{dy}{dx} = 0$

La máxima deflexión de la viga, como es evidente tendrá lugar en su extremidad y valdrá,

$$d = \frac{W}{EI} \left( \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right) = \frac{WL^3}{3EI}$$

## Ejemplo 3º

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2y$$

$$p \frac{dp}{dy} = a^2y$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{a^2y^2}{2} + C'$$

haciendo  $C' = \frac{k^2}{2}$  y reemplazando,

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2y^2 + k^2} = a \sqrt{y^2 + k^2/a^2}$$

$$x = C + 1/a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + (k/a)^2}}$$

$$x = C' + (1/a) \operatorname{Ln} (ay + \sqrt{a^2y^2 + k^2}) - (1/a) \operatorname{Ln} a$$

Pero siendo  $(1/a) \operatorname{Ln} a$ , una constante, podemos refundirla con  $C$ , obteniendo finalmente,

$$x = C'' + (1/a) \operatorname{Ln} (ay + \sqrt{a^2y^2 + k^2})$$

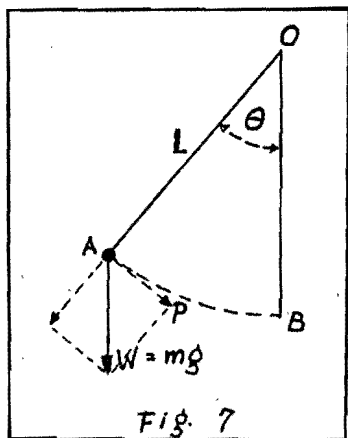
Puede expresarse a  $y$  en función de  $x$  procediendo como lo hicimos en el ejemplo 1 de las ecuaciones tratadas en el artículo 12, artificio que repetiremos por ser de común ocurrencia.

$$e^{ax-C} = ay + \sqrt{a^2y^2 + k^2}$$

$$1/e^{ax-C} = e^{-ax+C} = \frac{1}{ay + \sqrt{a^2y^2 + k^2}} = \frac{ay - \sqrt{a^2y^2 + k^2}}{-k^2}$$

sumando las dos ecuaciones anteriores

$$e^{ax-C} - k^2 e^{-ax+C} = 2ay$$



Ejemplo 4. Determinación del período de oscilación de un péndulo matemático.

Sea A una posición de la lenteja de un péndulo simple de longitud  $L$ . La fuerza que tiende a restituirlo a la posición de equilibrio B, vale,

$$P = mg \operatorname{sen} \theta$$

Según las leyes del movimiento de Newton,

$$a = F/m$$

y además, como se ve en el cálculo,

$$a = d^2s/dt^2$$

por consiguiente,

$$d^2s/dt^2 = -g \operatorname{sen} \theta \quad (1)$$

la razón del signo es que la velocidad decrece cuando el espacio aumenta y viceversa.

Como  $s = L\theta$ ,  $d^2s/dt^2 = L d^2\theta/dt^2$  valor que substituído en (1) nos da,

$$d^2\theta/dt^2 = - (g/L) \operatorname{sen} \theta \quad (2)$$

Si la amplitud de la oscilación es tan pequeña que podamos tomar el arco en lugar del seno, la ecuación (2) se nos convierte en,

$$d^2\theta/dt^2 = -g\theta/L \quad (3)$$

$$d\theta/dt = p \quad \therefore \quad dp/dt = (dp/d\theta) (d\theta/dt) = p (dp/d\theta)$$

$$2p dp = - (2g\theta/L) d\theta$$

$$p^2 = c^2 - g\theta^2/L$$

$$p = d\theta/dt = \sqrt{c^2 - g\theta^2/L} \quad (4)$$

$$\therefore \quad dt = d\theta / \sqrt{c^2 - (\sqrt{g/L} \theta)^2}$$

$$dt = d\theta / c \sqrt{1 - (\sqrt{g/L} \theta/c)^2}$$

integrando obtenemos como solución general de la ecuación (3)

$$t = C' + \sqrt{L/g} \operatorname{sen}^{-1}(\theta/c) \sqrt{g/L} \quad (5)$$

Como en (4)  $d\Theta/dt = w$ , y ésta es cero en el instante de soltarlo, es decir, cuando  $\Theta = -\alpha$  se tendrá:

$$0 = \sqrt{c^2 - g\alpha^2/L}$$

$$\therefore c = \alpha \sqrt{g/L}$$

valor que substituído en (5) nos da,

$$t = C' + \sqrt{L/g} \operatorname{sen}^{-1} \Theta/\alpha$$

Tomando como posición en el instante  $t=0$ , a la posición indicada por  $B$ , en la figura, tendremos que  $t=0$  para  $\Theta=0$  y por lo tanto  $C'=0$  con lo cual la ecuación anterior se nos reduce a,

$$t = \sqrt{L/g} \operatorname{sen}^{-1} \Theta/\alpha$$

Finalmente, si hacemos  $\Theta=\alpha$ , obtendremos el tiempo requerido para media oscilación simple

$$t = \sqrt{L/g} \operatorname{sen}^{-1} 1 = (\pi/2) \sqrt{L/g}$$

y para la oscilación completa

$$T = 2t = \pi \sqrt{L/g}$$

18. ECUACION DEL ENESIMO ORDEN QUE CARECE DE LA VARIABLE DEPENDIENTE Y DE DERIVADAS DE ORDEN DISTINTO AL ENESIMO. Aunque estas ecuaciones sean de orden mayor del segundo, pueden resolverse aplicando sucesivamente el artificio que empleamos en las ecuaciones del tipo anterior.

$$\text{Sea, } d^n y/dx^n = F(x) \quad (66)$$

Haciendo  $d^{n-1}y/dx^{n-1} = p$ , derivando con respecto a  $x$  se obtiene,

$$d^n y/dx^n = dp/dx = F(x)$$

$$\therefore p = d^{n-1}y/dx^{n-1} = C_1 + \int F(x) dx$$

análogamente,

$$d^{n-2}y/dx^{n-2} = p \quad \therefore d^{n-1}y/dx^{n-1}$$

$$= dp/dx = C_1 + \int F(x) dx$$

$$p = d^{n-2}y/dx^{n-2} = C_2 + C_1 x + \int \int F(x) (dx)^2$$

Procediendo de manera idéntica obtendríamos,

$$y = C_n + C_{n-1} x + C_{n-2} x^2/2! \dots$$

$$+ C_1 x^n/n! + \underbrace{\int \int \dots \int F(x) (dx)^n}_{n \text{ integrales}} \quad (67)$$

## EJERCICIOS

1.  $d^2y/dx^2 = e^x$
2.  $d^2y/dx^2 + e^y = 0$
3.  $d^2s/dt^2 = -w^2s$
4.  $d^2s/dt^2 + k^2/s^2 = 0$
5.  $d^2y/dx^2 = \cos y$
6.  $d^2y/dx^2 = \cos x + \operatorname{sen} x$
7.  $d^4y/dx^4 = x^5 - 3x + e^x$
8.  $d^4y/dx^4 = x e^x$

19. ECUACIONES QUE CARECEN DE AMBAS VARIABLES. Las ecuaciones de la forma,

$$d^2y/dx^2 = F(dy/dx) \quad (68)$$

se resuelven mediante el mismo artificio a saber  $dy/dx = p$ , con lo cual quedan reducidas a la ecuación de variables separables

$$dp/dx = F(p)$$

cuya solución es,

$$x = C_1 + \int dp/F(p) \quad (69)$$

$$y = \int p dx = C_2 + \int p dp/F(p) \quad (70)$$

Por eliminación de  $p$  entre las ecuaciones (69) y (70) se obtendrá la relación entre las dos variables.

Ejemplo 1.

$$d^2y/dx^2 - (dy/dx)^2 - 1 = 0$$

$$d^2y/dx^2 = 1 + (dy/dx)^2$$

$$dp/dx = 1 + p^2 \quad \therefore \quad dx = dp/(1+p^2)$$

$$x + C_1 = \tan^{-1} p \quad (1)$$

$$y = \int p dx = \int p dp/(1+p^2)$$

$$= C_2 + (1/2) \operatorname{Ln} (1+p^2)$$

$$y = \operatorname{Ln} C_3 + \operatorname{Ln} \sqrt{1+p^2} = \operatorname{Ln} C_3 \sqrt{1+p^2} \quad (2)$$

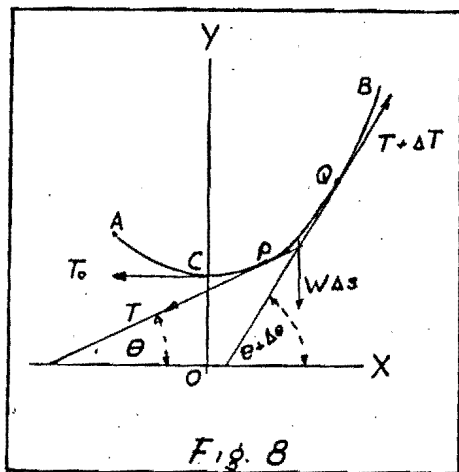
De (1)

$$p = \tan (x + C_1)$$

$$\begin{aligned} \text{De (2)} \quad e^y &= C_3 \sqrt{1 + p^2} \\ &= C_3 \sqrt{1 + \tan^2(x + C_1)} = C_3 \text{Sec}(x + C_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Ecuación de la curva que adopta un cable debido a su propio peso, curva que recibe el nombre de *Catenaria*

Sea un cable suspendido de los puntos *A* y *B* y cuyo peso por unidad de longitud es de *w*. Considerando un elemento del cable de longitud  $\Delta s$ , comprendido entre los puntos *P* y *Q*, tal elemento estará



en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas a saber: su peso  $w\Delta s$ , la acción de la parte *PA* que llamaremos *T*, y la acción de la parte *QB* que llamaremos  $T + \Delta T$ .

Aplicando las condiciones de equilibrio para un sistema de fuerzas concurrentes, obtenemos:

$$\sum F_y = 0 \quad (1) \quad T \sin \theta = (T + \Delta T) \sin (\theta + \Delta \theta) - w \Delta s$$

$$\sum F_x = 0 \quad (2) \quad T \cos \theta = (T + \Delta T) \cos (\theta + \Delta \theta) = T_0$$

Dividiendo una ecuación por la otra,

$$\tan \theta = \tan (\theta + \Delta \theta) - \frac{w \Delta s}{(T + \Delta T) \cos (\theta + \Delta \theta)} \quad (3)$$

De la ecuación (2) se observa que la componente horizontal de la tensión en cualquier punto del cable es constante y será igual por lo tanto a la tensión en el punto *C*; llamamos  $T_0$  a esta tensión. Hecha esta substitución en la ecuación (3) nos queda entonces,

$$\tan \theta = \tan (\theta + \Delta \theta) - w \Delta s / T_0$$

$$w \Delta s / T_0 = \tan (\theta + \Delta \theta) - \tan \theta$$

$$(w/T_0) (\Delta s / \Delta \Theta) = \frac{\tan (\Theta + \Delta \Theta) - \tan \Theta}{\Delta \Theta}$$

$$\lim_{\Delta \Theta \rightarrow 0} \frac{\tan (\Theta + \Delta \Theta) - \tan \Theta}{\Delta \Theta} = \sec^2 \Theta = (w/T_0) (ds/d\Theta) \quad (4)$$

$$\Delta \Theta \rightarrow 0$$

pero,  $\sec^2 \Theta = 1 + \tan^2 \Theta = 1 + (dy/dx)^2$  (5)

y además,  $ds/d\Theta = (ds/dx) (dx/d\Theta) = (dx/d\Theta) \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$  (6)

también  $\Theta = \tan^{-1} (dy/dx)$  ecuación que derivada con respecto a  $x$  nos da:

$$d\Theta/dx = (d^2y/dx^2) / [1 + (dy/dx)^2] \quad (7)$$

reemplazando este último valor en la ecuación (6) tendremos

$$ds/d\Theta = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2} / (d^2y/dx^2) \quad (8)$$

Valor que podríamos haber escrito directamente puesto que  $ds/d\Theta$  nos define el radio de curvatura en un punto cualquiera de una curva. Reemplazando finalmente los valores (5) y (8) en la ecuación (4), obtenemos,

$$d^2y/dx^2 = (w/T_0) \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

como ecuación diferencial de la curva adoptada por el cable, cuya solución es la siguiente:

$$dy/dx = p \quad \therefore \quad dp/dx = (w/T_0) \sqrt{1 + p^2}$$

$$dp/\sqrt{1 + p^2} = (w/T_0) dx$$

$$\text{Ln} (p + \sqrt{1 + p^2}) = wx/T_0 + C$$

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{(wx/T_0 + C)} \quad (9)$$

$$p - \sqrt{1 + p^2} = -e^{-(wx/T_0 + C)} \quad (10)$$

$$p = dy/dx = 1/2 [e^{(wx/T_0 + C)} - e^{-(wx/T_0 + C)}]$$

$$\therefore y = (T_0/2w) [e^{(wx/T_0 + C)} + e^{-(wx/T_0 + C)}] + C_1 \quad (11)$$

Las constantes  $C$  y  $C_1$  pueden determinarse si se conocen las posiciones de los puntos  $A$  y  $B$  en que se fija el cable.

Restando la ecuación (10) de la (9) se obtendría a  $ds/dx$  y sería posible entonces cacular la longitud del cable sin deducir previamente la ecuación (11).

## EJERCICIOS

1.  $d^2y/dx^2 - 4 dy/dx = 0$
2.  $d^2y/dx^2 + 2 dy/dx + 2 = 0$

20. ECUACIONES CON DERIVADA DE PRIMER ORDEN PERO CARENTES DE UNA DE LAS VARIABLES EN FORMA EXPLICITA. Comprende este grupo las ecuaciones de una de las formas

$$d^2y/dx^2 = F(x, dy/dx) \quad \text{ó} \quad d^2y/dx^2 = F(y, dy/dx)$$

Empleando el mismo artificio  $dy/dx = p$  y derivando con respecto a la variable presente, se obtiene, en general, una ecuación diferencial de primer orden perteneciente a alguno de los tipos ya estudiados.

Ejemplo 1º Una zorra parte de cierto punto y corre hacia el norte 300 yds., en donde es alcanzada por un perro que partió de un punto situado a 100 yds., al este del punto de partida de la zorra y que durante toda la carrera corrió directamente hacia ella. ¿Qué camino recorrió el perro si ambos partieron en el mismo instante y cada uno hizo su recorrido con velocidad uniforme?

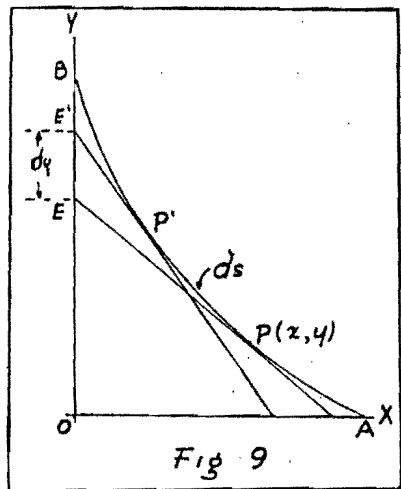
La ecuación de la tangente en un punto cualquiera  $P(x, y)$  de la trayectoria seguida por el perro es,

$$Y - y = f'(x) (X - x)$$

en la cual, si se hace  $X=0$ , nos da la longitud de su intercepto sobre el eje vertical, (fig. 9.)

$$OE = Y = y - xf'(x)$$

ecuación de la cual se obtiene por diferenciación



$$\begin{aligned}
 EE' = dY &= [f'(x) - xf''(x) - f'(x)] dx \\
 &= -x f''(x) dx
 \end{aligned}$$

resultado que se debe multiplicar por  $(-1)$  porque, como puede apreciarse en la figura, para que  $Y$  varíe de cero a  $b$ , la  $x$  debe decrecer desde  $a$  hasta cero, lo que implica que los incrementos  $dy$  y  $dx$  sean de signo contrario. Se tiene entonces,

$$dY = x f''(x) dx \quad (1)$$

$dY$  será el espacio recorrido por la zorra durante el tiempo requerido por el perro para pasar de la posición  $P$  a la  $P'$  describiendo un camino de longitud

$$PP' = ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (2)$$

Como ambos movimientos se realizan con velocidades numéricas constantes, los desplazamientos  $dY$  y  $ds$  deberán ser entre sí como la relación  $m$  de sus velocidades.

$$dY = m ds \quad (3)$$

la substitución de (1) y (2) en (3) nos da la ecuación diferencial del movimiento ejecutado por el perro

$$x f''(x) = m \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \quad (4)$$

Simple consideraciones nos hacen comprender que para que el perro dé alcance a la zorra en un punto  $B$  del eje de las  $Y$ ,  $m$  debe ser menor que la unidad y que si  $m$  es igual o mayor que la unidad, el eje vertical sería asíntota de la curva.

Haciendo  $f'(x) = p$ , se tendrá que  $f''(x) = dp/dx$  valores que substituidos en (4) darán:

$$m = x(dp/dx) / \sqrt{1 + p^2}$$

$$m(dx/x) = dp / \sqrt{1 + p^2}$$

ecuación diferencial cuya solución evidentemente es,

$$\text{Ln } x^m + \text{Ln } C = \text{Ln } Cx^m = \text{Ln } (p + \sqrt{1 + p^2})$$

$$\therefore Cx^m = p + \sqrt{1 + p^2} \quad (5)$$

el valor de  $C$  puede deducirse observando que para

$$x = +a, \quad a = 100 \text{ yds.}, \quad p = dy/dx = 0$$

$$\therefore C = 1/(+a)^m$$

valor que substituído en (5) da la ecuación,

$$(x/a)^m = p + \sqrt{1+p^2} \quad (6)$$

$$(x/a)^{-m} = 1/(p + \sqrt{1+p^2}) = -(p - \sqrt{1+p^2}) \quad (7)$$

sumadas estas dos últimas ecuaciones dan,

$$(x/a)^m + (x/a)^{-m} = 2\sqrt{1+p^2} = 2\sqrt{1+(dy/dx)^2} = 2 ds/dx$$

$$\int_{-s}^0 ds = (1/2) \int_0^a [(x/a)^m + (x/a)^{-m}] dx$$

$$s = a/(1-m^2) = as^2/(s^2-b^2)$$

$$\therefore s = 354,14 \text{ yds.}$$

$$\text{ya que } m = b/s \text{ (} b = 300 \text{ yds.)}$$

Restando la ecuación (7) de la (6) podemos deducir la ecuación de la trayectoria seguida por el perro; efectivamente,

$$(x/a)^m - (x/a)^{-m} = 2p = 2 dy/dx$$

$$\int_0^y dy = (1/2) \int_a^x [(x/a)^m - (x/a)^{-m}] dx$$

$$\therefore y = (1/2) [x^{m-1}/a^m(m+1) + a^m x^{1-m}/(m-1) - 2am/(m^2-1)]$$

Ejemplo 2.

$$d^2y/dx^2 - 2 dy/dx = 2x-3$$

$$\therefore dp/dx - 2p = 2x-3$$

ecuación lineal, cuya solución es:

$$p = dy/dx = C_1 e^{2x} - x + 1$$

$$\therefore y = C_1 e^{2x} - x^2/2 + x + C_2$$

Ejemplo 3.

$$y d^2y/dx^2 + (dy/dx)^2 = 1$$

$$d^2y/dx^2 = p dp/dy \quad \therefore py dp/dy + p^2 = 1$$

separando las variables,

$$2p dp/(p^2-1) + 2 dy/y = 0$$

$$\text{Ln } (p^2-1) + \text{Ln } y^2 = \text{Ln } C$$

$$(p^2-1) y^2 = C_1 \quad \therefore \quad p = dy/dx = \sqrt{y^2+C_1}/y$$

$$dx = y dy/\sqrt{y^2+C_1} \quad \therefore \quad x = C_2 + \sqrt{y^2+C_1}$$

Ejemplo 4.

$$d^2y/dx^2 - dy/dx - 2y = 0$$

$$dy/dx = p, \quad d^2y/dx^2 = (dp/dy) (dy/dx) = p dp/dy$$

valor que substituído en la ecuación (1) la transforma en la ecuación homogénea.

$$p dp/dy - p - 2y = 0$$

efectuando el cambio de variables  $p = vy$ , propio de este tipo de ecuaciones, se convierte finalmente en la ecuación de variables separables,

$$(v^2 - v - 2) dy + vy dv = 0$$

$$2 dy/y + 2v dv/(v^2 - v - 2) = 0 \quad (1)$$

integrando por fracciones parciales se obtiene la solución,

$$(v-2)^{4/3} (v+1)^{2/3} = C'/y^2$$

$$(v-2)^2 (v+1) = C/y^3$$

$$(p-2y)^2 (p+y) = C \quad (2)$$

De  $dy = p dx$  y  $y = p/v$ , obtenemos por división,

$$dy/y = v dx$$

valor que substituído en la ecuación (1) la transforma en,

$$dx + dv/(v^2 - v - 2) = 0$$

cuya solución es:

$$3x = \text{Ln } k (v+1)/(v-2)$$

$$e^{3x} = k (v+1)/(v-2) = k (p+y)/(p-2y) \quad (3)$$

Por eliminación de  $p$  entre las ecuaciones (2) y (3) obtenemos como primitiva de la ecuación diferencial propuesta,

$$y = C e^{2x} + C_1 e^{-x}$$

La ecuación  $p dp/dy - p - 2y = 0$  ha podido tratarse también como uno de los casos especiales estudiados en el párrafo 14, llegándose por este método a la ecuación (1), obteniéndose por consiguiente una solución tan laboriosa como la anterior. El método más rápido para la solución de la ecuación propuesta es el aplicable a las ecuaciones diferenciales lineales, con coeficientes constantes, que estudiaremos en el próximo capítulo.

### EJERCICIOS

1.  $(1+x^2) d^2y/dx^2 + (dy/dx)^2 + 1 = 0$
2.  $d^2y/dx^2 + dy/dx = 0$
3. Cuando un cuerpo cae en el aire, su aceleración y velocidad satisfacen muy aproximadamente la ecuación,

$$a = g - kv^2$$

en la cual  $k$  es una constante y  $g$  el valor de la aceleración de la gravedad. Hállese el espacio recorrido en función del tiempo, suponiendo que el móvil parte del reposo.

4. Hállese la velocidad con la cual cae a la tierra un meteoro que partió del reposo desde una distancia indefinidamente grande y que se mueve hacia la tierra con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la tierra. Radio de la tierra 6.370 kmts.
5. Un cuerpo cayendo por un hueco a través de la tierra se movería con una aceleración proporcional a su distancia al centro. Si el cuerpo parte del reposo, ¿qué tiempo tardaría en llegar al centro, habiendo sido soltado en un punto de la superficie?
6. Una cinta de acero templado (resorte plano), fijado por uno de sus extremos, lleva un peso en la extremidad libre el cual se levanta a una distancia  $b$  y se deja caer. Su aceleración está dada por la fórmula del movimiento armónico,

$$a = -k^2s$$

en la cual  $k$  es una constante y  $s$  el desplazamiento del móvil, en un instante cualquiera, medido desde la posición de equilibrio. Hállese a  $s$  en función del tiempo.

7. Se coloca un cable de 18 pies de longitud sobre un rodillo fijo y de tal manera que una de las cuerdas quede 2 pies más larga que la otra y luego se suelta. Si la aceleración es proporcional a la longitud entre los dos cabos de la cuerda, hállese el tiempo que tarda en caer.
- Nota:* Demuéstrese que la aceleración es proporcional a la diferencia de longitudes entre los dos ramales de la cuerda.
8. Se desea descargar un condensador de capacidad  $C$  y que tiene una carga  $Q$ , a través de un circuito de inductancia  $L$  y de resistencia despreciable. Hállese la carga en el condensador  $t$  segundos después de haber cerrado el circuito. Según la física, la ecuación diferencial es, en este caso,
- $$V - L di/dt = 0$$
- y además,  $V = Q/C$  e  $i = -dQ/dt$  el signo negativo ya que  $i$  va a ser una función decreciente con el tiempo.
9. Resuélvase el problema anterior suponiendo que la resistencia del circuito no es despreciable y que vale  $R$ .
10. Se lanza un cuerpo hacia abajo de un plano con una velocidad de  $v$  metros por segundo. El ángulo de inclinación del plano es  $\theta$  y el coeficiente de fricción vale  $f$ . Hállese el espacio recorrido en  $t$  segundos.
11. Las ecuaciones de un movimiento son:
- $$d^2y/dt^2 = -g, \quad d^2x/dt^2 = 0$$
- Hállese la ecuación general de las trayectorias que satisfacen a las anteriores ecuaciones paramétricas.