ECUACIÓN DE DESVÍO GEODÉSICO EN LA MÉTRICA LEMAÎTRE TOLMAN BONDI

Por:
CARLOS ANDRÉS ORDUZ

Tesis sometida para optar al grado de:
Maestría en Ciencias-Astronomía

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,
FACULTAD DE CIENCIAS
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL
BOGOTÁ D.C, COLOMBIA.

June 2012

Resumen

Haciendo uso de las soluciones exactas con simetría esférica, se estudian modelos cosmológicos inhomogéneos, se hace un análisis detallado de la solución de Lemaître Tolman Bondi (LTB) y las diferentes condiciones en que ésta puede reducirse a la solución estandar de Friedmann Robertson Walker (FLRW). Se presenta una solución para el factor de escala a partir de un modelo de "cebolla" (capas), se calcula la ecuación de desvío geodésico y se describe el efecto de enfocamiento y distorsión que experimenta un haz de geodésicas en un espacio LTB.

Abstract

In this thesis we study a class model of exact solutions to the Einstein field equations which allow us to include inhomogeneities within the cosmological models. We focus on the geodesic deviation equation in the Lemaitre Tolman Bondi metric and show the effect of the shear in the propagation of a geodesic bundle.

Prefacio

Este trabajo fue desarrollado en el Observatorio Astronómico Nacional de la Universidad Nacional de Colombia al interior del grupo de gravitación y cosmológia y surge cómo una propuesta de trabajo del profesor Leonardo Castañeda Colorado con el objetivo de extender el estudio de modelos cosmológicos a modelos inhomogéneos como son las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein con simetria esférica, debido a las múltiples lineas de trabajo que puede generar el conocimiento de este tipo de modelos. El poder encontrar soluciones a problemas de la cosmologia fuera del modelo estandar hacen de este campo algo realmente interesante.

Agradecimientos

Agradezco al Observatorio Astronómico Nacional por la oportunidad que me brindo para poder hacer mis estudios de maestría, y especialmente al profesor Leonardo Castañeda por la confianza que deposito en mi para desarrollar este trabajo, por su colaboración su apoyo incondicional y los momentos compartidos, a los integrantes del grupo de gravitación y cosmología, Fernando Fandiño, Daniel, Luz Angela, Roger, Lucas, Miller, Alejandro, William, Jonathan, Fernando, Hugo, por su amistad colaboración y paciencia en las exposiciones del seminario, muy especialmente a Javier Hortua excelente compañero y un gran amigo, finalmente a mi esposa e hijos por la fuerza que me dan para seguir luchando.

Índice general

Resumen I

Abstract III

Prefacio V

Agradecimientos VII

Índice de figuras XI

Capítulo 1. Introducción 3

Capítulo 2. Modelo estándar 7
2.1. Distancias en Cosmología. 10

Capítulo 3. Efecto de inhomogeneidades en modelos cosmológicos 11
3.1. Posibles modelos cosmológicos 16
3.1.1. Modelo estático de Einstein 16
3.1.2. Modelo distorsionado de Einstein 17
3.1.3. Modelo no estático de Friedmann 17
3.1.4. Modelo distorsionado de Friedmann 18

Capítulo 4. Modelo Lemaître Tolman Bondi 21
4.1. Familias de soluciones 21
4.1.1. La familia Szekers-Szafron (S-S) 21
4.1.2. Modelo Lemaître 23
4.1.3. Modelos Stephani-Barnes (S-B) 24
4.1.4. Modelo Lemaître Tolman Bondi LTB 25
4.2. Ecuaciones para el modelo LTB 27
4.2.1. Perfil de masa 29

Capítulo 5. Modelo de capas 33
5.1. Soluciones paramétricas 33
5.2. Opciones para $M(r)$, $E(r)$, $t_\beta(r)$ 34
5.3. Formación de estructura 35

5.3.1. Homogeneidad a gran escala 35
5.3.2. Inhomogeneidades 39
5.3.3. Modelo de capas 41
5.4. Trayectoria radial para los fotones y redshift 45
5.4.1. Ecuación de las geodésicas nulas 45
5.4.2. Cálculo del redshifft 48

Capítulo 6. Ecuación de desvío geodésico 49
6.1. Ecuación de desvío geodésico 49
6.2. Ecuaciones ópticas 50
6.3. Geodésicas nulas 51
6.4. Ecuación de desvío geodésico - observadores fundamentales 55

Capítulo 7. Conclusiones 59

Apéndice (1) 61

Apéndice (2) 65

Apéndice (3) 67

Apéndice (4) 71

Bibliografía 75

Índice de figuras

5.1.Densidad de contraste modelo de capas 41

5.2.Función E(r) modelo de capas ec 5.175 43

5.3.Perfil de densidad modelo de capas ec 5.177 44

La perseverancia es convertir lo imposible en posible.

Capítulo 1

Introducción

Resultados obtenidos por anisotropías del fondo cósmico y supernovas tipo Ia, demuestran que el universo está experimentando una etapa de expansión acelerada, situación que no puede ser explicada por la solución estándar del universo tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Esto ha motivado la implementación de diferentes modelos entre ellos, la energía oscura para dar cuenta de este fenómeno.

Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein ofrecen la posibilidad de explicar dichos resultados sin recurrir a modelos de energía oscura o modelos con fuentes de energía exótica. Una de estas soluciones exactas que resulta ser bastante interesante y que cumple la condición de ser simétricamente esférica se denomina LTB (Lemaître,Tolman,Bondi) y ofrece una alternativa diversa para el estudio de modelos en el contexto cosmológico.

En 1930 George Lemaître [1] introduce un mecanismo para explicar la evolución de condensaciones esféricas de materia en un universo en expansión a partir de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. Esto dio inició a una serie de trabajos orientados a profundizar este tema, es así como en 1934 Richard C. Tolman[2] plantea las diferentes posibilidades que surgen del tratamiento de inhomogeneidades en los modelos cosmológicos, haciendo una descripción detallada de las propiedades de este sistema y describiendo diferentes tipos de posibilidades que surgen de algunas suposiciones básicas.

En síntesis, su planteamiento abre la posibilidad de trabajar estos modelos para plantear soluciones en diferentes direcciones. En 1947 H. Bondi [3] aplica las ecuaciones de la relatividad general a sistemas esféricamente simétricos libres de presión, haciendo un estudio detallado de las ecuaciones de movimiento sin el uso de aproximaciones, realizando una comparación con las ecuaciones de Newton, haciendo un estudio de la energía, la geometría y el corrimiento al rojo. Como resultado de estas teorías se estableció un campo de investigación entorno a este tipo de soluciones denominado MODELOS LEMAITRE-TOLMAN-BONDI, [4] que hace referencia a los planteamientos antes descritos y en los que es posible hacer un estudio de observables cosmológicos en presencia de inhomogeneidades [1, 5, 6, 7, 4, 8, 9, 10, 2]. Existen muchos trabajos que estudian este tipo de soluciones, [2, 11, 12] [13, 14, 15, 3] y que muestran los efectos de inhomogeneidades sobre la distancia de luminosidad y el corrimiento al rojo[3, 16, 17**?**] entre otros.

Existen también tratamientos sobre formación de estructura, formación de vacíos, colapso gravitacional, campos disipativos[18, 19, 20] y muchos otros temas de investigación, concluyéndose que los resultados obtenidos son bastante ajustados a los que se obtienen por el método estándar FLRW y en diversas situaciones resultan ser mucho más generales.

Introducir hipótesis de inhomogeneidad en el contexto cosmológico no es fácil, sin embargo para distancias menores a 10 Mpc, resultados del Sloan Digital Sky Survey (SDSS) y del 2DFGRS Galáxy validan la inhomogeneidad del universo a pequeñas escalas. Desde este punto de vista no es descabellado considerar esta condición para el modelo. Se introduce en el elemento de línea un factor de escala que depende de la coordenada temporal y de la coordenada radial permitiendo una mayor generalidad con respecto al factor de escala para el modelo estándar y que se reduzca al elemento de línea de FLRW.

Dentro de los campos de investigación de las soluciones exáctas es posible mencionar entre otros:

- Formación y evolución de cúmulos de galaxias y vacíos

Es posible inferir de los datos observacionales de la medida de las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (CMB) en el momento del desacople, que la amplitud de las perturbaciones en materia la cual está impresa en la temperatura del CMB correlacionada con el número de cúmulos de galaxias posteriormente colapsados a partir de las mismas se obtiene como consecuencia que el número de cúmulos por volumen comóvil no es explicable únicamente a partir de materia bariónica en colapso. El modelo estándar cosmológico ha dado parcialmente solución introduciendo una forma de materia denominada materia oscura, la cual de acuerdo al modelo, representa un 25 % del universo actual. Dicha materia sólo ha sido manifiesta en observaciones de la abundancia de cúmulos como se menciono anteriormente y de métodos indirectos como lentes gravitacionales, y a la fecha continua siendo uno de los puntos críticos del modelo estándar. Sin embargo, utilizando la solución de LTB es posible hacer compatibe los datos observacionales con la teoría sin necesidad de recurrir a la energía oscura, abriendo la posibilidad de entender un problema fundamental sin utilizar estas componentes exóticas.

Las investigaciones también demuestran que las perturbaciones en la velocidad son más eficientes en generación de estructura que las perturbaciones en densidad. Esto permite llamar la atención y hacer una revisión del paradigma que se maneja sobre la relevancia de las perturbaciones en la densidad y su incidencia en la formación de estructura. La materia en el centro de todos los vacíos típicos puede ocupar una región de diámetro angular de $0{,}1^0$ en el cielo CMB, que es comparable con la resolución de los datos obtenidos en observaciones, de esta manera es posible considerar que el modelo de vacíos concuerda con las observaciones.

- Evolución de estructuras dobles (pares de cúmulos-vacíos).

Una de las familias de soluciones exáctas de las ecuaciones de Einstein denominadas Szekers (1975) pueden ser utilizadas para explicar la evolución de un cúmulo con un vacío en su interior mediante un modelo de esfera cuasi-esférico Szekers, modelo que permite describir múltiples estructuras.

- Interpretación de la atenuación de supernovas tipo Ia como un efecto de inhomogeneidedes

Es posible medir la magnitud aparente de un objeto estelar mediante la ley Pogson, en la cual se relaciona la magnitud absoluta debida a propiedades intrínsecas del objeto, la magnitud aparente y la distancia a la cual se encuentra el objeto estelar. Los datos observacionales obtenidos para el caso de supernovas tipo Ia permiten medir una atenuación en su magnitud, lo cual no corresponde con la predicción teórica del modelo estándar. Es posible mostrar sin necesidad de involucrar "energía oscura" que esta excesiva atenuación observada en supernovas tipo Ia es causada por inhomogeneidad en la distribución de materia, lo cual resulta más natural que la solución estándar de involucrar una nueva y desconocida forma de energía.

Otros de los campos de investigación en los que las soluciones exáctas permite plantear soluciones son: el problema de horizonte sin el uso de modelos inflacionarios, influencia de estructuras inhomogeneas en la trayectoria de un rayos de luz sobre la distribución de temperatura observada en la radiación CMB y otros problemas diversos de la cosmología.[21][22][23][5][7][16]

Capítulo 2

Modelo estándar

El principio cosmológico plantea la homogeneidad en el sentido de un promedio estadístico de conteo de galaxias en diferentes regiones del espacio y la isotropía sustentada bajo el hecho que; la distribución angular de temperatura de la radiación cósmica de fondo se mantiene igual para diferentes direcciones (sin considerar el efecto de dipolo producido por el movimiento de la tierra). Este principio cosmológico permite considerar una métrica denominada; la métrica de Friedmann Robertson Walker que da solución a las ecuaciones de Einstein y que se escribe como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)\right], \tag{2.1}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala el cual se asocia con la expansión o contracción global; k se asocia con la curvatura y puede ser $k = 0, 1, -1$, si $k = 0$ el universo es espacialmente plano y la geometría euclideana, $k = 1$ una geometría esférica y $k = -1$ una geometría hiperbólica; si $k < 0$ el universo es espacialmente infinito (abierto) y si $k > 0$ el universo es espacialmente finito (cerrado), r, θ, φ son coordenadas ubicadas en la hipersuperficie espacial y representa la posición de un observador fundamental que se mueve con la expansión; t es la coordenada de tiempo cosmológico y hace referencia al tiempo propio medido por observadores fundamentales.

Para la distribución de materia energía es posible considerar que esta se encuentra distribuida de manera uniforme en el espacio tridimensional y en el espacio cuatridimensional es posible modelarla como un fluido perfecto cuyo tensor de momento energía se escribe de la forma

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

donde p es la presión y ρ es la densidad del fluido medidas por un observador coomóvil y u_μ es la cuadrivelocidad del fluido.

La evolución dinámica del factor de escala se obtiene al introducir esta métrica y la distribución de materia-energía en las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

de esta forma es posible obtener las ecuaciones de Friedmann que modelan la expansión del universo para el caso FLRW

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3}, \tag{2.5}$$

donde H se define como el parámetro de Hubble que indica la rata de expansión y Λ la constante cosmológica.

De la ley de conservación local de energía para la componente T_{00}

$$T^{0\nu}_{;\nu} = 0, \tag{2.6}$$

se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d}{dt}a^3 = 0, \tag{2.7}$$

que puede ser interpretada como la primera ley de la termodinámica en cosmología ya que el primer término se asocia con la razón de cambio de la energía contenida en un volumen coomóvil y el segundo representa la presión multiplicada por la variación del volumen propio.

Dada la simetría del espacio tiempo, el tensor momento energía solo puede tener la forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho g_{00} & 0 \\ 0 & P g_{ij} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

donde ρ es la densidad de energía y P la presión. Este tensor momento energía describe un fluido perfecto y es debido a las condiciones de homogeneidad e isotropía en estos universos.

El tensor de Einstein viene dado por

$$G_{00} = 3\left[\frac{a'}{a} + \frac{K}{a^2}\right],$$

$$G_{ij} = -\left[2aa'' + (a')^2 + K\right]\gamma_{ij}. \tag{2.9}$$

El tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ esta relacionado con el tensor momento energía a través de las ecuaciones de campo $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda$, con Λ la constante cosmológica. De esta forma las ecuaciones de campo en un universo de Robetson Walker estan dadas por

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3},$$

$$2\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = -8\pi G P + \Lambda, \tag{2.10}$$

también llamadas ecuaciones de Friedmann. La ecuación de conservación $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ lleva a

$$\rho' = -3\left(\rho + P\right)\frac{a'}{a}. \tag{2.11}$$

En cosmología es importante definir el parámetro de Hubble dado por

$$H\left(t\right) = \frac{a'}{a}, \tag{2.12}$$

en el presente, el universo esta en expansión, por lo que $H_0 > 0$ (El subíndice 0 significa valor actual), podemos parametrizar este valor actual por $H_0 = 100h\, km\, s^{-1}\, Mpc^{-1}$ con $h \sim 0{,}72 \pm 0{,}1$.

Si la curvatura es cero y $w = \frac{P}{\rho} = cte$, al usar las ecuaciones de Friedmann, se obtiene las siguientes soluciones

$$\begin{array}{ccc} a \sim t^{\frac{2}{1+3w}} & w = cte & w \neq -1 \\ a \sim t^2 & w = 0 & polvo \\ a \sim t & w = \frac{1}{3} & radiacion \end{array}$$

2.1. Distancias en Cosmología.

Para describir la posición de un objeto astrofísico en el cielo, se usa las coordenadas angulares para conocer su posición en la bóveda celeste, sin embargo para conocer su distancia de nosotros, debemos usar una variable conocida como corrimiento al rojo "redshift" z. Cierta línea espectral de longitud de onda λ de cualquier objeto es corrida al rojo debida a la expansión del universo. Si esta línea es emitida en algun tiempo t, la longitud de onda λ_0 medida por nosotros viene dada por $\lambda_0 = \lambda\frac{a_0}{a} = (1+z)\,\lambda$, el cual conduce a la definición de redshift,

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \tag{2.13}$$

Ahora la distancia física de un objeto $d = a_0 r$, se aleja de nosotros con una velocidad $v = H_o d$ (para bajos $z \ll 1$).

Además si tenemos en cuenta que $t_0 - t = d$ y $a_0 \simeq a + a'(t_0 - t)$, tenemos que el redshift es

$$1 + z \simeq 1 + \frac{a'}{a}(t_0 - t) \simeq 1 + H_0 d$$

por lo tanto se tiene que $v \simeq z$ y $H_0 = \frac{v}{d}$, este método es usualmente aplicado a la medición de la constante de Hubble.

Capítulo 3

Efecto de inhomogeneidades en modelos cosmológicos

Para desarrollar el modelo se asumen las condiciones mas simples, un modelo de polvo, simétricamente esférico, libre de presión y de gradientes de presión[17]. A partir de estas suposiciones se puede definir un elemento de línea que en coordenadas comóviles r, θ, φ corresponde a

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - e^{\omega}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2, \tag{3.14}$$

donde $\lambda(r,t)$ y $\omega(r,t)$ son funciones que dependen de r y t.

Para este modelo de polvo se define el tensor de momento-energía como:

$$T^{\alpha\beta} = \rho\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}, \tag{3.15}$$

con $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ y $c = 1)$ donde ρ es la densidad local del polvo medida por el observador, $\frac{dx^{\alpha}}{ds}$ y $\frac{dx^{\beta}}{ds}$ son componentes de la velocidad del polvo con respecto a las coordenadas, la componente $T^0_0 = \rho$ y $T^{\alpha}_{\beta} = 0$ $(\alpha, \beta \neq 0)$.

Resolviendo las ecuaciones de Einstein se obtienen las siguientes ecuaciones que conectan las variables métricas λ y ω con la densidad ρ [24]

$$8\pi T^1_1 = e^{-\omega} - e^{-\lambda}\frac{\omega'^2}{4} + \ddot{\omega} + \frac{3}{4}\dot{\omega}^2 - \Lambda = 0, \tag{3.16}$$

$$8\pi T^2_2 = 8\pi T^3_3 = -e^{-\lambda}(\frac{\omega''}{2} + \frac{\omega'^2}{4} - \frac{\lambda'\omega'}{4}) + \frac{\ddot{\lambda}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\ddot{\omega}}{2} + \frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\omega}}{4} - \Lambda = 0, \tag{3.17}$$

$$8\pi T^0_0 = e^{-\omega} - e^{-\lambda}(\omega'' + \frac{3\omega'^2}{4} - \frac{\lambda'\omega'}{2}) + \frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\omega}}{2} - \Lambda = 8\pi\rho, \tag{3.18}$$

$$8\pi T^1_0 = -8\pi T^4_1 = \frac{\omega'\dot{\omega}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\omega'}{2} + \dot{\omega}' = 0, \tag{3.19}$$

donde $()'$ denota derivada con respecto a r y $\dot{()}$ derivada con respecto a t.

De la Primera integral de (3.19) se obtiene

$$\frac{\dot{\omega}}{2} - \frac{\dot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\omega}'}{\omega'} = 0, \tag{3.20}$$

de donde la ecuación (3.20) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\lambda}{2} + \ln\omega'\right) = 0, \tag{3.21}$$

y el término dentro del paréntesis se iguala a una función de r

$$\frac{\omega}{2} - \frac{\lambda}{2} + \ln\omega' = k(r), \tag{3.22}$$

siendo $k(r) = \ln 2f(r)$ y reescribiendo esta ecuación se obtiene:

$$\frac{\omega}{2} - \frac{\lambda}{2} + \ln\omega' = \ln(2f(r)), \tag{3.23}$$

$$\omega - \lambda = 2\left(\ln(2f(r)) - \ln\omega'\right), \tag{3.24}$$

$$\omega - \lambda = \ln 4\frac{f^2(r)}{\omega'^2}, \tag{3.25}$$

de donde tenemos que:

$$e^{\omega}e^{-\lambda} = 4\frac{f^2(r)}{\omega'^2}, \tag{3.26}$$

por consiguiente

$$e^{\lambda} = \frac{e^{\omega}\omega'^2}{4f^2(r)}, \tag{3.27}$$

con $f(r)$ una función indeterminada de r y $f^2(r)$ necesariamente positiva.

De esta manera es posible escribir el elemento de línea de la forma

$$ds^2 = -\frac{e^{\omega}\omega'^2}{4f^2(r)}dr^2 - e^{\omega}(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2, \tag{3.28}$$

sustituyendo la ecuación (3.27) en (3.16) se obtiene

$$e^{\omega}(\ddot{\omega} + \frac{3\dot{\omega}^2}{4} - \Lambda) + \left\{1 - f^2(r)\right\} = 0, \tag{3.29}$$

y la primera integral de esta ecuación es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\omega}^2}{2}e^{\frac{3}{2}\omega} - \frac{2}{3}\Lambda e^{\frac{3}{2}\omega} + 2e^{\frac{\omega}{2}}\left(1 - f^2(r)\right)\right) = 0, \tag{3.30}$$

de donde

$$\frac{\dot{\omega}^2}{2}e^{\frac{3}{2}\omega} + \frac{2}{3}\Lambda e^{\frac{3}{2}\omega} + 2e^{\frac{\omega}{2}}\left(1 - f^2(r)\right) = F(r), \tag{3.31}$$

$$e^{\frac{3\omega}{2}}(\frac{\dot{\omega}^2}{2} - \frac{2}{3}\Lambda) + 2e^{\frac{\omega}{2}}\left\{1 - f^2(r)\right\} = F(r), \tag{3.32}$$

con $F(r)$ otra función indeterminada de r; dividiendo por $e^{\frac{\omega}{2}}$ la ecuación (3.32) se obtiene

$$e^{\omega}\frac{\dot{\omega}^2}{2} - \frac{2}{3}\Lambda e^{\omega} + 2\left(1 - f(r)^2\right) = F(r)e^{-\frac{\omega}{2}}, \tag{3.33}$$

$$e^{\omega}\frac{\dot{\omega}^2}{4} = \frac{1}{3}\Lambda e^{\omega} - 1 + f(r)^2 + F(r)e^{-\frac{\omega}{2}}, \tag{3.34}$$

sacando raíz a ambos lados tenemos

$$e^{\frac{\omega}{2}}\frac{\dot{\omega}}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda e^{\omega} - 1 + f(r)^2 + F(r)e^{-\frac{\omega}{2}}}, \tag{3.35}$$

de tal manera que se puede escribir:

$$\frac{de^{\frac{\omega}{2}}}{dt} = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda e^{\omega} - 1 + f(r)^2 + F(r)e^{-\frac{\omega}{2}}}, \tag{3.36}$$

$$\int \frac{de^{\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{f^2(r)-1+\frac{1}{2}F(r)e^{-\frac{\omega}{2}}+\frac{\Lambda}{3}e^{\omega}}} = t+\mathcal{F}(r), \tag{3.37}$$

donde $\mathcal{F}(r)$ es otra función indeterminada de r, de tal manera que hasta aqui tenemos tres funciones indeterminadas $f(r)$, $F(r)$, $\mathcal{F}(r)$.

Para determinar la densidad del polvo se procede de la siguiente manera:reemplazando (3.27) en (3.18) se obtiene la siguiente expresión

$$e^{-\omega}-\frac{f(r)^2}{e^{\omega\omega'^2/4}}\left(\omega''+\frac{3}{4}\omega'^2-\frac{\lambda'\omega'}{2}\right)+\frac{\dot{\omega}^2}{4}+\frac{\dot{\lambda}\dot{\omega}}{2}-\Lambda=8\pi\rho, \tag{3.38}$$

como $e^{\lambda}=\frac{e^{\omega}\omega'^2/4}{f^2(r)}$ se puede determinar una expresión para $\dot{\lambda}$ y λ'

$$\dot{\lambda}=\dot{\omega}+2\frac{\dot{\omega}'}{\omega'}, \tag{3.39}$$

$$\lambda'=\omega'+2\frac{\omega''}{\omega'}-2\frac{f'(r)}{f(r)}, \tag{3.40}$$

y reemplazando en (3.18) se obtiene

$$8\pi\rho=e^{-\omega}\left\{1-f^2(r)-\frac{4f(r)f'(r)}{\omega'}\right\}+\frac{3}{4}\dot{\omega}^2+\frac{\dot{\omega}\dot{\omega}'}{\omega'}-\Lambda, \tag{3.41}$$

eliminando $f^2(r)$ de (3.25) y hallando una expresión para $f'(r)f(r)$ se obtiene

$$8\pi\rho=-3\ddot{\omega}-2\frac{\ddot{\omega}'}{\omega'}-\frac{3}{2}\dot{\omega}^2-2\frac{\dot{\omega}\dot{\omega}'}{\omega'}+2\Lambda, \tag{3.42}$$

de otro lado combinando con (3.32) se tiene la siguiente expresión para $F(r)$

$$F(r)=e^{\frac{3}{2}\omega}\left(\frac{\dot{\omega}^2}{2}-\frac{2}{3}\Lambda\right)-2e^{\frac{3}{2}\omega}\left(\ddot{\omega}+\frac{3}{4}\dot{\omega}^2-\Lambda\right), \tag{3.43}$$

de donde

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}\omega}\omega'\left(\frac{\dot{\omega}^2}{2}-\frac{2}{3}\Lambda\right)+e^{\frac{3}{2}\omega}\dot{\omega}\dot{\omega}'-3e^{\frac{3}{2}\omega}\omega'\left(\ddot{\omega}+\frac{3}{4}\dot{\omega}^2-\Lambda\right)-2e^{\frac{3}{2}\omega}\left(\ddot{\omega}'+\frac{3}{2}\dot{\omega}\dot{\omega}'\right), \tag{3.44}$$

simplificando se obtiene

$$\frac{e^{-\frac{3}{2}\omega}}{\omega'}\frac{\partial F}{\partial r} = -3\ddot{\omega} + 2\Lambda - \frac{3}{2}\dot{\omega}^2 - 2\frac{\ddot{\omega}'}{\omega'} - 2\frac{\dot{\omega}\dot{\omega}'}{\omega}, \tag{3.45}$$

observando la parte derecha de esta ecuación esta se encuentra explicitamente en (3.42) y remplazando se obtiene

$$8\pi\rho = \frac{e^{-\frac{3}{2}\omega}}{\omega'}\frac{\partial F(r)}{\partial r}, \tag{3.46}$$

sacando logaritmo a ambos lados de la ecuación tenemos

$$\ln 8\pi\rho = \ln\left[\frac{e^{-\frac{3}{2}\omega}}{\omega'}\frac{\partial F}{\partial r}\right], \tag{3.47}$$

de tal forma que

$$\ln 8\pi\rho = \ln e^{-\frac{3}{2}\omega} - \ln\omega' + \ln\frac{\partial F}{\partial r}, \tag{3.48}$$

diferenciando con respecto a t

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{3}{2}\omega - \ln\omega'\right), \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial t} = -\frac{3}{2}\dot{\omega} - \frac{\dot{\omega}'}{\omega'}, \tag{3.50}$$

y diferenciando por segunda vez

$$\frac{\partial^2 \ln\rho}{\partial t^2} = -\frac{3}{2}\ddot{\omega} - \frac{\ddot{\omega}'}{\omega'} + \left(\frac{\dot{\omega}'}{\omega'}\right)^2, \tag{3.51}$$

por combinación de (3.42) y (3.50) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \ln\rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{\omega}'}{\omega'}\right)^2, \tag{3.52}$$

ecuaciones que permiten determinar la dinámica del modelo dependiendo de las condiciones iniciales dadas para $\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}$, las cuales se escogen de manera tal que el elemento de

línea tenga una forma específica. Esto permite hacer descripciones para diferentes modelos a continuación se exponen algunas suposiciones y se describen los modelos correspondientes.

3.1. Posibles modelos cosmológicos

Una vez obtenida la ecuación diferencial para le densidad del polvo se generan diferentes posibilidades de modelos cosmológicos, existen dos caminos posibles; un camino que apunta hacia un trabajo matemático que permita iniciar dando una forma funcional a $f(r), F(r), \mathcal{F}(r)$ las funciones que resultan del modelo y comenzar a obtener diferentes resultados con diferentes condiciones iniciales para ω $\dot{\omega}$ y $\ddot{\omega}$ como funciones de r para un tiempo inicial. Otro camino que implica un análisis físico y que seria el adecuado para el estudio de modelos cosmológicos es considerar la relación entre $\left[\frac{e^{\omega}\omega'^2/4}{f^2(r)}\right]$ y el elemento de línea de tal manera que una distribución específica de materia genere un modelo concordante con las coordenadas comóviles y permita establecer una relación entre la distancia y la coordenada r, dando alternativas que permitan determinar $\dot{\omega}$ y que se pueda expresar la velocidad radial en coordenadas comóviles del polvo en un modelo como función de r y con $\ddot{\omega}$ una distribución específica para el polvo; a continuación se describen algunos ejemplos en los que para determinadas expresiones de estas funciones se caracterizan algunos modelos específicos.

3.1.1. Modelo estático de Einstein. Haciendo las siguientes consideraciones

$$e^{\omega} = r^2, \dot{\omega} = 0, \ddot{\omega} = 0, \tag{3.53}$$

el elemento de línea toma la siguiente forma

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\Lambda r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin\theta d\phi^2 + dt^2, \tag{3.54}$$

que es la forma para el modelo original de Einstein, es posible obtener la densidad a partir de la ecuación (3.42)

$$4\pi\rho = \Lambda, \tag{3.55}$$

este es el caso para el modelo estático de Einstein. Modelo en el que se obtiene un valor constante para la densidad ρ . Situación que en su momento obligó a Einstein a introducir la constante cosmológica, constante que no se ha perdido en la cosmología moderna y

durante años ha cambiado de manera importante su significado. De esta manera es posible ilustrar un camino desde modelos inhomogéneos para reproducir el modelo original de Einstein.

3.1.2. Modelo distorsionado de Einstein. A continuación haciendo las siguientes consideraciones para los diferentes parámetros se obtiene un modelo distorsionado del modelo anterior, si se hace

$$e^{\omega} = r^2, \dot{\omega} = 0, \ddot{\omega} = \ddot{\omega}_0(r), \tag{3.56}$$

de la ecuación (3.42) se puede obtener una expresión para la densidad ρ

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{\omega}_0 - \frac{1}{2}\ddot{\omega}_0' r, \tag{3.57}$$

una expresión para la primera derivada de ρ

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial t} = 0, \tag{3.58}$$

y una expresión para la segunda derivada de ρ

$$\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda, \tag{3.59}$$

esta expresión permite ver que la densidad puede cambiar para diferentes valores de la coordenada r incluso por encima de $4\pi\rho = \Lambda$ o tomar valores mucho menores. Esto evidencia una fuerte inestabilidad del modelo de Einstein (como fue discutido en su momento por Eddington y otros) y permite pensar en formas diferentes a la distribución de densidad uniforme planteada por Einstein.

3.1.3. Modelo no estático de Friedmann. Considerando para $t = 0$ los valores de los parámetros de la siguiente forma

$$e^{\omega} = e^{g_0} r^2, \dot{\omega} = \dot{g}_0, \ddot{\omega} = \ddot{g}_0, \tag{3.60}$$

donde g_0, $\dot{g}_0$ y $\ddot{g}_0$ son valores instantáneos de una función específica $g(t)$ y de esta manera se obtiene el siguiente elemento de línea que corresponde al de Friedmann para un modelo uniforme de polvo que se expande o se contrae

$$ds^2 = -e^{-g(t)}\left(\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R_0^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right) + dt^2, \tag{3.61}$$

con R_0 constante que puede ser obtenida con la ayuda de la ecuación (3.29), y $g(t)$ teniendo la forma funcional con respecto a t ya conocida de un modelo homogéneo que no contiene más que polvo libre de presión externa. El comportamiento y la distribución inicial del polvo, vienen dadas por

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{g}_0 - \frac{3}{4}\dot{g}_0^2, \tag{3.62}$$

primera derivada para la densidad

$$\frac{\partial log\rho}{\partial t} = -\frac{3}{2}\dot{g}_0, \tag{3.63}$$

segunda derivada para la densidad

$$\frac{\partial^2 log\rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial log\rho}{\partial t}\right)^2, \tag{3.64}$$

3.1.4. Modelo distorsionado de Friedmann. Para un tiempo $t = 0$ y con los siguientes valores para cada uno de los parámetros

$$e^{\omega} = e^{g_0} r^2, \dot{\omega} = \dot{g}_0, \ddot{\omega} = \ddot{\omega}_0(r), \tag{3.65}$$

donde g_0 y $\dot{g}_0$ son las mismas del caso anterior pero ahora se introduce $\ddot{\omega}$ como una función definida de r lo cual permite obtener la siguiente expresión para la densidad y el comportamiento del polvo:

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{\omega}_0 - \frac{1}{2}\ddot{\omega}' r - \frac{3}{4}\dot{g_0}^2, \tag{3.66}$$

primera derivada para ρ

$$\frac{\partial log\rho}{\partial t} = -\frac{3}{2}\dot{g}_0, \tag{3.67}$$

segunda derivada de ρ

$$\frac{\partial^2 log\rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial log\rho}{\partial t}\right)^2, \tag{3.68}$$

comparando este estado inicial con el del caso Friedmann se pude observar que para cambios pequeños la contracción o expansión en diferentes puntos del modelo son similares y es posible escribir una expresión para los dos modelos en un tiempo inicial dado comparando las ecuaciones (3.64) y (3.68) y considerando las condiciones (3.62) y (3.66) que no cambian, es posible obtener la siguiente expresión que relaciona los dos modelos:

$$\frac{\partial^2 log\rho_D}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 log\rho_F}{\partial t^2} = 4\pi(\rho_D - \rho_F), \tag{3.69}$$

el subíndice D hace referencia al modelo distorsionado de Friedmann y el subíndice F hace referencia al modelo no estático de Friedmann.

Por lo tanto para valores de r donde la densidad en el modelo distorsionado sea diferente de la que corresponde para el modelo Friedmann es posible tener un mínimo y en otras partes tener un máximo de densidad correspondiente a condensaciones, estas son entre otras las posibilidades que ofrece el tratamiento de inhomogeneidades en modelos cosmológicos.

Capítulo 4

Modelo Lemaître Tolman Bondi

Las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein son una interesante opción para construir modelos de universo que se ajustan con los datos de supernovas tipo Ia, y permiten dar explicación a la expansión acelerada del universo sin el uso de energia oscura, dar soluciones acerca de la formación de estructura y también son una alternativa de estudio de modelos cosmológicos inhomogéneos[8, 25, 7]; por esta razón existen trabajos que hasta hoy tratan de diferentes problemas de la cosmología, basados en estas soluciones exactas, las cuales permiten obtener soluciones mas generales que las obtenidas bajo la solución estándar FLRW.

4.1. Familias de soluciones

4.1.1. La familia Szekers-Szafron (S-S). Estos modelos son definidos de acuerdo con las siguientes propiedades:

1. Estos obedecen las ecuaciones de Einstein con una fuente de fluido perfecto
2. Las líneas de flujo del fluido perfecto son geodésicas que no se intersecan
3. Las hipersuperficies ortogonales a las líneas de flujo son conformalmente planas
4. El tensor de Ricci de estas hipersuperficies tiene dos de sus valores propios iguales
5. El tensor de shear tiene dos de sus valores propios iguales

por la condición 2, en coordenadas comóviles la presión depende sólo del tiempo.

Mediante el uso de la ecuación de estado es posible llegar de la métrica de Szekers a la métrica de Friedmnn-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Las soluciones no triviales en la familia S-S que pueden ser aplicadas razonablemente en cosmología son las métricas Szekerez, en que la fuente es polvo (un fluido perfecto con presión cero). Este es un buen modelo para la fase posterior a la evolución del universo en el que la gravedad juega un papel dominante.

La métrica de la solución Szekeres es

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha(t,x,y,r)}dr^2 - e^{2\beta(t,x,y,r)}(dx^2 + dy^2), \tag{4.70}$$

en coordenadas comóviles para que $u^\mu = \delta^\mu_0$. Esta son dos familias de soluciones Szekeres, dependiendo de si $\beta_{,r} = 0$ o $\beta_{,r} \neq 0$. La primera familia es una generalización simultánea de los modelos de Friedmann y Kantowski-Sachs. Las funciones métricas en la segunda familia son

$$e^\beta = \Phi(t,r)e^{\nu(r,x,y)}, \tag{4.71}$$

$$e^\alpha = h(r)\Phi(t,r)\beta_{,r} \equiv h(r)(\Phi_{,r} + \Phi\nu_{,r}), \tag{4.72}$$

$$e^{-\nu} = A(r)(x^2+y^2) + 2B_1(r)x + 2B_2(r)y + C(r), \tag{4.73}$$

donde $\Phi(t,r)$ es una solución de

$$\Phi^2_{,t} = -k(r) + \frac{2M(r)}{\Phi} + \frac{1}{3}\Lambda\Phi^2, \tag{4.74}$$

Λ es la constante cosmológica y $h(r), k(r), M(r), A(r), B_1(r), B_2(r)$ y $C(r)$ son funciones arbitrarias que satisfacen

$$g(r) = 4(AC - B_1^2 - B_2^2) = \frac{1}{h^2(r)} + k(r), \tag{4.75}$$

la densidad de masa en unidades de energía es

$$8\pi G\rho = \frac{(2Me^{3\nu})_{,r}}{e^{2\beta}(e^\beta)_{,r}}, \tag{4.76}$$

donde se reduce a cuadratura a partir de (4.74)

$$\int_0^\Phi \frac{d\tilde{\Phi}}{\sqrt{-k + {}^{2M}/_{\tilde{\Phi}} + \frac{1}{3}\Lambda\tilde{\Phi}^2}} = t - t_B(r), \tag{4.77}$$

Las métricas Szekers no tienen simetría en general, pero en algunos casos especiales cuando A, B, C son todas constantes la métrica adquiere un grupo de simetrías.

El signo de $g(r)$ determina la geometría de la 2-superficie (t constante, r constante).

La geometría es esférica, plana o hiperbólica (pseudo-esférica) respectivamente para el caso en que $g > 0$, $g = 0$ o $g < 0$. En el caso que A, B_1, B_2 y C sean funciones de r, las superficies $r = constante$ dentro de un único $t = constante$ pueden tener diferentes

geometrías, en regiones donde hay acumulación de materia el espacio adquiere un tipo de curvatura y en las que existen vacíos otro tipo de curvatura.

El signo de $k(r)$ determina el tipo de evolución; con $k > 0$ $(\Lambda = 0)$ el modelo se expande partiendo de una singularidad inicial y recolapsando hacia una singularidad final; con $k = 0$ $(\Lambda = 0)$ este modelo puede expandirse o colapsar; $k = 0$ $(\Lambda = 0)$ es el caso intermedio, que corresponde al caso "plano" del modelo de Friedmann, de forma similar g, k pueden tener diferentes signos en diferentes regiones del mismo espacio-tiempo. El signo de $k(r)$ influye en el signo de $g(r)$. Donde $\frac{1}{h^2}$ sea positivo en (4.75) se obtiene lo siguiente: con $g > 0$ (geometría esférica), todos los tres tipos de evolución son permitidos, con $g = 0$ (geometría plana) k puede ser negativo (sólamente evoluciones parabólicas e hiperbólicas son permitidas) y con $g < 0$ (geometría hiperbólica) k debe ser estrictamente negativa, con lo cual la evolución hiperbólica es permitida. El modelo cuasi-esférico ha sido investigado y tiene aplicación en el estudio del universo temprano, formación de estructura, supernovas, radiación cósmica de fondo (CMB), y propagación de luz.

Los modelos cuasi-esféricos de Szekeres pueden ser entendidos como deformaciones de los modelos simétricamente esféricos. La distribución de densidad de masa puede ser interpretada como una superposición de términos monopolares de masa y un dipolo de masa.

4.1.2. Modelo Lemaître. La métrica de Lemaître describe una simetría esférica de fluido inhomogéneo con presión anisotrópica. En coordenadas comóviles (r, θ, φ)

$$ds^2 = e^{A(t,r)}dt^2 - e^{B(t,r)}dr^2 - R^2(t,r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \tag{4.78}$$

las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$2\pi G R^2 R_{,r}\rho = 2M_{,r}, \tag{4.79}$$

$$2\pi G R^2 R_{,t}p = -2M_{,t}, \tag{4.80}$$

donde p es la presión, ρ es la densidad de masa en unidades de energía y $M(t,r)$ esta definida por

$$2M = R + e^{-A}RR_{,t}^2 - e^{-B}RR_{,r}^2 - \frac{1}{3}\Lambda R^3, \tag{4.81}$$

En el límite Newtoniano, $\frac{Mc^2}{G}$ es igual a la masa dentro de un cascarón de radio coordenado r. Sin embargo, en un espacio curvo ésta no corresponde con la masa integrada en reposo si no con la masa gravitacional activa que genera el campo gravitacional. Como puede verse de (4.80) en la expansión del universo la masa disminuye con el tiempo. La función B puede ser escrita de la siguiente manera

$$e^{B(t,r)} = \frac{R_{,r}^2(t,R)}{1+2E(r)} exp\left(\int_{t_0}^{t} d\tilde{t} \frac{2R_{,t}(\tilde{t},r)}{\left[\rho(\tilde{t},r)+p(\tilde{t},r)\right] R_{,r}(\tilde{t},r)} p_{,r}(\tilde{t},r)\right), \tag{4.82}$$

donde $E(r)$ es una función arbitraria que esta relacionada con la curvatura.

Esta solución ha sido utilizada para estudiar cascarones que cruzan singularidades.

4.1.3. Modelos Stephani-Barnes (S-B). Esta familia de soluciones para fluidos perfectos con shear cero, rotación cero y expansión diferente de cero. Esto consiste de dos colecciones de soluciones.

La solución conformalmente plana

$$ds^2 = D^2 dt^2 - V^{-2}(t,x,y,z)(dx^2+dy^2+dz^2), \tag{4.83}$$

donde:

$$D = \frac{F(t)V_{,t}}{V}, \tag{4.84}$$

$$V = \frac{1}{R}\left\{1+\frac{1}{4}k(t)\left[(x-x_0(t))^2+(y-y_0(t))^2+(z-z_0(t))^2\right]\right\}, \tag{4.85}$$

$F(t), R(t), k(t), x_0(t), y_0(t), z_0(t)$ son funciones arbitrarias del tiempo, F está relacionada con el escalar de expansión θ por ($\theta = \frac{3}{F}$), y $k(t)$ es la generalización de la curvatura FLRW, esta puede cambiar de signo durante la evolución. La densidad de materia y la presión vienen dadas por

$$8\pi G\rho = 3kR^2 + {}^3\!/_{F^2} := 3C^2(t), \tag{4.86}$$

$$8\pi G\rho = 3C^2(t) + 2CC_{,t} + {}^V\!/_{V,t}. \tag{4.87}$$

Estas soluciones fueron determinadas por Stephani; esta es la forma mas general de soluciones conformalmente planas con una fuente de fluido perfecto y expansión diferente de cero. Como se observa de (4.86) y (4.87), la densidad de materia depende solmente del tiempo, mientras que la presión depende de todas las coordenadas. La siguiente es la solución de Petrov tipo D que da origen al modelo Barnes. Estas son las familias de soluciones exactas con las cuales es posible abordar diferentes tipos de modelos cosmológicos dependiendo el tipo de problema a resolver.

4.1.4. Modelo Lemaître Tolman Bondi LTB. La métrica de Lemaître-Tolman-Bondi se construye bajo las siguientes condiciones:

1. El sistema es y se mantiene esféricamente simétrico, la densidad de masa y la velocidad de las partículas son funciones de la coordenada radial y el tiempo coordenado solamente y el movimiento de cada partícula es radial.
2. Cada partícula se mueve bajo la influencia de la gravedad, y no se considera interacción electromagnética y el sistema es libre de presión.
3. Los caminos de las partículas no se intersectan.
4. La densidad de masa es finita en todo punto.

Para definir el sistema de coordenadas se asume una fuente permanente de luz O en el centro del sistema esféricamente simétrico y rodeada esta fuente por una pequeña esfera, teniendo en cuenta la condición 4, es posible usar un sistema galileano de coordenadas en la vecindad de O y se puede definir coordenadas polares para esta esfera.

De esta manera se definen las coordenadas θ y φ para un evento de la siguiente manera: considerando un rayo de luz que va de O al evento, las coordenadas θ ,φ de algún evento son las coordenadas θ , φ del punto de intersección de este rayo y la pequeña esfera.

Para definir las coordenadas t y r se puede por la condición (2) y por el resultado fundamental de la relatividad general asumir que las partículas se mueven a lo largo de geodésicas. De esta manera es posible imaginar el espacio libre de partículas ocupado por un polvo muy fino de masa despreciable que satisface las suposiciones 1,2,3. Dado que se asume esto posible, se tiene una familia de geodésicas que no se intersecan entre sí y en donde una y sólo una, miembro de esta familia pasa a través de cada punto del espacio tiempo lo que permite definir hipersuperficies ortogonales a la familia de geodésicas. A éstas se les conoce como hipersuperficies para t constante; como es conocido en cosmología el hecho de que esto ocurra permite decir que t mide el tiempo propio a lo largo de cada miembro de la familia de geodésicas.

A patir de estas definiciones y bajo la suposición de simetría esférica es posible escribir el elemento de línea de la siguiente manera:

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(r,t)dr^2 + R^2(r,t)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4.88}$$

donde X y R son funciones de r y t, de acuerdo con esto el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^2(r,t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2(r,t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2(r,t)sen^2\theta \end{bmatrix}. \tag{4.89}$$

con un tensor de momento energía que corresponde a un modelo de polvo es

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho(r,t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.90}$$

donde ρ es una funcion de r y t

Es conveniente trabajar con la masa invariante M y no con la densidad ρ dado que M sólo depende de la coordenada r y no de la coordenada t, dada la simetría esférica; siendo M la suma de las masas propias de las partículas con coordenada radial menor a un r dado. De la condición de presión nula se deduce que la masa no depende del tiempo y sólo es una función de r de tal forma que $M = M(r)$.

La masa de las partículas se puede calcular de la siguiente manera

$$M(r) = \int_0^r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi T\sqrt{-g} = 4\pi \int_0^r dr\rho X R^2, \tag{4.91}$$

de tal manera que

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho X R^2, \tag{4.92}$$

con M la masa invariante.

- Las ecuaciones de campo quedan de la siguiente manera
- $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} = 0$, si $\mu \neq \nu$ y
- $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{2M^{'}(r)}{XA^2}$, si $\mu = \nu = 0$

Ecuaciones que quedan explícitamente determinadas a través del tensor de Ricci y el escalar de curvatura R para esta métrica .

4.2. Ecuaciones para el modelo LTB

Las ecuaciones de Einstein obtenidas para esta métrica (ver apéndice 1) son

$$-\frac{2R''}{RX^2}+\frac{2R'X'}{RX^3}+\frac{2\dot{X}\dot{R}}{RX}+\frac{1}{R^2}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2-\left(\frac{R'}{RX}\right)^2=T_{00}, \tag{4.93}$$

$$-\frac{2\ddot{R}X^2}{R}-\frac{\dot{R}^2X^2}{R^2}+\frac{R'^2}{R^2}-\frac{X^2}{R^2}=T_{11}, \tag{4.94}$$

$$-R^2\left(\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}\dot{X}}{RX}+\frac{\ddot{X}}{X}-\frac{R''}{RX^2}+\frac{R'X'}{RX^3}\right)=T_{22}, \tag{4.95}$$

$$-R^2sen^2\theta\left(\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}\dot{X}}{RX}+\frac{\ddot{X}}{X}-\frac{R''}{RX^2}+\frac{R'X'}{RX^3}\right)=T_{33}, \tag{4.96}$$

siendo $T_{22}=T_{33}$; Para

$$R_{01}-\frac{1}{2}Rg_{01}=T_{01}, \tag{4.97}$$

$$\dot{R}'-R'\frac{\dot{X}}{X'}=T_{01}, \tag{4.98}$$

Teniendo en cuenta la forma del tensor momento-energía para el modelo se puede ver que $T_{01}=0$ y de esta ecuación se obtiene

$$\dot{R}'=R'\frac{\dot{X}}{X'}, \tag{4.99}$$

de donde

$$\frac{\dot{R}'}{R'}=\frac{\dot{X}}{X'}$$

integrando

$$R'(r,t) = \frac{X(r,t)}{C(r)}, \tag{4.100}$$

y de esta expresión se obtiene para $X(r,t)$ en función de $R'(r,t)$

$$X(r,t) = \frac{1}{C(r)}\frac{\partial R(r,t)}{\partial r}, \tag{4.101}$$

donde $W(r)$ es una función que sólo depende de r y que por definición se escribe como

$$C(r) = \sqrt{1-k(r)}, \tag{4.102}$$

con $k(r) < 1$; de esta manera es posible escribir el elemento de línea de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'}{1-k^2(r)}dr^2 + R^2(r,t)(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2), \tag{4.103}$$

donde $k(r)$ es una función asociada con la curvatura para hipersuperficies de t constante, esta es la forma en que se conoce el elemento de línea para el modelo LTB. El caso FLRW se obtiene en el límite cuando $R(r,t) \to a(t)r$ y $k(r) \to kr^2$.

Las ecuaciones independientes con $\Lambda \neq 0$ (ver apéndice 2) para el caso LTB y que son el análogo a las ecuaciones de Friedmann del modelo estándar son

$$\frac{\dot{R}^2 + k(r)}{R^2} + \frac{2\dot{R}'\dot{R} + k'(r)}{RR'} = 8\pi G(\rho_m + \rho_\Lambda), \tag{4.104}$$

$$\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R + k(r) = 8\pi G\rho_\Lambda R^2, \tag{4.105}$$

la primera integral de la ecuación (4.104) es

$$R\dot{R}^2 - k(r)R - \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda R^3 = F(r), \tag{4.106}$$

que escrita de otra manera es

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{F(r)}{R^3} + \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda - \frac{k(r)}{R^2}, \tag{4.107}$$

con $F(r)$ y $k(r)$ funciones que dependen de r y que se definen de acuerdo con las condiciones de frontera del modelo. Es posible definir también para el modelo LTB un

perfil de masa que se pueda especificar de acuerdo con la forma funcional de F.

4.2.1. Perfil de masa. Es posible obtener una ecuación para el perfíl de masa en términos de las funciones F y R

sustituyendo (4.106)

$$\frac{F(r)}{R^3}+\frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda-\frac{k(r)}{R^2}+\frac{k(r)}{R^2}+\frac{2\dot{R}'\dot{R}}{RR'}+\frac{k'(r)}{RR'}=8\pi G\rho_\Lambda+8\pi G\rho_m, \tag{4.108}$$

que se reduce a

$$\frac{F(r)}{R^3}+\frac{2\dot{R}'\dot{R}}{RR'}+\frac{k'(r)}{RR'}=8\pi G\rho_m, \tag{4.109}$$

de la cual se obtiene la siguiente ecuación utilizando (4.105)

$$\frac{F'(r)}{R'R^2}=8\pi G\rho_m, \tag{4.110}$$

Relación que permite describir la densidad de acuerdo con el modelo para una forma funcional específica de R (factor de escala). Combinando (4.103) y (4.104) para

$$k(r)=8\pi G\rho_\Lambda R^2-\dot{R}^2-2R\ddot{R}, \tag{4.111}$$

$$k'(r)=16\pi G\rho_\Lambda RR'-2\dot{R}\dot{R}'-2R'\ddot{R}-2R\ddot{R}', \tag{4.112}$$

es posible obtener una ecuación de aceleración generalizada que se escribe como:

$$\frac{2\ddot{R}}{3R}+\frac{\ddot{R}'}{3R'}=-\frac{4}{3}\pi G(\rho_m-2\rho_\Lambda), \tag{4.113}$$

y que implica que la aceleración total, representada por el término de la izquierda, es negativa si $\rho_\Lambda>\frac{\rho_m}{2}$. Sin embargo se excluye la posibilidad de tener aceleración radial $\ddot{R}'(r,t)>0$ aún en un universo de puro polvo si el factor de escala angular $R(r,t)$ es menor y viceversa; las funciones $F(r)$ y $k(r)$ son determinadas por las condiciones de frontera y se especifican por la naturaleza de las inhomogeneidades. Es posible escribir una de las

ecuaciones de Friedmann de otra manera de forma tal que se relacionen los parámetros del modelo si se observa la forma de las ecuaciones para el caso estándar FLRW

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}, \tag{4.114}$$

$$H^2(t) = H_0^2\left[\Omega_m\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m)\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right], \tag{4.115}$$

siendo $a(t)$ el factor de escala, $H = \frac{\dot{a}(t)}{a((t)}$, $a_0 = a(t_0)$ y $H_0 = H(t_0)$; si se hace la analogía es posible definir H para el caso de Lemaître -Tolman- Bondi

$$H(r,t) = \frac{\dot{R}(r,t)}{R(r,t)}, \tag{4.116}$$

donde la densidad de materia se escribe

$$F(r) = H_0^2(r)\Omega_m(r)R_0^3(r), \tag{4.117}$$

y la función de curvatura

$$k(r) = H_0^2(r)\left(\Omega_m(r) + \Omega_\Lambda(r) - 1\right)R_0^2(r), \tag{4.118}$$

donde se diferencian los valores de frontera para t_0 a través de $R_0(r) \equiv R(r,t_0)$, $H_0(r) \equiv H(r,t_0)$

y $\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3H_0^2(r)}$, con estas definiciones la rata de Hubble dependiente de la posición toma la siguiente forma:

$$H^2(r,t) = H_0^2(r)\left[\Omega_m(r)\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_\Lambda(r) + \Omega_c(r)\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right], \tag{4.119}$$

donde $\Omega_c(r) = 1 - \Omega_\Lambda(r) - \Omega_m(r)$ que corresponde con el omega crítico.

La diferencia entre el modelo estándar FLRW y el modelo de LTB es que todas las cantidades en el caso LTB dependen de la coordenada r; en presencia de inhomoganeidaes los valores de rata de Hubble y la densidad de materia pueden variar para todos los puntos del espacio para los cuales las inhomogeneidades del modelo de polvo son definidas por dos funciones de las coordenadas espaciales; $H_0(x^i)$ y $\Omega_m(x^i)$.

Como consecuencia las inhomogeneidades pueden ser de dos tipos diferentes, inhomogeneidades en la distribución de materia o en la rata de expansión. A través de la dinámica son determinadas vía las ecuaciones de Einstein para condiciones de frontera independientes entre ellas.

El universo puede tener una inhomogeneidad tipo big bang desde donde nace para diferentes tiempos en diferentes puntos y/o una densidad de materia inhomogénea. Esto abre la posibilidad para un universo inhomogéneo que tiene un valor presente Ω_m; uno de dichos modelos podría pensarse potencialmente apropiado para datos de supernovas además de los conteos de galaxias sin involucrar la energía oscura. Sin embargo, si $\Omega_m(r) = constante$ la misma distribución de materia física ρ_m tiene una dependencia espacial dada por $H_0(r) \neq constante$ la cual puede hacerse constante por elección de

$$\Omega_m(r)H_0^2(r) = constante, \tag{4.120}$$

la dependencia espacial incluso para el gauge es libre de la función de escala.

En el caso FRLW el valor actual del factor de escala $a(t_0)$ puede ser elegido siendo algún número positivo. Similarmente, la correspondiente función de escala para el valor presente $R(r, t_0)$ del modelo LTB puede ser elegida siendo alguna función positiva suave e invertible.

De acuerdo con la forma funcional de $R(r, t)$ es posible construir un modelo de universo y determinar diferentes observables cosmológicos.

A través del análisis se ha desarrollado para el caso LTB se obtiene como resultado de la aplicación de las ecuaciones de Einstein que

$$X(r,t) = \frac{R'^2(r,t)}{1+k(r)}, \tag{4.121}$$

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2(r,t) - \frac{F(r)}{R} = k(r), \tag{4.122}$$

$$\frac{F'(r)}{R'R^2} = 8\pi G\rho_m, \tag{4.123}$$

donde los puntos indican derivada parcial con respecto a t y las primas derivada parcial con respecto a r. Siendo $\rho(r, t)$ la densidad de energía de la materia, y G la constante gravitacional. La función $k(r)$ esta relacionada con la curvatura vía la energía del sistema $E(r)$ y $F(r)$ con la masa del sistema $M(r)$ que corresponde con la masa dentro de una esfera de radio coordenado comóvil r. Estas funciones son arbitrarias y de acuerdo con su forma funcional es posible describir diferentes modelos basados en la métrica LTB. En

el siguiente capítulo se describe una posible solución de $R(r,t)$ utilizada para explicar la formación de estructura que se denomima modelo de capas o "modelo de cebolla" y que permite determinar un perfil de densidad y un factor de escala específico.

Capítulo 5

Modelo de capas

5.1. Soluciones paramétricas

Para la métrica de Lemaitre-Tolman- Bondi[12][10, 16**?**]

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(r,t)dr^2 + R^2(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{5.124}$$

donde r, θ, φ son coordenadas comóviles y t tiempo propio, las ecuaciones de Einstein con el tensor de momento energía para polvo, implican las siguientes condiciones

$$X(r,t) = \frac{R'^2(r,t)}{1+k(r)}, \tag{5.125}$$

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2(r,t) - \frac{F(r)}{R} = E(r), \tag{5.126}$$

$$\frac{F'(r)}{R'R^2} = 8\pi G\rho_m, \tag{5.127}$$

donde el punto indica derivada con respecto a t y prima derivada con respecto a r. La densidad de energía es $\rho(r,t)$ y $G \equiv \frac{1}{m^2 pl}$ la constante gravitacional. La función $E(r)$ esta relacionada con $k(r)$ la curvatura espacial ligada con la función $\mathcal{F}$, $M(r)$ que corresponde a la masa dentro de una esfera de radio coordenado comóvil r ligada con la función F, donde $\mathcal{F}$ y F son las funciónes arbitrarias del modelo definidas en el capítulo 1.Se obtiene como soluciones paramétricas de la ecuación (5.126) para cada caso dependiendo del signo de $E(r)$ las siguientes soluciones

$E\,(r) > 0$

$$R = \frac{GM\,(r)}{2E\,(r)}\,(coshu - 1)\,, \tag{5.128}$$

$$t - t_\beta(r) = \frac{GM(r)}{(2E(r))^{2/3}} (\sinh u - u), \tag{5.129}$$

$E(r) = 0$

$$R = \left(\frac{9GM(r)}{2}\right)^{1/3} (t - t_\beta)^{2/3}, \tag{5.130}$$

$E(r) < 0$

$$R = \frac{GM(r)}{2E(r)} (1 - cosu), \tag{5.131}$$

$$t - t_\beta(r) = \frac{GM(r)}{[-2E(r)]^{3/2}} (u - senu), \tag{5.132}$$

donde u es un parámetro y $t_\beta(r)$ función de integración arbitraria que depende de la coordenada r, la cual se interpreta para propósitos cosmológicos como una superficie singular de big-bang, con $R(r,t) = 0$, análogo a la nulidad del factor de escala para el big bang en el modelo homogéneo FLRW. Es posible escoger $t_\beta(r) = 0$ para el centro de simetría ($r = 0$) por una traslación apropiada de la superficie $t = constante$ y describir el universo por la parte $t > t_\beta(r)$ del plano r, t donde t corresponde a la dirección futura. El modelo LTB contiene tres funciones arbitrarias: $M(r)$, $E(r)$ y $t_\beta(r)$. Si se quiere recuperar el límite homogéneo, primero se debe elegir tiempo de big bang en todo punto $t_b(r) = 0$ y cambiar $E(r)$ para cada caso como

$$\begin{cases} E(r) = -E_0 r^2 & cerrado\, FRLW \\ E(r) = 0 & plano\, FRLW \\ E(r) = E_0 r^2 & abierto\, FRLW \end{cases} \tag{5.133}$$

donde E_0 corresponde a un número positivo. Resulta inmediato recuperar los modelos homogéneos FLRW, parametrizando E_0 de acuerdo con la curvatura en el modelo.

5.2. Opciones para $M(r)$, $E(r)$, $t_\beta(r)$

Generalmente, se asume que si $E(r) < 0$, $E(r) = 0$, $E(r) > 0$ el modelo LTB se denomina abierto, plano o cerrado respectivamente, pero es posible mostrar con $E(r) > 0$ que se puede imitar un modelo plano FLRW consistente con las medidas de los primeros picos del CMB, los cuales evidencian que el "universo es plano".

Debido a la libertad gauge se puede escoger mediante un adecuado reescalamiento de la coordenada radial r una función monótona para $M(r)$. Por ejemplo, las funciones arbitrarias $M(r)$, $E(r)$ y $t_\beta(r)$ se pueden escribir de otra manera mediante una transformación de coordenadas $r = r(\tilde{r})$ sin afectar la forma de la métrica como

$$M(r) = \tilde{M}(\tilde{r}), \quad E(r) = \tilde{E}(\tilde{r}) \quad y \qquad R(t,r) = \tilde{R}(\tilde{r},t),$$

por lo tanto, se define una nueva coordenada de la siguiente forma

$$r(\tilde{r}) = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{M(\tilde{r})}{M_0^4}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow M(r) = \frac{4\pi}{3}M_0^4 r^3, \tag{5.134}$$

donde M_0 es una escala arbitraria de masa si $\tilde{M} = \frac{M_0^2}{mpl}$ y $G = \frac{1}{mpl^2}$. De esta manera se obtienen para el caso $E(r) > 0$ las siguientes expresiones

$$R = r\frac{4\pi(\tilde{M}r)^2}{6E\,(r)}\,(coshu - 1)\,, \tag{5.135}$$

$$t - t_\beta\,(r) = \frac{G\frac{4}{3}\pi M_0^2 r^3}{(2E\,(r))^{3/2}}\,(senhu - u)\,, \tag{5.136}$$

de donde se obtiene

$$t = r\frac{4\pi\left(\tilde{M}r\right)^2}{3\,(2E\,(r))^{3/2}}\,(senhu - u)\,, \tag{5.137}$$

asumiendo por simplicidad que $t_\beta\,(r) = 0$ y definiendo $\tilde{M} \equiv \frac{M_0^2}{mpl}$.

5.3. Formación de estructura

A continuación se describe que para el caso $E > 0$ universo abierto, las métricas de LTB pueden semejar homogeneidad a gran escala, así como también se describen inhomogeneidades (galaxias, cúmulos de galaxias....) apropiadamente. Esto quiere decir que las funciones $E(r)$ permiten encontrar el perfil de densidad del modelo.

5.3.1. Homogeneidad a gran escala. Para realizar los cálculos se introduce una aproximación para valores pequeños del parámetro u que permite contener todo el horizonte causal. La importancia de esta aproximación se encuentra fundamentalmente en la

posibilidad de describir la dinámica del espacio tiempo, incluso cuando $\frac{\delta\rho}{\rho} > 1$ ($\delta\rho$ densidad de contraste), y mostrar los efectos de no linealidad en la formación de estructura para diferentes cantidades físicas, conjuntamente esta aproximación con otra adiabática, permite tener un control analítico en el régimen no lineal del fenómeno.

Escribiendo la expansión en series de Taylor de

$$senhu = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} +, \tag{5.138}$$

$$senhu - u \backsimeq \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} \tag{5.139}$$

reemplazando en (5.137) con $t_\beta(r) = 0$ se obtiene

$$t = \frac{4\pi\left(\tilde{M}r\right)^2 r^3}{3\left(2E(r)\right)^{3/2}}\frac{u^3}{6}\left(1 + \frac{u^2}{20}\right), \Longrightarrow \left(\frac{9\left[2E(r)\right]^{3/2}t}{2\pi\tilde{M}r^3}\right) = u\left(1 + \frac{u^2}{20}\right)^{1/3} \tag{5.140}$$

usando la aproximación para valores pequeños de u, y utilizando series de Taylor la función $R(r,t)$ toma la siguiente forma

$$R(r,t) = \frac{4\pi\tilde{M}^2 r^3}{6E(r)}\left(\frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!}\right), \tag{5.141}$$

$$R(r,t) = \frac{4\pi\tilde{M}^2 r^3}{6E(r)}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}\right), \tag{5.142}$$

si se define

$$v = \left(\frac{9\left[2E(r)\right]^{3/2}t}{2\pi\tilde{M}r^3}\right) = \frac{\sqrt{E(r)}}{\tilde{M}r}\left(\frac{9\sqrt{2}t\tilde{M}}{\pi}\right)^{1/3} \ll 1, \tag{5.143}$$

y sustitiyendo en (5.140) se obtiene la siguiente expresión

$$v = u\left(1 + \frac{u^2}{20}\right)^{1/3}, \tag{5.144}$$

que toma la forma

$$v\left(1+\frac{u^2}{20}\right)^{-1/3}=u, \tag{5.145}$$

desarrollando en series de Taylor

$$\left(1+\frac{u^2}{20}\right)^{-1/3}=1-\frac{u^2}{60}+....., \tag{5.146}$$

sustituyendo en (5.144) se obtiene la siguiente ecuación trascendente

$$v\left(1-\frac{u^2}{60}\right)\approx u, \tag{5.147}$$

que puede ser solucionada iterativamente considerando como primera solución $u=v$ de tal manera que

$$v\left(1-\frac{v^2}{60}\right)\approx u, \tag{5.148}$$

$$v-\frac{v^3}{60}\approx u, \tag{5.149}$$

haciendo uso de esta relación y llevando a la expresión para $R(r,t)$ se tiene

$$R\left(r,t\right)\approx\frac{4\pi\tilde{M}^2r^3}{6E\left(r\right)}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}\right), \tag{5.150}$$

$$R\left(r,t\right)\approx\frac{4\pi\tilde{M}^2r^3}{12E\left(r\right)}\left(\left(v-\frac{v^3}{60}\right)^2+\left(v-\frac{v^3}{60}\right)\frac{1}{12}\right), \tag{5.151}$$

considerando máximo, potencias de orden cuatro en v

$$R\left(r,t\right)\approx\frac{4\pi\tilde{M}^2r^3}{12E\left(r\right)}\left(v^2-\frac{v^4}{30}+\frac{v^4}{12}\right), \tag{5.152}$$

$$R\left(r,t\right)\approx\frac{4\pi\tilde{M}^2r^3}{12E\left(r\right)}v^2\left(1+\frac{v^2}{20}\right), \tag{5.153}$$

reemplazando la expresión (5.143) en (5.153)

$$R\left(r,t\right)\approx r\left(\tilde{M}t\right)^{2/3}\left(6\pi\right)^{1/3}\left(1+\alpha E\left(r\right)\frac{\left(\tilde{M}t\right)^{2/3}}{\left(r\tilde{M}\right)^{2}}\right), \tag{5.154}$$

donde $\alpha=\left(\frac{81}{4000\pi^2}\right)^{1/3}$.

Fácilmente se puede observar que el prefactor en $R(r,t)$ corresponde al resultado para el caso plano de FLRW donde $E(r)$ corresponde a la corrección en $R(r,t)$.

Ahora se establecen los perfiles de densidad adecuados. Primero se calcula la densidad promedio dentro de una esfera de radio $\overline{r}$

$$<\rho>=\frac{M_{tot}}{V_{tot}}=\frac{\int drR^2R'\rho\left(r,t\right)}{\int drR^2R'}=M_0^4\frac{\int drr^2}{\int dRR^2}=M_0^4\frac{\overline{r}^3}{R^3}, \tag{5.155}$$

donde se asume que $E\left(r\right)\ll 1$. La última ecuación puede escribirse como

$$<\rho>=\frac{M_0^4}{6\pi\left(\tilde{M}t\right)^2}\left[1+\alpha\frac{E\left(\bar{r}\right)\left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\bar{r}\tilde{M}\right)^2}\right]^{-3}, \tag{5.156}$$

imponiendo homogeneidad a gran escala para valores de $<\rho>$ de tal forma que pueda tener un límite definido en $\bar{r}\to\infty$, se debe cumplir que

$$\lim_{\bar{r}\to\infty}\frac{E(\bar{r})}{\left(\bar{r}\tilde{M}\right)^2}\to constante \tag{5.157}$$

esto muestra como $E(r)$ puede crecer más que r^2cuando $r\to\infty$. Sin embargo, se ha mencionado anteriormente, que una $E(r)$ cuadrática corresponde a un modelo con curvatura espacial constante. Esto es fuertemente respaldado por los datos del CMB, porque la distancia diametral angular (Da) para un universo con curvatura espacial de alto redshift es diferente de la predicción para el caso plano y la medida de la posición del primer pico favorece fuertemente al caso plano (o mas exactamente, hace la cantidad de curvatura espacial mas pequeña). Por lo tanto, para evitar curvatura $E\left(r\right)$ realmente debería crecer suavemente con r^2 para $r\to\infty$. Se puede entonces mostrar que un crecimiento lineal de $E(r)$ (como un factor que incluye fluctuaciones) garantiza un perfil de densidad realista (con picos relativamente altos y bajos de las fluctuaciones) que no cambian a medida que se avanza desde el centro hacia el infinito.

5.3.2. Inhomogeneidades. La densidad $\rho(r,t)$ se calcula por intermedio de $R(r,t)$

$$R'(r,t) = \left(\tilde{M}t\right)^{2/3}(6\pi)^{1/3}\left(1+\alpha\left(\tilde{M}t\right)\left(\frac{E(r)}{(r\tilde{M})^2}\right)'\right), \tag{5.158}$$

y la derivada de R con respecto a t queda expresada como

$$\dot{R}(r,t) = (6\pi)^{1/3}\left[\frac{2}{3}\tilde{M}\left(\tilde{M}t\right)^{-1/3}r + \frac{4}{3}\left(\tilde{M}t\right)^{-1/3}\frac{E(r)}{r}\right], \tag{5.159}$$

de esta manera, es posible escribir una expresión para la densidad

$$8\pi\rho(r,t) = \frac{4\pi M_0^4 r^2}{R'(r,t)\,R^2(r,t)}, \tag{5.160}$$

que para este modelo, se expresa

$$\rho(r,t) = \frac{M_0^4}{6\pi\left(\tilde{M}t\right)^2\left[1+\alpha\left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{E(r)}{(r\tilde{M})^2}\right]'\right]\left[1+\alpha E(r)\frac{\left(\tilde{M}t\right)^{2/3}}{(r\tilde{M})^2}\right]}, \tag{5.161}$$

con la corrección para pequeños u

$$\alpha E(r)\frac{\left(\tilde{M}t\right)^{2/3}}{\left(r\tilde{M}\right)^2} = \alpha\left(\frac{\pi}{9\sqrt{2}}\right)^{2/3}v^2 \ll 1, \tag{5.162}$$

la densidad toma la forma

$$\rho(r,t) = \frac{M_0^4}{6\pi\left(\tilde{M}t\right)^2\left[1+\alpha\left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}}A(r)\right]}, \tag{5.163}$$

donde

$$A(r) = \left[\frac{E(r)}{(r\tilde{M})^2}\right]' \tag{5.164}$$

Observando la expresión para la densidad, se puede ver que el caso para FLRW es el término que premultiplica en el denominador. Las fluctuaciones en la densidad son dadas

por la función $A(r)$ que se encuentra en el denominador. Si no se buscan los picos a través de cambios en el radio, la función $A(r)$ debe ser acotada

$$A_{min} < A(r) < A_{max}, \tag{5.165}$$

esto establece una ligadura entre A y R. En otras palabras debe darse un aumento en conjunto, para $A(r)$ cuando r aumenta.

De la definición de $A(r)$ se puede deducir para $E(r)$ que debe aumentar y conjuntamente lo hace en forma lineal, adicional a las fluctuaciones periódicas; si $E(r)$ aumenta o disminuye linealmente $A(r)$ iniciará aumentando o disminuyendo respectivamente.

La densidad de contraste definida como

$$\delta \equiv \frac{\rho(r,t) - <\rho>(t)}{<\rho>(t)}, \tag{5.166}$$

es controlada por

$$\epsilon(r,t) \equiv \alpha \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} A(r), \tag{5.167}$$

se obtiene la siguiente relación, ignorando la corrección (5.156)

$$\delta = -\frac{\epsilon}{1+\epsilon} = -\frac{\alpha \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} A(r)}{1+\alpha \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} A(r)}, \tag{5.168}$$

se asume para el propósito de la discusión de la dinámica que A_{min} es negativo. Mas adelante se muestra que esto se requiere para evitar curvatura. Es claro que la densidad fluctuará entre

$$\delta_{min}(t) \equiv -\frac{\alpha \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} A(r)_{max}}{1+\alpha \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} A(r)_{max}} < \delta < \frac{\alpha \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} A(r)_{min}}{1+\alpha \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} A(r)_{min}} \equiv \delta_{max}(t), \tag{5.169}$$

Cuando $A(r)$ es próximo $A_{max}(r)$ se tiene un vacio y cuando es próximo a $A_{min}(r)$ se tiene una sobredensidad. Es interesante ver como ocurre la transición del régimen lineal al régimen no lineal. Cuando $\epsilon \ll 1$, $\delta \sim \epsilon$ se esta en el régimen lineal: una fluctuación de densidad inicial crece para tiempos pequeños con $t^{\frac{2}{3}}$, resultado que esta de acuerdo con

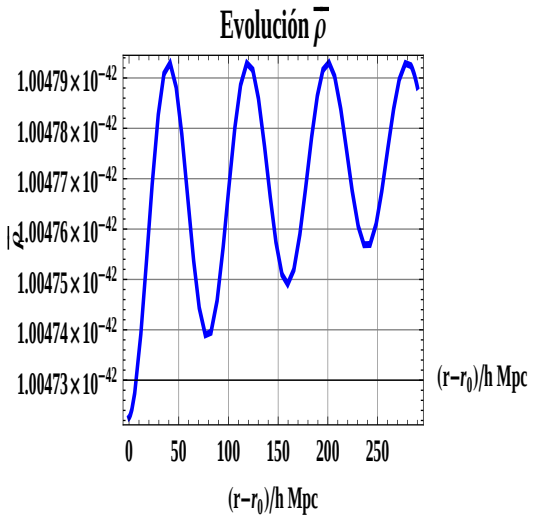

FIGURA 5.1. Densidad de contraste modelo de capas

la predicción de la teoría de perturbaciones cosmológicas. Cuando ϵ no es muy pequeño la densidad de contraste crece rápidamente y esto concuerda con el mismo resultado determinado dentro de la aproximación de Zeldovich.

Si se utiliza $A_{min} = -A_{max}$ en general en el régimen no lineal $|\delta_{min}(t)| < \delta_{max}(t)$, esto por que de 5.168 el denominador entra en juego. Para ϵ positivos el denominador no cambia mucho pero para valores negativos a medida que se acerca a -1 el denominador se acerca a cero y $\delta_{máx}$ tiende a ser muy grande. Cuando t aumenta llega a un punto donde el denominador en 5.168 se anula de tal forma que la densidad en la región sobredensa se hace infinita ($\delta_{máx}(t) \to \infty$), mientras que $\delta_{min}(t)$ sigue siendo finita. El tiempo crítico para el cual esto pasa es

$$t_s = \frac{\tilde{M}^{-1}}{(-\alpha A_{min})^{3/2}}, \tag{5.170}$$

en el universo real cuando la densidad se hace infinita, el sistema virializa en forma de estructuras rotantes (galáxias,cúmulos,etc). Como un resultado $\delta_{máx}(t)$ en realidad puede llegar a un valor máximo (a menos que se forme un agujero negro) o en las partes sobredensas mantener la formación de grandes huecos vacíos. En este modelo no se permite considerar efectos de virialización y no se pueden obtener resultados mas alla de t_s .

5.3.3. Modelo de capas. La idea es determinar formas apropiadas para la función $E(r)$ que permitan describir estructura a gran escala. Dado que la función $A(r)$ controla el perfil de densidad y en particular se requiere que tenga un límite. Para este modelo

se asume un perfil de densidad senoidal, para el que se pueden tomar muchas longitudes de onda, pero en este caso para simplicidad del cálculo se toma una longitud de onda L, lo cual es suficiente para obtener un perfil de densidad que es senoidal en la coordenada comóvil r.

De (5.167) se requiere obtener oscilaciones periódicas por encima y por debajo de regiones densas, por lo tanto $A(r)$ debe ser periódico de la forma

$$A(r) = \left[\bar{A}_0 + A_1 sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.171}$$

integrando (5.164)

$$E(r) = \tilde{M}^2\left[r^2\bar{A}_0 + rA_0 - r\frac{A_1 L}{2\pi} cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.172}$$

tomando $A_0 = 0$ dado que no influye en el perfíl de densidad y da lugar a la curvatura se tiene que $E(r)$ toma la forma

$$E(r) = \tilde{M}^2\left[rA_0 - r\frac{A_1 L}{2\pi} cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.173}$$

con $A_0 = \frac{A_1 L}{2\pi}$ entonces

$$E(r) = \tilde{M}^2\frac{A_1 L}{2\pi}\left[1 - cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right] = \tilde{M}^2\frac{A_1 L}{2\pi} sen^2\left(\frac{\pi r}{L}\right), \tag{5.174}$$

entonces se define el modelo solamente con dos parámetros L y A_1 y reescribiendo para el modelo de capas R y R' se tiene

$$R(r,t) \approx (6\pi)^{1/3} r\left(\tilde{M}t\right)^{2/3}\left[1 + \frac{\epsilon}{2\pi}\frac{L}{r} sen^2\left(\frac{\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.175}$$

que de se puede expresar como

$$R'(r,t) \approx (6\pi)^{1/3}\left(\tilde{M}t\right)^{2/3}\left[1 + \epsilon sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.176}$$

donde se introduce la "amplitud de las oscilaciones"

$$\epsilon(t) = \alpha A_1\left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}}$$

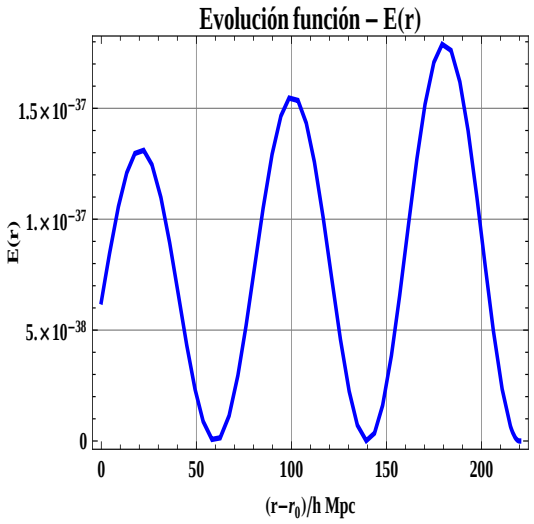

FIGURA 5.2. Función E(r) modelo de capas ec 5.175

para intervalos pequeños de tiempo R es proporcional a la coordenada r, esto ocurre cuando las inhomogeneidades son pequeñas. Se dedeuce para la métrica que R se encuentra relacionado con la distancia propia, esto es el intervalo como de tiempo entre dos puntos a lo largo del mismo rayo radial. Esta es una buena aproximación, excepto por un factor de proporcionalidad por lo cual se puede tratar la distancia coordenada r como "la distancia física". Lo que explica cómo tiene sentido considerar un perfíl que es justamente periódico en r. Para este modelo el perfil de densidad queda determinado como

$$\rho(r,t) = \frac{M_0^4}{6\pi\left(\tilde{M}t\right)^2\left[1+\epsilon\left(t\right)sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right]}, \tag{5.177}$$

con sobredensidad periódica y regiones vacías en capas, la amplitud de la densidad de contraste es controlada por la función $\epsilon\left(t\right)$ e incrementa con el tiempo.

Esta aproximación es muy buena dado que es posible encontrar una región bastante grande en el plano $r-t$ en la que $E(r)$ y u son pequeños. Esto lleva a un problema de singularidades dado que existe un tiempo t_s en el que la densidad de contraste explota, para este modelo

$$A_{min} = -A_{max} = -A_1 \quad con \qquad A_1 > 0 \tag{5.178}$$

para el que

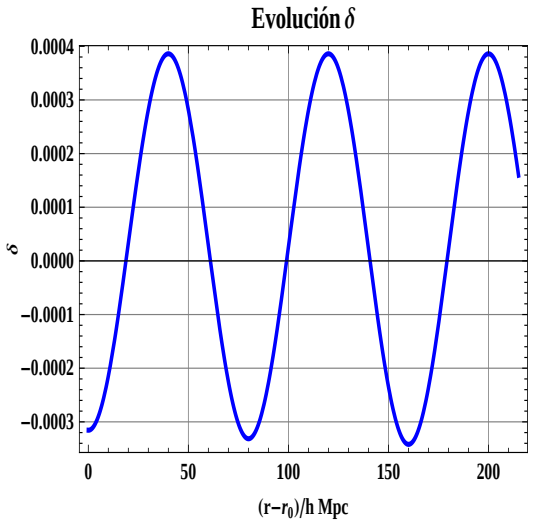

FIGURA 5.3. Perfil de densidad modelo de capas ec 5.177

$$t_s\tilde{M} = \frac{1}{(\alpha A_1)^{3/2}} \tag{5.179}$$

donde t_s es el tiempo crítico. De otra parte dado que se conoce la expresión para la densidad de contrate para el CMB, como una medida de COBE

$$\delta_{CMB} = \epsilon\delta_{CMB} = \alpha A_1(\tilde{M}t_{CMB})^{2/3} \tag{5.180}$$

y que se puede escribir cambiando CMB por C de la siguiente forma

$$\frac{t_s}{t_c} = \delta^{-3/2} \tag{5.181}$$

se obtiene una expresión que indica que las singularidades en el tiempo no dependen de la escala de las inhomogeneidades, si no de las fluctuaciones en la amplitud para la densidad. Es importante resaltar que la densidad de contraste es relevante para la formación de estructura con $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \mathcal{O}(1)$, por lo que se necesita hacer que t_s se encuentre cerca de t_o tiempo de observación. Dado que se trabaja en una región en donde $t < t_s$ es posible tener formación de estructura para redshift bajos, de tal manera que las escalas que se pueden describir con mayor precisión son las actuales, es decir con L del orden de varios $\frac{MPC}{h}$ (donde h se relaciona con el valor medido de la constante de Hubble H_0

por $H_0 = 100hkmsg^{-1}Mpc^{-1}$ que corresponde a la escala de las estructuras más grandes vistas como vacíos o supercúmulos. Sin embargo si se trabaja para $t < t_s$ con $\epsilon(t) < 1$ se ve de 5.168 que la mínima densidad de contraste que se puede tener para el modelo de capas es $\delta = -0{,}5$.

5.4. Trayectoria radial para los fotones y redshift

Este modelo de vacíos permite describir la estructura a gran escala no lineal del universo, permite calcular correciones para curvas D_L- z dadas las inhomogeneidades vistas como vacíos o supercúmulos que podemos observar en nuestro universo actual.

El modelo describe capas de alta densidad y vacíos, que para este caso serían los espacios entre las capas. Se considera una configuración física con el observador fuera del centro de la región LTB. Además, de esta se garantiza que los fotones se propaguen en una región para la que u siga siendo pequeño, y pueda ser controlada analíticamente. Por lo tanto, el observador se encuentra en algún r_0 distinto de cero, de tal forma que sea lo suficientemente grande cuando u es pequeño, pero no tan grande comparado con $E(r)$ de tal forma que este sigue siendo pequeño. A continuación, se consideran fuentes en posición variable $r > r_0$, siempre a lo largo de una trayectoria radial. En este caso, se pueden resolver las ecuaciones geodésicas numéricamente y también encontrar aproximaciones analíticas. De esta misma forma, es posible definir y calcular distancias angulares y de luminosidad.

5.4.1. Ecuación de las geodésicas nulas. La solución de la ecuación para las geodésicas nulas que se dirigen hacia el observador se pueden determinar a partir

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{R'\left(r, t\left(r\right)\right)}{\sqrt{1+2E\left(r\right)}}, \tag{5.182}$$

con $\beta = (6\pi)^{\frac{1}{3}}$ y $\epsilon = \alpha A_1 \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{dt\left(r\right)}{dr} = -\left(6\pi\right)^{\frac{1}{3}} \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}} \left[1 + \epsilon sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.183}$$

haciendo un cambio de variable $x = \left(\tilde{M}t\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{dx(r)}{dr} = -\beta\tilde{M}\left[1 + \alpha A_1 x^2 sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.184}$$

o también

$$dx(r) = -dr\beta\tilde{M}\left[1 + \alpha A_1 x^2 sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.185}$$

esta ecuación se puede solucionar analíticamente, pero existe un método que se denomina aproximación adiabática que se emplea en este cálculo donde se trata a la función $x(r)$, o de forma equivalente $t(r)$ como una función que varía suavemente con respecto a la función periódica. Esto hace que integrando o derivando nunca se encuentre un producto de $x(r)$ (o una de sus potencias) con una parte periódica , entonces no se consideran variaciones de $x(r)$ y se tratará como constante. La razón física es que esta es una buena aproximación dado que $x(r)$ esta determinada por la escala de Hubble (inversamente proporcional) una variación en la función periódica es inversamente proporcional a la escala de coherencia L. Es seguro hacer esta aproximación $\frac{L}{r_{hor}}$.

Aplicando este método a la ecuación diferencial $\frac{dt}{dr}$ se obtiene

$$x(r,t) = \left(\tilde{M}t_0\right)^{\frac{1}{3}} - \beta\tilde{M}(r - r_0)\left[1 - \frac{\alpha A_1 L}{2\pi(r - r_0)}x^2 cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right] \tag{5.186}$$

donde se asume que

$$cos\left(\frac{2\pi r_0}{L}\right) = 0$$

por ejemplo el observador se encuentra cerca a un mínimo o a un máximo del perfil de densidad.

Nótese que se puede obtener la expresión para FLRW si $A_1 \to 0$ .En este caso se obtendria la siguiente expresión

$$x(r) = x_0 - \beta\tilde{M}\,(r - r_0) \equiv x_F\,(r) \tag{5.187}$$

que es la relación para un universo de FLRW, se observa que es una buena aproximación a la solución de la ecuación. Derivando (5.185) con respecto a r

$$\frac{dx\,(r)}{dr}\left[1 - \frac{A_1\beta\alpha}{\pi}\left(\tilde{M}L\right)xcos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right] = -\beta\tilde{M}\left[1 - \alpha A_1 x^2 sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right] \tag{5.188}$$

comparando esta expresión con (5.184) se puede determinar que (5.185) es una buena solución aproximada siempre que el término adicional sea pequeño (con respecto a 5.185) si

$$w \equiv A_1 \frac{\alpha\beta}{\pi}(ML)\tilde{x} \ll 1, \tag{5.189}$$

donde esta es una función monótona en el tiempo y se tiene que

$$w_{max} = \delta_c \frac{\beta}{\pi} \frac{(\tilde{M}L)(\tilde{M}t_0)^{1/3}}{(\tilde{M}t_c)^{2/3}} \tag{5.190}$$

haciendo uso de (5.180). Para estimar esta cantidad notese que el horizonte para un x dado puede ser estimado usando justo el resultado FLRW (5.187) y haciendo uso de (5.181) entonces se tiene

$$w_{máx} = \frac{\delta_c}{\pi}\left(\frac{L}{r_{hor}(x_o)}\right)\left(\frac{t_o}{t_c}\right)^{2/3} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{L}{r_{hor}(x_o)}\right)\left(\frac{t_o}{t_s}\right)^{2/3} \ll 1 \tag{5.191}$$

de esta manera (5.186) es una buena aproximación.

resolviendo para $x(r)$se obtiene

$$x\left(r\right) = \frac{\left[1 - \sqrt{1 - 4\beta\alpha \frac{x_F(r) A_1 L\tilde{M}}{2\pi} cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)}\right]}{2\beta\alpha \frac{A_1 L\tilde{M}}{2\pi} cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)} \tag{5.192}$$

de manera que

$$t(r) = \tilde{M}^{-1} x^3\left(r\right), \tag{5.193}$$

se pude probar que (5.193) está en excelente acuerdo con la solución numérica.

Introduciendo la aproximación de orden lineal en A_1en (5.192)

$$x(r) \approx x_F\left(r\right)\left[1 + \alpha A_1 x_F\left(r\right) \frac{L\tilde{M}}{(6\pi)^{\frac{2}{3}}} cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.194}$$

que resulta siendo una excelente aproximación. Resulta interesante ver esta expresión como sigue

$$x(r) \approx x_F\left(r\right)\left[1 + \frac{\epsilon}{2\pi}\left(\frac{L}{r_{hor}}\right) cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.195}$$

de tal manera que se muestra explícitamente la dependencia de la corrección con los parámetros aparentes del modelo.

5.4.2. Cálculo del redshifft. Redshift para una fuente localizada a r, partimos de la expresión

$$\frac{dz}{dr} = \frac{(1+z)\,\dot{R}'}{\sqrt{1+2E}}, \tag{5.196}$$

considerando que $E(r)$ es mínimo

$$\frac{dz}{1+z} = \dot{R}'dr = 2\beta\tilde{M}\left[x^{-1}(r) + 2\alpha x(r)A(r)\right], \tag{5.197}$$

dado que

$$x^{-1}(r) \approx x_F^{-1}\left[1 + \alpha A_1 x_F(r)\frac{L\tilde{M}}{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right],^{-1} \tag{5.198}$$

lo cuál se puede expresar de la siguiente forma

$$x^{-1}(r) \approx x_F^{-1}\left[1 - \alpha A_1 x_F(r)\frac{L\tilde{M}}{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right)\right], \tag{5.199}$$

$$x^{-1}(r) \approx x_F^{-1} - \alpha A_1\frac{L\tilde{M}}{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right), \tag{5.200}$$

de tal manera que se puede escribir

$$\dot{R}' \approx 2\beta\tilde{M}\left[x_F^{-1}(r) - \alpha A_1\frac{L\tilde{M}}{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right) + 2\alpha x(r)A(r)\right], \tag{5.201}$$

y así

$$\frac{dz}{1+z} = 2\beta\tilde{M}\left[x_F^{-1}(r) - \alpha A_1\frac{L\tilde{M}}{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right) + 2\alpha x(r)A(r)\right], \tag{5.202}$$

como resultado de la integración se obtiene

$$ln(1+z) - lnc = -2lnx_{F(r)} - \frac{\tilde{M}L^2\alpha A_1}{3\pi\,(6\pi)^{\frac{1}{3}}}sen\left(\frac{2\pi r}{L}\right) - \frac{2}{\pi}\alpha\beta A_1\tilde{M}Lx(r)\,cos\left(\frac{2\pi r}{L}\right) \tag{5.203}$$

donde c es una constante de integración.

Capítulo 6

Ecuación de desvío geodésico

6.1. Ecuación de desvío geodésico

La ecuación del desvío geodésico permite determinar la estructura geométrica del espacio tiempo dada una métrica específica. Esta ecuación mide la separación entre dos geodésicas que evolucionan en el espacio tiempo y se expresa

$$\frac{D^2\eta^\alpha}{d\lambda^2} = R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}V^\beta V^\lambda \eta^\mu, \tag{6.204}$$

donde $\frac{D}{d\lambda}$ indica la derivada covariante a lo largo de la curva , λ es el parámetro afín, $V^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$ es el vector tangente a la geodésica, $R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}$ es el tensor de Riemann y η^α se conoce como el campo de Jacobi que define el desvío geodésico.

Para el caso de geodésicas nulas la ecuación de desvio geodésico toma la forma

$$\frac{D^2\eta^\alpha}{d\lambda^2} = R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}k^\beta k^\lambda \eta^\mu, \tag{6.205}$$

donde la geodésica nula esta definida a través de los vectores tangentes k^α que cumplen las siguientes relaciones

$$k^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \qquad k^\alpha{}_{;\beta}k^\beta = 0 \qquad k^\alpha k_\alpha = 0, \tag{6.206}$$

se construye una base ortonormal de vectores a lo largo de las trayectorias de luz, que permita describir la evolución de un haz de geodésicas. Estos vectores son; el vector tangente k^α, un vector nulo ω^α que satisface la condición $\omega^\alpha k_\alpha = -1$ y L_1, L_2 vectores como de espacio unitarios, ortogonales a los rayos de luz y ortogonales entre sí. A esta base se le conoce cómo el espacio pantalla. Tambien se requiere que estos vectores sean propagados paralelamente a lo largo de la trayectoria, manteniéndose ortogonales y normalizados; las condiciones a lo largo de la curva son:

$$kk = \omega\omega = 0, \qquad L_1L_2 = L_2L_2 = 1, \qquad k\omega = -1, \tag{6.207}$$

$$kL_1 = kL_2 = \omega L_1 = \omega L_2 = L_1 L_2 = 0, \tag{6.208}$$

6.2. Ecuaciones ópticas

La base ortonormal de vectores para el caso LTB se puede escribir de la siguiete manera

$$k = (k^0, k^1, 0, k^3), \tag{6.209}$$

$$L_1 = (0, 0, \frac{1}{R}, 0), \tag{6.210}$$

$$\omega = (\frac{hk^0R + k^1X}{k^3R}, \frac{k^0 + hRk^1X}{k^3XR}, 0, h), \tag{6.211}$$

$$L_2 = (\frac{h^0 + hR(2k^1X + hk^0R)}{2(k^3)^2R}, \frac{k^1X(h^2R^2 + 1) + 2hk^0R}{k^3XR}, 0, \frac{h^2R^2 - 1}{2k^3R^2}), \tag{6.212}$$

donde $h(r, t, u)$ es una función suave arbitraria. Estos vectores forman una base sobre cada punto de la geodésica permitiendo estudiar su evolución.

De la ecuación de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{6.213}$$

con el tensor de momento energía para un modelo de polvo

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.214}$$

se pude determinar que el escalar de Ricci para esta métrica es

$$R = 8\pi\rho. \tag{6.215}$$

De la ecuación de desvío geodésico, dos contribuciones principales correspondientes a el enfoque de Ricci, definido como $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta$, y el efecto del tensor de Weyl, puden ser calculados para esta métrica.

Se hace la contracción del tensor de Ricci con el vector nulo k

$$R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = \frac{1}{2}\rho g_{00}(k^0)^2 + \frac{1}{2}\rho g_{11}(k^1)^2 + \frac{1}{2}\rho g_{33}(k^3)^2. \tag{6.216}$$

obteniendose la siguiente expresión

$$R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = \frac{1}{2}\rho(k^0)^2 \tag{6.217}$$

que da cuenta del enfocamiento de Ricci para el haz de geodésicas.

Se realiza la contracción del tensor de Weyl (ver apéndice 3) con los vectores base L_1, L_2

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}L_1^\alpha k^\beta k^\gamma L_1^\delta = \frac{(k^3)^2R^2}{4M^2}\left(\rho - \frac{3\mathcal{M}(r)}{4\pi R^3}\right), \tag{6.218}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}L_1^\alpha k^\beta k^\gamma L_2^\delta = 0 \tag{6.219}$$

con $\mathcal{M}(r)$ la función de masa definida como

$$\dot{R}^2(r,t) = \frac{1}{8\pi M^2}\frac{\mathcal{M}(r)}{R} + f(r) \tag{6.220}$$

con ρ la densidad de polvo.

Este resultado muestra que el tensor de Weyl no es nulo y produce una deformación para el haz de geodésicas. Esta expresión también muestra que para el caso de FRLW el lado derecho del paréntesis se reduce a la densidad media y se retorna a una contribución nula del tensor de Weyl.

6.3. Geodésicas nulas

A continuación se obtienen las expresiones para las componentes k^α que deben ser solucionadas simultaneamente para obtener la evolución completa del haz.

Teniendo en cuenta que la métrica para LTB es

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(r,t)dr^2 + R^2(r,t)(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)$$

que la ecuación de las geodésicas viene dada por la siguiente expresión

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

y definiendo el vector tangente

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{6.221}$$

para la coordenada 0 que corresponde a la coordenada t

$$k^0 = \frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} \tag{6.222}$$

que se expresa como un operador

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda}\frac{d}{dt} \tag{6.223}$$

$$\frac{d}{d\lambda} = k^0\frac{d}{dt} \tag{6.224}$$

e introduciendo este operador en la ecuación de las geodésicas

$$\frac{dk^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

toman la siguiente forma

$$k^0\frac{dk^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho}k^\beta k^\rho = 0$$

$$k^0\frac{dk^0}{dt} + \Gamma^o_{\beta\rho}k^\beta k^\rho = 0 \tag{6.225}$$

$$k^0\frac{dk^1}{dt} + \Gamma^1_{\beta\rho}k^\beta k^\rho = 0 \tag{6.226}$$

$$k^0\frac{dk^2}{dt} + \Gamma^2_{\beta\rho}k^\beta k^\rho = 0 \tag{6.227}$$

$$k^0\frac{dk^3}{dt} + \Gamma^3_{\beta\rho}k^\beta k^\rho = 0 \tag{6.228}$$

que toman la siguiente forma introduciendo las conexiones correspondientes a la métrica LTB:

$$k^0\frac{dk^0}{dt} + X\dot{X}k^1k^1 + R\dot{R}k^2k^2 + R\dot{R}sin^2\theta k^3k^3 = 0 \tag{6.229}$$

$$k^0\frac{dk^1}{dt} + \frac{X^{'}}{X}k^1k^1 + \frac{\dot{X}}{X}k^0k^1 - \frac{RR^{'}}{X^2}k^2k^2 - \frac{RR^{'}}{X^2}sin^2\theta k^3k^3 = 0 \tag{6.230}$$

$$k^0\frac{dk^3}{dt} + \frac{\dot{R}}{R}k^0k^3 + \frac{R^{'}}{R}k^1k^3 + cot\theta k^2k^3 = 0 \tag{6.231}$$

Considerando geodésicas nulas sobre el plano $\theta = \pi/2$ y las siguientes relaciones obtenidas de las ecuaciones de Einstein para la métrica LTB

$$X = \frac{R'}{C(r)} \qquad C = \sqrt{1+f(r)} \tag{6.232}$$

$$\dot{X} = \frac{\dot{R}}{C(r)} \qquad C' = \frac{f^{'}}{2C} \tag{6.233}$$

donde $()$ derivada con respecto al tiempo y $()'$ derivada con respecto a r, se escribe el conjunto de ecuaciones de la siguiente manera

$$k^0\frac{dk^0}{dt} + \frac{\dot{R}'R'}{1+f}\left(k^1\right)^2 + R\dot{R}\left(k^3\right)^2 = 0 \tag{6.234}$$

$$k^0\frac{dk^1}{dt} + \frac{\dot{R}'}{R'}k^0k^1 + \left(\frac{R''}{R'} - \frac{f'}{2\left(1+f\right)}\right)\left(k^1\right)^2 - \left(1+f\right)\frac{R}{R'}\left(k^3\right)^2 = 0 \tag{6.235}$$

$$k^0\frac{dk^3}{dt} + 2\frac{\dot{R}}{R}k^0k^3 + \frac{R'}{R}k^1k^3 = 0 \tag{6.236}$$

adicionalmente la condición nula

$$-\left(k^0\right)^2 + \frac{R^{'2}}{1+f}\left(k^1\right)^2 + R^2\left(k^3\right)^2 = 0 \tag{6.237}$$

para determinar k^α es necesario resolver este sistema de ecuaciones o utilizar las ecuaciones de Euler Lagrange equivalentes a las ecuaciones geodésicas

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{6.238}$$

que para el caso LTB

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(- \left(\dot{x}^0\right)^2 + \frac{R'^2}{1+f} \left(\dot{x}^1\right)^2 + R^2 \left(\dot{x}^2\right)^2 + R^2 \left(\dot{x}^3\right)^2 \right) \tag{6.239}$$

con

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{6.240}$$

para la coordenada φ

$$\frac{d}{dt} \left[R^2 k^3 \right] = 0 \tag{6.241}$$

de donde se obtiene que

$$k^3 = \frac{c_\varphi}{R^2} \tag{6.242}$$

con c_φ una constante.

Para el caso de geodésicas radiales , θ, φ constantes, lo cual implica $k^2 = k^3 = 0$.

La componente k^0 obedece (6.234)

$$k^0 \frac{dk^0}{dt} + \frac{\dot{R}' R'}{1+f} \left(k^1\right)^2 = 0 \tag{6.243}$$

utilizando la condición nula (6.237), $(k^1)^2$ es

$$\left(k^1\right)^2 = \frac{\left(k^0\right)^2}{R'^2} (1+f) \tag{6.244}$$

reemplazando en (6.243)

$$\frac{dk^0}{dt} + \frac{\dot{R}'}{\dot{R}}k^0 = 0 \tag{6.245}$$

expresión diferencial para k^0

$$\frac{1}{k^0}\frac{dk^0}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\ln R'\right) = 0$$

que puede ser integrada

$$\int \frac{1}{k^0}\frac{dk^0}{dt} = -\int \frac{d}{dt}\left(\ln R'\right)$$

para obtener

$$k^0 = \frac{c_t}{R'} \tag{6.246}$$

con c_t una constante. Dada una forma funcional para el factor de escala $R(r,t)$ se tiene la solución para k de manera explícita. Para el caso FLRW si se toma la función $R = a(t)r$ se obtiene la solución familiar $k^0 = \frac{1}{a}$.

6.4. Ecuación de desvío geodésico - observadores fundamentales

- Caso especial para observadores fundamentales

Como se mostró anteriormente la ecuación[14, 26, 27, 28] de desvío geodésico permite determinar la geometría del espacio tiempo y tiene la forma

$$\frac{D^2\eta^\alpha}{d\tau^2} = R^\alpha_{\beta\gamma\delta}V^\beta\eta^\alpha V^\delta, \tag{6.247}$$

para el caso de observadores fundamentales el cuadrivector $V^\alpha = u^\alpha = (-1,0,0,0)$ y el tensor de Riemann es necesario expresarlo en términos de sus componentes, la forma de hacerlo se describe a continuación:

componentes asociadas a la parte con traza del tensor de Riemann

$R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ componente que depende del tensor de Ricci y se asocia con un fluido perfecto

$R_I^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ componente que depende del tensor de Ricci y se asocia con un fluido anisotrópico

Las otras dos son las componentes del tensor de Weyl asociado a la parte sin traza del tensor de Riemann

$R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ componente eléctrica del tensor de Weyl (nombre que recibe por sus propiedades)

$R_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ componente magnética del tensor de Weyl (nombre que recibe por sus propiedades) de acuerdo con lo anterior se puede escribir el tensor de Riemann de la siguiente forma

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + R_I^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + R_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \tag{6.248}$$

teniendo en cuenta que para este modelo $R_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 0$ y $R_I^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 0$ el tensor de Riemann se reduce a

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} + R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \tag{6.249}$$

Para obtener $R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ se parte del tensor de Riemann sin el término que corresponde al tensor de Wyle

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}\right) - \frac{1}{6}R\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right)$$

De las ecuaciones de campo de Einstein se puede determinar el tensor de Ricci en terminos del tensor momento energía como

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta} \tag{6.250}$$

donde se obtiene que el escalar de curvatura se expresa cómo:

$$R = 8\pi\rho \tag{6.251}$$

la expresión para el tensor de Ricci queda entonces de la siguiente manera

$$R_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \frac{1}{2}\rho g_{\alpha\beta}$$

con u^α vector tangente como de tiempo normalizado ($u_\alpha u^\alpha = -1$)

de esta forma es posible obtener para el tensor de Riemann

$$R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}\right) - \frac{1}{6}R\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right)$$

$$R_P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = \left(\frac{1}{2}\left(\rho u_\alpha u_\gamma + \frac{1}{2}\rho g_{\alpha\gamma}\right) g_{\beta\delta} - \left(\rho u_\alpha u_\delta + \frac{1}{2}\rho g_{\alpha\delta}\right) g_{\beta\gamma} \tag{6.252}$$

$$+\left(\rho u_\beta u_\delta + \frac{1}{2}\rho g_{\beta\delta}\right) g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma}(\rho u_\beta u_\gamma + \frac{1}{2}\rho g_{\beta\gamma}) g_{\alpha\delta} + -\frac{1}{6}\rho\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right)\Big)$$

de lo cual se obtiene

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\rho(g_{\alpha\gamma}u_\beta u_\delta - g_{\alpha\delta}u_\beta u_\gamma + g_{\beta\delta}u_\alpha u_\gamma - g_{\beta\gamma}u_\alpha u_\delta) + \frac{1}{3}(g_{\alpha\gamma}g_\beta - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \tag{6.253}$$

y para $R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ componente eléctrica del tensor de Weyl

$$R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 4u^{[\alpha}u_{[\gamma}E^{\beta]}_{\delta]} + 4h^{[\alpha}_{[\gamma}E^{\beta]}_{\delta]} \tag{6.254}$$

$$R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 2u^\alpha u_{[\gamma}E^\beta_{\delta]} - 2u^\beta_{[\gamma}E^\alpha_{\delta]} + 2h^\alpha{}_{[\gamma}E^\beta_{\delta]} - 2h^\beta_{[\gamma}E^\alpha_{\delta]}$$

$$R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 2u^\alpha u_{[\gamma}E^\beta_{\delta]} - 2u^\beta_{[\gamma}E^\alpha_{\delta]} + 2h^\alpha_{[\gamma}E - 2h^\beta_{[\gamma}E^\alpha_{\delta]}$$

$$R_E^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = u^\alpha u_\gamma E^\beta_\delta - u^\alpha u_\delta E^\beta_\gamma - u^\beta u_\gamma E^\alpha_\delta + u^\beta u_\delta E^\alpha_\gamma + h^\alpha_\gamma E^\beta_\delta - h^\alpha_\delta E^\beta_\gamma - h^\beta_\gamma E^\alpha_\delta + h^\beta_\delta E^\alpha_\gamma$$

Bajando el índice β , tenemos:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = u^\alpha u_\gamma E_{\beta\delta} - u^\alpha u_\delta E_{\beta\gamma} - u_\beta u_\gamma E^\alpha_\delta + u_\beta u_\delta E^\alpha_\gamma + h^\alpha_\gamma E_{\beta\delta} - h^\alpha_\delta E_{\beta\gamma} - h_{\beta\gamma}E^\alpha_\delta + h_{\beta\delta}E^\alpha_\gamma$$

Sea un campo vectorial normalizado V^α

$$R_E^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta = \big(u^\alpha u_\gamma E_{\beta\delta}V^\beta V^\delta - u^\alpha u_\delta E_{\beta\gamma}V^\beta V^\delta - u_\beta u_\gamma E^\alpha_\delta V^\beta V^\delta + u_\beta u_\delta E^\alpha_\gamma V^\beta V^\delta$$

$$+h^\alpha_\gamma E_{\beta\delta}V^\beta V^\delta - h^\alpha_\delta E_{\beta\gamma}V^\beta V^\delta - h_{\beta\gamma}E^\alpha_\delta V^\beta V^\delta + h_{\beta\delta}E^\alpha_\gamma V^\beta V^\delta\big)$$

De donde

$$R_E^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}V^\beta V^\delta = u_\beta u_\delta E^\alpha_\gamma V^\beta V^\delta + h_{\beta\delta}E^\alpha_\gamma V^\beta V^\delta$$

si hacemos

$$V^{\alpha} = u^{\alpha}$$

$$R^{\alpha}_{E\ \ \beta\gamma\delta} V^{\beta} V^{\delta} = E^{\alpha}_{\gamma} + E^{\alpha}_{\gamma} \left(g_{\beta\delta} + u_{\beta} u_{\delta} \right) u^{\beta} u^{\delta}$$

considerando las dos componentes del tensor de Rieman la ecuación de desvío geodésico para observadores fundamentales en LTB toma la forma

$$\frac{D^2 \eta^{\alpha}}{d\tau^2} = \left(\frac{1}{6} \mu h^{\alpha}_{\gamma} + E^{\alpha}_{\gamma} \right) \eta^{\mu}, \tag{6.255}$$

donde $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta}$ es el tensor de proyección ortogonal

con E^{α}_{γ} expresadas de la siguiente manera en términos de $X(r,t)$ y $R(r,t)$ y sus derivadas con respecto t y con respecto a r

$$E^{r}_{r} = \frac{1}{3X^3 R^2} \left(X^2 R \left(\dot{X} \dot{R} - R \ddot{X} \right) - X^3 \left(1 + \dot{R}^2 - R \ddot{R} \right) \right.$$

$$\left. + R X' R' + X \left((R')^2 - R R'' \right) \right), \tag{6.256}$$

$$E^{\theta}_{\theta} = \frac{1}{6X^3 R^2} \left(X^2 R - \dot{X} \dot{R} + R \ddot{R} + X^3 \left(1 + \left(\dot{R}^2 - \ddot{R} R \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - R X' R' \right) + X \left(R R'' - (R')^2 \right) \right), \tag{6.257}$$

$$E^{\varphi}_{\varphi} = \frac{1}{6X^3 R^2} \left(X^2 R \left(-\dot{X} \dot{R} + R \ddot{X} \right) - R X' R' \right.$$

$$\left. + X^3 \left(1 + \dot{R}^2 - R \ddot{R} \right) - R X' R' + X \left(- (R')^2 + R R'' \right) \right), \tag{6.258}$$

se observa que en el límite en que los factores son iguales el tensor de Weyl se anula. Como se observa en la ecuación de desvío geodésico las componentes no se mezclan, debido a que se supone vectores tangentes a las geodésicas similares a los observadores fundamentales

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo del desarrollo de la presente tesis se abordaron diferentes etapas:

1. Estudio de los modelos cosmológicos inhomogéneos en el marco de las soluciones exáctas de las ecuaciones de campo de Einstein.
2. Se analizan las condiciones básicas del modelo de LTB y se muestran casos particulares del mismo como FLRW, pero además la solución permite ampliar el espectro de modelos exáctos incluyendo inhomogeneidades.
3. Se estudia una solución paramétrica particular conocida como modelo de capas la cual generaliza el modelo de colapso esférico en la cosmología estándar y extiende de manera natural el concepto de cúmulo (apropiado para estudiar estructuras como galaxias y aglomerados de las mismas) pero además analíticamente ofrece la opción de caracterizar los "vacíos del universo" (voids).
4. Como parte central del trabajo se obtienen las ecuaciones para la propagación de haces de luz mediante el uso de la ecuación de desvío geodésico en la métrica LTB mostrando el papel de la materia en el enfocamiento de los haces de geodésicas y además, contrario al caso del modelo estándar FLRW el espacio tiempo LTB presenta shear no nulo produciendo un efecto de distorsión y enfocamiento de las geodésicas. Este último efecto es de vital importancia para futuras observaciones en cosmología.

Apéndice (1)

A continuación determinamos las ecuaciones de Einstein para la métrica LTB Para determinar las conexiones

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left\{ g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma} \right\} \tag{7.259}$$

para la métrica LTB se tienen los siguientes factores métricos

$g_{00} = -1$

$g_{11} = X^2(r,t)$

$g_{22} = R^2(r,t)$

$g_{33} = R^2(r,t)$

$$\Gamma^{0}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{0\sigma} \left\{ g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma} \right\} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ g_{\beta 0,\gamma} + g_{\gamma 0,\beta} - g_{\beta\gamma,0} \right\}$$

$$\Gamma^{0}_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2} g^{00} \left\{ -g_{\beta\gamma,0} \right\}$$

De donde los factores no nulos son:

$$\Gamma^{0}_{11} = \tfrac{1}{2} g^{00} \left\{ -g_{11,0} \right\}$$

$$\Gamma^{0}_{22} = \tfrac{1}{2} g^{00} \left\{ -g_{22,0} \right\}$$

$$\Gamma^{0}_{33} = \tfrac{1}{2} g^{00} \left\{ -g_{33,0} \right\}$$

para $\alpha = 1$

$\Gamma^{1}_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2} g^{11} \left\{ g_{\beta 1,\gamma} + g_{\gamma 1,\beta} - g_{\beta\gamma,1} \right\}$

de donde los factores no nulos son:

$$\Gamma^{1}_{11} = \tfrac{1}{2} g^{11} \left\{ g_{11,1} \right\}$$

$$\Gamma^{1}_{22} = \tfrac{1}{2} g^{11} \left\{ -g_{22,1} \right\}$$

$$\Gamma^{1}_{33} = \tfrac{1}{2} g^{11} \left\{ g_{33,1} \right\}$$

$$\Gamma^{1}_{10} = \Gamma^{1}_{01} = \tfrac{1}{2} g^{11} \left\{ g_{11,0} \right\}$$

para $\alpha = 2$

$\Gamma^2_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{22} \{g_{\beta 2,\gamma} + g_{\gamma 2,\beta} - g_{\beta\gamma,2}\}$

donde los factores no nulos son:

$$\Gamma^2_{33} = \tfrac{1}{2} g^{22} \{-g_{33,2}\}$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \tfrac{1}{2} g^{22} \{g_{22,1}\}$$
$$\Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{02} = \tfrac{1}{2} g^{22} \{g_{22,0}\}$$

para $\alpha = 3$

$\Gamma^3_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{33} \{g_{\beta 3,\gamma} + g_{\gamma 3,\beta} - g_{\beta\gamma,3}\} = \frac{1}{2} g^{33} \{g_{\beta 3,\gamma} + g_{\gamma 3,\beta}\}$

de donde los factores no nulos son:

$$\Gamma^3_{30} = \Gamma^3_{03} = \tfrac{1}{2} g^{33} \{g_{33,0}\}$$
$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \tfrac{1}{2} g^{33} \{g_{33,2}\}$$
$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \tfrac{1}{2} g^{33} \{g_{33,1}\}$$

las conexiones no nulas para esta métrica son:

$\Gamma^0_{11} = \dot{X} X$ $\qquad$ $\Gamma^0_{22} = \dot{R} R$ $\qquad$ $\Gamma^2_{33} = \dot{R} R sin^2\theta$

$\Gamma^1_{11} = \frac{X'}{X}$ $\qquad$ $\Gamma^1_{22} = -\frac{RR'}{X^2}$ $\qquad$ $\Gamma^1_{33} = \frac{\dot{R}R' sin^2\theta}{X^2}$

$\Gamma^1_{10} = \frac{\dot{X}}{X}$ $\qquad$ $\Gamma^2_{21} = \frac{R'}{R}$ $\qquad$ $\Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{R}}{R}$

$\Gamma^3_{31} = \frac{R'}{R}$ $\qquad$ $\Gamma^2_{33} = -sin\theta cos\theta$ $\qquad$ $\Gamma^3_{32} = cot\theta$

con $X(r,t)$y $R(r,t)$ $\dot{} = \frac{d}{dt}$ y $' = \frac{d}{dr}$

Las componentes del tensor de Ricci dadas por la expresion

$$R_{\beta\gamma} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} \tag{7.260}$$

son:

$$R_{00} = R^{\alpha}_{0\alpha 0} = \Gamma^{\alpha}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0,0} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma 0}\Gamma^{\sigma}_{\alpha 0}$$

$$R_{00} = -\left(\Gamma^1_{10,0} + \Gamma^2_{20,0} + \Gamma^3_{30,0}\right) - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{10} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{20} - \Gamma^3_{30} \tag{7.261}$$

$$R_{11} = R^{\alpha}_{1\alpha 1} = \Gamma^{\alpha}_{11,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha 1,1} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{11} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma 1}\Gamma^{\sigma}_{\alpha 1}$$

$$R_{11=}\Gamma^0_{11,0} - \Gamma^2_{21,1} - \Gamma^3_{31,1} + \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{11} + \Gamma^3_{30}\Gamma^0_{11} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{11} - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{21}\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{31} \tag{7.262}$$

$$R_{22} = R^{\alpha}_{2\alpha 2} = \Gamma^{\alpha}_{22,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha 2,2} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{22} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma 2}\Gamma^{\sigma}_{\alpha 2}$$

(7.263)
$$R_{22} = \Gamma^{0}_{22,0} + \Gamma^{1}_{22,1} - \Gamma^{3}_{32,2} + \Gamma^{1}_{10}\Gamma^{0}_{22} + \Gamma^{3}_{30}\Gamma^{0}_{22} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{1}_{22} - \Gamma^{3}_{32}\Gamma^{3}_{32} - \Gamma^{2}_{02}\Gamma^{0}_{22} - \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12}$$

$$R_{33} = R^{\alpha}_{3\alpha 3} = \Gamma^{\alpha}_{33,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha 3,3} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{33} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma 3}\Gamma^{\sigma}_{\alpha 3}$$

(7.264)
$$R_{33} = \Gamma^{0}_{33,0} + \Gamma^{1}_{33,1} - \Gamma^{2}_{33,2} + \Gamma^{1}_{10}\Gamma^{0}_{33} + \Gamma^{2}_{20}\Gamma^{0}_{33} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{33} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{33} - \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{0}_{33} - \Gamma^{3}_{13}\Gamma^{1}_{33} - \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{2}_{33}$$

Para la métrica LTB

$$R_{00} = -\left(\frac{\dot{X}}{X}\right)_{,0} - 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{,0} - \left(\frac{\dot{X}}{X}\right)^{2} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{2} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{2}$$

$$R_{00} = -\left(\frac{\ddot{X}}{X}\right) + \left(\frac{\dot{X}}{X}\right)^{2} - 2\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) - 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{2} - \left(\frac{\dot{X}}{X}\right)^{2} - 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{2}$$

(7.265)
$$R_{00} = -\left(\frac{\ddot{X}}{X}\right) - 2\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)$$

$$R_{11} = X\dot{X}_{,0} - 2\left(\frac{R^{'}}{R}\right)_{,1} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)X\dot{X} + 2\left(\frac{R^{'}}{R}\right)\left(\frac{X^{'}}{X}\right) - \left(\frac{\dot{X}}{X}\right)X\dot{X} - 2\left(\frac{R^{'}}{R}\right)^{2}$$

(7.266)
$$R_{11} = X\ddot{X} - 2\left(\frac{R^{''}}{R}\right) + 2\left(\frac{\dot{R}\dot{X}X}{R}\right) + 2\left(\frac{R^{'}X^{'}}{RX}\right)$$

$$R_{22} = R\dot{R}_{,0} - \left(\frac{RR^{'}}{X^{2}}\right)_{,1} - cot\theta_{,2} + \left(\frac{\dot{X}}{X}\right)R\dot{R} - \left(\frac{X^{'}}{X}\right)\left(\frac{RR^{'}}{X^{2}}\right) - cot^{2}\theta$$

(7.267)
$$R_{22} = \dot{R}^{2} + \ddot{R}R + \left(\frac{X^{'}RR^{'}}{X^{3}}\right) + \left(\frac{R\dot{R}\dot{X}}{X}\right) - \left(\frac{R^{'2}}{X^{2}}\right) - \left(\frac{R^{''}R}{X^{2}}\right) - cot^{2}\theta - csc^{2}\theta$$

$$R_{33} = R\dot{R}sen^{2}\theta_{,0} - \left(\frac{RR^{'}sen^{2}\theta}{X^{2}}\right)_{,1} - sen\theta cos\theta_{,2} + \left(\frac{\dot{X}}{X}\right)R\dot{R}sin^{2}\theta - \left(\frac{X^{'}}{X}\right)\left(\frac{RR^{'}sin^{2}\theta}{X^{2}}\right) + cos^{2}\theta$$

(7.268)

$$R_{33} = R\ddot{R}sen^2\theta - RR''\frac{RR''}{X^2}\frac{R'^2sen^2\theta}{X^2} + \frac{RR'X'sen^2\theta}{X^3} + sen^2\theta + \frac{\dot{X}R\dot{R}sen^2\theta}{X} + \dot{A}^2sen^2\theta$$

Para R el escalar de curvatura se obtiene

$$R = \frac{2\ddot{X}}{X} + \frac{2}{R^2} + \frac{4\dot{X}\dot{R}}{RX} - \frac{2R'^2}{R^2X^2} - \frac{4R''}{RX^2} + \frac{4\ddot{R}}{R} + \frac{4R'X'}{RX^3} + \frac{2\dot{R}}{R^2} \tag{7.269}$$

Las ecuaciones de Eintein para esta métrica quedan de la siguiente manera

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = T_{00}$$

$$-\frac{2R''}{RX^2} + \frac{2R'X'}{RX^3} + \frac{2\dot{X}\dot{R}}{RX} + \frac{1}{R^2} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \left(\frac{R'}{RX}\right)^2 = T_{00} \tag{7.270}$$

$$R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} = T_{11}$$

$$-\frac{2\ddot{R}X^2}{R} - \frac{\dot{R}^2X^2}{R^2} + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{X^2}{R^2} = T_{11} \tag{7.271}$$

$$R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} = T_{22}$$

$$-R^2\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}\dot{X}}{RX} + \frac{\ddot{X}}{X} - \frac{R''}{RX^2} + \frac{R'X'}{RX^3}\right) = T_{22} \tag{7.272}$$

$$R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} = T_{33}$$

$$-R^2sen^2\theta\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}\dot{X}}{RX} + \frac{\ddot{X}}{X} - \frac{R''}{RX^2} + \frac{R'X'}{RX^3}\right) = T_{33} \tag{7.273}$$

Apéndice (2)

Ecuaciones de Friedmann para el modelo LTB

De la solución de las ecuaciones de Einstein para la componente T_1^0 se obtiene

$$X(r,t) = \frac{R'}{\sqrt{1-k(r)}}, \tag{7.274}$$

si se hace $C = \frac{1}{\sqrt{1-k(r)}}$

$$X' = C^3 k'(r) R' + C R'', \tag{7.275}$$

con

$$X^2 = C^2 R'^2, X^3 = C^3 R'^3, \tag{7.276}$$

utilizando el resultado de las ecuaciones de Einstein para la componente T_1^1

$$-\frac{2R''}{RC^2R'^2} + \frac{2R'(C'+CR'')}{RC^3R'^3} + \frac{2\dot{R}'\dot{R}}{RCR'} + \frac{1}{R^2} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \left(\frac{R'}{RCR'}\right)^2 = 8\pi G(\rho_M + \rho_\Lambda), \tag{7.277}$$

de donde se obtiene la primera de las ecuaciones independientes

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k(r)}{R^2} + \frac{2\dot{R}'\dot{R}}{RR'} + \frac{k'(r)}{RR'} = 8\pi G(\rho_M + \rho_\Lambda). \tag{7.278}$$

De las ecuaciones de Einstein para componente T_2^2 se tiene

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2X^2} = 8\pi G\rho_\Lambda, \tag{7.279}$$

de la cual se obtiene la segunda ecuación independiente

$$\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R + k(r) = 8\pi G\rho_\Lambda R^2 \tag{7.280}$$

la primera integal de (7.280) es

$$R\dot{R}^2 + k(r)R - \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda R^3 = F(r) \tag{7.281}$$

con $F(r)$ una función de integración dado $k(r)$, esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\dot{R}^2}{R} = \frac{F(r)}{R^3} + \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda - \frac{k(r)}{R^2} \tag{7.282}$$

Apéndice (3)

Tensor de Weyl

Las componentes no nulas del tensor de Weyl para la métrica LTB son

$C_{1212}, C_{1313}, C_{1414}, C_{2323}, C_{2424}, C_{3434}$

estas componentes se pueden escribir de la siguiente manera en términos de P siendo

$$P = R^2X^2\ddot{X} + RR''X - R\dot{R}X^2\dot{X} - X'RR' - R\ddot{R}X^3 + \dot{R}^2X^3 - R'^2X + X^3 \tag{7.283}$$

de esta manera se tiene

$$C_{1313} = \frac{1}{6X^3}P \tag{7.284}$$

$$C_{2323} = \frac{-1}{6X}P \tag{7.285}$$

$$C_{3434} = \frac{R^2}{3X^3} \tag{7.286}$$

para el propósito del trabajo es necesario hallar la contracción del tensor de Weyl con $L_1 = (\ 0, \quad 0, \quad \frac{1}{R} \quad 0\ )$ y $k = (\ k^0, \quad k^1, \quad 0, \quad k^3\ )$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}L_1^\alpha k^\beta k^\gamma L_1^\delta \tag{7.287}$$

es necesario aplicar las propiedades de simetría para el tensor de Riemann

$R_{1234} = -R_{2134} = -R_{1234}$ para este caso tenemos $C_{1313} = -C_{3131}$, $C_{2323} = -C_{3223}$,$C_{3434} = -C_{3443}$

de esta manera se puede calcular la contracción

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}L_1^\alpha k^\beta k^\gamma L_1^\delta = -\frac{1}{6X^3}P\frac{1}{R^2}(k^0)^2 + \frac{1}{6X}\frac{1}{R^2}P(k^1)^2 + \frac{1}{3X^3}P(k^3)^2 \tag{7.288}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}L_1^\alpha k^\beta k^\gamma L_1^\delta = \frac{P}{6R^2X}\left((k^1)^2 + \frac{2(k^3)^2R^2}{X^2} - \frac{(k^0)^2}{X^2}\right) \tag{7.289}$$

para la que se puede aplicar la condición nula

$$0 = (k^0)^2 - X^2(k^1)^2 - R^2(k^3)^2 \tag{7.290}$$

de donde

$$(k^1)^2 = \frac{(k^0)^2}{X^2} - \frac{R^2(k^3)^2}{X^2} \tag{7.291}$$

llevando al la ecuación para $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se reduce a

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}L_1^\alpha k^\beta k^\gamma L_1^\delta = \frac{P}{6R^2X}\left(\frac{(k^0)^2}{X^2} - \frac{R^2(k^3)^2}{X^2} + \frac{2(k^3)^2R^2}{X^2} - \frac{(k^0)^2}{X^2}\right) \tag{7.292}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}L_1^\alpha k^\beta k^\gamma L_1^\delta = \frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 \tag{7.293}$$

teniendo en cuenta que se tiene una expresión para P

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2}{2X^3}\left(R^2X^2\ddot{X} + RR''X - R\dot{R}X^2\dot{X} - X'RR' - R\ddot{R}X^3 + \dot{R}^2X^3 - R'^2X + X^3\right) \tag{7.294}$$

multiplicando por R^2 e introduciendo X^3 se obtiene

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2R^2}{2}\left(\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{R''}{RX^2} - \frac{\dot{R}\dot{X}}{RX} - \frac{X'R'}{RX^3} - \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{R'^2}{R^2X^2} + \frac{1}{R^2}\right) \tag{7.295}$$

introduciendo la expresión $\frac{\ddot{X}}{X}$ que obtiene de las ecuaciones de Einstein para la componente T_{22} y simplificando

(7.296)
$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(-2\frac{\ddot{R}}{R} - 2\frac{\dot{R}\dot{X}}{RX} + 2\frac{R''}{RX^2} - 2\frac{R'X'}{RX^3} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{R'^2}{R^2X^2} + \frac{1}{R^2}\right)$$

haciendo uso de la expresión para $\frac{\dot{R}^2}{R^2}$ que se obtiene de la ecuaciones de Einstein para la componenete T_{11} y simplificando

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(-4\frac{\ddot{R}}{R} - 2\frac{\dot{R}\dot{X}}{RX} + 2\frac{R''}{RX^2} - 2\frac{R'X'}{RX^3}\right) \tag{7.297}$$

y teniendo en cuenta que

$$-2\frac{\dot{R}\dot{X}}{RX} + 2\frac{R''}{RX^2} - 2\frac{R'X'}{RX^3} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{R'^2}{R^2X^2} + \frac{1}{R^2} - \frac{\rho}{2M^2} \tag{7.298}$$

de las ecuaciones de Einstein para la componenete T_{00} se obtiene para

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(-4\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{R'^2}{R^2X^{32}} - \frac{\rho}{2M^2}\right) \tag{7.299}$$

nuevamente haciendo uso de la expresión para $\frac{\dot{R}^2}{R^2}$ se obtiene

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(\frac{3}{R^2} + 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - 3\frac{R'^2}{R^2X^{32}} - \frac{\rho}{2M^2}\right) \tag{7.300}$$

que se pude escribir de la forma

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{3}{R^2}\left(\frac{R'^2}{X^2} - 1\right) - \frac{\rho}{2M^2}\right) \tag{7.301}$$

haciendo uso de la componente T_{10} de las ecuaciones de Einstein se obtiene la siguiente expresión

$$(\frac{R'^2}{X^2} - 1) = f(r) \tag{7.302}$$

con lo cual nuestra expresión se reduce a

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{3}{R^2}f(r) - \frac{\rho}{2M^2}\right) \tag{7.303}$$

teniendo en cuenta que para este modelo

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{\mathcal{M}(r)}{8\pi M^2 R} + f(r)\right) \tag{7.304}$$

con $\mathcal{M}(r)$ función de masa del fluido arbitraria se tiene

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(\frac{3}{R^2}\left(\frac{3\mathcal{M}(r)}{8\pi M^2 R^3}\right) - \frac{\rho}{2M^2}\right) \tag{7.305}$$

de lo que se obtiene

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = -\frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{2}\left(\frac{3\mathcal{M}(r)}{8\pi M^2 R^3} - \frac{\rho}{2M^2}\right) \tag{7.306}$$

la cuál toma la siguiente forma

$$\frac{-P}{2X^3}\left(k^3\right)^2 = \frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{4M^2}\left(\rho - \frac{3\mathcal{M}(r)}{4\pi R^3}\right) \tag{7.307}$$

que es la expresión para

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}Lk^\beta k^\gamma L_1^\rho = \frac{\left(k^3\right)^2 R^2}{4M^2}\left(\rho - \frac{3\mathcal{M}(r)}{4\pi R^3}\right) \tag{7.308}$$

Apéndice (4)

Curvatura triespacial en LTB

Uno de los resultados mas sorprendentes de la relatividad general es que las leyes de conservación de masa energía y momentum son integradas en las ley de conservación del tensor $T^{\mu\nu}$ y es sorprendente que sea energia cinética puramente conservada.

La energía potencial de la teoria Newtoniana es relegada a la posición de un seudotensor que puede hacerse nulo por medio de un cambio apropiado de sistema de coordenadas. Es también conocido que en muchos sistemas que son aproximadamente Newtonianos la energía potencial esta asociada con g_{00} si el sistema mas obvio de coordenadas es utilizado.

A continuación se muestra cómo la energía total (por supuesto la potencial) ocupa una posición importante en un modelo de simetría esférica siendo válido para un sistema que no es apróximadamente Newtoniano.

El modelo LTB admite foliaciones del espacio-tiempo que permite dividirlo de una manera bastante significativa, esta división (escogiendo superficies a $t = constante$ que son ortogonales a las líneas de mundo de las partículas) es posible dado que se cumple siempre que las partículas siguen geodésicas que no se intersecan independientemente de que se asuma o no una simetría esférica.

La división es de relevancia física dado que esto es determinado por las trayectorias de las partículas, adicionalmente cobra una gran importancia el 3-espacio definido.

En este modelo el 3-espacio tiene la métrica

$$d\sigma^2 = X^2 dr + R^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2 \right) \tag{7.309}$$

donde

$$X = \frac{1}{C(r)} \frac{\partial R}{\partial r} \tag{7.310}$$

dado que se esta calculando para una sección de tiempo fijo es posible que R sea considerada como una funcion solamente de r. Sin embargo esta es una función monótona de r y puede ser considerada como una coordenada

entonces

$$d\sigma^2 = \frac{(dR)^2}{H^2} dr + R^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2\right) \tag{7.311}$$

donde

$$H(R) = C(r) \tag{7.312}$$

las componentes del tensor de Reimann estan dadas por

$$R_{121}{}^2 = R_{131}{}^3 = \frac{-1}{HR}\frac{dH}{dR} \tag{7.313}$$

$$R_{232}{}^3 = 1 - H^2 \tag{7.314}$$

$$R_{122}{}^3 = R_{121}{}^3 = R_{132}{}^3 = 0 \tag{7.315}$$

donde el tensor de Einstein es

$$R_1^1 = 2\frac{H}{R}\frac{dH}{dR} \tag{7.316}$$

$$R_2^2 = R_3^3 = \frac{H^2 - 1}{R^2} + \frac{H}{R}\frac{dH}{dR} \tag{7.317}$$

$$R = \frac{2}{R^2}\frac{d}{dR}\left\{R\left(H^2 - 1\right)\right\} \tag{7.318}$$

la consecuencia más fuerte de este resultado es que el 3-espacio es plano si y solamente si $H = 1$ por ejemplo $C = 1$. Si $C > 1$ y no varia rápidamente ($R(H^2 - 1)$ es una función creciente de R) entonces la curvatura del 3-espacio es positiva, mientras que para el caso opuesto es negativa.

Es importante tener en cuenta que este resultado no es válido para todo el espacio pero puede ser válido para un grupo de partículas ocupando un intervalo finito de r, por ejemplo todas las partículas en el rango $r_1 \leq r \leq r_2$ teniendo energía total cero, entonces ellas estan insertadas en una region plana del 3-espacio extendiendose (mas o menos) de r_1 a r_2 .

Por lo tanto la curvatura del 3-espacio es enteramente determinada por la energia total de las partículas. En este modelo la energia TOTAL (y por lo tanto potencial) tiene

una importancia geométrica.

Otra interpretación diferente a la geométrica (energía total) que se puede dar a C es que también pude representar el radio efectivo gravitante de masas invariantes

De esta manera es posible asignar un rol específico en nuestro modelo a la energia total (incluida la energia potencial) incluso en casos lejos del caso newtoniano.

Bibliografía

[1] H. Alnes, M. Amarzguioui, and Ø. Grøn. Inhomogeneous alternative to dark energy?, April 2006.

[2] N. Brouzakis, N. Tetradis, and E. Tzavara. The effect of large scale inhomogeneities on the luminosity distance, February 2007.

[3] N. Brouzakis, N. Tetradis, and E. Tzavara. Light propagation and large-scale inhomogeneities, April 2008.

[4] H. Bondi. Spherically symmetrical models in general relativity, 1947.

[5] A. E. Romano and M. Sasaki. Spatial averaging and apparent acceleration in inhomogeneous spaces, October 2011.

[6] G. F. R. Ellis. Issues in the Philosophy of Cosmology, February 2006.

[7] G. F. R. Ellis and H. van Elst. Cosmological Models (Cargèse lectures 1998), 1999.

[8] K. Enqvist. Lemaitre Tolman Bondi model and accelerating expansion, February 2008.

[9] Richad.C.Tolman. Effect in homogeneity on cosmolical models, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 20, No. 3 (Mar. 15, 1934), pp. 169-176.

[10] A. Krasiński and K. Bolejko. Redshift propagation equations in the $\beta' \neq 0$Szekeres models, April 2011.

[11] H. Alnes and M. Amarzguioui. CMB anisotropies seen by an off-center observer in a spherically symmetric inhomogeneous universe, November 2006.

[12] S. Alexander, T. Biswas, A. Notari, and D. Vaid. Local void vs dark energy: confrontation with WMAP and type Ia supernovae, September 2009.

[13] A. Enea Romano, M. Sasaki, and A. A. Starobinsky. Effects of inhomogeneities on apparent cosmological observables: "fake" evolving dark energy, June 2010.

[14] L. Herrera, A. di Prisco, J. Ospino, and J. Carot. Lemaitre-Tolman-Bondi dust spacetimes: Symmetry properties and some extensions to the dissipative case, July 2010.

[15] A. Chamorro, S. S. Deshingkar, I. H. Dwivedi, and P. S. Joshi. Tolman-Bondi-Lemaitre cell model for the universe and gravitational collapse, April 2001.

[16] R. J. Adler, J. D. Bjorken, P. Chen, and J. S. Liu. Simple analytical models of gravitational collapse, December 2005.

[17] Richad.C.Tolman. Effect in homogeneity on cosmolical models, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 20, No. 3 (Mar. 15, 1934), pp. 169-176.

[18] N. P. Humphreys, R. Maartens, and D. R. Matravers. Anisotropic Observations in Universes with Nonlinear Inhomogeneity, March 1997.

[19] P. S. Apostolopoulos, N. Brouzakis, N. Tetradis, and E. Tzavara. Cosmological acceleration and gravitational collapse, June 2006.

[20] T. Mattsson and M. Ronkainen. Exploiting scale dependence in cosmological averaging, February 2008.

[21] R. A. Vanderveld, É. É. Flanagan, and I. Wasserman. Luminosity distance in "Swiss cheese" cosmology with randomized voids. I. Single void size, October 2008.

[22] M. Tanimoto and Y. Nambu. Luminosity distance-redshift relation for the LTB solution near the centre, August 2007.

[23] C. C. Dyer. Optical scalars and the spherical gravitational lens, July 1977.

[24] N. Humphreys, R. Maartens, and D. Matravers. Regular spherical dust spacetimes, April 1998.

[25] M. Tanimoto and Y. Nambu. Luminosity distance-redshift relation for the LTB solution near the centre, August 2007.

[26] H. Alnes and M. Amarzguioui. CMB anisotropies seen by an off-center observer in a spherically symmetric inhomogeneous universe, November 2006.

[27] Chul-Moon Yoo, Tomohiro Kai, and Ken ichi Nakao. Redshift drift in lemaî-tolman-bondi void universes, Feb 2011.

[28] G. F. R. Ellis. Inhomogeneity effects in cosmology, August 2011.