## SECCION DE MATEMATICAS

# El Profesor Luis de Greiff B.

Una de las figuras más sobresalientes en el profesorado de la Facultad es, sin duda alguna, el doctor Luis de Greiff B.

Sus innumerables y valiosos y originales trabajos en el campo de las matemáticas y de la Ingeniería, no sólo le han servido para conquistarse un nombre nacional, sino que han sido suficientes para que su nombre haya traspasado los límites patrios, y hoy, se confunda con los de las más eminentes personalidades de la Matemática del Continente Americano. Dígalo si no, el reciente honor que se le hizo:

En días pasados, THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, con sede en la Universidad de Búffalo (E. U. A.), tuvo a bien elegirlo miembro suyo, y así se lo comunicaron en nota firmada por el profesor Gehman, secretario de la misma asociación.

DYNA hace llegar al profesor De Greiff los sentimientos de su distinguida consideración y admiración por este nuevo reconocimiento a sus méritos como fiel e incansable cultor de las Matemáticas; a la vez que le deseamos un completo éxito en las labores que desempeñe como miembro de dicha Asociación, ya que tal éxito no tendría otro significado, que el triunfo mismo de la Facultad.

---

A continuación publicamos un aparte de un extenso estudio sobre la geometría del triángulo, cuyo autor es el mismo *Doctor Luis de Greiff*. Los teoremas marcados con el asterisco tienen el carácter de originales y fueron hallados por el mismo doctor De Greiff.

# Pequeña Memoria sobre el Círculo de nueve puntos

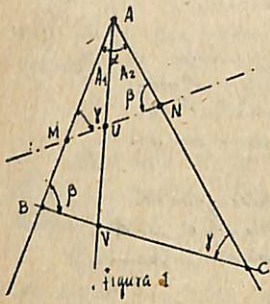

figura 1

1) Sea un triángulo ABC, cuyos ángulos valen, respectivamente, $\alpha, \beta, \gamma$ (figura 1). La recta MN que forma ángulos $\gamma, \beta$, respectivamente con AB, AC, es, por definición, antiparalela de BC. Es evidente que los triángulos AMN, ABC, son semejantes. Ahora, fíjese del vértice A una recta arbitraria AUV.

Teorema. Entre los segmentos UM, UN, VB, VC, es válida la siguiente relación

$$(1)\qquad \frac{UM}{UN}\cdot\frac{VB}{VC}=\frac{sen^2\beta}{sen^2\gamma}$$

Demostración. - Refiriéndose a los triángulos AMU, AUN de la figura 1, se puede escribir:

$$\frac{UM}{UA}=\frac{sen\,A_1}{sen\,\gamma}\quad;\quad\frac{UN}{UA}=\frac{sen\,A_2}{sen\,\beta}$$

y por división de las relaciones anteriores,

$$(2)\qquad \frac{UM}{UN}=\frac{sen\,A_1}{sen\,A_2}\cdot\frac{sen\,\beta}{sen\,\gamma}$$

dividiendo (2) por (3) queda, finalmente,

$$\frac{UM}{UN}\cdot\frac{VB}{VC}=\frac{sen^2\beta}{sen^2\gamma}$$

Teorema de Ceva. - En todo triángulo, las rectas que unen los vértices a un mismo punto O, determinan sobre los lados opuestos tres puntos U, V, W. Los segmentos producidos en los lados cumplen la relación siguiente (en la que puede exceptuarse para lo que sigue la consideración de los signos)

$$\frac{VA}{VC}\cdot\frac{UC}{UB}\cdot\frac{WB}{WA}=1$$

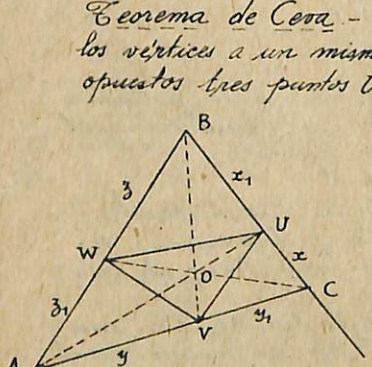

figura 2

(Llámase cevianas a rectas tales como AU, BV, CW, en honor de Juan de Ceva, geómetra milanés que las introdujo, en la segunda mitad del siglo XVII.

Demostración. - Indícanse los segmentos determinados sobre los lados, por $x, x_1, y, y_1, z, z_1$ para mayor simplicidad. Los triángulos AOB, AOC tienen la misma base AO, luego sus áreas están entre sí como sus alturas o como los segmentos $x, x_1$, etc. Por consiguiente, podemos escribir,

$\frac{\Delta AOC}{\Delta AOB} = \frac{x'}{x_1}$ , $\frac{\Delta AOB}{\Delta BOC} = \frac{y}{y_1}$ , $\frac{\Delta BOC}{\Delta AOC} = \frac{z}{z_1}$ . Multiplicando ordenadamente las relaciones escritas y suprimiendo factores comunes, se obtiene

$$(5)\quad \frac{x \times y \times z}{x_1 \times y_1 \times z_1} = 1 \text{ , o también, } x_1 y_1 z = x y_1 z_1$$

Recíproco.- Si sobre los lados de un triángulo, o sus prolongaciones, se tienen tres puntos U.V.W para los que se cumple que el producto de tres segmentos no consecutivos VA, UC, WB es igual al producto de los otros tres: VC, UB, WA, las rectas AU, BV, CW pasan por un mismo punto

Para establecer este teorema se puede proceder por el absurdo. Trácense las rectas AU, BV determinando así el punto O. Si la CW no pasa por O prolongamos trazar la CO determinando así el punto $W_1$.

Entonces se cumple, por hipótesis, la relación,

$\frac{VA}{VC} \times \frac{UC}{UB} \times \frac{WB}{WA} = 1$ y, en virtud del teorema directo, $\frac{VA}{VC} \times \frac{UC}{UB} \times \frac{W'B}{W'A} = 1$

Por división de las dos, se deduce $\frac{W'B}{W'A} = \frac{WB}{WA}$ que sólo puede cumplirse cuando W' coincide con W.

Teorema (de Carnot).- Si los lados de un triángulo son cortados por un círculo en los puntos $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ se cumple la relación siguiente:

$$(11)\quad \frac{a_1B}{a_1C} \times \frac{a_2B}{a_2C} \times \frac{b_1C}{b_1A} \times \frac{b_2C}{b_2A} \times \frac{c_1A}{c_1B} \times \frac{c_2A}{c_2B} = 1$$

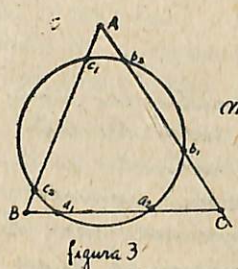

figura 3

Para establecer este teorema, válido para polígonos cualesquiera, escribiremos las siguientes igualdades entre productos de segmentos

$$Ba_1 \times Ba_2 = Bc_2 \times Bc_1,\ Cb_1 \times Cb_2 = Ca_2 \times Ca_1,\ Ac_1 \times Ac_2 = Ab_2 \times Ab_1$$

Multiplicando ordenadamente estas relaciones y disponiendo los factores del segundo miembro como divisores, se obtiene la relación (6) que se quería demostrar

Teorema.- Si en un triángulo ABC, las rectas $Aa_2$, $Bb_2$, $Cc_2$ son cerianas, o sea, pasan por un mismo punto $O_1$, el círculo circunscripto al triángulo $a_1b_1c_1$ determina sobre los lados del primero otros puntos $a_2, b_2, c_2$, de tal manera dispuestos, que las rectas $Aa_2$, $Bb_2$, $Cc_2$ pasan también por un mismo punto $O_2$ (son a su vez, cerianas). (Figura 4)

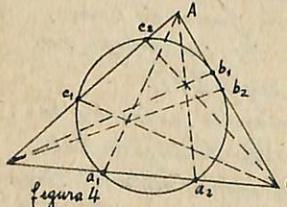

figura 4

Para demostrar este teorema tendremos en cuenta la relación (6), escrita, así:

$$\frac{a_1B}{a_1C}\times\frac{b_1C}{b_1A}\times\frac{c_1A}{c_1B}\times\frac{a_2B}{a_2C}\times\frac{b_2C}{b_2A}\times\frac{c_2A}{c_2B}=1$$

Según el teorema de Ceva los tres primeros factores equivalen a la unidad, luego quedan solamente

$$\frac{a_2B}{a_2C}\times\frac{b_2C}{b_2A}\times\frac{c_2A}{c_2B}=1$$

que demuestra que también $Aa_2$, $Bb_2$. $Cc_2$ han de pasar por un mismo punto, $O_2$

## El círculo de nueve puntos

Basados en los teoremas anteriores, vamos a demostrar nuevamente el siguiente teorema debido a Leonardo Euler y estudiado muy detenidamente por Feurbach *

Teorema. En todo triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre el vértice y el ortocentro, están dispuestos sobre una misma circunferencia

Demostración. - Sea el triángulo ABC y sean los puntos medios de los lados que designamos $a_1, b_1, c_1$ (figura 5). Construyamos el círculo circunscripto al triángulo $a_1b_1c_1$; vamos a demostrar que si son $a_2, b_2, c_2$ los segundos puntos de intersección del círculo anterior con los lados del triangulo ABC, las rectas $Aa_2$, $Bb_2$, $Cc_2$ son alturas del triangulo fundamental, o, dicho en otras palabras, el triangulo $a_2b_2c_2$ es el triangulo órtico correspondiente al ABC

En primer lugar, las rectas $Aa_2$, $Bb_2$, $Cc_2$, han de cortarse en un mismo punto, según demuestra el teorema

Llámese $x, y, z$, los puntos de intersección de los lados del triangulo $a_2b_2c_2$ con las alturas del triangulo ABC; es decir, que $x$ es la intersección de $b_2c_2$ con $Aa_2$, etc.

Podemos escribir las siguientes relaciones de semejanza,

$$\Delta Bc_2a_2 \text{ — } \Delta Bc_1a_1 \text{ — } \Delta ABC,$$
$$\Delta Ab_2c_2 \text{ — } \Delta Ab_1c_1 \text{ — } \Delta ABC,$$
$$\Delta Ca_2b_2 \text{ — } \Delta Ca_1b_1 \text{ — } \Delta ABC;$$

o sea que los triangulos $Ab_2c_2$, $Bc_2a_2$, $Ca_2b_2$ son semejantes entre si por serlo al triangulo fundamental Entonces, $b_2c_2$ es antiparalela de BC, $a_2b_2$ lo es de BA, y, por último, $a_2c_2$ de AC

Para cada uno de los vértices podemos escribir,

(7) $\frac{xb_2}{xc_2}\div\frac{a_2C}{a_2B}=\frac{sen^2C}{sen^2B}$ ; por otra parte, es $\frac{a_2C}{a_2b_2}=\frac{sen\,B}{sen\,C}$, $\frac{a_2B}{a_2c_2}=\frac{sen\,C}{sen\,B}$

---

* Feurbach (Karl Wielhelm) - alemán, hermano del filósofo Ludwig Feurbach, nació en 1800 en Jena y murió en 1834 siendo profesor de matemáticas en el Gimnasio de Erlangen.

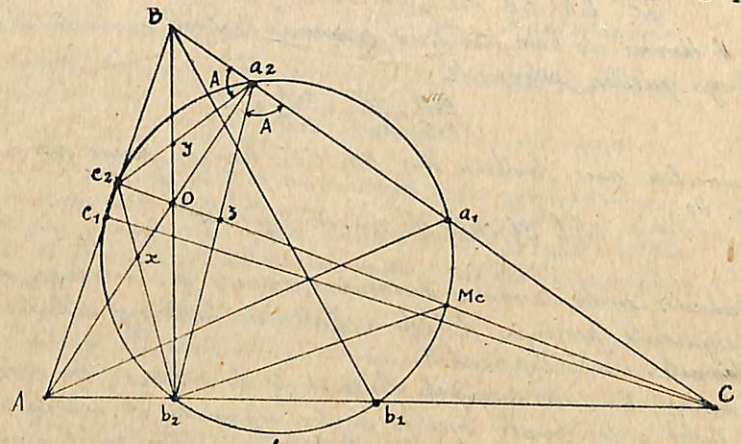


figura 5

Por división de estas dos últimas (8) $\frac{a_2C}{a_2b_2} \div \frac{a_2B}{a_2c_1} = \frac{sen^2B}{sen^2C}$

Multiplicando ordenadamente las (7) y (8) se llega a

$$\frac{x\,b_2}{x\,c_2} = \frac{a_2\,b_2}{a_2\,c_2}$$

La anterior relación demuestra que $Aa_2$ es bisectriz del ángulo $c_2a_2b_2$. Lo mismo puede considerarse establecido para $Cc_2$, $Bb_2$.

Nos falta ahora demostrar la perpendicularidad de $Aa_2$ y $BC$; respectivamente de $Bb_2$, $AC$; $Cc_2$, $AB$. En efecto, los ángulos $b_2a_2C$, $c_2a_2B$ son iguales al ángulo A y si el ángulo $Aa_2b_2$ es llamado e así como su igual $Aa_2c_2$, podemos escribir $2A+2e=180°$; $A+e=90°$ o sea que $Aa_2$ y $BC$ son perpendiculares entre sí.

Tengamos ahora en consideración el punto medio de CO, que designamos Mc. Unimos este punto con $b_2$; vamos a demostrar que Mc, resp. $M_a$, $M_b$ están sobre la circunferencia que estudiamos.

En el triángulo rectángulo $Ob_2C$ se tiene, $Mc\,b_2 = Mc\,O = Mc\,C$; luego ang. $b_2Mc\,c_2 = 2$ ang. $ACc_2$.

En el triángulo rectángulo $c_2AC$, por ser $b_2$ punto medio de AC se tiene; $c_2b_2 = b_2C = b_2A$; luego ang $Ab_2C_2 = 2$ ang. $ACc_2$. Resumiendo: los ángulos $b_2b_1c_2$, $b_2Mc\,c_2$ resultan iguales y la circunferencia que pasa por $c_2, b_2, b_1$ ha de pasar también por Mc.