"La Matemática es una ciencia inútil. Entiendo por ello que no puede servir directamente para la explotación de nuestros semejantes, ni para su exterminación".

G.H. Hardy

SECCION 1

INTRODUCCION DE LAS RELACIONES.

1.1. No vamos a iniciar la exposición con la definición de "conjunto". Tal intento resulta siempre fallido, pues suele decirse que el conjunto es una colección de elementos y que el elemento es un miembro del conjunto. En esta forma se desplaza el problema sin resolverse. Es exactamente lo que ocurre en la geometría elemental con las ideas de punto y recta. "Punto", dice el manual, es el lugar de intersección de dos rectas no paralelas; "Recta", por otro lado, es una sucesión indefinida de puntos en la misma dirección. Podemos conocer un conjunto, sabiendo qué cosas se puede hacer con él. Nos interesan las propiedades, y éstas no caben en dos renglones, a manera de definición. Mantengamos, mientras tanto, la idea intuitiva de conjunto, veamos qué caminos nos abre por un lado y cuales nos cierra por el otro. Así, iremos criticando la idea corriente, siempre que la exposición lo exija.

1.2. Para iniciar la construcción de la teoría de Conjuntos se establecerán los signos de dicha teoría, a saber:

a) Las letras. Ellas son las mayúsculas y minúsculas del alfabeto.
b) Los signos relacionales. Se utilizarán los signos: $\in$, $=$
c) Los signos lógicos. Ellos son: no, ó, $\wedge$, $\exists$

Estos signos adquieren significado a través del desarrollo de la teoría aunque como se verá, varios de ellos nos son familiares.

Sabemos bien que las palabras del lenguaje corriente son agrupaciones de letras; en la teoría de Conjuntos se tendrán agrupaciones de los signos mencionados, agrupaciones que si han sido construídas correcta -

mente, serán llamadas relaciones de la teoría, y aún más, la teoría de Conjuntos podría decir cuando estas relaciones son ciertas y cuándo son falsas. Las letras van a representar los objetos de la teoría y las relaciones representarán las afirmaciones que pueden hacerse sobre los objetos, entendiendo por objeto los conjuntos sobre los que la Matemática trabaja.

Las relaciones de la teoría de Conjuntos se contruyen a partir de una "relación primitiva", llamada relación de Pertenencia.

La Relación de Pertenencia: Esta relación se construye con el signo $\in$ y dos letras, de la siguiente manera: "$x \in A$", y se lee "x pertenece al conjunto A", ó, "x es un elemento de A", ó más simplemente "x es un A".

La letra minúscula de la izquierda denota "elemento" y la mayúscula de la derecha designa "Conjunto". El signo $\in$ es un signo relacional que liga las dos letras, además $\in$ es la letra "epsilon" del alfabeto griego con la cual se simboliza universalmente la pertenencia.

Ahora bien, a pesar de la distinción que se hace entre elemento y conjunto, se encontrará con alguna frecuencia objetos que funcionan como elementos en una relación y como conjuntos en otra. Así, un plano puede considerarse como conjunto de rectas, pero una de estas, a su vez, puede expresarse como conjunto de puntos.

Se ilustra la relación de pertenencia con el ejemplo siguiente: Corrientemente se hacen afirmaciones como ésta: "21 es un múltiplo de 7". Es decir se afirma que el objeto representado con el símbolo 21 es un elemento del conjunto formado por todos los objetos (números) que cumplen la propiedad de ser múltiplos de 7; si dicho conjunto se representa con la letra M, entonces se tiene que la relación $21 \in M$, es una relación cierta. En cambio la relación $22 \in M$ es una relación falsa.

1.3. Construcción de Relaciones:
A partir de la relación de pertenencia y mediante el uso de los signos lógicos se construirán las siguientes relaciones:

i) Dada la relación "$x \in A$", se construye una relación nueva y diferente, anteponiendo a aquella el signo no. A esta nueva relación se llama La negación de $x \in A$. Es decir, la negación de $x \in A$, es no $(x \in A)$ que en adelante se escribirá así: "$x \notin A$" y se leerá "x no es un elemento de A" ó "x no es un A".

Es claro que si $x \in A$ es una relación cierta, $x \notin A$ es una relación falsa y viceversa.
Nota: No $(x \notin A)$ es $x \in A$.

ii) Dadas las relaciones $x \in A$, $x \in B$. Se construye, mediante el uso del símbolo ó (la o del lenguaje familiar), una nueva relación así: "$x \in A$ ó $x \in B$" que se lee "x es un A o x es un B" y se llama la <u>disyunción de $x \in A$ y $x \in B$</u>.

La disyunción de dos relaciones es cierta cuando por lo menos <u>una</u> de las relaciones que la conforman es cierta y es falsa cuando <u>cada</u> una de las relaciones que la conforman es falsa.
Nota: a) La relación $x \in A$ ó $x \notin A$ siempre es cierta.
b) ¿Cuál es la negación de $x \in A$ ó $x \in B$?

iii) Dadas dos relaciones $x \in A$, $x \in B$. Mediante el uso del signo $\wedge$ (en el lenguaje familiar es la "y" y el signo $\wedge$ se usa por razones prácticas), se construye una nueva relación así: "$x \in A \wedge x \in B$" que se lee "x es un A y x es un B" y se llama la <u>conjunción de $x \in A$ y $x \in B$</u>.

La conjunción de dos relaciones $(x \in A \wedge x \in B)$ es cierta cuando las dos relaciones son ciertas y es falsa cuando por lo menos una de las dos relaciones es falsa.
Nota: a) La relación $x \in A \wedge x \notin A$ siempre es falsa.
b) ¿Cuál es la negación de $x \in A \wedge x \in B$?

iv) En la Geometría se ha demostrado el siguiente teorema:
Si α, β, γ son ángulos interiores de un triángulo P, entonces $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Es decir, que para que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ es condición suficiente que α, β, γ sean ángulos interiores de un triángulo, decimos suficiente y no necesario ya que α, β, γ pueden sumar 180° sin que α, β, γ sean los ángulos interiores de un triángulo P.

Si llamamos H la proposición: α, β, γ son los ángulos interiores de un triángulo P y llamamos T la proposición: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Se tiene que la relación enunciada se puede escribir así "Si H entonces T", de la cual se ha dicho que es un teorema ó que es una relación cierta.

A la proposición H se le llama hipótesis y a la proposición T se le llama tesis. Con esta designación se puede afirmar que si la Hipótesis es cierta y la Tesis es cierta, la relación "si H entonces T" es cierta.

Ahora bien, dadas $x \in A$ y $x \in B$ se construye una nueva relación

así: "Si $x \in A$ entonces $x \in B$". La relación así escrita se llama relación de implicación entre $x \in A$ y $x \in B$ y se simboliza "$x \in A \Longrightarrow x \in B$", además se lee "Si $x \in A$ entonces $x \in B$" ó "$x \in A$ implica $x \in B$" ó "$x \in A$ es condición suficiente para $x \in B$". Esta relación es cierta cuando $x \in A$ es cierta y cuando $x \in B$ es cierta.

La relación de implicación es, como tendremos oportunidad de constatarlo, elemento fundamental de la demostración en Matemáticas.

Puede preguntarse aún, ¿la relación de implicación es cierta en el caso de que las relaciones que la integran sean falsas? O también, ¿la relación de implicación es cierta cuando la Hipótesis es falsa? Y más aun, ¿la relación de implicación es falsa cuando la Hipótesis es cierta y la Tesis es falsa?

Desde un punto de vista intuitivo es difícil decidir sobre esta cuestión. Sin embargo, se ha optado por hacer la siguiente definición de la relación de implicación para responder a estas preguntas.

Sean R, S dos relaciones cualquiera, a la relación no R ó S se le escribe $R \Longrightarrow S$ y se le llama <u>relación de implicación entre R y S.</u> Y se lee: "R implica S" ó "Si R entonces S".

La relación $R \Longrightarrow S$ es cierta cuando:

a) R es falsa
b) S es cierta
c) R es falsa y S cierta

La relación $R \Longrightarrow S$ es falsa cuando R es cierta y S falsa.
Nota: ¿Cuál es la negación de $x \in A \Longrightarrow x \in B$?

v) En la teoría de los números se ha demostrado que:
x es par $\Longrightarrow x + 1$ es impar (x es un número entero) es una relación cierta, además se tiene que $x + 1$ es impar $\Longrightarrow x$ es par es también una relación cierta. Luego se afirma que: "x es par, es equivalente a, $x + 1$ es impar" ó que "x es par si y solo si $x + 1$ es impar" ó "x es par es condición suficiente y necesaria para $x + 1$ es impar".

Ahora, dadas $x \in A$, $x \in B$, se construye la siguiente relación: "$x \in A$ es equivalente a $x \in B$". A esta relación se le denomina <u>relación de equivalencia lógica entre $x \in A$ y $x \in B$</u> que se simboliza así: "$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$" y se lee "$x$ es un A es equivalente a $x \in B$" ó "x es un A si y solo si x es un B" ó "x es un A, es condición suficiente y necesaria para x es un B".

Para saber cuando una relación de equivalencia lógica es cierta y cuando es falsa se define esta relación, como podría sospecharse en términos de relaciones antes definidas, de la siguiente manera:

Sean R, S relaciones. A la relación $R \Longrightarrow S \wedge S \Longrightarrow R$ se le llama relación de equivalencia lógica y se le denota $R \Longleftrightarrow S$ leyéndosele "R es equivalente a S".

La relación $R \Longleftrightarrow S$ es cierta cuando:

a) R es cierta y S es cierta
b) R es falsa y S falsa

La relación $R \Longleftrightarrow S$ es falsa cuando una de las relaciones que la componen es cierta y la otra es falsa.
Nota: ¿Cuál es la negación de $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$?

vi) Existen cierto tipo de relaciones que no están determinadas, desde el punto de vista de su verdad o falsedad. Sea por ejemplo la siguiente relación en los números enteros:
"$y > 5$" tal proposición es verdadera o falsa dependiendo del valor o los valores particulares que tome $\underline{y}$, así:

Si $y = 9$, "$9 > 5$" es cierta
Si $y = -5$, $-5 > 5$ es falso

Esta indeterminación se borra anteponiéndole a la proposición $y > 5$ las partículas:

"existe algún y entero tal que ....
"para todo y entero ....

Se forman las siguientes relaciones:

"existe algún y entero tal que $y > 5$"
"para todo y entero, $y > 5$"

El lector puede definir claramente el término de verdad de cada una de las proposiciones.

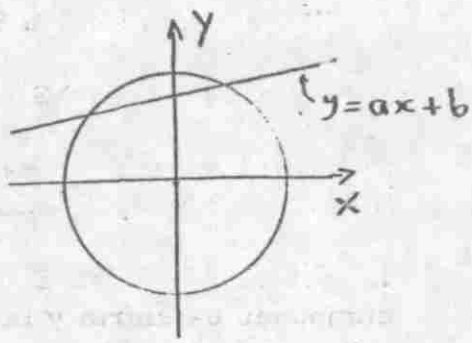
Las dos partículas mencionadas se llaman cuantificadores y los signos que las denotan son:

" $\exists$ " para "existe algún"

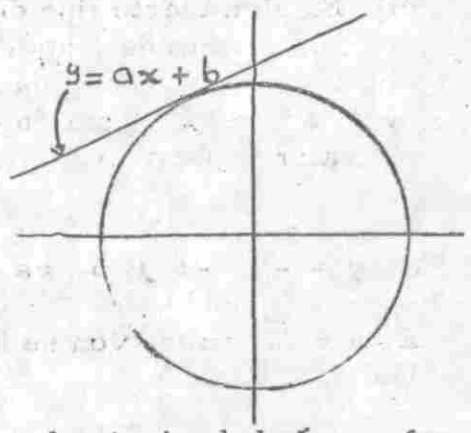
" $\forall$ " para "para todo" que significa lo mismo que "para cualquier".

El sentido de los cuantificadores, al igual que el de la implicación se irá aprehendiendo a medida que avanza la exposición. No sobra, sin embargo, traer un ejemplo: En la geometría analítica se estudian las relaciones entre figuras planas. Consideremos un círculo del tipo $x^2 + y^2 = r^2$ donde y es un valor determinado, y la recta $y = ax + b$. Representemos gráficamente las dos situaciones:

i) Que la recta sea secante del círculo. En tal caso podemos afirmar válidamente: "Existe algún punto de la recta $y = ax + b$ que pertenece al círculo $x^2 + y^2 = r^2$



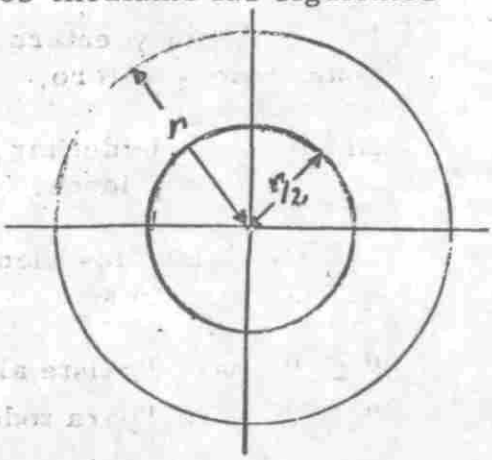
ii) Que la recta sea tangente al círculo. Afirmamos entonces: Existe algún punto de la recta $y = ax + b$ que pertenece al círculo $x^2 + y^2 = r^2$. En una forma más adecuada diremos: "Existe un único punto de la recta $y = ax + b$ que pertenece al círculo $x^2 + y^2 = r^2$



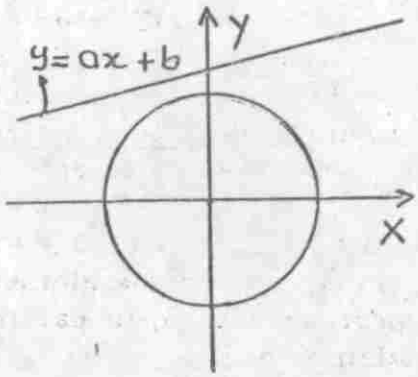
Es claro que tanto en este caso como en el anterior habríamos formado proposiciones falsas de haber usado el cuantificador "para todo". La utilización de éste es válida en el caso siguiente: Consideremos los puntos <u>interiores</u> de los dos círculos $x^2 + y^2 = r^2$ y $x^2 + y^2 = (\frac{r}{2})^2$ Tales puntos interiores quedan expresados mediante las siguientes expresiones:

$$x^2 + y^2 < r^2 \quad y \quad x^2 + y^2 < (\tfrac{r}{2})^2$$

Podemos entonces escribir: "Para todo punto (x, y) del plano tal que $x^2 + y^2 < (r/2)^2$ se cumple que $x^2 + y^2 < r^2$. No cabe duda de la verdad de esta proposición. Intente el lector identificar en la proposición una implicación.



Queda por describir un último caso: aquel representado gráficamente así:



¿Cuántos puntos de la recta pertenecen al círculo? Ninguno! Esta idea queda correctamente expresada así: "No existe algún punto de la recta $y = ax + b$ que pertenezca al círculo $x^2 + y^2 = r^2$.
La idea de "ningun(o)" se expresa pues mediante la negación de "Existe algún". Convenimos intuitivamente en tal equivalencia.

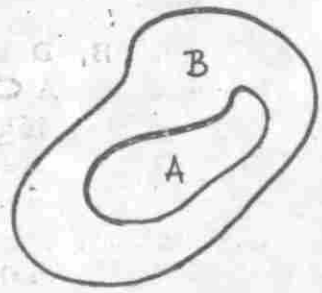
Las relaciones de la teoría de conjuntos son pues de las formas anteriormente expuestas. Eventualmente y para ejemplificar, utilizaremos (ya lo hemos hecho) relaciones que incluyen términos aún no definidos, como la suma de enteros, las llamadas ecuaciones, etc.; tal situación es inevitable en una exposición como la presente.

1.4. Contención.

<u>Definición</u>. Consideremos ahora una relación interesante que surge utilizando cuestiones ya vistas. Se trata de la relación "Para todo x, si $x \in A$ entonces $x \in B$". Si esta relación es cierta, decimos que "A es subconjunto de B" o que "A está incluído en B" y escribiremos "$A \subset B$"

$A \subset B$ es el nombre que le damos a la relación "para todo x, si $x \in A$ entonces $x \in B$". La introducción del símbolo ahorra escritura. Tal es el sentido fundamental de la definición en Matemáticas. De aquí en adelante, pues, entenderemos como relaciones equivalentes las dos expresiones antes enunciadas. Gráficamente se representa la contención entre dos conjuntos A y B así:

En este caso, $A \subset B$ es cierto.

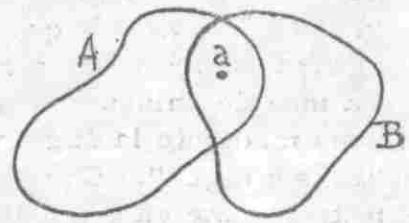


Como ejemplo de contención consideremos la relación construída atrás entre los conjuntos de puntos interiores o los círculos con que ilustramos el cuantificador "para todo".

Observaciones.

1) ¿Qué es necesario demostrar para saber que dados dos conjuntos A y B, $A \subset B$ es cierto?

Que cualquier elemento que se tome de A pertenece necesariamente a B. Subrayamos la palabra "cualquier" pues no será correcto tomar un elemento determinado de A y probar que pertenece a B. Lo dicho se ilustra gráficamente así:



En este caso $A \subset B$ es falso; sin embargo, algunos elementos de A pertenecen a B, en particular el elemento a.

Es por eso por lo que para demostrar $A \subset B$ es cierto, tomaremos un elemento indeterminado de A, que representaremos usualmente con una de las últimas letras del alfabeto, x, y, etc., y se prueba que pertenece a B.

2) ¿Cómo probamos que $A \subset B$ es falso? De acuerdo a la definición de la contención, basta mostrar que existe algún elemento de A que no pertenece a B.

Propiedades de la Contención.

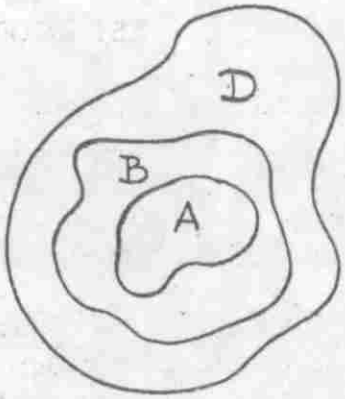
Demostraremos dos propiedades de la contención de conjuntos:

1. Si A es un conjunto entonces $A \subset A$.
   Demostración: Probar que $A \subset A$ es, según la observación anterior, demostrar que cualquiera que sea x, si $x \in A$ entonces $x \in A$. Es decir, teniendo como hipótesis que $x \in A$ debemos concluír que $x \in A$ (tesis). La tesis la estamos afirmando en la hipótesis, por lo tanto es verdadera. Luego, cualquiera que sea A, $A \subset A$.

2. Si A, B, D son conjuntos y si se cumple que $A \subset B$ y $B \subset D$ entonces $A \subset D$
   Demostración: Sea x un elemento cualquiera de A, entonces $x \in B$, puesto que $A \subset B$ por hipótesis. Pero además, si $x \in B$ entonces $x \in D$, puesto que $B \subset D$ por hipótesis. Podemos pues concluír que si $x \in A$ entonces $x \in D$ y como x es un elemento cualquiera, decimos que "para todo x, si $x \in A$ entonces $x \in D$" o lo que es lo mismo, (equivalente), $A \subset D$.

Esta última demostración la podemos representar gráficamente mediante los llamados "Diagramas de Venn" así:

Aunque gráficamente "se ve" que si $A \subset B \wedge B \subset D$ entonces $A \subset D$, no constituye una demostración presentar simplemente el gráfico. El diagrama es un auxiliar, en algunos casos valioso, para efectuar una demostración; pero en ningún caso la sustituye. Ya veremos posteriormente cómo existen relaciones que no son susceptibles de representar gráficamente.



1.5. Igualdad de Conjuntos.

Definición. Otra relación fundamental de la teoría de conjuntos es la igualdad. Se define así: "Si A, B son conjuntos y se cumple que $A \subset B \wedge B \subset A$ entonces se dice que A es igual a B y se escribe "$A = B$".
Si la relación: no$(A = B)$ es cierta, se escribe $A \neq B$.

Observaciones.

1) Si A y B son conjunto, para probar que $A = B$ basta entonces probar los dos hechos siguientes:
i) $A \subset B$ y
ii) $B \subset A$.
El estilo de trabajo será en este caso tomar un elemento cualquiera x (no determinado) del conjunto A, $(x \in A)$ y mostrar que necesariamente ese elemento está en el conjunto B $(x \in B)$, con lo cual queda hecha la primera parte de la demostración. La segunda parte de la demostración es el proceso inverso, ó sea, tomar un elemento arbitrario del conjunto B y mostrar que necesariamente dicho elemento está en el conjunto A.

2) ¿Qué se debe probar para concluír que $A \neq B$?
Bastará entonces para esta prueba mostrar un elemento de uno de los conjuntos que no pertenezca al otro conjunto.