Observadores relativistas y termodinámica del colapso gravitacional de cascarones negros

Tesis presentada por:

WALTER ALEXIS PULIDO GONZÁLEZ

para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias - Física

Asesor: **Dr. José Robel Arenas S**

Universidad de Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Física

2022

"Ángel que pasa besa y te abraza
Ángel para un final..."
***Silvio Rodriguez** (1984).*

"Esta es una situación difícil sólo me tengo a mí mismo,
es evidente, le puede pasar a cualquiera.
Ganar o perder, es una opción que debes aceptar con amor...
...Sí, es una vida dura.
en un mundo que está lleno de dolor,
hay gente que está buscando el amor como sea.
Es una lucha larga y dura,
pero siempre viviré para el mañana,
Miraré atrás y diré que lo hice por amor..."
***Farrokh Bulsara** (1946-1991).*

"Ahora que el tiempo ha pasado
y he dejado de lado la competicion,
que veo mas claro, que escucho mejor,
doy gracias por haber llegado hasta aqui.
Ahora que han pasado los años,
intensamente vividos, exprimidos,
sigo en forma, no estoy cansado,
y tengo decidido retrasar el final..."
***Enrique Ortiz de Landázuri Izarduy** (2006).*

Agradecimientos

Como señala el escrito que cito al principo de ésta tesis, de Farrok Bulsara: "ha sido una situación difícil, pues muchas veces sentía que me tenía a mí mismo y nada más", y a pesar de que al principio perdí por cuestiones ajenas a mi voluntad, y que a regañadientes me tocó aceptar, al final gané; y reconozco, que tanto en la pérdida como en la victoria hubo gente presente, algunos latentes y muchos ausentes, que contribuyeron en la consolidación de este escrito y la defensa del mismo.

En primer lugar, deseo agradecer a mi Mámá, mi Abuela materna y mi Tía Gina, por su apoyo incondicional, por sus cuidados, por sus oraciones, sus preocupaciones, y sobre todo por estar siempre al tanto de mis cosas. Sin tí Madre no se cómo hubiese sobrellevado todo esto, pues a pesar de nuestras diferencias, siempre me han acompañado tu persistencia y fortaleza.

Quiero agradecer a mi director, el profesor José Robel Arenas, ya que parte de los objetivos desarrollados en este trabajo fueron motivados y puestos en escena por él. En todos estos años se han refinado las ideas que hace algún tiempo eran muy oscuras e indescifrables, y hemos logrado dar un paso en el entendimiento de la termodinámica de agujeros negros a pesar del anacronismo de algunas ideas. Gracias por el apoyo moral, académico y económico en la recta final.

Un agradecimiento muy especial al profesor Hernando Quevedo por su apoyo y resolución de dudas, en varios de los cálculos contenidos en el trabajo. Por su hospitalidad durante mi estancia en el Instituto de Ciencias Nucleares (ICN), de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Debo manifestar que aunque los cálculos parecían esquivos al principio, su capacidad de síntesis y análisis hicieron posible sacar adelante las contribuciones más importantes de éste escrito, dejando abiertas diversas posibilidades de investigación y publicaciones futuras.

A mis jurados: el profesor Luis Norberto Granda, el profesor Juan Pablo Beltrán y en especial al profesor Jorge Zanelli, por las sugerencias y comentarios finales entorno a los resultados mas importantes de la tesis. Las horas que me dedicó tratando de entender lo que en principo era un conjunto de galimatias, fueron tomando claridad con el discernimiento y la dialéctica.

Agradecimientos a los miembros del Seminario de Geometrotermodinámica del ICN, por sus comentarios y observaciones valiosas, que si bien al principio me llenaron de mucha incertidumbre y frustración, fueron la retroalimentación perfecta a la hora de realizar la defensa. En este sentido gracias a César, Lenin, Fransisco, José Félix, por el enriquecimiento brindado a pesar del pánico escénico que me generó, en su debido momento. De igual manera, agradezco a los miembros del Seminario de Termodinámica de Agujeros Negros del Observatório Astronómico Nacional (OAN) de la Universidad Nacional, por sus comentarios y sugerencias. En especial quiero resaltar la contribución fundamental de Javier Cano,

¡gordito varias cosas no hubiesen tomado forma sin tu ayuda!. Fueron bastantes las noches de vigilia en las que la discusión se convertió en abrigo, y la alegría de encontrar la convergencia en los resultados en una especie de extasis de magnificencia. Amigo de ciencia, vida y controversia. Tambien agradezco los aportes brindados por Jorge Pitalúa, por las fructíferas discusiones a punta de tinto y cigarrillo, descifrando los pasos artificiosos de algunos artículos vacíos.

A mi gran amiga Laura Castiblanco, por tus consejos, por escucharme, por ayudarme cuando las frases no tenían sentido y por motivarme cuando todo parecía perdido. Por ser la persona que siempre tuvo una palabra de tranquilidad, cuando todo parecía colapsar y sobre todo por la confianza que los años han sabido madurar.

¡A mi ángel de la guarda, por haber sido mi dulce compañia!, por ampararme algunas noches y habitar en mi mente todos los días. El fruto del esfuerzo que brinda este triunfo no tendría razón de ser si no está lleno de pasión, cuyo nombre se materializa en la persona de Angélica Méndez; y esa es la razón por la cual se redactó este texto académico. Gracias por ser la fuente de inspiración, la fórmula perfecta, la ilusión de un futuro mejor, por los viajes intempestivos y furtivos que brindaron fortaleza; por revisar la ortografía y redacción de la primera y segunda versión del texto, por acompañarme en esta travesía ardiente de la pared de fuego, alrededor de un agujero negro, cuya información no se perderá a pesar de la distancia y de el olvido que nunca seremos...

Agradecimientos a los profesores, directivos y administrativos del ICN, del OAN y del Departamento de Física de la Universidad Nacional. En especial a la Señora Flor Sanabría por sus consejos, sus regaños y su finita paciencia. A Islena Bonilla y Lenny Pérez por la orientación y colaboración en diversos trámites a lo largo de mis estudios.

Finalmente, este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo financiero de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia.

Resumen

Observadores relativistas y termodinámica del colapso gravitacional de cascarones negros

Se estudia el colapso de un cascarón de polvo delgado desde dos enfoques diferentes: clásico y semiclásico. En el enfoque clásico se identifican superficies críticas cuyas coordenadas de tiempo y espacio intercambian sus papeles, las cuales se asocian con la presencia de horizontes cuasi-locales, sobre los que se realiza un estudio de las propiedades gravitacionales y termodinámicas.
A continuación, para el enfoque semiclásico se incorpora un campo escalar, para el cascarón en colapso, con el que se calculan la densidad de energía y entropía asociadas al observador relativista FREFOS[1], en contraste con el observador FIDO[2]. Con lo anterior se discute e interpretan los resultados a luz de la existencia de una densidad de energía negativa ante la presencia de un campo gravitacional fuerte.

Palabras clave: agujeros negros, colapso gravitacional, cascarón negro.

[1] Abreviación del inglés para freely falling observers.
[2] Abreviación del inglés para fiducial observers.

Abstract

Relativistic observers and thermodynamics of the gravitational collapse of black shells

The collapse of a thin dust shell is studied from two different approaches: classical and semiclassical. In the classical approach, critical surfaces are identified whose coordinates of time and space exchange their roles, which are associated with the presence of quasi-local horizons, on which a study of the gravitational and thermodynamic properties is carried out.
Next, for the semiclassical approach, a scalar field is incorporated, for the collapsing shell, with which the energy density and entropy associated with the relativistic observer FREFOS are calculated [3], in contrast to the FIDO observer[4]. With the above, the results are discussed and interpreted in light of the existence of a negative energy density in the presence of a strong gravitational field.

Keywords: black holes, gravitational collapse, black shells.

[3] Abbreviation for freely falling observers.
[4] Abbreviation for fiducial observers.

Notaciones y convenciones

En esta tesis se usará la signatura de la métrica $(-,+,+,+)$. Con respecto a las constantes físicas se establece en la mayoría de los resultados:

$$c = G = \hbar = k_B = 1.$$

Índice general

Agradecimientos **1**

Resumen **3**

Abstract **4**

1. Introducción **4**

2. Fundamentos teóricos **7**

2.1. Agujeros negros y generalidades . . . 7

2.1.1. Breve reseña histórica . . . 7

2.1.2. Termodinámica de agujeros negros . . . 13

2.1.3. Relación entropía-información . . . 26

2.1.4. El principio holográfico . . . 28

2.1.5. Pared de Fuego . . . 30

2.2. Formalismo de unión de métricas y condiciones de juntura . . . 31

2.2.1. Geometría de hipersuperficies . . . 31

2.2.2. Condiciones de juntura y cascarones delgados . . . 35

2.3. Estados de vacío . . . 38

2.4. Dinámica de campos térmicos . . . 52

2.4.1. Consideraciones generales . . . 52

2.4.2. Ensamble de bosones libres con frecuencia ω . . . 55

3. Cascarón negro **63**

3.1. Dinámica . . . 64

3.2. Superficies críticas y horizontes . . . 66

3.3. Cascarón desnudo . . . 69

3.4. Horizontes cuasi-locales . . . 70

3.5. Termodinámica del cascarón negro . . . 72

3.5.1. Caso estático de acuerdo con Martínez-Lemos . . . 73

3.5.2. Método diferencial de la ecuación de movimiento . . . 75

3.5.3. Ley de Smarr . . . 79

4. Termodinámica para el observador FREFOS **81**
4.1. Aproximación de Rindler . . . 81
4.2. Campo escalar sobre el espacio-tiempo de Minkowski . . . 83
4.3. Modos de Minkowski y Rindler . . . 87
4.4. Densidad de energía . . . 93
4.5. Termodinámica . . . 102
4.6. Densidad de energía negativa . . . 109

5. Resultados y Discusión **113**
5.1. Enfoque clásico . . . 113
5.2. Enfoque semiclásico . . . 115
5.3. Perspectivas . . . 117

A. Formalidades del cascarón negro **118**
A.1. Cascarón negro con masa . . . 118
A.1.1. Aspectos geométricos . . . 118
A.1.2. Construcción de la ecuación de movimiento . . . 120
A.1.3. Ecuación para el radio del cascarón . . . 122
A.1.4. Formación del horizonte R_h (caso particular) . . . 127
A.1.5. Escalar de Kretschmann . . . 127
A.2. Cascarón negro con masa y carga . . . 129
A.3. Vectores nulos y expansiones . . . 131
A.4. Cascarón con presión . . . 139

B. Modos de Campo de Hartle-Hawking **144**
B.1. Modos de campo de Boulware . . . 144
B.2. De los modos de Boulware a los modos de Hartle-Hawking . . . 146
B.3. Justificación de la transformación de Bogolubov y determinación de los modos HH . . . 146
B.4. Funciones de frecuencia positiva . . . 152

C. Termodinámica para el observador FIDO **154**
C.1. Campo escalar sobre el espacio-tiempo de Kruskal . . . 154
C.2. Modos de Kruskal-Hartle-Hawking . . . 158
C.3. Densidad de energía . . . 160
C.4. Termodinámica . . . 164

D. Método WKB **168**

E. Entropía de entrelazamiento **170**

F. Modelo de la pared **175**

Bibliografía **181**

Índice de figuras

2.1. Relación entre las coordenas de Minkowski y las de Rindler 17
2.2. Capas de materia cayendo al horizonte. (*Tomada de [30]*) 19
2.3. Espaciotiempo de Kruskal 23
2.4. Radiación Hawking 24
2.5. Coordenadas para la solución de Schwarzschild euclidiana 26
2.6. Tiempo coordenado y tiempo propio 29
2.7. Correspondencia de Maldacena 30
2.8. Vectores sobre la hipersuperficie 32
2.9. Vector normal sobre diferentes hipersuperficies 34
2.10. Regiones del espacio-tiempo separadas por una hipersuperficie 36
2.11. Sistema real-ficticio 54

3.1. Radio del cascarón en función del tiempo propio τ y el tiempo coordenado t para masa particulares de $M = 1$ y $m = 1$. 66
3.2. Norma de la 4-velocidad del observador, de acuerdo a la ec.(3.17) para las masas particulares $M = 1$ y $m = 1$. 67
3.3. Localización del radio del horizonte R_h en terminos de la masa m. Se ha elegido $M = 1$, lo que significa que R_h y m se dan en multiplos de M. 68

4.1. Modos de campo en el espacio-tiempo de Minkowski. 85
4.2. Desplazamiento de modos de campo en el espacio-tiempo de Minkowski. 86
4.3. Densidad de energía HB para el observador FIDO en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$. 110
4.4. Densidad de energía MR para el observador FREFOS en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$ 111
4.5. Diferencia de densidades de energía $MR - HB$ en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$. 112
4.6. Razón entra las densidades de energía MR/HB en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$. 112

A.1. Vectores nulos para un cascarón de polvo en colapso. 139

B.1. Espacio-tiempo de Schwarzschild extendido maximalmente. 145

B.2. Extensión al plano complejo de t_+. 147
B.3. Representación de $\ln V_Z$. 148

C.1. Modos de campo en el espacio-tiempo de Kruskal. 155
C.2. Desplazamiento de modos de campo en el espacio-tiempo de Kruskal. 158

F.1. Modelo de la pared 176
F.2. Límites de integración para el modelo de la pared. 178

Capítulo 1

Introducción

El colapso gravitacional es una de las predicciones más interesantes de la relatividad general. Este está asociado con la formación de agujeros negros y ondas gravitacionales, los cuales se espera que contengan información acerca del estado final de objetos compactos que interactúan fuertemente y alrededor de la dinámica del proceso físico que ocurre durante el colapso. Para encontrar los detalles de la formación de agujeros negros y ondas gravitacionales en relatividad general, es necesario considerar el conjunto completo de ecuaciones de Einstein y aplicar varios métodos de relatividad numérica para resolverlas. La relatividad numérica es un área de investigación por sí misma que implica el uso de herramientas computacionales de alta precisión [1].

Una aproximación alternativa consiste en considerar solo los aspectos más esenciales del colapso gravitacional analizando un modelo ideal que reduce la complejidad del problema. Este es el caso del escenario del *cascarón negro*, donde la complejidad matemática del problema se reduce drásticamente, y como consecuencia, se motiva al uso de herramientas analíticas principalmente. En el modelo del cascarón negro, se asume la contracción de un cascarón esférico simétrico que parte de alguna distancia radial y conduce a la reducción del radio del cascarón con respecto a un observador FIDO[1] localizado en el infinito. Como el cascarón se va encogiendo, la evolución es descrita por un proceso de colapso Oppenheimer-Snyder [2]. Por medio de este modelo de colapso se caracteriza la formación de un agujero negro y toda la fenomenología que surge alrededor de estos, como lo es el estudio de su termodinámica.

Uno de los aspectos más importantes en la física de agujeros negros es la similitud formal entre las leyes mecánicas de los agujeros y la termodinámica. Sin embargo, sólo hasta el descubrimiento de la radiación Hawking, se logró establecer con claridad la analogía, cuando se encuentra una expresión precisa para la entropía de un agujero negro. En este contexto, la leyes de la mecánica de los agujeros negros vienen a identificarse con las leyes de la termodinámica de éstos.
En particular, la entropía Bekenstein-Hawking, la cual es proporcional a un cuarto del área del horizonte de eventos, se comporta como una entropía termodinámica [3]. Un enlace en torno a estas ideas lleva a la búsqueda de una interpretación desde la mecánica estadística de la entropía de un agujero negro.

[1] Abreviación del inglés para fiducial observers.

Se puede derivar la entropía Bekenstein-Hawking, incluyendo el factor numérico contando microestados asociados al agujero negro. De esta manera se tiene una identificación más que una analogía entre las leyes de la mecánica de los agujeros y las leyes de la termodinámica [4].

En la actualidad hay varias aproximaciones que comienzan por el conteo de estados, los cuales se basan en estructuras fundamentales (cuerdas, branas, modos de campo, valores propios de operadores de área, entre otras). Sin embargo, ninguna de estas aproximaciones se puede considerar completa, puesto que todas ellas dentro de sus dominios de aplicación, cuentan ciertos estados que pretenden especificar el origen estadístico de la entropía de un agujero negro. Lo anterior está en completo contraste con relación a otros sistemas físicos, como por ejemplo un gas ideal, donde el número de grados de libertad cuánticos se identifican de manera única y llevan a la entropía termodinámica clásica.
Entre las teorías que más se destacan en la solución a estas cuestiones se encuentran: La teoría de entanglement, la gravedad cuántica de lazos y la teoría de cuerdas.

En los últimos 50 años discusiones alrededor de la pérdida de información, el principio holográfico, el origen microscópico de la entropía de agujeros negros, la gravedad como un fenómeno emergente y el fenómeno más reciente denominado *la pared de fuego* tiene sus raíces en la termodinámica de los agujeros negros [5].

En este sentido, el presente trabajo pretende contribuir a la comprensión de los fundamentos del colapso gravitacional y la termodinámica de los agujeros negros; en particular al significado físico de la entropía de Bekenstein-Hawking, por medio del modelo de juguete del *cascarón negro* descrito en el capítulo 3.
Para ello, en el capítulo 2, se involucran los fundamentos teóricos sobre los cuales se desarrolla el trabajo. Partiendo de un breve recuento histórico de las ideas seminales de la termodinámica de agujeros negros, se introducen aspectos generales como lo son la relación entre las leyes de la mecánica de los agujeros y la termodinámica. Se realiza una revisión del formalismo de unión de métricas y condiciones de juntura, necesario para la caracterización geométrica del cascarón negro. Además, se realiza una introducción a los estados de vacío para campos escalares en espacios-tiempo curvos, en el modelo (1+1), y se exponen los aspectos teóricos más relavantes de la Dinámica de Campos Térmicos (DCT) [6]. Lo anterior, con el fin de caracterizar la termodinámica para un observador en caída libre FREFOS[2] en el capítulo 4, con base en el método de cálculo desarrollado para el observador en *reposo* FIDO (apéndice B).

Los aportes de este trabajo se encuentran en el capítulo 3 y el capítulo 4. En el capítulo 3 se desarrolla de manera extensa la dinámica de un cascarón negro con masa, donde se localizan dos superficies críticas que se identifican con los horizontes del cascarón [7]. Al asumir que el cascarón en el proceso de colapso presenta un horizonte de eventos de manera similar a como lo hace un agujero negro, se procede a realizar el cálculo de la entropía para el caso estático y se encuentra una relación general para el caso dinámico. Además, se analiza que un caso particular existe en el cual ningún horizonte aparece durante la evolución del cascarón, lo cual se denominará *cascarón desnudo*.

[2] Abreviación del inglés para freely falling observers.

Con base en la teoría del vacío desarrollada por Israel [8–10] en el capítulo 2, se calcula la densidad de energía y entropía asociada con el observador FREFOS, en el capítulo 4.
Con lo anterior y a partir de la idea de que un agujero negro no deja escapar información desde el punto de vista clásico, pero cuánticamente sí lo hace en su proceso de evaporación, surge lo que se denomina en la literatura *la paradoja de la pérdida de información* [4], cuya solución contemporánea está contenida en el modelo de la pared de fuego. Este último se menciona con brevedad en el capítulo 2 y su existencia se justifica en el capítulo 4, por medio de las propiedades del vacío, en el modelo (3+1).

Finalmente a manera de conclusiones, se interpretan en el capítulo 5, los resultados del trabajo y en particular el de una densidad de energía negativa del vacío ante la presencia de un campo gravitacional fuerte, para los observadores FIDO y FREFOS; donde, en el contexto de la teoría semiclásica, se propone la imagen del horizonte de eventos como un cascarón caliente sin masa, que vendría a justificar la existencia de una pared de fuego, a partir de las propiedades del vacío [11].

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Agujeros negros y generalidades

2.1.1. Breve reseña histórica

A principios de los años setenta una interesante analogía de forma, en cuanto a estructura matemática, se descubrió entre las leyes de la mecánica de los agujeros negros y las leyes de la termodinámica[1]. Del trabajo de Bekenstein y Hawking [12–14] se establece una correspondencia entre la gravedad superficial con la temperatura y el área del horizonte con la entropía, donde se postula que los agujeros negros se comportan como objetos termodinámicos con temperatura y entropía dadas por la temperatura de Hawking T_H y la entropía de Bekenstein-Hawking S_{BH} respectivamente. Los primeros trabajos que surgen en el contexto de la termodinámica de agujeros negros comienzan con Bekenstein [12] con la formulación de la segunda ley generalizada de la termodinámica donde se considera que la entropía Bekenstein-Hawking S_{BH} es una entropía térmica.

De la mecánica estadística se conoce que la entropía se relaciona con los grados de libertad y conteo del número de microestados de un sistema. Sin embargo, clásicamente, los agujeros negros poseen muy pocos grados de libertad: a partir del teorema del *no pelo* un agujero negro es identificado por su masa, carga y momento angular [16]. En cualquier teoría física la entropía toma una posición única sobre otras cantidades, debido al hecho de que la entropía relaciona la estructura microscópica y macroscópica de un sistema a través de la relación de Boltzmann

$$S = k_B \ln \Omega, \tag{2.1}$$

donde Ω es el número total de microestados accesibles y k_B la constante de Boltzmann. La entropía de un agujero negro es única y se distingue de la de otros sistemas físicos debido a que ésta no es una variable extensiva como la de un gas ideal y a su vez es proporcional al área del horizonte de eventos A

[1] Esto se expone en la sección (2.1.2)

del agujero negro, la cuál está dada por

$$S_{BH} = \left(\frac{k_B}{4}\right)\frac{A}{l_p^2}, \qquad \text{donde} \qquad l_p \equiv \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}, \tag{2.2}$$

con l_p la longitud de Planck, G la constante de gravitación de Newton, $\hbar$ la constante de Planck y c la velocidad de la luz en el vacío. De la ecuación anterior se evidencia que solo una descripción cuántica de la gravedad podrá mostrar el origen de ésta entropía, debido a las constantes que se relacionan en la longitud de Planck. Así al igual que la termodinámica usual tiene una descripción microscópica bien establecida, se espera que la entropía Bekenstein-Hawking esté relacionada con un número de estados microscópicos que den cuenta de los fundamentos de lo que sería una teoría cuántica de la gravedad [17].

En general, la termodinámica de agujeros negros plantea cuestiones fundamentales que se pueden resumir en las dos siguientes:

- *¿Cuál es el origen de la entropía de agujero negro?*
- *¿Se pierde la información en el proceso de evaporación de los agujeros negros?*

Con respecto a la *primera pregunta*, se establece que los primeros intentos de una explicación microscópica de esta entropía surgieron desde dos puntos de vista diferentes, uno de origen topológico-euclidiano propuesto por Gibbons y Hawking [18] y el otro derivado de un ambiente térmico con base en el modelo de la pared de t'Hooft [19].

La teoría candidata con más resultados teóricos a consolidar una explicación microscópica de S_{BH} es la teoría de cuerdas, con la derivación mecánico-estadística de la entropía Bekenstein-Hawking para agujeros negros extremales [20, 21] y cercanamente extremales [22] como los resultados más importantes de esta teoría en los últimos años. Sin embargo, la teoría de cuerdas presenta la dificultad de la fuerte dependencia de los detalles técnicos y lo poco que dice acerca de la segunda ley generalizada de la termodinámica; además, no describe los correspondientes grados de libertad microscópicos reales ni su localización [23].
La gravedad cuántica de lazos o bucles (*Loop quantum gravity LQG*) ofrece una descripción de S_{BH}. Esta teoría sugiere que la geometría del espacio-tiempo está cuantizada y el área de una superficie se modela como un operador. Desde esta descripción la entropía Bekenstein-Hawking se relaciona con los valores de degeneramiento del operador de área. Sin embargo, LQG en su aspiración de cuantizar la geometría del espacio-tiempo falla en el cálculo de la entropía cuando se introducen los campos de materia [24].

En los últimos años se ha investigado la entropía de los agujeros negros en dos direcciones principalmente [3]. Una de ellas se fundamenta en la suposición desde la cual simetrías clásicas sobre el fondo del agujero negro pueden controlar la densidad de estados de gravedad cuántica y en esta forma derivar la entropía de un agujero negro. La otra dirección sugiere que el origen de S_{BH} está relacionado con las propiedades de la física del vacío en presencia de un campo gravitacional fuerte, donde un observador estático cerca del horizonte de eventos percibe el vacío como un estado mezclado debido a que las fluctuaciones del vacío obsevables y no observables están correlacionadas en el horizonte. Esta dirección de

trabajo es conocida como la *termodinámica de entanglement* de agujeros negros [25].
La termodinámica de entanglement a diferencia de la teoría de cuerdas, da cuenta de la ubicación de los grados de libertad microscópicos asociados, cuyo modelo muestra la presencia de una atmósfera térmica alrededor de los agujeros negros [8, 9, 19], el cual se ha comprendido con la contextualización de los primeros trabajos de Bombelli et.al y otros [26, 27] en el contexto de la Dinámica de campos térmicos de Umezawa y Takahashi (DCT) [6, 8, 28].

Con el surgimiento de la correspondencia *AdS/CFT (Anti De Sitter/Teoría de Campos Conformes)* [29, 30], el estudio de las propiedades termodinámicas de los agujeros negros ha atraído la atención en los últimos años [31]. Desde esta perspectiva, siguiendo el trabajo pionero de Maldacena [32], se puede interpretar el cálculo del número de estados en teorías de campo dual, para una amplia clase de espacio-tiempos, como una medida de la entropía de entanglement.

En lo relacionado con *la segunda pregunta*, el trabajo pionero de Hawking plantea la idea en donde un agujero negro emite una radiación de cuerpo negro que tiene una temperatura dada por la masa del agujero. Esta radiación térmica no transmite ninguna información la cual está en un estado cuántico mezclado. Un objeto cayendo al agujero negro aporta información que se representa por un estado cuántico puro. Así surge la pregunta natural, *¿qué sucede con la información?*. En el límite cuando el agujero negro se evapora por completo, el estado cuántico puro ha evolucionado a un estado cuántico mezclado lo que está prohibido por la mecánica cuántica, cuya unitariedad exige que un estado cuántico puro debe permanecer en un estado cuántico puro para así mantener la conservación de la información. Por tanto, la idea de renunciar a la unitariedad de la mecánica cuántica o de la conservación de la información, es lo que establece *la paradoja de la pérdida de información* [33].

En el contexto de la información un agujero negro se asemeja bastante a un sistema termodinámico, en el cual, a diferencia de un sistema físico, como un cubo de azúcar, donde se requiere una infinidad de parámetros para tener un conocimiento completo, para un observador ubicado en el exterior de un agujero negro, este se presenta como un sistema relativamente simple. La descripción total del sistema está dada si se conocen los parámetros de masa, momentum angular y carga eléctrica (también en algunos casos se puede incluir la magnética) como se señaló anteriormente. Esta simplicidad representa tal vez la característica más fundamental de los agujeros negros. La emisión de ondas gravitacionales que acompaña a la formación del agujero barre la complejidad estructural de la materia, es decir, esta afeita al agujero negro (debido a esto se adopta el término de *no pelo*) para solo ser identificado por su masa, momentum angular y carga eléctrica. El resto de información se pierde, aumentando así la entropía.
Así, al considerar que gran cantidad de información se pierde tras del horizonte de eventos cuando el agujero negro se forma, se puede pensar en relacionar la entropía del agujero con esta información [12] (1973).

La paradoja es el planteamiento de que la información no se conserva tanto en el régimen *clásico* como en el *semiclásico*. Desde que fue propuesta se ha buscado la manera de conservar la información en el régimen semiclásico, pero lo más probables es que sólo se tenga conservación de información en el

régimen netamente *cuántico*.
Supongamos que lanzamos una revista a un agujero negro a un ángulo definido, lo cual implica un aumento de masa del agujero debido a la masa de la revista y una modificación de su momentum angular por el impulso angular de la revista. Suponiendo que la revista tiene carga eléctrica el agujero modifica su carga en la misma cantidad. Así, desde el contexto *clásico* a medida que la revista desaparece en la singularidad, la información de la revista se pierde para siempre puesto que nada escapa del agujero. Desde el punto de vista *semiclásico* a partir del descubrimiento de la radiación térmica de Hawking, se evidencia que no hay información que se pueda deducir, a parte de la temperatura del agujero, es decir, su masa la cual sólo nos da la masa de la revista, lo que coincide con el tratamiento *clásico*, en donde de nuevo se pierde información. Así, un estado cuántico puro cae en el agujero y un estado cuántico mezclado es emitido, donde el cálculo semiclásico indica que un estado puro evoluciona a un estado cuántico mezclado. Lo anterior viola la unitariedad la cual es prohibida por la mecánica cuántica. Por lo tanto, tenemos dos opciones:

1. Aceptar como válido el resultado del cálculo semiclásico y renunciar a la unitariedad admitiendo pérdida de información .

2. Tratar de encontrar un cálculo totalmente *cuántico* donde la unitariedad se preserve y se admita la conservación de información.

Dentro de los defensores de la opción 1 se encontró inicialmente a Hawking como su principal representante, y en la opción 2 se encuentran: la teoría de cuerdas, y el modelo de *la pared de fuego* entre los más relevantes.

Un primer conjunto de soluciones fue dado por Preskill en las cuales no hay pérdida de información debido a que [34]:

- La información se transmite por la radiación del agujero
- La información se retiene por un agujero negro estable remanente.
- La información sale *al final*.
- La información es codificada en el *pelo cuántico*.
- La información escapa a un universo bebé.

De las soluciones propuestas por Preskill se pudo concluir de manera parcial que si se acepta la pérdida de información, se necesita una mejor comprensión de lo que se entiende por pérdida de información. Se necesita una teoría cuántica de campos generalizada que sería la teoría cuántica de campos actual en el límite de bajas energías. Es decir, se necesita una teoría cuántica de la gravedad que preserve la unitariedad. Es aqui donde entra la teoría de cuerdas a lidiar con la paradoja.
En 1996 [35], Gary Horowitz en un intento por ver dónde está la información del cuerpo colapsado pone de manifiesto que la información del agujero negro no está localizada cerca del horizonte o cerca a la singularidad, sino que abarca todo el espacio entre ellas. Así, en 1997 Horowitz muestra en el contexto

de la teoría de cuerdas que se puede identificar y contar los estados cuánticos asociados con los agujeros negros. De esta manera, la radiación Hawking puede preservar su unitariedad en lugar de ser térmica, incluso en el régimen de bajas energías tanto para agujeros negros extremales y no extremales [36]. Con lo anterior y buscando la conservación de la energía, el agujero se transforma en una cuerda que lleva toda la información del cuerpo colapsante que lo originó y de todo lo que ha caído en este, y por interacción de cuerdas la información sería devuelta a nuestro universo.
En 1997 Marshkevich [37] propuso un modelo que preserva la conservación de los números bariónicos y leptónicos, contrario a lo que fué planteado originalmente por Hawking, donde sugirió un nuevo canal de pérdida de energía en el cual se plantea una disminución del número de particulas conservadas y no conservadas de la no conservación de los números bariónicos y leptónicos.
Más adelante de nuevo Horowitz en el 2003 [38], sugiere que se necesita imponer una condición de frontera al estado final en la singularidad del agujero, en lugar de cambiar toda la mecánica cuántica, para así preservar la unitariedad.

Una propuesta interesante se encuentra en el modelo de probabilidad de tunelamiento de Parikh-Wilczek. En este modelo se plantea la idea de correlación de estados desde la teoría de probabilidad, donde se presenta un método de solución para un problema de pérdida de información que se apoya en un cálculo de probabilidad [39].

Una visión más optimista del problema, ha surgido en los últimos años en el contexto de las dualiades establecidas en teorías de cuerdas y el principio holográfico. Con base en la idea de complementariedad de Bohr, la cual acompañó el descubrimiento de la mecánica cuántica con la dualidad onda-partícula para la luz, Susskind, Thorlacius y Uglum enunciaron un principio según el cual ningún observador ve una violación de las leyes de la naturaleza denominado "complementariedad de horizontes" o complementariedad de agujero negro [40]. La complementariedad del agujero negro es un nuevo tipo de complementariedad que resulta de combinar la mecánica cuántica con la gravedad. Esta establece que no hay una única respuesta a la pregunta *¿quién tiene razón: el observador que permanece fuera del agujero negro el cual ve que toda la información se irradía desde el horizonte, o el observador que lo cruza con los bits que se dirigen hacia la singularidad?*. Cada uno tiene razón desde su propio marco de referencia, es decir, son descripciones complementarias de dos experimentos diferentes. Así, para un observador externo, el agujero negro consiste en un enorme vertedero de materia plana congelada en su horizonte. Lo anterior es un ejemplo del holograma óptico usual en el cual una superficie bidimensional codifica información sobre la forma tridimensional de un objeto. Una idea parecida fue propuesta hace ya algunos años por G.t́ Hooft y L. Susskind [41], que sugirieron que el número de grados de libertad que describen una región en una teoría de gravedad es proporcional al área de esa región recordando la relación entre la entropía y el área del agujero negro.
Maldacena encontró una realización explícita de esta propuesta en la teoría de cuerdas. Pudo describir el interior de un espacio-tiempo particular (llamado Anti-de Sitter) en términos de una teoría en la frontera de ese espacio-tiempo, que tiene una dimensión menos [2]. Según esta idea, las partículas que

[2] La conjetura de Maldacena o dualidad AdS/CFT Anti-deSitter/Conformal Field Theory establece: *N=4 super-Yang-Mills en 3+1 es dual a teoría de supercuerdas tipo II-B sobre un fondo* $AdS^5 \times S^5$ [42].

viven en el borde del espacio-tiempo describen un objeto que está en el interior. Los agujeros negros en el interior se describen mediante un gran número de partículas en el borde. La física gravitatoria en el interior, cuando resulta muy complicada, se puede describir de manera alternativa mediante partículas interactuantes en el borde. La teoría de la frontera es una teoría de partículas relativamente sencilla. Entonces, hay dos descripciones equivalentes de la misma física. Cuando una de ellas resulta incapaz de resolver un problema, se apela a la otra, que permite abordar las preguntas sin respuesta en la primera formulación. Una teoría de partículas relativamente sencilla en el borde puede describir objetos muy complicados del interior. El espacio-tiempo emerge dinámicamente en este esquema, a partir de la interacción de las partículas que viven en la frontera. Y en esta formulación no hay pérdida de información porque la teoría cuántica de las partículas del borde es una teoría unitaria que respeta los postulados de la mecánica cuántica.

Al seguir el principio de complementariedad enunciado con anterioridad, Susskind et.al se dieron cuenta que la información podía ser codificada en el estado cuántico de la radiación en su conjunto si las partículas llegasen a tener estados entrelazados, de tal forma que las mediciones llevadas a cabo sobre una de ellas influiría inmediatamente en su pareja sin importar lo lejos que se encuentren [43]. Sin embargo, Polchinski et.al, se percataron de que si esto sucediese se tendría que clonar información debido a que el principio de complementariedad plantea dos enredamientos: el de las partículas emitidas con las partículas que caen en el agujero, y la de las partículas emitidas con toda la radiación Hawking [33]. Para solucionar esta dificultad, se decide eliminar una de las posibles relaciones de enredamiento que plantea Susskind por el principio de complementariedad. Al romper este enredamiento se libera una gran cantidad de energía, que el horizonte de eventos se convertiría en un anillo de fuego en el cual cualquier objeto que lo atraviese sería quemado, es decir nada entra al agujero y toda la información quedaría incinerada en su horizonte. Lo anterior confirma de nuevo el principio holográfico. Luego, para salvaguardar el principio de equivalencia todo observador en caída libre hacia un agujero negro debe encontrar una pared de fuego (*firewall*) que lo destruye evitando que realice mediciones al interior de este.

Del trabajo de Hawking se evidencia que si se siguen los principios básicos de la relatividad general y la mecánica cuántica hasta el final se concluye que un estado puro evoluciona en un estado mezclado, lo cual viola los principios de la mecánica cuántica. Durante cerca de 30 años Hawking afirmó que los agujeros negros pueden destruir información cuántica. Este tipo de destrucción de información viola los principios de la mecánica cuántica. Por lo tanto Hawking sugirió que esta teoría debía ser abandonada o por lo menos modificada, que se veía como una posición revolucionaria. Pero en julio de 2004 Hawking presentó esquemáticamente un argumento que, según dijo, sustenta la conclusión de que no hay pérdida de información [44]. Su propuesta no satisfactoria para la mayoría de la comunidad de físicos está fundamentada en la idea de suma de historias de Feynman sobre los múltiples universos en los cuales un agujero destruye y no destruye información.
Debido a la dependencia de los detalles técnicos los resultados obtenidos por la teoría de cuerdas, no son claros. Al apelar a una aparente *dualidad* impuesta por el régimen de acoplamiento débil-fuerte y viceversa, se pierde toda significación en cuanto a la física del sistema termodinámico a estudiar, es decir, el agujero negro y su termodinámica asociada. La descripción y no localización de los grados

de libertad (relacionados con la entropía del agujero) hace que la teoría no sea universal y dependa del modelo sobre el que se obtienen los resultados. Lo anterior es una consecuencia de que la aparente dualidad está apoyada por un principio holográfico subyacente que no está comprobado y que se postula como principio universal.
El modelo de la pared de fuego señala que la complementariedad sobre la que se fundamenta la holografía traía consigo una complicación más y es la violación del principio de equivalencia. Luego, si salvaguardamos el principio de equivalencia, el principio de complementariedad no se cumple de manera total y el trabajo de Maldacena y todo lo que implican las dualidades de la teoría de cuerdas se vendría abajo. Por lo tanto se llega a un punto en el cual tal vez se pueda concluir que Hawking desde el principio tenía razón. Sin embargo, la comunidad científica apuesta por el trabajo de Maldacena y todas sus implicaciones. [45].

Recientemente, el mismo Hawking ha propuesto una posible solución al problema de la pérdida de información sin recurrir al modelo de la pared de fuego [46]. En esta propuesta se establece que en el colapso gravitacional se produce un horizonte aparente diferente al horizonte de eventos, sobre el que no habría pérdida de información. Esta propuesta que se fundamenta en las ideas de la dualidad AdS/CFT está de acuerdo con la invarianza CPT de la gravedad cuántica la cual se rompe si se asume la existencia de la pared de fuego [3].
Una reciente solución propuesta a estas anomalías asociadas con la evaporación de los agujeros negros en el contexto de la teoría semiclásica, sugiere la existencia de una densidad de energía negativa del vacío ante la presencia de un campo gravitacional fuerte [11]. Desde esta perspectiva se propone la imagen del horizonte de eventos como un cascarón caliente sin masa, que vendría a identificarse con la pared de fuego.

2.1.2. Termodinámica de agujeros negros

Al establecerse una analogía formal entre las leyes mecánicas de los agujeros negros con la termodinámica, surge toda un área de estudio de la física teórica denominada *termodinámica de los agujeros negros* en la cual el teorema de las áreas de Hawking encuentra su equivalencia con la entropía termodinámica, y la aceleración gravitacional en la superficie del agujero con la temperatura. Sin embargo esta analogía no se formalizó de manera clara sino hasta que se encontró una conexión profunda con la mecánica cuántica.

Aspectos generales

De manera elemental un agujero negro es una región del espacio-tiempo en cuyo interior el campo gravitatorio es tan intenso que impide a la materia y a la radiación escapar.
Desde un punto de vista formal, un agujero negro es un espacio-tiempo que posee un horizonte (horizonte de eventos), que actúa de tal manera que el exterior del horizonte está incomunicado en relación con el interior, y además tiende a ser asintóticamente una variedad plana donde los efectos gravitatorios son

[3] Esta simetría establece que las leyes de la física son invariantes ante inversiones de carga, paridad y tiempo.

nulos, y el espacio-tiempo adopta la métrica de Minkowski.
Para caracterizar un agujero negro existen tres parámetros: la masa M, la carga Q y el momentum angular $\vec{L}$. Este resultado está demostrado por los trabajos de W. Israel, B. Carter, S.W. Hawking y D.C. Robinson [16, 47]. El contenido de estos trabajos es el denominado *teorema del no pelo*, donde la palabra *"pelo"* hace referencia a cualquier parámetro necesario para describir al agujero que no sea la masa, la carga o el momentum angular.
Las ecuaciones de Einstein de la relatividad general que determinan la métrica sobre la variedad espacio-tiempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ son [4]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{2.3}$$

Al solucionar las ecuaciones de Einstein, se describe el espacio-tiempo en torno a un agujero negro teniendo en cuenta los tres parámetros anteriores. De ahí surgen diferentes tipos de métricas las cuales van a depender de los factores que se están tomando en cuenta en el estudio del agujero negro en particular. Así, se obtiene la métrica de Schwarzschild que describe el espacio tiempo en la región alrededor de un agujero negro cuyo parámetro fundamental es la masa. La métrica de Reissner-Nordstrom describe el espacio-tiempo para un agujero negro con masa y carga como parámetros fundamentales. La métrica de Kerr describe el espacio-tiempo para una agujero negro con masa y momentum angular, y finalmente la solución más general está establecida por la métrica de Kerr-Newman la cual describe el espacio-tiempo en torno a un agujero negro cuyos parámetros fundamentales son la masa, la carga y el momentum angular que está dada por [5]

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(cdt - asen^2\theta d\varphi\right)^2 + \frac{sen^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)d\varphi - adt^2\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{2.4}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{GQ^2}{c^2} - \frac{2GMr}{c^2}, \\ \rho^2 &= r^2 + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta, \end{aligned} \tag{2.5}$$

siendo M:Masa, $\vec{a} := \frac{\vec{L}}{M}$:momentum angular por unidad de masa y Q :carga eléctrica.
Si $Q = 0$ se obtiene la métrica de Kerr

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(cdt - \frac{a}{c}sen^2\theta d\varphi\right)^2 + \frac{sen^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2 + \frac{a^2}{c^2}\right)d\varphi - adt^2\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

[4] Las propiedades geométricas al lado izquierdo de la ecuación (2.3) están representadas por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, el escalar de curvatura R y una constante Λ denominada la constante cosmológica. La parte derecha está relacionada con la materia y la energía por medio del Tensor momentum-energía $T_{\mu\nu}$ y unas constantes.

[5] La signatura métrica empleada en este trabajo es $(-,+,+,+)$. El procedimiento formal para la obtención de todas estas métricas se puede ver en [48].

donde

$$\Delta = r^2 + \frac{a^2}{c^2} - \frac{2GMr}{c^2},$$
$$\rho^2 = r^2 + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\theta.$$

Si $a = 0$ y $Q \neq 0$ se obtiene la métrica de Reissner-Nordstrom

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\varphi^2,$$

y si $Q = a = 0$ se obtiene la métrica de Schwarzschild[6]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\varphi^2. \tag{2.6}$$

La región que se encuentra cerca al horizonte siguiendo a [30], se puede explorar reemplazando r en (2.6) por una coordenada ρ la cual mide la distancia propia desde el horizonte y está dada por [7]

$$\begin{aligned} \rho &= \int_{2GM}^{r} \sqrt{g_{rr}(r')}dr', \qquad (2.7) \\ &= \int_{2GM}^{r} \left(1 - \frac{2GM}{r'}\right)^{-1/2} dr', \\ &= \sqrt{r(r - 2GM))} + 2GM\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{r}{2GM} - 1}\right). \end{aligned}$$

Así, en términos de ρ y t la métrica toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r(\rho)}\right)dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)d\Omega^2, \tag{2.8}$$

donde cerca al horizonte la ecuación (2.7) se comporta como

$$\rho \approx 2\sqrt{2GM(r - 2GM)}, \tag{2.9}$$

lo que resulta en

$$ds^2 \cong -\rho^2\left(\frac{dt}{4GM}\right)^2 + d\rho^2 + r^2(\rho)d\Omega^2. \tag{2.10}$$

[6] Siendo el radio de Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$.
[7] En lo que sigue se tomara $c = 1$

si se está interesado en una región angular pequeña del horizonte arbitrariamente centrada en $\theta = 0$ se puede reemplazar la coordenada angular por las siguientes coordenadas cartesianas

$$x = 2GM\theta\cos\phi, \qquad (2.11)$$
$$y = 2GM\theta\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Finalmente, se introduce el tiempo adimensional ω

$$\omega = \frac{t}{4GM}, \qquad (2.12)$$

así la métrica toma la forma

$$ds^2 = -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + dx^2 + dy^2, \qquad (2.13)$$

donde ρ es una variable radial y ω es un variable angular hiperbólica para un espacio ordinario de Minkowski. Las coordenas de Minkowski T, Z que se definen como

$$T = \rho\,\mathrm{senh}\,\omega,$$
$$Z = \rho\cosh\omega, \qquad (2.14)$$

dan como resultado la métrica familiar de Minkowski

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2. \qquad (2.15)$$

En este punto se debe aclara que la ecuación (2.15) es solo una precisión cerca de $r = 2GM$, y solo para una región angular pequeña. Lo anterior es muestra de que el horizonte no es singular localmente, y para un agujero negro grande, es localmente indistinguble del espacio-tiempo plano.
En la figura (2.1) se muestra la relación entre las coordenadas de Minkowski y las coordenas ρ, ω, donde el espacio-tiempo de Minkowski se divide en cuatro regiones. La región I representa el exterior del agujero negro. El horizonte propio es el origen $T = Z = 0$, el cual es una superficie bidimensional en el espacio-tiempo cuadridimensional. Esto puede parecer sorprendente puesto que el horizonte originalmente estaba definido por la ligadura $r = 2GM$, y por consiguiente era una superficie tridimensional. Sin embargo se debe recalcar que en el horizonte g_{00} desaparece. Luego, el horizonte no tiene extensión o tamaño métrico en la dirección temporal.
La aproximación de la región cercana al horizonte por el espacio de Minkowski se denomina la aproximación de Rindler[8], donde la región I se denomina el espacio de Rindler. La coordenada tipo tiempo, ω, es el tiempo de Rindler, donde una traslación del tiempo de Rindler $\omega \to \omega + cte$ es equivalente a un boost de Lorentz en el espacio de Minkowski.

Al considerar la descripción de eventos cerca del horizonte de un agujero negros estático desde el punto de vista de un observador externo, es útil la imagen de un espacio lleno de observadores estáticos que se encuentran localizados en coordenadas (r, θ, ϕ) fijas. Estos observadores son llamados

[8]En la sección 4.1 se realiza un cambio de notación en la métrica 2.15 donde ω se cambia por τ.

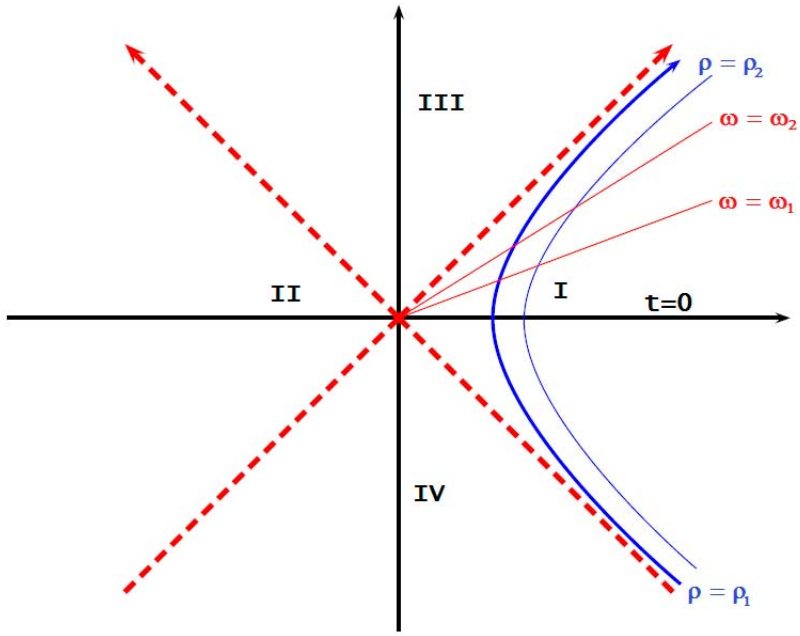

Figura 2.1: Relación entre las coordenas de Minkowski y las de Rindler

observadores fiduciales, o por medio de la abreviación FIDOS [9]. Cada Fido lleva un reloj el cual se ajusta para registrar el tiempo de Schwarzschild. Lo anterior significa que los Fidos a diferentes valores de r ven sus propios relojes corriendo a diferentes variaciones de tiempo propio. De manera alternativa, ellos podrían llevar relojes estándar los cuales siempre registran el tiempo propio τ. Para un r dado la relación entre el tiempo de Schwarzschild t y el tiempo propio de los Fidos τ está dada por

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{g_{00}} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2}. \tag{2.16}$$

Así, para el Fido cerca a $r = 2GM$, el reloj de Schwarzschild parecerá correr a un ritmo muy rápido. La localización espacial de los Fidos puede ser etiquetada por medio de las coordenadas angulares (θ, ϕ) y cualquiera de las radiales r, r^*, ρ [10].

Si se considera una partícula clásica cayendo radialmente dentro del agujero, hay dos puntos de vista que se pueden adoptar en la descripción del movimiento de la partícula hacia el agujero. El primero de ellos es el punto de vista de los Fidos los cuales se encuentran situados al exterior del agujero negro. Este punto de vista es útil para observadores distantes, puesto que cualquier observación realizada por un Fido se puede comunicar a observadores distantes. De acuerdo con este punto de vista, la partícula nunca cruza el horizonte sino que se aproxima asintóticamente a este. El segundo punto de vista involucra a los observadores en caída libre o FREFOS quienes siguen la partícula conforme esta cae hacía el agujero

[9] Abreviación del inglés para fiducial observers.

[10] La coordenada r es la usada en la métrica de Schwarzschild, la coordenada r^* es la que se emplea en las coodenadas tortuga y la coordenada ρ es la que se utiliza en las coordenadas de Rindler.

negro [11]. De acuerdo con los Frefos, ellos y la partícula cruzan el horizonte en un tiempo finito. Sin embargo, una vez cruzan el horizonte, sus observaciones no se pueden comunicar a cualquier Fido u observador distante.
Una vez la partícula esta cayendo cerca al horizonte su movimiento puede ser descrito por las coordenadas de Rindler (T, Z, X, Y) definidas en las ecuaciones (2.11) y (2.14). Si la partícula está en caída libre, en las coordenadas de Minkowski su movimiento es una línea recta dada por

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\tau} &= \frac{p^Z}{m} = -\frac{p_Z}{m}, \\ \frac{dT}{d\tau} &= \frac{p_T}{m}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde p_Z y p_T son las componentes del momento Z y T, y m es la masa de la partícula. A medida que la particula en caída libre pasa el horizonte, se considera que las componentes p_Z y p_T permanecen constantes o en su defecto varían muy lentamente. Estas son las componentes vistas por los Frefos. Ahora las componentes del momento vistas por los Fidos son las componentes p_ρ y p_τ, las cuales utilizando las ecuaciones (2.14), están dadas por

$$\begin{aligned} p_\rho &= p_Z \cosh\omega + p_T senh\omega, \\ p_\tau &= p_Z \operatorname{senh}\omega + p_T cosh\omega. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Para tiempos largos se encuentra

$$p_\rho \approx p_\tau \approx 2p_Z e^{\omega} = 2p_Z e^{\frac{t}{4GM}}. \tag{2.19}$$

Luego se encuentra que el momento de una partícula cayendo hacia al agujero visto por un Fido crece exponencialmente con el tiempo. Además también es fácil ver que la distancia propia espacial de la partícula desde el horizonte ρ, decrece exponencialmente con el tiempo

$$\rho(t) \approx \rho(0) e^{-\frac{t}{4GM}}. \tag{2.20}$$

Localmente la relación entre las coordenadas de los Frefos y los Fidos es un *boost* dependiente del tiempo a lo largo de la dirección radial. El ángulo del boost hiperbólico es el tiempo adimensional ω. Eventualmente, durante el tiempo de vida del agujero negro el boost llega a ser tan grande que el momento de una partícula cayendo (vista por un Fido) rápidamente excede la masa del universo.
Como consecuencia del boost, los Fidos ven toda la materia sometiéndose a una contracción de Lorentz en un sistema de múltiples "creps" delgados a medida que estos se acercan al horizonte (figura 2.2).
De acuerdo con la física clásica la materia cayendo está almacenada en capas "sedimentarias" de espesor decreciente a medida que estas se hunden eternamente hacia el horizonte.

[11] Abreviación del inglés para freely falling observers.

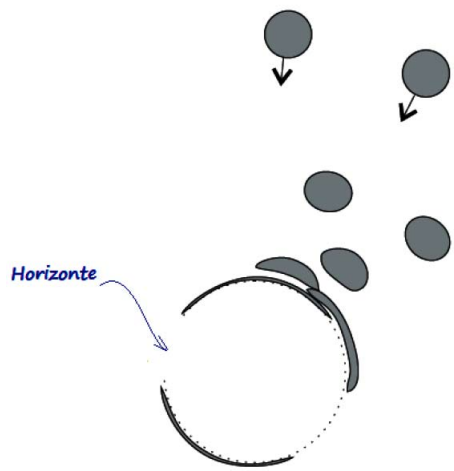

Figura 2.2: Capas de materia cayendo al horizonte. (*Tomada de [30]*)

Aspectos termodinámicos

J.M. Bardeen, B.Carter y S.W. Hawking desarrollaron sistemáticamente leyes de la mecánica de agujeros negros, análogas de las leyes de la termodinámica [13].
Para el agujero negro de Kerr-Newman (2.4) se tiene el horizonte de eventos en

$$r_+ = GM + (M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}, \tag{2.21}$$

donde el área del agujero negro corresponde a la superficie constante a una distancia r_+ dada por

$$A = 4\pi(a^2 + r_+^2). \tag{2.22}$$

Definiendo el área racionalizada $\alpha = A/4\pi$, se tiene

$$\alpha = a^2 + r_+^2 = 2Mr_+ - Q^2.$$

Diferenciando la ecuación anterior se obtiene

$$dM = \frac{k}{2\pi}\frac{dA}{4} + \vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \Phi dQ. \tag{2.23}$$

siendo

$$
\begin{aligned}
k &:= \frac{(M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}}{\alpha} = \text{(constante):gravedad superficial,} \\
\vec{\Omega} &:= \frac{\vec{a}}{\alpha} : \text{frecuencia angular rotacional,} \\
\Phi &:= \frac{Q_{r_+}}{\alpha} : \text{potencial eléctrico del agujero negro,} \\
\alpha &= \frac{A}{4\pi} : \text{área racionalizada,} \\
G &= c = 1.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Se puede establecer una correspondencia entre la ecuación (2.23) y la primera ley de la termodinámica

$$
dE = TdS - PdV, \tag{2.25}
$$

donde la gravedad superficial k en (2.23) que es la aceleración gravitacional producida por el agujero en el horizonte de eventos, se identifica con la temperatura T en (2.25), y el área A con la entropía S. Los términos $\vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \Phi dQ$ es el correspondiente a $-PdV$ que representa el trabajo hecho sobre el agujero por un agente externo que incrementa el momentum angular del agujero negro y la carga por dL y dQ, respectivamente. Sin embargo, para que la correspondencia sea consistente es necesario introducir efectos cuánticos (2.1.2).
La ley cero de la termodinámica postula que la temperatura es constante en un sistema en equilibrio termodinámico. Es decir un sistema físico en equilibrio completo posee la misma temperatura en todas sus partes. De la misma manera para cualquier agujero negro en equilibrio, la gravedad superficial $k = \frac{1}{4M}$[12], es una constante sobre el horizonte de eventos. En otras palabras, todos los puntos del horizonte de eventos de un agujero negro en equilibrio poseen la misma gravedad superficial.

El valor de k se puede obtener aplicando la ley de Newton a un punto exterior a una esfera de masa M, situado a un radio $r = 2M$ así

$$
\begin{aligned}
A &= 4\pi r^2, \\
A &= 4\pi (2M)^2, \\
dM &= \frac{1}{4M}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{dA}{4}\right).
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Al comparar (2.23) con (2.26) se identifica el valor de la gravedad superficial desde un punto de vista geométrico.

La primera ley de la termodinámica manifiesta el hecho de que la energía se conserva en un sistema aislado. Si se consideran los agujeros negros como sistemas aislados lo anterior tiene validez. Esta ley permite relacionar el aumento de energía interna con el aumento de la entropía.

[12] Válido solomante para el agujero negro de Schwarzschild

La segunda ley de la termodinámica se puede postular como la no disminución de la entropía en cualquier proceso termodinámico aislado. Ésta encuentra su análogo en los agujeros negros en lo que Hawking denominó la ley de las áreas, en la cual, el área del horizonte de un agujero negro nunca disminuye, porque éste no radía nada al exterior. Es decir,

$$\Delta A \geqslant 0 \quad \sim \quad \Delta S \geqslant 0. \tag{2.27}$$

En lo relacionado con la tercera ley, $k > 0$ en (2.24), debido a que $Q^2 + a^2 > M^2$ no es una solución física y $Q^2 + a^2 = M^2$ es un estado límite que no se puede alcanzar en un número finito de procesos, teniendo en cuenta que el crecimiento de la carga Q y el momentum angular $\vec{L}$ tienen un límite. Luego, si Q y $\vec{L}$ son muy grandes, por efectos centrífugos, no permitirían la formación de un horizonte de eventos estable y la singularidad quedaría desnuda lo cual está en total desacuerdo con el principio de la *censura cósmica* [49][13]. La imposibilidad de alcanzar la temperatura del cero absoluto en la termodinámica encuentra su analogía en los agujeros negros al establecer que la gravedad superficial en un agujero negro nunca es nula.

Sin embargo, las analogías anteriormente mostradas no son completas en el sentido de que si el agujero negro tiene entropía, entonces debe tener temperatura y por lo tanto debe emitir radiación. Pero de acuerdo con la física clásica nada puede escapar de un agujero negro. Además, al ser aplicada a un agujero negro la primera ley de la termodinámica (2.25), conlleva a que si la temperatura es cero, la entropía del agujero debe ser infinita.

Aspectos cuánticos

No existe una teoría completa para tratar los campos cuánticos sobre variedades curvas, sin embargo, se trabaja con un método semiclásico de la gravedad cuántica. Este método, denominado *aproximación semiclásica*, considera la presencia del campo gravitacional ignorando los efectos cuánticos de la gravedad sobre los campos cuánticos de materia. La aproximación de tratar cuánticamente los campos de materia sobre un espacio curvo y clásico es una buena aproximación en regiones donde el radio de curvatura es mucho mayor que la longitud de Planck [14]. Es decir, reexpresando la ecuación (2.3) se tiene [14]

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} < T_{\mu\nu} > . \tag{2.28}$$

La Teoría de Campos Cuánticos tradicional se realiza sobre el espacio-tiempo de Minkowski, en la cual para definir un campo y luego cuantizarlo en la formulación canónica, es necesario definir una densidad lagrangiana, y luego escoger un observador con el fin de cuantizarlo. La cuantización de los campos para el espacio-tiempo curvo se hace de manera análoga a los procedimientos usuales que se emplean en el espacio-tiempo de Minkowski, con la diferencia de que debe escogerse de manera única el observador

[13] En general se define el caso extremal de agujero negro cuando $Q^2 + a^2 = M^2$.

[14] $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$ se denomina el tensor de Einstein, y $< T_{\mu\nu} >$ corresponde a valores esperados asociados a la cuantización de los campos de materia.

para el cual se realiza el proceso de cuantización[15].

En general, la construcción de la teoría cuántica en espacios curvos requiere espacios-tiempo globalmente hiperbólicos con el fin de asegurar que la estructura causal esté bien definida y que el espacio de soluciones de las ecuaciones clásicas de campo tengan la misma estructura básica como en el espacio-tiempo de Minkowski. [16] Sin embargo, a diferencia del caso Minkowskiano, la presencia del campo gravitacional origina una inequivalencia en los estados de vacío.
En los espacios-tiempo curvos el grupo de Poincaré ya no es el grupo de simetrías de la variedad, por lo tanto, no existe una forma única de escoger el tiempo local. Aquello conduce a una ambigüedad en la construcción del espacio de Fock. Diferentes escogencias conducen a diferentes definiciones de modos de frecuencia positiva y diferentes estado de vacío [50] (ver sección 2.3). En general, el background geométrico está representado por una variedad tipo Kruskal, y debido a la presencia del horizonte de eventos, se definen dos estados de vacío: el vacío global de Hartle-Hawking (HH), y el vacío local de Killing-Boulware (KB) [10]. (ver apéndeice B)
Sobre un espacio-tiempo estático con parámetro de tiempo t, se puede definir un estado de vacío local $|0\rangle_{KB}$ llamado el estado de vacío Killing-Boulware, el cual no posee modos de frecuencia positiva con respecto a t, y para un espacio-tiempo asintóticamente plano, $|0\rangle_{KB}$ es indistinguible del vacío de Minkowski, en el infinito. Este estado de vacío se puede considerar como el estado base de temperatura cero para el espacio alrededor de una estrella estática. En este contexto, los estados de vacío asociados a los tiempos de Killing de las regiones I y II de la variedad de Kruskal (figura 2.3) son estados de vacío de Boulware.

Para el espacio-tiempo de un agujero negro eterno estacionario [17], se define el estado de vacío de Hartle-Hawking $|0\rangle_{HH}$, el cual no posee modos de frecuencia positiva con respecto a los tiempos de Kruskal U, V, es decir, los observadores en caída libre no detectan ningún tipo de radiación en el horizonte de eventos.
Así, existe una relación entre los estados de vacío de Killing-Boulware y Hartle-Hawking, donde el estado resultante $|0\rangle_{HH}$ representa un agujero negro confinado en equilibrio térmico con su propia radiación. Por ello, el estado $|0\rangle_{HH}$ está definido sobre toda la variedad de Kruskal.

A mediados de los años setenta Stephen Hawking se encontraba investigando el comportamiento de la materia en las proximidades de un agujero negro con base en la mecánica cuántica, descubriendo que el agujero negro emitía partículas de manera uniforme, y que estas partículas tenían un espectro térmico [14, 15]. La manera de entender la emisión desde el contexto de la mecánica cuántica, es que el espacio está lleno de pares de partículas y antipartículas "virtuales" que se materializan constantemente

[15] Dentro de las mejores exposiciones de la teoría de campos cuánticos en variedades curvas que se encuentra en la literatura está [50].

[16] Una variedad globalmente hiperbólica es aquella donde existe un tiempo global, el cual admite una hipersuperficie de Cauchy. De tal manera que si $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ es globalmente hiperbólica con una hipersuperficie de Cauchy Σ, entonces $\mathcal{M}$ tiene topología $\Re \times \Sigma$.

[17] Tiempo después de su formación a partir del colpaso gravitacional de una estrella, es posible describir el estado de un agujero negro como una geometría estática, sobre la cual se propagan pequeñas excitaciones de campo. Formalmente se establece una correspondencia entre un agujero negro y un espacio-tiempo obtenido como continuación analítica de la geometría original. Esto es lo que se denomina *agujero negro eterno*.

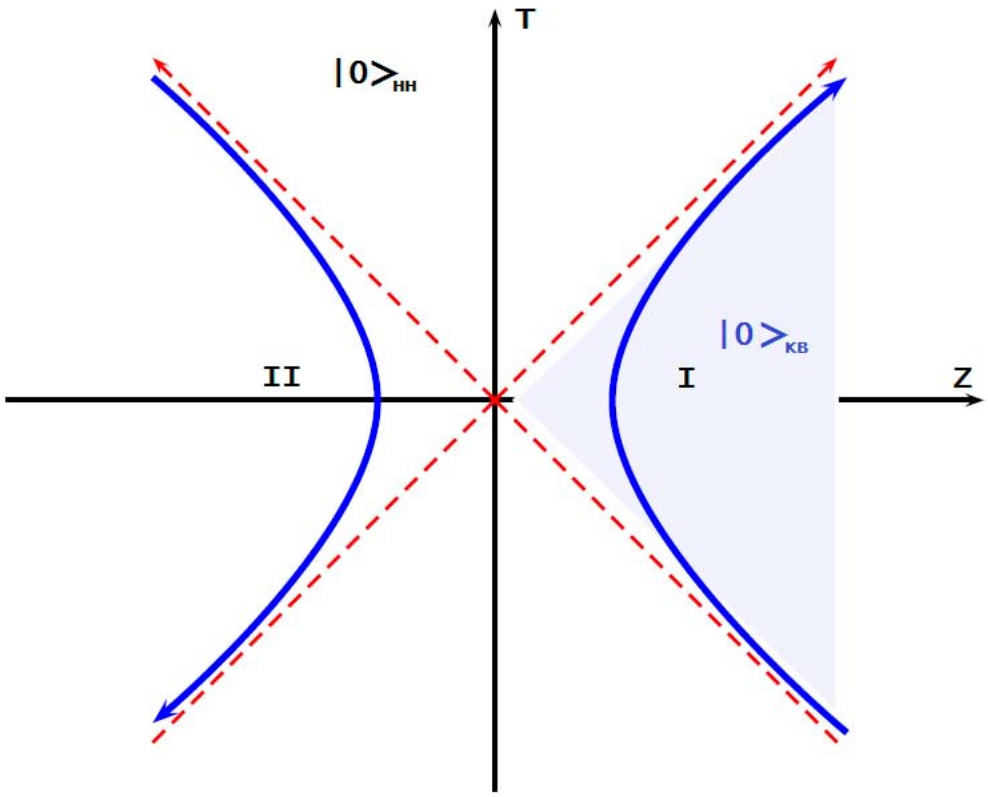

Figura 2.3: Espaciotiempo de Kruskal

en parejas alejándose y acercándose para aniquilarse de nuevo entre ellas. La etiqueta de virtuales a diferencia de las reales, se basa en el hecho que estas no pueden observarse directamente. Sin embargo, pueden medirse sus efectos indirectos, y su existencia se ha confirmado por un pequeño corrimiento que se produce en el espectro de la luz de los átomos de hidrógeno excitados (*efecto Lamb*). En presencia de un agujero negro, un componente del par de partículas virtuales puede caer en el interior del mismo, dejando al otro componente sin pareja con la cual aniquilarse (figura 2.4). La partícula o antipartícula abandonada puede caer en el agujero después de su compañera, pero también puede escapar al infinito, donde aparecerá como radiación emitida por el agujero negro.

Otra manera de ver el proceso de emisión es observar al componente de la pareja de partículas que cae en el agujero, supongamos por ejemplo la antipartícula, como si realmente fuera una partícula que estuviera viajando hacia atrás en el tiempo. De esta manera, la antipartícula que cae en el agujero puede observarse como una partícula que sale del agujero negro y viaja hacia atrás en el tiempo. Cuando la partícula alcanza el punto en el que la pareja partícula-antipartícula se materializó originalmente , se difunde por el campo gravitatorio y viaja en el sentido del tiempo. De esta manera, se ve como la mecánica cuántica ha permitido que una partícula escape desde el interior de un agujero negro, cosa que no es permitida en la mecánica clásica. Así desde el punto de vista cuántico las partículas pueden vencer una especie de potencial que las confina a permanecer dentro del agujero negro, esto es lo que se

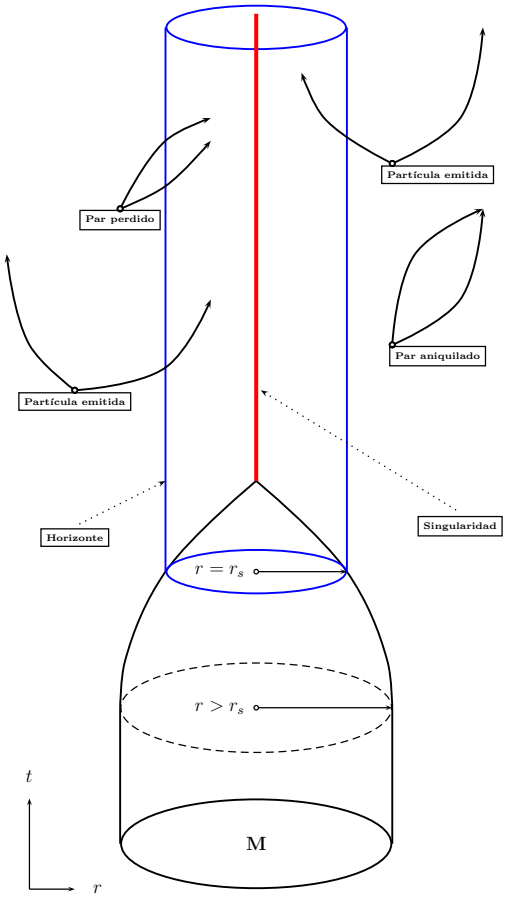

Figura 2.4: Radiación Hawking

conoce como el fenómeno tunelamiento.

Al introducir efectos cuánticos cuyo origen se establece en la teoría de campos cuánticos sobre variedades curvas expuesta anteriormente de manera breve, Hawking descubrió [14] que los agujeros negros emiten radiación como si fueran un cuerpo negro en equilibrio termodinámico total, con temperatura

$$T = \frac{k}{2\pi}. \tag{2.29}$$

La temperatura de esta radiación se conoce como *radiación Hawking*, y le dio un sentido termodinámico formal y matemático al estudio de los agujeros negros.
Al comparar (2.23), (2.25) y (2.29), se define la entropía Bekenstein-Hawking

$$S := S_{\text{BH}} = \frac{1}{4}A. \tag{2.30}$$

A partir del descubrimiento de Hawking, se generalizó la segunda ley de la termodinámica (2.27) discu-

tida en la sección anterior, definiendo una entropía generalizada $S^{'}$ [51], donde

$$\Delta S^{'} \geqslant 0 \qquad y \qquad S^{'} := S + S_{\text{BH}}, \tag{2.31}$$

así, S representa la entropía de la materia y la radiación externas al agujero negro. Luego si el agujero negro radía, la consecuente disminución del área y de la entropía se compensa por el aumento de entropía en el medio que rodea al agujero negro, debido a la radiación emitida.

Sin embargo, Hawking utilizó un cálculo más riguroso con ayuda de la técnica euclidiana. A continuación se muestra brevemente este cálculo [18, 44].
La métrica de Schwarzschild (ecuación 2.6) está dada por [18]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\, d\phi^2). \tag{2.32}$$

Por simplicidad, consideremos la métrica de Schwarzschild euclídea, es decir, donde $t = -i\tau$. Debido a la aparente singularidad en $r = 2M$ se define una nueva coordenada radial $x = 4M(1 - \frac{2M}{r})^{1/2}$, la cual transforma la métrica de Schwarzschild usual en la forma

$$ds^2 = x^2\left(\frac{d\tau}{4M}\right)^2 + \left(\frac{r^2}{4M^2}\right)^2 dx^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.33}$$

Comparando la métrica (2.33) en el plano $x - \tau$ con la métrica en coordenadas polares

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2, \tag{2.34}$$

se encuentra que τ es una coordenada temporal con periodo $8\pi M$.
De otro lado, recurriendo a la formulación euclidiana de la función de partición Z para un campo ϕ a una temperatura $T = \beta^{-1}$ [52],

$$Z = \int D[\phi] e^{-iI[\phi]}, \tag{2.35}$$

considerando que $\Delta t = -i\beta$, donde β es la periodicidad temporal, podemos interpretar el término $8\pi M$ como

$$T = \beta^{-1} = \frac{1}{8\pi M} = \frac{k}{2\pi}. \tag{2.36}$$

Así, se obtiene el resultado establecido en (2.29), a partir de la introducción de un tiempo imaginario, en el cual la solución euclídea de Schwarzschild es periódica, y los campos sobre este background se comportan como si estuvieran en un estado térmico con temperatura $T = k/2\pi$.

En Kelvin se puede calcular (2.36) como

$$T \sim 10^{-7}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)K, \tag{2.37}$$

[18] Donde $G = c = 1$.

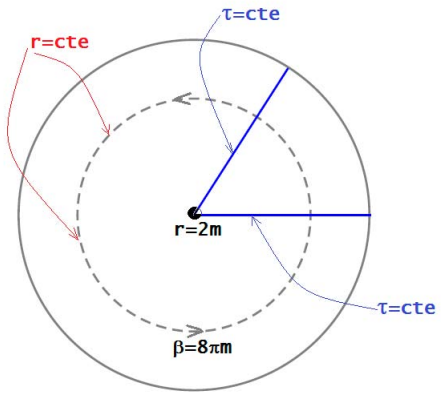

Figura 2.5: Coordenadas para la solución de Schwarzschild euclidiana

siendo M la masa del agujero y $M_\odot$ la masa del Sol. Así, si se considera que la energía emitida se compensa con una disminución de la masa del agujero, estos primero emiten únicamente partículas sin tanta masa como fotones y electrones y luego las más pesadas cuando $T \to \infty$ ó $M \to 0$, hasta que finalmente se evapora.

2.1.3. Relación entropía-información

En el contexto de la información un agujero negro se asemeja bastante a un sistema termodinámico, en el cual, a diferencia de un sistema físico, como un cubo de azucar, donde se requiere una infinidad de parámetros para tener un conocimiento completo, para un observador ubicado en el exterior de un agujero negro, este se presenta como un sistema relativamente simple. La descripción total del sistema está dada si se conocen los parámetros de masa, momentum angular y carga eléctrica (también en algunos casos se puede incluir la magnética) como se señaló en la sección A. Esta simplicidad representa tal vez la característica más fundamental de los agujeros negros. La emisión de ondas gravitacionales que acompaña a la formación del agujero barre la complejidad estructural de la materia, es decir, esta afeita al agujero negro (debido a esto se adopta el término de *no pelo*) para solo ser identificado por su masa, momentum angular y carga eléctrica [12] (1973). El resto de información se pierde, aumentando así la entropía.
Así, al considerar que gran cantidad de información se pierde tras del horizonte de eventos cuando el agujero negro se forma, se puede pensar en relacionar la entropía del agujero con esta información.

Desde el punto de vista de la teoría de la información, supongamos un sistema físico en el cual todo lo que es conocido acerca de la configuración interna de éste es que el sistema puede ser encontrado en alguno de un número de estados con probabilidad P_n para el $n-esimo$ estado. Se define la entropía

$$S = -\sum_n P_n \ln P_n, \tag{2.38}$$

la cual mide la falta de información acerca de la configuración interna del sistema [12] (1973). Por tanto,

se puede pensar en la información I que se puede tener acerca del sistema, tal que cuando S sea máxima I sea mínima y viceversa. De manera que se cumple

$$\Delta S = -\Delta I. \tag{2.39}$$

Definiendo el bit como la unidad convencional de información disponible cuando la respuesta a una pregunta de si o no se conoce con precisión se tiene que $S = 0$. De acuerdo con la expresión (2.39), un bit también es numéricamente igual a la máxima entropía que puede estar asociada con la pregunta de si o no, es decir, la entropía cuando ninguna información se puede obtener acerca de la respuesta. Luego, por definición $1bit = \ln 2$.
Cuando se notó la analogía evidente entre entropía y área del horizonte de eventos no se sabía cómo relacionar esto matemáticamente a los agujeros negros. Bekenstein notando que información considerable se perdía tras del horizonte cuando se formaba el agujero, sugirió que la entropía del agujero podría estar relacionada con ésta información. De esta manera se iniciaba el sentido físico de la analogía entre termodinámica y mecánica de los agujeros negros.

Así, si se supone $S = C_1 f(A)$, por la segunda ley de la termodinámica de agujeros negros, siguiendo a Bekenstein, debería ser posible obtener una expresión para la entropía S en términos del área A, la cual debe ser de la forma $S = CA$ con C_1 y C constantes. Sin embargo, no es posible calcular la constante sin un completo entendimiento de la realidad cuántica subyacente al agujero negro. Al partir de un argumento semiclásico se tiene

$$S = C_1 f(\alpha), \tag{2.40}$$

con $\alpha = \frac{A}{4\pi}$ dado por (2.24). Para determinar la forma funcional de $f(\alpha)$ y la constante de proporcionalidad asociada, se calcula el incremento mínimo posible en el área del agujero negro que resulta de la desaparación de una masa en reposo μ y radio propio b a través del horizonte [19]

$$(\Delta\alpha)_{\text{mín}} = 2\mu b. \tag{2.41}$$

Al considerar $b_{\text{mín}} = \hbar/2\pi\mu = \lambda_c$, con λ_c la longitud de onda de Compton correspondiente, se tiene

$$(\Delta\alpha)_{\text{mín}} = 2\hbar. \tag{2.42}$$

Relacionando así las expresiones (2.40) y (2.42) y diferenciando se obtiene

$$(\Delta S)_{\text{mín}} = 2C_1\hbar\frac{df}{d\alpha} \tag{2.43}$$

Si se hace la identificación del incremento con la pérdida de un bit de información de acuerdo a lo establecido en (2.39), se obtiene

$$\ln 2 = (\Delta S)_{\text{mín}} = 2C_1\hbar\frac{df}{d\alpha}. \tag{2.44}$$

[19] Para este caso se toma el agujero negro de Kerr [12] (1973).

Finalmente, integrando y escribiendo la entropía en unidades convencionales se llega a la expresión

$$S = \frac{1}{8\pi} \ln 2 k_B c^3 \hbar^{-1} G^{-1} A, \tag{2.45}$$

De la termodinámica usual se define la temperatura para un agujero negro como

$$T_{AN} = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{L,Q}. \tag{2.46}$$

Con base en las expresiones (2.43), (2.45) y (2.46) lo anterior se reexpresa como

$$T_{AN} = \frac{1}{2 \ln 2} (r_+ - r_-)(2Mr_+ - Q^2)^{-1}, \tag{2.47}$$

con $G = k_B = c = \hbar = 1$. Para un agujero negro de Schwarzschild la ecuación anterior toma la forma [12] (1974)

$$T_{AN} = \frac{cte}{M}, \qquad \text{con} \qquad cte = \frac{1}{4ln2} \tag{2.48}$$

lo cual está de acuerdo con la expresión (2.29) salvo un factor de $\ln 2$.

2.1.4. El principio holográfico

La complementariedad del agujero negro (2.1.1) es un nuevo tipo de complementariedad que resulta de combinar la mecánica cuántica con la gravedad. Esta establece que no hay una única respuesta a la pregunta *¿quién tiene razón: el observador que permanece fuera del agujero negro el cual ve que toda la información se irradía desde el horizonte, o el observador que lo cruza con los bits que se dirigen hacia la singularidad?*. Cada uno tiene razón desde su propio marco de referencia, es decir, son descripciones complementarias de dos experimentos diferentes.

Para ilustrar lo anterior consideremos la trayectoria de una partícula que cae radialmente desde un punto $r_0 > r_s$. De la métrica de Schwarzschild (2.26), para una partícula en movimiento radial se tiene

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \tag{2.49}$$

La ecuación para la geodésica radial está dada por [53]

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \mathcal{E}. \tag{2.50}$$

con $\mathcal{E}$ la energía. Si se considera una partícula de prueba que se deja caer libremente desde un punto $r = R$, la ecuación de movimiento radial toma la forma

$$\dot{r} = \left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{R}\right). \tag{2.51}$$

al integrarse en forma paramétrica (2.51) se obtiene el tiempo propio finito dado por

$$\tau = \frac{\pi}{2c}\left(\frac{R^3}{r_s}\right)^{1/2}, \tag{2.52}$$

luego, para un reloj que viaja con la partícula, esta llega a la singularidad en un tiempo finito. Ahora el tiempo coordenado, que corresponde al medido por un observador situado en una región lejos de la masa (observador asintótico) está dado por

$$r \sim r_s + Ke^{-\frac{t}{r_s}}, \tag{2.53}$$

con K una constante. Así, se tiene que la partícula requiere de un tiempo infinito (el fenómeno de dilatación temporal) para llegar a $r = r_s$ para el observador asintótico (figura 2.6). Retomando la com-

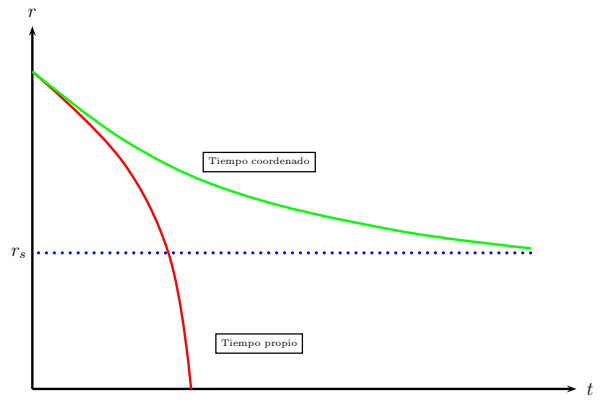

Figura 2.6: Tiempo coordenado y tiempo propio

plementariedad, por un lado, el experimentador se queda fuera del agujero. De manera heurística puede arrojar cosas dentro, recoger fotones cuando salen, dejar caer sondas hasta una distancia por encima del horizonte, y observar los efectos de las trayectorias de las partículas que pasan cerca del agujero. De otro lado, el experimentador prepara su laboratorio, y luego con laboratorio y todo, se lanza al agujero cruzando el horizonte mientras realiza el experimento.

Las descripciones complementarias de los dos experimentos son tan radicalmente diferentes que difícilmente parece creíble que ambas pudieran ser correctas. El observador externo (mide el tiempo coordenado) ve que la materia cae hacia el horioznte, se frena y queda suspendida exactamente por encima del mismo. La temperatura inmediatamente por encima del horizonte es elevada y reduce toda la materia a partículas, que finalmente son radiadas hacia el exterior. Es decir, el observador externo, que controla al observador en caída, lo ve vaporizado y reemitido como radiación Hawking. En cambio, el observador en caída libre (mide tiempo propio) atraviesa el horizonte sin siquiera notarlo ni detectar ninguna temperatura, es decir, ninguna incomodidad hasta que llega al corazón del agujero negro donde las fuerzas de marea se hacen finalmente tan fuertes que lo destruyen.

Así se tiene que para el observador asintótico, el agujero negro consiste en un enorme vertedero de materia plana congelada en su horizonte. Lo anterior es un ejemplo del holograma óptico usual en el

cual una superficie bidimensional codifica información sobre la forma tridimensional de un objeto. El desarrollo de esta idea fue propuesto por G ́t Hooft y L Susskind [41], quienes sugirieron que el número de grados de libertad que describen una región en una teoría de gravedad es proporcional al área de esa región recordando la relación entre la entropía y el área del agujero negro. Como se señalo en la sección

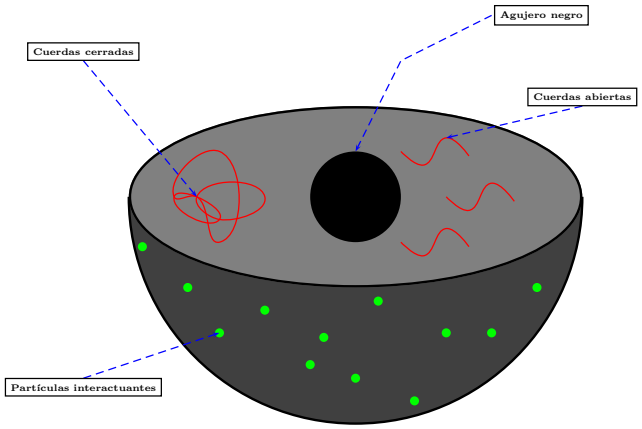

Figura 2.7: Correspondencia de Maldacena

2.1, Maldacena formalizó esta propuesta al describir el interior de un espacio-tiempo Anti-de Sitter en términos de una teoría en la frontera de ese espacio-tiempo (figura 2.7), que tiene una dimensión menos [42].

2.1.5. Pared de Fuego

Al eliminar una de las posibles relaciones de enredamiento que plantea Susskind por el principio de complementariedad (2.1.1), se libera una gran cantidad de energía, que el horizonte de eventos se convertiría en un anillo de fuego.
Para salvaguardar el principio de equivalencia todo observador en caída libre hacia un agujero negro debe encontrar una pared de fuego (*firewall*) que lo destruye evitando que realice mediciones al interior de este[20]. Lo anterior involucra los siguientes principios físicos:

a. Principio de complementariedad para agujeros negros

b. Principio de equivalencia

c. Imposibilidad de clonación de un estado cuántico

La evolución de un agujero negro puede darse en términos de la emisión de entropía, así que puede caracterizarse por un tiempo medio conocido como el tiempo de Page al cabo del cual un agujero negro ha emitido la mitad de su entropía inicial [54]. Esto genera tres regiones diferentes donde los modos (estados asociados a las partículas emitidas) emitidos pueden estar:

[20] El principio de equivalencia afirma: *Un marco de referencia en caída libre es indistinguible puntualmente de un sistema inmerso en un campo gravitatorio.* Ver [48].

A. Interior del agujero negro

B. Fuera del agujero pero cerca del horizonte

C. Lejos del horizonte

Al analizar las tres regiones de acuerdo con Susskind se encuentra que [43]:

- Un observador lejano encuentra enredamiento entre los modos lejos del horizonte y los que están fuera
- Un observador en caída libre encuentra enredamiento entre las partículas fuera del horizonte y las del interior.

Lo anterior implica que un conjunto de modos está clonado para que ambos observadores puedan verlo, violando así el principio (c). También desde la perspectiva del observador lejano es posible el transporte de enredamiento debido a la emisión por parte del agujero negro.
En términos de complementariedad las dos versiones deberían ser correctas, sin embargo, como se ve, esto rompe principos básicos y fundamentales de la teoría de la relatividad general y la mecánica cuántica, y para los teóricos que analizan este problema este principio es inquebrantable debido a que renunciar a él implicaría renunciar a uno de los fundamentos del trabajo de Maldacena. Al final, las preguntas más simple que surgen son: ¿Está mal aplicada la mecánica cuántica para los dos tipos de observadores?, ¿el principio de equivalencia se rompe debido a efectos térmicos?, y ¿es de verdad la complementariedad un principio básico de la física de lo agujeros negros?.

2.2. Formalismo de unión de métricas y condiciones de juntura

El análisis de lo que sucede a la geometría del espacio-tiempo cuando hay un salto de discontinuidad en el tensor momento-energía a lo largo de una superficie, es uno de los problemas más importantes de la teoría de la gravitación que ha encontrado su sustento en la formulación de condiciones de juntura o unión entre dos regiones distintas del espacio-tiempo caracterizadas por dos métricas diferentes [55]. Dentro de los ejemplos clásicos de este tipo de problemas se encuentra el colapso gravitacional de una estrella para formar un agujero negro. Este fenómeno modelado por Oppenheimer-Snyder utilizó dos métricas diferentes que al aplicar las debidas condiciones de juntura buscó garantizar una solución válida a las ecuaciones de campo de Einstein [2].

2.2.1. Geometría de hipersuperficies

Para una variedad espacio-tiempo cuadridimensional, una hipersuperficie Σ es una subvariedad de tres dimensiones que puede ser tipo tiempo, espacio o nula. Esta su puede caracterizar al imponer una restricción sobre las coordenadas de la forma

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \tag{2.54}$$

o por medio de una ecuación paramétrica

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a), \tag{2.55}$$

donde los índices griegos $\alpha = 0, 1, 2, 3$ corresponden a las coordenadas que se le asignan a la variedad espacio-tiempo de 4 dimensiones, mientras que los índices latinos $a = 1, 2, 3$ corresponden a las coordenadas intrínsecas que se le asignan a la hipersuperficie tridimensional.
Se define un vector unitario normal a la hipersuperficie Σ el cual satisface (figura 2.8)

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon \tag{2.56}$$

con $\varepsilon = +1$ si la hipersuperficie es tipo tiempo, y $\varepsilon = -1$ si es tipo espacio [21]. El vector n_α esta dado por la expresión

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}|}, \tag{2.57}$$

con $\Phi_{,\alpha} = \partial_\alpha \Phi$ representa la derivada parcial ordinaria de Φ respecto a x^α y $g_{\mu\nu}$ es la métrica que caracteriza la variedad espacio-tiempo cuadridimensional en la cual se halla inmersa la hipersuperficie tridimensional Σ.

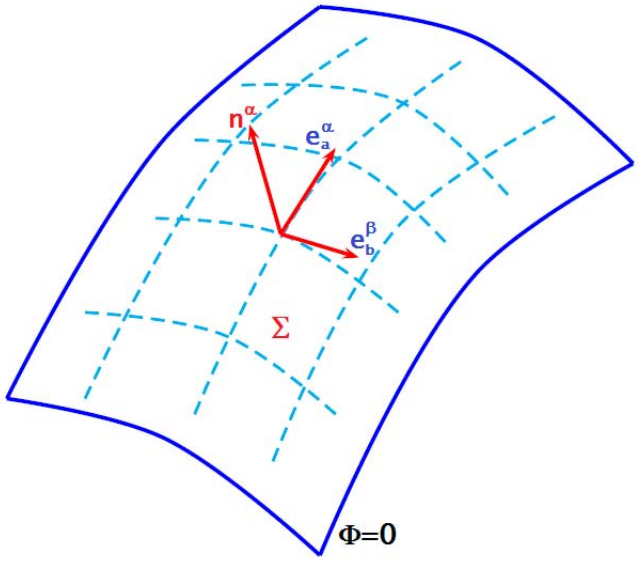

Figura 2.8: Vectores sobre la hipersuperficie

Por medio de la ecuación (2.55) se encuentran los vectores tangentes a la hipersuperfice Σ (figura 2.8)

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \tag{2.58}$$

[21] Las hipersuperficies tipo luz no se analizan en esta revisión.

los cuales satisfacen la relación

$$e_a^\alpha n_\alpha = 0. \tag{2.59}$$

Con lo anterior se define la métrica inducida h_{ab} sobre la hipersuperficie, la cual es tridimensional y está dada por

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \tag{2.60}$$

donde los desplazamientos sobre la hipersuperficie están dados por

$$ds_\Sigma^2 = h_{ab} dy^a dy^b. \tag{2.61}$$

Se puede hallar la métrica inversa de $g_{\alpha\beta}$ por medio de la relación

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \tag{2.62}$$

con $\varepsilon = -1, +1$ en el caso de una hipersuperficie tipo espacio y tipo tiempo respectivamente.
De manera análoga a como se define una derivada covariante en la variedad espacio-tiempo cuadridimensional se puede definir la derivada covariante intrínseca asociada a la métrica inducida por

$$A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \tag{2.63}$$

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{cab} A^c, \tag{2.64}$$

donde

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(h_{ca,b} + h_{cb,a} - h_{ab,c}). \tag{2.65}$$

En este punto es importante resaltar la diferencia en geometría entre algo extrínseco e intrínseco. En presencia de una subvariedad inmersa en una variedad de mayor dimensión, la geometría intrínseca de la subvariedad considera únicamente las relaciones entre puntos a lo largo de caminos o líneas que pertenecen a la subvariedad y permanecen confinadas a la misma. La geometría extrínseca surge cuando la subvariedad se considera inmersa en un espacio de dimensión mayor. Así por ejemplo, un plano es intrínsecamente y extrínsecamente plano, un cilindro es intrínsecamente plano, pero extrínsecamente curvo mientras que una esfera es intrínsecamente y extrínsecamente curva. (figura 2.9)

La curvatura intrínseca de una superficie queda caracterizada a partir de un 3-tensor de curvatura netamente intrínseco dado por:

$$R^c_{dab} = \Gamma^c_{db,a} - \Gamma^c_{da,b} + \Gamma^c_{ma}\Gamma^m_{db} - \Gamma^c_{mb}\Gamma^m_{da}, \tag{2.66}$$

cuya forma contraída es el escalar de Ricci tridimensional

$$^3R = h^{ab} R^m_{amb}. \tag{2.67}$$

La curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ se caracteriza definiendo el 3-tensor de curvatura extrínse-

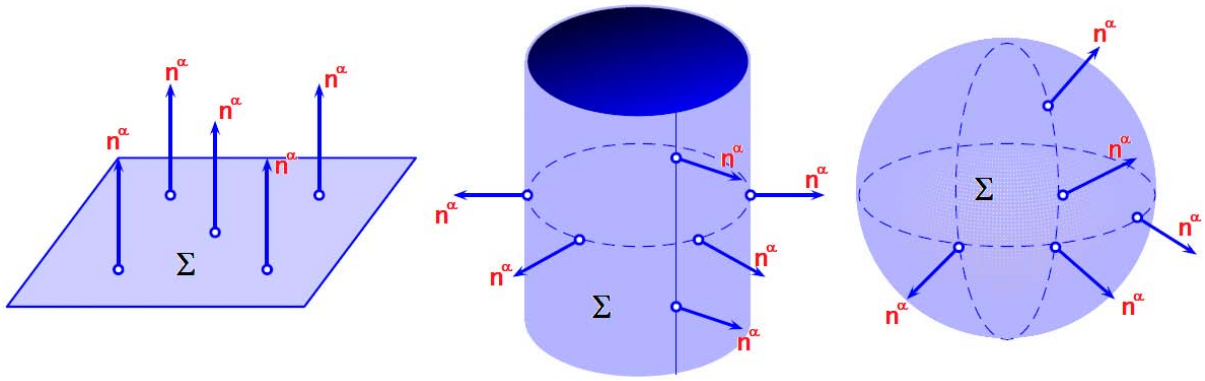

Figura 2.9: Vector normal sobre diferentes hipersuperficies

ca dado por

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} \tag{2.68}$$

el cual es simétrico,

$$K_{ab} = K_{ba}, \tag{2.69}$$

y satisface la siguiente relación de contracción

$$K = h^{ab} K_{ab} = n^{\alpha}{}_{;\alpha}. \tag{2.70}$$

El tensor de curvatura extrínseca es una medida de la flexibilidad de la hipersuperficie Σ dentro de la variedad espacio-tiempo (figura 2.9), y permite caracterizar a esta hipersuperfice como cóncava si $K < 0$ (superficie hiperbólica), convexa si $K > 0$ (cilindro y esfera) y $K = 0$ (plano).

En muchos casos se hace necesario vincular la curvatura $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de la variedad espacio-tiempo con las curvaturas extrínsecas e intrínsecas de la subvariedad. Este vínculo viene dado por las ecuaciones de *Gauss-Codazzi* dadas por

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} e^{\gamma}_{c} e^{\delta}_{d} = R_{abcd} + \varepsilon(K_{ad} K_{bc} - K_{ac} K_{bd}), \tag{2.71}$$

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} n^{\mu} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} e^{\gamma}_{c} = K_{ab|c} - K_{ac|b}. \tag{2.72}$$

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi también permiten encontrar una expresión que vincula el escalar de Ricci cuadridimensional con la curvatura extrínseca e intrínseca de la hipersuperficie

$$R =^{3} R + \varepsilon(K^2 - K^{ab} K_{ab}) + 2\varepsilon(n^{\alpha}{}_{;\beta} n^{\beta} - n^{\alpha} n^{\beta}{}_{;\beta})_{;\alpha}. \tag{2.73}$$

Otro de los aspectos interesantes de las ecuaciones de Gauss-Codazzi es que estas permiten hallar expresiones necesarias para formular las ecuaciones de campo de Einstein de la hipersuperficie. Así, a

partir del tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}, \tag{2.74}$$

donde

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \qquad \text{y} \qquad R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{2.75}$$

Utilizando las relaciones de Gauss-Codazzi y la expresión (2.62) se encuentran las siguientes relaciones entre el tensor de Einstein y la curvatura de la hipersuperficie

$$-2\varepsilon G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta =^3 R + \varepsilon(K^{ab} K_{ab} - K^2), \tag{2.76}$$

$$G_{\alpha\beta} e^\alpha_a n^\beta = K^b{}_{a|b} - K_{,a}, \tag{2.77}$$

las cuales permiten obtener las componentes $G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$ y $G_{\alpha\beta} e^\alpha_a n^\beta$ de las ecuaciones de Einstein sobre la hipersuperficie.

Debido a que las ecuaciones de campo de Einstein son ecuaciones de segundo orden en las derivadas de la métrica, su resolución completa requiere que se especifiquen los valores de la curvatura extrínseca y de la métrica sobre la hipersuperficie. Tales valores no se pueden asignar de manera arbitraria sino que deben satisfacer ciertas restricciones. Estas restricciones surgen de combinar las ecuaciones (2.76) y (2.77) con las ecuaciones de campo de Eisntein. Así, al sustituir las ecuaciones de campo[22]

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{2.78}$$

en la expresión (2.76) se obtiene la primera restricción dada por

$$K^b{}_{a|b} - K_{,a} = 8\pi G j_a, \tag{2.79}$$

con

$$j_a = T_{\alpha\beta} e^\alpha_a n^\beta. \tag{2.80}$$

Finalmente, sustituyendo (2.78) en (2.77) se obtiene la segunda restricción

$$^3R + K^2 - K^{ab} K_{ab} = 16\pi G \rho, \tag{2.81}$$

donde

$$\rho = T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta. \tag{2.82}$$

2.2.2. Condiciones de juntura y cascarones delgados

A menudo se presentan problemas en los que una hipersuperficie Σ divide el espacio-tiempo en dos regiones. Ejemplo de lo anterior es el caso de una estrella rodeada de vacío, donde el espacio-tiempo en el interior de la estrella se caracteriza por una métrica mientras que el vacío que la rodea se describe por medio de una métrica diferente. En este caso, la hipersuperficie que separa las dos métricas coincide con

[22] De nuevo $c = 1$.

el borde de la estrella. La cuestión aquí es determinar *¿qué tipo de condiciones se deben imponer a las métricas para que se unan suavemente en el borde, de tal manera que su unión constituya una solución válida de las ecuaciones de campo de Einstein?*.
Para responder a esta cuestión se considera una hipersuperficie Σ que divide al espacio-tiempo en dos regiones denominadas V^+ y V^- cuyas métricas respectivas son $g^+_{\alpha\beta}$ y $g^-_{\alpha\beta}$ como se muestra en la figura 2.10.

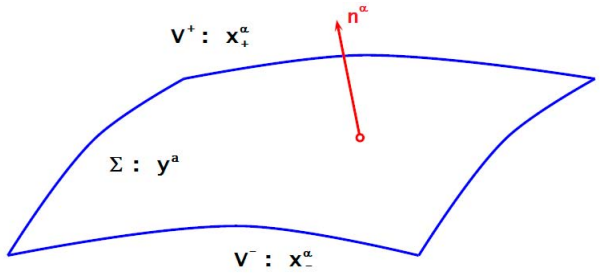

Figura 2.10: Regiones del espacio-tiempo separadas por una hipersuperficie

Se denomina y^a; a=(1,2,3) a las coordenadas intrínsecas sobre ambas caras de la hipersuperficie Σ, y $x^\alpha_\pm$ a las coordenadas de la variedad $V^\pm$. El vector normal unitario representado por n^α apunta en dirección V^+. Introduciendo la notación

$$[A] \equiv A(V^+)|_\Sigma - A(V^-)|_\Sigma, \tag{2.83}$$

la cual representa el *salto* de una cantidad tensorial dada A a través de la hipersuperficie Σ. En general, las coordenadas $x^\alpha_\pm$ de las variedades $V^\pm$ son diferentes, asi que la comparación de la métricas $g^+_{\alpha\beta}$ y $g^-_{\alpha\beta}$ no es directa. Esta dificultad se supera formulando adecuadas condiciones de juntura o unión sobre la hipersuperficie Σ.

Las condiciones de juntura surgen como consecuencia de exigir que la métrica a ambos lados de la hipersuperficie sea una solución válida de las ecuaciones de campo de Einstein. Por lo tanto, las cantidades derivadas de la métrica tales como el tensor de Riemann, no deben presentar términos singulares.
La primera condición de juntura exige la continuidad de la métrica inducida en la hipersuperficie, es decir

$$[h_{ab}] = 0. \tag{2.84}$$

Así, la métrica inducida debe ser idéntica a ambos lados de la hipersuperficie.
La segunda condición de juntura exige que la curvatura extrínseca de la hipersuperficie sea idéntica a ambos lados de la misma

$$[K_{ab}] = 0. \tag{2.85}$$

en general ambas condiciones son invariantes ante cambios de coordenadas, es decir, independientes de las coordenadas $x^\alpha_\pm$.
Al combinar las expresiones (2.84) y (2.85) junto con el tensor de Eisntein (2.74) se llega a las siguientes

identidades

$$[G_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}] = 0, \tag{2.86}$$

$$[G_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}n^{\beta}] = 0, \tag{2.87}$$

cuando se cumplen las condiciones de juntura (2.84) y (2.85) se eliminan los términos singulares en el tensor de Riemann y por tanto, se eliminan estos términos también en el tensor de Einstein. Para este caso se puede demostrar que el tensor momento-energía $T_{\alpha\beta}$ solo contiene términos correspondientes a las regiones $V^{\pm}$, mientras que no aparece un tensor de momento-energía sobre la hipersuperficie Σ. En otras palabras, no se encuentra con una hipersuperficie o cascarón de materia sino simplemente un borde que separa dos regiones diferentes del espacio-tiempo. Ejemplo de este tipo de condición fue desarrollada por Oppenheimer-Snyder en 1939 [2], cuando modelaron el colapso de un agujero negro mediante este formalismo haciendo coincidir la hipersuperficie Σ con la superficie de la estrella y suponiendo una estrella esférica sin rotación formada de polvo (fluido ideal sin presión). Bajo estas condiciones se aplicó una métrica interior de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) al interior de la estrella (la cual corresponde a un tensor momento-energía $T_{\alpha\beta} \neq 0$), y una métrica exterior de Schwarzschild (correspondiente a un tensor energía-momento $T_{\alpha\beta} = 0$).

Como se mencionó antes, las condiciones de juntura (2.84) y (2.85) surgen del hecho de exigir que las cantidades que se derivan de la métrica no presenten términos singulares. Sin embargo, surgen casos en los que estos términos singulares aparecen en el tensor de Riemann y son susceptibles de una explicación física. Los términos singulares en $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ producen términos singulares en el tensor de Einstein. En ese caso las ecuaciones de campo de Einstein conducen a una expresión del tensor momento-energía $T_{\alpha\beta}$ que contiene tres términos. Dos de ellos representan el tensor energía-momento en las regiones $V^{\pm}$, mientras el tercer término se asocia a la presencia de una distribución de materia (lámina superficial, cascarón delgado o *thin shell*) sobre la hipersuperficie Σ. Este cascarón de materia tiene un tensor superficial de energía-momento el cual se denomina S_{ab} . En estos casos no se cumple la condición (2.85) sino que se verifica la *ecuación de Lanczos* la cual relaciona el *salto* experimentado por la curvatura extrínseca a ambos lados de la hipersuperficie Σ con el tensor energía-momento sobre ella, es decir

$$S_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi G}([K_{ab}] - [K]h_{ab}), \tag{2.88}$$

donde

$$S_{ab} = S_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}, \tag{2.89}$$

es un 3-tensor simétrico. La ecuacion de Lanczos también se puede reexpresar como

$$[K_{ab}] = -\frac{8\pi G}{\varepsilon}\left(S_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}S\right), \tag{2.90}$$

lo cual permite formular las condiciones correspondientes a cascarones delgados (*thin shells*) de una forma abreviada como

$$[h_{ab}] = 0 \qquad \text{y} \qquad [K_{ab}] \neq 0. \tag{2.91}$$

El formalismo de junturas fue formulado por G. Darmois (1927) y W. Israel (1966) [56, 57], mientras que el formalismo de *thin shells* fué formulado por K. Lanczos (1924) [58] y W. Israel (1966). Las condiciones de juntura han sido deducidas de diversas maneras por diferentes autores. Una forma de hallarlas es a partir de la teoría de funciones de distribución. En este contexto se puede pensar que la presencia de una esfera maciza altera el entorno de alguna manera. Las condiciones no son las mismas en el interior de la esfera que fuera de ella. De la misma forma, la presencia de una lámina o cascarón de materia separando dos regiones del espacio-tiempo altera su entorno de tal manera que en principio, las condiciones a uno y otro lado de la lámina no serán idénticas. De esta manera se hace razonable introducir la función de Heavside H o función "escalón", para representar el cambio en el entorno del espacio-tiempo

$$g_{\alpha\beta} = H(l)g^{+}_{\alpha\beta} + H(-l)g^{-}_{\alpha\beta} \tag{2.92}$$

donde l representa la distancia propia o tiempo propio desde Σ a un punto a lo largo de una geodésica. Al derivar la métrica para calcular los simbolos de Christoffel y el tensor de curvatura, aparecen necesariamente términos singulares ya que se introduce la derivada de la función de Heavside que es el delta de Dirac

$$\frac{\partial H(l)}{\partial l} = \delta(l).$$

Así, al derivar dos veces la métrica (2.92) respecto de las coordenadas aparecerán términos del tipo

$$\delta(l) \cdot g^{'}_{\alpha\beta},$$

donde la prima indica derivada respecto de las coordenadas. Si se trata de un cascarón de materia, la función δ es apta para representar la distribución de materia de un cascarón delgado. En ese caso, la función δ que aparece en la derivada segunda de la métrica se ajusta al tensor energía-momento superficial. En el caso en que no exista tal distribución de materia superficial sino un borde (por ejemplo el borde de una estrella) se suprimen los términos singulares exigiendo que $[g_{\alpha\beta}] = 0$ lo cual conduce inmediatamente a la condición $[h_{ab}] = 0$.

El método de funciones de distribución no es el único que permite encontrar las condiciones de juntura o unión. Algunos autores las han deducido de manera alternativa agregando a la acción de Einstein-Hilbert dada por

$$S_{EH} = \int R\sqrt{-g}d^4x$$

un término que tiene en cuenta los efectos de borde [18].

2.3. Estados de vacío

En general en un espacio-tiempo curvo no existe una única manera de escoger un tiempo coordenado. En estos espacios el grupo de Poincaré ya no es el grupo de simetrías de la variedad, razón por la cual no existe una forma única de escoger el tiempo local, lo cual lleva a diferentes definiciones de modos de

frecuencia positiva y por ende a diferentes estados de vacío.[23] A continuación se definen los estados de vacío en el contexto de la termodinámica de agujeros negros:

Vacío de Boulware $|0\rangle_B$: En cualquier espacio-tiempo estático con parámetro de Killing t, el estado de Boulware $|0\rangle_B$ es aquel que se da producto de los operadores de aniquilación de Killing, asociados con los modos de Killing de frecuencia positiva, es decir, es aquel vacío de modos de frecuencia positiva en t, donde observadores estáticos detectan cero partículas. En un espacio asintóticamente plano, $|0\rangle_B$ se aproxima al vacío de Minkowski $|0\rangle_M$ en el infinito. Por efectos de polarización del vacío debido a la curvatura, induce un tensor momento-energía que no desaparece. La densidad de energía es negativa por lo general y en presencia de un horizonte diverge. Por lo tanto, el estado de Boulware es inestable en un agujero negro. Este estado base de temperatura cero es el adecuado para una estrella. El término divergente en el tensor momento-energía de Boulware se puede visualizar como rayos nulos o tipo luz radiales que entran y salen de energía negativa los cuales experimentan un corrimiento al azul en los horizontes pasado y futuro. Tales rayos se neutralizan para corregir la divergencia, al introducir flujos de energía positiva desde y hacia el infinito.

Vacío de Hartle-Hawking $|0\rangle_H$: En el espacio-tiempo de un agujero negro eterno estacionario, el estado de Hartle-Hawking $|0\rangle_H$ es aquel que se da producto de los operadores de aniquilación de Kruskal, asociados con los modos de Kruskal de frecuencia positiva en las coordenadas Uy V, las cuales corresponden a los tiempos de Kruskal. Este estado representa a un agujero negro en equilibrio térmico con su propia radiación en una especie de reservorio, así, este aparece vacío de partículas para un observador en caída libre en el horizonte, es decir, estos observadores no detectan partículas. Su tensor momento-energía asociado es acotado, lo que implica que no diverge en el horizonte.[24].

Estado de vacío de Unruh $|0\rangle_U$:Para un agujero negro que se forma por el colapso de una estrella, el horizonte de eventos pasado está ausente, sólo un flujo que sale positivo es necesario para corregir la divergencia que se presentaría sobre el horizonte de eventos futuro. De este hecho surge el estado de vacío de Unruh $|0\rangle_U$, el cual representa a un agujero negro radiando libremente en el espacio. Este estado se encuentra vacío de modos de frecuencia positiva en un tiempo ordinario avanzado v y un tiempo de Kruskal retardado U en el espacio-tiempo vacío del agujero negro analíticamente extendido.

El vacío de Minkowski $|0\rangle_M$ se identifica con el de Hartle-Hawking; y el de Rindler $|0\rangle_R$ con el de Boulware. Estos vacíos comparten las mismas propiedades para el cálculo de la densidad de energía asociada con el observador FREFOS (en la aproximación cercana al horizonte de eventos, a través del principio de equivalencia), como se realiza para el observador FIDO. Los detalles se desarrollan de manera formal

[23]Esta sección en la cual se desarrolla la teoría del vacío con la que se realizan los cálculos del capítulo 4 se hizo siguiendo la teoría de Israel [10].

[24]Sin embargo, se debe aclara que éste no es del todo nulo debido a efectos de polarización del vacío que son esencialmente irremovibles

en el capítulo 4.

El cálculo de los valores de expectación de los tensores de momento-energía asociado a estos estados de vacío presentan diversas dificultades y en general no se encuentran soluciones analíticas. Por simplicidad, y a manera de ilustración siguiendo a (Mukohyama-Israel [9]) se considera un espacio-tiempo en 1+1 dimensiones con métrica dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}. \tag{2.93}$$

si se considera $\kappa(r)$ la gravedad superficial entendida ésta como la fuerza gravitacional corrida al rojo, es decir, la aceleración hacia arriba $a(r)$ de una partícula de prueba estacionaria reducida por un factor de corrimiento al rojo dado por $f^{1/2}(r)$, tal que $\kappa(r) = \frac{1}{2}f^{'}(r)$, un horizonte se caracteriza por $r = r_0$, $f(r_0) = 0$, su gravedad superficial queda definida por

$$\kappa_0 = \frac{1}{2}f^{'}(r_0). \tag{2.94}$$

Efectos cuánticos inducen un tensor momento-energía $T_{ab}(a, b = r, t)$, en el fondo de la geometría (2.93). Si por el momento se asume que no hay flujo de energía neto lo cual implica excluir el vacío de Unruh se tiene que $T^r_{\ t} = 0$, con lo cual T_{ab} se especifica por una densidad de energía cuánti y presión dadas por

$$\rho = -T^t_{\ t}, \qquad P = T^r_{\ r}, \tag{2.95}$$

las cuales se determinan, por condiciones de frontera, por la ley de conservación del tensor momento-energía y la anomalía de traza dadas por

$$T^a_{\ a;b} = 0 \quad \text{y} \quad T^a_{\ a} = \frac{\hbar}{24\pi}R. \tag{2.96}$$

Para un campo escalar sin masa, se tiene que $R = -f^{''}(r)$, para la métrica (2.93). Los coeficientes métricos se escriben como

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 \\ 0 & f^{-1}(r), \end{pmatrix} \tag{2.97}$$

cuyas conexiones son

$$\begin{aligned} &\Gamma^t_{tt} = 0, \quad \Gamma^t_{rr} = 0, \quad \Gamma^t_{rt} = \Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}\frac{f^{'}}{f}, \\ &\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}\frac{f^{'}}{f^{-1}}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}\frac{(f^{-1})^{'}}{f^{-1}}, \quad \Gamma^r_{rt} = \Gamma^r_{tr} = 0. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Ahora bien teniendo en cuenta que

$$T^a_{\ b} = \begin{pmatrix} T^t_{\ t} & T^t_{\ r} \\ T^r_{\ t} & T^r_{\ r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho & T^t_{\ r} \\ T^r_{\ t} & P \end{pmatrix}, \tag{2.99}$$

se tiene para la ley de conservación del tensor momento-energía

$$T^{a}_{\ b;c} = T^{a}_{\ b,c} + \Gamma^{a}_{\ cd}T^{d}_{\ b} - \Gamma^{d}_{\ cb}T^{a}_{\ d},$$

$$T^{c}_{\ b;c} = T^{c}_{\ b,c} + \Gamma^{c}_{\ cd}T^{d}_{\ b} - \Gamma^{d}_{\ cb}T^{c}_{\ d}. \tag{2.100}$$

al hacer $b = t$ en (2.100) se obtiene

$$T^{c}_{\ t;c} = T^{r}_{\ t,r} + \Gamma^{r}_{\ rt}T^{t}_{\ t} + \Gamma^{r}_{\ rr}T^{r}_{\ t} - \Gamma^{r}_{\ tt}T^{t}_{\ r} - \Gamma^{r}_{\ rt}T^{r}_{\ r}, \tag{2.101}$$

de igual manera si $b = r$ se obtiene

$$T^{c}_{\ r;c} = T^{r}_{\ r,r} + \Gamma^{t}_{\ tt}T^{t}_{\ r} + \Gamma^{t}_{\ tr}T^{r}_{\ r} - \Gamma^{t}_{\ tr}T^{t}_{\ t} - \Gamma^{t}_{\ rr}T^{r}_{\ t}. \tag{2.102}$$

con ayuda de los símbolos de Christoffel (2.98) las ecuaciones (2.101) y (2.102) se expresan

$$T^{c}_{\ t;c} = T^{r}_{\ t,r} + \Gamma^{r}_{\ rr}T^{r}_{\ t} - \Gamma^{r}_{\ tt}T^{t}_{\ r}, \tag{2.103}$$

la cual sirve como ecuación de movimiento para el flujo de momento que se utilizará más adelante,

$$T^{c}_{\ r;c} = T^{r}_{\ r,r} + \Gamma^{t}_{\ tr}T^{r}_{\ r} - \Gamma^{t}_{\ tr}T^{t}_{\ t}. \tag{2.104}$$

De acuerdo con (2.95), (2.98) y (2.104) se tiene que

$$T^{r}_{\ r,r} + \Gamma^{t}_{\ tr}(T^{r}_{\ r} - T^{t}_{\ t}) = 0,$$

$$\frac{dP}{dr} + \frac{f^{'}}{2f}(P + \rho) = 0, \tag{2.105}$$

al usar la anomalía de traza (2.96)

$$-\rho + P = \frac{\hbar R}{24\pi},$$

se obtiene al integrar para (2.105)

$$fP = \frac{\hbar}{96\pi}[(f^{'}(r))^2 + c],$$

con c una constante de integración. Puesto que $\kappa = f^{'}/2$, lo anterior se reescribe

$$P(r) = -\frac{\hbar}{24\pi}\left(\frac{\kappa^2(r) + c}{f(r)}\right). \tag{2.106}$$

Al emplear diferentes condiciones de frontera, que son las que diferenciarán los diferentes estados cuánticos, se obtendrá el valor específico de la constante de integración c. Así para el estado de Hartle-Hawking, se requiere determinar el valor de P y ρ en el horizonte dado por $r = r_0$. Sabiendo que $R = -f^{''}$,
Si $f(r) \longrightarrow 1$ y $r \longrightarrow \infty$, entonces $P(r \to \infty) = \frac{c\hbar}{24\pi}$

De la traza se tiene

$$\rho(r) = P(r) + \frac{f^{''}\hbar}{24\pi} \quad \longrightarrow \quad \rho(r \to \infty) = \frac{c\hbar}{24\pi}.$$

Ahora para el caso del agujero negro de Schwarzschild en 1+1, se tiene que $f(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ con $r_0 = 2m$, luego

$$\kappa(r) = \frac{f^{'}}{2} = \frac{m}{r^2},$$

así

$$P(r) = \frac{\hbar}{24\pi}\left(\frac{c - \frac{m^2}{r^4}}{1 - \frac{2m}{r}}\right),$$

$$P(r)_{r\to 2m} = \frac{\hbar}{24\pi}\left(\frac{c - \frac{m^2}{r^4}}{1 - \frac{2m}{r}}\right),$$

Para que este valor sea finito el límite debe existir, luego

$$\begin{aligned} P(r)_{r\to 2m} &= \frac{\hbar}{24\pi} \cdot \frac{\frac{m^2}{r^4}}{\frac{2m}{r}}, \\ &= \frac{\hbar}{24\pi} \cdot \frac{m}{2r^3}, \\ &= \frac{\hbar}{24\pi} \cdot \frac{1}{16m^2}. \end{aligned}$$

La única manera de mantener este término acotado es

$$\sqrt{c} = \kappa_0 = \frac{1}{2}f^{'}\Big|_{r=2m} = \frac{1}{4m},$$

luego

$$P_{HH} = \frac{\hbar}{24\pi}\left(\frac{\kappa_0^2 - \kappa^2}{f(r)}\right), \quad \rho_{HH} = P_{HH} + \frac{\hbar}{24\pi}f^{''}(r), \tag{2.107}$$

donde

$$P(r \to \infty) = \frac{c\hbar}{24\pi} = \frac{\hbar\kappa_0^2}{24\pi}.$$

Al introducir la temperatura Hawking $T_H = \frac{\kappa_0}{2\pi}\hbar$, se tiene

$$P(r \to \infty) = \frac{\pi}{6\hbar}T_H^2,$$

luego

$$\rho_{HH} \simeq P_{HH} = \frac{\pi}{6\hbar}T_H^2, \tag{2.108}$$

la cual es el resultado apropiado para la radiación escalar en 1+1 dimensiones a la temperatura Hawking T_h.

Para el estado de Boulware, se tiene la condición de frontera $P = \rho = 0$ cuando $r \to \infty$.

Así de (2.106) se tiene que si $r = \infty \longrightarrow f(r) = 1$

$$f(\infty)P(\infty) = -\frac{\hbar}{24\pi}(\kappa^2(\infty) + c).$$

De esta manera la constante c desaparece y se encuentra que

$$P_B = -\frac{\hbar}{24\pi}\frac{\kappa^2(r)}{f(r)}. \tag{2.109}$$

Al usar una vez más la traza del tensor momento-energía se obtiene

$$-\rho + P = \frac{\hbar R}{24\pi} = -\frac{f^{''}\hbar}{24\pi},$$

entonces

$$\rho_B = P_B + \frac{\hbar f^{''}(r)}{24\pi}. \tag{2.110}$$

Si el horizonte está presente, a partir de (2.106)

$$P_B = -\frac{\hbar}{24\pi}\frac{(m/r^2)^2}{1-\frac{2m}{r}} = -\frac{\hbar}{24\pi}\frac{m^2}{r^3(r-2m)},$$

con lo cual para $r \to 2m, \quad P_B \to -\infty$. De la expresión (2.110) se tiene

$$f^{''}(r) = -\frac{4m}{r^3},$$

luego

$$\rho_B = -\frac{\hbar m^2}{24\pi r^3(r-2m)} + \frac{\hbar}{24\pi}\left(-\frac{4m}{r^3}\right),$$

donde $r \to 2m, \quad \rho_B \to -\infty$. Así si el horizonte está presente tanto P_B como ρ_B divergen a $-\infty$.
Al tomar la diferencia de los dos tensores de momento-energía asociados a esos estados de vacío se obtiene

$$\Delta T^a_{\ b} = (T^b_{\ a})_{HH} - (T^b_{\ a})_B. \tag{2.111}$$

Las ecuaciones (2.107) y (2.110) dan la forma térmica, tanto para la presión como para la densidad de energía

$$\begin{aligned}\Delta P = P_{HH} - P_B &= \frac{\hbar}{24\pi}\left(\frac{\kappa_0^2-\kappa^2}{f(r)}\right) + \frac{\hbar}{24\pi}\frac{\kappa^2(r)}{f(r)},\\ &= \frac{\hbar^2\pi\kappa_0^2}{6\pi^2\hbar 4 f(r)},\\ &= \frac{\pi}{6\hbar}T^2(r),\end{aligned}$$

de igual manera

$$\Delta\rho = \rho_{HH} - \rho_B = \left(P_{HH} + \frac{\hbar}{24\pi}f^{''}(r)\right) - \left(P_B + \frac{\hbar}{24\pi}f^{''}(r)\right),$$

con lo que se obtiene finalmente que

$$\Delta P = \Delta\rho = \frac{\pi}{6\hbar} T^2(r), \tag{2.112}$$

con $T(r) = \frac{T_H}{\sqrt{f(r)}}$, la temperatura local en el estado de Hartle-Hawking. El equilibrio térmico en cualquier campo gravitacional está dado por la ley de Tolman

$$T\sqrt{-g_{00}} = cte, \tag{2.113}$$

donde T es la temperatura local.
El estado de Hartle-Hawking se encuentra térmicamente excitado sobre el estado fundamental de Boulware de temperatura cero, a una temperatura local $T(r)$, la cual aumenta sin límite cerca al horizonte. Lo anterior permance válido para espacios-tiempo en 3+1 dimensiones con cambios que surgen de las dimensiones. La expresión análoga de la ecuación (2.112) para un campo escalar sin masa es

$$3\Delta P \simeq \Delta\rho \simeq \frac{\pi^2}{30\hbar^3} T^4(r), \tag{2.114}$$

la cual está de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann y se mantiene a muy buena aproximación tanto lejos del agujero negro como cerca del horizonte.

Consideremos una métrica en el gauge conforme diferente a la dada por la expresión (2.93)

$$ds^2 = -e^{2\lambda(u,v)} du dv = e^{2\lambda(dz^2 - dt^2)}, \tag{2.115}$$

con u y v las coordenadas nulas dadas por $u = t - z$ y $v = t + z$. Al reescribir (2.115) en términos de los coeficientes métricos

$$ds^2 g_{ab} dx^a dx^b = g_{uu} du^2 + g_{uv} du dv + g_{vu} dv du + g_{vv} v^2,$$

donde

$$g_{uv} = g_{vu} = -\frac{e^{2\lambda(u,v)}}{2},$$

se tiene

$$ds^2 = -\frac{e^{2\lambda(u,v)}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para este caso se tienen 6 componentes de la conexión

$$\begin{aligned} \Gamma^u{}_{uu} &= 2\partial_u \lambda, \quad \Gamma^u{}_{uv} = 0, \quad \Gamma^u{}_{vv} = 0, \\ \Gamma^v{}_{vv} &= 2\partial_v \lambda, \quad \Gamma^v{}_{uv} = 0, \quad \Gamma^u{}_{uu} = 0. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Por propiedades del tensor de Riemmann hay una sola componente independiente, asi de acuerdo con

(2.115) y (2.116)

$$R^{v}{}_{vuv} = R^{u}{}_{uvu} = 2\partial_u\partial_v\lambda,$$

donde el escalar de curvatura es

$$R = g^{uv}R_{uv} + g^{vu}R_{vu},$$

ahora como

$$R_{uv} = R^{u}{}_{uuv} = -R^{u}{}_{uvu},$$
$$R_{vu} = R^{v}{}_{vvu} = -R^{v}{}_{vuv},$$

luego,

$$R = 8e^{-2\lambda}\partial_u\partial_v\lambda.$$

Ahora, de acuerdo con (2.115) el determinante de la métrica es $\sqrt{-g} = e^{2\lambda}/2$ y con el DÁlembertiano se obtiene

$$\Box = 2e^{-2\lambda}\partial_u\left(\frac{e^{2\lambda}}{2}(-2e^{-2\lambda})\partial_v\right) + 2e^{-2\lambda}\partial_v\left(\frac{e^{2\lambda}}{2}(-2e^{-2\lambda})\partial_u\right) = -4\Box e^{-2\lambda}\partial_u\partial_v,$$

con todo lo anterior se reescribe

$$R = -2\Box\lambda = 8e^{-2\lambda}\partial_u\partial_v\lambda. \tag{2.117}$$

El tensor simétrico cuya traza y ley de conservación están dadas por (2.96) se puede escribir de manera general como

$$T_{ab} = \Theta_{ab}[\lambda] + F^s(u)u_{,a}u_{,b} + F^e(v)v_{,a}v_{,b}, \tag{2.118}$$

con

$$\Theta_{ab}[\lambda] = \frac{\hbar}{12\pi}\left\{\lambda_{;ab} + \lambda_{,a}\lambda_{,b} - g_{ab}\left(\Box\lambda + \frac{1}{2}(\nabla\lambda)^2\right)\right\}, \tag{2.119}$$

para cualquier función $\lambda(u,v)$ de la métrica (2.115) y F^s, F^e arbitrarias. Para probar lo anterior, se tiene para la traza de (2.119)

$$\Theta^{a}{}_{b}[\lambda] = \frac{\hbar}{12\pi}\left\{\nabla^a\nabla_b\lambda + \partial^a\lambda\partial_b\lambda - g^{a}{}_{b}\left(\Box\lambda + \frac{1}{2}(\nabla\lambda)^2\right)\right\},$$
$$\Theta^{a}{}_{a}[\lambda] = \frac{\hbar}{12\pi}\left\{\nabla^a\nabla_a\lambda + \partial^a\lambda\partial_a\lambda - g^{a}{}_{a}\left(\Box\lambda + \frac{1}{2}(\nabla\lambda)^2\right)\right\},$$
$$\Theta^{a}{}_{a}[\lambda] = \frac{\hbar}{12\pi}\left\{\Box\lambda + (\nabla\lambda)^2 - 2\left(\Box\lambda + \frac{1}{2}(\nabla\lambda)^2\right)\right\},$$

luego,

$$T^{a}{}_{a} = \Theta^{a}{}_{a}[\lambda] = -\frac{\hbar}{12\pi}\Box\lambda,$$

que de acuerdo con (2.117) es la expresión para la anomalía de traza que se establece en (2.96).

Bajo la condición de que z, t son asintóticamente lorentzianos en un espacio-tiempo plano, se tiene

$$\lambda \to 0 \quad \text{cuando} \quad z \to +\infty.$$

Ante la presencia de un horizonte de eventos, se tiene que en el gauge conforme asintóticamente lorentziano

$$z \to -\infty, \quad \text{y} \quad \lambda \to -\infty,$$

el cual debe estar fuera del mapeo. Para ello se hace una transformación a coordenadas de Kruskal. Para ello, se definen las gravedades superficiales de las dos hojas del horizonte, el cual en general no es estático. A partir del carácter nulo o luminoso de u y v, se tienen ecuaciones geodésicas de la forma

$$u_{;ab} = -\kappa^s(u,v)u_{,a}u_{,b}, \quad \text{y} \quad v_{;ab} = -\kappa^e(u,v)v_{,a}v_{,b}, \tag{2.120}$$

de acuerdo con la conexiones (2.116), se verifica

$$\begin{aligned} \kappa^s(u,v) &= -2\partial_u\lambda, \\ \kappa^e(u,v) &= 2\partial_v\lambda, \\ \kappa^e - \kappa^s &= 2\partial_t\lambda(z,t). \end{aligned} \tag{2.121}$$

De acuerdo con las ecuaciones (2.120) las coordenadas u y v no son rectilíneas ya que sus segundas derivadas covariantes no son nulas. Por lo tanto se hace necesario introducir coordenadas nulas $U(u)$ y $V(v)$, tales que sean rectilíneas de manera local en las hojas del horizonte pasado y futuro dadas respectivamente por $v = -\infty$ y $u = \infty$. Así se introducen las coordenadas tipo Kruskal

$$[LnU^{'}(u)]^{'} = \kappa_0^s(u) \equiv \kappa^s(u, v = -\infty), \tag{2.122}$$

$$[LnV^{'}(v)]^{'} = \kappa_0^e(v) \equiv \kappa^e(u = -\infty, v). \tag{2.123}$$

A partir de (2.120) se tiene que las coordenadas U y V son localmente rectilíneas sobre el horizonte

$$U_{;ab}\Big|_{v=-\infty} = V_{;ab}\Big|_{u=\infty} = 0. \tag{2.124}$$

Ahora se tiene

$$\frac{U^{''}}{U^{'}} = \kappa^s \longrightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial u}du,$$

$$LnU^{'}(u) = \int \kappa^s du \longrightarrow U^{'}(u) = e^{\int k^s du},$$

como $k^s = -2\partial_u\lambda$, entonces

$$U^{'}(u) = e^{-\int 2\partial_u\lambda du} \longrightarrow U^{'} = e^{-2\lambda},$$

$$LnU^{'} = -\int 2\partial_u\lambda du \longrightarrow LnU^{'} = -2\lambda,$$

y de igual manera siguiendo un procedimiento similar para $V^{'}$ se obtiene $V^{'} = e^{2\lambda}$ y $LnV^{'} = 2\lambda$. Al

retomar la expresión (2.115)

$$ds^2 = -e^{2\lambda}e^{2\lambda}e^{-2\lambda}dUdV,$$

luego

$$ds^2 = -e^{2\Lambda(U,V)}dUdV, \tag{2.125}$$

con

$$\begin{aligned} 2\Lambda &= 2\lambda + 2\lambda - 2\lambda, \\ &= 2\lambda - (2\lambda - 2\lambda), \\ &= 2\lambda - (LnU^{'} + LnV^{'}), \\ &= 2\lambda - [Ln(U^{'}V^{'})], \\ \Lambda &= \lambda - \frac{1}{2}Ln[U^{'}(u)V^{'}(v)] \end{aligned} \tag{2.126}$$

la cual es regular en el horizonte si κ_0^e y κ_0^s son diferentes de cero como se asumirá. De las expresiones (2.126) y (2.119) se establece

$$\Theta_{ab}[\Lambda] = \Theta_{ab}[\lambda] + H^s(u)u_{,a}u_{,b} + H^e(v)v_{,a}v_{,b}, \tag{2.127}$$

con

$$\begin{aligned} H^s(u) &= \frac{\hbar}{48\pi}\left\{(\kappa_0^s)^2 - \frac{1}{2}R(u, v = -\infty)\right\}, \\ H^e(v) &= \frac{\hbar}{48\pi}\left\{(\kappa_0^e)^2 - \frac{1}{2}R(u = +\infty, v)\right\}. \end{aligned} \tag{2.128}$$

Con todo lo anterior se pueden definir los valores de expectación asociados a los tensores momento-energía para los estados de vacío de Hartle-Hawking, Boulware y Unruh de acuerdo con la definición general (2.118). Así, para el estado de Boulware, se tiene que el valor de expectación del tensor momento-energía tiende a cero en el infinito y es singular o divergente en el horizonte, puesto que $\lambda \to -\infty$ en esa región. Por lo tanto, los flujos $F^s = F^e = 0$ en (2.118), con lo cual

$$\langle T_{ab}\rangle_B = \Theta_{ab}[\lambda]. \tag{2.129}$$

El estado de Hartle-Hawking a diferencia del estado de Boulware se encuentra acotado sobre ambas hojas del horizonte, lo cual es válido para la función Λ de la expresión (2.126), con lo que se puede escribir

$$\langle T_{ab}\rangle_H = \Theta_{ab}[\Lambda]. \tag{2.130}$$

La ecuación (2.130) establece el valor de expectación del momento-energía que mide un observador en caída libre (FREFOS) en ccordenadas lorentzianas locales para definir sus modos de frecuencia posistiva.

A partir de la expresión (2.127) se reescribe este valor de expectación como

$$\langle T_{ab}\rangle_H = \langle T_{ab}\rangle_B + H^s(u)u_{,a}u_{,b} + H^e(v)v_{,a}v_{,b}, \tag{2.131}$$

con lo cual, el estado de Hartle-Hawking baña el espacio que rodea al agujero negro con corrientes de radiación a temperaturas efectivas que entran y salen

$$T_e = \frac{\hbar}{2\pi}\kappa_e^0(v), \quad \text{y} \quad T_s = \frac{\hbar}{2\pi}\kappa_s^0(u). \tag{2.132}$$

Para el caso de un espacio-tiempo estático, en el cual el estado de Hartle-Hawking se define, el baño de radiación se encuentra en equilibrio térmico con el agujero negro a la temperatura de Hawking y con densidad de energía dada por la expresión (2.112).

El estado de Unruh se encuentra vacío en el horizonte infinito pasado tipo luz H^-. Este estado carece del término de flujo que entra en (2.118) el cual es responsable de que la densidad del tensor momento-energía de Hartle-Hawking (2.131) sea regular en el horizonte pasado. Así este se define como

$$\langle T_{ab}\rangle_U = \langle T_{ab}\rangle_B + H^s(u)u_{,a}u_{,b}. \tag{2.133}$$

en el horizonte infinito futuro tipo luz H^+, el término que sobrevive en (2.118) es el segundo, el cual representa un flujo térmico que sale que se identifica con la evaporación del agujero negro. Además, existe un flujo que entra el cual trae como compañía una energía negativa a través del horizonte futuro, de la forma

$$\langle T_{ab}\rangle_U = \langle T_{ab}\rangle_H - H^e(v)v_{,a}v_{,b}. \tag{2.134}$$

Como ejemplo de todo lo anterior se puede considerar una geometría estática, en la cual la métrica se reescribe como

$$ds^2 = \frac{dr^2}{f(r)} - f(r)e^{2\psi(r)}dt^2. \tag{2.135}$$

Un observador estacionario FIDO en esta geometría tiene una aceleración exterior corrida al rojo dada por

$$\kappa(r) = \sqrt{-g_{tt}} \times \text{aceleración propia}. \tag{2.136}$$

La c-velocidad para el observador FIDO es

$$u^\mu = (-f^{-1/2}(r)e^{-\psi}, 0, 0, 0),$$

como la c-acelaración es

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma,$$

la única componente diferente de cero es

$$a^r = \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma^r{}_{tt}(u^t)^2,$$

con

$$\Gamma^r{}_{tt} = \frac{1}{2}f(r)(f^{'}(r)e^{2\psi} + f(r)2e^{2\psi}\psi^{'}).$$

Debido a que $u^r = 0$, entonces $a^r = \Gamma^r{}_{tt}(u^t)^2$, con lo cual

$$a^r = \frac{1}{2}(f^{'}(r) + 2\psi^{'}f(r)).$$

De acuerdo con Poisson [55], la aceleración propia es

$$a(r) \equiv (g_{rr}a^r a^r)^{1/2} = \frac{1}{2}f^{-1/2}(f^{'}(r) + 2\psi^{'}f(r)),$$

así la ecuación (2.136) se expresa como

$$\kappa(r) = \sqrt{-g_{tt}} \cdot a(r) = \left(\frac{1}{2}f^{'}(r) + f(r)\psi^{'}\right)e^{\psi}. \tag{2.137}$$

En un medio estático con presión $P = T^r{}_r$ y densidad de energía $\rho = -T^t{}_t$, la componente radial de la conservación de la energía del tensor de momento-energía dada por (2.104)

$$T^r{}_{r,r} + \Gamma^t{}_{tr}(T^r{}_r - T^t{}_t) = 0,$$

donde la única conexión diferente de cero de acuerdo con la métrica (2.135) es

$$\Gamma^t{}_{tr} = \frac{e^{\psi}}{e^{\psi}f(r)}\left(\frac{1}{2}f^{'}(r) + f(r)\psi^{'}\right) = \frac{\kappa}{e^{\psi}f(r)},$$

con lo que la ecuación de conservación se escribe como

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P)\frac{\kappa}{e^{\psi}f(r)}. \tag{2.138}$$

Ahora de acuerdo con la métrica (2.135)

$$\begin{aligned} -dLn\sqrt{-g_{tt}} &= -d(Ln(f^{1/2}e^{\psi})), \\ &= -\frac{1}{f^{1/2}e^{\psi}}\left(\frac{1}{2}f^{-1/2}f^{'}e^{\psi} + f^{1/2}e^{\psi}\psi^{'}\right), \\ &= -\frac{e^{\psi}}{fe^{\psi}}\left(\frac{1}{2}f^{'} + f\psi^{'}\right) = -\frac{\kappa}{fe^{\psi}}, \end{aligned}$$

luego, de acuerdo con (2.138)

$$\frac{dP}{\rho + P} = -dLn\sqrt{-g_{tt}}. \tag{2.139}$$

Para esta especie de fluido de acuerdo con la relación de Gibbs-Duhem [59] se define una densidad de entropía $s(r)$, temperatura local inversa $\beta(r) = T^{-1}$ y potencial químico nulo, por

$$SdT - vdP + Nd\mu = 0 \longrightarrow sdT = dP,$$

luego,

$$s = \beta(\rho + P), \quad ds = \beta d\rho, \tag{2.140}$$

$$ds = d\beta(\rho + P) + \beta(d\rho + dP),$$

$$\frac{dP}{\rho + P} = -\frac{d\beta}{\beta}. \tag{2.141}$$

Así de las expresiones (2.139) y (2.141), se obtiene de nuevo la ley de Tolman (2.113)

$$\frac{dP}{\rho + P} = -dLn\sqrt{-g_{tt}} = -\frac{d\beta}{\beta},$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{d(\sqrt{-g_{tt}})}{\sqrt{-g_{tt}}},$$

$$Ln\beta = Ln\sqrt{g_{tt}},$$

$$T\sqrt{-g_{tt}} = cte,$$

la cual es válida en un espacio-tiempo estático, para la variación de la temperatura en un fluido gravitando en equilibrio térmico, donde las regiones inferiores son más calientes.
El escalar de curvatura para la métrica (2.135) se calcula a continuación. Para ello se tienen las conexiones

$$\Gamma^t{}_{tt} = 0, \quad \Gamma^t{}_{rt} = \frac{\kappa}{e^{\psi} f}, \quad \Gamma^t{}_{rr} = 0,$$

$$\Gamma^r{}_{tt} = f e^{\psi} \kappa, \quad \Gamma^r{}_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{f'}{f}, \quad \Gamma^r{}_{tr} = 0.$$

De nuevo debido a la dimensionalidad del espacio-tiempo solo existe una componente independiente del tensor de Riemann

$$R^t{}_{rtr} = -\frac{e^{-\psi}}{f}\frac{d\kappa}{dr},$$

donde

$$R^t{}_{rtr} = g^{tt} g_{rr} R^r{}_{trt} \longrightarrow R^r{}_{trt} = -f^2 e^{2\psi} R^t{}_{rtr}.$$

El escalar de curvatura es

$$R = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} = -2e^{-\psi}\frac{d\kappa}{dr}.$$

Así, si el medio es un campo escalar sin masa y $T^b{}_a$ es el valor de expectación del tensor momento-energía, entonces la anomalía de traza es la misma que la expresión (2.96), es decir

$$T^a{}_a = \frac{\hbar}{24\pi} R, \quad \text{con} \quad R = -2e^{\psi}\frac{d\kappa}{dr}. \tag{2.142}$$

A partir de un procedimiento similar al que se usó para encontrar la expresión (2.106) se obtiene

$$f e^{2\psi} P = -\frac{\hbar}{24\pi}(\kappa^2(r) + c), \tag{2.143}$$

de igual manera se encuentran las ecuaciones (2.107-2.112).

Se tiene la componente de flujo de momento de acuerdo con (2.103)

$$\begin{aligned} T^{c}{}_{t;c} &= T^{r}{}_{t,r} + \Gamma^{r}{}_{rr} T^{r}{}_{t} - \Gamma^{r}{}_{tt} T^{t}{}_{r}, \\ 0 &= g^{rr} T_{rt,r} + \Gamma^{r}{}_{rr} g^{rr} T_{rt} - \Gamma^{r}{}_{tt} g^{tt} T_{tr}, \end{aligned}$$

luego

$$T_{rt,r} = \frac{1}{g^{rr}} \left(\Gamma^{r}{}_{tt} g^{tt} - \Gamma^{r}{}_{rr} g^{rr} \right). \tag{2.144}$$

De las conexiones calculadas con anterioridad

$$\Gamma^{r}{}_{tt} = f e^{\psi} \kappa, \quad \Gamma^{r}{}_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{f'}{f},$$

se obtiene para (2.144)

$$\begin{aligned} T_{rt,r} &= \frac{1}{f} \left[f e^{\psi} \kappa \cdot \left(-\frac{1}{f} e^{-2\psi} \right) + \frac{1}{2} \frac{f'}{f} \cdot f \right] T_{rt}, \\ &= \frac{1}{f} \left[-e^{-\psi} \kappa + \frac{1}{2} f' \right] T_{rt}, \\ &= \frac{1}{f} \left[-e^{-\psi} \left(\frac{1}{2} f' + f \psi' \right) e^{\psi} + \frac{1}{2} f' \right] T_{rt}, \\ &= -\psi' T_{rt}. \end{aligned}$$

Reescribiendo se obtiene

$$\frac{dT_{rt}}{dr} = -\frac{d\psi}{dr} T_{rt},$$

luego

$$T_{rt} = e^{-\psi} e^{c} = A e^{-\psi}, \tag{2.145}$$

con A y c constantes. Ahora, como el estado de Unruh se superpone sobre el tensor momento-energía de Hartle-Hawking a un flujo térmico hacia dentro de energía negativa, se tiene

$$< T_{rr} >_{r \to \infty} = 0,$$

$$< T >_{U} - < T >_{HH} = 0,$$

luego

$$< T^{t}{}_{r} >_{r \to \infty} = A e^{-\psi} = \frac{\pi}{6\hbar} T_{H}^{2} e^{-\psi},$$

como $T_{rt} = T_{tr}$, se obtiene

$$< T^{t}{}_{r} >_{U} = \frac{\pi}{12\hbar} T_{H}^{2} e^{-\psi}, \tag{2.146}$$

donde la constante se fija por condiciones de frontera sobre los tensores momento-energía. El estado de Unruh (2.146) llega a ser infinitamente corrido hacia el horizonte pasado, pero es regular a lo largo del

horizonte futuro.

2.4. Dinámica de campos térmicos

En general, la existencia de sistemas completamente aislados es casi imposible en la naturaleza, por el contario, la mayoría de los sistemas se encuentran en contacto con un baño térmico o también con un baño de partículas. Así, surge la necesidad de formular una teoría de campos térmica a temperatura finita para describir tales sistemas. Existen diversos formalismos para introducir una teoría de campos cuántica a temperatura finita. La Dinámica de Campos Térmicos (DCT) es una de ellas, la cual fue desarrollada por Umezawa-Takahashi (1975) [6]. En este formalismo se define un vacío térmico, $|0(\beta)\rangle$, tal que el valor esperado en este vacío de un operador hermítico A coincida con su promedio estadístico

$$\langle A\rangle = Z^{-1}(\beta)Tr[e^{-\beta \boldsymbol{H}}A] = \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle, \tag{2.147}$$

con

$$\boldsymbol{H} = H - \mu N, \qquad Z(\beta) = Tr[e^{-\beta \boldsymbol{H}}A] \quad y \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Aquí H es la hamiltoniana del sistema, μ el potencial químico y k_B la constante de Boltzmann.
Esta idea fue inspirada en la propuesta de Matsubara (1955), en la cual la media estadística de un operador $\langle A\rangle$, tiene propiedades semejantes a las del valor esperado de este operador en el vacío $\langle 0|A|0\rangle$ en teoría de campos cuántica, y desarrolla un método notable del cálculo de la función de partición (2.147).

2.4.1. Consideraciones generales

La idea central de la Dinámica de Campos Térmicos (DCT) es expresar promedios estadísticos de una variable dinámica A como el valor esperado de este operador en un vacío dependiente de la temperatura. Así, se construye tal vacío de modo que la ecuación (2.147) se satisfaga para una variable dinámica arbitraria

$$\langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle = Z^{-1}(\beta)\sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\beta E_n}, \tag{2.148}$$

donde por simplicidad se hace la suposición de que los valores esperados de $\boldsymbol{H}$ son discretos y obedecen a una ecuación de valores propios dada por

$$\boldsymbol{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \tag{2.149}$$

Los vectores propios que son los estados propios $|n\rangle$ son ortonormalizados, de modo que

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}. \tag{2.150}$$

Expandiendo el estado de vacío térmico $|0(\beta)\rangle$ en términos de una base $\{|n\rangle\}$ del espacio de Hilbert en la forma

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta)|n\rangle, \tag{2.151}$$

donde se hace uso de la relación de completez del espacio de Hilbert. Al sustituir el lado izquierdo de la ecuación (2.148), se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_n f_n^*(\beta)\langle n|A\sum_m f_m(\beta)|m\rangle &= Z^{-1}(\beta)\sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\beta E_n} \\
\sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta)\langle n|A|m\rangle &= Z^{-1}(\beta)\sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\beta E_n} \\
\sum_{n,m} f_n^*(\beta) f_m(\beta)\langle n|A|m\rangle &= Z^{-1}(\beta)\sum_{n,m} \delta_{nm}\langle n|A|m\rangle e^{-\beta E_n},
\end{aligned}$$

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z^{-1}(\beta)e^{-\beta E_n}\delta_{nm}. \tag{2.152}$$

Esta relación no tiene sentido pues los coeficientes de la expansión (2.151) son escalares complejos y éstos no poseen una propiedad de ortogonalidad entre sí como lo expresa esta relación. Por lo tanto, si se mantiene el espacio de Hilbert original, tal estado ($|0(\beta)\rangle$) no podrá ser construido. De otro parte, la relación (2.152) muestra una estructura vectorial (ortogonalidad) y por ello, los coeficientes de la expansión deben ser vectores.

Para construir un estado que satisfaga la ecuación (2.147), se deben doblar los grados de libertad de la teoría. Esto se hace introduciendo un sistema dinámico no físico representado por el estado $|\tilde{m}\rangle$ (llamado espacio tilde) ortogonal y con las mismas características del espacio físico original como son la energía y el número de partículas. Así, todas las cantidades asociadas con el sistema ficticio (no físico), serán denotadas con una tilde. La Hamiltoniana de este sistema $\tilde{H}$ es el espacio de los vectores de estado $|\tilde{n}\rangle$, que obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$\tilde{H}|\tilde{n}\rangle = E_n|\tilde{n}\rangle, \qquad \langle\tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \delta_{nm}, \tag{2.153}$$

donde se establece que la energía es la misma del sistema físico.

El vector de estado del sistema total se construye a partir del producto directo de los vectores de estado de cada uno de los sistemas, físico y ficticio por:

$$|n,\tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle. \tag{2.154}$$

De esta forma, los elementos de la matriz de los operadores A y $\tilde{A}$ son dados respectivamente por

$$\langle\tilde{m},n|A|n^{'},\tilde{m}^{'}\rangle = \langle n|A|n^{'}\rangle\delta_{mm'}, \tag{2.155}$$

$$\langle\tilde{m},n|\tilde{A}|n^{'},\tilde{m}^{'}\rangle = \langle\tilde{m}|A|\tilde{m}^{'}\rangle\delta_{nn'}. \tag{2.156}$$

Definiendo el coeficiente vectorial de la expansión (2.151) como

$$f_n(\beta) = e^{-\beta E_n/2} Z^{-1/2}(\beta)|\tilde{n}\rangle, \tag{2.157}$$

se verifica la relación (2.152), pero sin la inconsistencia de ortogonalidad que se presentaba anteriormente, así

$$\begin{aligned} f_n^*(\beta) f_m(\beta) &= e^{-\beta E_n/2} Z^{-1/2}(\beta)\langle\tilde{n}|e^{-\beta E_m/2} Z^{-1/2}(\beta)|\tilde{m}\rangle \\ &= e^{-\beta/2(E_n+E_m)} Z^{-1}(\beta)\langle\tilde{n}|\tilde{m}\rangle \\ &= Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n}\delta_{nm}. \end{aligned} \tag{2.158}$$

Usando la definición (2.157) podemos construir el estado de vacío térmico a partir de la ecuación (2.151) como sigue

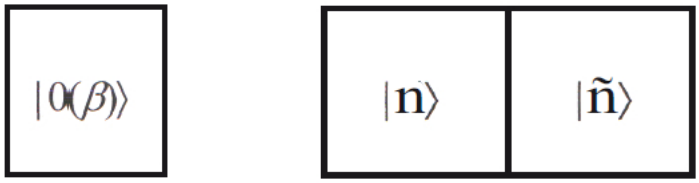

Figura 2.11: Sistema real-ficticio

$$|0(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta)\sum_n e^{-\beta E_n/2}|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = Z^{-1/2}(\beta)\sum_n e^{-\beta E_n/2}|n,\tilde{n}\rangle. \tag{2.159}$$

Finalmente se verifica la relación (2.148) teniendo en cuenta la ecuación (2.159) así:

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|A|0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta)\sum_n e^{-\beta E_n/2}\langle\tilde{n},n|AZ^{-1/2}(\beta)\sum_m e^{-\beta E_m/2}|m,\tilde{m}\rangle \\ &= Z^{-1}(\beta)\sum_{n,m} e^{-\beta/2(E_n+E_m)}\langle n|A|m\rangle\delta_{nm} \\ &= Z^{-1}(\beta)\sum_n \langle n|A|n\rangle e^{-\beta E_n}. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Así, se ha mostrado que se puede introducir un estado de vacío dependiente de la temperatura de manera que la media estadística de cualquier operador Hermítico pueda ser identificada con el valor esperado en este estado. Para ello se hace obligatorio duplicar el espacio de Hilbert (figura 2.11). A continuación se presenta un sistema de bosones libres como ejemplo, para ilustrar la manera en que se debe construir un conjunto completo de vectores ortonormales a los que pertenece el vector $|0(\beta)\rangle$.

2.4.2. Ensamble de bosones libres con frecuencia ω

Consideremos un oscilador bosónico de frecuencia ω descrito por un par de variables complementarias a y $a^\dagger$ las cuales son Hermíticas, y cuya Hamiltoniana es [25]

$$H = \omega a^\dagger a, \tag{2.161}$$

donde a y $a^\dagger$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \qquad \text{y} \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{2.162}$$

El espacio de Hilbert es de dimensión infinita y los autoestados de H pueden ser construidos basados en las relaciones de conmutación (2.162). Los estados serán rotulados por un índice entero n

$$H|n\rangle = n\omega|n\rangle, \quad \text{con} \qquad n = 0, 1, 2, ..., \infty. \tag{2.163}$$

Partiendo del estado $|n\rangle$ se encuentra que $a^\dagger|n\rangle$ y $a|n\rangle$ son también autoestados de la Hamiltoniana, pero con un autovalor de energía desplazado de un quantum, es decir

$$Ha^\dagger|n\rangle = \omega a^\dagger a a^\dagger|n\rangle = \omega a^\dagger(1 + a^\dagger a)|n\rangle = (n\omega + \omega)a^\dagger|n\rangle, \tag{2.164}$$

de igual manera

$$Ha|n\rangle = (n\omega - \omega)a|n\rangle. \tag{2.165}$$

El estado fundamental $|0\rangle$ se define como el estado de menor energía posible, que implica

$$a|0\rangle = 0. \tag{2.166}$$

Cualquier autoestado del oscilador puede ser construido a través de aplicaciones sucesivas del operador de creación, $a^\dagger$, en el estado fundamental, es decir

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle. \tag{2.167}$$

Por lo tanto, el conjunto de estados ortonormales es

$$|0\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{1!}}a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2!}}a^\dagger a^\dagger|0\rangle = |2\rangle, ..., \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle = |n\rangle .... \quad . \tag{2.168}$$

[25] En la aproximación semiclásica (sección 2.1.2), se trabaja con la imagen de los espacios planos. La energía absoluta como tal no puede medirse en una física sin gravedad, por lo que se puede renormalizar el punto de energía cero sin afectar las cantidades observables. Esta operación de normalización, que se denota por ::, exige que donde aparezca un producto de operadores creación y destrucción, los operadores destrucción se mantendrán al lado derecho [50]. Es decir, $: a_k a_k^\dagger := a_k^\dagger a_k$, donde, $: H := \sum_k a_k^\dagger a_k$, desapareciendo el problema del término $\frac{1}{2}\omega$.

De acuerdo a la sección 2.4.1, para construir el estado de vacío térmico $|0(\beta)\rangle$ para este sistema, debemos introducir un sistema ficticio, idéntico al sistema original, descrito por la Hamiltoniana

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \tag{2.169}$$

donde $\tilde{a}$ y $\tilde{a}^\dagger$ satisfacen las mismas relaciones de conmutación expresadas por la ecuación (2.162)

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \qquad \text{y} \qquad [\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0. \tag{2.170}$$

Si se asume que todas las variables complementarias del sistema físico conmutan con las variables del sistema ficticio, es decir

$$[a, \tilde{a}] = [a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = [a, \tilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \tilde{a}] = 0. \tag{2.171}$$

De manera análoga al sistema físico, se tiene el conjunto de estados ortonormales dado por

$$|\tilde{0}\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{1!}}\tilde{a}^\dagger|\tilde{0}\rangle = |\tilde{1}\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2!}}\tilde{a}^\dagger\tilde{a}^\dagger|\tilde{0}\rangle = |\tilde{2}\rangle, ..., \frac{1}{\sqrt{n!}}(\tilde{a}^\dagger)^n|\tilde{0}\rangle = |\tilde{n}\rangle .... \quad , \tag{2.172}$$

y, debido a que el sistema ficticio debe poseer las mismas características del sistema físico, los autovalores de la Hamiltoniana $\tilde{H}$ son $n\omega$, donde $n = 0, 1, 2...., \infty$. Los vectores de estado ortogonales del sistema compuesto que son obtenidos por el producto directo o tensorial de los estados $|n\rangle$ y $|\tilde{n}\rangle$ serán

$$|0, \tilde{0}\rangle, \quad a^\dagger|0, \tilde{0}\rangle, \quad a^\dagger\tilde{a}^\dagger|0, \tilde{0}\rangle, \quad \frac{1}{n!}(a^\dagger)^n(\tilde{a}^\dagger)^n|0, \tilde{0}\rangle, ... \quad . \tag{2.173}$$

Así, según lo anterior, se construye el estado $|0(\beta)\rangle$, como está indicado por la ecuación (2.159)

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= Z^{-1/2}(\beta)\sum_n e^{-\beta n\omega/2}|n, \tilde{n}\rangle \\ &= Z^{-1/2}(\beta)\sum_n e^{-\beta n\omega/2}\frac{1}{n!}(a^\dagger)^n(\tilde{a}^\dagger)^n|0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \tag{2.174}$$

Se puede obtener la función de partición para este sistema exigiendo la ortonormalización del estado $|0(\beta)\rangle$ encontrado

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= Z^{-1}(\beta)\sum_{n,m}\langle\tilde{0}, 0|\frac{1}{n!}(\tilde{a})^n(a)^n e^{-\beta(n\omega+m\omega)/2}\frac{1}{m!}(a^\dagger)^m(\tilde{a}^\dagger)^m|0, \tilde{0}\rangle \\ &= Z^{-1}(\beta)\sum_{n,m} e^{-\beta(n\omega+m\omega)/2}\langle\tilde{n}, n|m, \tilde{m}\rangle \\ &= Z^{-1}(\beta)\sum_{n,m} e^{-\beta(n\omega+m\omega)/2}\langle n|m\rangle\delta_{mn} \\ &= Z^{-1}(\beta)\sum_{n} e^{-\beta n\omega}\langle n|n\rangle \\ &= Z^{-1}(\beta)\sum_{n} e^{(-\beta\omega)^n}\langle n|n\rangle = 1. \end{aligned} \tag{2.175}$$

Usando la expansión de la serie geométrica

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

resulta que

$$Z(\beta) = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}. \tag{2.176}$$

Con esta función de partición y reordenando los términos, se reescribe el estado de vacío térmico, ecuación (2.174) en la forma

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \sqrt{1-e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\omega/2} \frac{1}{n!} (a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n |0,\tilde{0}\rangle \\
&= \sqrt{1-e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta\omega/2)^n} \frac{1}{n!} (a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n |0,\tilde{0}\rangle \\
&= \sqrt{1-e^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger)^n |0,\tilde{0}\rangle \\
&= \sqrt{1-e^{-\beta\omega}} \exp(e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0,\tilde{0}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.177}$$

A continuación se muestra que el estado de vacío térmico $|0(\beta)\rangle$ puede ser mapeado por el vacío total $|0,\tilde{0}\rangle$, en $T=0$, por una transformación dada de Bogoliubov. Para ello definimos:

$$u(\beta) = (1-e^{-\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1+f_B(\omega)} = \cosh\theta(\beta), \tag{2.178}$$

$$v(\beta) = (e^{-\beta\omega}-1)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{f_B(\omega)} = \operatorname{senh}\theta(\beta), \tag{2.179}$$

y

$$\tanh\theta(\beta) = e^{-\beta\omega/2}, \tag{2.180}$$

donde f_B es la función de distribución de Bose-Einstein [26]. Donde se verifica

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1. \tag{2.181}$$

[26] La función de distribución de Bose-Einstein f_B proporciona el número promedio de bosones en un sistema en equilibrio térmico a tempertaura T, que se encuentra en un estado particular i con energía E_i dada por

$$f_B = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E_i/kT} - 1}.$$

El valor de α depende del sistema de bosones particular que describe; para sistemas cuyo números no se conservan (i.e fotones) $\alpha = 0$.

Usando estas definiciones, se puede escribir el vector de estado $|0(\beta)\rangle$ como:

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= u(\beta)^{-1} exp\left[e^{-\beta\omega/2}\frac{(1-e^{-\beta\omega})^{\frac{1}{2}}}{(1-e^{-\beta\omega})^{\frac{1}{2}}}a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right]|0,\tilde{0}\rangle \\
&= u(\beta)^{-1} exp\left[\left(\frac{1}{(e^{\beta\omega}-1)}\right)(1-e^{-\beta\omega})^{\frac{1}{2}}a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right]|0,\tilde{0}\rangle \\
&= u(\beta)^{-1} exp\left(\frac{v(\beta)}{u(\beta)}a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right)|0,\tilde{0}\rangle, \qquad (2.182)
\end{aligned}$$

donde se han usado las expresiones para $u(\beta)$ y $v(\beta)$ definidas con anterioridad.
Así, de acuerdo a las expresiones (2.178) y (2.180), la ecuación (2.182) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1}\theta(\beta)e^{\tanh\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger}|0,\tilde{0}\rangle \\
&= e^{\tanh\theta a^\dagger\tilde{a}^\dagger}e^{\ln(\cosh^{-1}\theta)}e^{-\ln\cosh\theta\tilde{a^\dagger}\tilde{a}}|0,\tilde{0}\rangle \\
&= e^{\tanh\theta a^\dagger\tilde{a}^\dagger}e^{-\ln(\cosh\theta)}e^{-\ln\cosh\theta\tilde{a^\dagger}\tilde{a}}e^{-\ln\cosh\theta a^\dagger a}|0,\tilde{0}\rangle \\
&= e^{\tanh\theta a^\dagger\tilde{a}^\dagger}e^{-\ln\cosh\theta(\tilde{a}^\dagger\tilde{a}+a^\dagger a+1)}|0,\tilde{0}\rangle \\
&= e^{\tanh\theta a^\dagger\tilde{a}^\dagger}e^{-\ln\cosh\theta(\tilde{a}\tilde{a^\dagger}+a^\dagger a)}e^{\tanh\theta(-\tilde{a}a)}|0,\tilde{0}\rangle, \qquad (2.183)
\end{aligned}$$

donde se ha usado la relación de conmutación

$$[\tilde{a},\tilde{a}^\dagger]=1,$$

y

$$|0,\tilde{0}\rangle = e^0|0,\tilde{0}\rangle = e^{f(\theta)\tilde{a}^\dagger\tilde{a}}|0,\tilde{0}\rangle,$$

siendo $f(\theta)$ una función arbitraria de θ. Con la identidad [27]

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh\alpha B}e^{\ln\cosh\alpha C}e^{\tanh\alpha A}, \qquad (2.184)$$

e identificando

$$\begin{aligned}
A &= -\tilde{a}a, \\
B &= a^\dagger\tilde{a}^\dagger, \\
C &= [A,B] = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a, \\
\alpha &= \theta = \theta(\beta),
\end{aligned}$$

[27] Las propiedades de la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) se encuentran en [10]

la ecuación (2.183) puede ser escrita como [28]

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0,\tilde{0}\rangle, \tag{2.185}$$

donde se define el operador Hermítico

$$G(\theta) = G(\theta)^{\dagger} = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}). \tag{2.186}$$

$\theta(\beta)$ es un parámetro real que depende de la temperatura, definido en (2.178) y (2.179), de tal forma que el operador $U(\theta) = e^{-iG(\theta)}$ sea unitario, el cual genera el vacío térmico a partir del espacio doblado de Hilbert. La transformación que liga el estado de vacío térmico al vacío que se duplica a temperatura nula se denomina *transformación de Bogoliubov*, dada por la ecuación (2.185), y el generador de esta transformación, ecuación (2.186), se denota *operador de Bogoliubov*[29].

A partir de la expresión (2.186) se encuentran los siguientes conmutadores utiles

$$\begin{aligned}
[G,a] &= (-i\theta(\beta))\big[(\tilde{a}a - a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}),a\big] = (-i\theta(\beta))\big([\tilde{a}a,a] - [a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger},a]\big)\\
&= -(-i\theta(\beta))[a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger},a] = -(-i\theta(\beta))[a,a^{\dagger}]\tilde{a}^{\dagger} = -i\theta(\beta)\tilde{a}^{\dagger},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[G,\tilde{a}] &= (-i\theta(\beta))\big[(\tilde{a}a - a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}),\tilde{a}\big] = (-i\theta(\beta))\big([\tilde{a}a,\tilde{a}] - [a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger},\tilde{a}]\big)\\
&= -(-i\theta(\beta))[a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger},\tilde{a}] = -(-i\theta(\beta))[\tilde{a},\tilde{a}^{\dagger}]a^{\dagger} = -i\theta(\beta)a^{\dagger},
\end{aligned}$$

de la misma manera se obtiene

$$[G,a^{\dagger}] = -i\theta(\beta)\tilde{a}, \qquad \text{y} \qquad [G,\tilde{a}^{\dagger}] = -i\theta(\beta)a.$$

Con lo anterior, se puede ver que los operadores de destrucción a temperatura finita son también generados por transformaciones unitarias, es decir, transformaciones de Bogoliubov, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
a(\beta) &= e^{-iG}ae^{iG}\\
&= a - \frac{i}{1!}[G,a] + \frac{(i)^2}{2!}[G,[G,a]] - \frac{(i)^3}{3!}[G,[G,[G,a]]] + \frac{(i)^4}{4!}[G,[G,[G,[G,a]]]] + ...\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n}(\beta)}{2n!}\right)a - \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!}\right)\tilde{a}^{\dagger}\\
&= \cosh\theta(\beta)a - \operatorname{senh}\theta(\beta)\tilde{a}^{\dagger}\\
&= u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^{\dagger},
\end{aligned} \tag{2.187}$$

[28] Esta manera compacta de representar el vacío térmico es clave para definir el vacio de Minkowski $|0\rangle_M$, para el observador FREFOS. Para la variedad de Kruskal de manera similar se define el vacío de Hartle-Hawking $|0\rangle_H$ asociado al observador FIDO.

[29] La transformación de Bogoliubov es una transformación lineal de los operadores escalera $a^{\dagger}$ y a, la cual preserva las relaciones de conmutación entre estos.

y

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\beta) &= e^{-iG}\tilde{a}e^{iG} \\
&= \tilde{a} - \frac{i}{1!}[G,\tilde{a}] + \frac{(i)^2}{2!}[G,[G,\tilde{a}]] - \frac{(i)^3}{3!}[G,[G,[G,\tilde{a}]]] + \frac{(i)^4}{4!}[G,[G,[G,[G,\tilde{a}]]]] + ... \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n}(\beta)}{2n!}\right)\tilde{a} - \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n+1}(\beta)}{(2n+1)!}\right)a^{\dagger} \\
&= \cosh\theta(\beta)\tilde{a} - \operatorname{senh}\theta(\beta)a^{\dagger} \\
&= u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^{\dagger},
\end{aligned} \tag{2.188}$$

donde se ha usado la identidad

$$e^{-iB}Ae^{iB} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\{A^n, B\}, \tag{2.189}$$

con $C_n = \{A^n, B\}$ el conmutador generalizado. Es decir

$$C_0 = B, C_1 = [A,B], C_2 = [A,[A,B]], ... \quad .$$

De igual manera se obtiene los conjugados Hermíticos que son los operadores de creación dados por

$$a^{\dagger}(\beta) = e^{-iG}a^{\dagger}e^{iG} = u(\beta)a^{\dagger} - v(\beta)\tilde{a}, \tag{2.190}$$

$$\tilde{a}^{\dagger}(\beta) = e^{-iG}\tilde{a}^{\dagger}e^{iG} = u(\beta)\tilde{a}^{\dagger} - v(\beta)a. \tag{2.191}$$

Invirtiendo las ecuaciones (2.187),(2.188),(2.190), y (2.191) se encuentran a y $a^{\dagger}$ en términos de los operadores térmicos así

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^{\dagger}(\beta), \tag{2.192}$$

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^{\dagger}(\beta), \tag{2.193}$$

$$a^{\dagger} = u(\beta)a^{\dagger}(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \tag{2.194}$$

$$\tilde{a}^{\dagger} = u(\beta)\tilde{a}^{\dagger}(\beta) + v(\beta)a(\beta). \tag{2.195}$$

De esta forma se puede escribir el operador número $N = a^{\dagger}a$ en términos de los operadores de creación y destrucción térmicos como

$$\begin{aligned}
N &= [u(\beta)a^{\dagger}(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)][u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^{\dagger}(\beta)] \\
&= u^2(\beta)a^{\dagger}(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta)[a^{\dagger}(\beta)\tilde{a}^{\dagger}(\beta) + \tilde{a}(\beta)a(\beta)] + v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^{\dagger}(\beta).
\end{aligned} \tag{2.196}$$

Definidos los operadores de creación y destrucción térmicos, se puede mostrar que el vector de estado $|0,\tilde{0}\rangle$ es realmente el vacío térmico, partiendo de la expresión (2.187) se obtiene

$$a(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG}ae^{iG}|0,\tilde{0}\rangle = e^{-iG}ae^{iG}e^{-iG}|0,\tilde{0}\rangle = e^{-iG}a|0,\tilde{0}\rangle = 0, \tag{2.197}$$

y

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = e^{-iG}\tilde{a}e^{iG}|0,\tilde{0}\rangle = e^{-iG}\tilde{a}e^{iG}e^{-iG}|0,\tilde{0}\rangle = e^{-iG}\tilde{a}|0,\tilde{0}\rangle = 0, \tag{2.198}$$

donde se usaron las transformaciones de Bogoliubov dadas por las expresiones (2.185), (2.187) y (2.188), para obtener el vacío y los operadores de destrucción térmicos en términos de los respectivos operadores a temperatura nula. Por lo tanto, se verifica que el estado $|0(\beta)\rangle$ es aniquilado por operadores de destrucción térmicos. Así, se identifica el estado $|0(\beta)\rangle$ como el estado de vacío térmico.
El promedio estadístico del operador número puede ser ahora calculado a partir de la expresión (3.50)

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle &= \langle 0(\beta)|a^\dagger a|0(\beta)\rangle \\
&= \langle 0(\beta)|[u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)][u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)]|0(\beta)\rangle \\
&= \langle 0(\beta)|u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta)[a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \tilde{a}(\beta)a(\beta)] + v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle \\
&= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1} = f_B(\beta).
\end{aligned} \tag{2.199}$$

Sólo el último término sobrevive cuando se hace el sandwich por $|0(\beta)\rangle$, debido a lo establecido en las expresiones (2.197) y (2.198). Además, se observa que la construcción de Umezawa-Takahashi conduce a un resultado conocido de la mecánica estadística que es la función de distribución de Bose-Einstein que aparece en las ecuaciones (2.178) y (2.179).
Finalmente, el espacio de Fock se construye a través de aplicaciones sucesivas de los operadores de creación térmicos del vacío térmico

$$|0(\beta)\rangle, \quad a^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, \quad \tilde{a}^\dagger(\beta)|0(\beta)\rangle, ... \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{m!}}(a^\dagger(\beta))^n(\tilde{a}^\dagger(\beta))^m|0(\beta)\rangle, ... \quad . \tag{2.200}$$

Sin embargo, se debe notar que los estados dados por (2.200) no son los estados propios de las Hamiltonianas de los sistemas físico y fictício. Por lo tanto se puede construir una nueva Hamiltoniana $\hat{H}$ envolviendo H y $\tilde{H}$ de la cual éstos son auto estados. Como puede derivarse de (2.193) y (2.195), donde

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^\dagger\tilde{a} &= [u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta)][u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] \\
&= u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + u(\beta)v(\beta)[\tilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + a(\beta)\tilde{a}(\beta)] + v^2(\beta)a(\beta)a^\dagger(\beta).
\end{aligned} \tag{2.201}$$

Considerando la expresión (2.201) y la relación (2.196), se obtiene

$$\begin{aligned}
a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} &= \Big(u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta) + u(\beta)v(\beta)[a^\dagger(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + \tilde{a}(\beta)a(\beta)] + v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)\Big) \\
&\quad - \Big(u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + u(\beta)v(\beta)[\tilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) + a(\beta)\tilde{a}(\beta)] + v^2(\beta)a(\beta)a^\dagger(\beta)\Big) \\
&= u^2(\beta)a^\dagger(\beta)a(\beta) + v^2(\beta)\tilde{a}(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) - u^2(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)a^\dagger(\beta) - v^2(\beta)a(\beta)a^\dagger(\beta) \\
&= a^\dagger(\beta)a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta).
\end{aligned} \tag{2.202}$$

Así, se puede escribir esta nueva Hamiltoniana como

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) = \omega(a^\dagger(\beta)a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta)\tilde{a}(\beta)). \tag{2.203}$$

Lo anterior muestra que la Hamiltoniana total es invariante por transformaciones de Bogoliubov, luego, el generador es conservado

$$[G, \hat{H}] = 0. \tag{2.204}$$

Esta Hamiltoniana es la que gobierna la dinámica del sistema combinado real-ficticio. Además la combinación $H - \tilde{H} = \hat{H}$ es diagonal, luego

$$\hat{H}|0(\beta)\rangle = 0, \tag{2.205}$$

$$\hat{H}a^\dagger|0(\beta)\rangle = \omega a^\dagger|0(\beta)\rangle, \tag{2.206}$$

$$\hat{H}\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle = -\omega\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle, \tag{2.207}$$

$$\hat{H}a^\dagger\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle = 0. \tag{2.208}$$

Resumiendo, el objetivo de la DCT es generar la mecánica estadística conocida introduciendo un estado de vacío $|0(\beta)\rangle$ con unas características específicas, es decir, determinar cómo debe ser el estado para que al calcular el valor esperado de una variable dinámica se genere la mecánica estadística. Por lo tanto, este estado además de ser térmico por definición, debe ser de *entanglement* o entrelazado.[30]
Todo lo anterior constituye la plataforma sobre la cual se definirá el estado base de la variedad de Minkowski que estará representado por un estado entanglado (capítulo 4). Es de resaltar que desde el punto de vista matemático, la DCT es una buena construcción para generar la mecánica estadística.

[30] En principo un estado de entanglement tiene dos características: además de correlación, obliga a que el sistema se parta en dos espacialmente y construye un estado que correlaciona cuánticamente dos estados de subregiones de un sistema.

Capítulo 3

Cascarón negro

El cascarón negro se plantea como un modelo de juguete en el cual una cáscara delgada hecha de materia colapsa bajo la influencia de su propio radio gravitacional [55, 57], de tal manera que sólo se consideran los aspectos más esenciales del colapso gravitacional, analizando un modelo ideal que reduce la complejidad del problema. En este caso la complejidad matemática del problema se reduce drásticamente, y como consecuencia, nos vemos motivados a el uso de herramientas analíticas principalmente. En el modelo del cascarón negro, se asume la contracción de un cascarón esférico simétrico que parte de alguna distancia radial y conduce a la reducción del radio del cascarón con respecto a un observador FIDO localizado en el infinito. Como el cascarón se va encogiendo, la evolución es descrita por un proceso de colapso Oppenheimer-Snyder [2].

En este capítulo se analiza la dinámica de la superficie, donde se localiza el cascarón delgado, se considera la norma del vector ortogonal a la superficie y se investigan las condiciones bajo las cuales aparece una superficie critica; es decir, el radio en el cual la norma del vector desaparece y ocurre un intercambio entre coordenadas espaciales y temporales. Este método lleva a encontrar todas las superficies críticas que pueden aparecer durante la evolución del cascarón. Por ejemplo, este procedimiento predice la existencia de un horizonte que aparece cuando el radio del cascarón iguala su radio gravitacional. Además, se verá que en general, existe una segunda superficie crítica con un radio que es siempre más grande que el radio gravitacional del cascarón. Para investigar las propiedades de las superficies críticas, se usa el formalismo de superficies atrapadas y cuasi-horizontes locales. Así, se muestra que una vez el cascarón alcanza su radio gravitacional, las coordenadas de espacio y tiempo intercambian sus roles y la correspondiente superficie es una superficie nula con expansión nula la cual se interpretará como un horizonte aparente. La segunda superficie corresponde a una superficie atrapada exterior marginalmente que se puede asociar con un horizonte cuasi-local. Se estudian las configuraciones de esas superficies desde el punto de vista de la gravedad y la termodinámica, donde se mostrará que en ambos casos se encuentran resultados que son razonables desde el punto de vista físico.
Se verá que existe un caso particular en el cual ningún horizonte aparece durante la evolución del cascarón, cuyo estado final corresponde a una singularidad de curvatura. A ésta configuración en particular se denominará cascarón desnudo.

3.1. Dinámica

En esta sección se sigue el formalismo de Darmois-Israel [57, 60–63] (sección 2.2.2), en el cual el punto de partida es un cascarón delgado simétrico esféricamente descrito por medio de una hipersuperfie Σ con coordenadas $\xi^a = \{\tau, \theta, \varphi\}$. El elemento de línea correspondiente sobre Σ se asume para ser de la forma[1]

$$ds^2_\Sigma = -d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2. \tag{3.1}$$

Así, Σ divide el espacio-tiempo en dos regiones V_-, interior a Σ, y V_+ exterior a Σ. Se asume que el cascarón delgado es descrito por medio de un tensor momento-energía S^{ab}.
Para describir el espacio-tiempo exterior, se asume que la región interior V_- corresponde a el espcio-tiempo de Minkowski

$$ds^2_- = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{3.2}$$

Sobre Σ, es conveniente introducir nuevas coordenadas $T(\tau)$ y $R(\tau)$ tal que

$$t = T(\tau), \quad dt = \dot{T}d\tau, \qquad r = R(\tau), \quad dr = \dot{R}d\tau, \tag{3.3}$$

donde τ es el tiempo propio y el punto representa la derivada con respecto a τ. Así, la métrica de Minkowski interior a Σ llega a ser

$$ds^2_-|_\Sigma = -(\dot{T}^2 - \dot{R}^2)d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2. \tag{3.4}$$

Además, se asumirá que el espacio-tiempo exterior corresponde al espacio.tiempo de Schwarzschild

$$ds^2_+ - fdt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega^2, \quad f = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{3.5}$$

el cual sobre Σ en las coordenadas (3.3) llega a ser

$$ds^2_+|_\Sigma = -\left(F\dot{T}^2 - \frac{\dot{R}^2}{F}\right)d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2, \quad F = 1 - \frac{2M}{R}. \tag{3.6}$$

Para garantizar que el espacio-tiempo entero se define bien como una variedad diferencial, se pueden imponer las condiciones de juntura de Darmois (sección 2.2.2)

$$[h_{ab}] = h^+_{ab} - h^-_{ab} = 0, \quad [K_{ab}] = K^+_{ab} - K^-_{ab} = 0, \tag{3.7}$$

donde $h^\pm_{ab}$ es la métrica inducida sobre Σ por la métrica $V_\pm$ y $K^\pm_{ab}$ es la correspondiente curvatura extrínseca, respectivalmente. La primera condición implica simplemente que si $ds^2_+|_\Sigma = ds^2_-|_\Sigma$, es decir

$$\dot{T}^2 - \dot{R}^2 = F\dot{T}^2 - \frac{\dot{R}^2}{F}. \tag{3.8}$$

[1] Los cálculos detallados de los resulatdops de este capitulo se encuentra en el apéndice A

En general, es difícil que se satisfaga la segunda condición de la ecuación (3.7). Una versión menos extricta de esta condición fue propuesta por Israel y consiste en asumir que la función de salto para la curvatura extrínseca, $[K_{ab}] \neq 0$, determina un cascarón delgado con tensor momento-energía S_{ab}, el cual se define de acuerdo con (2.88)como

$$S_{ab} = -\frac{1}{8\pi}([K_{ab}] - [K]h_{ab}), \tag{3.9}$$

donde $K = K^{ab}_{ab}$. Por simplicidad, se permite considerar ela caso de un cascarón de polvo $S_{ab} = \sigma u_a u_b$, donde σ es la densidad superficial del polvo y u_a es la 3-velocidad del cascarón. Así es sencillo calcular la curvatura extrínseca de V_+ y V_- y el lado derecho de la ecuación (3.9), el cual determina el comportamiento de la densidad superficial σ. El resultado final se representa como

$$R\left(\sqrt{1+\dot{R}^2} - \sqrt{F+\dot{R}^2}\right) = m = 4\pi\sigma R^2, \tag{3.10}$$

donde m es una constante de integración. Esta ecuación se puede interpretar como la ecuación de movimiento del cascarón. Un reordenamiento de (3.10) lleva a la expresión

$$M = m\sqrt{1+\dot{R}^2} - \frac{m^2}{2R}, \tag{3.11}$$

la cual se puede interpretar como la representación de la conservación de la energía durante el movimiento del cascarón. En efecto, el primer término en el lado derecho representa una cantidad relativista, la cual incluye la energía en reposo y la energía cinética. Entonces, el segundo término se puede interpretar como la energía de enlace del sistema. Como consecuencia, M representa la masa gravitacional del cascarón y m su masa en reposo [55]. La ecuación de movimiento (3.11) se reescribe como

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{M}{m} + \frac{m}{2R} - 1\right)\left(\frac{M}{m} + \frac{m}{2R} + 1\right). \tag{3.12}$$

Si el lado derecho de esta ecuación debe ser positivo, es decir, si $m \geq M$ el radio del cascarón puede tomar valores sólo dentro del intervalo

$$R \in \left(0, \frac{m^2}{2m - 2M}\right], \tag{3.13}$$

con los siguientes límites

$$\begin{aligned} &\text{para} \quad m \to M \ \Rightarrow R \in (0, \infty), \\ &\text{para} \quad m = 2M \Rightarrow R \in (0, 2M], \\ &\text{para} \quad m \to \infty \Rightarrow R \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por otra parte, si $m < M$, durante la evolución del cascarón su radio puede tener cualquier valor positivo, $R \in (0, \infty)$. Así, se ve que el valor de la masa en reposo m es importante para determinar el movimiento del cascarón. El límite inferior $R \to 0$ se desprende de la interpretación de la función $R(\tau)$

como el radio del cascarón, y como se demostrará, del hecho que corresponde a una singularidad de curvatura.

El resultado de integrar la ecuación de movimiento (3.11) se muestra en la figura 3.1. El resultado se representa en términos del tiempo propio τ y el tiempo coordenado t. Como se espera, en términos del tiempo propio τ, el cascarón alcanza el origen de coordenadas en un tiempo finito, mientra para un observador en el infinito el cascarón nunca alcanza el radio $R = 2M$.

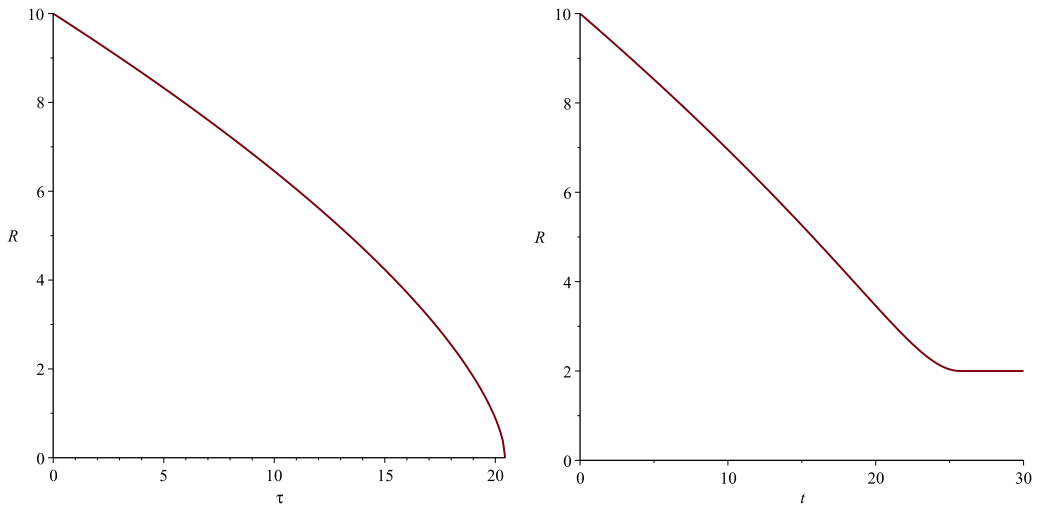

Figura 3.1: Radio del cascarón en función del tiempo propio τ y el tiempo coordenado t para masa particulares de $M = 1$ y $m = 1$.

3.2. Superficies críticas y horizontes

En un espacio-tiempo el horizonte usualmente se define en términos de los vectores de Killing. Por ejemplo, si el espacio-tiempo es estático con un vector de Killing ξ^μ, la condición $\xi^\mu \xi_\mu = 0$ determina una hipersuperficie la cual se interpreta como el horizonte. En el caso del cascarón, el correspondiente espacio-tiempo no tiene un vector de Killing temporal y así no es posible usar la anterior definición para encontrar el horizonte. En la próxima sección se analizará esto.

En esta sección, se buscarán superficies críticas que se asemejen a las propiedades de un horizonte. Para este fin, se considerará un vector dirigido radialmente $U^\mu = (\dot{T}, \dot{R}, 0, 0)$ con norma

$$U^2 = -F\dot{T}^2 + \frac{\dot{R}^2}{F}. \tag{3.15}$$

El comportamiento de la norma de U^2 a lo largo de la coordenada radial contiene la información alrededor de la superficie ortogonal a éste. Por ejemplo, las localizaciones para las cuales la norma desaparece se pueden interpretar como indicadores de la presencia de una superficie nula, la cual es

una de las propiedades de los horizontes. Para hacerlo más específico, se considera el caso en el cual la norma es temporal cuando el cascarón se encuentra en reposo $\dot{R} = 0$, es decir $F\dot{T}^2 = 1$. Esta es una condición coordenada pura que determina como la coordenada de tiempo T depende de la coordenada espacial R. Por simplicidad, se asume que esta condición es válida durante todo el trayecto a lo largo de la coordenada radial y así la norma llega a ser

$$U^2 = -1 + \frac{\dot{R}^2}{F}, \tag{3.16}$$

la cual se puede expresar como

$$U^2 = \left[-2 + \frac{2M}{R} + \left(\frac{M}{m} + \frac{m}{2R}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1}. \tag{3.17}$$

En la figura 3.2, se ilustra el comportamiento de U^2. Se observa que hay dos puntos críticos a saber,

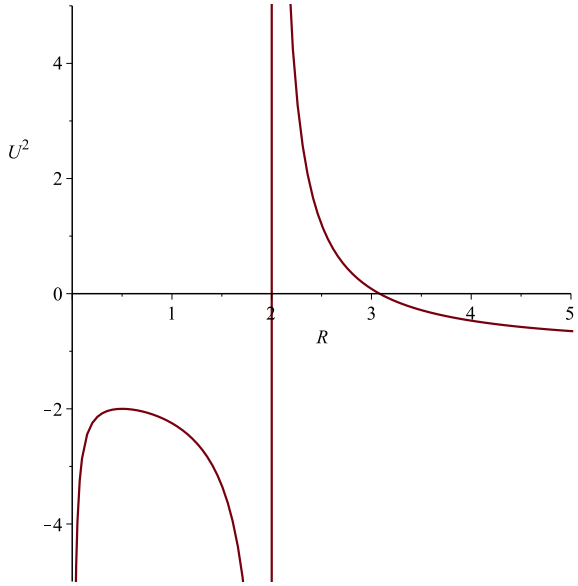

Figura 3.2: Norma de la 4-velocidad del observador, de acuerdo a la ec.(3.17) para las masas particulares $M = 1$ y $m = 1$.

donde la norma desaparece, $R = R_{gr} = 2M$ y $R = R_h$. El valor anterior se obtiene de la ecuación algebraica

$$4(2m^2 - M^2)R^2 - 12m^2MR - m^4 = 0, \tag{3.18}$$

para la cual se encuentra la solución positiva

$$R_h = \frac{m^2(3M + \mathcal{M})}{2(2m^2 - M^2)}, \qquad \mathcal{M} = \sqrt{2m^2 + 8M^2}. \tag{3.19}$$

en ambos casos, la superficie se determina por la ecuación $R = constante$ tal que el correspondiente vector normal es $n_\mu = (0, 1, 0, 0)$ con norma $n^2 = g^{RR} = 1 - 2M/R$. De lo anterior se sigue que la superficie $R = R_{gr} = 2M$ es la única superficie nula para la cual, de acuerdo con el comportamiento de la norma U^2 alrededor de $R = 2M$, asemeja las propiedades de un horizonte de eventos.
El radio R_h en la expresión (3.19) se da en términos de la masa gravitacional M y la masa en reposo m. El comportamiento de esta cantidad se ilustra en la figura 3.3, donde se identifican dos puntos especiales. Primero, para $m = M/\sqrt{2}$ el radio diverge, indicando que R_h sólo existe para valores de $m > M/\sqrt{2}$. Para valores de masa en reposo $m < M/\sqrt{2}$, la ecuación (3.19) indica que ningún radio existe ($R_h < 0$). El segundo punto, $R_h = 2M$ con $m = 2M$, es un valor mínimo que corresponde al radio de Schwarzschild.
En el caso particular de un cascarón que parte del reposo desde el infinito ($\dot{R} = 0, R \to \infty$), a partir de

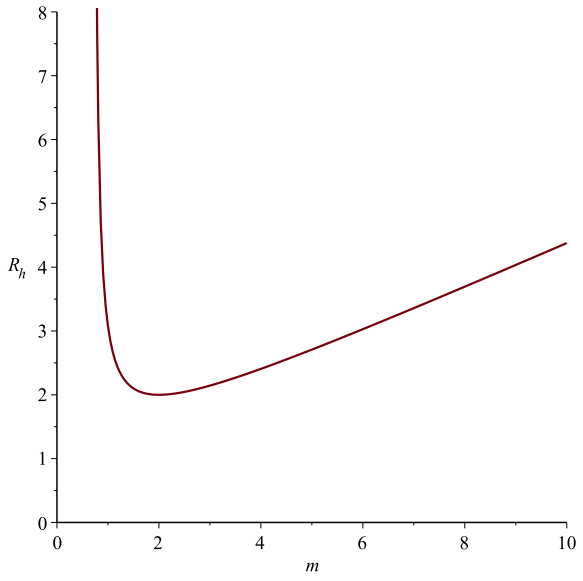

Figura 3.3: Localización del radio del horizonte R_h en terminos de la masa m. Se ha elegido $M = 1$, lo que significa que R_h y m se dan en multiplos de M.

la ecuación de movimiento (3.11), se obtiene que la masa en reposo y la masa gravitacional coinciden,

$m = M$, y así la ecuación para el radio R_h se reduce a (ver apéndice A.1.4)

$$R_h = \frac{M}{2}(3 + \sqrt{10}). \tag{3.20}$$

La figura (3.2) muestra la localización del radio R_h de acuerdo con la ecuación (3.19). Además se observa que en $R = R_h$ la norma cambia su signo. Este es un efecto se manifiesta exactamente en el horizonte de los agujeros negros. En consecuencia, la supericie con radio R_h denota la localización particular, donde toma lugar un intercambio entre las coordenadas temporales y espaciales. Sin embargo, esta no es una superficie nula, la cual es una propiedad del horizonte de eventos. No obstante, como se verá más adelante, ésta puede asociarse con la presencia de un horizonte cuasi-local.

De acuerdo con los resultados anteriores un cascarón negro consiste de una singularidad central con uno o dos horizontes, los cuales se localizan como:

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad m < \frac{M}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{un horizonte en} \quad R = 2M, \\ &\text{Si} \quad m \geq \frac{M}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{dos horizontes en} \quad R = 2M \quad \text{y} \quad R = R_h. \end{aligned} \tag{3.21}$$

El horizonte interno localizado en $R = 2M$ siempre está presente, excepto en el caso $m = 2M$, que se considerará más adelante. El horizonte exterior localizado en $R = R_h > 2M$ no siempre está presente; su existencia y ubicación depende del valor de la masa en reposo m. De la ec.(3.19) se tiene que para el valor $m = 2M$, el radio del horizonte exterior R_h se reduce a su mínimo valor $R_h = 2M$, es decir, este coincide con el horizonte interior localizado en el radio de Schwarzschild $R_S = 2M$. Lo anterior se puede interpretar como el caso degenerado en el cual los dos horizontes coinciden. Sin embargo, un análisis detallado como se verá más adelante, muestra que en este caso ningún horizonte existe.

3.3. Cascarón desnudo

En esta sección, se considera en una configuración particular que puede existir solo para una valor muy específico de la masa en reposo y la masa gravitacional. A partir de la expresión para el radio del horizonte dinámico (3.19), se tiene para el valor particular $m = 2M$, que el radio del horizonte exterior R_h se reduce a un valor mínimo $R_h = 2M$, es decir, éste coincide con el horizonte interior localizado en el radio de Schwarzschild $R_S = 2M$. Lo anterior se puede interpretar como el caso degenerado en el cual los dos horizontes coinciden.

Sin embargo, un cálculo sencillo de la norma de la 4-velocidad U^2 lleva a la expresión

$$U^2(m = 2M) = -\frac{2M + 7R}{4R}, \tag{3.22}$$

la cual no tiene ceros para cualquier valor positivo de R. Lo anterior significa que durante la evolución de un cascarón particular, para el cual su masa en reposo es dos veces su masa gravitacional, ningún

horizonte se forma. Aún más, el estado final de evolución del cascarón corresponde a una singularidad de curvatura. El cálculo del escalar de Kretschmann para la métrica del cascarón (3.1) lleva a la expresión (ver apéndice A.1.5)

$$K = R_{abcd}R^{abcd} = 4\frac{1 + 2\dot{R}^2 + \dot{R}^4 + 2\ddot{R}R^2}{R^4}. \tag{3.23}$$

Donde se observa que la única singularidad ocurre cuando $R \to 0$, es decir, cuando el radio del cascarón se encoge a su valor mínimo. No existe ninguna otra singularidad durante el colpaso del cascarón mientras su velocidad y aceleración permanecen finitas.

La configuración particular anterior descrita en la cual una singularidad de curvatura se forma, como el estado final de evolución de un cascarón delgado, en la cual ningún horizonte se forma en su proceso de evolución se denomina cascarón desnudo. Esta existe sólo para un valor específico de la masa en reposo. Para cualquier otro valor de masa en reposo, el colapso del cascarón se caracteriza por la apariencia de horizontes, implicando que la configuración correspondiente es un cascarón negro.
A partir de la ecuación de movimiento (3.12), se tiene que en el caso de un cascarón desnudo la dinámica se rige por la ecuación

$$\dot{R} = -\sqrt{\left(\frac{M}{R} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{M}{R} + \frac{3}{2}\right)}, \tag{3.24}$$

donde se escoge el signo menos debido a que se está describiendo un proceso de un cascarón en colapso. El movimiento se constriñe dentro del intervalo $R \in (0, 2M]$. Esto significa que el cascarón puede comenzar colapsando a cualquier $R \leq 2M$, donde $R = 2M$ no es un horizonte, y alcanzará la singularidad en un tiempo propio finito. Cualquier observador dentro de la distancia radial $R \leq 2M$ puede comunicarse con un observador infinitesimalmente cerca a la singularidad central.

3.4. Horizontes cuasi-locales

Como se mostró en la sección (3.2), durante el colapso de un cascarón pueden aparecer superficies especiales alrededor de las cuales las coordenadas de tiempo y espacio intercambian sus roles. La interpretación de esas superficies como horizontes de eventos es problemática debido a que ellas están definidas como propiedades globales del espacio-tiempo. La evolución física de un horizonte global es problemática, si no imposible. Por esta razón, una aproximación alternativa se hace necesaria en la cual se involucren las propiedades del espacio-tiempo. El formalismo de horizontes cuasi-locales se fundamenta sobre la base del concepto de superficies atrapadas, que se remonta a la formulación de los teoremas de singularidad demostrados por Penrose [64] y Hawking-Ellis [47]. En el cual, las superficies atrapadas se definen en términos de las expansiones de los vectores ortogonales nulos a las superficies.
Para el caso del cascarón, todas las superficies a estudiar tiene simetría esférica, lo cual permitirá presentar todos los cálculos de manera explícita. Por lo tanto, el objetivo se centra en el comportamiento de las superficies críticas descritas en la sección (3.2), las cuales corresponden a 2-esferas con $r = constante$. Para ser más especificos, se consideran los vectores l^α y N^α con $l_\alpha N^\alpha = -1$, los cuales son orotogonales

a la superficie Σ del cascarón. Entonces, las expansiones de l y N estan definidas como [65]

$$\Theta_{(l)} = q^{\alpha\beta}\nabla_\alpha l_\beta, \qquad \Theta_{(N)} = q^{\alpha\beta}\nabla_\alpha N_\beta, \tag{3.25}$$

donde las componentes de la métrica $q^{\alpha\beta}$ se definen como

$$q^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + l^\alpha N^\beta + N^\alpha l^\beta. \tag{3.26}$$

Para determinar los vectores nulos l y N, se introducen los vectores ortonormales auxiliares n^α y r^α, los cuales se obtienen representando la métrica del espacio-tiempo $g^{\alpha\beta}$ en términos de la métrica inducida h^{ab} como [55]

$$g^{\alpha\beta} = n^\alpha n^\beta + h^{ab} e^\alpha_a e^\beta_b, \tag{3.27}$$

con

$$n_\alpha n^\alpha = 1, \qquad e^\alpha_a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^a}, \tag{3.28}$$

donde la métrica inducida h_{ab} se usa para determinar el elemento de línea sobre la hipersuperficie del cascarón Σ, es decir,

$$ds^2|_\Sigma = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|_\Sigma = g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b d\xi^a d\xi^b = h_{ab} d\xi^a d\xi^b. \tag{3.29}$$

Un cálculo sencillo usando la métrica exterior (3.5) lleva a la siguiente expresión para las componentes del vector n (ver apéndice A.3)

$$n^\alpha = \frac{1}{(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)^{1/2}} \left(\frac{\dot{R}}{F}, F\dot{T}, 0, 0 \right). \tag{3.30}$$

Además, si se introduce un vector r^α tal que $r_\alpha r^\alpha = -1$ y $n_\alpha r^\alpha = 0$. Entonces, se obtiene

$$r^\alpha = \frac{1}{(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)^{1/2}} (\dot{T}, \dot{R}, 0, 0). \tag{3.31}$$

Finalmente, los vectores nulos se definen como

$$l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^\alpha + n^\alpha), \qquad N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^\alpha - n^\alpha), \tag{3.32}$$

explícitamente son

$$l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)^{1/2}} \left(\frac{\dot{R}}{F} + \dot{T}, F\dot{T} + \dot{R}, 0, 0 \right), \tag{3.33}$$

$$N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)^{1/2}} \left(\dot{T} - \frac{\dot{R}}{F}, \dot{R} - F\dot{T}, 0, 0 \right), \tag{3.34}$$

los cuales satisfacen las condiciones $N_\alpha N^\alpha = l_\alpha l^\alpha = 0$ y $l_\alpha N^\alpha = -1$. Esas expresiones se introducen en (3.26) para las componentes de la métrica q y así obtener $q_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(0, 0, r^2, r^2 \operatorname{sen}^2\theta)$. entonces las

expansiones (3.25) se calculan y se obtiene (ver apéndice A.3)

$$\Theta_{(l)} = 0, \qquad \Theta_{(N)} = 0, \tag{3.35}$$

indicando que las superficies con $r = constante$ son superfices atrapadas exteriores marginalmente [66]. Un resultado similar se obtiene para el cálculo de las expansiones al usar la métrica interna (ver apéndice A.3).
Con lo anterior se pueden identificar las superficies críticas obtenidas en la sección (3.2). La superficie $r = 2M$, es así una superficie nula con expansión nula la cual corresponde a un horizonte aparente [67]. De otra parte, la superficie $r = R_h$, la cual no es nula pero se encuentra acompañada por un intercambio entre las coordenadas espacio y tiempo, es una superficie atrapada exterior marginalmente, y se puede interpretar como lo que correspondería a un horizonte cuasi-local.

3.5. Termodinámica del cascarón negro

En la sección (3.2), se encontró que durante la evolución del cascarón, existen dos superficies críticas que se interpretan como horizontes cuasi-locales. La primera aparece cuando el radio del cascarón iguala su radio gravitacional ($R = 2M$), es decir, el correspondiente al radio de Schwarzschild R_S del espacio-tiempo exterior. El radio R_h de la segunda superficie crítica siempre es más grande que el radio gravitacional del cascarón y su valor explícito depende de los valores de la masa gravitacional y la masa en reposo.
De otro parte, del estudio de un cascarón delgado estático se ha demostrado que si se asume la validez de la primera ley de la termodinámica entre los parámetros del cascarón y la correspondiente ecuación de estado, es posible derivar una expresión general para la entropía [68–70]. Si el radio del cascarón coincide con su radio gravitacional, donde un horizonte existe, la entropía se reduce a la entropia de Bekenstein-Hawking $S_{BH} = \frac{1}{4}A$, donde el área del horizontes es $A = 4\pi R^2$.

En esta parte se mostrará que la relación entropía-área se mantiene para todas las superficies críticas con propiedades de horizonte.
De acuerdo con (3.21), hay dos radios diferentes para los cuales un cascarón negro puede existir. El primer caso, para un cascarón con una masa en reposo pequeña ($m < M/\sqrt{2}$) y un radio $R = 2M$, la entropía es

$$S = 4\pi M^2, \tag{3.36}$$

la cual es tambien la entropía de un agujero negro de Schwarzschild, es decir, las propiedades termodinámicas de un cascarón negro y un agujero negro coinciden en este caso. En particular, para valores positivos de la masa gravitacional la temperatura $T = \frac{1}{8\pi M}$ siempre es positiva y la capacidad calorífica $C = -\frac{1}{M}$ siempre es negativa, indicando que el cascarón es inestable.
Como se mostrará más adelante, el resultado (3.36), se mantiene para el caso dinámico, que está asociado al radio R_h (3.19).

3.5.1. Caso estático de acuerdo con Martínez-Lemos

La primera ley de la termodinámica establece

$$TdS = dE + pdA. \tag{3.37}$$

La ecuación de movimiento para el cascarón es

$$M = m\sqrt{1+\dot{R}^2} - \frac{m^2}{2R}. \tag{3.38}$$

con M la masa gravitacional y m la masa en reposo. Para el caso estático, $\dot{R} = 0$

$$M = m - \frac{m^2}{2R}, \tag{3.39}$$

la cual al reescribirse es

$$m - R = \pm R\sqrt{1 - \frac{2M}{R}},$$

con

$$m = R(1-k), \tag{3.40}$$

la energía cuasi-local, donde $k = (1 - \frac{r_+}{R})^{1/2}$ y $r_+ = 2M$ es el radio del horizonte.
De acuerdo con Israel [71](ver apéndice A.4) la presión del cascarón para el caso estático es:

$$p = \frac{m^2}{16\pi R^2(R-m)}.$$

Al reemplazar (3.40) en la expresión anterior se obtiene para la presión

$$p = \frac{(1-k)^2}{16\pi Rk}. \tag{3.41}$$

Al identificar $m = E$, $A = 4\pi R^2$ a partir de (3.37) se obtiene

$$\begin{aligned}
TdS &= dm + pdA, \\
&= d(R(1-k)) + \frac{(1-k)^2}{16\pi Rk} 8\pi R dR, \\
&= dR(1-k) - R\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{r_+ dR}{R^2} - \frac{dr_+}{R}\right)\right] + \frac{(1-k)^2}{2k}, \\
&= \left[(1-k) - \frac{r_+}{2kR} + \frac{(1-k)^2}{2k}\right] dR + \frac{dr_+}{2k},
\end{aligned}$$

donde el término que acompaña a dR se anula y se obtiene

$$TdS = \frac{dr_+}{2k}. \tag{3.42}$$

Al reescribir la primera ley de la termodinámica en términos de $\beta = 1/T$, se obtiene

$$S = \beta m + \beta p A, \tag{3.43}$$

lo cual conduce

$$dS = (m + pA)d\beta + \beta dm + p\beta dA,$$

donde se cumple

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial A}\right)_m = \left(\frac{\partial \beta p}{\partial m}\right)_A \tag{3.44}$$

Siguiendo a Martínez [68] bajo un cambio de variable de (m, R) a (r_+, R) se obtiene a partir de (3.42)

$$S = \frac{\beta r_+}{2k}.$$

Luego

$$dS = \frac{r_+}{2k}d\beta - \frac{\beta r_+}{2k^2}\frac{\partial k}{\partial R}dR,$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial R}\right)_{r_+} = \frac{\beta}{k}\frac{\partial k}{\partial R} = \frac{\beta r_+}{2k^2 R^2} = \frac{\beta(1-k^2)}{2Rk^2},$$

Luego,

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial R}\right)_{r_+} = \frac{\beta(1-k^2)}{2Rk^2}. \tag{3.45}$$

La solución general de (3.45) es

$$\frac{d\beta}{dR} = \frac{\beta(1-k^2)}{2Rk^2} = \frac{\beta \cdot \frac{r_+}{R}}{2R(1-\frac{r_+}{R})} = \frac{\beta r_+}{2R(r-r_+)},$$

$$\int \frac{d\beta}{\beta} = \int \frac{1}{2}\frac{r_+}{R(R-r_+)}dR$$

$$\ln \beta = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{R-r_+}{R}\right| + cte$$

Finalmente se obtiene

$$\beta = A(r_+)\left(1 - \frac{r_+}{R}\right)^{1/2} = A(r_+)k, \tag{3.46}$$

con $A(r_+)$ una función que se identifica con el inverso de la temperatura asociado al cascarón en el infinito espacial, lo cual coincide con el resultado de Lemos [69]

$$T = \frac{T_0(M)}{k}. \tag{3.47}$$

Con lo anterior la ecuación (3.37) a partir de (3.42) y (3.46) se reduce a

$$dS = \frac{dM}{T_0(M)}. \tag{3.48}$$

Al asumir que T_0 es la temperatura Hawking, $T_0 = T_H = \frac{1}{8\pi M}$, integrando (3.48) se obtiene

$$S = 4\pi M^2 = 4\pi \frac{r_+^2}{4} = \pi r_+^2$$

luego

$$S = \frac{1}{4}A, \tag{3.49}$$

donde A es el área del cuasi-horizonte.

3.5.2. Método diferencial de la ecuación de movimiento

Se puede obtener el mismo resultado de Lemos-Martínez a partir de la ecuación de movimiento como se muestra a continuación.

a. Caso estático

Al diferenciar la ecuación (3.39) se obtiene

$$\begin{aligned} dM &= dm - \frac{4mRdm + 2m^2dR}{4R^2}, \\ &= dm - \frac{m}{R}dm + \frac{m^2}{2R^2}dR. \\ &= \left(1 - \frac{m}{R}\right)dm + \frac{m^2}{2R^2}dR. \end{aligned} \tag{3.50}$$

De la ecuación de movimiento (3.38) se tiene

$$m = R\left[\sqrt{1+\dot{R}^2} - \sqrt{1+\dot{R}^2 - \frac{2M}{R}}\right]. \tag{3.51}$$

Para el caso estático $\dot{R} = 0$ se obtiene de nuevo la expresión (3.40)

$$m = R(1-k), \qquad \text{con} \qquad k = \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}. \tag{3.52}$$

Reemplazando (3.52) en (3.50)

$$dM = \left(1 - \frac{R(1-k)}{R}\right)dm + \frac{R^2(1-k)^2}{2R^2}dR, \tag{3.53}$$

$$dM = kdm + \frac{(1-k)^2}{2}dR, \tag{3.54}$$

$$\frac{dM}{k} = dm + \frac{(1-k)^2}{2k}dR. \tag{3.55}$$

La primera ley de la termodinámica de acuerdo con (3.37) se puede escribir como

$$TdS = dm + pdA, \tag{3.56}$$

así, al multiplicar y dividir por $8\pi R$ el segundo término del lado derecho de (3.55) se obtiene

$$\frac{dM}{k} = dm + \frac{(1-k)^2}{16\pi Rk} 8\pi R dR$$

$$\frac{dM}{k} = dm + \frac{(1-k)^2}{16\pi Rk} dA. \tag{3.57}$$

Comparando (3.56) y (3.57), se obtienen los resultados de Lemos-Martínez [68, 69]

$$p = \frac{(1-k)^2}{16\pi Rk}, \tag{3.58}$$

$$TdS = \frac{dM}{k}. \tag{3.59}$$

La temperatura en (3.59) se obtiene a partir de la ley de Tolman

$$T(R) = \frac{T(\infty)}{k}, \tag{3.60}$$

con $T(\infty) = T_H$, la temperatura Hawking dada por $T_H = \frac{1}{8\pi M}$. Con lo anterior la expresión (3.59), se reduce a $S = 4\pi M^2$, lo cual está de acuerdo con (3.49).

b. Caso dinámico

Para el caso dinámico se utiliza el mismo procedimiento de la sección anterior pero asumiendo que $\dot{R} \neq 0$. Para este caso se asume que $\dot{R} = C$, con C una constante mayor que cero. De acuerdo con lo anterior la ecuación de movimiento para este caso es

$$M = m\sqrt{1+C} - \frac{m^2}{2R}, \tag{3.61}$$

la cual en términos de la masa en reposo se escribe como

$$m = R\left[\sqrt{1+C} - \sqrt{1 - \frac{2M}{R} + C}\right]. \tag{3.62}$$

Diferenciando (3.61) se obtiene

$$dM = \left(\sqrt{1+C} - \frac{m}{R}\right) dm + \frac{m^2}{2R^2} dR. \tag{3.63}$$

La expresión análoga a la ecuación (3.57) para este caso es

$$\frac{R}{R\sqrt{1+C} - m} dM = dm + \frac{m^2}{16\pi R^2 (R\sqrt{1+C} - m)} dA. \tag{3.64}$$

Al sustituir el valor de m dado por (3.62) en (3.64) se obtiene

$$\frac{dM}{\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}} = dm + \frac{\left(\sqrt{1+C}-\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}\right)^2}{16\pi R\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}}dA. \tag{3.65}$$

Comparando (3.65) con (3.56) se obtiene

$$p = \frac{\left(\sqrt{1+C}-\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}\right)^2}{16\pi R\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}}, \tag{3.66}$$

$$TdS = \frac{dM}{\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}}, \tag{3.67}$$

lo cual coincide con las expresiones (3.58) y (3.59) para el caso estático, en el cual $C = 0$. Asumiendo que en el proceso de colapso del cascarón el factor k es el de la métrica de Schwarzschild, y haciendo uso de nuevo de la ley de Tolman (3.60), se tiene para la expresión (3.67)

$$dS = \frac{8\pi M\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}}dM, \tag{3.68}$$

cuya entropía es

$$S = \frac{\pi}{2}\left\{R^2C(4+3C)\ln\left[\sqrt{1-\frac{2M}{R}}+\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}\right]-R[4M+R(2+3C)]\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\sqrt{C+1-\frac{2M}{R}}\right\}+cte. \tag{3.69}$$

Como caso particular de lo anterior supongamos que $\dot{R}^2 = F = 1-\frac{2M}{R}$, que es el argumento con el que se encuentra R_h. Para este caso se tiene que la ecuación de movimiento (3.38) se escribe como

$$M = m\sqrt{2-\frac{2M}{R}} - \frac{m^2}{2R} \tag{3.70}$$

así las expresiones equivalentes (3.62) a (3.67) están dadas respectivamente por:

$$m = R\left[\sqrt{2-\frac{2M}{R}}\sqrt{2-\frac{4M}{R}}\right], \tag{3.71}$$

$$\left(1+\frac{m}{R\sqrt{2-\frac{2M}{R}}}\right)dM = \left(\sqrt{2-\frac{2M}{R}}-\frac{m}{R}\right)dm + \left(\frac{mM}{R^2\sqrt{2-\frac{2M}{R}}}+\frac{m^2}{2R^2}\right)dR, \tag{3.72}$$

$$\frac{1+\frac{m}{R\sqrt{2-\frac{2M}{R}}}}{\sqrt{2-\frac{2M}{R}}-\frac{m}{R}}dM = dm + \frac{\frac{mM}{R^2\sqrt{2-\frac{2M}{R}}}+\frac{m^2}{2R^2}}{\sqrt{2-\frac{2M}{R}}-\frac{m}{R}}dR, \tag{3.73}$$

$$\frac{2\sqrt{2-\frac{2M}{R}}-\sqrt{2-\frac{4M}{R}}}{\sqrt{2-\frac{2M}{R}}\sqrt{2-\frac{4M}{R}}}dM = dm + \frac{\left(\sqrt{2-\frac{2M}{R}}-\sqrt{2-\frac{4M}{R}}\right)\left(2-\sqrt{2-\frac{2M}{R}}\sqrt{2-\frac{4M}{R}}\right)}{16\pi R\sqrt{2-\frac{2M}{R}}\sqrt{2-\frac{4M}{R}}}dA, \tag{3.74}$$

$$p = \frac{\left(\sqrt{2-\frac{2M}{R}}-\sqrt{2-\frac{4M}{R}}\right)\left(2-\sqrt{2-\frac{2M}{R}}\sqrt{2-\frac{4M}{R}}\right)}{16\pi R\sqrt{2-\frac{2M}{R}}\sqrt{2-\frac{4M}{R}}}, \tag{3.75}$$

$$TdS = \frac{2\sqrt{2-\frac{2M}{R}}-\sqrt{2-\frac{4M}{R}}}{\sqrt{2-\frac{2M}{R}}\sqrt{2-\frac{4M}{R}}}dM. \tag{3.76}$$

Asumiendo una vez más que en el proceso de colapso del cascarón el factor k es el de la métrica de Schwarzschild, y haciendo uso de nuevo de la ley de Tolman (3.60), se tiene para la expresión (3.76)

$$dS = \frac{4\sqrt{2}\pi M\left(2\sqrt{1-\frac{M}{R}}-\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\right)}{\sqrt{1-\frac{M}{R}}}dM. \tag{3.77}$$

Al integrar se obtiene

$$S = 4\sqrt{2}\pi M^2 - \left\{\frac{4\sqrt{2}\pi R\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{32M-16R}\right\}\left[2\sqrt{1-\frac{M}{R}}(5R^2-6MR-8M^2)-7R^2\sqrt{2-\frac{4M}{R}}\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\right)\right]+cte. \tag{3.78}$$

Al tomar el límite cuando $R \to 2M$ el segundo término del lado derecho de (3.78) desaparece y se obtiene un valor para la constante de integración dado por

$$cte = 4\pi M^2(1-\sqrt{2}), \tag{3.79}$$

con lo que la entropía finalmente se reduce a

$$S = 4\pi M^2 - \left\{\frac{\sqrt{2}\pi R\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{8M-4R}\right\}\left[2\sqrt{1-\frac{M}{R}}(5R^2-6MR-8M^2)-7R^2\sqrt{2-\frac{4M}{R}}\,\mathrm{senh}^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\right)\right], \tag{3.80}$$

donde el primer término se identifica con el factor que es proporcional al área, para el caso estático de acuerdo con el resultado de Martínez-Lemos [68, 69], y el segundo término una corrección que trae el modelo para el caso dinámico.

3.5.3. Ley de Smarr

Como caso particular, para analizar la consistencia del resultado para la entropía de la sección anterior, se considera un cascarón con masa y carga cuyo R_h de acuerdo con los resultados de los apéndices (A.2) y (A.1.4) es

$$R_h = \frac{1}{2}\left\{\left(3M - \frac{Q^2}{M}\right) + \sqrt{10M^2 - 12Q^2 + \frac{2Q^4}{M^2}}\right\}. \tag{3.81}$$

La entropía Bekenstein-Hawking asociada de acuerdo con (3.49) es

$$S = S_{BH} = \frac{A}{4} = \frac{\pi}{16}\left\{\left(3M - \frac{Q^2}{M}\right) + \sqrt{10M^2 - 12Q^2})\right\}^2, \tag{3.82}$$

con

$$A = \frac{\pi}{4}\left\{\left(3M - \frac{Q^2}{M}\right) + \sqrt{10M^2 - 12Q^2})\right\}^2. \tag{3.83}$$

Para este caso de acuerdo con (2.25), la primera ley de la termodinámica se escribe como

$$dM = TdS - \phi dQ, \tag{3.84}$$

donde se tienen las relaciones

$$\frac{dS}{dM} = \frac{1}{T}, \qquad \frac{dS}{dQ} = -\frac{\phi}{T}. \tag{3.85}$$

Con lo anterior se obtiene

$$T = -\left\{\frac{\pi(3M^2 - Q^2 + M\sqrt{2}D)(\sqrt{2}Q^4 - 5\sqrt{2}M^4 - Q^2MD - 3M^3D)}{8M^4D}\right\}^{-1}, \tag{3.86}$$

$$\frac{\phi}{T} = -\frac{\pi Q(3M^2 - Q^2 + M\sqrt{2}D)(\sqrt{2}Q^2 - 3\sqrt{2}M^2 - MD)}{4M^3D}, \tag{3.87}$$

con

$$D = \sqrt{\frac{5M^4 - 6Q^2M^2 + Q^4}{M^2}}. \tag{3.88}$$

Luego

$$\phi = \frac{2MQ(\sqrt{2}Q^2 - 3\sqrt{2}M^2 - MD)}{\sqrt{2}Q^4 - 5\sqrt{2}M^4 - Q^2DM - 3M^3D}. \tag{3.89}$$

La temperatura y la gravedad superficial se relacionan de acuerdo con (2.29) por

$$T = \frac{\kappa}{2\pi},$$

por tanto,

$$\kappa = 2\pi T = -2\pi \left\{ \frac{\pi(3M^2 - Q^2 + M\sqrt{2}D)(\sqrt{2}Q^4 - 5\sqrt{2}M^4 - Q^2MD - 3M^3D)}{8M^4D} \right\}^{-1}. \tag{3.90}$$

La relación de Smarr establece[2]

$$M = \frac{\kappa}{4\pi}A + \phi Q. \tag{3.91}$$

Al reemplazar (3.83), (3.89) y (3.90) en (3.91) y simplificar se verifica la relación de Smarr.

[2]La relación de Smarr es una manera de plantear la segunda ley de la Termodinámica de los agujeros negros. Ver (2.1.2).

Capítulo 4

Termodinámica para el observador FREFOS

A continuación se describe la termodinámica de un campo escalar que se encuentra en la vecindad del horizonte de eventos de un cascarón negro esférico en colapso gravitacional, con respecto al observador relativista FREFOS. Para ello, se realizará la descripción del cascarón negro y los estados de vacío de Minkowski y Rindler en el contexto de la DCT.
A partir de la construcción del estado de vacío de Minkowski, que es el vacío global asociado a este espacio-tiempo, se procede a calcular la componente temporal del tensor momento-energía y así encontrar la entropía correspondiente. El tratamiento es similar al que se realiza para el observador FIDO (apéndice C), donde en el espacio-tiempo de Kruskal se define al vacio de Hartle-Hawking como el vacío global y el vacío de Boulware con el vacío local. Así, por principo de equivalencia, se identifican los vacios globales de Minkwoski con el de Hartle-Hawking, y el de Rindler con el de Boulware, encontrandose un método efectivo de cálculo para encontrar la densidad de energía y la entropía asociada a cada uno de estos observadores.

4.1. Aproximación de Rindler

Siguiendo el mismo esquema de trabajo que se siguió para el observador FIDO, se parte de una métrica similar a (C.4)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2. \tag{4.1}$$

Si $f(r)$ corresponde a la métrica de Schwarzschild[1]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2. \tag{4.2}$$

[1] con c=G=1

Cerca del horizonte se puede reemplazar la coordenada r por $\tilde{\rho}$ la cual mide la distancia propia desde el radio de Schwarzschild $r_0 = 2m$

$$\tilde{\rho} = \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{1}{f(r')}} dr' = \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2m}{r'}}} dr'. \tag{4.3}$$

Integrando

$$\tilde{\rho} = \sqrt{r(r-r_0)} + r_0 \operatorname{senh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}-1}\right).$$

Al expandir en serie cerca a r_0 la coordenada $\tilde{\rho}$ se aproxima a

$$\tilde{\rho} \approx 2\sqrt{2m(r-2m)}.$$

Despejando el término $r-2m$, se obtiene para el factor $f(r)$ de Schwarzschild

$$\frac{r-2m}{r} = \frac{\frac{\tilde{\rho}^2}{8m}}{\frac{\tilde{\rho}^2}{8m}+2m} = \frac{\frac{\tilde{\rho}^2}{16m^2}}{1+\frac{\tilde{\rho}^2}{16m^2}}.$$

La gravedad superficial para el agujero negro de Schwarzschild es $\kappa = \frac{1}{4m}$, luego la expresión anterior se escribe

$$\frac{r-2m}{r} = \frac{\tilde{\rho}^2\kappa^2}{1+\tilde{\rho}^2\kappa^2}.$$

Realizando de nuevo una expansión en serie

$$\frac{\tilde{\rho}^2\kappa^2}{1+\tilde{\rho}^2\kappa^2} = \kappa^2\tilde{\rho}^2 - \kappa^4\tilde{\rho}^4 + \kappa^6\tilde{\rho}^6 + ...$$

con una aproximación a primer orden se obtiene

$$1 - \frac{2m}{r} \approx \kappa^2\tilde{\rho}^2 \tag{4.4}$$

Considerando la diferencial de $r-2m = \frac{\tilde{\rho}^2}{8m}$ se obtiene

$$dr = \frac{\tilde{\rho}d\tilde{\rho}}{4m} \longrightarrow dr^2 = \kappa^2\tilde{\rho}^2 d\tilde{\rho}^2. \tag{4.5}$$

A partir de los resultados (4.4) y (4.5), (4.2) se escribe como

$$ds^2 = -\kappa^2\tilde{\rho}^2 dt^2 + d\tilde{\rho}^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2. \tag{4.6}$$

La parte angular para la métrica (4.6), corresponde al elemento de línea en coordenadas esféricas. Como se está haciendo un cálculo local en una región cercana al horizonte, se puede hacer que éste término sea igual a otro en coordenadas cartesianas

$$r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2) = d\sigma^2 = dz^2 + dy^2,$$

con lo cual la métrica (4.2), en la región cercana al horizonte del agujero negro toma la forma

$$ds^2 = -\kappa^2\tilde{\rho}^2 dt^2 + d\tilde{\rho}^2 + d\sigma^2. \tag{4.7}$$

El horizonte se localiza en $\tilde{\rho} = 0$. La coordenada $\tilde{\rho}$ es la distancia propia desde un punto a el horizonte y $d\sigma^2$ es la métrica sobre la superficie del horizonte. La métrica (4.7) se denomina la aproximación de Rindler. Si $d\sigma^2 = dz^2 + dy^2$ es una métrica plana, entonces (4.7) es la métrica de Minkowski escrita en las coordenadas de Rindler. Un observador moviéndose a lo largo de la trayectoria $\tilde{\rho} = cte$ tiene una aceleración de $1/\tilde{\rho}$. Ahora si se realiza la siguiente sustitución

$$\tilde{\rho} \equiv \frac{\sqrt{f}}{\kappa} \longrightarrow d\tilde{\rho} = \frac{1}{2\kappa}\frac{df}{\sqrt{f}}, \quad \text{con} \quad \kappa = -\frac{1}{2}\frac{df(r)}{dr}, \tag{4.8}$$

se recupera la estructura de la métrica general (4.1), donde se identifica $f(r) = \rho$.
Con lo anterior se establece la métrica del espacio-tiempo plano en coordenadas de Rindler dada por [72]

$$ds^2 = -\rho d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\rho} + dz^2 + dy^2, \tag{4.9}$$

por medio de la transformación

$$t = 2\sqrt{\rho}\,\mathrm{senh}(\tau/2), \quad \text{y} \quad x = 2\sqrt{\rho}\cosh(\tau/2),$$

se obtiene la métrica de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{4.10}$$

4.2. Campo escalar sobre el espacio-tiempo de Minkowski

A partir de una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi],$$

con $g \equiv detg_{\mu\nu}$, donde la acción es de la forma

$$S = \int \mathcal{L}\ d^4x,$$

cuya variación conduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] - m^2\phi = 0$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] - m^2\right)\phi = 0$$

se define el operador DÁlembertiano como

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) \qquad \mu.\nu = 0,1,2,3.$$

Así, el campo escalar ϕ satisface la ecuación de Klein-gordon

$$(\Box - m^2)\phi = 0. \tag{4.11}$$

Desarrollando, se tiene que el DÁlembertiano está dado por

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b). \tag{4.12}$$

Para la métrica (4.9) se tiene

$$g_{00} = -\rho; \quad g_{11} = \rho^{-1}; \quad g_{22} = g_{33} = 1,$$

además se tiene

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\sqrt{-g} = 1$. Así el DÁlembertiano es

$$\begin{aligned} \Box &= (1)\left[\left(\frac{1}{-\rho}\right)\partial_0\right] + (1)\left\{\partial_\rho(g^{\rho\rho}\partial_\rho) + \partial_z(g^{zz}\partial_z) + \partial_y(g^{yy}\partial_y)\right\}, \\ &= -\frac{1}{\rho}\partial_\tau^2 + \partial_\rho + \rho\partial_\rho^2 + \partial_z^2 + \partial_y^2. \end{aligned}$$

Se propone una solución de la forma

$$\phi = T(\tau)\varphi_\Omega(\rho)Z(z)Y(y),$$

la cual al reemplazarse en la ecuación de Klein-Gordon

$$-\frac{1}{T(\tau)}\frac{1}{\rho}\partial_\tau^2 T(\tau) + \frac{1}{\varphi_\Omega(\rho)}(\partial_\rho + \rho\partial_\rho^2)\varphi_\Omega(\rho) + \frac{1}{Z(z)}\partial_z^2 Z(z) + \frac{1}{Y(y)}\partial_y^2 Y(y) - m^2 = 0,$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(z)}\partial_z^2 Z(z) &= -k_1^2, \\ \frac{1}{Y(y)}\partial_y^2 Y(y) &= -k_2^2, \\ -\frac{1}{T(\tau)}\partial_\tau^2 T(\tau) &= -\omega^2, \end{aligned}$$

así al reemplazar en la ecuación de Klein-Gordon se obtiene

$$\frac{\omega^2}{\rho} + \frac{1}{\varphi_\Omega(\rho)} + (\partial_\rho + \rho\partial_\rho^2)\varphi_\Omega(\rho) - k_1^2 - k_2^2 - m^2 = 0,$$

simplificando se obtiene

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\varphi_\Omega(\rho)\right) + (\omega^2 - (k_1^2 + k_2^2 + m^2)\rho)\varphi_\Omega(\rho) = 0, \tag{4.13}$$

la cual es la ecuación de Bessel.
Un conjunto de modos de solución de la correspondiente ecuación de onda para la región derecha $I : x > |t|$ del sector del espacio-tiempo de Minkowski, figura(4.1) (similar al espacio-tiempo de Kruskal C.2), es el siguiente

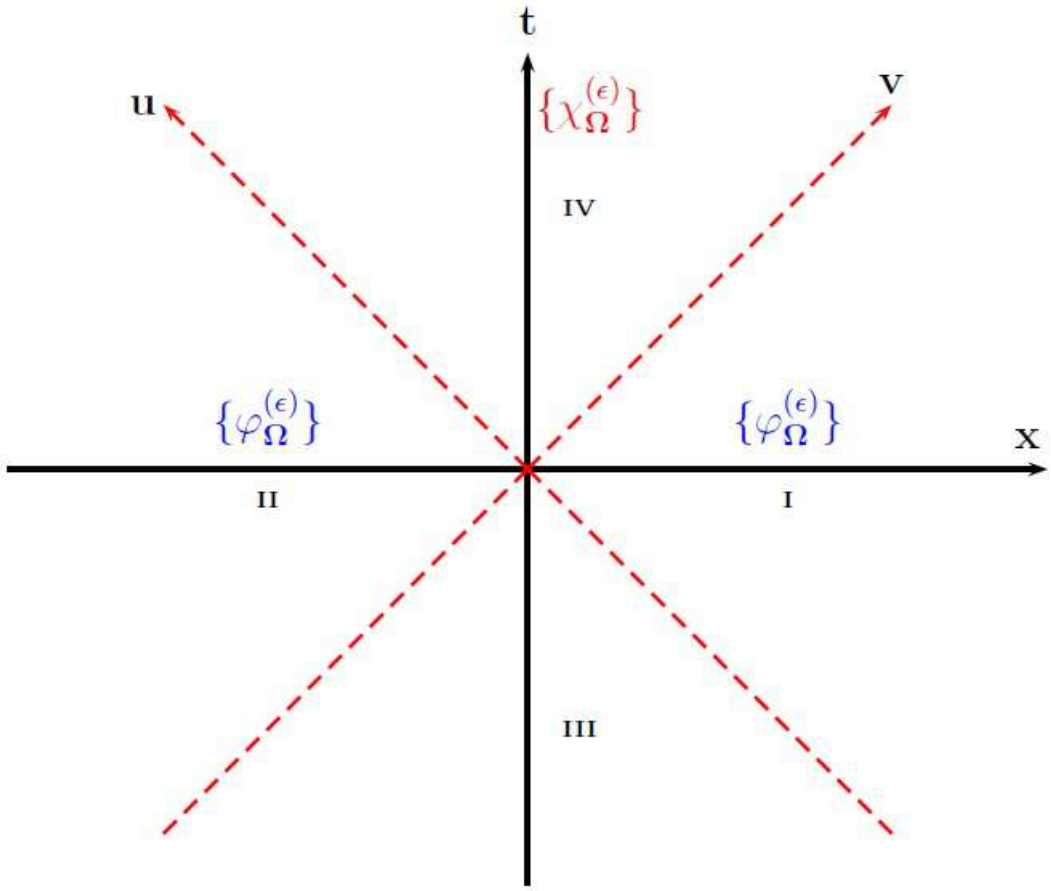

Figura 4.1: Modos de campo en el espacio-tiempo de Minkowski.

$$\varphi_\Omega(\tau, x^a) = \varphi_\Omega(\rho)e^{i(k_1 z + k_2 y)}\frac{1}{\sqrt{2|\omega|(2\pi)^2}}e^{-i\omega t}, \tag{4.14}$$

con $x^a = \rho, z, y$ y $\Omega = \omega, k_1, k_2$. Los modos $\varphi_\Omega(\rho)$ satisfacen la ecuación de Bessel (4.13).
A continuación se introducen los modos de Rindler (R) φ_Ω para los sectores I y II: $x > |t|$

$$\varphi_\Omega^{(\epsilon)} = \varphi_\Omega(\underline{x}, \tau)\Theta_\epsilon(x), \tag{4.15}$$

donde Θ_ϵ es la función de paso unitaria, la cual se define en términos de las coordenadas nulas u y v

$$\Theta_\epsilon(x)\frac{1}{2}\{\Theta(-\epsilon u) + \Theta(\epsilon v)\}, \tag{4.16}$$

$$u = t - x,$$
$$v = t + x,$$

con $\epsilon = \pm 1$. La figura (4.2) ilustra de manera clara el desplazamiento de los modos $\varphi_\Omega^{(\epsilon)}$ sobre el espacio-tiempo de Minkowski.

La descripción de modos realizada permite considerar los t-modos para la región I y los modos de

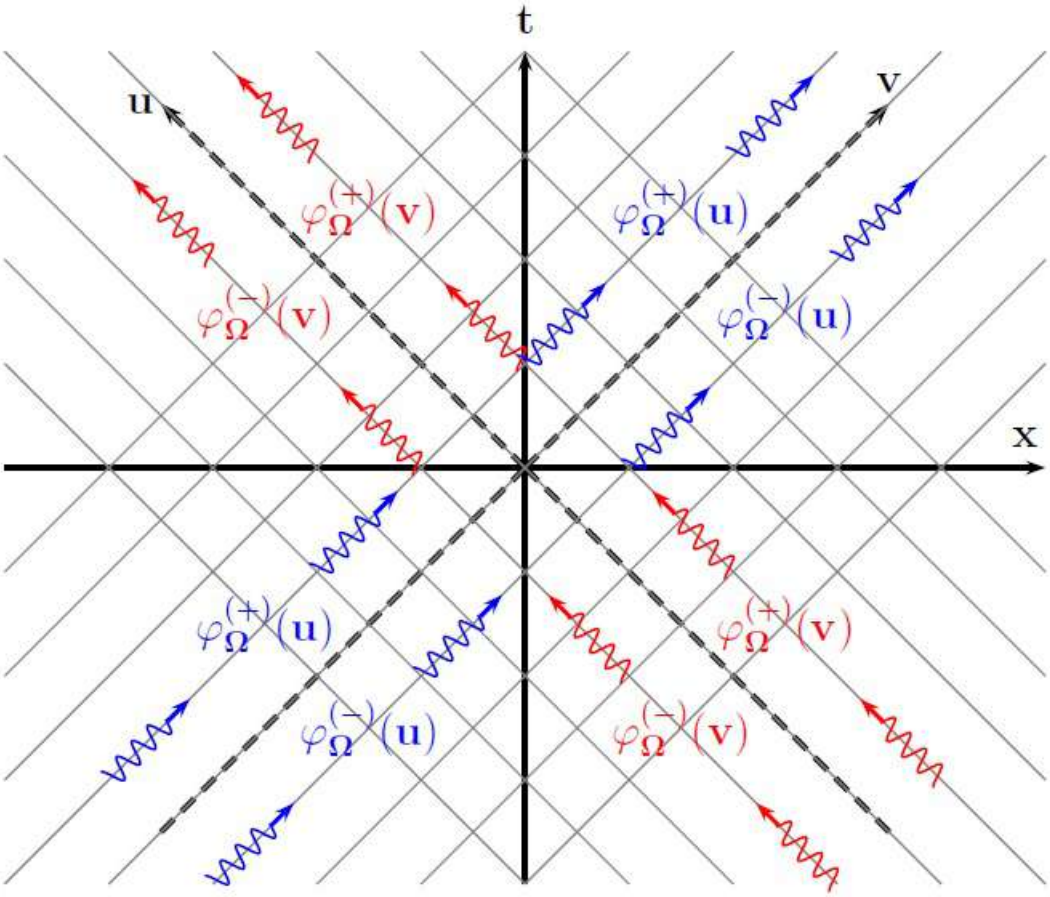

Figura 4.2: Desplazamiento de modos de campo en el espacio-tiempo de Minkowski.

Rindler (R) en los sectores I y II expresado como $\varphi_\Omega(\underline{x}, t)$ y $\varphi_\Omega^{(\epsilon)}$ respectivamente por

$$\varphi_\Omega(\underline{x}, \tau) = \varphi_\Omega(\underline{x}) \frac{1}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega t},$$
$$\varphi_\Omega^{(\epsilon)} = \varphi_\Omega(\underline{x}, \tau)\Theta_\epsilon(x), \tag{4.17}$$

los cuales satisfacen las reglas de ortogonalidad

$$(\varphi_\Omega, \varphi_{\Omega'}) = \epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{4.18}$$
$$(\varphi_\Omega^{(\epsilon)}, \varphi_{\Omega'}^{(\epsilon')}) = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\epsilon\epsilon'}, \tag{4.19}$$

donde se tiene que

$$\epsilon(\omega) = sign(\omega),$$
$$\delta_{\Omega\Omega'} = \delta(\omega - \omega')\delta_{kk'}$$

para $k = \pm 1$. Los modos R descansan sobre la métrica (4.9), y difieren en el signo para el tiempo coordenado t. Lo anterior significa que estos modos son de frecuencia positiva en un tiempo de Killing t en cada uno de los sectores I y II de la figura (4.1) (ver apéndice B). Un conjunto completo de modos queda determinado por (4.17), cuya relación de completez es

$$\frac{1}{2}\gamma(\underline{x}) \sum_\Omega \varphi_\Omega(\underline{x})\varphi_\Omega^*(\underline{x}') = \delta^3(\underline{x} - \underline{x}'), \tag{4.20}$$

y la relación de ortogonalidad

$$\int d^3\underline{x}\gamma(\underline{x})\varphi_{\Omega'}^*(\underline{x})\varphi_\Omega(\underline{x}) = \delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\bar{\Omega}\Omega'}, \tag{4.21}$$

donde $\bar{\Omega} = -\omega, k$.

4.3. Modos de Minkowski y Rindler

Los modos de Minkowski M se denotan como $\chi_\Omega^{(\epsilon)}$, los cuales son modos de frecuencia positiva con respecto a las coordenadas nulas (u, v), sobre la variedad de Minkowski. Estos modos satisfacen las relaciones de ortogonalidad

$$(\chi_\Omega^{(\epsilon)}, \chi_{\Omega'}^{(\epsilon')}) = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\epsilon\epsilon'}, \tag{4.22}$$

los modos M son de frecuencia positiva para el tiempo de Minkowski cuando $\omega\epsilon > 0$ y de frecuencia negativa cuando $\omega\epsilon < 0$.
Los modos de Rindler (R) $\varphi_\Omega^\epsilon(x)$ y los modos de (M) $\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x)$ se relacionan por una transformación de Bogolubov dada por (B.8)

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)} = \varphi_\Omega^{(\epsilon)}(x)\cosh\chi + \varphi_\Omega^{(-\epsilon)}(x)\,\mathrm{senh}\,\chi, \tag{4.23}$$

donde χ se define en términos de (B.9)

$$\tanh\chi = e^{-\pi|\omega|/g}, \tag{4.24}$$

con g la aceleración propia. A partir de (C.15) y (C.21) se encuentra la relación (B.30)

$$\chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{senh}\chi\cosh\chi}{2|\omega|}}\varphi_{\Omega}e^{-i\omega t_{\epsilon(\omega)\epsilon}}. \tag{4.25}$$

Para una descripción cuántica se consideran los esquemas de cuantización de Minkowski y Rindler respectivamente como:

$$\phi(x) = \sum_{\epsilon,\Omega}\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}\chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x) = \sum_{\epsilon,\Omega}\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x), \tag{4.26}$$

Para la expresión (4.26) se establecen las siguientes reglas de conmutación que deben satisfacer los operadores

$$[\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}, \hat{a}_{\Omega'}^{(\epsilon')\dagger}] = [\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}, \hat{b}_{\Omega'}^{(\epsilon')\dagger}] = \epsilon(\omega)\epsilon\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{4.27}$$

donde $\Omega = \omega, k$ y $k = \pm 1$.
A continuación se definen los estados de vacío de M y R por:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}|0\rangle_M = 0, \\ R &\longrightarrow \hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}|0\rangle_R = 0, \end{aligned} \tag{4.28}$$

bajo la condición que $\omega\epsilon > 0$. El operador $\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}$ transforma de acuerdo con la DCT (capítulo 2) como

$$\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)} = \hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}\cos\chi + \hat{b}_{\Omega}^{(-\epsilon)}\operatorname{senh}\chi = e^{-iG}\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}e^{iG}, \tag{4.29}$$

con el operador G de la forma

$$G = G^{\dagger} = \frac{i}{2}\sum_{\epsilon\Omega}\epsilon(\omega)\epsilon\chi\hat{b}_{\omega}^{(\epsilon)\dagger}\hat{b}_{\Omega}^{(-\epsilon)}.$$

Ahora se tiene que le estado de vacío en un espacio-tiempo plano de acuerdo con la DCT para un grado de libertad, es de la forma (2.185)

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{\sum_n e^{-\beta E_n/2}|n,\tilde{n}\rangle}{\sqrt{Z(\beta)}}, \\ |0(\beta)\rangle &= e^{-iG(\beta)}|0,\tilde{0}\rangle, \end{aligned}$$

con $G(\beta) = G(\beta)^{\dagger} = -i[\hat{\tilde{a}}\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}\hat{\tilde{a}}^{\dagger}]$, son equivalentes a

$$\begin{aligned} |T\rangle &= \frac{\sum_n e^{-E_n/2T}|n_1,n_2\rangle}{\sqrt{Z}}, \\ |0\rangle_a = e^{-iG}|0\rangle_b &= \frac{\sum_n e^{-\beta E_n/2}|n^{(+)},n^{(-)}\rangle}{\sqrt{Z}}, \end{aligned}$$

donde $G = G^\dagger = i\chi[b^\dagger_{(+)}b_{(-)} - b_{(+)}b^\dagger_{(-)}]$, para un solo grado de libertad.
La expresion $|0\rangle_a = e^{-iG}|0\rangle_b$ establece que este estado corresponde a un baño térmico de los b-modos, donde un observador asociado con esta cuantificación percibe el vacío como un baño térmico.
En general para un número elevado de grados de libertad se debe realizar la suma de las contribuciones por frecuencia para los sectores I y II (figura 4.1) y por números cuántico $\Omega = \omega, k$, tal que sea posible escribir

$$G = G^\dagger = \frac{i}{2}\sum_{\epsilon,\Omega}\epsilon(\omega)\epsilon\chi\hat{b}^{(\epsilon)\dagger}_{\Omega}\hat{b}^{(-\epsilon)}_{\Omega}$$

luego,

$$G = G^\dagger = i\sum_{\substack{\Omega\\(\omega>0)}}\chi[\hat{b}^{(+)\dagger}_{\Omega}\hat{b}^{(-)}_{\Omega} - \hat{b}^{(+)}_{\Omega}\hat{b}^{(-)\dagger}_{\Omega}] = \sum_{\substack{\Omega\\(\omega>0)}} G_\Omega. \tag{4.30}$$

Al igualar los estados de vacío dados por (4.28) y con ayuda de la expresión (4.29) se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{a}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_M &= \hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_R,\\
e^{iG}\hat{a}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_M &= \hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_R,\\
e^{iG}[e^{-iG}\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}e^{iG}]|0\rangle_M &= \hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_R,\\
\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_M &= e^{-iG}\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_R,
\end{aligned}$$

$$|0\rangle_M = e^{-iG}|0\rangle_R, \tag{4.31}$$

es decir los estados de vacío se relacionan de manera formal. Sin embargo, se debe aclarar que la expresión (4.31) no conserva el principio de unitariedad el cual exige que en los sistemas cuánticos la evolución debe ser de tal manera que la suma de probabilidades sea igual a 1. Además estos vacíos son unitariamente inequivalentes.
Una forma más explícita de expresar (4.31) se puede obtener factorizando el operador e^{-iG} en términos de los operadores de creación y aniquilación, lo cual se obtiene recurriendo a la identidad generalizada de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) [70]. Así de acuerdo con (4.30) se tiene que

$$G = G^\dagger = i\sum_{\substack{\Omega\\(\omega>0)}}\chi[\hat{b}^{(+)\dagger}_{\Omega}\hat{b}^{(-)}_{\Omega} - \hat{b}^{(+)}_{\Omega}\hat{b}^{(-)\dagger}_{\Omega}] = i\sum_{\Omega}\chi(A_\Omega + B_\Omega),$$

entonces

$$\begin{aligned}
|0\rangle_M = e^{-iG}|0\rangle_R &= e^{-i[i\sum_\Omega \chi[\hat{b}^{(+)\dagger}_{\Omega}\hat{b}^{(-)}_{\Omega} - \hat{b}^{(+)}_{\Omega}\hat{b}^{(-)\dagger}_{\Omega}]]}|0\rangle_R,\\
&= e^{i\sum_\Omega \chi(A_\Omega + B_\Omega)}|0\rangle_R.
\end{aligned}$$

Con base en la identidad (BCH) lo anterior se reescribe como:

$$|0\rangle_M = e^{\frac{1}{n}\tanh(\chi)A}e^{\frac{1}{2n}\operatorname{senh}(2n\chi)B}e^{-\frac{1}{n^2}\ln|\cosh(n\chi)|C}|0\rangle_R.$$

Para $n = 1$ se tiene que

$$|0\rangle_M = e^{\tanh(\chi)A} e^{\frac{1}{2}\operatorname{senh}(2\chi)B} e^{-\ln|\cosh(n\chi)|C} |0\rangle_R.$$

Como $\operatorname{senh}\chi = 2\operatorname{senh}\chi\cosh\chi$, entonces

$$\begin{aligned}|0\rangle_M &= e^{\tanh(\chi)A} e^{\operatorname{senh}\chi\cosh\chi B} e^{\ln|\cosh(n\chi)|^{-C}} |0\rangle_R,\\ &= \frac{1}{(cosh(\chi))^C} e^{\{\tanh(\chi)A + \operatorname{senh}(\chi)\cosh(\chi)B\}} |0\rangle_R.\end{aligned}$$

Ahora, sea $f(\chi) = \operatorname{senh}(\chi)\cosh\chi = \frac{e^{2\chi} - e^{-2\chi}}{4}$. Entonces lo anterior se expresa como

$$|0\rangle_M = \frac{1}{(\cosh(\chi))^C} e^{\tanh(\chi)A} e^{f(\chi)B} |0\rangle_R,$$

donde al realizar una expansión en serie de Taylor de $f(\chi)$, en una aproximación a orden cero se tiene que $f(\chi) \simeq 1$, luego

$$|0\rangle_M \simeq \frac{1}{(\cosh(\chi))^{C_\Omega}} e^{\tanh(\chi)A_\Omega} |0\rangle_R.$$

Ahora $C_\Omega = [A_\Omega, B_\Omega]$ donde $A_\Omega = b_\Omega^{(+)\dagger} b_\Omega^{(-)}$ y $B_\Omega = -b_\Omega^{(+)} b_\Omega^{(-)\dagger}$. Al desarrollar el conmutador se obtiene $\hat{C}_\Omega = 1$, luego

$$|0\rangle_M = \frac{1}{\cosh\chi} e^{\tanh\chi A_\Omega} |0\rangle_R = \frac{1}{\cosh\chi} e^{tanh\chi b_\Omega^{(+)\dagger} b_\Omega^{(-)}}.$$

Al expresar en serie de potencias la función exponencial, lo anterior se escribe como

$$\begin{aligned}|0\rangle_M &= \frac{1}{\cosh\chi} \sum_{n_\Omega=0}^{\infty} \frac{(\tanh\chi b_\Omega^{(+)\dagger} b_\Omega^{(-)})^{n_\Omega}}{n_\Omega!} |0\rangle_R,\\ &= \frac{1}{\cosh\chi} \sum_{n_\Omega=0}^{\infty} (\tanh\chi)^{n_\Omega} \frac{(b_\Omega^{(+)\dagger})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}} \frac{(b_\Omega^{(-)})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}} |0\rangle_{RI} \otimes ||0\rangle_{RII}.\end{aligned}$$

De acuerdo con (4.31), se tiene que

$$e^{-iG}|0\rangle_M = \frac{1}{\cosh\chi} \sum_{n_\Omega=0}^{\infty} (\tanh\chi)^{n_\Omega} \frac{(b_\Omega^{(+)\dagger})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}} \frac{(b_\Omega^{(-)})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}} |0\rangle_{RI} \otimes |0\rangle_{RII}, \tag{4.32}$$

donde se define el estado de Rindler como

$$|0\rangle_R = |0\rangle_{RI} \otimes ||0\rangle_{RII},$$

en el cual se cumple que el producto de $\omega\epsilon > 0$ es decir, extrictamente positivo. Para la región I de la figura (4.1) se establece que $\omega\epsilon > 0$, con los valores $\omega > 0$ se tiene una frecuencia positiva y $\epsilon = +1$ se generaliza que el producto sea positivo. Para la región II figura (4.1), se tiene que $\omega(-\epsilon) > 0$ con el valor $\omega > 0$ no se cumple la condición, por lo que se requiere que $\omega < 0$, es decir, una frecuencia negativa para el valor $\epsilon = -1$ dado que $\omega \sim E$, con E la energía. Lo anterior da origen a una energía negativa

en la sección II. De acuerdo con lo anterior se escribe (4.32) como

$$e^{-iG}|0\rangle_R = \frac{1}{cosh\chi}\sum_{n_\Omega=0}^{\infty}(\tanh\chi)^{n_\Omega}\left[\frac{(b_\Omega^{(+)\dagger})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}}|0\rangle_{RI}\right]\otimes\left[\frac{(b_\Omega^{(-)})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}}|0\rangle_{RII}\right],$$

donde el término entre paréntesis tiene la forma establecida por la DCT (sección 2.4)

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle,$$

es decir,

$$|n_\Omega^{(+)}\rangle = \frac{(b_\Omega^{(+)\dagger})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}}|0\rangle_{RI}, \quad \text{y} \quad |n_\Omega^{(-)}\rangle = \frac{(b_\Omega^{(-)})^{n_\Omega}}{\sqrt{n_\Omega!}}|0\rangle_{RII}.$$

Asi, de acuerdo con lo anterior se reescribe

$$e^{-iG}|0\rangle_R = \frac{1}{cosh\chi}\sum_{n_\Omega=0}^{\infty}(\tanh\chi)^{n_\Omega}|n_\Omega^{(+)}\rangle_R\otimes|n_\Omega^{(-)}\rangle_R, \tag{4.33}$$

donde $|n_\Omega^{(+)}\rangle_R$, $|n_\Omega^{(-)}\rangle_R$ corresponden al estado de Rindler con un numero n igual de modos de Rindler correlacionado de frecuencia ω para los sectores I y II de la variedad de Minkowski.
De otra parte, se considera la temperatura de Rindler[2]

$$T_R = \beta^{-1} = \frac{g}{2\pi} \longrightarrow g = \frac{2\pi}{\beta}, \tag{4.34}$$

de acuerdo con (4.24)

$$\tanh\chi = e^{-\pi|\omega|/g} = e^{-\frac{1}{2}\beta\omega},$$

con la condición que $\omega > 0$. Además a partir de

$$\tanh^2\chi = 1 - \frac{1}{\cosh^2\chi},$$

[2]La temperatura local T que percibe un observador acelerado se establece mediante la ley de Tolman

$$T(g_{00})^{\frac{1}{2}} = T_0.$$

Para la métrica cerca del horizonte (4.7) se establece

$$\kappa\rho = \frac{\kappa}{2\pi},$$

así se obtiene

$$T = \frac{\rho^{-1}}{2\pi}.$$

La cual corresponde a la temperatura que mide un observador acelerado cerca del horizonte. La aceleración propia g está dada por $g = \rho^{-1}$. Así finalmente se establece que

$$T = \frac{g}{2\pi}.$$

Este resultado se interpreta como el baño térmico sobre el cual aparece inmerso un observador acelerado en el espacio-tiempo de Minkowski.

se tiene con base en (4.34)

$$\cosh^2\chi = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}},$$

lo anterior de acuerdo con la DCT es la función de partición para bosones, es decir,

$$\cosh^2\chi = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\beta\omega)^n} = Z_\Omega,$$

por lo que se encuentra finalmente que

$$|0\rangle_M = e^{-iG}|0\rangle_R = \frac{1}{\sqrt{Z_\Omega}} \sum_{n_\Omega=0}^{\infty} (e^{-\frac{1}{2}\beta\omega})^{n_\Omega} |n_\Omega^{(+)}, n_\Omega^{(-)}\rangle,$$

luego,

$$|0\rangle_M = e^{-iG}|0\rangle_R = Z_\Omega^{-1/2} \sum_{n_\Omega=0}^{\infty} (e^{-\frac{1}{2}\beta n_\Omega\omega})|n_\Omega^{(+)}, n_\Omega^{(-)}\rangle, \tag{4.35}$$

lo cual es válido para un solo grado de libertad, es decir una sola frecuencia. Para todo el espectro de frecuencias se tiene una descripción en el límite del contínuo de acuerdo con (4.30) y (4.35), la expresión (4.31) se puede reducir a

$$|0\rangle_M = \prod_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} e^{-iG_\Omega}|0\rangle_R, \tag{4.36}$$

$$|0\rangle_M = Z^{-1/2} \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} |\underline{\mathrm{n}}^{(+)}, \underline{\mathrm{n}}^{(-)}\rangle_R, \tag{4.37}$$

donde se denota a $\underline{\mathrm{n}} \equiv \{n_\Omega, \quad \text{para todo} \quad \Omega \quad \text{con} \quad \omega > 0\}$. Con la energía y la función de partición dadas respectivamente por

$$E_{\underline{\mathrm{n}}} = \sum_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} n_\Omega\omega, \qquad \text{y} \qquad Z = \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} = \prod_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} Z_\Omega. \tag{4.38}$$

Así se puede reescribir $|0\rangle_M$ como:

$$|0\rangle_M = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RI}, |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RII}, \tag{4.39}$$

que corresponde al estado de vacío sobre la variedad de Minkowski, tal que $|\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RI}$ y $|\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RII}$ son las excitaciones sobre los estados de vacío $|0\rangle_{RI}$ y $|0\rangle_{RII}$.

Así, el estado base sobre la variedad de Minkowski es un estado térmico entrelazado. El estado $|0\rangle_R$, el cual fue identificado como un estado global, no es en realidad un estado global definido sobre las regiones I y II, debido a que los modos R no son de frecuencia positiva en cualquier globalidad una vez se ha definido un parámetro regular de tiempo. El estado $|0\rangle_R$ se encuentra vacío de los modos de frecuencia positiva R $\varphi_\Omega^{(+)}$ en dirección futura para un tiempo de Killing en cada uno de los sectores I

y II.
Si se considera el estado de Rindler vecino $|0\rangle_{RI}$ definido sobre todo el espacio de Minkowski de acuerdo con (4.37), se puede pensar que $|0\rangle_{RI}$ como un vacío $|0\rangle_M$ despoblado de los modos de Rindler $|\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RI}$ en el sector I. El estado de Rindler vecino $|0\rangle_{RI}$ se encuentra vacío de modos de frecuencia positiva de Killing $\varphi_\Omega^{(+)}$ en el sector I, luego

$$b_\Omega^{(+)}|0\rangle_{RI} = 0 \qquad \omega > 0, \tag{4.40}$$

de igual manera

$$b_\Omega^{(-)}|0\rangle_{RII} = 0 \qquad \omega > 0.$$

Finalmente, de (4.39) se puede definir el estado de Rindler $|0\rangle_{RI}$ sobre el espacio completo, como el estado de Minkowski $|0\rangle_M$ despoblado de todos los modos de Rindler $|\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RI}$ en el sector I (figura4.1)

$$|0\rangle_{RI}(\text{sobre I+II}) = Z^{-1/2}\sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}}|n\rangle_{II}|0\rangle_I. \tag{4.41}$$

4.4. Densidad de energía

En general se tiene el valor de expectación del tensor momento-energía para un campo escalar real ϕ y un acople minimal dado por [50]

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\partial^\gamma\partial_\gamma\phi + m^2\phi^2), \tag{4.42}$$

que al expresarse en términos de una función de Green (una función de dos puntos) es

$$\langle T_{\alpha\beta}(x,x^{'})\rangle = \mathcal{D}_{\alpha\beta'}W(x,x^{'}), \tag{4.43}$$

donde

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta'} = \partial(_\alpha\partial_{\beta'}) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\partial^\gamma\partial_{\gamma'} + m^2) \tag{4.44}$$

y el término $W(x,x^{'})$ corresponde a la función de Wightman

$$W(x,x^{'}) = \langle 0|\phi(x)\phi(x^{'})|0\rangle. \tag{4.45}$$

En la figura (4.1) el x actúa sobre la región I y el $x^{'}$ sobre la región II de la función de Wightman para el estado de vacío $|0\rangle_R$ sobre la variedad de Minkowski, donde el campo escalar real está dado de acuerdo con (4.26). Así, al introducir (4.26) en (4.45)

$$W_R(x,x^{'}) =_R \langle 0|\sum_{\epsilon,\Omega}\hat{b}_\Omega^{(\epsilon)}\varphi_\Omega^{(\epsilon)}(x)\hat{b}_\Omega^{(\epsilon^{'})\dagger}\varphi_\Omega^{(\epsilon^{'})*}(x^{'})|0\rangle_R,$$

tal que al satisfacer la relación de conmutación

$$[\hat{b}_\Omega^{(\epsilon)}, \hat{b}_\Omega^{(\epsilon^{'})\dagger}] = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}$$

la función de Wightman es

$$W_R(x,x^{'}) = \sum_{\epsilon,\Omega} \quad {}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega}|0\rangle_R \varphi^{(\epsilon)}_{\Omega}(x)\varphi^{(\epsilon^{'})*}_{\Omega^{'}}(x^{'}). \tag{4.46}$$

A partir del producto [3]

$$\sum_{\epsilon,\Omega} \quad {}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega}|0\rangle_B = \Theta(\epsilon\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{4.47}$$

[3]Desarrollando el conmutador se tiene

$$[\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}, \hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}] = \hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}} - \hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega} = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'},$$

luego,

$$\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}} = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'} + \hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}$$

entonces,

$$\begin{aligned} {}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}|0\rangle_R &= {}_R\langle 0|\epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'} + \hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_R, \\ &= {}_R\langle 0|\epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}|0\rangle_R + {}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_r. \end{aligned}$$

Así se tiene

$$\begin{aligned} {}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}|0\rangle_r &= \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'} \quad {}_R\langle 0|0\rangle_R, \\ {}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}|0\rangle_R &= \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}. \end{aligned}$$

De la expresión anterior se pueden resaltar algunas características:

i. Para un estado de vacío de Rindler R se tiene

$$\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}|0\rangle_R = 0.$$

Si el producto de

$$\epsilon\omega < 0 \longrightarrow \langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega} = 0,$$

entonces $\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}$ posee el comportamiento de un operador de aniquilación.

ii. Si

$$\epsilon^{'}\omega^{'} < 0 \longrightarrow \hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}|0\rangle_R,$$

entonces $\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}$ posee el comportamiento de un operador de creación.

iii. Si

$$\epsilon\omega > 0 \quad \text{y} \quad \epsilon^{'}\omega^{'} < 0,$$

además

$$\epsilon^{'}\omega^{'} \neq \epsilon\omega \quad \text{y} \quad \epsilon^{'}\Omega^{'} \neq \epsilon\Omega,$$

se obtiene

$${}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}|0\rangle_R = 0.$$

iv. Si $\Omega = \Omega^{'}$ y $\epsilon = \epsilon^{'}$

$${}_R\langle 0|\hat{b}^{(\epsilon)}_{\Omega}\hat{b}^{(\epsilon^{'})\dagger}_{\Omega^{'}}|0\rangle_R = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'},$$

donde le término $\delta_{\epsilon\epsilon'}$ describe zonas causalmente desconectadas (estados EPR).

v. Si $\epsilon\omega > 0$ las funciones φ son de frecuencia positiva. Así para cada una de las regiones se debe cumplir

$$\epsilon\omega > 0 \begin{cases} \epsilon = +1, & \omega > 0, \quad \text{región I}, \\ \epsilon = -1, & \omega < 0, \quad \text{región II}, \end{cases}$$

Finalmente el término $\epsilon\epsilon(\omega)$ da el cambio de signo, donde $(+)$ mantiene su papel y $(-)$ lo invierte. Sea $\Theta(\epsilon\omega) = \epsilon\epsilon(\omega)$, la cual es una función paso solo para frecuencias positivas

$$\epsilon\epsilon(\omega) = 1, \quad \text{y} \quad \epsilon\epsilon(\omega) = 0.$$

la función de Wightman se expresa como

$$W_B = \sum_{\epsilon,\Omega} \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega'}^{(\epsilon')*}(x')\Theta(\epsilon\omega)\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'},$$

bajo la condición que $\Omega = \Omega' = 1$ y $\epsilon = \epsilon' = 1$, en caso contrario es nulo, se obtiene

$$W_R(x,x') = \sum_{\epsilon,\Omega} \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega'}^{(\epsilon')*}(x')\Theta(\epsilon\omega), \tag{4.48}$$

puesto que $\varphi_{\omega}^{(\epsilon)}$ es proporcional a $\Theta_\epsilon(x)$, de acuerdo con la función de paso unitaria, $W_R(x,x') = 0$ si x, y x' están en sectores opuestos I y II.
De manera similar se tiene para el estado de Minkowski

$$W_M(x,x') =_M \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle_M = \sum_{\epsilon,\Omega} \chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\chi_{\Omega'}^{(\epsilon')*}(x')\Theta(\epsilon\omega). \tag{4.49}$$

Al usar la transformación de Bogolubov (4.43)

$$\begin{aligned}
W_M(x,x') &= \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)[\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\cosh\chi + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\operatorname{senh}\chi][\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x')\cosh\chi + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x')\operatorname{senh}\chi] \\
&= \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)[\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x')\cosh^2\chi + \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x')\cosh\chi\operatorname{senh}\chi \\
&+ \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x')\operatorname{senh}\chi\cosh\chi + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x')\operatorname{senh}^2\chi].
\end{aligned}$$

A partir del hecho de que $\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x') \propto \Theta_\epsilon(x)\Theta_{-\epsilon}(x') = 0$ cuando x y x' pertenecen al mismo sector, lo anterior se simplifica como

$$W_M(x,x') = \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)[\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x')\cosh^2\chi + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x')\operatorname{senh}^2\chi], \tag{4.50}$$

donde se establece que x y x' pertenecen al mismo sector I o II. De las expresiones (4.48) y (4.50)

$$W_M(x,x') - W_R(x,x') = (W_M - W_R)(x,x'),$$

luego, haciendo explicitos cada uno de los términos se obtiene

$$\begin{aligned}
(W_M - W_R)(x,x') &= \sum_{\epsilon,\Omega} \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega'}^{(\epsilon)*}(x')\Theta(\epsilon\omega) - \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)[\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x')\cosh^2\chi + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x')\operatorname{senh}^2\chi], \\
&= \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)[\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x')(\cosh^2\chi - 1) + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x')\operatorname{senh}^2\chi], \\
&= \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)\operatorname{senh}^2\chi[\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x') + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x')].
\end{aligned}$$

Para x y $x^{'}$ en el mismo sector, con los posibles valores de $\epsilon = \pm 1$ se tiene que la función de Wightman toma la forma

$$(W_M - W_R)(x, x^{'}) = \sum_{+1,\Omega} \Theta(+\omega) \operatorname{senh}^2 \chi [\varphi_\Omega^{(+)}(x)\varphi_\Omega^{(+)*}(x^{'}) + \varphi_\Omega^{(-)}(x)\varphi_\Omega^{(-)*}(x^{'})]$$
$$+ \sum_{-1,\Omega} \Theta(-\omega) \operatorname{senh}^2 \chi [\varphi_\Omega^{(-)}(x)\varphi_\Omega^{(-)*}(x^{'}) + \varphi_\Omega^{(+)}(x)\varphi_\Omega^{(+)*}(x^{'})].$$

Ahora, si se considera de aquí en adelante los cálculos para sólo un sector I ó II de la variedad de Minkowski, se tiene que

$$(W_M - W_R)(x, x^{'}) = \sum_{\Omega} \operatorname{senh}^2 \chi [\varphi_\Omega^{(+)}(x)\varphi_\Omega^{(+)*}(x^{'}) + \varphi_\Omega^{(-)}(x)\varphi_\Omega^{(-)*}(x^{'})], \tag{4.51}$$

donde se ha hecho uso de la identidad $\Theta(\omega) + \Theta(-\omega) = 1$. A partir de (4.24) y la identidad $\operatorname{senh}^2 \chi = \frac{\tanh \chi}{1-\tanh^2 \chi}$ se tiene

$$\tanh \chi = e^{-\pi|\omega|/g} = e^{-1/2\beta\omega},$$
$$\operatorname{senh}^2 \chi = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1},$$

la expresión (4.51) se reescribe

$$(W_M - W_R)(x, x^{'}) = \sum_{\Omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} [\varphi_\Omega^{(+)}(x)\varphi_\Omega^{(+)*}(x^{'}) + \varphi_\Omega^{(-)}(x)\varphi_\Omega^{(-)*}(x^{'})]. \tag{4.52}$$

Por tanto, $\varphi_\Omega^{(\epsilon)}(x)$ y $\varphi_\Omega^{(-\epsilon)}(x)$ se han de restringir a un solo sector (I ó II) en donde se supone que x y $x^{'}$ pertenecen a uno de los dos sectores. Para efectos de ilustración al sector I, (4.52) se reduce a

$$(W_M - W_R)(x, x^{'}) = \sum_{\Omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} [\varphi_\Omega^{(+)}(x)\varphi_\Omega^{(+)*}(x^{'})], \tag{4.53}$$

lo cual constituye la función de Wightman al sector I, puesto que en este sector $\Theta_- = 0$ y $\Theta_+ = 1$, luego

$$\varphi_\Omega^{(-)}(x)\varphi_\Omega^{(-)*}(x^{'}) \propto \Theta_-(x)\Theta_-(x^{'}) = 0, \tag{4.54}$$
$$\varphi_\Omega^{(+)}(x)\varphi_\Omega^{(+)*}(x^{'}) \propto \Theta_+(x)\Theta_+(x^{'}) = 1. \tag{4.55}$$

Para calcular la componente $T_{00}(x, x^{'})$ del tensor momento-energía, primero se evalúa

$$\partial_0 \partial_{0'} (W_M - W_R)(x, x^{'})|_{x'=x} \equiv \partial_0 \partial_{0'} W_{M-R}(x, x^{'})|_{x'=x}. \tag{4.56}$$

Luego,

$$\partial_0 \partial_{0'} W_{M-R}(x, x^{'})|_{x'=x} = \sum_{\Omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \partial_0 \partial_{0'} [\varphi_\Omega^{(+)}(x)\varphi_\Omega^{(+)*}(x^{'})].$$

Para corregir el problema de las divergencias se hace uso de la función W_{M-R}. Así para el mismo

sector se tiene

$$\partial_0\partial_{0'}W_{M-R}(x,x^{'})|_{x'=x} = \sum_{\Omega}\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\partial_0\partial_{0'}[\varphi_{\Omega}^{(+)}(x)\varphi_{\Omega}^{(+)*}(x^{'})],$$
$$= \sum_{\Omega}\frac{\frac{\omega}{8\pi^2}}{e^{\beta\omega}-1}|\varphi_{\Omega}(\underline{x})|^2, \tag{4.57}$$

con la funciones $\varphi_{\Omega}(\underline{x})$

$$\varphi_{\Omega}(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi}\varphi_{\Omega}(\rho)e^{i(k_1z+k_2y)}. \tag{4.58}$$

Entonces (4.47) se reescribe como

$$\partial_0\partial_{0'}W_{M-R}(x,x^{'})|_{x'=x} = \int_0^{\infty}\frac{\frac{\omega}{4\pi^2}}{e^{\beta\omega}-1}\sum_{k_1}\sum_{k_2}|\varphi_{\Omega}(\rho)|^2. \tag{4.59}$$

En este punto del cálculo se debe aclarar que no es necesario introducir la regularización que siempre se requiere de manera usual. En general la expresión

$$\int_0^{\infty}\varphi_{\omega}(x)\varphi_{\omega}^{*}(x^{'})d\omega|_{x'=x},$$

diverge cuando $\omega\to\infty$. Sin embargo, debido a la diferencia entre los estados de Rindler y Minkowski, las transformaciones de Bogolubov (4.23) aportan un factor de convergencia dado por el término $(e^{\beta|\omega|}-1)^{-1}$.

Ahora se desea conocer de manera explícita la función $\varphi_{\Omega}(\rho)$, para ello se introduce

$$\varphi_{\Omega}(\rho) \equiv \rho^{-1/2}\psi(\rho), \tag{4.60}$$

la cual al reemplazarse en la ecuación diferencial de Bessel (4.13) [4]

$$\frac{d^2\psi_{\omega k_1 k_2}(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\omega^2}{\rho} - (k_1^2 + k_2^2 + m^2) + \frac{1}{4\rho}\right]\psi_{\omega k_1 k_2}(\rho) = 0, \tag{4.61}$$

luego

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + k^2(\rho; k_1, k_2)\right]\psi_{\omega k_1 k_2}(\rho) = 0, \tag{4.62}$$

donde

$$k^2 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\omega^2}{\rho} - (k_1^2 + k_2^2) - m^2 + \frac{1}{4\rho}\right]. \tag{4.63}$$

Al usar el método de aproximación WKB (ver apéndice D) se encuentra

$$\psi_{\omega k_1 k_2 \eta} \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\omega}{k(\rho)}\right|} e^{i\int_{\rho_0}^{\rho} k(\rho^{'})d\rho^{'}}. \tag{4.64}$$

De acuerdo con lo anterior al reemplazar (4.60) y (4.64) en (4.59)

$$\partial_0\partial_{0'} W_{M-R}(x, x^{'})|_{x'=x} = \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{4\pi^2(e^{\beta\omega} - 1)} \sum_{k_1}\sum_{k_2} \frac{\omega}{2\pi\rho k},$$

en el contínuo, introduciendo un factor de 2 en las integrales el cual representa los grados de libertad $\eta = \pm 1$ asociados a ondas que entran y salen, se tiene

$$\partial_0\partial_{0'} W_{M-R}(x, x^{'})|_{x'=x} = \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{4\pi^2(e^{\beta\omega} - 1)} \frac{2}{2\pi\rho} \int_{k_1}\int_{k_2} \frac{dk_1 dk_2}{k}.$$

---

[4]

$$\rho\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}\rho^{-1/2}\psi + \omega^2\rho^{-1/2}\psi - (k_1^2 + k_2^2 + m^2)\rho\rho^{-1/2}\psi = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\rho\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}\rho^{-1/2}\psi &= \rho\frac{d}{d\rho}\rho\left[\rho^{-1/2}\frac{d\psi}{s\rho} + \psi\frac{d}{d\rho}\rho^{-1/2}\right], \\
&= \rho\left[\frac{1}{2}\rho^{-1/2}\frac{d\psi}{d\rho}\right] + \rho\rho^{-1/2}\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \rho\frac{d}{d\rho}\left[-\frac{1}{2}\psi\rho^{-1/2}\right], \\
&= \frac{1}{2}\rho^{1/2}\frac{d\psi}{d\rho} + \rho^{3/2}\frac{d^2\psi}{d\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{d\psi}{d\rho}\rho^{1/2} + \frac{1}{4}\psi\rho^{-1/2}
\end{aligned}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\rho\frac{d}{d\rho}\rho^{-1/2}\psi = \rho^{3/2}\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{4}\rho^{-1/2}.$$

Reemplazando se obtiene

$$\rho^{3/2}\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{4}\rho^{-1/2}\omega^2\rho^{-1/2}\psi - (k_1^2 + k_2^2 + m^2)\rho\rho^{-1/2}\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{\omega^2}{\rho^2}\psi - \frac{(k_1^2 + k_2^2 + m^2)}{\rho}\psi + \frac{1}{4\rho^2}\psi = 0.$$

Simplificando

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\omega^2}{\rho} - (k_1^2 + k_2^2 + m^2) + \frac{1}{4\rho}\right]\psi = 0.$$

Al hacer un cambio a coordenadas polares se tiene

$$dk_1 dk_2 = pdpd\theta \longrightarrow \int_{k_1}\int_{k_2} \frac{dk_1 dk_2}{k} = \int_0^{p_{\text{máx}}}\int_0^{2\pi} \frac{pdpd\theta}{k}$$

donde se ha introducido

$$p^2 \equiv k_{1_{\text{máx}}}^2 + k_{2_{\text{máx}}}^2 = \frac{\omega^2}{\rho} - m^2 + \frac{1}{4\rho}. \tag{4.65}$$

Entonces la doble derivada temporal de la función de Wightman se expresa como

$$\partial_0\partial_{0'} W_{M-R}(x,x^{'})|_{x'=x} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(e^{\beta\omega}-1)}\int_0^{p_{\text{máx}}} \frac{pdp}{\rho k}.$$

La integral para el momento resulta igual a [5]

$$\int_0^{p_{\text{máx}}} \frac{pdp}{k} = \rho^{1/2}p,$$

luego, a partir de los resultados anteriores se encuentra

$$\partial_0\partial_{0'} W_{M-R}(x,x^{'})|_{x'=x} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(e^{\beta\omega}-1)}\rho^{-1/2}p. \tag{4.66}$$

Al multiplicar (4.66) por $g^{00} = -\rho^{-1}$ de acuerdo con (4.9) se obtiene

$$\partial^0\partial_{0'} W_{M-R}(x,x^{'})|_{x'=x} = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(e^{\beta\omega}-1)}\rho^{-3/2}p. \tag{4.67}$$

A continuación se deben tener en cuenta ciertas consideraciones:

---

[5] Se tiene

$$\int_0^{p_{\text{máx}}} \frac{pdp}{k} = \sqrt{\rho}\int_0^{p_{\text{máx}}} \frac{pdp}{\sqrt{c-p^2}},$$

con

$$c \equiv \frac{\omega^2}{\rho} - m^2 + \frac{1}{4\rho}.$$

Ahora,

$$\int \frac{udu}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sqrt{a^2-u^2},$$

si $u = p$ y $a^2 = c$, entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho}\int_0^{p_{\text{máx}}} \frac{pdp}{\sqrt{c-p^2}} &= -\sqrt{\rho}\sqrt{c-p^2}\Big|_0^{p_{\text{máx}}},\\ &= \sqrt{\rho}\Big|_{p_{\text{máx}}}^{0} \sqrt{c-p^2},\\ &= \sqrt{\rho}\left(\sqrt{c} - \sqrt{c-p_{\text{máx}}^2}\right).\end{aligned}$$

Se establece $p_{\text{máx}}$ cuando $k_1^2 + k_2^2 = p^2 = \frac{\omega^2}{\rho} - m^2 + \frac{1}{4\rho} \longrightarrow \sqrt{c-p_{\text{máx}}^2} = 0$, con lo cual finalmente se obtiene

$$\int_0^{p_{\text{máx}}} \frac{pdp}{k} = \sqrt{c}\sqrt{\rho} = p\sqrt{\rho}.$$

i. Sea $E = \frac{\omega}{\sqrt{\rho}}$ la energía local por modo

ii. La ley de Tolman establece que $T(r) = \frac{T_R}{\sqrt{\rho}}$

iii. La temperatura de Rindler $T_R = \beta^{-1}$

iv. La energía relativista es $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Así la derivada temporal se escribe como

$$\lim_{x\to x'} < T_0^0(x,x') >_{M-R} = \partial^0\partial_{0'} W_{M-R}(x,x')|_{x'=x} = -\int_0^\infty \frac{E}{e^{E/T}-1}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3}. \tag{4.68}$$

De acuerdo con (4.44), $\mathcal{D}_{\alpha\beta'} = \partial({}_\alpha\partial_{\beta'}) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\partial^\gamma\partial_{\gamma'} + m^2)$, para el caso $\alpha = \beta = 0$ se tiene que

$$\mathcal{D}_{00'} = \partial({}_0\partial_{0'}) - \frac{1}{2}g_{00}(\partial^\gamma\partial_{\gamma'} + m^2)W_{M-R}(x,x').$$

Al realizar la aproximación WKB para el segundo término de la ecuación anterior

$$(\partial^\gamma\partial_{\gamma'} + m^2)W_{M-R}(x,x'), \tag{4.69}$$

si se considera que

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^* = \rho|\partial_\rho\varphi| + \gamma^{AB}\partial_A\varphi\partial_B\varphi^* - \frac{1}{\rho}|\partial_\tau\varphi|^2, \tag{4.70}$$

donde γ^{AB} corresponde a una esfera de radio unitario y φ_Ω dada por la expresión (4.14). De acuerdo con la métrica (4.9) se tiene que

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego,

$$\begin{aligned} \gamma^{AB}\partial_A\varphi\partial_B\varphi^* &= [(1)\partial_z\varphi\partial_z\varphi^* + (1)\partial_y\varphi\partial_y\varphi^*], \\ &= |\partial_z\varphi|^2 + |\partial_y\varphi|^2, \end{aligned}$$

reemplazando en (4.70) se obtiene

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^* = \frac{\rho}{2\omega}\frac{|\varphi'(\rho)|^2}{4\pi} - \frac{\omega^2|\varphi(\rho)|^2}{2\omega 4\pi\rho} + \frac{|\varphi(\rho)|^2}{2\omega 4\pi}(k_1^2 + k_2^2),$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{2|\omega|}{2}\sum_{\eta=\pm}\sum_{k_1,k_2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^* &= \frac{2|\omega|}{2}\left[\sum_{\eta=\pm}\sum_{k_1,k_2}\frac{1}{2\omega 4\pi}\left\{\rho|\varphi'(\rho)|^2 - \frac{\omega^2|\varphi(\rho)|^2}{\rho} + |\varphi(\rho)|^2(k_1^2+k_2^2)\right\}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{\eta=\pm}\sum_{k_1,k_2}\frac{|\varphi(\rho)|^2}{4\pi}\left\{\rho\left[\frac{d}{d\rho}\ln\varphi(\rho)\right]^2 - \frac{\omega^2}{\rho} + (k_1^2+k_2^2)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{4.71}$$

El término entre paréntesis se escribe como

$$\rho\left[\frac{d}{d\rho}Ln\varphi(\rho)\right]^2-\frac{\omega^2}{\rho}+(k_1^2+k_2^2)=\frac{\rho}{4}\left[\frac{d}{d\rho}Ln(\rho k)\right]^2-m^2+\frac{1}{4\rho},$$

lo cual se puede probar puesto que a partir de (4.60), (4.63) y (4.64) se obtiene

$$\ln\varphi(\rho)=i\int kd\rho-\frac{1}{2}\ln(\rho k)+c, \tag{4.72}$$

luego,

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{d\rho}\ln\varphi(\rho)\right]^2&=\left|ik-\frac{1}{2\rho}\right|^2=k^2,\\&=k^2+\frac{1}{4\rho^2},\\&=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\omega^2}{\rho}-(k_1^2+k_2^2)-m^2+\frac{1}{4\rho}\right]+\frac{1}{4\rho^2},\end{aligned}$$

con lo cual se confirma la prueba.
Reemplazando todo lo anterior en (4.71) se obtiene

$$\frac{1}{2}\sum_{\eta=\pm}\sum_{k_1,k_2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^*=\frac{1}{8\pi}\frac{|\varphi(\rho)|^2}{\omega}\sum_{\eta=\pm}\sum_{k_1,k_2}\left\{\frac{\rho}{4}\left[\frac{d}{d\rho}\ln(\rho k)\right]^2-m^2+\frac{1}{4\rho}\right\},$$

luego sumando sobre los modas que entran y salen $\eta=\pm$ se obtiene

$$\sum_{k_1,k_2}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_\Omega\partial_\nu\varphi_\Omega^*+m^2\varphi_\Omega\varphi_\Omega^*)=\frac{1}{4\pi}\frac{|\varphi_{\omega k_1k_2}(\rho)|^2}{\omega}\sum_{k_1,k_2}\alpha_{\omega k_1k_2}(\rho), \tag{4.73}$$

donde

$$\alpha_{\omega k_1k_2}(\rho)=\frac{\rho}{4}\left[\frac{d}{d\rho}\ln(\rho k)\right]^2+\frac{1}{4\rho}. \tag{4.74}$$

Así al tener en cuenta la expresión (4.57) y reemplazar (4.72) y (4.73) en (4.69) se obtiene

$$\begin{aligned}(\partial^\gamma\partial_{\gamma'}+m^2)W_{M-R}(x,x^{'})&=\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^{-1}d\omega}{e^{\beta\omega}-1}\sum_{k_1,k_2}|\varphi(\rho)|^2\alpha_{\omega k_1k_2}(\rho),\\(\partial^\gamma\partial_{\gamma'}+m^2)W_{M-R}(x,x^{'})&=\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^{-1}d\omega}{e^{\beta\omega}-1}\sum_{k_1,k_2}|\varphi(\rho)|^2\alpha_{\omega k_1k_2}(\rho).\end{aligned} \tag{4.75}$$

Al comparar esta última expresión con (4.59)

$$\partial_0\partial_{0'}W_{M-R}(x,x^{'})|_{x'=x}=\int_0^\infty\frac{\frac{\omega}{4\pi^2}}{e^{\beta\omega}-1}\sum_{k_1}\sum_{k_2}|\varphi_\Omega(\rho)|^2,$$

se evidencia que cerca al horizonte se tenie el dominio de los modos de alta frecuencia, con lo cual la

contribución de (4.75) es menor que la de (4.59).

4.5. Termodinámica

La probabilidad de que un sistema en equlibrio térmico se encuentre en un estado n al cual se le asocia una energía E_n, esta dada por

$$P(E) = \frac{e^{\beta E_n}}{Z} \tag{4.76}$$

con Z la función de partición establecida en (4.38), dada por

$$Z_\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}. \tag{4.77}$$

Si una función $f(\omega)$, tiende a cero cuando $\omega \to \infty$, entonces la función se puede escribir como

$$\sum_\Omega f(\omega) \equiv \int_0^\infty N(\omega) f(\omega) d\omega, \tag{4.78}$$

así se tiene

$$\ln Z = \sum_\Omega \ln Z_\Omega = \sum_\Omega f(\omega) = \int_0^\infty N(\omega) f(\omega) d\omega, \tag{4.79}$$

con

$$f(\omega) = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right). \tag{4.80}$$

donde $N(\omega)d\omega$ es el número de modos.
Para que la entropía S sea finita se deben restringir los valores discretos de $\{n = 0, 1, 2, ..\}$.
El resultado que se obtiene para la densidad de energía del observador FREFOS (4.68), es similar al que se obtiene para el observador FIDO (C.55) y el modelo de la pared de t'Hooft. Entonces se puede usar el modelo de la pared para especificar la restricción de los $\{n\}$.
Sin embargo, en este punto se hace necesario hacer una restricción sobre los vectores de onda k_1 y k_2 de la expresión (4.63). Sea

$$\tilde{k}_{max} = \frac{\omega^2}{\rho} - m^2 + \frac{1}{4\rho} \qquad \text{y} \qquad \tilde{k} = k_1^2 + k_2^2, \tag{4.81}$$

luego (4.63) se escribe como

$$k(\rho; \omega, \tilde{k}) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}[\tilde{k}_{max} - \tilde{k}]^{1/2}. \tag{4.82}$$

Con lo anterior se usa la condición sobre el número de onda radial $k^2(\rho; \omega, \tilde{k}) \geq 0$, con k definido por la expresión (4.68) de la aproximación WKB. Con la condición de frontera de Dirichlet $\psi(\rho) = 0$ en la frontera interior $\rho = \rho_0 + \epsilon$ del modelo de la pared, la solución que se obtiene de la aproximación WKB

(4.68) es bajo esta restricción

$$\psi_\eta = \frac{1}{\sqrt{k(\rho;\omega_n,\tilde{k})}} \operatorname{sen} \int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho_n} k(\rho^{'};\omega_n,\tilde{k})d\rho^{'}, \tag{4.83}$$

donde para un modo permitido, $k(\rho)$ y $\psi(\rho)$ se deben anular de manera simultánea en el n-ésimo nodo $\rho = \rho_n$. Los valores de $\tilde{k}$, n y η se limitan por

$$\ln Z = \sum_{\tilde{k},n,\eta=\pm} \ln\left(\frac{1}{1-e^{\beta\omega_{\tilde{k}n}}}\right). \tag{4.84}$$

Así se impone

$$\int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho(\omega,\tilde{k})} k(\rho^{'};\omega_n,\tilde{k})d\rho^{'} = n\pi, \tag{4.85}$$

$$k^2(\rho_n,\omega_n,\tilde{k}) \geq 0, \tag{4.86}$$

lo cual significa que $k(\rho)$ es grande cerca de $\rho_0+\epsilon$ y decrece con el incremento de ρ. Con esta condición $k^2(\rho)$ y $\psi(\rho)$ se deben hacer cero después de n oscilaciones para $\rho = \rho_n$.
Para escribir (4.84) como una integral, y en lugar de $\tilde{k}, n$ como variables independientes de integración, se cambia a $\tilde{k}, \omega$ como variables independientes con $n = n(\omega,\tilde{k})$, asi, con ayuda de (4.85) y (4.86) se obtiene

$$n(\omega,\tilde{k}) = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho(\omega,\tilde{k})} k(\rho^{'};\omega,\tilde{k})d\rho^{'}; \qquad k^2(\rho(\omega,\tilde{k});\omega,\tilde{k}) = 0, \tag{4.87}$$

$$\frac{\partial n(\omega,\tilde{k})}{\partial\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho(\omega,\tilde{k})} \frac{\partial k(\rho^{'},\omega,\tilde{k})}{\partial\omega}d\rho^{'} + \frac{1}{\pi}\frac{\partial\rho(\omega,\tilde{k})}{\partial\omega}k(\rho(\omega,\tilde{k});\omega,\tilde{k}), \tag{4.88}$$

donde el segundo término de (4.88) es nulo debido a la segunda expresión de (4.87). De las expresiones (4.84) y (4.88) se obtiene

$$\ln Z = \iint \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right) d\tilde{k}dn, \tag{4.89}$$

como $n = n(\omega,\tilde{k})$, entonces

$$\ln Z = \iint \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right)\frac{\partial n}{\partial\omega}d\omega d\tilde{k},$$

$$\ln Z = \iint \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right)\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial k(\rho^{'},\omega,\tilde{k})}{\partial\omega}d\rho^{'}d\omega d\tilde{k},$$

así, se obtiene

$$\ln Z = \frac{1}{\pi}\iiint_{k^2(\rho^{'};\omega,\tilde{k})\geq 0} \frac{\partial k(\rho^{'};\omega,\tilde{k})}{\partial\omega}\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\right)d\rho^{'}d\omega d\tilde{k}, \tag{4.90}$$

donde los límites de integración son las superficies $k^2(\rho^{'}, \omega, \tilde{k}) = 0$, para $\rho^{'} = \rho_0 + \epsilon$, $\rho^{'} = \rho$, con $\tilde{k} \geq 0$ y $\omega \geq 0$, restringidos por la condición $k^2(\rho^{'}; \omega, \tilde{k}) \geq 0$.
Al integrar por partes (4.90), se reescribe como

$$\ln Z = \frac{1}{\pi} \iiint k(\rho^{'}; \omega, \tilde{k}) \left(\frac{\beta}{e^{\beta\omega} - 1} \right) d\rho^{'} d\omega d\tilde{k}. \tag{4.91}$$

Ahora de acuerdo con (4.82), se tiene

$$\begin{aligned} \int k(\rho^{'}; \omega, \tilde{k}) d\tilde{k} &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\tilde{k}_{max}} [\tilde{k}_{max} - \tilde{k}]^{1/2} d\tilde{k}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{2}{3} \tilde{k}_{max}^{3/2}, \end{aligned} \tag{4.92}$$

con lo anterior, (4.91) se escribe

$$\ln Z = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{\rho_0 + \epsilon}^{\rho} \frac{\beta}{e^{\beta\omega} - 1} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{2}{3} \tilde{k}_{max}^{3/2} d\rho^{'} d\omega. \tag{4.93}$$

A partir de la expresión anterior se obtiene las variables termodinámicas de la energía libre de Helmholtz F y la energía promedio U. Para la energía de Helmholtz se tiene

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\int_0^{\infty} \frac{\beta N(\omega)}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega, \tag{4.94}$$

con

$$N(\omega) = \frac{2}{3\pi} \int \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[\frac{\omega^2}{\rho} - m^2 + \frac{1}{4\rho} \right]^{3/2} d\rho. \tag{4.95}$$

Para la energía promedio se tiene

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z, \\ &= \frac{\partial}{\partial\beta} (\beta F), \\ &= F + \beta \frac{\partial F}{\partial\beta}, \\ &= -\int_0^{\infty} \left[1 - \frac{\beta\omega e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \frac{N(\omega) d\omega}{e^{\beta\omega} - 1}. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Se puede reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} U &= -\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \left[N(\omega) - \frac{\partial}{\partial\omega} (\omega N(\omega)) \right], \\ &= \int_0^{\infty} \frac{N^{'}(\omega) \omega d\omega}{e^{\beta\omega} - 1}, \end{aligned} \tag{4.97}$$

con

$$N^{'}(\omega) = \frac{2\omega}{\rho\pi}\int \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{\omega^2}{\rho} - m^2 + \frac{1}{4\rho}\right]^{1/2} d\rho. \tag{4.98}$$

Para convertir la energía promedio en una expresión estadística-termodinámica, se cambian las variables de integración ρ y ω por ρ y p, donde de acuerdo con (4.65)

$$p^2 = \frac{\omega^2}{\rho} - m^2 + \frac{1}{4\rho},$$

luego,

$$pdpd\rho d\sigma = \frac{\omega d\omega}{\rho} d\rho d\sigma. \tag{4.99}$$

Así, las expresiones (4.97) y (4.98), llevan a un valor de energía promedio dado por

$$U = \int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho^*}\int_0^{\sigma} 4\pi d\rho d\sigma^{'} \int_0^{\infty} \frac{E}{e^{\beta\omega}-1}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{4.100}$$

donde se ha introducido de manera explícita el valor de $\hbar = 1$. Además, de las consideraciones dadas para obtener la densidad de energía (4.68), se establece que la energía de modo con frecuencia ω es $E = \frac{\omega}{\sqrt{\rho}}$; con $\omega(p,\rho)$ dado por (4.65), siendo p el momento local efectivo. De acuerdo con lo anterior

$$\beta\omega = \frac{E}{T(\rho)}, \quad \text{y} \quad T(\rho) = \frac{\beta^{-1}}{\sqrt{f(\rho)}}, \tag{4.101}$$

con lo cual la expresión (4.100) se convierte en

$$U = \int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho^*}\int_0^{\sigma} 4\pi \cdot u(\rho) d\rho d\sigma^{'}, \tag{4.102}$$

donde se identifica a $u(\rho)$ como la densidad de energía dada por,

$$u(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{E}{e^{\frac{E}{T}}-1}\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}, \tag{4.103}$$

$$E^2 = p^2 + m^2 - \frac{1}{4\rho} \approx p^2 + m^2. \tag{4.104}$$

La entropía se obtiene a partir de (4.94) y (4.96) como[6]

$$S = \beta(U - F), \tag{4.105}$$

$$= \beta\int_0^{\infty}\left[\frac{N(\omega)\beta\omega e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^2} - \frac{N(\omega)}{e^{\beta\omega}-1} + \frac{N(\omega)}{e^{\beta\omega}-1}\right] d\omega,$$

$$= \beta^2\int_0^{\infty}\frac{N(\omega)\omega e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^2} d\omega. \tag{4.106}$$

[6]Este resultado es consistente desde el punto de vista de la teoría de entrelazamiento, donde se establece que la entropía que se asocia tanto al observador FIDO como al obervador FREFOS es una entropía de entrelazamiento o *entanglement*. Ver apéndice E

Con ayuda de las expresiones (4.65), (4.95) y (4.99), la entropia se escribe como

$$S = \frac{2}{3\pi}\beta^2 \iint \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}(p^2)^{3/2}\frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega}-1)^2}pdp\rho, \tag{4.107}$$

y al usar de nuevo las condiciones (4.101)

$$S = \frac{1}{3T^2}\int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho^*}\int_0^{\sigma}\frac{4\pi}{\sqrt{\rho}}d\rho d\sigma^{'}\int_0^{\infty}\frac{p^2e^{E/T}}{e^{E/T}-1}\frac{4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{4.108}$$

Por lo tanto, la entropía se puede escribir de la forma

$$S = \int_{\rho_0+\epsilon}^{\rho^*}\int_0^{\sigma}\frac{4\pi\cdot s(\rho)}{\sqrt{\rho}}d\rho d\sigma^{'}, \tag{4.109}$$

con $s(r)$ la densidad de entropía dada por

$$s(r) = \frac{1}{3T^2}\int_0^{\infty}\frac{p^2e^{E/T}}{(e^{E/T}-1)^2}\frac{4\pi p^2dp}{h^3}. \tag{4.110}$$

A partir de [9] se realiza el cálculo de la entropía, donde la presión P y la densidad de entropía s en términos de el momento p y la densidad de energía ρ son

$$P = \frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{vp}{(e^{\beta E}-1)}\frac{4\pi p^2dp}{h^3}, \tag{4.111}$$

$$s = \beta(\rho + P). \tag{4.112}$$

Debido a que se está realizando una descripción cerca al horizonte, en la que la temperatura local T establecida por la ley de Tolman es alta, se utilizan las siguientes aproximaciones relativistas

$$E >> m, \qquad p \simeq E, \qquad v \simeq 1, \tag{4.113}$$

bajo las cuales

$$P \approx \frac{1}{3}u(\rho). \tag{4.114}$$

Por medio de las aproximaciones (4.113) se obtiene para la presión (4.111)

$$P = \frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{4\pi p^3dp}{(e^{\beta E}-1)h^3}. \tag{4.115}$$

Al considerar que

$$\frac{E}{T} \approx \frac{p}{T} = x, \tag{4.116}$$

y reemplazar en (4.103) se llega a

$$u(\rho) = \int_0^{\infty}\frac{E}{e^{\frac{E}{T}}-1}\frac{4\pi p^2dp}{h^3} \approx \frac{4\pi T^4}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}. \tag{4.117}$$

La integral tiene como solución

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} 3! \frac{1}{n^4} = \frac{\pi}{15}, \tag{4.118}$$

al reemplazar en (4.117)

$$u(\rho) \approx \frac{\pi^2 T^4}{30\hbar^3}. \tag{4.119}$$

El cálculo de la presión se realiza mediante (4.114), donde se encuentra

$$P = \frac{1}{3} u(\rho) = \frac{1}{3} \frac{\pi^2 T^4}{30\hbar^3} = \frac{\pi^2 T^4}{90\hbar^3}. \tag{4.120}$$

La densidad de entropía (4.112) resulta ser de acuerdo con (4.114), (4.119) y (4.120)

$$s = \beta(\rho + P) = \frac{1}{T} \frac{4}{3} u = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi^2 T^3}{30\hbar^3} \right), \tag{4.121}$$

con T la temperatura local que se establece en la ley de Tolman.
La entropía para la temperatura de Rindler se obtiene al sustituir (4.121) en (4.109)

$$S = \int_{\rho_1}^{\rho_1 + \delta} \sigma \frac{4\pi}{\sqrt{\rho}} \frac{4}{3} \left(\frac{\pi^2 T^3}{30\hbar^3} \right) d\rho. \tag{4.122}$$

De acuerdo con la ley de Tolman, la cual establece que la temperatura local es

$$T = T_\infty f^{-1/2}, \tag{4.123}$$

con T_∞ la temperatura de Rindler $T_\infty = \frac{g}{2\pi}$, y g la aceleración propia asociada a un observador acelerado. Así, la entropía es

$$S = 4\pi\sigma \left(\frac{4\pi^2 T_\infty^3}{90\hbar^3} \right) \int_{\rho_1}^{\rho_1 + \delta} \frac{d\rho}{\rho^2}, \tag{4.124}$$

con δ una longitud arbitrariamente pequeña sujeta a la condición $\Delta\rho << \delta << \rho_1$, y $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0$. Además se tiene que $f(\rho) = \rho$ (de la aproximación de Rindler 4.1) se puede escribir bajo la siguiente aproximación lineal de la gravedad superficial κ como

$$f(\rho) \simeq 2\kappa(\rho - \rho_0). \tag{4.125}$$

A continuación se introduce un corte para evitar la divergencia de la entropía, el cual se identifica con α que tiene unidades de longitud y está dado por

$$\alpha = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}, \tag{4.126}$$

$$= (2\kappa)^{1/2} \int_{\rho_0}^{\rho_1} (\rho - \rho_0)^{1/2} d\rho,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\kappa}} (\rho - \rho_0)^{1/2} \Big|_{\rho_0}^{\rho_1}, \tag{4.127}$$

con lo cual se obtiene

$$\alpha^2 = \frac{2}{\kappa} \Delta\rho, \tag{4.128}$$

y por lo tanto

$$\Delta\rho = \frac{1}{2} \kappa \alpha^2. \tag{4.129}$$

Al usar la expresión (4.124) se encuentra de manera explícita la entropía

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi\sigma \left(\frac{4\pi^2 T_\infty^3}{90\hbar^3} \right) \int_{\rho_1}^{\rho_1+\delta} \frac{d\rho}{[2\kappa(\rho - \rho_0)]^2}, \\
&= 4\pi\sigma \left(\frac{4\pi^2 T_\infty^3}{90\hbar^3} \right) \frac{1}{4\kappa^2} \int_{\rho_1}^{\rho_1+\delta} \frac{d\rho}{(\rho - \rho_0)^2}, \\
&= -4\pi\sigma \left(\frac{4\pi^2 T_\infty^3}{90\hbar^3} \right) \frac{1}{4\kappa^2} \frac{1}{(\rho - \rho_0)} \Big|_{\rho_1}^{\rho_1+\delta}, \\
&= -4\pi\sigma \left(\frac{4\pi^2 T_\infty^3}{90\hbar^3} \right) \frac{1}{4\kappa^2} \left(\frac{1}{(\rho_1 - \rho_0 + \delta)} - \frac{1}{(\rho_1 - \rho_0)} \right), \\
&= 4\pi\sigma \left(\frac{4\pi^2 T_\infty^3}{90\hbar^3} \right) \frac{1}{4\kappa^2 \Delta\rho}, \\
&= 4\pi\sigma \left(\frac{4\pi^2 T_\infty^3}{90\hbar^3} \right) \frac{2}{4\kappa^3 \alpha^2}.
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Del principo de equivalencia y la ley de Tolman se establece

$$T_\infty = \frac{g}{2\pi} = \frac{\kappa}{2\pi}, \tag{4.131}$$

con lo anterior, la expresión para la entropía en unidades de Planck es

$$S = \left(\frac{2}{45\alpha^2} \right) \frac{1}{4} \sigma. \tag{4.132}$$

Dependiendo del valor de α, se puede hacer que la entropía coincida con la entropía de Bekenstein-Hawking.

4.6. Densidad de energía negativa

Para el modelo (1+1) se tiene la diferencia de los tensores momento-energía por medio de la expresión (2.111)

$$\Delta T^a_{\ b} = (T^b_{\ a})_{HH} - (T^b_{\ a})_B, \tag{4.133}$$

donde el término $\Delta T^a_{\ b}$ se identifica con un ambiente térmico de signo negativo que cancele la divergencia que impone el tensor momento-energía de Boulware tal que

$$(T^b_{\ a})_{HH} = (T^b_{\ a})_B + \Delta T^a_{\ b}. \tag{4.134}$$

Esta expresión está de acuerdo con lo que un observador en caída libre mide al acercarse al horizonte, una fluctuación muy débil donde en promedio el número de partículas es nulo.
Con lo que se desarrolló en el apéndice (C.3), se encuentra que la expresión (4.133) se generaliza a(3+1) por medio de la expresión (C.55) que representa la densidad de energía para los estados de Hartle-Hawking y Boulware asociados con el observador FIDO

$$\lim_{x\to x'} < T^0_0(x,x^{'}) >_{H-B} = \partial^0\partial_{0'} W_{H-B} = -\int_0^\infty \frac{E}{e^{E/T}-1}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3}, \tag{4.135}$$

así se da la validez de (4.134) en (3+1).
De igual manera, recurriendo al principio de equivalencia se tiene la expresión (4.68) que representa la densidad de energía para los estado de Minkowsi y Rindler asociados al observador FREFOS

$$\lim_{x\to x'} < T^0_0(x,x^{'}) >_{M-R} = \partial^0\partial_{0'} W_{M-R}(x,x^{'})|_{x'=x} = -\int_0^\infty \frac{E}{e^{E/T}-1}\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3}, \tag{4.136}$$

cuya expresión similar a (4.134)

$$(T^b_{\ a})_M = (T^b_{\ a})_R + \Delta T^a_{\ b}. \tag{4.137}$$

En la teoría completa del vacío se considera el vacío de Unruh cuyo tensor momento energía está dado por (2.133) y (2.134), que al igualarse

$$\langle T_{ab}\rangle_B + H^s(u)u_{,a}u_{,b} = \langle T_{ab}\rangle_H - H^e(v)v_{,a}v_{,b}, \tag{4.138}$$

con lo cual

$$\langle T_{ab}\rangle_H - \langle T_{ab}\rangle_B = H^e(v)v_{,a}v_{,b} + H^s(u)u_{,a}u_{,b}, \tag{4.139}$$

Al excluir el efecto hacia el exterior del flujo que sale del término $H^s(u)u_{,a}u_{,b}$, el cual se identifica con la evaporación del agujero negro, y sólo tomar en cuenta el flujo que entra se obtiene

$$\langle T_{ab}\rangle_H - \langle T_{ab}\rangle_B = H^e(v)v_{,a}v_{,b}. \tag{4.140}$$

Esta expresión que describe el efecto hacia el horizonte, muestra que el ambiente térmico encontrado en las expresiones (4.133), (4.135) y (4.136) se identifica como un flujo que entra al horizonte cuya validez

se generaliza a (3+1).

En este punto, se tiene que los dos observadores FIDO y FREFOS detectan la presencia de un ambiente térmico dado por la expresiones (4.135) y (4.136). Para tener una idea de cual de las densidades de energía pesa más, se realiza un análisis númerico como se expone a continuación.[7]

Para resolver la integral (4.135) se toman las siguientes consideraciones:

1. La energía $E^2 = p^2 + m^2$, con m la masa del campo.

2. $f = (1 - \frac{2M}{r})$, con M, la masa de la fuente.

3. La temperatura Hawking $T_H = \frac{1}{8\pi M}$

4. La temeperatura $T = \frac{T_H}{\sqrt{f}}$

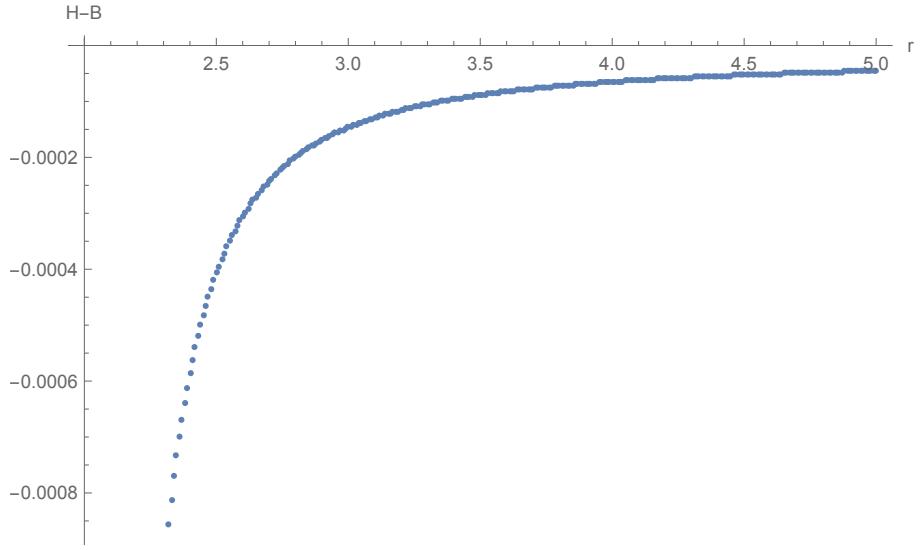

Figura 4.3: Densidad de energía HB para el observador FIDO en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$.

La gráfica 4.3, muestra que conforme $r \to R_S$ la densidad de energía tiende a menos infinito; mientras que si $r \to \infty$, la densidad de energía se mantiene acotada.
Para resolver la integral (4.136) se toman las siguientes consideraciones:

1. La energía $E^2 = p^2 + m^2$, con m la masa del campo.

2. $\rho = \frac{r}{2M} - 1$[8].

[7] La solución numérica de las integrales se realizó con el software de *Mathematica*.
[8] Esta transformación se toma con base en cálculo de la sección 4.1

3. La temperatura Hawking $T_H = \frac{1}{8\pi M}$

4. La temeperatura $T = \frac{T_H}{\sqrt{\rho}}$

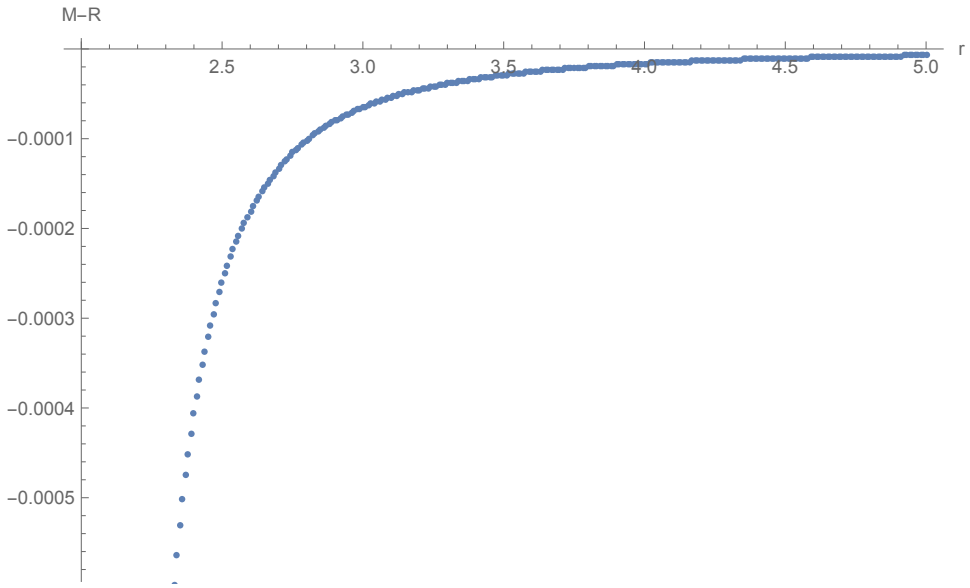

Figura 4.4: Densidad de energía MR para el observador FREFOS en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$

La gráfica 4.4, muestra que conforme $r \to R_S$ la densidad de energía tiende a menos infinito; mientras que si $r \to \infty$, la densidad de energía tiende a cero.
Una diferencia entre las densidades de energía muestra que la densidad de HB, que se le asocia al observador FIDO, es mayor que la densidad de energía MR que se le asocia al observador FREFOS como lo muestra la gráfica 4.5.

Finalmente, a pesar de que la densidad $HB > MR$, cuando $r \to 2M$, el cociente de las densidades tienden a uno. Lo anterior muestra la independencia del resultado del ambiente térmico para los dos observadores relativistas, como se muestra en la siguiente figura (4.6).

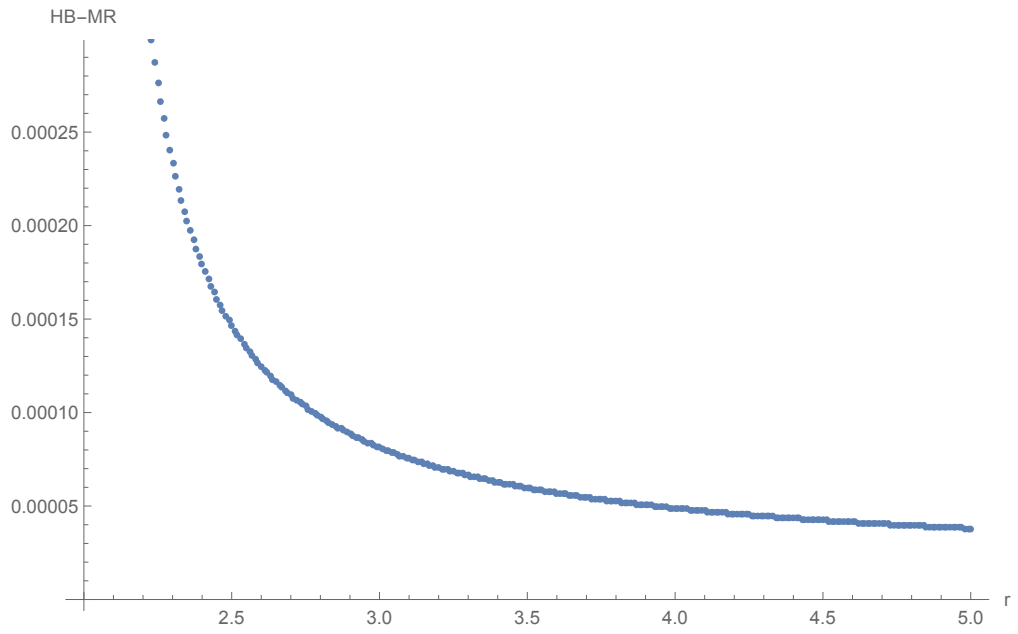

Figura 4.5: Diferencia de densidades de energía $MR - HB$ en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$.

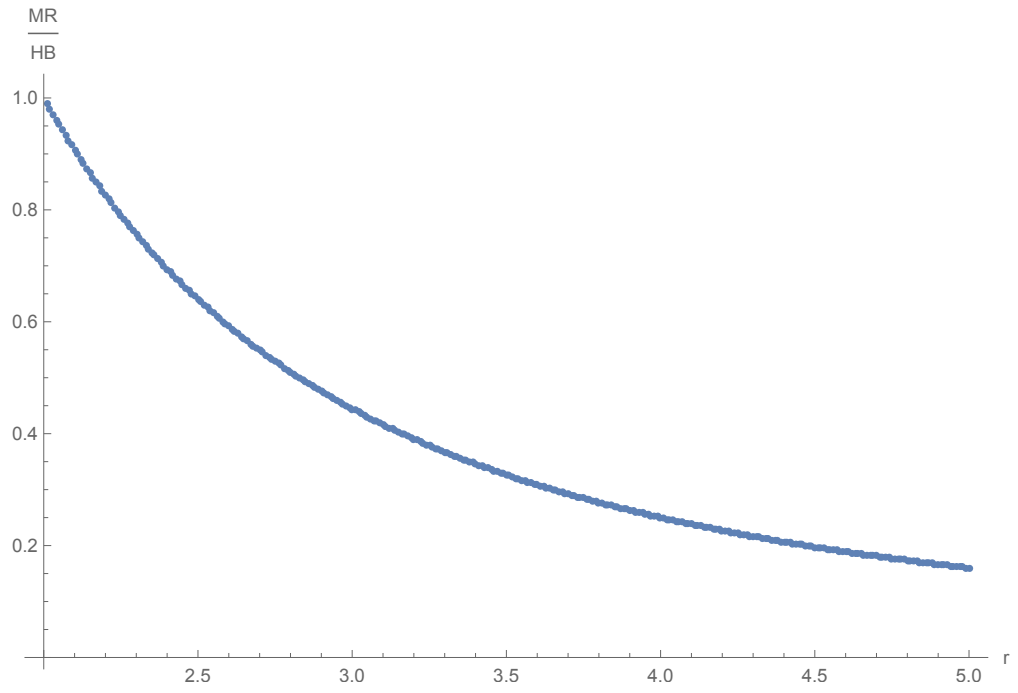

Figura 4.6: Razón entra las densidades de energía MR/HB en función del radio r, para $M = 1$ y $m = 0$.

Capítulo 5

Resultados y Discusión

A continuación se señalan los aportes principales del trabajo para el estudio del colapso de un cascarón delgado de polvo, con respecto a los observadores relativistas FIDO y FREFOS. Desde un enfoque clásico y uno semiclásico, a partir de los resultados de los capítulos 3 y 4, se establece lo siguiente.

5.1. Enfoque clásico

- Desde el enfoque clásico se establece que para describir la dinámica del cascarón se empleó el formalismo de Darmois-Israel [57, 60–63] (sección 2.2.2). De acuerdo con este formalismo el espacio-tiempo se divide en tres partes diferentes las cuales deben satisfacer condiciones de unión o juntura. Para este caso, la parte interior corresponde a un espacio-tiempo de Minkowski plano, la exterior se describe por la métrica de Schwarzschild simétrica esféricamente, y la frontera entre ellas corresponde a una métrica inducida que satisface las condiciones de juntura y la cual se interpreta como un cascarón delgado de polvo. Como resultado de la exigente compatibilidad entre las tres métricas espacio-temporales, se obtiene una ecuación diferencial que gobierna el movimiento del cascarón y depende de la masa gravitacional del cascarón M y una constante de integración adicional m, la cual se asocia a la masa en reposo (sección 3.1).

- Al usar un vector particular que se orienta a lo largo del movimiento del cascarón, se investigaron las superficies críticas alrededor de las cuales ocurría un intercambio entre las coordenadas de espacio y tiempo, asemejando el comportamiento alrededor de un horizonte (sección 3.2). Se encontrarón dos superficies críticas. La primera aparece cuando el radio del cascarón iguala su radio gravitacional ($R = 2M$), es decir, el correspondiente al radio de Schwarzschild R_S del espacio-tiempo exterior. El radio R_h de la segunda superficie crítica siempre es más grande que el radio gravitacional del cascarón y su valor explícito depende de los valores de la masa gravitacional y la masa en reposo.

- La interpretación de esas superficies críticas como horizontes es problemática debido al comportamiento dinámico del cascarón. La definición estándar de un horizonte de eventos se asocia a las

propiedades globales del espacio-tiempo, las cuales hacen esta labor difícil y más aún imposible de analizar su evolución. Debido a esto se indagó sobre las propiedades locales del espacio-tiempo. Para ello, se analizó el comportamiento de vectores nulos ortogonales a la superficie del cascarón (ver sección 3.4). Así, resulta que todas las superficies con distancia radial constante se caracterizan por una expansión que desaparece. Consecuentemente, las dos superficies críticas localizadas en R_S y R_h corresponden a superficies atrapadas exteriores marginalmente, las cuales se asocian con horizontes cuasi-locales (apéndice A.3). Aún más, si la superficie critica localizada en el radio gravitacional $R = 2M$ es una superficie nula, esta se puede interpretar como un horizonte aparente.

- Para el caso particular de un cascarón delgado, cuya masa en reposo es el doble de su masa gravitacional ($m = 2M$), no existe ningún horizonte y el estado final de la evolución del cascarón corresponde a una singularidad de curvatura, la cual aparece como el radio del cascarón tendiendo a cero. Esta configuración se ha denotado como *cascarón desnudo* (ver sección 3.3). Esta es una configuración muy peculiar que aparece sólo debido a la existencia de la segunda superficie crítica R_h. De hecho, mientras que el vector que se usa para detectar superficies críticas, para $m \neq 2M$ predice la existencia de dos localizaciones con norma cero en R_S y R_h, en el caso límite con $m = 2M$ no muestra ningún cero. Esto significa que durante el colapaso de un cascarón con masa $m = 2M$ ningún intercambio entre espacio y tiempo ocurre y por lo tanto ningún horizonte aparece que pudiese ocultar la singularidad de curvatura del espacio-tiempo exterior.

- Por otra parte, la configuación de cascarón desnudo es una predicción teórica real de la aproximación presentada aquí. En verdad, la singularidad $r = 0$ es una predicción geniuna de la aproximación de este trabajo puesto que esta se basa sobre el análisis de un escalar de curvatura independiente de las coordenadas (ecuación 3.23). Esta se cumple para el caso particular $m = 2M$, es decir, para un cascarón con una energía de enlace grande, que es una condición realizable de manera física. En este sentido, la predicción de la existencia de cascarones desnudos está de acuerdo con las expectativas físicas desde un punto de vista teórico. Además, la formación de un cascarón desnudo está permitida de manera dinámica ya que la ecuación de movimiento en este caso conduce solo a una restricción en el intervalo espacial, donde el cascarón desnudo puede moverse, es decir, $R \in (0, 2M]$. Lo anterior significa que la métrica interior se usa para describir la región del espacio-tiempo en el interior de una esfera de radio $2M$, mientras que para el exterior de esta esfera el espacio-tiempo es descrito por la métrica de Schwarzschild.

- La configuración de cascarón desnudo descrita en la sección (3.3) como un proceso dinámico, no se conoce en la literatura. Sin embargo, el concepto de singularidades nulas tipo-cascarón[1] se ha introducido de manera previa en una situación completamente diferente, para describir un modelo mundo-brana[2] no dinámico 5-dimensional [73].

- Se asumió la validez de las leyes de la termodinámica y así se consideró el cascarón colapsado como un sistema termodinámico, con lo cual se mostró que la relación de Bekenstein-Hawking

[1] Traducción del inglés de *shell-like*
[2] Traduccción del inglés de *braneworld*

para la entropía se cumple tanto para el caso estático como para el caso dinámico (sección 3.5). Para el caso estático se planteó una estrategia de cálculo diferente la cual estaba de acuerdo con el resultado de Martínez-Lemos [68, 69] (sección 3.5.2). A partir de este método se encuentra la entropía del cascarón para el caso dinámico, partiendo de la existencia de la segunda superficie crítica R_h. Con lo anterior, se encuentra un resultado que al tomar el límite sobre $r \to 2M$ reproduce lo que ya se tenía establecido para el caso estático (sección 3.5.2). A manera de prueba de consistencia se verifica la ley de Smarr para un R_h particular (sección 3.5.3).

5.2. Enfoque semiclásico

- Como se señaló en la sección 2.1.2, la aproximación semiclásica considera la presencia del campo gravitacional ignorando los efectos cuánticos de la gravedad sobre los campos cuánticos de materia. Así, en regiones donde el radio de curvatura es mucho mayor que la longitud de Planck, la aproximación es válida [14]. En este orden de ideas, se describe la termodinámica de un campo escalar que se encuentra en la vecindad del horizonte de eventos de un cascarón negro en colapso gravitacional, con respecto al observador relativista FREFOS (sección 4.1 a 4.3). Para ello, se realizó la descripción del cascarón negro y los estados de vacío de Minkowski y Rindler dentro del contexto de la Dinámica de Campos Térmicos (DCT) (sección 2.4), siguiendo una metodología de cálculo similar a la que se establece para el observador FIDO (apéndice C).

- A partir de la construcción del estado de vacío de Minkowski, que es el vacío global asociado a este espacio-tiempo, se procede a calcular la componente temporal del tensor momento-energía; y por medio de la aproximación WKB, se encuentra la densidad de energía asociada con el observador FREFOS (sección 4.4). Con lo anterior se muestra el carácter térmico de la densidad de energía y se asume que se localiza cerca del horizonte. La justificación de esta localización se establece a partir de la ecuación (4.65) donde se tiene la dependencia de p^2 con ω. Estar cerca al horizonte significa que la distancia $\rho \sim 0$ (sección 4.1), luego, para cualquier valor de ω el momentum p sería muy grande y, teniendo encuenta la expresión (4.63) se evidencia que existe una mayor contribución por parte de los k_1 y k_2. Así los valores $\Omega = \omega, k_1, k_2$ asociados con los modos del campo, son dominantes cerca al horizonte.

- Con base en la interpretación térmica de la densidad de energía, se proceden a calcular las cantidades termodinámicas asociadas al observador FREFOS, asumiendo un ensamble canónico (sección 4.5). La función de partición se obtiene de la construcción del vacío de Minkowski dada por la DCT. Con lo anterior se calculan la energía promedio y la entropía. La entropía que resulta es proporcional al área y depende de un corte α que evita la divergencia de la misma. Al ajustar el valor del corte α se encuentra el valor establecido por Bekenstein-Hawking.

- En el modelo del cascarón negro se consideran dos fuentes de entropía:

  a) El cascarón, al cual se le asocian fuertes excitaciones térmicas cerca a su radio gravitacional, con un estado de vacío tipo Boulware

b) Los agujeros negros, con horizonte de eventos y débil efecto de energía del vacío, con un estado de vacío de Hartle-Hawking.

Para observadores en caída libre (FREFOS), cerca al horizonte, se encontró que el vacío tiene los comportamientos mencionados con anterioridad. En particular la fuente de entropía (a) se manifiesta como una sutil anulación entre una energía térmica muy grande y una opuesta e igual debida al estado de vacío. Esto se justifica por medio del principio de equivalencia y su relación a la naturaleza del espacio-tiempo en la vecindad del horizonte, donde el vacío de Minkowski se muestra para un observador acelerado como una excitación térmica por encima del estado de energía negativa de Rindler [9].

- Para un observador (FIDO) el cascarón negro y el agujero negro son dos objetos indistinguibles, por lo tanto la física debe ser la misma para ambos. Sin embargo, para un agujero negro existe un único estado de vacío que es el estado de Hartle-Hawking $|0\rangle_{HH}$, con $(T^a_{\ b})_{HH}$ su tensor de momento-energía asociado. Luego, para un cascarón negro se debe presentar una situación similar. El cascarón genera un baño térmico divergente que se neutraliza con el tensor momento-energía asociado a su estado de vacío, el vacío de Boulware $|0\rangle_B$, el cual de acuerdo con la ecuación (4.134) genera un energía acotada cerca al horizonte.

- Para un observador en caída libre (FREFOS) se deben tener los mismos resultados. Cuando el objeto es un agujero negro, este observador no detecta partículas y su tensor momento-energía es pequeño y acotado. A continuación, cuando el observador FREFOS se acerca al radio gravitacional del cascarón, se encuentra con el baño térmico generado por éste (de acuerdo con el modelo de la pared de t'Hooft (apéndice F)), pero este observador no cuenta con el estado de vacío de Boulware para compensar el efecto de exitación y medir en promedio cero partículas. Sin embargo, en la vecindad del radio gravitacional del cascarón, la métrica corresponde a la métrica de Rindler, y por tanto, tiene asociado un tensor momento-energía negativo (4.136) que compensa el baño térmico del cascarón, dando como resultado un tensor momento-energía acotado.

- En las regiones donde el campo gravitacional es muy fuerte, la densidad de energía del vacío puede llegar a ser considerablemente negativa. Esta propiedad conduce a un escenario en el cual un horizonte se muestra como un cascarón caliente sin masa (sección 4.6). Bajo esta perspectiva se justifica la existencia de una pared de fuego (sección 2.1.5). De la expresión para el tensor momento energía de Hartle-Hawking (4.134), se interpreta que para un observador en caída libre, el horizonte está virtualmente vacío pero caliente, y $< T^a_{\ b} >_{HH}$ desaparece en el orden más alto de $f^{-1}(r)$. Con lo anterior, el ambiente térmico justifica la existencia de la pared de fuego sin entrar en contradicción con el principio de equivalencia [57], caso opuesto a lo que plantea el trabajo de Polchinski et.al. [33]. Por el principio de equivalencia se concluye lo mismo para el resultado del tensor momento-energía de Minkowski (4.137).

5.3. Perspectivas

Con la realización del presente trabajo se abren diversas posibilidades a seguir en esta línea de investigación, entre las cuales estan:

- Se ha demostrado que las supérficies críticas que aparecen durante el colapso de un cascarón delgado se pueden interpretar como horizontes, lo cual implica la existencia de una estructura sofisticada desde el punto de vista de la gravedad y la termodinámica. Este trabajo se puede generalizar a incluir otra clase de cascarones y de espacios-tiempo. Por ejemplo, se podría considerar el caso de cascarones delgado con presión interna o cargas gravitacionales adicionales.

- A partir del método de cálculo desarrollado en la sección (3.5.2) se podría analizar de la misma forma el caso más realista con $\dot{R} \neq 0$ y aceleración constante ($\ddot{R} = C$), donde se puede hacer un estudio no sólo del comportamineto gravitacional sino tambien del comportamiento termodinámico; tomando como base teórica la Geometrotermodinámica, la cual contempla el cálculo de la métrica, la métrica inducida, las singularidades, la temperatura y los diversos potenciales [63, 84].

- Uno de los problemas presentes en la fenomenología termodinámica y geometrotermodinámica es el análisis de las transiciones de fase que se puedan presentar en el proceso de colapso. Este línea de investigación tendría sus raíces en la idea que un agujero negro presenta algún tipo de transición de fase, de materia a geometría [9].

Apéndice A

Formalidades del cascarón negro

A.1. Cascarón negro con masa

En el contexto del formalismo de Darmois-Israel [57], se tiene un cascarón esférico delgado Σ el cual divide el espacio-tiempo en dos regiones: una región interior V_-, descrita por la geometría plana de Minkowski, y una región exterior V_+, descrita por el espacio-tiempo de Schwarzschild. Al asumir que tenemos un cascarón delgado de masa en reposo m, que hará las veces de la hipersuperficie Σ, el tensor momentum-energía superficial es

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b, \tag{A.1}$$

donde σ es la densidad superficial de masa y u^a es el campo de velocidad asociado al cascarón. Además se considerá que el cascarón está compuesto de materia sin presión.

A.1.1. Aspectos geométricos

Debido a la presencia de dos regiones bien definidas, se procede a construir la métrica en cada una:
Región interna V_-
Para esta región se asume que el espacio-tiempo es plano dentro del cascarón. Luego el elemento de línea es:

$$ds_-^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{A.2}$$

Usando el cambio de variables

$$t = \overline{T}(\tau),\ dt = \dot{\overline{T}} d\tau,$$

$$r = R(\tau),\ dr = \dot{R} d\tau,$$

$$f(r) = F(R) = 1,$$

con τ el tiempo propio para observadores comóviles con la hipersuperficie (análogo al modelo de Oppenheimer-Snyder), sobre una línea de mundo en la cual r, θ, ϕ son constantes.

Luego

$$ds_-^2(\Sigma) = -\Big(\dot{\overline{T}}^2 - \dot{R}^2\Big)d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2, \tag{A.3}$$

se encuentra

$$u^a = \frac{\partial}{\partial\tau}(t, r, \theta, \phi) = (\dot{\overline{T}}, \dot{R}, 0, 0), \tag{A.4}$$

$$n_a = (n_\tau, n_r, n_\theta, n_\phi) = (-\dot{R}, \dot{\overline{T}}, 0, 0), \tag{A.5}$$

en la última se utilizó el hecho que $n_a u^a = 0$.
Normalizando n_a:

$$n_a n^a = n_\tau n^\tau + n_R n^R = g^{\tau\tau} n_\tau^2 + g^{RR} n_R^2 = -\dot{R}^2 + \dot{\overline{T}}^2 = 1. \tag{A.6}$$

Región externa V_+
La solución corresponde a la de Schwarzschild. Luego el elemento de línea es:

$$ds_+^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \tag{A.7}$$

Al aproximarse a Σ se usa el siguiente cambio de variables:

$$t = T(\tau),\ dt = \dot{T}d\tau,$$

$$r = R(\tau),\ dr = \dot{R}d\tau,$$

$$f(r) = F(R) = 1 - \frac{2M}{R},$$

luego

$$ds_+^2(\Sigma) = -\Big(F\dot{T}^2 - \frac{\dot{R}^2}{F}\Big)d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2, \tag{A.8}$$

con lo cual el nuevo conjunto de coordenadas es (T, R, θ, ϕ), luego:

$$u^a = \frac{\partial}{\partial\tau}(T, R, \theta, \phi) = (\dot{T}, \dot{R}, 0, 0), \tag{A.9}$$

$$n_a = (n_\tau, n_r, n_\theta, n_\phi) = (-\dot{R}, \dot{T}, 0, 0), \tag{A.10}$$

en la última se utilizó el hecho que $n_a u^a = 0$. Aún así debe normalizarse n_a, luego:

$$n_a n^a = n_\tau n^\tau + n_R n^R = g^{\tau\tau} n_\tau^2 + g^{RR} n_R^2 = -\frac{\dot{R}^2}{F} + F\dot{T}^2 = 1. \tag{A.11}$$

Curvatura extrínseca
Calculando para V_-:

$$K_{\theta\theta}^- = R\dot{\overline{T}}. \tag{A.12}$$

$$K_{\theta}^{-\theta} = \frac{\dot{\overline{T}}}{R} = \frac{\sqrt{1+\dot{R}^2}}{R} = \frac{\beta_-}{R}, \tag{A.13}$$

con $\beta_- = \dot{\overline{T}} = \sqrt{1+\dot{R}^2}$.

$$K_{\phi\phi}^{-} = R\dot{\overline{T}}\sin^2\theta. \tag{A.14}$$

$$K_{\phi}^{-\phi} = \frac{\dot{\overline{T}}}{R} = \frac{\sqrt{1+\dot{R}^2}}{R} = \frac{\beta_-}{R}. \tag{A.15}$$

$$K_{\tau\tau}^{-} = 0. \tag{A.16}$$

$$K_{\tau}^{-\tau} = 0. \tag{A.17}$$

Calculando para V_+:

$$K_{\theta\theta}^{+} = FR\dot{T}. \tag{A.18}$$

$$K_{\theta}^{+\theta} = \frac{F\dot{T}}{R} = \frac{\beta_+}{R}, \tag{A.19}$$

con $\beta_+ = F\dot{\overline{T}} = \sqrt{\dot{R}^2+F}$.

$$K_{\phi\phi}^{+} = FR\dot{T}\sin^2\theta. \tag{A.20}$$

$$K_{\phi}^{+\phi} = \frac{F\dot{T}}{R} = \frac{\beta_+}{R}. \tag{A.21}$$

$$K_{\tau\tau}^{+} = -\frac{\dot{\beta}_+}{\dot{R}}. \tag{A.22}$$

$$K_{\tau}^{+\tau} = \frac{\dot{\beta}_+}{\dot{R}}. \tag{A.23}$$

A.1.2. Construcción de la ecuación de movimiento

a continuación se procede a construir las ecuaciones de movimiento del cascarón. Para ello, se parte de la ecuación de Lanczos (2.88):

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi}\Big([K_{ab}] - [K]h_{ab}\Big), \tag{A.24}$$

la cual relaciona el tensor momento-energía de la superficie al salto que se da en la curvatura extrínseca de un lado de la hipersuperficie al otro. Lo anterior es debido a que si la curvatura extrínseca no es la misma sobre ambos lados de Σ, entonces surge un cascarón delgado con tensor de energía-momento superficial. De una forma más simple se tiene para la expresión anterior:

$$S_b^a = -\frac{\epsilon}{8\pi}\Big([K_b^a] - [K]h_b^a\Big). \tag{A.25}$$

De las componentes

$$S^{\tau}_{\tau} = -\frac{\epsilon}{8\pi}\Big(-\frac{2\beta_+}{R} + \frac{2\beta_-}{R}\Big). \tag{A.26}$$

De otra parte por medio de la ecuación (A.1) se tiene

$$S^{a}_{b} = \sigma u^a u_b \rightarrow S^{\tau}_{\tau}\sigma u^{\tau}_{\tau} = -\sigma. \tag{A.27}$$

así las cosas, igualando (A.26) y (A.27) se obtiene

$$-\sigma = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\beta_+}{R} - \frac{\beta_-}{R}\Big). \tag{A.28}$$

De la misma manera se obtiene

$$S^{\theta}_{\theta} = -\frac{\epsilon}{8\pi}\Big(-\frac{\dot{\beta_+}}{\dot{R}} - \frac{\beta_+}{R} + \frac{\beta_-}{R}\Big),$$

$$S^{\theta}_{\theta} = \sigma u^{\theta} u_{\theta} = 0.$$

De aquí que

$$\frac{\dot{\beta_+}}{\dot{R}} = \frac{\beta_- - \beta_+}{R}, \tag{A.29}$$

recordando que $\dot{\beta}_- = 0$ porque $K^{-\tau}_{\tau} = 0$, se puede integrar

$$\int \frac{d(\beta_+ - \beta_-)}{\beta_- - \beta_+} = \int \frac{dR}{R},$$
$$-\ln(\beta_- - \beta_+) + C = \ln R,$$
$$C = \ln R + \ln(\beta_- - \beta_+),$$
$$C = \ln(R(\beta_- - \beta_+)).$$

Luego

$$R(\beta_- - \beta_+) = cte. \tag{A.30}$$

Entonces reorganizando

$$-\sigma = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\beta_+}{R} - \frac{\beta_-}{R}\Big)$$

se tiene

$$4\pi\sigma R^2 = R(\beta_- - \beta_+) = cte, \tag{A.31}$$

lo cual corresponde a la masa en reposo m del cascarón,

$$m = 4\pi\sigma R^2. \tag{A.32}$$

Retomando la ecuación

$$R(\beta_- - \beta_+) = m,$$

y reordenando

$$\beta_- - \beta_+ = \frac{m}{R},$$

$$\beta_- - \frac{m}{R} = \beta_+,$$

elevando al cuadrado la última ecuación se obtiene la expresión fundamental para el movimiento del cascarón:

$$M = m\sqrt{1+\dot{R}^2} - \frac{m^2}{2R}. \tag{A.33}$$

En la expresión anterior, el primer término sobre el lado derecho es la energía relativista cinética del cascarón, incluyendo la masa en reposo. El segundo término es la energía de unión o enlace, es decir, el trabajo requerido para ensamblar el cascarón desde su constituyentes dispersos.
La suma de estas energías es la energía total (la cual se conserva), que es igual a la masa gravitacional del cascarón. La expresión (A.33) es un ejemplo de como todas las formas de energía contribuyen a la masa gravitacional total de un cuerpo aislado. Así las cosas, (A.32) y (A.33) son las ecuaciones de movimiento del cascarón. Es interesante notar que cuando $M < m$, el movimiento exhibe un punto de retorno en

$$R = R_{max} \equiv \frac{m^2}{2(m-M)}.$$

Por lo tanto un cascarón expandiéndose con una masa $M < m$, no puede escapar de su propia atracción gravitacional.

A.1.3. Ecuación para el radio del cascarón

- **Primer método**

  La ecuación para el radio del cascarón se encuentra a partir de (A.33):

$$\dot{R} = \sqrt{\left(\frac{2MR+m^2}{2mR}\right)^2 - 1}$$

$$\dot{R} = \sqrt{\left(\frac{M}{m} + \frac{m}{2R}\right)^2 - 1},$$

  De aquí que

$$\left(\frac{M}{m} + \frac{m}{2R}\right)^2 \geq 1,$$

$$\frac{M}{m} + \frac{m}{2R} \geq 1,$$

  luego

$$M \geq m - \frac{m^2}{2R}, \tag{A.34}$$

  que es otra forma de describir el hecho de que el cascarón al moverse adquiere energía cinética y esta altera su masa gravitacional.

De otro lado el radio R también se acota de la siguiente manera

$$\frac{M}{m} - 1 \geq -\frac{m}{2R},$$

$$\frac{M-m}{m} \geq -\frac{m}{2R},$$

$$R \geq \frac{m^2}{2(m-M)}, \tag{A.35}$$

lo anterior para resaltar que $M \geq m$ debido a las condiciones de movimiento.

- **Segundo método**

  ¿Qué pasaría si se supone que en cada instante del colapso la masa gravitacional cumple $R(\tau) = 2M$?.

  A partir de esto la ecuación de movimiento se convierte en

$$\dot{R} = \sqrt{\left(\frac{R}{2m} + \frac{m}{2R}\right)^2 - 1}. \tag{A.36}$$

  La integración lleva a

$$m \ln(|R-m||R+m|) + cte = \tau.$$

  Si la integración se realiza desde un R_{max} hasta 0 se obtiene

$$-m \ln(|R_{max}-m||R_{max}+m|) + m \ln m^2 = \tau,$$

$$\ln(|R_{max}-m||R_{max}+m|) - \ln m^2 = -\frac{\tau}{m},$$

$$\ln\left|\frac{R_{max}^2 - m^2}{m^2}\right| = -\frac{\tau}{m},$$

$$R_{max} = m\sqrt{1+e^{-\tau/m}}. \tag{A.37}$$

  Así, el tiempo que demora en colapsarse totalmente es $\tau_{max} = 5m$. Se toma tan sólo la solución positiva.

- **Tercer método**

  Siguiendo a Israel [57] se establece que,

$$(1+\dot{R}^2)^{1/2} = a + \frac{m}{2aR}, \tag{A.38}$$

$$4\pi\sigma R^2 = \frac{m}{a}, \tag{A.39}$$

  donde el lado izquierdo de (A.39) es lo que se denomina la masa nucleónica, que es la masa en reposo de cada partícula de polvo multiplicada por el número de partículas del cascarón. Sin

embargo en un artículo posterior el mismo Israel reescribe la expresión (A.38) como [60]

$$1+\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2=\left(a+\frac{b}{2R}\right)^2, \tag{A.40}$$

donde la constante b es la que se identifica con la masa nucleónica del cascarón, y $a=m/b$ es la razón que se establece entre la masa total (la cual incluye contribuciones de la energía cinética y la energía potencial) y la masa nucleónica.[1]
Siguiendo a Israel [60], la expresión $(1-a)b$ mide la energía de enlace o de unión del cascarón. En lo que sigue se asumirá que b y m son positivas. Así de (A.40) se establece la desigualdad

$$a+\frac{m}{2aR}\geq 1, \tag{A.41}$$

establece un límite superior

$$R_{max}=\frac{m}{2a(1-a)}, \tag{A.42}$$

sobre el radio del cascarón si $a<1$. en el caso $a\geq$ se satisface de manera trivial.
Además de (A.42) se tiene que

$$R_{max}\geq 2m, \tag{A.43}$$

puesto que si una partícula en el límite exterior con un radio estacionario $r<2m$ tendría una línea de mundo tipo espacio. Por lo tanto se concluye que ningún cascarón de polvo puede permanecer permanentemente sumergido dentro de su esfera de Schwarzswchild.

La ecuación (A.33) se puede escribir como

$$\frac{M}{m}+\frac{mM}{2MR}=\sqrt{1+\dot{R}^2}, \tag{A.44}$$

donde

$$\dot{R}^2=\left(\frac{M}{m}+\frac{M}{2aR}\right)^2-1$$

$$\dot{R}^2=\frac{M^2}{m^2}+\frac{M}{R}+\left(\frac{M}{2aR}\right)^2-1,$$

$$\dot{R}^2=(a^2-1)+\frac{M}{R}+\left(\frac{M}{2aR}\right)^2, \tag{A.45}$$

con $a=M/m$. De la expresión anterior se tiene que el cascarón viajará a $R=\infty$ si y solamente si $a^2\geq 1$ y $\dot{R}<0$. En los otros casos éste cae a la singularidad $R=0$ en un tiempo propio finito.

Con lo anterior siguiendo a Hoje et.al [61] se distinguen 3 casos para resolver la ecuación (A.45):

[1] En este punto es pertinente aclarar que la m de Israel [60] es la M de Poisson [55] de acuerdo con la ecuación (A.33).

- Si $a^2 < 1$, el movimiento puede se parametriza de la siguiente forma

$$y = x_0 \operatorname{sen}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}, \tag{A.46}$$

donde

$$x = \frac{R-R_0}{R_1}; \quad x_0 = \frac{R_0}{R_1}; \quad y = \sqrt{1-a^2}\frac{\tau}{R_1}; \quad R_0 = \frac{M}{2(1-a^2)}; \quad R_1 = \frac{\sqrt{M^2+(4a^2-2)M}}{2a(1-a^2)}. \tag{A.47}$$

Luego de acuerdo con lo anterior (A.46) se escribe como

$$\sqrt{1-a^2}\frac{\tau}{R_1} = \frac{R_0}{R_1}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R-R_0}{R_1}\right) - \sqrt{1-\left(\frac{R-R_0}{R_1}\right)^2} \tag{A.48}$$

- Si $a^2 = 1$, el movimiento se parametriza de la siguiente forma

$$y = \frac{4}{3}(x-2)\sqrt{1+x}, \tag{A.49}$$

donde

$$x = \frac{R}{R_0}; \quad y = \frac{M\tau}{R_0^2}; \quad R_0 = \frac{M}{4}. \tag{A.50}$$

Luego de acuerdo con lo anterior (A.49) se escribe como

$$\frac{M\tau}{R_0^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{R_0}-2\right)\sqrt{1+\frac{R}{R_0}}. \tag{A.51}$$

- Si $a^2 > 1$, el movimiento se parametriza por

$$y = \sqrt{x^2-1} - x_0 \ln[x+\sqrt{x^2-1}], \tag{A.52}$$

donde

$$x = \frac{R+R_0}{R_1}; \quad x_0 = \frac{R_0}{R_1}; \quad y = \frac{\sqrt{a^2-1}}{R_1}\tau; \quad R_0 = \frac{M}{2(a^2-1)}; \quad R_1 = \frac{\sqrt{M^2+(4a^2-2)M}}{2a(a^2-1)}. \tag{A.53}$$

Luego de acuerdo con lo anterior (A.52) se escribe como

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{R_1}\tau = \sqrt{\left(\frac{R+R_0}{R_1}\right)^2 - 1} - \frac{R_0}{R_1}\ln\left[\frac{R+R_0}{R_1} + \sqrt{\left(\frac{R+R_0}{R_1}\right)^2 - 1}\right]. \tag{A.54}$$

Ahora, considerando la solución (A.51) en la que $a^2 = 1$, la cual está relacionada con un cascarón que se contrae desde el reposo en el infinito se tiene que

$$\left(\frac{M}{R_0}\right)^2\tau^2 = \frac{16}{9}\left(\frac{R}{R_0}-2\right)^2\left(1+\frac{R}{R_0}\right)$$

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 - 3\left(\frac{R}{R_0}\right) + 4 = \frac{9}{16}\left(\frac{M}{R_0}\right)^2 \tau^2. \tag{A.55}$$

- **Cuarto método**

  Como se dedujo con anterioridad se tiene la ecuación para la masa gravitacional dada por:

$$M = m\sqrt{1+\dot{R}^2} - \frac{m^2}{2R}. \tag{A.56}$$

  Ahora si se supone que $\dot{R} = 0$ en $R = \infty$, es decir, el cascarón está cayendo desde el reposo en el infinito (condición $a^2 = 1$ del método anterior), entonces $M = m$, lo cual hace que la expresión (A.56) se simplifique como

$$\begin{aligned} m &= m(1-\dot{R}^{1/2}) - \frac{m^2}{2R}, \\ \left(\frac{m}{2R}+1\right)^2 &= 1+\dot{R}^2, \\ \dot{R}^2 &= \frac{m^2}{4R^2}\left(1+\frac{4R}{m}\right), \end{aligned}$$

  luego,

$$\dot{R} = -\frac{m}{2R}\left(1+\frac{4R}{m}\right)^{1/2}, \tag{A.57}$$

  donde se escoge el signo menos debido a que se considera un proceso de colapso.
  Al resolver la integral se tiene que

$$\int \frac{2RdR}{m\left(1+\frac{4R}{m}\right)^{1/2}} = -\int d\tau$$

  Realizando la sutitución $u = \frac{4R}{m}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{m}{8}\int \frac{udu}{(1+u^2)^{1/2}} &= -\int d\tau, \\ \frac{m}{8}\int \frac{(1+u)-1}{(1+u^2)^{1/2}}du &= -\int d\tau, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{4R}{m}\right)^{3/2} + \left(1+\frac{4R}{m}\right)^{1/2} + cte = \frac{4}{m}\tau. \tag{A.58}$$

  Si $R = 0$ cuando $\tau = 0$, entonces $cte = -2/3$, asi se obtiene finalmente que

$$\frac{4}{m}\tau = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{4R}{m}\right)^{3/2} + \left(1+\frac{4R}{m}\right)^{1/2} - \frac{2}{3}. \tag{A.59}$$

A.1.4. Formación del horizonte R_h (caso particular)

La norma de la cuadrivelocidad está dada por:

$$\begin{aligned} u_+^2 &= g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{00}(u_+^0)^2 + g_{11}(u_+^1)^2, \\ &= -F(R)\dot{T}^2 + F(R)^{-1}\dot{R}^2. \end{aligned} \tag{A.60}$$

De acuerdo con el cuarto método, se tenía la condición de que $\dot{R} = 0$ en $R = \infty$, es decir el cascarón está cayendo desde el reposo en el infinito, entonces $M = m$, lo cual daba como resultado

$$\dot{R}^2 = \frac{m^2}{4R^2}\left(1 + \frac{4R}{m}\right), \tag{A.61}$$

luego, al utilizar esta condición en la normalización (A.11) se obtiene que

$$\dot{T}^2 = \frac{1}{F}, \tag{A.62}$$

así, la ecuación (A.60) se escribe como

$$u^2 = -1 + F(R)^{-1}\dot{R}^2. \tag{A.63}$$

Igualando a cero, se tiene

$$u^2 = -1 + F(R)^{-1}\dot{R}^2 = 0 \tag{A.64}$$

cuya solución de acuerdo con (A.61) es de la forma

$$\begin{aligned} &\frac{m^2}{4R^2}\left(1 + \frac{4R}{m}\right) = \left(1 - \frac{2m}{R}\right), \\ &\frac{m^2}{4R^2} + \frac{3m}{R} - 1 = 0, \\ &4R^2 - 12mR - m^2 = 0, \end{aligned} \tag{A.65}$$

cuya solución es

$$R(\tau) = \left(\frac{3 \pm \sqrt{10}}{2}m\right) \tag{A.66}$$

A.1.5. Escalar de Kretschmann

Partiendo de la expresión (A.8) bajo la condición (A.11) se obtiene que

$$ds_+^2(\Sigma) = -d\tau^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2. \tag{A.67}$$

En general se tiene que la lagrangiana de la métrica se puede escribir como

$$L \equiv \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \tag{A.68}$$

luego la lagrangiana de la métrica (A.67) es

$$L = \frac{1}{2}\left\{-\dot{\tau}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sen^2\theta\dot{\phi}^2\right\}. \tag{A.69}$$

A partir de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0,$$

se determinan las ecuaciones geódesicas

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0,$$

las cuales serán de ayuda para calcular las conexiones o simbolos de Christoffel diferentes de cero. Luego, para la coordenada τ se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\tau}} = -\dot{\tau},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tau}}\right) = -\ddot{\tau},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = RR^{'}\dot{\theta}^2 + RR^{'}\operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2,$$

con $R^{'} = dR/d\tau$. Las ecuaciones de lagrange son

$$\ddot{\tau} + RR^{'}\dot{\theta}^2 + RR^{'}\operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2 = 0,$$

luego

$$\Gamma^\tau_{\theta\theta} = RR^{'}; \qquad \Gamma^\tau_{\phi\phi} = RR^{'}\operatorname{sen}^2\theta. \tag{A.70}$$

Para la coordenada θ se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = R^2\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = R^2\ddot{\theta} + 2R\frac{dR}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda}\dot{\theta} = \ddot{\theta}R^2 + 2RR^{'}\dot{\tau}\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\phi}^2.$$

Las ecuaciones de lagrange son

$$\ddot{\theta} + 2\frac{R^{'}}{R}\dot{\tau}\dot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0,$$

luego

$$\Gamma^\theta_{\tau\theta} = \Gamma^\theta_{\theta\tau} = \frac{R^{'}}{R}; \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta. \tag{A.71}$$

Para la coordenada ϕ se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = R^2\operatorname{sen}^\theta\dot{\phi},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = R^2 \operatorname{sen}^2\theta\ddot{\phi} + 2RR^{'}\operatorname{sen}^2\theta\dot{\tau}\dot{\phi} + 2R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

Las ecuaciones de lagrange son

$$\ddot{\phi} + 2\frac{R^{'}}{R}\dot{\tau}\dot{\phi} + 2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\dot{\theta}\dot{\phi} = 0,$$

luego

$$\Gamma^{\phi}_{\tau\phi} = \Gamma^{\theta}_{\phi\tau} = \frac{R^{'}}{R}; \qquad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \tag{A.72}$$

De las expresiones (A.70) a (A.72) se encuentran las componentes del tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} &= -\operatorname{sen}^2(1+(R^{'})^2); & R^{\theta}{}_{\tau\tau\theta} &= \frac{R^{''}}{R}, \\ R^{\phi}{}_{\tau\phi\tau} &= 1+(R^{'})^2; & R^{\phi}{}_{\tau\tau\phi} &= \frac{R^{''}}{R}, \\ R^{\tau}{}_{\theta\tau\theta} &= RR^{'}; & R^{\tau}{}_{\phi\tau\phi} &= RR^{''}\operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned} \tag{A.73}$$

Las tres componentes independientes contravariantes y covariantes del tensor de Riemann están dadas respectivamente por:

$$R^{\tau\theta\tau\theta} = -\frac{R^{''}}{R^3}; \qquad R^{\tau\phi\tau\phi} = -\frac{R^{''}}{\operatorname{sen}^2\theta R^3}; \qquad R^{\theta\phi\theta\phi} = \frac{(1+(R^{'})^2)}{\operatorname{sen}^2\theta R^6}, \tag{A.74}$$

$$R_{\tau\theta\tau\theta} = -RR^{''}; \qquad R_{\tau\phi\tau\phi} = -R\operatorname{sen}^2\theta R^{''}; \qquad R_{\theta\phi\theta\phi} = -R^2\operatorname{sen}^2\theta(1-(R^{'})^2). \tag{A.75}$$

Con las expresiones anteriores se obtiene le escalar de Kretschmann $K = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, dado por

$$K = 4\left(\frac{1+2(R^{'})^2+(R^{'})^4+2R^2(R^{''})^2}{R^4}\right), \tag{A.76}$$

donde debido a que el parámetro afín es el tiempo propio $R^{'} = \dot{R}$ y $R^{''} = \ddot{R}$. De lo anterior se tendría una singularidad en $R(\tau) = 0$.

A.2. Cascarón negro con masa y carga

Se establece para la región interna V_{-} un espacio-tiempo plano cuyo elemento de línea está dado por la ecuación (A.2), y para la región externa V_{+} la métrica de Reissner-Nordström, cuyo elemento de línea es la expresión (A.7), con

$$f(r) = F(R) = 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}. \tag{A.77}$$

Para obtener la ecuación de movimiento se sigue un análisis similar al realizado para obtener (A.33), que para este caso es

$$M = m\sqrt{1+\dot{R}^2} - \left(\frac{m^2 - Q^2}{2R}\right). \tag{A.78}$$

De nuevo se supone que $\dot{R} = 0$ en $R = \infty$, es decir el cascarón está cayendo desde el reposo en el infinito, entonces $M = m$ y la expresión anterior se escribe como

$$\begin{aligned}
m &= m(1-\dot{R}^2)^{1/2} - m\left(\frac{m}{2R} - \frac{Q^2}{2mR}\right), \\
\left\{\left(\frac{m}{2R} - \frac{Q^2}{2mR}\right) + 1\right\}^2 &= 1 + \dot{R}^2, \\
\left(\frac{m}{2R} - \frac{Q^2}{2mR}\right)^2 + \left(\frac{m}{R} - \frac{Q^2}{mR}\right) &= \dot{R}^2, \\
\frac{1}{4R^2}\left(m - \frac{Q^2}{m}\right)^2 - \frac{1}{R}\left(m - \frac{Q^2}{m}\right) &= \dot{R}^2.
\end{aligned} \tag{A.79}$$

Sea

$$A = m - \frac{Q^2}{m}, \tag{A.80}$$

luego (A.34) se reescribe como,

$$\dot{R} = -\frac{1}{2R}(A^2 + 4AR)^{1/2}, \tag{A.81}$$

donde se escoge el signo menos debido a que se considera un proceso de colapso.
Al resolver la integral se tiene que

$$\int \frac{2RdR}{(A^2+4AR)^{1/2}} = -\int d\tau$$

Realizando la sustitución $u = 4AR$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8A^2}\int \frac{udu}{(A^2+u^2)^{1/2}} &= -\int d\tau, \\
\frac{1}{8A^2}\int \frac{(A^2+u) - A^2}{(A^2+u)^{1/2}} du &= -\int d\tau,
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}(A^2+4AR)^{3/2} + (A^2+4AR)^{1/2} + cte = 4A^2\tau. \tag{A.82}$$

Con el valor explícito de A se obtiene

$$4\left(m - \frac{Q^2}{m}\right)^2 \tau = -\frac{1}{3}\left[\left(m - \frac{Q^2}{m}\right)^2 + 4\left(m - \frac{Q^2}{m}\right)R\right]^{3/2} + \left[\left(m - \frac{Q^2}{m}\right)^2 + 4\left(m - \frac{Q^2}{m}\right)R\right]^{1/2} + cte. \tag{A.83}$$

A.3. Vectores nulos y expansiones

1. Métrica interior

Para la métrica interior (A.2)se tiene

$$ds_-^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 \tag{A.84}$$

con

$$g_{tt} = -1, \quad g^{tt} = -1, \quad g_{rr} = 1, \quad g^{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}. \tag{A.85}$$

De acuerdo con Poisson [], se tiene la relación de completez

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \tag{A.86}$$

con $\varepsilon = \pm 1$, dependiendo si la hipersuperficie es tipo espacio o tiempo; h^{ab} es la métrica inducida que para el espacio interior es

$$ds_-^2|_\Sigma = -(\dot{T}^2 - \dot{R}^2)d\tau + R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2. \tag{A.87}$$

Así se tiene para los índices $\alpha = (t, r, \theta, \phi)$ y $a = (\tau, \theta, \phi)$. Luego se tiene para la métrica inducida

$$h_{\tau\tau} = -(\dot{T}^2 - \dot{R}^2), \quad h^{\tau\tau} = -\frac{1}{(\dot{T}^2 - \dot{R}^2)}, \quad h_{\theta\theta} = R^2, \quad h^{\theta\theta} = \frac{1}{R^2}, \quad h_{\phi\phi} = R^2 \operatorname{sen}^2\theta, \quad h^{\phi\phi} = \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2\theta}. \tag{A.88}$$

De acuerdo con lo anterior se calculan las componentes del vector normal n^α en la expresión (A.86) como

$$\begin{aligned}
g^{tt} &= (n^t)^2 + h^{ab} e_a^t e_b^t, \\
g^{tt} &= (n^t)^2 + h^{\tau\tau} e_\tau^t e_\tau^t + \cancelto{0}{h^{\theta\theta} e_\theta^t e_\theta^t} + \cancelto{0}{h^{\phi\phi} e_\phi^t e_\phi^t}, \\
-1 &= (n^t)^2 - \frac{\dot{T}^2}{(\dot{T}^2 - \dot{R}^2)}.
\end{aligned}$$

$$n^t = \frac{\pm\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}. \tag{A.89}$$

$$\begin{aligned}
g^{rr} &= (n^r)^2 + h^{ab} e_a^r e_b^r, \\
g^{rr} &= (n^r)^2 + h^{\tau\tau} e_\tau^r e_\tau^r + \cancelto{0}{h^{\theta\theta} e_\theta^r e_\theta^r} + \cancelto{0}{h^{\phi\phi} e_\phi^r e_\phi^r}, \\
1 &= (n^r)^2 - \frac{\dot{R}^2}{(\dot{T}^2 - \dot{R}^2)}.
\end{aligned}$$

$$n^r = \frac{\pm\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}. \tag{A.90}$$

$$\begin{aligned}
g^\theta &= (n^\theta)^2 + h^{ab} e^\theta_a e^\theta_b, \\
g^\theta &= (n^\theta)^2 + \cancelto{0}{h^{\tau\tau} e^\theta_\tau e^r_\tau} + h^{\theta\theta} e^\theta_\theta e^r_\theta + \cancelto{0}{h^{\phi\phi} e^\theta_\phi e^\theta_\phi}, \\
\frac{1}{r^2} &= (n^\theta)^2 + \frac{1}{R^2}.
\end{aligned}$$

Sobre la hipersuperficie $r = R$

$$n^\theta = 0. \tag{A.91}$$

De igual manera

$$n^\phi = 0. \tag{A.92}$$

Luego se tiene las componentes de n^α

$$n^\alpha = \left(\frac{\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, \frac{\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.93}$$

$$n_\alpha = \left(-\frac{\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, \frac{\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.94}$$

donde se cumple que

$$n_\alpha n^\alpha = 1 \tag{A.95}$$

La métrica sobre la 2-superficie S,inducida de h_{ab} es $\sigma^{AB} e^a_A e^b_B$, con $A = (\theta, \phi)$, cuya relación de completez establece

$$h^{ab} = \varepsilon r^a r^b + \sigma^{AB} e^a_A e^b_B. \tag{A.96}$$

De acuerdo con lo anterior se calculan las componentes del vector normal r^α en la expresión (A.96) como

$$\begin{aligned}
h^{\tau\tau} &= -(r^\tau)^2 + \sigma^{AB} e^\tau_A e^\tau_B, \\
h^{\tau\tau} &= -(r^\tau)^2 + \cancelto{0}{\sigma^{\theta\theta} e^\tau_\theta e^\tau_\theta} + \cancelto{0}{\sigma^{\phi\phi} e^\tau_\phi e^\tau_\phi}, \\
-\frac{1}{\dot{T}^2 - \dot{R}^2} &= -(r^\tau)^2.
\end{aligned}$$

$$r^\tau = \frac{\pm 1}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}. \tag{A.97}$$

Ahora, se tiene que

$$r^\alpha = r^a e^\alpha_a, \tag{A.98}$$

luego,

$$r^t = r^a e^t_a = r^\tau e^t_\tau + \cancelto{0}{r^\theta e^t_\theta} + \cancelto{0}{r^\phi e^t_\phi}$$

$$r^t = r^\tau \dot{T} = \frac{\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}. \tag{A.99}$$

$$r^r = r^a e^r_a = r^\tau e^r_\tau + \cancelto{0}{r^\theta e^r_\theta} + \cancelto{0}{r^\phi e^r_\phi}$$

$$r^r = \frac{\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}. \tag{A.100}$$

$$\begin{aligned} h^{\theta\theta} &= -(r^\theta)^2 + \sigma^{AB} e^\theta_A e^\theta_B, \\ h^{\tau\tau} &= -(r^\theta)^2 + \sigma^{\theta\theta} e^\theta_\theta e^\theta_\theta + \cancelto{0}{\sigma^{\phi\phi} e^\theta_\phi e^\theta_\phi}, \\ \frac{1}{R^2} &= -(r^\theta)^2 + \frac{1}{R^2} \longrightarrow r^\theta = 0. \end{aligned}$$

un cálculo similar se obtiene para la componente ϕ. Utilizando de nuevo (A.98), se obtiene

$$r^\theta = r^\phi = 0. \tag{A.101}$$

Así, las componentes del vector normal r^α son

$$r^\alpha = \left(\frac{\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, \frac{\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.102}$$

$$r_\alpha = \left(-\frac{\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, \frac{\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2 - \dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.103}$$

donde se cumple

$$r_\alpha r^\alpha = -1. \tag{A.104}$$

Además de (A.93) y (A.103) se establece

$$r_\alpha n^\alpha = 0. \tag{A.105}$$

2. Métrica exterior

Para la métrica exterior (A.7)se tiene

$$ds^2_+ = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 \tag{A.106}$$

con

$$g_{tt} = -f, \quad g^{tt} = -f^{-1}, \quad g_{rr} = f^{-1}, \quad g^{rr} = f, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}. \tag{A.107}$$

La métrica inducida que para el espacio exterior h_{ab} es

$$ds^2_+|_\Sigma = -(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)d\tau + R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2. \tag{A.108}$$

Así se tiene para los índices $\alpha = (t, r, \theta, \phi)$ y $a = (\tau, \theta, \phi)$. Luego se tiene para la métrica inducida

$$h_{\tau\tau} = -(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2), \quad h^{\tau\tau} = -\frac{1}{(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)}, \quad h_{\theta\theta} = R^2, \quad h^{\theta\theta} = \frac{1}{R^2}, \quad h_{\phi\phi} = R^2 \operatorname{sen}^2\theta, \quad h^{\phi\phi} = \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2\theta}. \tag{A.109}$$

A partir de la relación de completez (A.86) se obtiene las componentes del vector normal n^α

$$\begin{aligned} g^{tt} &= (n^t)^2 + h^{\tau\tau} e^t_\tau e^t_\tau + \cancelto{0}{h^{\theta\theta} e^t_\theta e^t_\theta} + \cancelto{0}{h^{\phi\phi} e^t_\phi e^t_\phi}, \\ -F^{-1} &= (n^t)^2 - \frac{\dot{T}^2}{(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)}. \end{aligned}$$

sobre la hipersuperficie $f = F$,

$$n^t = \frac{\pm F^{-1}\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}. \tag{A.110}$$

$$\begin{aligned} g^{rr} &= (n^r)^2 + h^{\tau\tau} e^r_\tau e^r_\tau + \cancelto{0}{h^{\theta\theta} e^r_\theta e^r_\theta} + \cancelto{0}{h^{\phi\phi} e^r_\phi e^r_\phi}, \\ F &= (n^r)^2 - \frac{\dot{R}^2}{(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)}. \end{aligned}$$

$$n^r = \frac{\pm F\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}. \tag{A.111}$$

$$\begin{aligned} g^{\theta} &= (n^\theta)^2 + \cancelto{0}{h^{\tau\tau} e^\theta_\tau e^r_\tau} + h^{\theta\theta} e^\theta_\theta e^r_\theta + \cancelto{0}{h^{\phi\phi} e^\theta_\phi e^\theta_\phi}, \\ \frac{1}{r^2} &= (n^\theta)^2 + \frac{1}{R^2}. \end{aligned}$$

Sobre la hipersuperficie $r = R$

$$n^\theta = 0. \tag{A.112}$$

De igual manera

$$n^\phi = 0. \tag{A.113}$$

Luego se tiene las componentes de n^α

$$n^\alpha = \left(\frac{F^{-1}\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{F\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.114}$$

$$n_\alpha = \left(-\frac{\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.115}$$

donde se cumple que

$$n_\alpha n^\alpha = 1 \tag{A.116}$$

Las componentes del vector normal r^α de acuerdo con (A.96) son

$$h^{\tau\tau} = -(r^\tau)^2 + \cancelto{0}{\sigma^{\theta\theta} e^\tau_\theta e^\tau_\theta} + \cancelto{0}{\sigma^{\phi\phi} e^\tau_\phi e^\tau_\phi},$$
$$-\frac{1}{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2} = -(r^\tau)^2.$$

$$r^\tau = \frac{\pm 1}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}. \tag{A.117}$$

Ahora se tiene que

$$r^\alpha = r^a e^\alpha_a, \tag{A.118}$$

luego,

$$r^t = r^a e^t_a = r^\tau e^t_\tau + \cancelto{0}{r^\theta e^t_\theta} + \cancelto{0}{r^\phi e^t_\phi}$$
$$r^t = r^\tau \dot{T} = \frac{\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}. \tag{A.119}$$

$$r^r = r^a e^r_a = r^\tau e^r_\tau + \cancelto{0}{r^\theta e^r_\theta} + \cancelto{0}{r^\phi e^r_\phi}$$
$$r^r = \frac{\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}. \tag{A.120}$$

$$h^{\theta\theta} = -(r^\theta)^2 + \sigma^{AB} e^\theta_A e^\theta_B,$$
$$h^{\tau\tau} = -(r^\theta)^2 + \sigma^{\theta\theta} e^\theta_\theta e^\theta_\theta + \cancelto{0}{\sigma^{\phi\phi} e^\theta_\phi e^\theta_\phi},$$
$$\frac{1}{R^2} = -(r^\theta)^2 + \frac{1}{R^2} \longrightarrow r^\theta = 0.$$

un cálculo similar se obtiene para la componente ϕ. Utilizando de nuevo (A.118), se obtiene

$$r^\theta = r^\phi = 0. \tag{A.121}$$

Así, las componentes del vector normal r^α son

$$r^\alpha = \left(\frac{\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.122}$$
$$r_\alpha = \left(-\frac{F\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{F^{-1}\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0 \right), \tag{A.123}$$

donde se cumple

$$r_\alpha r^\alpha = -1. \tag{A.124}$$

Además de (A.115) y (A.122) se establece

$$r_\alpha n^\alpha = 0. \tag{A.125}$$

Vectores nulos

Los vectores nulos se construyen como [ref]

$$l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\alpha + r^\alpha), \qquad N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(r^\alpha - n^\alpha). \tag{A.126}$$

Para la métrica interior de acuerdo con (A.93) y (A.102) se obtiene

$$l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{R}+\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, \frac{\dot{T}+\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.127}$$

$$N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{T}-\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, \frac{\dot{R}-\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.128}$$

además,

$$l_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-(\dot{R}+\dot{T})}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, \frac{\dot{T}+\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.129}$$

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-(\dot{T}-\dot{R})}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, \frac{\dot{R}-\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.130}$$

donde se verifican las relaciones

$$l_\alpha l^\alpha = 0, \qquad N_\alpha N^\alpha = 0, \qquad l_\alpha N^\alpha = -1. \tag{A.131}$$

De igual manera para la métrica exterior de acuerdo con (A.114) y (A.122) se obtiene

$$l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{F^{-1}\dot{R}+\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{F\dot{T}+\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.132}$$

$$N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{T}-F^{-1}\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{\dot{R}-F\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.133}$$

además,

$$l_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-(\dot{R}+F\dot{T})}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{\dot{T}+F^{-1}\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.134}$$

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-(F\dot{T}-\dot{R})}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, \frac{F^{-1}\dot{R}-\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}, 0, 0\right), \tag{A.135}$$

donde se verifican las relaciones

$$l_\alpha l^\alpha = 0, \qquad N_\alpha N^\alpha = 0, \qquad l_\alpha N^\alpha = -1. \tag{A.136}$$

3. Factores de expansión $\Theta_{(l)}$ y $\Theta_{(N)}$

De acuerdo con la ecuación (3.26) se establece

$$q^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + l^{\alpha}N^{\beta} + N^{\alpha}l^{\beta}. \tag{A.137}$$

Para la métrica interior se tiene de acuerdo con (A.137)

$$\begin{aligned} q^{tt} &= g^{tt} + 2l^{t}N^{t}, \\ &= -1 + \frac{2}{2}\left(\frac{\dot{R}+\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}\right)\left(\frac{\dot{T}-\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}\right), \\ &= -1 + \frac{\dot{T}^2-\dot{R}^2}{\dot{T}^2-\dot{R}^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^{tr} &= g^{tr} + l^{t}N^{r} + N^{t}l^{r}, \\ &= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{R}+\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}\right)\left(\frac{\dot{R}-\dot{T}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{T}-\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}\right)\left(\frac{\dot{T}+\dot{R}}{\sqrt{\dot{T}^2-\dot{R}^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\dot{R}^2-\dot{T}^2}{\dot{T}^2-\dot{R}^2} + \frac{1}{2}\frac{\dot{T}^2-\dot{R}^2}{\dot{T}^2-\dot{R}^2} = 0 \end{aligned}$$

Así se tiene que todos los $q^{\alpha\beta} = 0$, excepto

$$q^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \qquad q^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}. \tag{A.138}$$

Las expansiones nulas se dan por la expresión (3.25)

$$\Theta_{(l)} = q^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}l_{\beta}, \qquad \Theta_{(N)} = q^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}N_{\beta}. \tag{A.139}$$

De acuerdo con (A.127), (A.128) y (A.138) se obtiene para la métrica interior

$$\Theta_{(l)} = 0, \qquad \Theta_{(N)} = 0. \tag{A.140}$$

Para la métrica exterior se tiene de acuerdo con (A.137)

$$\begin{aligned} q^{tt} &= g^{tt} + 2l^{t}N^{t}, \\ &= -\frac{1}{f} + \frac{2}{2}\left(\frac{F^{-1}\dot{R}+\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}\right)\left(\frac{\dot{T}-F^{-1}\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2}}\right), \\ &= -\frac{1}{F} + \frac{\dot{T}^2-F^{-2}\dot{R}^2}{F\dot{T}^2-F^{-1}\dot{R}^2} = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q^{tr} &= g^{tr} + l^t N^r + N^t l^r, \\
&= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{F^{-1}\dot{R} + \dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}\right)\left(\frac{\dot{R} - F\dot{T}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{T} - F^{-1}\dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}\right)\left(\frac{F\dot{T} + \dot{R}}{\sqrt{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{F^{-1}\dot{R}^2 - \dot{R}\dot{T} + \dot{T}\dot{R} - F\dot{T}^2 + F\dot{T}^2 + \dot{T}\dot{R} - \dot{R}\dot{T} - F^{-1}\dot{R}^2}{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Así se tiene que todos los $q^{\alpha\beta} = 0$, excepto

$$
q^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \qquad q^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}. \tag{A.141}
$$

De acuerdo con (A.132), (A.133) y (A.141) se obtienen las expansiones nulas asociadas a la métrica exterior

$$
\Theta_{(l)} = 0, \qquad \Theta_{(N)} = 0. \tag{A.142}
$$

En el contexto de la geometría de superficies en espacios lorentzianos, se establece que las superficies cerradas, compactas y sin fronteras, se caracterizan en relación con las restricciones que se imponen sobre ambas expansiones de sus vectores nulos, como se muestra en la siguiente tabla [65, 74]
Una superficie se define como *no atrapada* si $\Theta_{(l)}\Theta_{(N)} < 0$.

Superficie	$\mathbf{\Theta_{(l)}}$	$\mathbf{\Theta_{(N)}}$
1. Superficie atrapada	< 0	< 0
2. Superficie débilmente atrapada	$\leqslant 0$	$\leqslant 0$
3. Superficie marginalmente atrapada	$= 0$	$\leqslant 0$
Superficie marginalmente atrapada	$\leqslant 0$	$= 0$
4. Superficie atrapada pasado	> 0	> 0
5. Superficie débilmente atrapada pasado	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$
6. Superficie marginalmente atrapada pasado	$= 0$	$\geqslant 0$
Superficie marginalmente atrapada pasado	$\geqslant 0$	$= 0$

Tabla A.1: Caracterización de superficies de acuerdo con las expansiones $\Theta_{(l)}$ y $\Theta_{(N)}$

Cuando se realiza restricción sobre una de las expansiones nulas $\Theta_{(l)}$ o $\Theta_{(N)}$, se obtienen otra clase de superficies: superficies atrapadas exteriores. Si se supone por alguna razón que una de las direcciones nulas futuras se selecciona geométricamente tal que apunte dentro de la dirección *exterior* de la superficie S, entonces $\vec{l}$ es la dirección nula exterior futura y $\vec{N}$ la dirección nula interior futura. Así se tienen las siguientes clases de superficies: La clasificación 5 a 8 se realiza si la orientación temporal se invierte pero la noción de exterior es *inequívoca*. Para estas clasificaciones $-\vec{N}$ es la nueva dirección nula exterior futura, donde la expansión nula de $-\vec{N}$ es $-\Theta_{(N)}$.

De acuerdo con los resultados (A.140) y (A.142), y a partir de la clasificación 3 de la tabla A.1 y la tabla A.2 se podría argumentar que el cascarón es una superficie atrapada exterior marginalmente (MOTS).
De los trabajos de Schnetter et.al y Carrasco [65, 74], las superficies atrapadas implican la existencia de una singularidad en el futuro. Además, para el caso de las MOTS, se consideran como el reemplazo cuasi-

Superficie	**Expansión**
1. Superficie atrapada exterior	$\Theta_{(l)} < 0$
2. Superficie atrapada exterior débilmente	$\Theta_{(l)} \leqslant 0$
3. Superficie atrapada exterior marginalmente (MOTS)	$\Theta_{(l)} = 0$
4. Superficie no atrapada	$\Theta_{(l)} > 0$
5. Superficie atrapada exterior pasado	$\Theta_{(N)} > 0$
6. Superficie atrapada exterior débilmente pasado	$\Theta_{(N)} \geqslant 0$
7. Superficie atrapada exterior marginalmente pasado (MOTS pasado)	$\Theta_{(N)} = 0$
8. Superficie no atrapada	$\Theta_{(N)} < 0$

Tabla A.2: Caracterización de superficies restringiendo los $\Theta_{(l)}$ y $\Theta_{(N)}$

local del horizonte de eventos. Si no se tiene en cuenta la evolución, los agujeros negros, el horizonte de eventos y las superficies atrapadas marginalmente exteriores son esencialmente los mismos en un configuración de equilibrio.
La manera como se comportan los vectores relacionados en las expansiones $\Theta_{(l,N)}$ para el cascarón se muestran a continuación (A.1). Debido a que el cascarón Σ es una hipersuperficie tipo tiempo, el vector

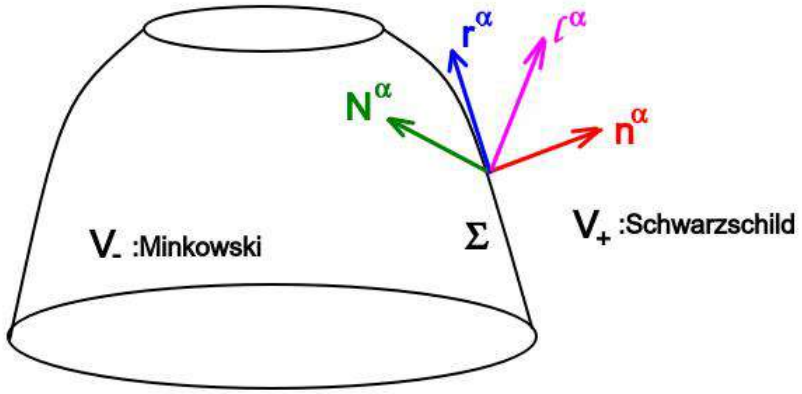

Figura A.1: Vectores nulos para un cascarón de polvo en colapso.

n^α es tipo espacio y r^α es tipo tiempo, y la superposición de estos de acuerdo con (A.126) dan la orientación de l^α y N^α.

A.4. Cascarón con presión

Siguiendo a Israel [71], se realiza el análisis de la dinámica de un cascarón esférico compuesto de polvo al cual se le asocia una presión superficial interna.
Para el vector normal sobre la hipersuperficie se define

$$n \cdot n \equiv n^\mu n_\mu = \eta \equiv \pm 1. \tag{A.143}$$

La ecuación de Lanczos es

$$-8\pi\eta S_{ab} = [K_{ab} - g_{ab}K], \tag{A.144}$$

la cual se puede reescribir como

$$-8\pi\eta S^{b}{}_{a;b} = [K^{b}{}_{a;b} - K_{,a}]. \tag{A.145}$$

Las ecuaciones de campo de Einstein sobre la hipersuperficie establecen

$$G_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}n^{\beta} = K^{b}{}_{a;b} - K_{,a}. \tag{A.146}$$

Luego,

$$G_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}n^{\beta} = K^{b}{}_{a;b} - K_{,a} = 8\pi T_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}n^{\beta},$$

donde se toma $G = c = 1$. Con lo anterior se tiene la ley de conservación para el tensor momento-energía

$$\eta S^{b}{}_{a;b} = -[T_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}n^{\beta}]. \tag{A.147}$$

La métrica sobre la hipersuperficie es

$$ds^2 = R^2(\tau)d\Omega^2 - \eta d\tau^2, \tag{A.148}$$

de tal manera que para una historia tipo tiempo, $R(\tau)$ es el radio del cascarón en el tiempo propio τ.

Ahora para el escalar de curvatura extrínseca

$$K = K^{\tau}{}_{\tau} + K^{\theta}{}_{\theta} + K^{\phi}{}_{\phi} = K^{\tau}{}_{\tau} + 2K^{\theta}{}_{\theta},$$

donde se asume que

$$K^{\theta}{}_{\theta} = K^{\phi}{}_{\phi},$$

lo cual ya se ha probado con anterioridad en la sección A.1.1. Entonces partir de la ecuación (A.144), se obtiene

$$-8\pi\eta S^{\tau}{}_{\tau} = [K^{\tau}{}_{\tau} - K] = -2[K^{\theta}{}_{\theta}],$$

$$4\pi\eta S^{\tau}{}_{\tau} = [K^{\theta}{}_{\theta}]. \tag{A.149}$$

La ley de conservación para el tensor momento-energía se simplifica al asumir que la geometrías interior y exterior del cascarón son de la forma

$$ds^2 = \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 - f(r)dt^2, \tag{A.150}$$

con diferentes funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$, para el interior y exterior del cascarón respectivamente. A partir

de la forma de la métrica (A.150) se tiene que $T^r{}_r = T^t{}_t$, luego

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} e^\alpha_a n^\beta &= T_{tt} e^t_a n^t + T_{rr} e^r_a n^r, \\ &= -T_{tt} + T_{rr} = 0, \end{aligned}$$

es decir que los alrededores no realizan trabajo sobre el cascarón, luego a partir de (A.147)

$$\eta S^b{}_{a;b} = 0. \tag{A.151}$$

Con lo anterior se obtiene

$$S^b{}_{a;b} = S^b{}_{a,b} + \Gamma^b{}_{cb} S^c{}_a - \Gamma^c{}_{ab} S^b{}_c.$$

$$S^\tau{}_{a;\tau} + S^\theta{}_{a;\theta} + S^\phi{}_{a;\phi} = S^\tau{}_{a,\tau} + S^\theta{}_{a,\theta} + S^\phi{}_{a,\phi} + (\Gamma^\tau{}_{c\tau} + \Gamma^\theta{}_{c\theta} + \Gamma^\phi{}_{c\phi}) S^c{}_a - \Gamma^c{}_{a\tau} S^\tau{}_c - \Gamma^c{}_{a\theta} S^\theta{}_c - \Gamma^c{}_{a\phi} S^\phi{}_c.$$

Luego

$$\begin{aligned} S^\tau{}_{a;\tau} + S^\theta{}_{a;\theta} + S^\phi{}_{a;\phi} =& S^\tau{}_{a,\tau} + S^\theta{}_{a,\theta} + S^\phi{}_{a,\phi} + \Gamma^\tau{}_{\tau\tau} S^\tau{}_a + \Gamma^\tau{}_{\theta\tau} S^\theta{}_a + \Gamma^\tau{}_{\phi\tau} S^\phi{}_a + \\ & \Gamma^\theta{}_{\tau\theta} S^\tau{}_a + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} S^\theta{}_a + \Gamma^\theta{}_{\phi\theta} S^\phi{}_a + \Gamma^\phi{}_{\tau\phi} S^\tau{}_a + \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} S^\theta{}_a + \Gamma^\phi{}_{\phi\phi} S^\phi{}_a - \\ & (\Gamma^\tau{}_{a\tau} S^\tau{}_\tau + \Gamma^\theta{}_{a\tau} S^\tau{}_\theta - \Gamma^\phi{}_{a\tau} S^\tau{}_\phi) - (\Gamma^\tau{}_{a\theta} S^\theta{}_\tau + \Gamma^\theta{}_{a\theta} S^\theta{}_\theta + \Gamma^\phi{}_{a\theta} S^\theta{}_\phi) - \\ & (\Gamma^\tau{}_{a\phi} S^\phi{}_\tau + \Gamma^\theta{}_{a\phi} S^\phi{}_\theta + \Gamma^\phi{}_{a\phi} S^\phi{}_\phi). \end{aligned}$$

Simplificando para $a = \tau$ se obtiene de acuerdo con (A.151)

$$S^b{}_{\tau;b} = S^\tau{}_{\tau,\tau} + \Gamma^\theta{}_{\tau\theta} S^\tau{}_\tau + \Gamma^\phi{}_{\tau\phi} S^\tau{}_\tau - \Gamma^\theta{}_{\tau\theta} S^\theta{}_\theta - \Gamma^\phi{}_{\tau\phi} S^\phi{}_\phi = 0. \tag{A.152}$$

De acuerdo con (A.148)

$$\Gamma^\theta{}_{\tau\theta} = \Gamma^\phi{}_{\tau\phi} = \frac{\dot{R}}{R}. \tag{A.153}$$

Reemplazando en (A.152)

$$\begin{aligned} S^\tau{}_{\tau,\tau} + \frac{2\dot{R}}{R} S^\tau{}_\tau - \frac{\dot{R}}{R}(S^\theta{}_\theta + S^\phi{}_\phi) &= 0, \\ 4\pi R^2 S^\tau{}_{\tau,\tau} + 4\pi \cdot 2R\dot{R} S^\tau{}_\tau - 4\pi \cdot 2R\dot{R} S^\theta{}_\theta &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que $S^\theta{}_\theta = S^\phi{}_\phi$.
Si el área del cascarón es $A = 4\pi R^2$ y la presión superficial interna es $P = S^\theta_\theta$, lo anterior se puede escribir como

$$-\frac{d}{d\tau}(S^\tau{}_\tau A) + P\frac{dA}{d\tau} = 0, \tag{A.154}$$

así, toda la información esencial alrededor de la dinámica del cascarón esta contenida en la ecuación (A.149) y la ley de conservación (A.154).

Ahora las componenetes de la c-velocidad del cascarón y del vector normal estan dadas por[2]

$$u^\alpha = (\dot{R}, 0, 0, \dot{t}), \qquad n_\alpha = (\dot{t}, 0, 0, -\dot{R}).$$

La normalización de $n \cdot n = -u \cdot u = \eta$ da como resultado

$$n^\alpha \partial_\alpha r = f\dot{t} = \epsilon(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2},$$

con la introducción de la constante $\epsilon = sign(n^\alpha \partial_r r) = \pm 1$, la cual nos dice cuando la coordenada radial se incrementa hacia afuera. Además de lo anterior tambien se puede concluir

$$K^\theta{}_\theta = \frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu (\ln r^2) = \frac{f n_r}{R} = \frac{\epsilon(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}}{R}. \tag{A.155}$$

Al sustituir (A.155) en (A.149) se obtiene

$$4\pi\eta S^\tau{}_\tau = \frac{[\epsilon(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}]}{R}. \tag{A.156}$$

Si se identifica $\sigma = -S^\tau{}_\tau$ y $m = 4\pi R^2 \sigma$, las expresiones (A.156) y (A.154) se escriben

$$\eta \frac{m}{R} = -[\epsilon(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}], \tag{A.157}$$

$$\frac{dm}{d\tau} + P\frac{dA}{d\tau} = 0. \tag{A.158}$$

Para el caso de interés, donde la metrica exterior es la métrica de Schwarzschild con $f_2 = 1 - \frac{2M}{R}$ y la métrica interior es la de Minkowski con $f_1 = 1$ se tiene para la expresión (A.157) con $\epsilon = \eta = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{R} &= -[(f + \dot{R}^2)^{1/2}] = -\{(f_2 + \dot{R}^2)^{1/2} - (f_1 + \dot{R}^2)^{1/2}\}, \\
\frac{m}{R} &= -\left\{\left(1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2\right)^{1/2} - (1 + \dot{R}^2)^{1/2}\right\}, \\
\left(1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2\right)^{1/2} &= \sqrt{1 + \dot{R}^2} - \frac{m}{R}.
\end{aligned}$$

Finalmente resolviendo para la masa gravitacional M se obtiene una vez más la ecuación de movimiento del cascarón (A.33)

$$M = m\sqrt{1 + \dot{R}^2} - \frac{m^2}{2R}, \tag{A.159}$$

La presión interna del cascarón se encuentra diferenciando la expresión (A.157)

$$\eta\left(\frac{\dot{m}}{R} - \frac{m\dot{R}}{R^2}\right) = -\left[\frac{\epsilon(\eta\dot{f} + 2\dot{R}\ddot{R})}{2(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}}\right],$$

[2] el orden de las coordenadas es r, θ, ϕ, t.

$$\frac{\dot{m}}{R} = \frac{m\dot{R}}{R^2} - \frac{\dot{R}}{\eta}\left[\frac{\epsilon(\eta f^{'} + 2\ddot{R})}{2(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}}\right], \tag{A.160}$$

diferenciando (A.158)

$$\frac{\dot{m}}{R} = -8\pi \cdot P\dot{R}. \tag{A.161}$$

Igualando (A.160) y (A.161)

$$8\pi P = -\frac{m}{R^2} + \frac{1}{\eta}\left[\frac{\epsilon(\eta f^{'} + 2\ddot{R})}{2(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}}\right]. \tag{A.162}$$

Utilizando de nuevo la expresión (A.157), se obtiene en (A.162)

$$8\pi P = \frac{1}{R\eta}[\epsilon(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}] + \frac{1}{\eta}\left[\frac{\epsilon(\eta f^{'} + 2\ddot{R})}{2(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}}\right]. \tag{A.163}$$

Al considerar $\ddot{R} = 0$ y simplificar

$$8\pi P = \left[\frac{\epsilon(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}}{\eta R} + \frac{\epsilon f^{'}}{2(\eta f + \dot{R}^2)^{1/2}}\right]. \tag{A.164}$$

Haciendo $\epsilon = \eta = 1$, se obtiene

$$16\pi P = \left[\frac{2f + 2\dot{R}^2 + f^{'}R}{R(f + \dot{R}^2)^{1/2}}\right]$$

Reemplazando f_2 y f_1 por los valores respectivos se encuentra la presión interna del cascarón

$$16\pi P = \frac{2 - \frac{2M}{R} + 2\dot{R}^2}{R\sqrt{1 - \frac{2M}{R} + \dot{R}^2}} - \frac{2\sqrt{1 + \dot{R}^2}}{R}. \tag{A.165}$$

Finalmente si se hace $\dot{R} = 0$ en (A.157) y (A.164), se obtienen las ecuaciones para un cascarón estático

$$\eta\frac{m}{R} = -[\epsilon(\eta f)^{1/2}], \tag{A.166}$$

$$16\pi P = \left[\frac{\epsilon}{(\eta f)^{1/2}}\left(f^{'} + \frac{2f}{R}\right)\right]. \tag{A.167}$$

Una vez más reemplazando los respectivos valores de f_2 y f_1 con $\epsilon = \eta = 1$ se obtiene

$$M = m - \frac{m^2}{2R}, \tag{A.168}$$

$$16\pi P = \frac{\frac{2}{R} - \frac{2M}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} - \frac{2}{R}. \tag{A.169}$$

Reemplazando (A.168) en (A.169) y simplificando se obtiene la presión interna para el cascarón estático

$$P = \frac{m^2}{16\pi R^2(R - m)}. \tag{A.170}$$

Apéndice B

Modos de Campo de Hartle-Hawking

El contexto más apropiado para introducir los estado de Hartle-Hawking es el de los estados fundamentales o base para estrellas y agujeros negros [10]. En este apéndice se introducen los estados de Hartle-Hawking siguiendo las referencias [8, 70]. Debido al principo de equivalencia el vacío de Minkowski $|0\rangle_M$ para el observador FREFOS, se identifica con el de Hartle-Hawking $|0\rangle_H$ para el observador FIDO y de la misma manera, el vacío de Rindler $|0\rangle_R$ con el de Boulware $|0\rangle_B$. Así las propiedades con las cuales se caracterizan los modos de campo de Hartle-Hawking son similares para los modos de Minkowski.

B.1. Modos de campo de Boulware

Se considera un campo escalar ϕ el cual se define sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild extendido maximalmente de acuerdo con la figura (B.1).

Es decir, ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon Así, el campo escalar ϕ satidface la ecuación de Klein-gordon

$$(\Box - m^2)\phi = 0. \tag{B.1}$$

Desarrollando, se tiene que el DÁlembertiano está dado por

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b).$$

En particular para el sector I del espacio-tiempo de Schwarzschild extendido maximalmente de acuerdo a la figura(B.1), donde $I : Z > |T|$ cuya métrica estática está dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2,$$

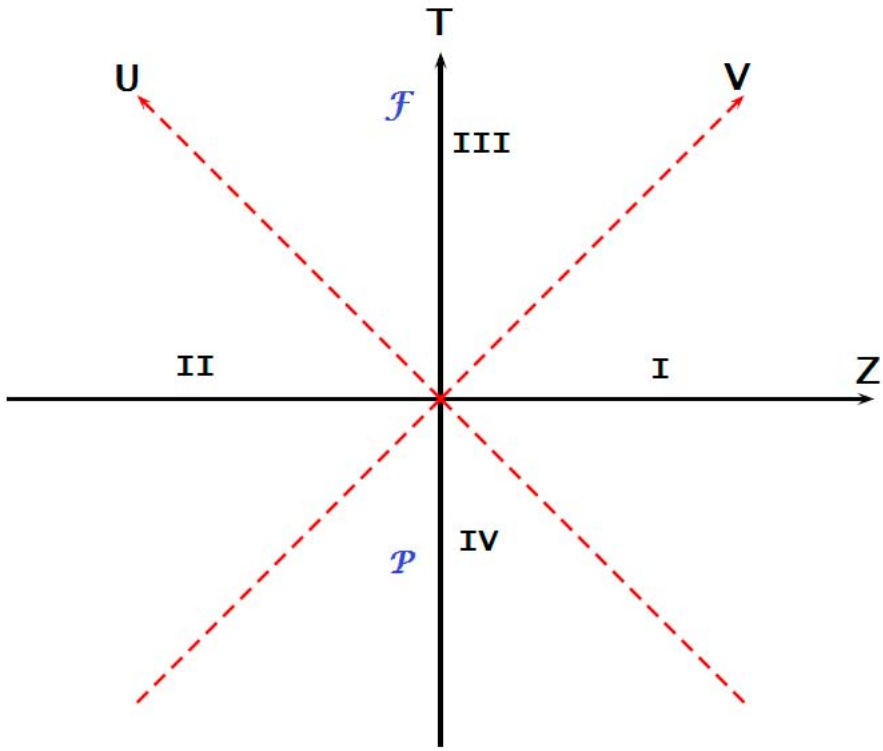

Figura B.1: Espacio-tiempo de Schwarzschild extendido maximalmente.

un conjunto de modos de solución para las regiones I y II de (B.1) es el siguiente

$$\varphi_\Omega(t, x^a) = \varphi_\Omega(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \frac{1}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega t}, \tag{B.2}$$

los cuales corresponden a ondas planas esféricas $\varphi_\Omega(t, x^a)$, donde

$$\underline{\mathrm{x}} \equiv x^a = (r, \theta, \phi), \qquad \Omega = \omega, l, m,$$

los modos de Boulware para cada sector I o II se pueden expresar en términos de una función de paso unitaria $\Theta_\epsilon(x)$ tal que

$$\varphi_\Omega^{(\epsilon)}(x) = \varphi_\Omega(t, \underline{\mathrm{x}}) \Theta_\epsilon(x), \tag{B.3}$$

donde $x = (t, r, \theta, \phi)$, $\epsilon = \pm 1$, y

$$\Theta_\epsilon(x) \equiv \frac{1}{2}\{\theta(-\epsilon U) + \theta(\epsilon V)\}. \tag{B.4}$$

Es importante señalar que θ_ϵ satisface las siguientes propiedades

$$\Theta_\epsilon + \Theta_{-\epsilon} = 1, \tag{B.5}$$

$$\Theta_\epsilon + \Theta_{-\epsilon} = \frac{1}{2}\{\epsilon(V)) - \epsilon(U)\}, \tag{B.6}$$

donde $\epsilon(V) \equiv sign(V)$, $\epsilon(U) \equiv sign(U)$. El conjunto de modos $\{\varphi_\Omega^{(\epsilon)}{}_{(\omega>0)}\}$ es completo y ortonormal [75, 76]. Así, ϕ se puede expandir para todo el espacio-tiempo de Schwarzschild extendido maximalmente, de la siguiente manera

$$\phi(x) = \sum_{\epsilon,\Omega} b_\Omega^{(\epsilon)} \varphi_\Omega^{(\epsilon)}(x) + h.c. \tag{B.7}$$

B.2. De los modos de Boulware a los modos de Hartle-Hawking

En esta sección se harán los detalles completos e integrales para la *construcción* de los modos de Hartle-Hawking, siguiendo [8, 72]. A partir de la expansión (B.7) se realiza la cuantización de Boulware. Un esquema de cuantización alternativo se puede basar en la forma armónica

$$H_\Omega(U) = \frac{1}{\sqrt{4\pi|\Omega|}} e^{-i\Omega U},$$

$$H_\Omega(V) = \frac{1}{\sqrt{4\pi|\Omega|}} e^{-i\Omega V}.$$

En esta forma armónica los modos de Hartle-Hawking no se relacionan de manera simple como lo pueden estar con los modos de Boulware. En lugar de ello se recurre a un formalismo desarrollado por Unruh [72]. En ese sentido W. Israel introdujo una transformación de Bogolubov [8]:

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)} = \varphi_\Omega^{(\epsilon)}(x)\cosh\chi + \varphi_\Omega^{(-\epsilon)}(x)\,\mathrm{senh}\,\chi, \tag{B.8}$$

donde χ está dado en términos de

$$\tanh\chi = e^{-\pi|\omega|/\kappa_0}, \tag{B.9}$$

con κ_0 la gravedad superficial correspondiente.
Así, a través de la transformación (B.8) se *construyen* los modos de Hartle-Hawking $\chi_\Omega^{(\epsilon)}(\chi)$.
Primero es necesario calcular y justificar (B.8) y (B.9), luego explorar su naturaleza como modos de frecuencia positiva y considerar la completez para hacer un segundo esquema de cuantización.

B.3. Justificación de la transformación de Bogolubov y determinación de los modos HH

De las propiedades de la solución de Kruskal [55, 77]

$$2\kappa_0 t = \ln V - \ln U. \tag{B.10}$$

En esta expresión no se distingue el tiempo t de la región I, ni el t de la región II. Para hacer una distinción su hace una extensión al plano complejo (figura B.2)

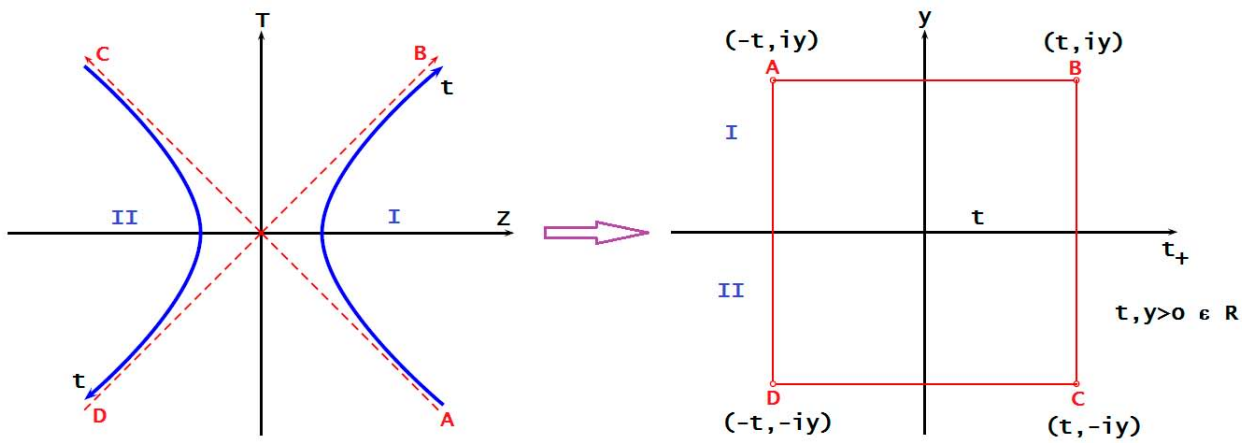

Figura B.2: Extensión al plano complejo de t_+.

$$t_+ := \begin{cases} t + iy, & x \in I, \\ t - iy, & x \in II, \end{cases} \tag{B.11}$$

donde se observa que se dobla el tiempo

$$t = \begin{cases} \longrightarrow t_+ \\ \longrightarrow t_- \end{cases} : t_\epsilon, \quad \epsilon = \pm 1,$$

pero se aplica a las dos regiones I y II.
Entonces la expresión (B.10) se debe duplicar

$$\begin{aligned} 2\kappa_0 t_+ &= \ln_+ V - \ln_+ U, \\ 2\kappa_0 t_- &= \ln_- V - \ln_- U, \end{aligned}$$

lo cual en forma compacta se escribe

$$2\kappa_0 t_\epsilon = \ln_\epsilon V - \ln_\epsilon U. \tag{B.12}$$

Por razones que exige el estudio de las propiedades analíticas de las funciones en (B.12), como se verá mas adelante, es necesario extender su definición en los reales $\mathbb{R}$ a los complejos $\mathbb{C}$.
En particular, la función $f(V) = \ln_+ V$, definida en $\mathbb{R}$, se extiende a los complejos de la siguiente manera

$$f(V_+) = \ln V_z,$$

con

$$V_z = re^{i\theta},$$

$$\ln V_z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \qquad K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Para la rama $k = 0$, para efecto de definir de manera única la función

$$f(V_z) = \ln |V_z| + i \arg V_z. \tag{B.13}$$

Así, los valores de $f(V_z)$ sobre el eje real, de manera general y única, están dados por

$$\ln_+ V = \ln |V| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(V), \tag{B.14}$$

donde $\epsilon(V)$ es el signo de V. Es decir: la manera "más simple" que describe $\ln V_z$ en general y de forma única se muestra en la siguiente figura (B.3) Como $-\infty < V < \infty$, de (B.13)

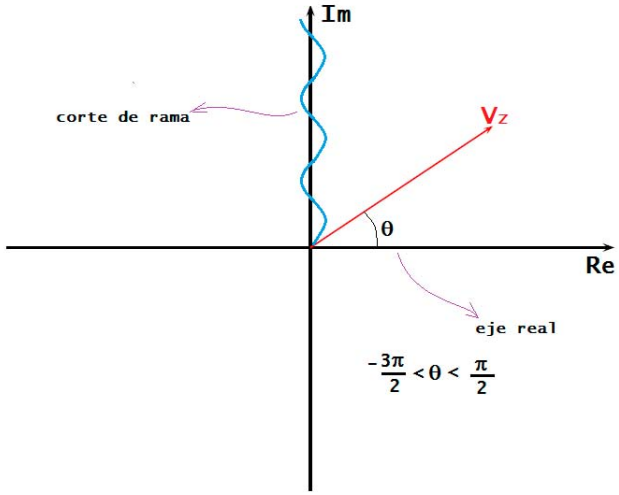

Figura B.3: Representación de $\ln V_Z$.

$$\ln_+ V_z = f(V_z) = \ln |V_z| + i(argV_z + \pi/2),$$

$$V > 0, \quad \theta = 0,$$
$$V < 0, \quad \theta = -\pi.$$

Entonces en

$$f(V_z) = \ln |V_z| + i(\theta + \pi/2),$$

para $V > 0$,

$$f(V_z) = \ln|V_z| + i\pi/2,$$

para $V < 0$,

$$f(V_z) = \ln|V_z| - i\pi/2.$$

Es decir,

$$f(V_z) = f(V) = \ln_+ V = \ln|V| + \frac{i\pi}{2}\epsilon.$$

De igual manera se construye

$$\ln_+ U = \ln|U| + \frac{i\pi}{2}\epsilon. \tag{B.15}$$

de la expresión (B.10)

$$t = \frac{1}{2\kappa_0}\ln\left|\frac{V}{U}\right|, \tag{B.16}$$

y de la expresión (B.12)

$$t_+ = \frac{1}{2\kappa_0}(\ln_+ V - \ln_+ U).$$

Al reemplazar (B.14) y (B.15) en esta última expresión

$$t_+ = \frac{1}{2\kappa_0}\left[\left(\ln|V| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(V)\right) - \left(\ln|U| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(U)\right)\right].$$

Entonces, se obtiene

$$t_+ = \begin{cases} t + \frac{i\pi}{2\kappa_0}, & x \in I, \\ t - \frac{i\pi}{2\kappa_0}, & x \in II. \end{cases} \tag{B.17}$$

Comparando (B.17) con (B.11) se obtiene

$$y = \frac{\pi}{2\kappa_0}.$$

De (B.14) y (B.15) se generaliza

$$\begin{aligned} \ln_\epsilon V &= \ln|V| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(V)\epsilon, \\ \ln_\epsilon U &= \ln|U| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(U)\epsilon. \end{aligned} \tag{B.18}$$

Cálculo de t_ϵ genérico

Con base en (B.12) y (B.18), usando (B.6) y (B.16)

$$t_\epsilon = t + \frac{i\pi}{2\kappa_0}(\Theta_\epsilon - \Theta_{-\epsilon}).$$

Para sumar t con $i\pi/2\kappa_0(\Theta_\epsilon - \Theta_{-\epsilon})$, se introduce la relación

$$t = t(1) = t(\Theta_\epsilon - \Theta_{-\epsilon}),$$

con base en la expresión (B.5).
Así,

$$t_\epsilon = \left(t + \frac{i\pi}{2\kappa_0}\right)\Theta_\epsilon + \left(t - \frac{i\pi}{2\kappa_0}\right)\Theta_{-\epsilon}. \tag{B.19}$$

Cálculo de $t_{\epsilon\epsilon'}$ genérico

De acuerdo con (B.12) se introduce

$$2\kappa_0 t_{\epsilon\epsilon'} = \ln_{\epsilon\epsilon'} V - \ln_{\epsilon\epsilon'} U, \tag{B.20}$$

luego,

$$\begin{aligned} \ln_{\epsilon\epsilon'} V &= \ln|V| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(V)\epsilon\epsilon', \\ \ln_{\epsilon\epsilon'} U &= \ln|U| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(U)\epsilon\epsilon'. \end{aligned} \tag{B.21}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para obtener la expresión (B.19) se obtiene

$$t_{\epsilon\epsilon'} = \left(t + \frac{i\pi}{2\kappa_0}\epsilon'\right)\Theta_\epsilon + \left(t - \frac{i\pi}{2\kappa_0}\epsilon'\right)\Theta_{-\epsilon}. \tag{B.22}$$

De $e^{-i\omega t}$ en (B.2) a $e^{i\omega(U,V)}$ en $\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x)$

Se desea que a partir de los modos de Boulware construir los modos de Hartle-Hawking. Los modos de Boulware son de frecuencia positiva con respecto a t_ϵ, y se verá más adelante que los de Hartle-Hawking son de frecuencia positiva con respecto a U y V.
Para ello se calculará $e^{-i\omega t_\epsilon}$ y $e^{-i\omega t_{\epsilon\epsilon'}}$, a partir de (B.19)

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t_\epsilon} &= e^{-i\omega t_\epsilon}(1) = e^{-i\omega t_\epsilon}(\Theta_\epsilon - \Theta_{-\epsilon}), \\ e^{-i\omega t_\epsilon} &= e^{-i\omega\left(t + \frac{i\pi}{2\kappa_0}\right)}\Theta_\epsilon + e^{-i\omega\left(t - \frac{i\pi}{2\kappa_0}\right)}\Theta_{-\epsilon}. \end{aligned}$$

Así,

$$e^{-i\omega t_\epsilon} = e^{-i\omega t}\left(e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa_0}}\Theta_\epsilon + e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa_0}}\Theta_{-\epsilon}\right). \tag{B.23}$$

De manera similar se obtiene para el término $e^{-i\omega t_{\epsilon\epsilon'}}$

$$e^{-i\omega t_{\epsilon\epsilon'}} = e^{-i\omega t}\left(e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa_0}\epsilon'}\Theta_\epsilon + e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa_0}\epsilon'}\Theta_{-\epsilon}\right). \tag{B.24}$$

Si se identifica $\epsilon' = \epsilon(\omega) \equiv sign(\omega)$, (B.24) se escribe como

$$e^{-i\omega t_{\epsilon(\omega)\epsilon}} = e^{-i\omega t}\left(e^{\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}}\Theta_\epsilon + e^{-\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}}\Theta_{-\epsilon}\right). \tag{B.25}$$

La forma natural de escribir el tiempo es t o $\bar{t}_\epsilon$. Debido a que $\epsilon\epsilon^{'}$ conjuga el signo debido a las regiones y a los modos de frecuencia positiva o negativa, el producto $\epsilon\epsilon^{'}$ consolida el signo definitivo de la expresión. De acuerdo con lo anterior, de (B.22)

$$\begin{aligned} 2\kappa_0 t_{\bar{\epsilon}} &= \ln_{\bar{\epsilon}} V - \ln_{\bar{\epsilon}} U, \\ \epsilon(\omega)\epsilon &\equiv \bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

De esa manera, (B.25) se puede escribir

$$e^{-i\omega t_{\bar{\epsilon}}} = e^{-i\omega t}\left(e^{\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}}\Theta_\epsilon + e^{-\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}}\Theta_{-\epsilon}\right),$$

donde $|\omega| = \omega\epsilon^{'} = \omega\epsilon(\omega)$. Luego

$$e^{-i\omega\frac{1}{2\kappa_0}(\ln_{\bar{\epsilon}} V - \ln_{\bar{\epsilon}} U)} = e^{-i\omega t}\left(e^{\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}}\Theta_\epsilon + e^{-\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}}\Theta_{-\epsilon}\right), \tag{B.26}$$

los cuales son de frecuencia positiva si $\bar{\epsilon} = 1$, y negativa si $\bar{\epsilon} = -1$.
De (B.26) se toma el término

$$e^{\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}} = \left(e^{\frac{\pi|\omega|}{\kappa_0}}\right)^{1/2}.$$

Ahora se denomina

$$e^{-\frac{\pi|\omega|}{\kappa_0}} \equiv \tanh\chi, \qquad \chi(\omega) = \chi. \tag{B.27}$$

Entonces $e^{\frac{\pi|\omega|}{2\kappa_0}}$ se escribe como

$$\left(\frac{\cosh\chi}{\operatorname{senh}\chi}\right)^{1/2}.$$

De esa manera (B.26) se reduce a

$$[(\operatorname{senh}\chi)(\cosh\chi)]^{1/2}e^{-i\omega t_{\epsilon(\omega)\epsilon}} = e^{-i\omega t}[\cosh\chi\Theta_\epsilon + \operatorname{senh}\chi\Theta_{-\epsilon}] = [(\operatorname{senh}\chi)(\cosh\chi)]^{1/2}e^{-i\omega/2\kappa_0}(\ln_{\bar{\epsilon}} V - \ln_{\bar{\epsilon}} U)) \tag{B.28}$$

Para calcular la transformación de Bogolubov (B.8), se tiene a partir de (B.3)

$$\begin{aligned} \varphi_\Omega^{(\epsilon)}(x) &= \varphi_\Omega(t,\underline{x})\Theta_\epsilon(x), \\ &= \varphi_\Omega(\underline{x})\frac{1}{\sqrt{2|\omega|}}e^{-i\omega t}\Theta_\epsilon(x). \end{aligned}$$

entonces, si en la expresión (B.28) se multiplica a ambos lados por $\varphi_\Omega(\underline{x})\frac{1}{\sqrt{2|\omega|}}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\operatorname{senh}\chi)(\cosh\chi)}{2|\omega|}\right]^{1/2}\varphi_\Omega(\underline{x})e^{-i\omega/2\kappa_0}(\ln_{\bar{\epsilon}} V - \ln_{\bar{\epsilon}} U)) &= e^{-i\omega t}\varphi_\Omega(\underline{x})\frac{1}{\sqrt{2|\omega|}}[\cosh\chi\Theta_\epsilon + \operatorname{senh}\chi\Theta_{-\epsilon}], \\ &= \varphi_\Omega^{(\epsilon)}\cosh\chi + \varphi_\Omega^{(-\epsilon)}\operatorname{senh}\chi. \end{aligned} \tag{B.29}$$

Al comparar con (B.8)

$$\begin{aligned}\chi_{\Omega}^{\bar{\epsilon}}(x) &= \sqrt{\frac{\operatorname{senh}\chi\cosh\chi}{2|\omega|}}\varphi_{\Omega}(\underline{x})e^{-i\omega t_{\bar{\epsilon}}},\\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{senh}\chi\cosh\chi}{2|\omega|}}\varphi_{\Omega}(\underline{x})e^{-i\omega/2\kappa_0}(\ln_{\bar{\epsilon}}V-\ln_{\bar{\epsilon}}U),\\ &= \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}\cosh\chi+\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}\operatorname{senh}\chi,\end{aligned} \tag{B.30}$$

con $\bar{\epsilon}=\epsilon(\omega)\epsilon = sign(\omega)\epsilon$, donde se observa que χ lleva $|\omega| = \omega\epsilon^{'} = \omega\epsilon(\omega)$.

$\chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)$ como modos de frecuencia positiva

Los modos $\chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)$ en (B.30) son de frecuencia positiva para $\bar{\epsilon}=+1$ y negativa para $\bar{\epsilon}=-1$, con respecto a U y V. La existencia de dos tipos de modos aparece operacionalmente en los desarrollos anteriores, ¿pero qué significan?. Para dar respuesta a esto se realiza una introducción a las funciones de frecuencia positiva y luego se verifica que los modos $\chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)$ satisfacen éstas propiedades.

B.4. Funciones de frecuencia positiva

Una función analítica $f(t)$ es de frecuencia positiva en t, es decir, su espectro de fourier contiene únicamente frecuencias positivas, si es regular y acotada en el semiplano inferior del t-plano complejo [10].
Para comprender esta definición es necesario aclarar dos consideraciones matemáticas:

i. $f(t)$ tiene un espectro de Fourier con frecuencias únicamente positivas si satisface

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}f(t)dt=0, \quad \text{si} \quad \omega<0. \tag{B.31}$$

Antes de analizar las propiedades de $f(t)$ para satisfacer (B.31), se deben cumplir otros requerimientos matemáticos:
Las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon (B.1) en general no satisfacen un producto interno definido positivo, por ello se escoge el subconjunto de soluciones de frecuencia positiva de (B.1) para conformar el espacio vectorial, fundamento del espacio de Hilbert de una partícula. La integral que determina el producto interno definido positivo, debe conducir a una norma finita. Todas estas condiciones matemáticas se establecen de manera clara en [78].

ii.

$$0=V^{+}(\vec{r};\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}V^{+}(\vec{r};t)e^{i\omega t}dt, \quad \text{para} \quad \omega<0,$$

Entonces, $V^{+}(\vec{r};t)$ debe ser analítica en el semiplano inferior de t-plano complejo [79]. Es decir, si se extiende t al plano complejo:$t=R_t+iI_t$, luego

$$e^{i\omega t}=e^{i\omega(R_t+iI_t)}=e^{i\omega R_t}e^{-\omega I_t}, \quad \omega<0.$$

$e^{i\omega R_t}$, es una función acotada; $e^{-\omega I_t}$, para $\omega < 0$, tiende a cero para $I_t < 0$, cuando $|I_t \to \infty|$. En otras palabras,

$$\oint V^+(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt = 0.$$

Si $V^+(\vec{r}; t)$ es analítica en el plano inferior y sobre el eje real (porque $e^{i\omega t}$ es analítica allí), por el teorema de Cauchy. Se debe notar que V^+ debe ser acotada.

De (B.30) usando (B.14) y (B.15) se tiene

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{senh}\chi \cosh\chi}{2|\omega|}} \varphi_\Omega(\underline{x}) e^{-i\omega/2\kappa_0} \left[\ln\left|\frac{V}{U}\right| + \frac{i\pi}{2}(\epsilon(V) - \epsilon(U)) \right]. \tag{B.32}$$

A continuación se mostrará que los modos $\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x)$ son de frecuencia positiva con respecto a U y V. En general

$$\ln_+ Z = \ln|Z| + i(argZ + \pi/2),$$

es regular en el semiplano complejo inferior. También $e^{\pm i\alpha \ln_+ Z}$ son regulares y acotadas allí. Como

$$e^{\pm i\alpha \ln_+ x} = e^{\pm i\alpha[\ln|x| + i\pi/2\epsilon(x)]},$$

corresponde a

$$e^{-i\omega/2\kappa_0 \left[\ln\left|\frac{V}{U}\right| + \frac{i\pi}{2}(\epsilon(V) - \epsilon(U)) \right]},$$

de acuerdo con (B.32), para $\omega > 0$ y $\omega < 0$ ($\pm i\alpha \equiv -i\omega/2\kappa_0$), $\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x)$ son funciones de frecuencia positiva con respecto a U y V.

Apéndice C

Termodinámica para el observador FIDO

A continuación se describe la termodinámica de un campo escalar que se encuentra en la vecindad del horizonte de eventos de un cascarón negro esférico con respecto al observador relativista FIDO. Para ello, se hara uso de la *Dinámica de Campos Térmicos (TFD)* para campos escalares [6] (sección 2.4), y la solución analíticamente extendida del espacio-tiempo de Schwarzschild.

C.1. Campo escalar sobre el espacio-tiempo de Kruskal

Siguiendo a [70], se considera un campo escalar ϕ que se propaga sobre un fondo geométrico cuya métrica estática es dada por

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ab}dx^a dx^b. \tag{C.1}$$

El campo escalar ϕ satisface la ecuación de Klein-gordon

$$(\Box - m^2)\phi = 0. \tag{C.2}$$

Desarrollando, se tiene que el DÁlembertiano está dado por

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b). \tag{C.3}$$

En particular para el sector I del espacio-tiempo de Schwarzschild extendido maximalmente de acuerdo a la figura(C.1), donde $I : Z > |T|$ cuya métrica estática está dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \tag{C.4}$$

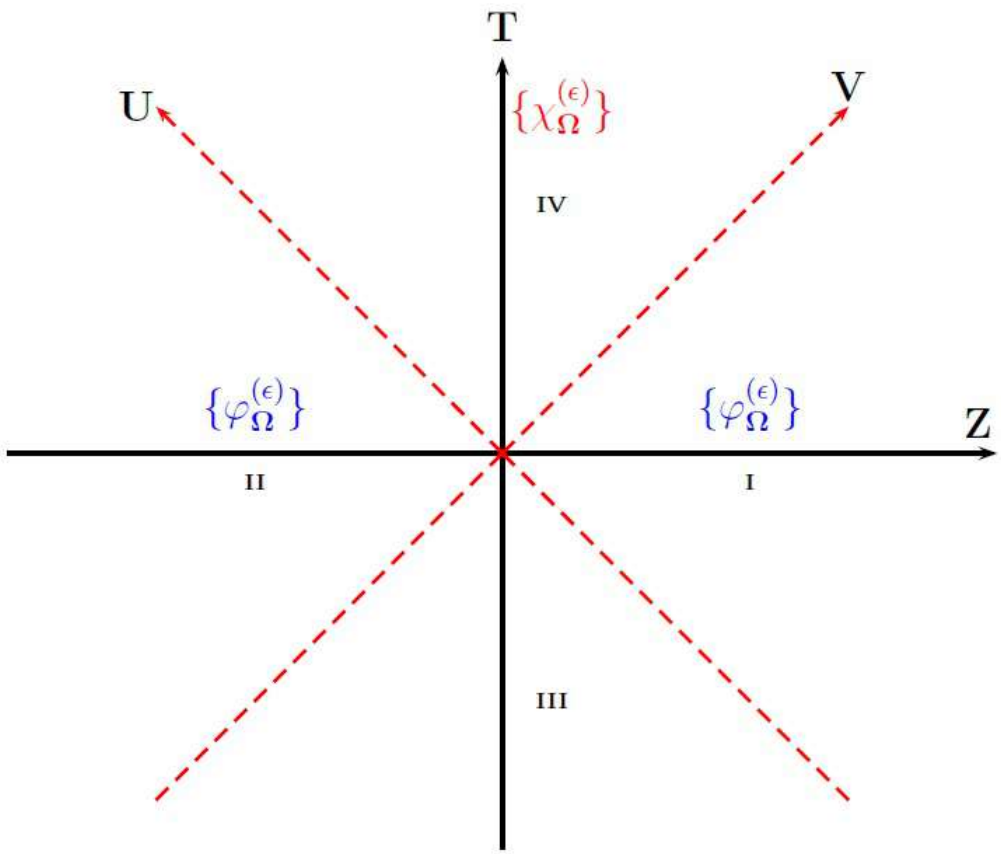

Figura C.1: Modos de campo en el espacio-tiempo de Kruskal.

un conjunto de modos de solución para las regiones I y II de (C.2), de acuerdo con lo que se estableció en el apéndice B es el siguiente

$$\varphi_\Omega(t, x^a) = \varphi_\Omega(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \frac{1}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega t}, \tag{C.5}$$

los cuales corresponden a ondas planas esféricas $\varphi_\Omega(t, x^a)$, donde

$$\underline{\mathrm{x}} \equiv x^a = (r, \theta, \phi), \qquad \Omega = \omega, l, m,$$

con lo cual (C.5) se reescribe como

$$\varphi_\Omega(t, x^a) = \varphi_\Omega(\underline{\mathrm{x}}) \frac{1}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega t}.$$

Al sustituir (C.5) en (C.2) se obtiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 f(r) \frac{d\varphi_\Omega(r)}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2 \right) \varphi_\Omega(r) = 0. \tag{C.6}$$

A continuación se definen los siguientes operadores

$$dr_* \equiv \frac{dr}{f(r)}, \quad \frac{d}{dr_*} \equiv f(r)\frac{d}{dr}, \tag{C.7}$$

con esto la expresión (C.6) se transforma en

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr_*}\left(r^2 f(r)\frac{1}{f(r)}\frac{d\varphi_\Omega(r)}{dr_*}\right) + \left(\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2\right)\varphi_\Omega(r) = 0,$$
$$r^{-2}\frac{d}{dr_*}\left(r^2\frac{d\varphi_\Omega(r)}{dr_*}\right) + \left(\omega^2 - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2\right)f(r)\right)\varphi_\Omega(r) = 0,$$

Ahora, existen dos soluciones especiales $\varphi_\Omega^+(r)$ y $\varphi_\Omega^-(r)$ para la ecuación anterior definidas por las condiciones de frontera

$$\varphi_\Omega^+(r) \approx e^{i\omega r_*}, \quad \varphi_\Omega^-(r) \approx e^{-i\omega r_*},$$

que corresponden a modos que entran y salen sobre el horizonte de eventos en el sector I y II de la variedad de Kruskal como se muestra en la figura(C.1), bajo la condición

$$\text{para} \quad r \longrightarrow r_0 \quad \text{(el horizonte de eventos)}, \quad \text{ó} \quad r_* \longrightarrow -\infty, \tag{C.8}$$

con $\Omega \equiv \omega klm$ para $k = \pm 1$.
Considerando φ_Ω^+ para la solución (C.5), se tiene

$$\varphi_\Omega^+(t, x^a) = \varphi_\Omega^+(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2|\omega|}}.$$

Sea

$$u = t - r_* \quad \text{y} \quad v = t - r_*,$$

se tiene para los modos que salen

$$\varphi_\Omega^+(t, x^a) = \frac{Y_{lm}}{\sqrt{2|\omega|}} e^{i\omega r_*} e^{-i\omega t} = \frac{Y_{lm}}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega r_* - t}, \tag{C.9}$$

luego

$$\varphi_\Omega^+(t, x^a) = \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega u}. \tag{C.10}$$

De igual manera, para los modos que entran se tiene

$$\varphi_\Omega^+(t, x^a) = \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2|\omega|}} e^{-i\omega v}. \tag{C.11}$$

Resumiendo los resultados anteriores se establece

$$\varphi^{+}_{\Omega}(t,x^a) = \varphi^{s}_{\Omega}(u,x^a) = \varphi^{s}_{\Omega}\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\sqrt{2|\omega|}}, \tag{C.12}$$

$$\varphi^{-}_{\Omega}(t,x^a) = \varphi^{e}_{\Omega}(u,x^a) = \varphi^{e}_{\Omega}\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\sqrt{2|\omega|}}. \tag{C.13}$$

Finalmente, φ^{+}_{Ω}, φ^{-}_{Ω} se pueden escribir en términos de los tiempos de Kruskal U y V de la variedad de Kruskal como

$$\begin{aligned}\varphi^{\epsilon}_{\Omega}(U,x^a) &= \Theta(-\epsilon U)\varphi^{s}_{\Omega}(u,x^a),\\ \varphi^{\epsilon}_{\Omega}(V,x^a) &= \Theta(\epsilon V)\varphi^{e}_{\Omega}(v,x^a),\end{aligned} \tag{C.14}$$

donde Θ es la función de paso unitaria dada por

$$\Theta_{\epsilon}(x) \equiv \frac{1}{2}\{\theta(-\epsilon U) + \theta(\epsilon V)\},$$

y $\epsilon = \pm 1$. La figura (C.2) ilustra de manera clara el desplazamiento de los modos $\varphi^{(\epsilon)}_{\Omega}$ sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild extendido maximalmente.

La descripción de modos realizada permite considerar los t-modos para la región I y los modos de Killing-Boulware (KB) en los sectores I y II expresado como $\varphi_{\Omega}(\underline{x},t)$ y $\varphi^{(\epsilon)}_{\Omega}$ respectivamente por

$$\begin{aligned}\varphi_{\Omega}(\underline{x},t) &= \varphi_{\Omega}(\underline{x})\frac{1}{\sqrt{2|\omega|}}e^{-i\omega t},\\ \varphi^{(\epsilon)}_{\Omega} &= \varphi_{\Omega}(\underline{x},t)\Theta_{\epsilon}(x),\end{aligned} \tag{C.15}$$

los cuales satisfacen las reglas de ortogonalidad

$$(\varphi_{\Omega},\varphi_{\Omega'}) = \epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{C.16}$$

$$(\varphi^{(\epsilon)}_{\Omega},\varphi^{(\epsilon')}_{\Omega'}) = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\epsilon\epsilon'}, \tag{C.17}$$

donde se tiene que

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega) &= sign(\omega),\\ \delta_{\Omega\Omega'} &= \delta(\omega-\omega')\delta_{\varphi\varphi'}\delta_{mm'}\delta_{kk'}\end{aligned}$$

para $k = \pm 1$. Los modos KB descansan sobre la métrica (C.4), y difieren en el signo para el tiempo coordenado t. Lo anterior significa que estos modos son de frecuencia positiva en un tiempo de Killing t en cada uno de los sectores I y II de la figura (C.1). Un conjunto completo de modos queda determinado por (C.15), cuya relación de completez es

$$\frac{1}{2}\gamma(\underline{x})\sum_{\Omega}\varphi_{\Omega}(\underline{x})\varphi^{*}_{\Omega}(\underline{x}') = \delta^3(\underline{x}-\underline{x}'), \tag{C.18}$$

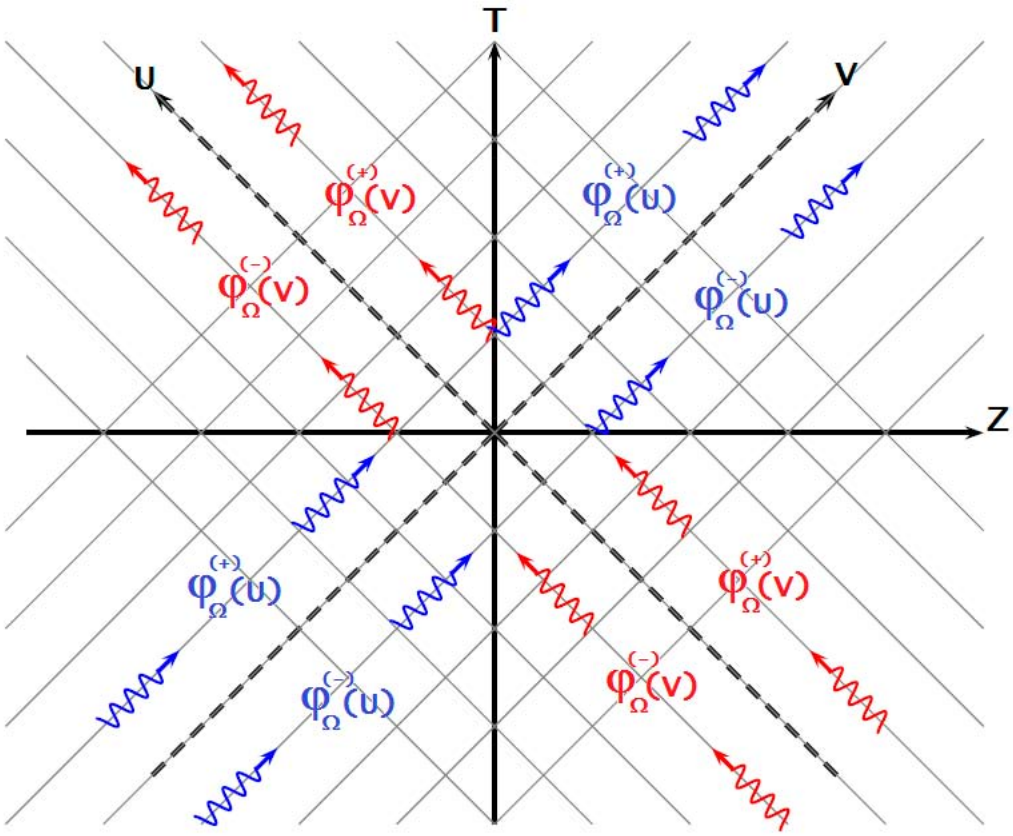

Figura C.2: Desplazamiento de modos de campo en el espacio-tiempo de Kruskal.

y la relación de ortogonalidad

$$\int d^3\underline{x}\gamma(\underline{x})\varphi^*_{\Omega'}(\underline{x})\varphi_\Omega(\underline{x}) = \delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\bar{\Omega}\Omega'}, \tag{C.19}$$

donde $\bar{\Omega} = -\omega, lmk$.

C.2. Modos de Kruskal-Hartle-Hawking

Estos se denotan como $\chi_\Omega^{(\epsilon)}$, los cuales son modos de frecuencia positiva con respecto a los tiempos de Kruskal (U, V), sobre toda la variedad. Estos modos satisfacen las relaciones de ortogonalidad

$$(\chi_\Omega^{(\epsilon)}, \chi_{\Omega'}^{(\epsilon')}) = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\epsilon\epsilon'}, \tag{C.20}$$

los modos KH^2 son de frecuencia positiva para el tiempo de Kruskal cuando $\omega\epsilon > 0$ y de frecuencia negativa cuando $\omega\epsilon < 0$.
Los modos de KB $\varphi_\Omega^\epsilon(x)$ y los modos de KH^2 $\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x)$ se relacionan por una transformación de Bogolubov

dada por (B.8)

$$\chi_{\Omega}^{(\epsilon)} = \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\cosh\chi + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\,\mathrm{senh}\,\chi, \tag{C.21}$$

donde χ se define en términos de (B.9)

$$\tanh\chi = e^{-\pi|\omega|/\kappa_0}, \tag{C.22}$$

con κ_0 la gravedad superficial. A partir de (C.15) y (C.21) se encuentra la relación (B.30)

$$\chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{senh}\,\chi\cosh\chi}{2|\omega|}}\varphi_{\Omega}e^{-i\omega t_{\epsilon(\omega)\epsilon}}. \tag{C.23}$$

Para una descripción cuántica se considera la cuantización de los modos KB y KH^2 establecidos en las expresiones (C.15) y (C.23) respectivamenete, donde se tiene que

$$\Phi(x) = \sum_{\epsilon,\Omega}\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}\chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x) = \sum_{\epsilon,\Omega}\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x). \tag{C.24}$$

Para la expresión (C.24) se establecen las siguientes reglas de conmutación que deben satisfacer los operadores

$$[\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}, \hat{a}_{\Omega'}^{(\epsilon')\dagger}] = [\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}, \hat{b}_{\Omega'}^{(\epsilon')\dagger}] = \epsilon(\omega)\epsilon\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta_{\Omega\Omega'}, \tag{C.25}$$

donde $\Omega = l, m, \omega, k$ y $k = \pm 1$.
A continuación se defininen los estados de vacío de KH^2 y KB por:

$$\begin{aligned} KH^2 &\longrightarrow \hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}|0\rangle_H = 0, \\ KB &\longrightarrow \hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}|0\rangle_B = 0, \end{aligned} \tag{C.26}$$

bajo la condición que $\omega\epsilon > 0$. El operador $\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)}$ transforma de acuerdo con la DCT (sección 2.4) como

$$\hat{a}_{\Omega}^{(\epsilon)} = \hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}\cos\chi + \hat{b}_{\Omega}^{(-\epsilon)}\,\mathrm{senh}\,\chi = e^{-iG}\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}e^{iG}, \tag{C.27}$$

con el operador G de la forma

$$G = G^{\dagger} = \frac{i}{2}\sum_{\epsilon\Omega}\epsilon(\omega)\epsilon\chi\hat{b}_{\omega}^{(\epsilon)\dagger}\hat{b}_{\Omega}^{(-\epsilon)}.$$

Siguiendo un proceso similar al que se realizó para el observador FREFOS se encuentra

$$|0\rangle_H = e^{-iG}|0\rangle_B, \tag{C.28}$$

$$|0\rangle_H = \prod_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} e^{-iG_{\Omega}}|0\rangle_B, \tag{C.29}$$

$$|0\rangle_H = Z^{-1/2}\sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}}|\underline{\mathrm{n}}^{(+)}, \underline{\mathrm{n}}^{(-)}\rangle_B, \tag{C.30}$$

donde se denota a $\underline{\mathrm{n}} \equiv \{n_\Omega, \quad \text{para todo} \quad \Omega \quad \text{con} \quad \omega > 0\}$. Con la energía y la función de partición dadas respectivamente por

$$E_{\underline{\mathrm{n}}} = \sum_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} n_\Omega \omega, \qquad \text{y} \qquad Z = \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} = \prod_{\substack{\Omega \\ \omega>0}} Z_\Omega. \tag{C.31}$$

Así se puede reescribir $|0\rangle_H$ como:

$$|0\rangle_H = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{BI}, |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{BII}, \tag{C.32}$$

que corresponde al estado de vacío sobre la variedad de Kruskal, tal que $|\underline{\mathrm{n}}\rangle_{BI}$ y $|\underline{\mathrm{n}}\rangle_{BII}$ son las excitaciones sobre los estados de vacío $|0\rangle_{BI}$ y $|0\rangle_{BII}$.
Así, el estado base sobre la variedad de Kruskal es un estado térmico entrelazado. El estado $|0\rangle_B$, el cual fue identificado como un estado global, no es en realidad un estado global definidio sobre las regiones I y II, debido a que los modos KB no son de frecuencia positiva en cualquier globalidad una vez se ha definido un parámetro regular de tiempo. El estado $|0\rangle_B$ se encuentra vacío de los modos de frecuencia positiva KB $\varphi_\Omega^{(+)}$ en dirección futura para un tiempo de Killing en cada uno de los sectores I y II.
Si se considera el estado de Boulware vecino $|0\rangle_{BI}$ definido sobre todo el espacio de Kruskal de acuerdo con (C.30), se puede pensar que $|0\rangle_{BI}$ como un vacío $|0\rangle_H$ despoblado de los modos de Boulware $|\underline{\mathrm{n}}\rangle_{BI}$ en el sector I. El estado de Boulware vecino $|0\rangle_{BI}$ se encuentra vacío de modos de frecuencia positiva de Killing $\varphi_\Omega^{(+)}$ en el sector I, luego

$$b_\Omega^{(+)} |0\rangle_{BI} = 0 \qquad \omega > 0, \tag{C.33}$$

de igual manera

$$b_\Omega^{(-)} |0\rangle_{BII} = 0 \qquad \omega > 0.$$

C.3. Densidad de energía

El valor de expectación del tensor momento-energía para un campo escalar real ϕ y un acople minimal dado por [50]

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\partial^\gamma \partial_\gamma \phi + m^2 \phi^2), \tag{C.34}$$

que al expresarse en términos de una función de Green es

$$\langle T_{\alpha\beta}(x, x^{'}) \rangle = \mathcal{D}_{\alpha\beta'} W(x, x^{'}), \tag{C.35}$$

donde

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta'} = \partial(_\alpha \partial_{\beta'}) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\partial^\gamma \partial_{\gamma'} + m^2) \tag{C.36}$$

y el término $W(x,x^{'})$ corresponde a la función de Wightman

$$W(x,x^{'}) = \langle 0|\phi(x)\phi(x^{'})|0\rangle. \tag{C.37}$$

En la figura (C.1) el x actúa sobre la región I y el $x^{'}$ sobre la región II de la función de Wightman para el estado de vacío $|0\rangle_B$ sobre la variedad de Kruskal, donde el campo escalar real está dado de acuerdo con (C.24). Así, al introducir (C.24) en (C.37)

$$W_B(x,x^{'}) =_B \langle 0|\sum_{\epsilon,\Omega} \hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon^{'})\dagger}\varphi_{\Omega}^{(\epsilon^{'})*}(x^{'})|0\rangle_B,$$

tal que al satisfacer la relación de conmutación

$$[\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}, \hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon^{'})\dagger}] = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\epsilon\epsilon^{'}}\delta_{\Omega\Omega^{'}}$$

la función de Wightman es

$$W_B(x,x^{'}) = \sum_{\epsilon,\Omega} \quad {}_B\langle 0|\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon^{'})\dagger}|0\rangle_B\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega^{'}}^{(\epsilon^{'})*}(x^{'}). \tag{C.38}$$

A partir del producto

$$\sum_{\epsilon,\Omega} \quad {}_B\langle 0|\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon)}\hat{b}_{\Omega}^{(\epsilon^{'})\dagger}|0\rangle_B = \Theta(\epsilon\omega)\delta_{\epsilon\epsilon^{'}}\delta_{\Omega\Omega^{'}}, \tag{C.39}$$

la función de Wightman se expresa como

$$W_B = \sum_{\epsilon,\Omega} \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega^{'}}^{(\epsilon^{'})*}(x^{'})\Theta(\epsilon\omega)\delta_{\epsilon\epsilon^{'}}\delta_{\Omega\Omega^{'}},$$

bajo la condición que $\Omega = \Omega^{'} = 1$ y $\epsilon = \epsilon^{'} = 1$, en caso contrario es nulo, se obtiene

$$W_B(x,x^{'}) = \sum_{\epsilon,\Omega} \varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega^{'}}^{(\epsilon^{'})*}(x^{'})\Theta(\epsilon\omega), \tag{C.40}$$

puesto que $\varphi_{\omega}^{(\epsilon)}$ es proporcional a $\Theta_{\epsilon}(x)$, de acuerdo con la función de paso unitaria, $W_B(x,x^{'}) = 0$ si x, y $x^{'}$ están en sectores opuestos I y II.
De manera similar se tiene para el estado de Hartle-Hawking

$$W_H(x,x^{'}) =_H \langle 0|\phi(x)\phi(x^{'})|0\rangle_H = \sum_{\epsilon,\Omega} \chi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\chi_{\Omega^{'}}^{(\epsilon^{'})*}(x^{'})\Theta(\epsilon\omega). \tag{C.41}$$

Al usar la transformación de Bogolubov (C.21) se obtiene

$$W_H(x,x^{'}) = \sum_{\epsilon,\Omega} \Theta(\epsilon\omega)[\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(\epsilon)*}(x^{'})\cosh^2\chi + \varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)}(x)\varphi_{\Omega}^{(-\epsilon)*}(x^{'})\,\mathrm{senh}^2\chi], \tag{C.42}$$

donde se establece que x y $x^{'}$ pertenecen al mismo sector I o II. De las expresiones (C.40) y (C.42)

$$W_H(x,x^{'}) - W_B(x,x^{'}) = (W_H - W_B)(x,x^{'}),$$

luego, haciendo explicitos cada uno de los términos y después de una serie de pasos algebráicos se obtiene

$$(W_H - W_B)(x,x^{'}) = \sum_{\Omega} \frac{1}{e^{\beta\omega}-1}[\varphi_{\Omega}^{(+)}(x)\varphi_{\Omega}^{(+)*}(x^{'})], \tag{C.43}$$

lo cual constituye la función de Wightman al sector I, puesto que en este sector $\Theta_- = 0$ y $\Theta_+ = 1$. Para calcular la componente $T_{00}(x,x^{'})$ del tensor momento-energía, primero se evalúa

$$\partial_0\partial_{0'}(W_H - W_B)(x,x^{'})|_{x'=x} \equiv \partial_0\partial_{0'}W_{H-B}(x,x^{'})|_{x'=x}. \tag{C.44}$$

Luego, haciendo explícitos los terminos que se relacionan con los modos de campo (C.15) se obtiene

$$\partial_0\partial_{0'}W_{H-B}(x,x^{'})|_{x'=x} = \int_0^{\infty} \frac{|\omega|}{e^{\beta|\omega|}-1}d\omega \sum_l \frac{2l+1}{4\pi}|\varphi_{\omega,l}(r)|^2. \tag{C.45}$$

Una vez más, como se establecio para el caso del observador FREFOS, no es necesario introducir la regularización que siempre se requiere de manera usual. En general la expresión

$$\int_0^{\infty} \varphi_{\omega}(x)\varphi_{\omega}^{*}(x^{'})d\omega|_{x'=x},$$

diverge cuando $\omega \to \infty$. Sin embargo, debido a la diferencia entre los estados de Boulware y Hartle-Hawking, las transformaciones de Bogolubov (C.21) aportan un factor de convergencia dado por el término $(e^{\beta|\omega|}-1)^{-1}$.
A continuación, se escribe explícitamente la función $\varphi_{l,m}$. De la métrica (C.4)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2,$$

la cual satisface la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución más general posible está dada por (C.5) y que permite obtener una ecuación radial dada por

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr_*}\left(r^2 f(r)\frac{1}{f(r)}\frac{d\varphi_{\Omega}(r)}{dr_*}\right) + \left(\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2\right)\varphi_{\Omega}(r) = 0$$

Si se define

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 f(r)}}\psi(r), \tag{C.46}$$

la ecuación de Klein-Gordon lleva a la ecuación diferencial dada por

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2(r,\omega,l)\right]\psi_{\omega,l}(r) = 0, \tag{C.47}$$

donde k queda determinado como

$$k^2 = \frac{1}{f(r)}\left[\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2 - \frac{(r^2 f)''}{2r^2}\right], \tag{C.48}$$

con el horizonte de eventos ubicado en $r = r_0$ y $f(r) = 0$. Se identifica

$$p^2 = \frac{\omega^2}{f(r)} - m^2 - \frac{(r^2 f)''}{2r^2},$$

así se tiene

$$k^2 = \frac{1}{f(r)}\left[p^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right].$$

La solución de (C.47) se obtiene bajo la aproximación WKB (apéndice D), desde la cual se obtiene

$$\psi_{\omega l\eta}(r) \backsimeq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\omega}{k(r))}\right|} e^{i\int_{r_0}^{r} k(r')dr'}, \tag{C.49}$$

donde la solución a la expresión (C.49) debe cumplir la condición de normalización para los modos establecida por

$$\int \gamma(\underline{x})\varphi^*_{\omega'}(\underline{x})\varphi_{\Omega}(\underline{x})d^3x = \delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\overline{\Omega}\Omega'}, \tag{C.50}$$

donde se tiene que

$$\Omega = \omega l m \eta; \qquad \overline{\Omega} = -\omega l m \eta,$$
$$\gamma(\underline{x}) = \sqrt{-g}(-g^{00}) = \frac{r^2 sen\theta}{f(r)}, \tag{C.51}$$

con η asociado a los modos de onda que entran y salen de acuerdo con la figura(C.2).
De acuerdo con lo anterior se tiene que

$$\partial_0\partial_{0'}W_{H-B}(x,x')|_{x'=x} = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta|\omega|}-1}\int_0^{l_{\text{máx}}} \frac{2l+1}{f|k|}dl. \tag{C.52}$$

Al evaluar la segunda integral que relaciona los l se llega

$$\partial_0\partial_{0'}W_{H-B}(x,x')|_{x'=x} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{p\omega^2 d\omega}{e^{\beta|\omega|}-1}\frac{\sqrt{f}}{f}.$$

A continuación se deben tener en cuenta ciertas consideraciones:

i. Sea $E = \frac{\omega}{\sqrt{f}}$ la energía local por modo

ii. La ley de Tolman establece que $T(r) = \frac{T_H}{\sqrt{f(r)}}$

iii. La temperatura Hawking $T_H = \beta^{-1}$

iv. La energía relativista es $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Así la derivada temporal se escribe como

$$\partial_0 \partial_{0'} W_{H-B}(x, x^{'})|_{x'=x} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E}{e^{E/T} - 1} p^2 dp f, \tag{C.53}$$

De la relatividad general se tiene que los coeficientes métricos

$$g^{00} g_{00} + g^{0\beta} g_{0\beta} = 1.$$

Si $g^{\mu\nu}$ es diagonal entonces $g^{00} g_{00} = 1$, con $g_{00} = -f(r)$ y $g^{00} = -1/f(r)$. Además $g^{00}\partial_0 = \partial^0$. A partir de esto se reescribe la derivada temporal como

$$g^{00} \partial_0 \partial_{0'} W_{H-B}(x, x^{'}) = g^{00} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E}{e^{E/T} - 1} p^2 dp f$$

$$\partial^0 \partial_{0'} W_{H-B}(x, x^{'}) = -\int_0^\infty \frac{E}{e^{E/T} - 1} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \tag{C.54}$$

Al final se tiene tomando el límite

$$\lim_{x \to x'} < T_0^0(x, x^{'}) >_{H-B} = \partial^0 \partial_{0'} W_{H-B} = -\int_0^\infty \frac{E}{e^{E/T} - 1} \frac{4\pi^2 p^2 dp}{(2\pi)^3}, \tag{C.55}$$

que es la expresión térmica que se espera para la densidad de energía de un campo escalar caliente. Bajo la aproximación WKB, la cual es óptima para la región cerca al horizonte. Bajo ésta misma aproximación se puede demostrar que el término extra $\partial^\gamma \partial_\gamma \phi + m^2 \phi^2$ en (C.34) es nulo, como se obtuvo el resultado (4.75)

C.4. Termodinámica

Para obtener la termodinámica asociada a un observador FIDO, se parte de la función de partición establecida en (C.31), con

$$Z_\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}. \tag{C.56}$$

De esta manera se calcula la entropía, como

$$S = -\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z + \ln Z, \tag{C.57}$$

la cual corresponde a la expresión

$$S = \beta U + \ln Z, \tag{C.58}$$

con

$$U = Z^{-1} \sum_{E_{\underline{n}}} E_{\underline{n}} e^{-\beta E_{\underline{n}}} = -\frac{\partial}{\partial \beta}(\ln Z). \tag{C.59}$$

En general, cualquier función $f(\omega)$ que tiende a cero cuando $\omega \to \infty$, se puede escribir como

$$\sum_{\Omega} f(\omega) \equiv \int_0^{\infty} N(\omega) f(\omega) d\omega, \tag{C.60}$$

así se tiene

$$\ln Z = \sum_{\Omega} \ln Z_{\Omega} = \sum_{\Omega} f(\omega) = \int_0^{\infty} N(\omega) f(\omega) d\omega, \tag{C.61}$$

con

$$f(\omega) = \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}\right). \tag{C.62}$$

En la expresión (C.61), el término $N(\omega)d\omega$ es el número de modos $\varphi_{\Omega}(x^{\alpha})$ que se encuentran dentro del rango $(\omega, \omega + d\omega)$, para todos los valores permitidos de k,l, y m.
Para calcular la entropía S, todo lo que se necesita es encontrar $N(\omega)$ finito, es decir, contar modos. Debido a que la descripción térmica que se obtiene de la expresión (C.55) coincide con la correspondiente a la del modelo de la pared de 't Hooft [9, 19] (apéndice F), se puede utilizar este modelo para limitar los valores de l, n y η, dados por

$$\ln Z = \sum_{l,n,\eta=\pm} (2l+1) \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_{ln}}}\right). \tag{C.63}$$

El conjunto discreto de valores se restringe por la condición que debe satisfacer el número de onda radial $k^2(r;\omega,l) \geq 0$, dado por la ecuación (C.48) de la aproximación WKB, donde se hace necesario el valor real de k para que $\varphi(r)$ no decaiga exponencialmente y sea nulo. Así, para cada ω dado, $N(\omega)$ es finito por condiciones de frontera apropiadas. Con la condición de frontera de Dirichlet $\psi(r) = 0$ en la frontera interior $r = r_0 + \epsilon$, se puede escribir (C.61) como una integral, donde las variables independientes de integración se cambian de l y n a l, ω con $n = n(\omega, l)$ para obtener

$$\begin{aligned} n(\omega,l) &= \frac{1}{\pi}\int_{r_0+\epsilon}^{r(\omega,l)} k(r^{'};\omega,l) dr^{'}; \qquad k^2(r(\omega,l);\omega,l) = 0, \\ \frac{\partial n(\omega,l)}{\partial \omega} &= \frac{1}{\pi}\int_{r_0+\epsilon}^{r(\omega,l)} \frac{\partial k(r^{'};\omega,l)}{\partial \omega} dr^{'} + \frac{1}{\pi}\frac{\partial r}{\partial \omega} k(r(\omega,l);\omega,l), \end{aligned}$$

donde (C.63) se escribe como

$$\ln Z = \frac{1}{\pi}\iiint_{(k^2(r';\omega,l)\geq 0)} dl d\omega dr^{'} (2l+1) \frac{\partial k(r^{'};\omega,l)}{\partial \omega} Ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}\right), \tag{C.64}$$

donde los límites de integración son

$$r^{'} = r_0 + \epsilon,$$
$$r^{'} = R, \quad \text{con} \quad l \geq 0, \quad \omega \geq 0,$$

restringidos por la condición $k^2(r^{'}; \omega, l) \geq 0$.
Al integrar por partes la expresión anterior se obtiene la energía libre de Helmholtz F y la energía promedio U, dadas respectivamente por

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z - \int_0^\infty \frac{N(\omega) d\omega}{e^{\beta\omega} - 1}, \tag{C.65}$$
$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = \int_0^\infty \frac{\omega N^{'}(\omega) d\omega}{e^{\beta\omega} - 1}, \tag{C.66}$$

con

$$N(\omega) = \frac{2}{3\pi} \int_{r_0+\epsilon}^{R} \frac{r^2 dr}{f^2(r)} \left[\omega^2 - \left(m^2 + \frac{(r'^2 f)''}{2r'^2} \right) f(r) \right]^{3/2}, \tag{C.67}$$
$$N^{'}(\omega) = \frac{2}{\pi} \omega \int_{r_0+\epsilon}^{R} \frac{r^2 dr}{f^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega^2}{f} - \left(m^2 + \frac{(r'^2 f)''}{2r'^2} \right)}. \tag{C.68}$$

Con lo anterior, la entropía se calcula como

$$S = \beta(U - F) = \beta \int_0^\infty \frac{\omega N^{'}(\omega) + N(\omega)}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega. \tag{C.69}$$

La expresión termodinámica-estadística para la energía y la entropía se consigue al realizar el cambio de las variables de integración r y ω por r y p el momento local efectivo

$$U = \int_{r_0+\epsilon}^{R} 4\pi r^2 \rho(r) dr, \tag{C.70}$$
$$S = \int_{r_0+\epsilon}^{R} \frac{4\pi r^2 s(r) dr}{\sqrt{f}}, \tag{C.71}$$

con $\rho(r)$ la densidad de energía, $s(r)$ la densidad de entropía dadas por

$$\rho(r) = \int_0^\infty \frac{E}{e^{\frac{E}{T}} - 1} \frac{4\pi p^2 dp}{\hbar^3}, \tag{C.72}$$
$$s(r) = \frac{1}{3T^2} \int_0^\infty \frac{p^2 e^{\frac{E}{T}}}{(e^{\frac{E}{T}} - 1)^2} \frac{4\pi p^2 dp}{\hbar^3}, \tag{C.73}$$

donde se ha introducido de manera explícita la constante $\hbar = 1$, y se ha introducido la energía de modo con frecuencia $\omega = \omega(p, r)$, $E = \omega/\sqrt{f}$.
El resultado para la energía (C.70) y la entropía (C.71) están de acuerdo con el modelo de la pared de 't Hooft, en el cual estas expresiones presentan dos contribuciones, para un valor grande de $r = R$

y para uno pequeño $r = r_0 + \epsilon$. El primer valor se asocia con un término de volumen proporcional a $\frac{4}{3}\pi r^3$, que es la energía y la entropía de un gas cuántico homogéneo en un espacio-tiempo plano cuya temperatura uniforme es $\kappa_0/2\pi$. El otro valor es la contribución de un gas que se encuentra cerca a la pared interna ubicada a $r = r_0$, cuya aproximación ultrarelativista para las expresiones (C.72) y (C.73) toma la forma[1]

$$\rho = \frac{3}{\pi^2}T^4, \qquad s = \frac{4}{\pi^2}T^3. \tag{C.74}$$

A partir de [9] (apéndice F) se realiza el cálculo de la entropía, donde el resultado final establece

$$S = \left(\frac{1}{90\pi\alpha^2}\right)\frac{1}{4}A. \tag{C.75}$$

con α el la altitud propia de la pared interna sobre el horizonte de la geometría exterior y A el área de la pared. Al ajustar el valor de α en (C.75) se puede hacer la equivalencia entre la entropía de la pared con la entropía de Bekenstein-Hawking.

[1] Debido a que el cálculo se realiza con un campo escalar el número de especies $\mathcal{N} = 1$.

Apéndice D

Método WKB

En física, la aproximación o método WKB (Wentzel-Kramers-Brillouines) es un método para encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables. Se usa especialmente para cálculos semiclásicos en mecánica cuántica en los que la función de onda se escribe como una exponencial cuya amplitud o fase varían lentamente. Éste proporciona soluciones a las ecuaciones diferenciales de la forma [80]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0, \tag{D.1}$$

siempre y cuando como se mencionó antes $f(x)$ varíe lentamente.
La solución de (D.1) con f(x) constante sugiere la sustitución

$$y = e^{i\phi(t)}. \tag{D.2}$$

Sustituyendo esta expresión en (D.1), la ecuación diferencial se transforma

$$-(\phi^{'})^2 + i\phi^{''} + f = 0. \tag{D.3}$$

si se supone que $\phi^{''}$ es pequeño, una primera aproximación para (D.3) es

$$\phi^{'} = \pm\sqrt{f}; \qquad \phi(x) = \pm\int\sqrt{f(x)}dx. \tag{D.4}$$

Bajo la condición de que $\phi^{''}$ es pequeño se tiene la condición

$$|\phi^{''}| \approx \left|\frac{f^{'}}{\sqrt{f}}\right| << |f|. \tag{D.5}$$

La condición de validez de la aproximación radica en que la variación de $f(x)$ en una longitud de onda o longitud exponencial sea pequeña comparada con $|f|$. Finalmente para $\phi(x)$ se obtiene

$$\phi(x) \approx \pm\int\sqrt{f(x)}dx + \frac{i}{4}\ln f. \tag{D.6}$$

La solución general de (D.1) es de la forma

$$y(x) \approx \frac{1}{(f(x))^{1/4}} \left\{ a_+ e^{i\int\sqrt{f(x)}dx} + b_- e^{-i\int\sqrt{f(x)}dx} \right\}. \tag{D.7}$$

Una solución particular bajo ésta aproximación para el cálculo de acuerdo con (4.64) para el observador FREFOS y (C.49) para el observador FIDO es la siguiente

$$\psi = \frac{c}{\sqrt{f}} e^{i\int kdr} = \sqrt{\frac{c^2}{k}} e^{i\int kdr} \tag{D.8}$$

Para determinar c, se recurre a la condición de normnalización dada por (4.21)

$$\int \gamma(\underline{x})\varphi^*_{\omega'}(\underline{x})\varphi_\Omega(\underline{x})d^3x = \delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\overline{\Omega}\Omega'}. \tag{D.9}$$

Se debe aclara que la normalización es para las soluciones completas (C.5) para el observador FIDO y (4.14) para el observador FREFOS

$$\varphi_\Omega(t,\underline{x}) = \varphi_\Omega(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{1}{\sqrt{2|\omega|}}e^{-i\omega t}, \tag{D.10}$$

$$\varphi_\Omega(\tau,x^a) = \varphi_\Omega(\rho)e^{i(k_1z+k_2y)}\frac{1}{\sqrt{2|\omega|(2\pi)^2}}e^{-i\omega t}, \tag{D.11}$$

donde los productos internos se calculan para hipersuperficies con $t = cte$ y $\tau = cte$. Así se consideran los productos $\varphi_\Omega \cdot \varphi^*_\Omega$. La integral conduce a la composición

$$\delta_{\Omega\Omega'} + \delta_{\overline{\Omega}\Omega'},$$

puesto que $\Omega = \omega lm\eta$ y $\overline{\Omega} = \omega lm\eta$ para el observador FIDO;$\Omega = \omega\tilde{k}\eta$ y $\overline{\Omega} = \omega\tilde{k}\eta$ para el observador FREFOS debido al la existencia de las dos regiones desconectadas causalmente. Así la técnica que se suele usar es proponer como hipótesis

$$\psi = \sqrt{\frac{c^2}{k}} e^{i\int kdr} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\omega}{k}\right|} e^{i\int kdr}, \tag{D.12}$$

y luego comprobar que satisface la integral de normalización.

Apéndice E

Entropía de entrelazamiento

Consideremos un sistema cuántico que para su estudio es dividido en dos subsistemas separados. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ del sistema completo se puede expresar como un producto tensorial de la siguiente manera [81]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \tag{E.1}$$

Un estado $|\Psi\rangle$ cualquiera que pertenece a $\mathcal{H}$ se dice que es un estado entanglado si no puede expresarse como

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle, \tag{E.2}$$

donde φ_1 pertenece a $\mathcal{H}_1$ y φ_2 pertenece a $\mathcal{H}_2$.
Un ejemplo de un estado entanglado sería el siguiente

$$|\Psi\rangle = |a\rangle|\alpha\rangle + |b\rangle|\beta\rangle, \tag{E.3}$$

contrario a un estado no entanglado

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |a\rangle|\alpha\rangle + 2|a\rangle|\beta\rangle + |b\rangle|\alpha\rangle + 2|b\rangle|\beta\rangle \\ &= (|a\rangle + |b\rangle)(|\alpha\rangle + 2|\beta\rangle) \end{aligned} \tag{E.4}$$

donde $|a\rangle$, $|b\rangle$ pertenecen a $\mathcal{H}_1$ y $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ pertenecen a $\mathcal{H}_2$.
A manera de ejemplo, consideremos un sistema de dos electrones localizados espacialmente en lugares diferentes, y permitamos que cada uno de ellos tenga un estado de *espin arriba* y un estado de *espin abajo*. Así, el sistema se puede encontrar de acuerdo a (E.2), en estados como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle, \\ |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle + |\downarrow_1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_2\rangle + |\downarrow_2\rangle), \end{aligned} \tag{E.5}$$

o en estados entanglados de acuerdo a (E.3), de la forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle), \tag{E.6}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle). \tag{E.7}$$

Si decidimos ignorar los grados de libertad del subsistema $\mathcal{H}_2$, debemos definir una matriz densidad reducida ρ_{red} para $\mathcal{H}_1$, a partir de un estado puro del sistema total $|\Psi\rangle$,

$$\rho_{red} = \mathrm{Tr}_2(\rho), \qquad \text{con} \qquad \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \tag{E.8}$$

y cuyos elementos matriciales están dados por

$$\langle a|\rho_{red}|b\rangle = \sum_{\alpha}(\langle a|\langle\alpha|)|\Psi\rangle\langle\Psi|(|b\rangle|\alpha\rangle), \tag{E.9}$$

donde $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son estados cualquiera de $\mathcal{H}_1$ y $\{|\alpha\rangle\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_2$. Entonces, el valor esperado de un operador A que actúe sólo sobre $\mathcal{H}_1$ es

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle = Tr(\rho_{red}A). \tag{E.10}$$

La traza es calculada a partir de los estados pertenecientes a $\mathcal{H}_1$; de esta manera, mientras se reduzca el análisis sólo al subsistema $\mathcal{H}_1$, el estado puro que hace parte del sistema total $|\Psi\rangle$ puede interpretarse como un estado mezclado cuya matriz densidad reducida es ρ_{red}.
La entropía de entanglement es definida por la entropía de Von Newmann a partir de la matriz densidad reducida

$$\begin{aligned} S_{12} &= -Tr_1(\rho_{red}\ln\rho_{red}), \\ &= -\sum_n p_n ln p_n, \end{aligned} \tag{E.11}$$

donde $\{p_n\}$ son los valores propios de la matriz densidad reducida. Vale resaltar que el rango de los valores propios de la entropía de entanglement es $0 \leq S_{12} \leq lnN$, siendo N la dimensión del subsistema $\mathcal{H}_1$.

Para ilustrar lo anterior, consideremos el estado de entanglement descrito por la ecuación (E.6), cuya matriz densidad es

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= \left(\frac{|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle\uparrow_1|\langle\downarrow_2| + \langle\downarrow_1|\langle\uparrow_2|}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\langle\uparrow_1|\langle\downarrow_2| + |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\langle\downarrow_1|\langle\uparrow_2| + |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\langle\uparrow_1|\langle\downarrow_2| + |\downarrow_1\rangle|}{2} \end{aligned}$$

La matriz densidad reducida de acuerdo a (E.8) es

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{red}} &= \text{Tr}_2(\rho) \\
&= \frac{\text{Tr}_2(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\langle\uparrow_1|\langle\downarrow_2|) + \text{Tr}_2(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\langle\downarrow_1|\langle\uparrow_2|) + \text{Tr}_2(|\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\langle\uparrow_1|\langle\downarrow_2|) + \text{Tr}_2(|\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\langle\downarrow_1|\langle\uparrow_2|)}{2} \\
&= \frac{|\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1|\langle\downarrow_2|\downarrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle\langle\downarrow_1|\langle\downarrow_2|\uparrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle\langle\uparrow_1|\langle\uparrow_2|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle\langle\downarrow_1|\langle\uparrow_2|\uparrow_2\rangle}{2} \\
&= \frac{|\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_1| + |\downarrow_1\rangle\langle\downarrow_1|}{2},
\end{aligned}$$

la cual se puede expresar como

$$\rho_{\text{red}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{E.12}$$

La entropía de entanglement de acuerdo a (E.11) es

$$S_{12} = -\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right] = \ln 2. \tag{E.13}$$

Un resultado similar se encuentra para el estado dado por la expresión (E.7).
Ahora, si el sistema se encuentra en un estado no entanglado como el de la ecuación (E.5),

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle + |\downarrow_1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_2\rangle + |\downarrow_2\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle),
\end{aligned} \tag{E.14}$$

entonces la matriz densidad reducida y la entropía de entanglement para este estado están dadas por

$$\rho_{\text{red}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{E.15}$$

$$S_{12} = 0. \tag{E.16}$$

Luego, si el estado original $|\Psi\rangle$ no es un estado de entanglement (E.5), la matriz densidad reducida ρ_{red} permanece pura y la entropía de entanglement S_{12} es nula. De lo contrario, si el estado $|\Psi\rangle$ es un estado de entanglement (E.6, E.7), ρ_{red} llega a ser un estado mezclado y S_{12} es diferente de cero. Así, la entropía de entanglement es una medida de la naturaleza entanglada o correlación *Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)* del estado original.
Además, esta entropía posee un carácter simétrico, es decir que sin importar con respecto a cual de los subsistemas se define, la entropía no cambia, entonces

$$S_{12} = S_{21}. \tag{E.17}$$

Lo anterior es debido a que la entropía mide la correlación EPR entre los subsistemas, que es simétrica

por definición. La idea central del entanglamiento cuántico, que como su nombre lo indica sólo es posible en la mecánica cuántica, es la de preparar estados de dos o más partículas en los cuales es imposible obtener información útil sobre el estado total del sistema realizando sólo mediciones sobre una de las partículas. De otra parte, en un estado entanglado, al manipular una de las partículas, se puede modificar el estado total. Por lo tanto, al operar sobre una de las partículas se puede modificar el estado de la otra a distancia de manera instantánea.

Para el caso de los agujeros negros siguiendo a [82], podemos considerar un agujero negro estacionario y definir una matriz densidad total ρ_{total} describiendo en la representación de Heisenberg el estado inicial de cuantos de materia propagándose sobre la geometría. Un observador externo (región I de la figura C.1) ve el sistema compuesto de dos regiones, el agujero negro (region II) y la radiación externa a éste. Si definimos una hipersuperficie como de espacio, podemos considerar modos de radiación en un tiempo dado los cuales pueden ser separados en modos externos e internos al agujero negro.
Así, el estado para la radiación externa es obtenido de la matriz densidad total ρ_{total} similar a (E.8), sumando sobre todos los estado de materia dentro del horizonte de eventos, es decir, aquellos que son inaccesibles al observador, por

$$\rho_{\text{rad}} = \text{Tr}_{\text{in}}\rho_{\text{total}}. \tag{E.18}$$

Para un agujero negro aislado la matriz densidad dada por (E.18) describiría su radiación Hawking en el infinito. También se puede definir una matriz densidad para el estado del agujero negro ρ_{BH}, donde la suma se realiza sobre los grados de libertad externos dada por

$$\rho_{\text{BH}} = \text{Tr}_{\text{ext}}\rho_{\text{total}}. \tag{E.19}$$

Con esta matriz es posible encontrar la entropía de entanglement (E.11), que para este caso toma la forma

$$S_{\text{BH}} = -\text{Tr}_{\text{in}}(\rho_{\text{BH}} \ln \rho_{\text{BH}}), \tag{E.20}$$

la cual es invariante en el sentido de que es independiente de la definición de los estados de vacío externos e internos [82].

Así, de acuerdo con lo anterior se calcula la entropía de entrelazamiento S entre los modos de campo de la regiones I y II del espacio-tiempo de Minkowski. Al considerar la matriz densidad ρ_M de la expresión (4.29), se obtiene la matriz densidad reducida $\rho^{(+)}$ dada por

$$\rho_M = |0\rangle_{MM}\langle 0|, \tag{E.21}$$

$$\rho^{(+)} = Tr_{R(-)}\rho_M, \tag{E.22}$$

donde se suma sobre los grados de libertad correspondientes al sector I. Sin embargo, se hace necesario describir su naturaleza térmica, es decir, la distribución de densidad de energía y presión para los estados de Rindler y Minkowski, como también localizar la entropía. La presencia de un horizonte de eventos esconde información sobre los modos en la región II, cuya pérdida está asociada con una entropía

diferente de cero sobre la región I.
De esta manera se obtiene la entropía como

$$S = -Tr(\rho^{(+)} \ln \rho^{(+)}), \tag{E.23}$$

donde la matriz densidad reducida se obtiene a partir de (4.29), como

$$\begin{aligned}
\rho^{(+)} &= Tr_{R(-)}\left\{ \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RII} |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RI} \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} \ {}_{RII}\langle\underline{\mathrm{n}}|_{RI}\langle\underline{\mathrm{n}}| \right\}, \\
&= Z^{-1} \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RIRI}\langle\underline{\mathrm{n}}| Tr_{RII} |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RIIRII}\langle\underline{\mathrm{n}}|.
\end{aligned}$$

Si $|\underline{\mathrm{n}}^{(+)}\rangle_R = |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RI}$, y $|\underline{\mathrm{n}}^{(-)}\rangle_R = |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RII}$, se obtiene

$$\rho^{(+)} = Z^{-1} \sum_{\underline{\mathrm{n}}} e^{-\beta E_{\underline{\mathrm{n}}}} |\underline{\mathrm{n}}\rangle_{RR}\langle\underline{\mathrm{n}}|, \tag{E.24}$$

con Z la función de partición establecida en (4.38), con

$$Z_\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}. \tag{E.25}$$

A partir de (E.23) se determina la entropía

$$\begin{aligned}
S &= -Tr(\rho^{(+)} \ln \rho^{(+)}), \\
&= -Tr\left(\frac{\partial}{\partial N} \rho^{(+)N}|_{N=1} \right), \\
&= -Tr\left(\frac{\partial}{\partial N} \left[\frac{e^{-N\beta H_+}}{Z^N} \right] |_{N=1} \right), \\
&= \beta Tr\left(\frac{H_+ e^{-\beta H_+}}{Z} \right) + Tr\left(\frac{e^{-\beta H_+}}{Z^2} \right), \\
&= \beta TR(H_+ \rho^{(+)}) + \ln Z, \\
&= \beta \langle H_+ \rangle + \ln Z.
\end{aligned}$$

Identificando a $U = \langle H_+ \rangle$ como la energía promedio, y $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ como la energía libre de Helmholtz, se encuentra que la entropía es

$$S = \beta(U - F). \tag{E.26}$$

A este resultado tambien se llega haciendo mecánica estadística, de acuerdo con (4.105).
Un resultado similar se obtiene para el observador FIDO donde la entropía de entrelazamiento se establece para los modos de las regiones I y II del espacio-tiempo de Kruskal, cuya matriz densidad se construye en términos del vacío global de Hartle-Hawking y la matriz densidad reducida se obtiene al sumar sobre los modos de Boulware.

Apéndice F

Modelo de la pared

Al considerar el número de niveles de energía que una partícula puede ocupar en la vecindad de un aguejro negro, se encuentra una divergencia sobre su horizonte de eventos. Para eliminar tales divergencias, G. 't Hooft [19] introdujo un modelo en el cual todas las funciones de onda desaparecen a una distancia fija α medida desde el horizonte de eventos. El modelo de la pared considera la termodinámica estadísitica de campos cuánticos en el estado de Hartle-Hawking los cuales se propagan sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild, donde las divergencias se eliminan al introducir una superficie esférica estática en la cual los campos satisfacen condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann.[1]

El modelo de la pared logra mantener la energía del campo acotada, al considerar la termodinámica de campos cuánticos confinados en un volumen centrado en una estrella esférica de masa M, entre dos superficies reflectoras y esféricas, una inetrior con radio $R_0 = r_0 + \Delta r$, y la otra exteriro con radio $R >> r_0$, con r_0 el radio del horizonte de eventos como se muestra en la figura (F.1).
Los campos cuánticos se definen sobre la geometría de Schwarzschild entre las dos superficies esféricas a la temperatura local (*on-shell*) $T(r)$ establecida por la ley de Tolman

$$T(r) = \frac{T_\infty}{\sqrt{f(r)}}, \tag{F.1}$$

la cual es una temperatura corregida por la distancia. Si se considera que $T_\infty = T_H = \frac{\kappa_0}{2\pi}$, la temperatura de Hawking, para $r = R_0$, se tiene que las longitudes de onda de la radiación son pequeñas comparadas con valores tales como la curvatura del espacio-tiempo o el tamaño del contenedor del gas, con lo cual se cumplen las siguientes aproximaciones

$$\lambda \propto \frac{\hbar}{T} = f(r)^{1/2}\frac{\hbar}{T_\infty} << r_0 \quad \text{cerca al horizonte,} \tag{F.2}$$

$$\lambda \simeq \frac{\hbar}{T_\infty} \propto R_0 << R \longrightarrow f(r) \approx 1, \quad \text{muy lejos del horizonte,} \tag{F.3}$$

[1] Una correción con el estado de vacío de Boulware se desarrolló por Mukohyama-Israel [9], la cual es la que se toma en cuenta para los cálculos realizados en este trabajo.

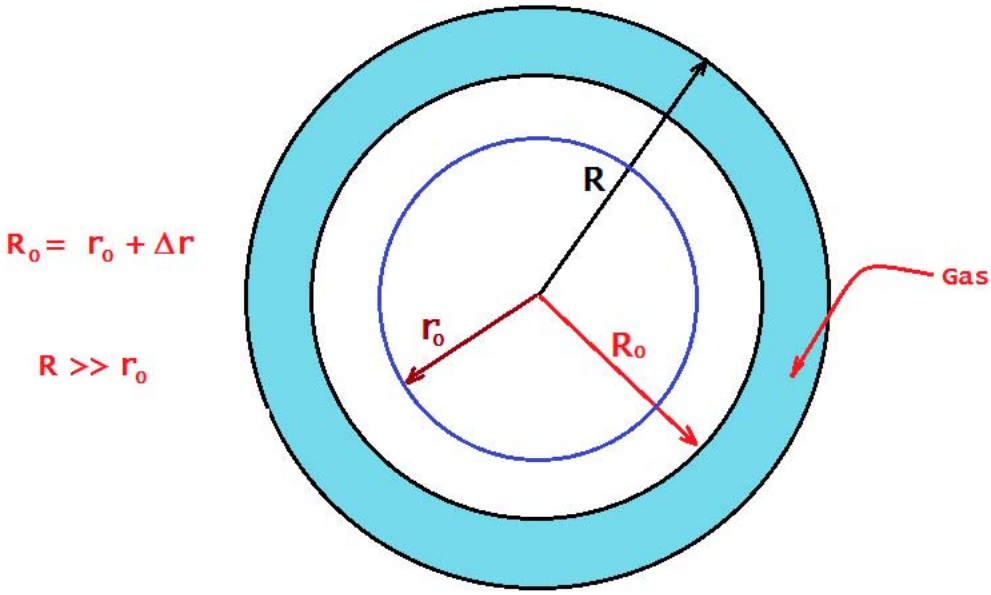

Figura F.1: Modelo de la pared

las cuales corresponden a una aproximación de altas energías para la radiación contenida. Estas aproximaciones permiten observar en la radiación un carácter corpuscular en lugar de ondulatorio.
A partir de las consideraciones anteriores se encuentra la densidad de energía ρ y la presión P dadas respectivamente por

$$\rho = \mathcal{N} \int_0^\infty \frac{E}{e^{\beta E} - \epsilon} 4\pi^2 p dp, \tag{F.4}$$

$$P = \frac{\mathcal{N}}{3} \int_0^\infty \frac{vP}{e^{\beta E} - \epsilon} 4\pi^2 p dp, \tag{F.5}$$

con

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 \quad \text{para Bosones,} \\ \epsilon &= -1 \quad \text{para Fermiones,} \\ \mathcal{N} &= \text{número de especies y helicidades de las partículas,} \\ E^2 &= m_0^2 + p^2 \quad \text{con c=1,} \longrightarrow v = \frac{p}{E}. \end{aligned}$$

La entropía del sistema está dada por

$$S = \int_{R_0}^{R} s(r) \sqrt{^{(3)}g}\ dr d\theta d\varphi, \tag{F.6}$$

con $s(r)$ la densidad de entropía [2]

$$s = \beta(\rho + P). \tag{F.7}$$

Luego, reescribiendo (F.6) de acuerdo con la métrica de Schwarzschild

$$\begin{aligned} S &= \int_{R_0}^{R} s(r) r^2 f^{-1/2} sen\theta dr d\theta d\varphi, \\ &= \int_{R_0}^{R} s(r) r^2 f^{-1/2} dr \int_0^{\pi} sen\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi, \\ &= \int_{R_0}^{R} s(r) 4\pi r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr. \end{aligned} \tag{F.8}$$

La masa gravitacional de las excitaciones térmicas se expresa como

$$\Delta M = \int_{R_0}^{R} \rho(r) 4\pi r^2 dr. \tag{F.9}$$

Tanto la entropía (F.8) como la masa gravitacional (F.9) presentan dos contribuciones que dominan. La primera de ellas en $r = R$, la cual corresponde a un término de volumen proporcional a $\frac{4}{3}\pi r^3$, que representa la entropía y la energía de un gas cuántico homogéneo en un espacio-tiempo plano a temperatura Hawking $T_H = \kappa_0/2\pi$. La segunda contribución que domina se da cuando $\Delta r = R_0 - r_0$, que corresponde a la contribución del gas cuántico cerca a la pared interior $r = R_0$.
Para describir la contribución cerca a la pared interior, a partir de la expresión (F.1) se evidencia la necesidad de introducir las aproximaciones ultrarelativistas

$$\begin{aligned} E^2 = m_0^2 + p^2 &\longrightarrow E >> m_0, \\ E \sim p, \quad v = \frac{p}{E} &\longrightarrow v \simeq 1, \end{aligned}$$

en las integrales (F.4) y (F.5) debido a que la temperatura es muy alta cerca de la pared interior para Δr pequeños, luego

$$\rho = \frac{\mathcal{N}}{\beta^4} \int_0^{\infty} \frac{\beta E 4\pi (\beta E)^2 d\beta E}{e^{\beta E} - \epsilon} = \mathcal{N} T^4 4\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - \epsilon}, \tag{F.10}$$

cuya integral se resuelve por método numérico. Al comparar con (F.5), se evidencia que $P = \frac{1}{3}\rho$. Así de

[2] De la primera ley de la termodinámica se establece que

$$dE = TdS - PdV,$$

luego en general se cumple

$$E = TS - PV \longrightarrow TS = E + PV \longrightarrow T\frac{S}{V} = \frac{E}{V} + P,$$

con lo cual $s = \beta(\rho + P)$, con $\beta = T^{-1}$.

la expresión para la densidad de entropía (F.7) se obtiene

$$\begin{aligned} s(r) &= \beta\left(1+\frac{1}{3}\right)\rho, \\ &= \beta\frac{4}{3}\mathcal{N}T^4 4\pi\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-\epsilon}, \end{aligned} \tag{F.11}$$

la densidad de energía ultrarelativista, la cual tiene una divergencia a medida que se acerca al horizonte de eventos [83]. Luego, reescribiendo

$$s(r) = \frac{16\pi}{3}\mathcal{N}T^3(r)\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-\epsilon}, \tag{F.12}$$

con $G = \hbar = k_B = 1$. Al realizar el cálculo para bosones, es decir $\epsilon = +1$, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-\epsilon} = \frac{3!\pi^4}{90}. \tag{F.13}$$

Entonces la densidad de entropía es

$$s(r) = \frac{16\pi}{3}\mathcal{N}T^3\frac{3!\pi^4}{90} = \frac{16}{45}\pi^5\mathcal{N}T^3(r). \tag{F.14}$$

Al sustituir (F.14) en (F.8), se encuentra la contribución de la pared a la entropía total, donde $\Delta r << \delta << R_0$, con los límites de integración establecidos por la figura (F.2)

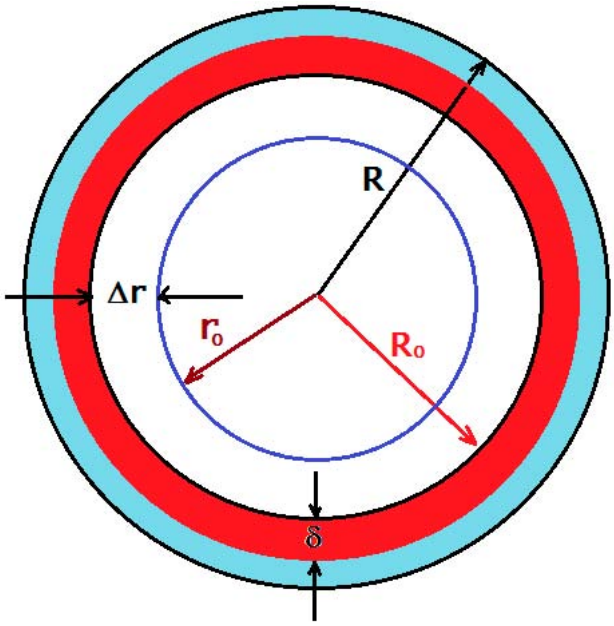

Figura F.2: Límites de integración para el modelo de la pared.

$$
\begin{aligned}
S_{pared} &= \int_{R_0}^{R_0+\delta} \frac{16}{45}\pi\mathcal{N}\left[\frac{\kappa_0}{2\pi}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\right]^3 \cdot 4\pi r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr, \\
&= \frac{8}{45}\pi^3\kappa_0^3\mathcal{N}\int_{R_0}^{R_0+\delta}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} r^2 dr.
\end{aligned} \tag{F.15}
$$

Al tomar $r = cte$ la integral anterior se escribe como

$$
S_{pared} = \frac{8}{45}\pi^3\kappa_0^3\mathcal{N}R_0^2\int_{R_0}^{R_0+\delta}\frac{dr}{f(r)^2}. \tag{F.16}
$$

Analizando por aparte el denominador de la integral (F.16), se tiene

$$
f(r) = \begin{cases} \kappa_0 = \frac{1}{2}f^{'}(r)\Big|_{r=r_0}, \\ r = 2M \rightarrow f(r_0) = 0, \end{cases} \tag{F.17}
$$

luego $f(r) \approx 2\kappa_0(r-r_0)$[ref art], asi se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_{R_0}^{R_0+\delta}\frac{dr}{f(r)^2} \approx \int_{R_0}^{R_0+\delta}\frac{dr}{[2\kappa_0(r-r_0)]^2} &= \frac{1}{4\kappa_0^2}\left[-\frac{1}{r-r_0}\right]_{R_0}^{R_0+\delta}, \\
&= \frac{1}{4\kappa_0^2}\left[-\frac{1}{R_0+\delta-r_0}+\frac{1}{R_0-r_0}\right], \\
&= \frac{1}{4\kappa_0^2}\frac{\delta}{(\Delta r+\delta)\Delta r}, \\
&= \frac{1}{4\kappa_0^2}\frac{1}{\Delta r\frac{\Delta r}{\delta}+\Delta r}.
\end{aligned} \tag{F.18}
$$

Reemplazando (F.18) en (F.16) se obtiene

$$
S_{pared} \simeq \frac{8}{45}\pi^3\kappa_0^3\mathcal{N}\frac{R_0^2}{4\kappa_0^2}\frac{1}{\Delta r}. \tag{F.19}
$$

Debido a que la métrica es de la forma general

$$
ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{F.20}
$$

donde se desprecia la parte angular. Al calcular Δr como una distancia propia se tiene

$$
ds^2 = f(r)^{-1}dr^2. \tag{F.21}
$$

A continuación se define α : altitud propia del horizonte a la pared interior, luego

$$\alpha = \int_{r_0}^{R_0} f^{-1/2} dr = \int_{r_0}^{R_0} [2\kappa_0 (r - r_0)]^{-1/2} dr,$$
$$= 2\kappa_0^{-1/2} \frac{(r - r_0)^{1/2}}{1/2} \Big|_{r_0}^{R_0}, \tag{F.22}$$

con lo que se obtiene

$$\alpha = 4\kappa_0^{-1/2} \Delta r^{1/2} \longrightarrow \Delta r = \frac{1}{2}\kappa_0 \alpha^2. \tag{F.23}$$

Reemplazando este resultado en la entropía de pared (F.19) se obtiene

$$S_{pared} \simeq \frac{4\pi^2}{45} \frac{\mathcal{N}}{\alpha^2} \frac{A}{4}, \tag{F.24}$$

es decir la entropía resulta proporcional al área de la pared.
Para el caso de la pared externa se tiene que

$$S_{pared\ ext} = \int_{R-\delta}^{R} \Big(\qquad \Big), \tag{F.25}$$

donde $f(r) \to 1$ y toda la integral en (F.25) es proporcional al volumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Así, de (3.24) se tiene la entropía de la pared interna, donde $\Delta r = R_0 - r_0$ y $\Delta r = \frac{1}{2}\kappa_0 \alpha^2$. Al fijar el valor de α, es decir introduciendo un corte por efectos de fluctuaciones cuánticas de la gravedad tal que

$$\alpha = \left(\frac{4\pi^2 \mathcal{N}}{45} \right)^{1/2}, \tag{F.26}$$

se encuentra la entropía Bekenstein-Hawking

$$S_{pared} = \frac{1}{4} A_{pared} = S_{BH}, \tag{F.27}$$

donde se debe tener en cuenta que tanto la pared como el gas no pertenecen al agujero negro.

Bibliografía

[1] M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 numerical relativity.* Oxford University Press, Oxford, UK. (2006).

[2] J.R. Oppenheimer, H. Snyder, *On continued gravitational contraction.* Phys.Rev. **56**, (1939) 455. https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.56.455.

[3] D.V Fursaev, *Can One Understand Black Hole Entropy without Knowing Much about Quantum Gravity?*, Phys. Part. Nucl.**36**, (2005) 81. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0404038.

[4] J. Cano, W. Pulido, *La paradoja de la pérdida de información de los agujeros negros,* Revista Momento. Número **58**, (2019) 59-88. https://revistas.unal.edu.co/index.php/momento/article/view/70378.

[5] X. Calmet, (Ed.), *Quantum Aspects of Black Holes,* Fundamental Theories of Physics. Vol 178. (Springer International Publishing Switzerland, 2015).

[6] Y. Takahashi, H. Umezawa, *Collective Phenomena* **2**, (1975) 55. https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217979296000817. H. Umezawa. *Advanced Field Theory. Micro, Macro and Thermal Physics.* American Institute of Physics, 1980.

[7] W. Pulido, H. Quevedo, *Black shells and naked shells*, International Journal Of Geometric Methods in Modern Physics. (2021). https://arxiv.org/abs/2006.14176v3.

[8] W. Israel, *Thermo-field dynamics of black holes*, Phys. Lett.A**57**, (1976) 107. https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90178-X

[9] S. Mukohyama, W. Israel, *Black holes, brick walls, and the Boulware state,* Phys. Rev.D**58**, (1998) 104005. https://arxiv.org/abs/gr-qc/9806012.

[10] W. Israel, *Black hole thermodynamics,in current trends in relativistic astrophysics.* Ed. L. Fernández, L.M. González. Springer Lectures notes in Physics LNP 617, (2003) 15. https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-36973-2_2.

[11] W. Israel. *A massless firewall*, (2014). https://arxiv.org/abs/1403.7470v2.

[12] J.D. Bekenstein, *Black holes and the second law*, *Lett. Nuovo Cimento.* **4**, (1972) 737. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02757029;

Black Holes and Entropy, *Phys. Rev.* **D7**, (1973) 2333. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.7.2333;*Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics*, *Phys. Rev.* **D9**, (1974) 3292. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.9.3292; *Statistical black-hole thermodynamics*, *Phys. Rev.* **D12**, (1975) 3077. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.12.3077.

[13] J.M. Bardeen, B. Carter, S. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, *Comm. Math. Phys.* **31**, (1973) 161. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01645742.

[14] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, *Commun. Math, Phys.* **43**, (1975) 199. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02345020.

[15] J.R Arenas, W. Pulido, *Agujeros negros cuánticos y el efecto Hawking*, Revista Momento. Número **59E**, (2019) 1-13. https://revistas.unal.edu.co/index.php/momento/article/view/81662.

[16] B. Carter, *General relativity, an Einstein Centenary Survey*. Ed. by. S.W. Hawking and W. Israel. (Cambridge University Press, 1979) Cap 6.

[17] S.D. Sorkin, *Black holes and relativistic stars*. (The university of Chicago Press, 1998) Cap.9.

[18] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, *Phys. Rev.* D**15**, (1977) 2752. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.15.2752.

[19] G. t'Hooft, *On the quantum structure of a black hole*, *Nucl.Phys* **B256**, (1985) 727. https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90418-3.

[20] A. Strominger, C. Vafa, *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, *Phys. Lett.* **B379** (1996) 99. https://arxiv.org/abs/hep-th/9601029.

[21] J.M. Maldacena, A. Strominger, *Statistical Entropy of Four-Dimensional Extremal Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 428. https://arxiv.org/abs/hep-th/9603060.

[22] C.G. Callan, J.M. Maldacena, *D-brane Approach to Black Hole Quantum Mechanics*, *Nucl. Phys.* **B472** (1996) 591. https://arxiv.org/abs/hep-th/9602043.

[23] E.T. Akhmedov, *Black Hole Thermodynamics from the Point of View of Superstring Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A15** (2000) 1. https://arxiv.org/abs/hep-th/9711153.

[24] A. Corichi, *Black holes and entropy in loop quantum gravity: An overview*. https://arxiv.org/abs/0901.1302.

[25] S. Mukohyama, *The origin of black hole entropy*, *PhD. Thesis*, Kyoto University, (1998). https://arxiv.org/abs/gr-qc/9812079.

[26] L. Bombelli, R.K. Koul, J. Lee, and R.D, Sorkin, *Quantum source of entropy for black holes*, *Phys. Rev.* D**34**, (1986) 373. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.34.373.

[27] M. Srednicki, *Entropy and area*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, (1993) 666. https://arxiv.org/abs/hep-th/9303048.

[28] J.R. Arenas, J.M. Tejeiro, *Black Hole Entanglement Entropy.* XXVIII Spanish Relativity Meeting.ERE (2005) 385. https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.2218196.

[29] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, (1998) 231. https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200; *Int. J. Theor. Phys.* **38**, (1999) 1113.

[30] L. Susskind, J. Lindesay, *An introduction to black holes, information and the string theory revolution,* (World Scientific Publishing Co. 2005) Cap. 12.

[31] Papantonopoulos, E., (Ed.), *Physics of Black Holes: A Guided Tour,* Lect. Notes Phys. 769 (Springer, Berlin Heidelberg 2009).

[32] J.M. Maldacena, *Eternal Black Holes in AdS JHEP* **04**, (2003) 021. https://arxiv.org/abs/hep-th/0106112.

[33] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, and J. Sully, *Black Holes: Complementarity or Firewalls?*, J High Energy Phys 2013, 62 (2013). https://arxiv.org/abs/1207.3123.

[34] J. Preskill, *Do Black Holes Destroy Information?*, (1992). https://arxiv.org/abs/hep-th/9209058.

[35] G. Horowitz, D. Marolf, *Where is the Information Stored in Black Holes?*, *Phys, Rev.* **D55**, (1997) 3654. https://arxiv.org/abs/hep-th/9610171.

[36] G. Horowitz, *Quantum States of Black Holes*, (1997). https://arxiv.org/abs/gr-qc/9704072.

[37] V. Mashkevich, *Conservative Model of Black Hole and Lifting of the Information Loss Paradox*, (1997). https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707055.

[38] G. Horowitz, J. Maldacena, *The black hole final state*, *JHEP* **02** (2004) 008. https://arxiv.org/abs/hep-th/0310281.

[39] P.Kraus, F. Wilczek, *Self-Interaction Correction to Black Hole Radiance,Nucl. Phys.* **B433** (1995) 403. https://arxiv.org/abs/gr-qc/9408003; P.Kraus, F. Wilczek, *Effect of Self-Interaction on Charged Black Hole Radiance*, *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 231. https://arxiv.org/abs/hep-th/9411219; M. Parikh, F. Wilczek, *Hawking Radiation as Tunneling*, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5042. https://arxiv.org/abs/hep-th/9907001; B. Zhang, Q. Cai, M. Zhan, L. You, *Hidden messenger revealed in Hawking radiation: A resolution to the paradox of black hole information loss*, *Phys. Lett.* **B675** (2009) 98. https://arxiv.org/abs/0903.0893; W. Israel, Z. Yun, *Band-aid for information loss from black holes*, *Phys. Rev.* D **82**, 124036. https://arxiv.org/pdf/1009.0879.pdf.

[40] L. Susskind, *Black holes and the information paradox.* Scientific American, Volume 276, April 1997, p. 40-45. https://www.scientificamerican.com/article/black-holes-and-the-information-par/.

[41] J. D. Bekenstein, *Information in the Holographic Universe*. Scientific American, Volume 289, Number 2, August 2003, p. 61. https://www.scientificamerican.com/article/information-in-the-holographic-univ/.

[42] I. Klebanov, J. Maldacena, *Solving quantum field theories via curved spacetimes*. Physics Today, Volume 62, January 2009. p.28. https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.3074260.

[43] L. Susskind, L. Thorlacius, J. Uglum, *The Stretched Horizon and Black Hole Complementarity*, *Phys, Rev.* **D48** (1993) 3743. https://arxiv.org/abs/hep-th/9306069.

[44] S.W. Hawking, *Information Loss in Black Holes*, *Phys.Rev.* **D72** (2005) 084013. https://arxiv.org/abs/hep-th/0507171.

[45] Z. Merali, *Fire in the hole*. Nature, Volume 496, April 2013, p. 21-23. https://www.nature.com/articles/496020a.

[46] S.W. Hawking, *Information preservation and weather forecasting for black holes*, (2014). https://arxiv.org/abs/1401.5761.

[47] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time.* (Cambridge University Press, 1973).

[48] L. Ryder, *Introduction to general relativity* (Cambridge University Press, 2009).

[49] R. Penrose, *The Question of Cosmic Censorship*, Chapter 5 in Black Holes and Relativistic Stars, Robert Wald (editor), (1994); *Singularities and time-asymmetry*, Chapter 12 in General Relativity: An Einstein Centenary Survey (Hawking and Israel, editors), (1979).

[50] N.D. Birrel, P.C. Davies, *Quantum fields in curved space.* (Cambridge University Press, 1984).

[51] S.W. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, *Phys. Rev.* **D13**, (1976) 191. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.13.191

[52] A. Das, *Finite temperature field theory.* (World Scientific Publishing Co. 1997) Cap 1.

[53] J. Tejeiro, *Principios de relatividad general.* (Facultad de Ciencias. Notas de Clase, 2005) Cáp. 8.

[54] D. Page, *black hole information*, (1993). https://arxiv.org/pdf/hep-th/9305040.pdf

[55] E. Poisson, *A relativist's toolkit. The mathematics of black-hole mechanics.* (Cambridge University Press, 2004).

[56] G. Darmois, *Memorial des sciences mathematiques XXV,* Fascicule XXV ch V (Gauthier-Villars, Paris, france, 1927).

[57] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity,* Nuovo cimiento 44B, 1 (1966); and corrections in *ibid.* 48B, 463 (1966). https://link.springer.com/article/10.1007/BF02710419.

[58] K. Lanczos, *Flachenhafte verteiliung der materie in der Einsteinschen gravitationstheorie,* Ann.Phys. (Leipzig) 74, 518 (1924).

[59] C.S. Helrich, *Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics.* Springer-Verlag Heidelberg, (2009).

[60] Israel W, *Gravitational Collapse and Causality.* Phys.Rev. 153 (1967) 1388-1393. https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.153.1388.

[61] J. S. Hoye, I. Linnerud, K. Olaussen and R. Sollie, *Evolution of Spherical Shells in General Relativity.* Physica Scripta. Vol. 31, 97-102, (1985). https://ur.booksc.eu/book/46251435/8f7564.

[62] E. Bittencourt, V. Freitas, J. Salim, G. Santos, *Radiating spherical collapse for an inhomogeneous interior solution*, (2018). https://arxiv.org/abs/1806.09433.

[63] D. Nuñez, H. Quevedo and M. Salgado, Phys. Rev. D**58** (1998) 083506. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.58.083506

[64] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14**. (1965) 57. https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.14.57.

[65] E. Schnetter, B. Krishnan and F. Beyer,*Introduction to dynamical horizons in nu- merical relativity*, Phys. Rev. D 74 (2006) 024028. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0604015.

[66] S. Hayward, *General laws of black hole dynamics*, Phys. Rev. D **49** (1994) 6467-6474. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.49.6467.

[67] F. Melia, *The Apparent (gravitational) horizon in cosmology*, Amer. J. Phys. 86 (2018) 585-593. https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.5045333.

[68] E. A, Martínez, *Fundamental thermodynamical equation of a self-gravitating system*, Phys. Rev. D**53** (1996) 7062. https://arxiv.org/abs/gr-qc/9601037.

[69] J.P.S, Lemos and O.B. Zaslavskii, *Entropy of quasiblack holes*, Phys. Rev. D**81**, (2010) 064012. https://arxiv.org/abs/0904.1741.

[70] J. R. Arenas, J. M. Tejeiro, *Entanglement Entropy of Black Shells.* Nuovo Cim. B125 (2010):1223-1248. https://arxiv.org/abs/1108.3855.

[71] W. Israel, Gedanken Experiments in Black Hole Thermodynamics. *Black Holes: Theory and Observation*, (2003) 339-363.

[72] W.G. Unruh, *Notes on black-hole evaporation*, Phys. Rev. **D14**, (1976) 870. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.14.870.

[73] S. S. Seahra, *Naked shell singularities on the brane*, Phys. Rev. D 71 (2005) 084020. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0501018.

[74] A. Carrasco F, *Trapped surfaces in spacetimes with symmetries and applications to uniqueness theorems.* (2012). https://arxiv.org/pdf/1201.1640.pdf.

[75] D.G. Boulware, *Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces*, Phys. Rev, **D11**, 1404 (1975). https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.11.1404.

[76] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-time.* Cambridge University Press. (1989).

[77] J.R. Arenas, *Agujeros Negros Cuánticos.* (2016). Notas de Clase.

[78] R.M. Wald, *General Relativity.* the University chicago Press. (1984).

[79] O. Keller *Quantum Theory of Near-Field Electrodynamics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2011).

[80] J. Mathews, *Matemáticas para Físicos,* Editorial Reverté, (1979).

[81] H. Terashima, *Entanglement entropy of the black hole horizon*, Phys. Rev. **D61**, 104016 (2000). https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9911091.pdf.

[82] S. Liberati, *Vacuum Effects in Gravitational Fields: Theory and Detectability S. Liberati*, (2000). https://arxiv.org/abs/gr-qc/0009050.

[83] V. P. Frolov, D. V. Fursaev, *Thermal Fields, Entropy, and Black Holes*, *Class. Quantum Grav.* **15**, (1998) 2041. https://arxiv.org/abs/hep-th/9802010.

[84] J. L. Alvarez, H. Quevedo, and A. Sánchez, *Unified geometric description of black hole thermodynamics, Phys. Rev.* **D 77**, 084004 (2008). https://arxiv.org/abs/0801.2279.