Veamos que $a' = -\frac{a}{1+a}$ también satisface : $a' * a = 0$

$$a' * a = \left(-\frac{a}{1+a}\right) * a = -\frac{a}{1+a} + a + \left(-\frac{a}{1+a}\right) a = -\frac{a}{1+a} + a - \frac{a^2}{1+a}$$

$$= \frac{-a + a(1+a) - a^2}{1+a}$$

$$= \frac{-a + a + a^2 - a^2}{1+a}$$

$$= 0$$

Por tanto, el inverso de $a \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ es $-\frac{a}{1+a} \in \mathbb{Q} - \{-1\}$.

Total, $(\mathbb{Q} - \{-1\}, *)$ es un grupo. Es conmutativo?

Sean $a, b \in \mathbb{Q} - \{-1\}$, $a * b = a + b + ab$ y $b * a = b + a + ba$, entonces $a * b = b * a$, así que $(\mathbb{Q} - \{-1\}, *)$ es un grupo infinito conmutativo.

5.- El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no es un grupo respecto a la suma, ni respecto a la multiplicación. No se satisface G_3.

6.- El conjunto $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ no es un grupo con respecto a la suma usual de números. Aparentemente se satisfacen las tres condiciones de la definición de grupo, pero la suma no es una operación binaria en A, ya que el par $(2,3) \in A \times A$, pero la suma $2+3$ no pertenece a A. Luego $(A, +)$ no es un grupo, porque $+$ no es una operación binaria en A.

7.- SIMETRIAS DEL TRIANGULO EQUILATERO.- Primero que todo un movimiento rígido (en el plano) es un movimiento en el plano que no altera forma ni tamaño; es decir, mediante un movimiento rígido no hay un par de puntos, que después del movimiento, estén más lejos o más cerca de lo que estaban antes; en otras palabras, los puntos guardan siempre la misma distancia entre ellos. Mediante las coordenadas del plano euclídeo esto se puede expresar algebraicamente así: la distancia euclídea entre dos puntos (x,y) y (u,v) es $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$.

Si F es una transformación tal que:

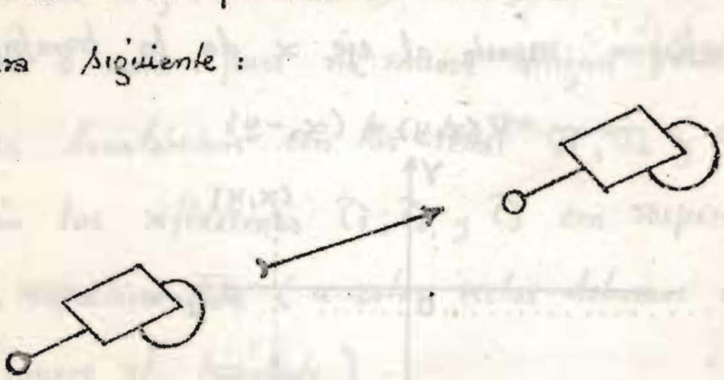
$$F(x,y)=(x',y')$$
$$F(u,v)=(u',v'),$$

la distancia entre $F(x,y)$ y $F(u,v)$ es: $\sqrt{(x'-u')^2+(y'-v')^2}$.

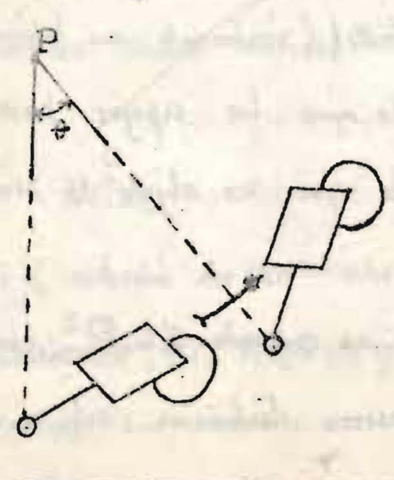
Luego F corresponde a un movimiento rígido (en el plano) cuando $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}=\sqrt{(x'-u')^2+(y'-v')^2}$ cualesquiera sean (x,y), (u,v).

Los siguientes son tres tipos de movimientos rígidos en el plano:

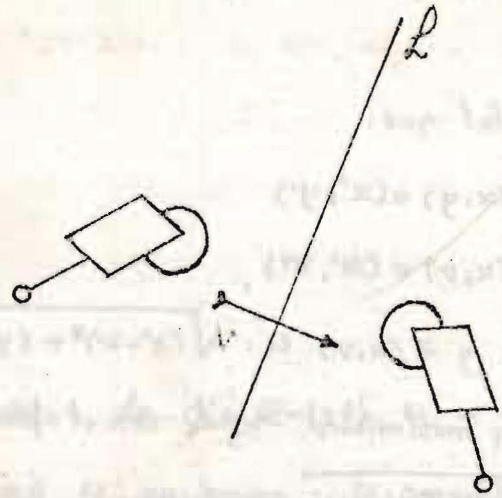
1) <u>TRASLACION.-</u> mueve cada punto una misma distancia en una misma dirección. Ver la figura siguiente:



2) <u>ROTACION.-</u> Fijemos un punto P (el centro de rotación) y movamos cada punto alrededor de P un ángulo fijado θ, como se muestra en la figura:



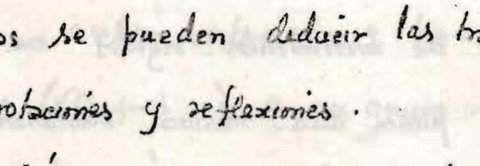
3) REFLEXION.- Escojamos una recta $\mathcal{L}$, y reflejemos los puntos del plano como si hubiera un espejo situado a lo largo de la recta $\mathcal{L}$. Ver la figura :



Usando las coordenadas se pueden deducir las transformaciones correspondientes a las traslaciones, rotaciones y reflexiones.

Por ejemplo una reflexión respecto al eje x da la transformación R, donde

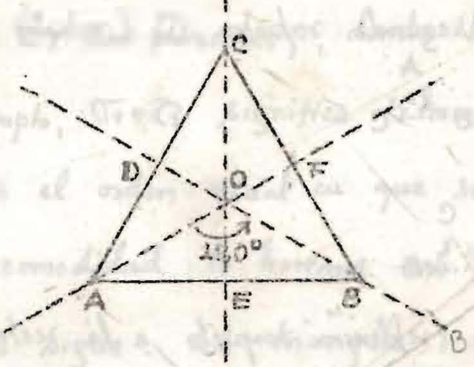
$$R(x,y) = (x,-y).$$



SIMETRIAS.- Se dice que la figura humana es aproximadamente simétrica respecto de una recta vertical (realmente un plano vertical), lo que constituye una de las razones de que los espejos parezcan invertir derecha e izquierda. El darse cuenta que un objeto es simétrico puede ser de gran utilidad matemática.

Definimos una simetría de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ como una función $f: S \longrightarrow S$ biyectiva y tal que preserva distancias, esto es, para $a, b \in S$ cualesquiera,

$d(a,b) = d(f(a), f(b))$ donde $d(a,b)$ es la distancia entre a y b.
En lenguaje geométrico, una simetría de S es un movimiento rígido del plano que deja a S en el mismo lugar, aunque mueva cada uno de sus puntos.
Un triángulo equilátero posee seis simetrías:



Están las rotaciones alrededor del centro O, en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, de 120°, 240° y 360°, esta última llamada rotación identica o nula, pues no mueve ningún punto del triángulo. Estas rotaciones las denotaremos con las letras σ_1, σ_2 y σ_0, respectivamente.
También están las reflexiones τ_1, τ_2 y τ_3 con respecto a las rectas $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{CE}$, respectivamente (a estas rectas debemos imaginarnoslas fijas mientras se mueve el triángulo).
Se puede ver que una simetría de un polígono regular queda completamente determinada por su efecto sobre los vertices del polígono, ya que una simetría envía vértices sobre vértices.*

Así pues, el triángulo

$$\underset{A\quad B}{\overset{C}{\triangle}}$$

bajo la acción de σ_1 (rotación de 120° alrededor de O) se transforma en

* Vease: BAUMSLAG, B., CHANDLER, B., Teoría de grupos. México, McGraw-Hill, 1972. PP. 68-78.

el triángulo

$$\cancel{\overset{A}{C\triangle B}} \qquad \overset{B}{C\triangle A}$$

El triángulo

$$\overset{C}{A\triangle B}$$

bajo la acción de la segunda rotación σ_2 (rotación de 240°) se transforma en

$$\overset{A}{B\triangle C}$$

El triángulo

$$\overset{C}{A\triangle B}$$

bajo la acción de τ_1 (reflexión respecto a la recta AF) se transforma en

$$\overset{B}{A\triangle C}$$

El triángulo

$$\overset{C}{A\triangle B}$$

bajo la acción de τ_2 (reflexión respecto a la recta BD) se transforma en

$$\overset{A}{C\triangle B}$$

Y finalmente, el triángulo

$$\overset{C}{A\triangle B}$$

bajo la acción de τ_3 (reflexión respecto a la recta CE) se transforma en

$$\overset{C}{B\triangle A}$$

(El lector puede comprobar ésto, fabricándose un triángulo de cartulina y poniendo letras en los vértices, luego colocarlo sobre una hoja de papel).
De acuerdo a lo anterior, podemos asociar a cada simetría del triángulo equilátero, una permutación del conjunto $\{A, B, C\}$ de sus vértices, así: a la rotación nula σ_0 asociamos la permutación idéntica $I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$; a la rotación de 120°, σ_1, la permutación $f_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$;

a la rotación de 240°, σ_2, la permutación $f_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$; a la reflexión τ_1, la permutación $f_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$; a la reflexión τ_2, la permutación $f_4 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ y a la reflexión τ_3, la permutación $f_5 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$.

Si $S_T = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, entonces S_T es cerrado para la composición, $\circ$ (los elementos de S_T son funciones), donde la composición se hace como sigue: Por ejemplo, $\sigma_1 \circ \tau_1$ significa "hacer σ_1 y luego hacer τ_1" (Observe que este no es el orden usual en que se hace la composición de funciones, pero por comodidad lo haremos así). Para calcular $\sigma_1 \circ \tau_1$ procedemos, entonces, como sigue: El triángulo:

$$\overset{C}{A \triangle B}$$

bajo la acción de σ_1 se transforma en:

$$\overset{B}{C \triangle A} ,$$

que por acción de τ_1, pasa a:

$$\overset{A}{C \triangle B} ,$$

lo que produce el mismo efecto que τ_2 sobre el triángulo $\overset{C}{A \triangle B}$.
Luego $\sigma_1 \circ \tau_1 = \tau_2$ (Es importante recordar que las rectas AF, BD y CE las imaginamos fijas mientras el triángulo se mueve).

Observemos que teniendo en cuenta la asociación anterior (entre simetrías y permutaciones), obtenemos el mismo resultado componiendo las permutaciones asociadas a σ_1 y τ_1, que son f_1 y f_3, respectivamente:

$$f_1 \circ f_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} = f_4 \text{ que es la}$$

permutación asociada a τ_2.

Efectuemos ahora, $\tau_1 \circ \tau_2$. La aplicación de τ_1 lleva el triángulo:

$$\overset{C}{A \triangle B}$$

a la posición

$$\overset{B}{A \triangle C},$$

y mediante τ_2, llegamos a

$$\overset{A}{B \triangle C}.$$

Pero esto es lo que obtendríamos al aplicar directamente σ_2 al triángulo $\overset{C}{A \triangle B}$.

¿Qué resultado obtenemos si efectuamos la composición de las permutaciones f_3 y f_4? Veamos:

$$f_3 \circ f_4 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} = f_2$$

Nuevamente vemos que si efectuamos la composición de las permutaciones asociadas a las simetrías el resultado es la permutación asociada con la composición de las simetrías.

Procediendo como en los ejemplos, podemos construir la tabla de composición de S_T:

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	τ_1	τ_2	τ_3
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	τ_1	τ_2	τ_3
σ_1	σ_1	σ_2	σ_0	τ_2	τ_3	τ_1
σ_2	σ_2	σ_0	σ_1	τ_3	τ_1	τ_2
τ_1	τ_1	τ_3	τ_2	σ_0	σ_2	σ_1
τ_2	τ_2	τ_1	τ_3	σ_1	σ_0	σ_2
τ_3	τ_3	τ_2	τ_1	σ_2	σ_1	σ_0

σ_0 es el módulo (como se ve en la tabla) para la composición, $\circ$, en S_T; cada elemento tiene inverso, el inverso de σ_0 es σ_0, el inverso de σ_1 es σ_2, el inverso de σ_2 es σ_1, el inverso de τ_1 es τ_1, el inverso de τ_2 es τ_2 y el inverso de τ_3 es τ_3, así que hay dos elementos que son su propio inverso, estos elementos son las reflexiones, podemos decir que cada reflexión es su propio inverso.

Como la composición de funciones es asociativa, entonces el par $(S_T, \circ)$ es un grupo, y es llamado el GRUPO DE SIMETRIAS DEL TRIANGULO EQUILATERO.

$(S_T, \circ)$ no es conmutativo, porque $\sigma_2 \circ \tau_2 = \tau_1$ y $\tau_2 \circ \sigma_2 = \tau_3$.

De la tabla de composición de S_T se extraen los siguientes hechos:

i) Composición de rotaciones es una rotación; aun más el conjunto $R_T = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ tiene como tabla de composición:

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_2	σ_0
σ_2	σ_2	σ_0	σ_1

Se ve fácilmente que $(R_T, \circ)$ es un grupo (conmutativo); decimos en este caso que R_T es un subgrupo de S_T. Observe que la tabla es simétrica respecto a la diagonal que arranca en el ángulo superior izquierdo y termina en el ángulo inferior derecho, esto muestra la conmutatividad del grupo R_T.

El grupo $(R_T, \circ)$ se llama el GRUPO DE ROTACIONES DEL TRIANGULO EQUILATERO.

ii) La composición de dos reflexiones es una rotación.

iii) La composición de una reflexión y una rotación (en cualquier orden) da una reflexión.

EJERCICIO 1.- Siguiendo el ejemplo anterior, realice el mismo trabajo para las simetrías de un cuadrado.

Consideremos ahora el conjunto S_3 de las permutaciones del conjunto $\{A, B, C\}$ donde A, B y C son los vértices del triángulo equilátero dado en el ejemplo. Si construimos su tabla de composición obtenemos:

$\circ$	I	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
I	I	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	I	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	I	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	I	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	I	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	I

donde I, f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 son las permutaciones asociadas con las simetrías del triángulo equilátero ABC.

Del capítulo de permutaciones sabemos que el conjunto $S_3 = \{I, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ es un grupo con respecto a la composición $\circ$.

S_3 no es conmutativo, porque $f_2 \circ f_4 = f_3$ y $f_4 \circ f_2 = f_5$.

El grupo $(S_3, \circ)$ es llamado el grupo de permutaciones de tres elementos.

Si recordamos la asociación hecha entre permutaciones y simetrías, vemos que las tablas de los dos grupos S_3 y S_T se corresponden, es decir basta un renombramiento de los elementos de S_3 y S_T para que las tablas sean idénticas, decimos en este caso que los grupos S_3 y S_T son ISOMORFOS, en general dos grupos $(G, \circ)$ y $(G', *)$ son isomorfos si existe una aplicación $\phi : G \longrightarrow G'$ biyectiva tal que $\phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b)$ para todo $a, b \in G$.