UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa en el conjunto de los racionales, para estudiantes de grado 7 de educación básica.

Francisco Alejandro Sánchez Acero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias,

Bogotá, Colombia

2012

Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa en el conjunto de los racionales, para estudiantes de grado 7 de educación básica.

Francisco Alejandro Sánchez Acero

Trabajo Final de Maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias,

Bogotá, Colombia

2012

A mi hijo Sebastián Sánchez, motor de mi vida y mis acciones, A mi esposa Steffany Urrego compañía en la construcción de mis sueños, A mi Madre Ana Acero ejemplo de vida y fortaleza en mi camino. A mi profesora Clara Helena Sánchez quien me enseñó que el aprendizaje se concibe mediante el esfuerzo y la dedicación. A todos aquellos que me acompañaron es este proceso de mi vida y me fortalecieron para salir adelante.

Resumen

Al interior de las instituciones educativas de educación básica y media se pueden percibir cierto tipo de dificultades en la clase de matemáticas al abordar los números racionales en los diferentes niveles de formación escolar. Estas dificultades se pueden centrar en la comprensión del número racional a través de sus diversas representaciones fraccionaria, decimal y pictórica. Para el desarrollo de este trabajo se estudiará el origen de los números racionales y los trabajos realizados sobre el sistema numérico al igual que las consideraciones didácticas sobre su enseñanza. En particular se abordará de una manera reflexiva y sistemática el proceso de conversión de expresiones fraccionarias a decimales y viceversa, con el fin de desarrollar una propuesta didáctica para estudiantes de grado 7 qué permita una mejor comprensión de los números racionales.

Palabras clave: Número Racional, Conversión, Decimal, Fracción

Abstract

Within the educational institutions of primary and secondary education we can see some type of difficulty in math classes when the teachers are teaching the rational numbers in different levels of schooling. These difficulties can focus on understanding the rational numbers through its various representations: fractional, decimal and painting. For the development of this work we will study the origin of rational numbers, the numerical system and the didactic considerations on teaching them. In particular we will be addressed the process of converting fractional to decimal expressions and the decimal expressions to fractional. Our main purpose is to develop a methodological approach to 7 grade students which allows them a better understanding of rational numbers.

Keywords: Rational Number, Conversion, Decimal, Fraction

Contenido

Pág.

Resumen ..... **VII**

Lista de figuras ..... **XI**

Lista de tablas ..... **XII**

Introducción **1**

1. Planteamiento del problema didáctico **3**
1.1. Mirada desde la FRACCIÓN como representación 8
1.1.1. Cambio de representación en los racionales 8
2.1. 1.1.2. La fracción y sus concepciones 10
1.2. Una mirada en el aula al DECIMAL y sus representaciones 13
1.2.1. Errores relacionados con los decimales. 14
1.3. La importancia del cambio de representación 16

2. Historia y epistemología de los números racionales **17**
2.1. Una visión general del racional a través de la historia 17
2.2. Historia de la notación de los racionales 19
2.2.1. Notación como Fracción 19
2.2.2. Notación como decimal 19

3. El Conjunto de los Racionales **21**
3.1. Construcción Didáctica de los Números Racionales 21
3.1.1. Construcción de los racionales a partir de la medida 21
3.2. Construcción Matemática de los Números Racionales 28
3.2.1. Construcción de racionales a partir de relaciones de equivalencia 28
3.2.2. Construcción de los decimales 29
3.2.3. Construcción de los decimales pasando por la construcción de Q 30
3.3. Cambio de representación en los racionales. 30
3.3.1. De Fracción a Decimal 30
3.3.2. De Decimal a Fracción 35

4. Propuesta de Actividades **39**
4.1. Guía del Docente 39
4.1.1. Taller 0 39
4.1.2. Taller 1 44
4.1.3. Taller 2 55

5. Conclusiones 65

A. Anexo: TALLER 0 67

B. Anexo: Taller 1 De Fracción a Decimal.....71

C. Anexo: Taller 2 De Decimal a Fracción.....81

D. Anexo: Taller 3 Aplicaciones de las conversiones de Fracción a Decimal y Viceversa 91

Bibliografía 94

Lista de figuras

Pág.
Ilustración 1.1.1-1: Éxito en la Conversión y Tratamiento entre los Racionales 6
Ilustración 1.1.1-2: Conversión de Fracción a Porcentaje 7
Ilustración 1.1.1-3: Conversión de Decimal a Pictórico 7
Ilustración 1.1.2-1: Fracción como Parte Todo 11
Ilustración 1.1.2-2 La Fracción como razón 12
Ilustración 1.1.2-3 Segmentos conmensurables 12
Ilustración 1.2.1-1: Error al sumar las fracciones 15

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1-1 Registros de los Racionales 5
Tabla 1-2: Convensiones de las representaciones de los Racionales 7
Tabla 1-3: Representaciones de un Racional 9
Tabla 1-4: Tratamiento entre Fracción y Decimal 9
Tabla 1-5: Conversión entre Fracción y Pictórico 10

Introducción

Al interior de las instituciones educativas de educación básica y media se pueden percibir cierto tipo de dificultades en la clase de matemáticas al abordar los números racionales en los diferentes niveles de formación escolar. Estas dificultades se pueden centrar en la comprensión del número racional a través de sus diversas representaciones fraccionaria, decimal y pictórica.

En particular y para el desarrollo de este trabajo se estudiará el proceso de conversión de expresiones fraccionarias a decimales y viceversa, con el objeto de desarrollar una propuesta didáctica para estudiantes de grado 7 qué permita una mejor comprensión de los números racionales.

Para lo anterior se requiere:

- Revisar en la historia de la matemática el desarrollo del concepto de número racional.
- Determinar elementos conceptuales que desde el punto de vista matemático conformen la noción de número racional.
- Indagar acerca de las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de número racional a nivel escolar y en particular los que están relacionados con las diferentes representaciones que existen para los números racionales y sobre los procesos de conversión de una representación a otra. En particular me centraré en los problemas de la conversión de fraccionario a decimal y viceversa.
- Realizar una propuesta de actividades didácticas teniendo en cuenta los aspectos anteriormente mencionados.

En consecuencia el trabajo abordará los siguientes capítulos:

1. Planteamiento del problema didáctico

En este capítulo se plantean las diferentes dificultades en la enseñanza y el aprendizaje que tienen los estudiantes al abordar la conceptualización del número racional y sus distintas representaciones. Allí se tendrá en cuenta tanto la experiencia personal como la opinión de diversos autores que han abordado el problema desde la didáctica de las matemáticas.

2. Historia de los números racionales

En este capítulo se abordará la historia de los números racionales evidenciando el proceso que ha llevado a lo que hoy en día es el concepto de número racional. Este capítulo mostrará las dificultades epistemológicas que se han tenido a través de los

tiempos en la aceptación y uso de los números racionales.

3. El conjunto de los Números Racionales

En este capítulo se presentarán los números racionales donde se mostrarán diferentes definiciones que tienen estos números, al igual se mostrarán los diferentes procedimientos que se deben realizar para realizar el cambio de fracción a decimal.

4. Propuesta de Actividades

En este capítulo se realiza una propuesta para el manejo de la conversión de decimal a fraccionario y viceversa en el aula de clase. Tomando como base lo desarrollado en los capítulos anteriores, se presentará los elementos necesarios para que tanto el docente de grado 7 de matemáticas como sus estudiantes puedan abordar de mejor manera el manejo de la enseñanza-aprendizaje de los números racionales, sus representaciones y las estrategias al realizar la conversión de una representación a otra.

5. Conclusiones y Reflexiones

En este capítulo se realizarán las respectivas reflexiones y conclusiones dadas mediante la elaboración de este trabajo, abordando posibles soluciones para la enseñanza de la conversión de decimal a fraccionario y viceversa.

1. Planteamiento del problema didáctico

Un número racional se define usualmente como un número de la forma $\frac{a}{b}$ $con\ a, b\ numeros\ enteros\ y\ b \neq 0$. Sin embargo a pesar de que esta definición solo lleve a pensar en una sola forma de representación (la fraccionaria), los números racionales tienen múltiples interpretaciones según el uso que se les quiera dar. Por ejemplo, un número racional se puede presentar como fracción parte todo, donde justamente la expresión $\frac{a}{b}$ significa que se toman *a* partes de un todo dividido en *b* partes. Al igual se puede presentar como un número decimal "0,4" donde se ve involucrado las concepciones que tienen los estudiantes frente al sistema de numeración decimal (base 10). También se pueden encontrar como gráficos pictóricos[1] representando partes tomadas de una unidad definida, o elementos comunes en un conjunto. O al igual se encuentra como un porcentaje "45%" el cual puede representar las partes de un todo dividido en 100. Con cada una de estas representaciones se pueden encontrar diversas dificultades para la enseñanza de los números racionales ya que se conoce que el acercamiento que el estudiante hace a los racionales se realiza mediante sus representaciones Duval (1999a), por lo tanto si el estudiante no tiene un manejo adecuado en cada una de estas puede llegar a tener dificultades al trabajarlas operatoriamente o para la solución de problemas dados en la escuela o en su práctica.

Para la elaboración de este trabajo se encontraron diversos textos de didáctica de las matemáticas abordan el estudio de los números racionales, entre ellos se destacan:

- Llinares, con su texto titulado "Fracciones la relación parte todo" (1988) realiza un estudio sistemático acerca de las diversas concepciones que pueden llegar a tener los estudiantes y los docentes sobre las fracciones, en particular a través de la relación parte todo y su significado para el aprendizaje y la enseñanza.

- Fandiño, en su texto "Las Fracciones aspectos conceptuales y didácticos" (2009) realiza un estudio entorno a la enseñanza, el aprendizaje, los errores, las dificultades y la semiótica que se encuentran al trabajar con la representación del número racional como fracción.

- Centeno, en "Los números decimales, ¿Por qué? y ¿Para qué?" (1988) realiza un estudio a profundidad acerca de los números decimales. Aborda los problemas en la enseñanza y en el aprendizaje, los errores en la escuela, las dificultades, y las situaciones didácticas al trabajar en la escuela con los números decimales.

---

[1] Los gráficos pictóricos son los que se pueden representar

- Duval en sus textos “Semiosis y pensamiento humano” (1999a) y “los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo” (1999b), aborda el problema de la semiótica, como eje articulador para poder realizar los diferentes cambios de representación de un objeto a otro, permitiendo así observar desde esta rama de la ciencia las dificultades que puede tener el cambio de representación y sus significados.

- Sánchez, (2010) en la investigación “las representaciones en los números racionales” presenta la dificultades que tienen los estudiantes de grado 7 al realizar diferentes cambios de representación de un mismo número racional, observando que existen mayores dificultades en los cambios de fraccionario a decimal y viceversa.

Las referencias anteriores permiten observar que uno de los problemas en la compresión de los números racionales es aquella que compromete a las representaciones que tienen estos números, ya que es a través de las representaciones que los estudiantes logran comprender los racionales, Duval (1999a), presenta esto como la paradoja de las representaciones, donde dice que las representaciones permiten conocer el objeto matemático, pero el objeto NO es la representación. Indicando entonces que el estudiante construye el concepto de número racional mediante sus representaciones, y es allí donde se da la importancia de que un estudiante pueda pasar de una representación a otra.

Con respecto a lo anterior Fandiño (2009, 133) afirma:

> “*…Aquello que se aprende a manejar, en nuestra disciplina, no son los objetos [los conceptos en nuestro caso] sino sus representaciones semióticas. La semiótica en Matemática y Didáctica de la Matemática es por lo tanto de fundamental importancia y por lo general, para una representación semiótica existen varios posibles registros*[2]*…*”

Por lo cual las representaciones semióticas en la creación de conceptos son fundamentales ya que es a través de las representaciones que se estudia el significado que puede tener un número racional desde el punto de vista didáctico.

Ahora bien, si se tiene dos representaciones 0.5 (escritura decimal) y $\frac{1}{2}$ (escritura fraccionaria) estas hacen parte de un mismo registro en el lenguaje aritmético representando el mismo número racional.

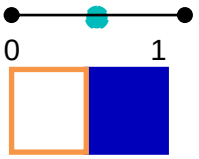
Al trabajar con los cambios en las representaciones de un mismo número se encuentran dos definiciones en D´Amore (2006):

[2] *Registro*: Es un elemento de un sistema semiótico completo el cual permite representar de forma explicita un concepto o un objeto dado,(Duval, 1999a). Por ejemplo se toma el número #2, el registro como tal seria el pictórico “dos” en letras en un sistema semiótico de lenguaje común. Pero este objeto también puede aparece como el símbolo “2” y allí estaría en un sistema semiótico numérico.

- el pasaje de una representación a otra en diferente registro se le denomina *conversión*.
- el paso de una representación a otra en el mismo registro se llama *tratamiento*.

Estas definiciones no se hacen muy visibles si no se entiende que es un mismo registro de representación, es por ello que en la tabla 1-1 se puede apreciar los diferentes registros que puede tener un número racional y sus correspondientes representaciones. Fandiño (2009).

Tabla 1-1 Registros de los Racionales

Registro	Lenguaje común	Aritmético	Pictórico
Representación	Un medio, la mitad, tercera parte, un cuarto de.	$0.5; \frac{1}{2}; 5\times10^{-1}$	

De allí se podría entender que si se pasa de un registro en lenguaje común al aritmético se propondría una conversión, mientras que si se cambia desde el mismo registro se llamará tratamiento.

El problema que se aborda en este documento es el de tratar de realizar un cambio de representación entre fracción y decimal las cuales hacen parte de un solo registro, el aritmético, en el cual se realiza el proceso de tratamiento.

Dado el recuento hecho hasta ahora, se puede decir que el difícil proceso de aprendizaje de los racionales subyace en el poco manejo por parte de los estudiantes con los registros y en consecuencia se produciría una dificultad en el significado del objeto D´Amore (2006) afirma que esto no implica que se establezcan límites con uno o dos registros de un objeto matemático; por el contrario, el docente debe abrir el área de aprendizaje en diferentes representaciones en cualquier registro (preferiblemente todos) para entender la equivalencia de representaciones entre un decimal y su representante en la familia de las fracciones.

Es importante que el estudiante manipule y explique lo que sucede, en varios de los tantos registros, de hecho Duval, D´Amore y Fandiño no son los únicos que establecen ello como parámetro de aprendizaje y enseñanza; los estándares curriculares que rigen la enseñanza en Colombia en grado 7º proponen como estándar:

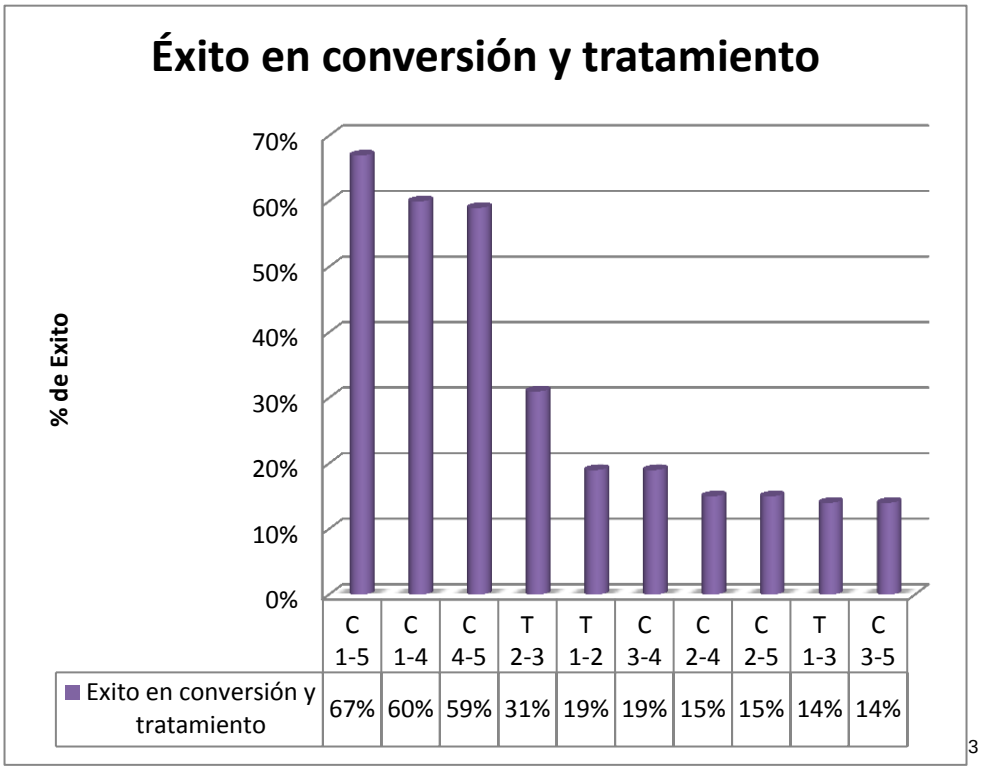
> "*Utilizo los racionales en sus diferentes representaciones o expresiones (fracción, razón, decimal y porcentaje)*" MEN (2006).

Lo que quiere que si el estudiante no utiliza las diversas representaciones de un racional no podrá construir el concepto de número racional. "*…No hay adquisición de un concepto sin que existan representaciones semióticas por medio de las diferentes registros semióticos…" Duval (1999a, 37)*.

Al igual los racionales se presentan también a través de expresiones como medio día, un cuarto de queso, la tercera parte de la ganancia, entre otras; estas expresiones resultan aún más familiares ya que todas las personas tiene acceso a esta a través del lenguaje común. Estas expresiones que se utilizan a diario, han servido para expresar la comparación entre partes de la unidad o el todo y para desarrollar el pensamiento proporcional, entre otros.

Sánchez, (2010) muestra como los estudiantes de grado 7 realizan los diferentes cambios de representación entre las representaciones fraccionaria, decimal, porcentual, pictórica y lenguaje natural, y se evidencian las dificultades que tienen los estudiantes en pasar de una representación a otra se observa en la Ilustración 1.

Ilustración ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**-1: Éxito en la Conversión y Tratamiento entre los Racionales**



[3]

[3] La tabla que se presenta no es la original de Sánchez (2010) los porcentajes no fueron modificados.

Allí por ejemplo la abreviatura C1-5 significa que existe un éxito del 67% en la conversión desde la escritura fraccionaria a la pictórica donde cada categoría corresponde a una representación del número decimal de la siguiente manera:

Fraccionario	Decimal	Porcentual	Lengua Natural	Pictórico
1	2	3	4	5

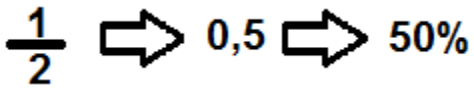
C	Conversión
T	Tratamiento

Tabla 1-2: Convensiones de las representaciones de los Racionales

Por ello al observar la ilustración 1-1 se puede concluir que el mayor porcentaje de éxito estaría en la conversión entre la escritura fraccionaria y la pictórica con un porcentaje de éxito de casi el 67%, y el menor porcentaje de éxito estaría en C3-5 el proceso de conversión de pictórico a porcentual con casi un 17%. Mientras que el proceso de tratamiento de fraccionario a decimal en el cual se aborda T1-2 tuvo un éxito del18%.

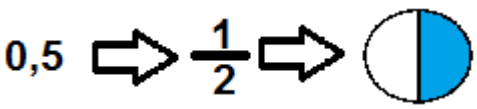
Es conveniente aclarar que la mayoría de los procesos de cambio de representación no tuvieron un buen resultado, sin embargo se puede observar que si se quiere pasar ya sea de la representación fraccionaria a la decimal o de una pictórica a decimal es necesario vincular las otras representaciones. Es decir, por ejemplo, si se tiene una fracción y se quiere convertir en un porcentaje es necesario pasar por la representación decimal primero para realizar dicho cambio.

Ilustración ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**-2:** Conversión de Fracción a Porcentaje



O si se quisiera pasar de la representación decimal a pictórica el estudiante acude primero a la representación en fracción para luego si hacer el pictórico.

Ilustración ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**-3:** Conversión de Decimal a Pictórico[4]



[4] Observe que en este caso solo hay representaciones en el sistema numérico a diferencia del siguiente que existen en varios sistemas tales como el pictórico y el numérico

De lo anterior emerge la justificación para desarrollar el presente trabajo teniendo en cuenta la dificultad encontrada en el cambio de fraccionario a decimal y viceversa.

1.1. Mirada desde la FRACCIÓN como representación

En los Estándares Curriculares para Matemáticas MEN (2006) la enseñanza de los números racionales se comienza a través de los fraccionarios en grado 3, de allí en adelante (para los siguientes grados) se identifican las diferentes representaciones y las posibles conversiones[5] de una a otra y las distintas operaciones que entre racionales debe realizar un estudiante. En grado 7, se aborda concretamente el problema de la cambio de fraccionario a decimal y viceversa.

Teniendo en cuenta que existen diferencias entre el manejo del racional con su representación decimal y el racional con su representación en fracción, se observa que los estudiantes pueden tener ciertas dificultades en hacer uso de la equivalencia de esas dos representaciones, Chamorro (2003a, 2003b) señala las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los racionales las cuales son: dificultades generadas por diferentes tipos de situaciones problema y las dificultades generadas por diferentes tipos de representación. Para este caso se abordará la correspondiente a las dificultades generadas por los tipos de representación.

Como se quiere trabajar sobre el cambio que deben hacer los estudiantes para pasar de fracción a decimal y viceversa, y teniendo en cuenta que el lenguaje natural permite hacer una primera introducción a la conversión como lo menciona Llinares (1988), ya que los niños empiezan a darle significado a los racionales mediante el uso común de palabras como: un medio, mitad de, dividido en 4 partes, entre otras. Se puede observar que este lenguaje natural o lenguaje común permite ver la fracción como una relación parte todo, lo cual es de gran importancia al trabajar este tipo de equivalencia entre las representaciones, ya que es el primer acercamiento al cambio de representación que tiene una persona hacia los números racionales.

El hecho de hacer dichos cambios de representación permite pensar que los racionales pueden mostrar algunos obstáculos de comprensión mediante sus representaciones y más aún mostrar la existencia de algunas dificultades para su comprensión las cuales dependerían exclusivamente de su representación y no del objeto en sí de número racional.

1.1.1. Cambio de representación en los racionales

[5] Para este caso la palabra conversión hace referencia a los cambios de representación, no a la operación definida anteriormente. Esto se asume de aquí en adelante ya que es de uso común la palabra conversión en ves de tratamiento.

Duval (1999a) afirma que hacer un cambio de representación es presentar un mismo objeto es sus diferentes registros lo cual permite ver diferentes formas de presentar un mismo elemento con un mismo significado. Por ejemplo, tomemos las siguientes cuatro representaciones del número racional $\frac{1}{2}$.

Tabla 1-3: Representaciones de un Racional

Notación Estándar[6]	Decimal	Fracción (parte-todo)	Fracción Decimal	Notación Científica
$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	$5X10^{-1}$

Observe que en la representación decimal 0,5 del número $\frac{1}{2}$ se tienen varios elementos que lo conforman como el 0 la "," y el 5; estos elementos son significantes[7] al realizar la equivalencia entre las distintas representaciones. Por ejemplo al cambiar de decimal a fracción decimal se pueden encontrar elementos comunes como el 5 y el 0, o al cambiar de fracción decimal a notación científica se encuentran el 5 y el 10 como elementos comunes. Sin embargo al realizar la equivalencia entre la fracción y la notación científica o la decimal no se encuentran dichos elementos comunes:

Este tipo de relaciones entre los elementos constituyentes de una representación los llama Duval (1999b) relaciones de equivalencia entre las unidades significantes, definiendo como unidad significante el elemento que hace parte del símbolo al cual se le da un significado en la representación, en Sánchez (2010) se encuentra más detallado este tipo de relaciones entre las unidades significantes.

Tabla 1-4: Tratamiento entre Fracción y Decimal

$\frac{1}{2}$	0,5
Escritura Fraccionaria	Escritura Decimal

Veamos, en el cambio de la representación de fraccionario a decimal, no existe ninguna correspondencia entre las unidades significantes, las unidades significantes elementales generadas con el registro en escritura fraccionaria serían: "1", "-", "2" y las unidades significantes elementales generadas con el *registro* de escritura decimal serian: "0", "," y "5"." Por ello no existe correspondencia entre las unidades significantes, con lo cual es fácil percibir una mayor complejidad al tener que realizar el cambio de representación de fracción a decimal o viceversa.

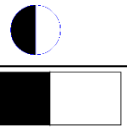
En cambio cuando se realiza el análisis correspondiente al cambio de representación de fracción como parte-todo a pictórico, se puede ver que efectivamente allí si se

[6] Notación estándar desde la disciplina como $\frac{a}{b}\ con\ a, b\ números\ enteros\ y\ b \neq 0$.

[7] Un elemento significante es aquel que le da significado a objeto representado Duval (1999)

encuentran elementos comunes para establecer una correspondencia entre cada uno de los elementos representados.

Tabla 1-5: Conversión entre Fracción y Pictórico

$\frac{1}{2}$	
Escritura Fraccionaria	Representación Grafica

En este caso las unidades significantes elementales generadas con el registro en escritura fraccionaria seria "1", "-", "2" y las unidades significantes elementales generadas con el registro de representación gráfica serian una circunferencia o un rectángulo dividido en "dos" partes y "una" de ellas detallada por medio de un color diferente. Por tanto se puede encontrar cierto tipo de correspondencia entre el "1" de la fracción y el "un" del pictórico y el "2" de la fracción y el "dos" del pictórico. Ratificando aún más que estos elementos significantes entre las representaciones son parte importante en el momento de convertir de una representación a otra.

Ávila (2008) y Alcalá (s.f) enuncia que el proceso de cambio de representación entre fracción y decimal es mucho más complejo que tan solo hacer el algoritmo de la división o hacer un conteo de posiciones de la coma con respecto al número de ceros en el denominador, como lo enuncian algunos docentes en la escuela.

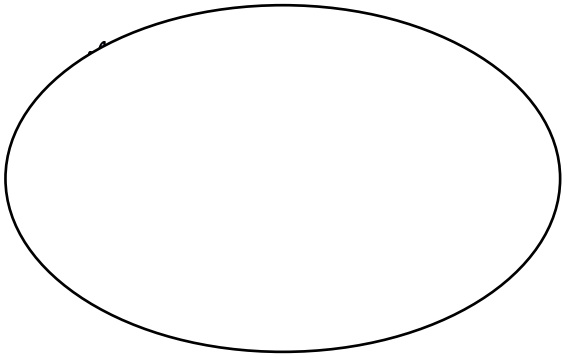
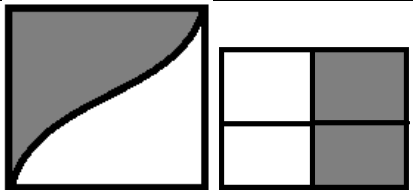
Como se puede observar se ha realizado un estudio basándose en diferentes autores frente a la fracción y sus diversos estudios frente a los registros de representación. Sin embargo es necesario abordar un poco más la fracción desde la perspectiva de las formas de entender el concepto de fracción para los estudiantes.

1.1.2. La fracción y sus concepciones

La fracción puede tener diferentes concepciones. Según Fandiño, (2009) son:

a) La fracción como parte de una unidad-todo. Esta noción es la primera que inicia al estudiante ya que mediante el lenguaje común se puede hablar de "la mitad", "medio", "tercera parte", entre otras; entendiendo que se toman partes iguales de un todo. Cabe indicar que la continuidad de la representación, es decir si es representado por circunferencias partidas o elementos geométricos partidos en varias secciones, o la discretud (o discreto) lo cual es representado por elementos enteros como colombinas, vacas, dulces, dependerá de la imagen o concepto inicial que asuma el estudiante. En la ilustración 2 se presenta el concepto de parte todo mediante gráficos discretos a izquierda y continuos a derecha.

Ilustración ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**-4**: Fracción como Parte Todo

Fracción como Parte Todo[8]	
	
Tres vacas Blancas de 8 vacas o Tres vacas Negras de 8 vacas relación parte todo.	Una Parte de Negra de dos partes
Discreto	*Continuo*

Para el caso de concebir el concepto de fracción como parte todo, el estudiante podrá hacer la conversión a decimal mediante el algoritmo de la división, ya que entiende que hay un reparto de un número entre otro; Esto se relaciona con los significantes dados en la representación de fracción.

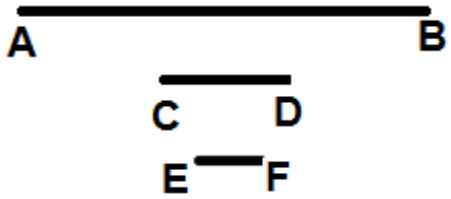
b) La fracción como cociente: allí el estudiante entiende $\frac{3}{5} = 3 \div 5$ que la unidad *a* será dividida en *b* partes iguales. Cuando el estudiante se le presenta una fracción como $\frac{3}{5}$ entiende que se tiene 3 objetos y los dividimos en 5 partes. Para este caso la conversión la realiza casi de forma instantánea mediante el algoritmo de la división. Sin embargo cuando se presenta este concepto de cociente en la fracción el estudiante puede tener ciertos obstáculos ya que está acostumbrado a que siempre se divide un número mayor entre uno menor.
Una de las grandes diferencias entre la concepción de la fracción como parte todo y como cociente es que la primera el estudiante debe indicar la unidad (el todo) y luego si la divide partiéndola en partes iguales, determinado las partes desde la unidad formada, mientras que si se ve la fracción como cociente la unidad siempre va a estar definida (es única) y las partes van a ser determinadas por el todo.

c) La fracción como relación (razón): en ocasiones se utiliza la fracción para indicar la existencia de la relación entre dos magnitudes (cantidades) a y b. Un ejemplo puede ser el siguiente:

[8] El todo se debe dividir en partes iguales.

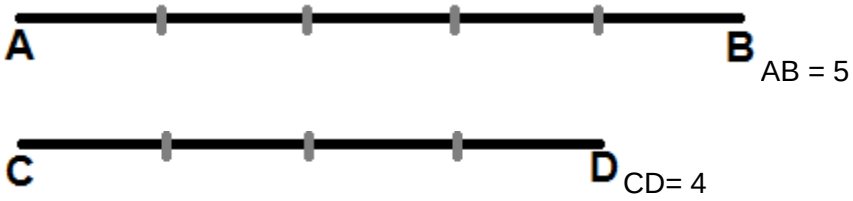
Sean tres segmentos AB, CD, EF

Ilustración ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**-5 La Fracción como razón**



Para este caso se toma EF como la unidad donde EF "cabe" exactamente 5 veces en AB y 4 veces en CD como se observa en la ilustración

Ilustración ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**-6 Segmentos conmensurables**



De esta manera se pueden establecer la relación (razón) entre AB y CD como$\frac{5}{4}$ o la relación entre CD y AB como $\frac{4}{5}$.

De la misma manera se puede establecer otras relaciones equivalentes si se tomara otra unidad distinta conmensurable para las dos magnitudes dadas AB y CD, por ejemplo si se toma otra unidad GH.

Allí GH "cabe" 10 veces en AB y 8 veces en CD por lo tanto la relación entre AB y CD seria de $\frac{10}{8}$ y la relación entre CD y AB seria $\frac{8}{10}$obteniendo una igualdad entre las relaciones:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

Y si se encontraran otra unidad conmensurable se hallarían más equivalencias. En donde se comprende el concepto de fracción como una relación entre dos magnitudes, teniendo en cuenta la unidad seleccionada podrá variar la fracción.

Es importante que el estudiante entienda la fracción como una clase de equivalencia

en la cual la fracción dada es un representante de infinitas fracciones equivalentes dadas mediante la amplificación o la simplificación de la misma. Este proceso permite la conversión de una forma más sencilla.

d) La fracción como operador: la fracción como un operador de tipo multiplicativo donde se considera que la fracción multiplica a un número; por ejemplo los lo cual conlleva al estudiante a operar dando así 16 peras. Para este caso la fracción simplemente es un operador para poder obtener un resultado. Allí la fracción carece de significado parte todo, o relación y se toma como un número, Este es un primer paso para poder entender la fracción como número Racional.

e) La fracción como probabilidad: aunque es muy parecida a la definición parte todo, en este caso se asume que el numerador son los eventos favorables (parte) y el denominador como los eventos posibles (todo), esta concepción ayuda a la conversión mediante el algoritmo de la división ya que como probabilidad se le solicita al estudiante expresarlo como un porcentaje, y para ello es necesario pasarlo a decimal.

1.2. Una mirada en el aula al DECIMAL y sus representaciones

Los números decimales entran a jugar un papel de suma importancia ya que es una de las representaciones de los números racionales. Los números con representación decimal no son tan solo los racionales. También los decimales representan los números naturales, enteros, racionales, irracionales o en general los reales. Esta particularidad de los decimales de representar cualquiera de los conjuntos numéricos no pasa tan fácilmente con las fracciones ya que generalmente los racionales se representan mediante las fracciones.

Los conjuntos numéricos como los naturales, los enteros y hasta en los racionales en su representación en fracción, son insuficientes cuando se trata de medir magnitudes continuas (área, volumen, masa etc.), y por ello cobran tanta importancia los números decimales, los cuales pueden ser representaciones en general de cualquier número real.

El uso de las calculadoras en la escuela ha permitido que los estudiantes tengan un acercamiento más profundo con la representación decimal, esto se debe a que al querer realizar operaciones con los racionales en la calculadora aparecen por lo general en decimal[9].

La resolución de cálculos numéricos es más sencillo ya que se puede calcular con los

[9] Hoy en día existen calculadoras que permiten trabajar las diversas operaciones con representaciones fraccionarias, sin embargo aun se sigue privilegiando en la escuela el uso de los decimales.

decimales como si fueran números enteros; sin embargo cabe aclarar que en muchos casos se puede suprimir la coma (números con coma, término vulgar para referirnos a los decimales) cambiando la unidad, por ejemplo 6,3 millones, se puede cambiar por 6300 miles. Pero, como se puede observar, el cambio de unidad implica una escritura más densa, mientras que la escritura con coma permite utilizar números de mayor uso cotidiano en los estudiantes y además se puede evitar números con cantidades o cifras grandes. Además los decimales permiten siempre convertirse en naturales mediante el cambio de sistema de unidad, miles, millones, entre otros.

Si se omite la nomenclatura de las unidades, miles millones no se podría comprender los números decimales, ya que los estudiantes siempre verían dichos números como naturales. Y es allí donde radican muchas dificultades para los estudiantes, pues muchos no logran desligarse de los números naturales.

Para muchos estudiantes la concepción de un número con más cifras es necesariamente mayor que uno con menos cifras; el cero a la izquierda no tiene valor y multiplicar dos números siempre da como resultado uno mayor. Además cuando se divide un número entre otro se obtiene uno menor. Las anteriores creencias son válidas para el conjunto de los naturales pero no se pueden generalizar a los decimales puesto que funcionan de otra manera, encontrándose aquí obstáculos en el aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo anterior Brosseuau afirma:

> "…*El conocimiento sobre los números naturales constituye un obstáculo para la comprensión de los números decimales…" (Brosseuau, 1980,130)*

Entendiendo esto como si el estudiante aplicara las mismas reglas dadas sobre los naturales en los decimales, por ejemplo a mayor cantidad de cifras el número es mayor, la suma de dos números con cierta cantidad de cifras da como resultado un número con más cifras que la que componen la suma, entre otras.

Centeno (1988) afirma que en lo que concierne a los números naturales en cuanto a las nociones de medida, de enumeración, de orden, son muy parecidas a las trabajadas con los decimales y más aún cuando se trabaja con esquemas operativos muy primitivos En este mismo sentido Centeno hace una reflexión más profunda de los obstáculos en la compresión del sistema de numeración decimal presentes en la escuela.

1.2.1. Errores relacionados con los decimales.

a) *Error relacionado con la lectura y escritura de los números; Valor de posición.*

Con frecuencia la introducción hacia los números decimales se hace a través del sistema métrico decimal correspondiéndose a la unidad de medida con sus partes decímetro (dm), centímetro (cm), milímetro (mm), etc. De la misma forma que a los múltiplos decámetro (DM), hectómetro (HM), kilometro (KM). Para autores como Brosseau (1980) la eliminación de la unidad de medida provoca grandes dificultades en los alumnos, pues

se realiza sin ninguna explicación por parte del docente, llevando así a errores tanto en la lectura como en la escritura de los decimales. Por ejemplo para muchos estudiantes las centésimas las interpretan como números enteros y las milésimas implica tres ceros necesariamente, es decir siguen partiendo de los números enteros olvidando así la unidad de medida a la que pertenecen, ello se debe a que no han logrado todavía una comprensión del sistema de medida utilizado.

b) *Errores relacionados con el cero.*

Algunos alumnos ignoran el cero, es decir no lo tiene en cuenta, al creer que su valor es nulo como sucede en otros conjuntos numéricos. Estos errores se ven implícitos al aplicar algoritmos de la división donde el estudiante no identifica la posición del cero omitiendo el valor posicional.

c) *Errores relacionados con el orden de los decimales.*

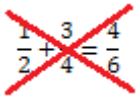
A la hora de pedir a los estudiantes que comparen y establezcan relaciones de mayor qué y menor que, suelen interpretar a los decimales como pares de enteros, por ejemplo, si se les pide comparar 4,5 y 4,15, la mayoría de los estudiantes concluye que 4,15 es mayor porque 15 es mayor que 5, es decir observan los números después de la coma como enteros positivos.

Este tipo de error está muy relacionado con la densidad y el valor posicional de los racionales, pues para los estudiantes no es posible hallar por ejemplo un número entre 4,2 y 4,3 dado que, aun los siguen viendo como números naturales y es por ello imposible encontrar un número con tales características.

d) *Errores relacionados con las operaciones.*

En cuanto a este error y como ya se había mencionado con anterioridad los estudiantes siguen con la percepción que multiplicar, conlleva al resultado de un número “grande” y dividir por el contrario a uno más “pequeño”; de lo que se puede deducir en este caso, que los estudiantes siguen manejándolo como si fueran números naturales.
Es conveniente anotar que este tipo de obstáculos también se presentan con las fracciones ya que se puede observar que suman fracciones de la misma manera como si sumaran naturales. Por ejemplo:
Si se tiene dos fracciones $\frac{1}{2}\ y\ \frac{3}{4}$ la suma de fracciones la realizan

Ilustración ¡Error! Utilice la ficha Inicio para aplicar 0 al texto que desea que aparezca aquí.**-7**: Error al sumar las fracciones



Donde se observa que identifican la fracción como si se comportara como un número natural sumando numerador con numerador y denominador con denominador.

Este tipo de dificultades en el aprendizaje hacen parte de la falta de identificación ya sea de las fracciones o de los mismos decimales. Es por ello que muchas veces los

estudiantes cometen errores al momento de convertir de decimal a fracción o viceversa debido a la NO identificación de la representación o a la falta de manejo de los conjuntos numéricos.

1.3. La importancia del cambio de representación

Los cambios de representación no solo se dan entre los racionales o entre las representaciones numéricas, también se pueden dar en el lenguaje por ejemplo si se quiere "pasar" de la palabra "dog" en inglés al español "perro" este proceso se llama conversión Duval (1999b), ya que va de una registro a otro. Y las operaciones inmersas en este cambio dependerán de las reglas semióticas inmersas en caca uno de los registros.

Para este caso la lengua inglesa tiene unas reglas especiales para la conformación de palabras y oraciones, las cuales son muy distintas a las reglas dadas por la lengua española, indicando de esta manera que para encontrar una representación equivalente desde un registro a otro se deben presentar elementos significados, comúnmente este aprendizaje de una nueva lengua va acompañada del registro pictórico el cual permite hacer el puente entre el español y el inglés.

Para nuestro caso las conversiones en los racionales y en especial de fracción a decimal y de decimal a fracción no se pueden pensar como si fueran una misma operación por ejemplo si se tiene una fracción y se desea "pasar" a decimal el proceso más general a realizar es la división. Pero este proceso no es el mismo que se realiza desde decimal a fracción ya que para este se podría abordar mediante el manejo de ecuaciones generalmente.[10]

Por lo anterior el docente no debe echar de menos este tipo de cambios entre los registros fraccionario y decimal, ya que si se es consciente del grado de complejidad dado en el proceso, es capaz de comprender de mejor manera el proceso de enseñanza que debe ejercer en sus estudiantes para el correcto uso de los números racionales. Ahora bien el proceso no solo consistirá en enseñar un algoritmo (división o ecuaciones), este proceso de cambio debe ir acompañado de las implicaciones (operaciones) que tiene el registro, ya sea como fracción o como decimal. Ya que esto permitirá que el estudiante comprenda de mejor manera el objeto a enseñar que en este caso es el número racional.

[10] Cabe aclarar que las ecuaciones no son el unico camino que se podria utilizar el estudiante sin embargo es el más usado en el aula por el docente para esta conversion. Este tipo de operaciones de cambio se presentarán en el capítulo 3.

2. Historia y epistemología de los números racionales

2.1. Una visión general del racional a través de la historia

El conocer la historia de un concepto matemático, permite tanto al docente como al estudiante entender mucho mejor dicho concepto. Es por ello que se hará un recuento breve de la historia del número racional con el fin de dar a conocer elementos y sucesos que permitieron que este concepto emergiera en la sociedad.

Los racionales surgieron de la necesidad de medir con mayor exactitud algunas magnitudes, ya que los números naturales eran insuficientes para dar respuestas más precisas. Los primeros registros existentes sobre los números racionales aparecen en el Papiro Rhind de Egipto, datado hacia 1.650 a.C. En el cual se encuentran fracciones para representar partes de una unidad determinada.

Es así que los racionales como fracción surgen de la necesidad práctica de dividir o partir en secciones iguales un área determinada. Esta concepción de racional como "parte todo", es muy antigua, según Boyer (1986, 33)

> *"… los hombres de la edad de piedra no tenían necesidad de usar fracciones, pero al alcanzarse un nivel cultural más avanzado durante la edad de bronce, parece haber aparecido por primera vez la necesidad de un concepto más o menos vago de fracción y de un sistema de notación capaz de representar fracciones…"*

Por otro lado en la escuela pitagórica para la cual todo es número, las razones (relaciones entre números) buscan el número o razón que debía asociarse a la relación entre la longitud de un cuadrado y su lado. Fue allí cuando detectaron la imposibilidad de encontrar dicho número, lo que los llevó a demostrar por reducción al absurdo que existían magnitudes inconmensurables, estas magnitudes las cuales no tenían una medida común que "cupiera" un número exacto de veces tanto en la una como en la otra.

En otras palabras podríamos decir que si *a* se expresa como *m* veces una cantidad *p* $a = mp$ la magnitud *a* es conmensurable mediante la unidad *p.*

Esta demostración de gran relevancia en la matemática abrió el camino a los números irracionales. Todo indica que debido al descubrimiento de las magnitudes

inconmensurables surgió la teoría de las proporciones de Eudoxio que quedó plasmada para siempre en el libro V de los *Elementos* de Euclides.

Es a los indios y los árabes a quienes se les atribuye el sistema de numeración decimal, en el cual se privilegian las fracciones decimales y que fue introducido por en el siglo XIII por Leonardo de Pisa, "Fibonacci", en Europa. Fibonacci introdujo el concepto de número quebrado o números "ruptus", empleando la "raya" que hoy en día es usada para separar el numerador del denominador. Este sistema se implementó rápidamente por su utilidad y es el que hoy se usa de manera global.

En el siglo XIX cuando los matemáticos se preocupan por responder a la pregunta *¿qué es un número irracional*? ven la necesidad de dar también una definición de número racional. Fue Martin Ohm quien en un trabajo de 1822 da una primera respuesta y hacia 1860 Weierstrass los definió como parejas. $Q = \{p \cdot q^{-1}\ p, q \in Z, q \neq 0\}$.

En 1872 se publicarán tres definiciones de números irracional: la de Cantor por medio de sucesiones fundamentales de números racionales, la de Dedekind como cortaduras[11], o la de Weierstrass a partir de fracciones unitarias.[12]

En resumen tanto consideraciones prácticas, como las de los babilonios o las de los indios, como teóricas las de los pitagóricos, llevaron a aceptar los racionales como números indispensables en la resolución de múltiples problemas.

Es sorprendente que en libros como los de Boyer (1986), Kline (1981), Collete (1985), o Katz (1998), que abordan la historia de las matemáticas, no aparece el ítem de número racional, su historia siempre está relacionada con la historia de los números irracionales.

Tanto el concepto del racional como razón o como fracción se mantienen vivos y de ahí la importancia de hacer las conversiones respectivas.

El concepto de racional como fracción es utilizado en la escuela en los años iniciales (Grado1 y Grado 2 Básica Primaria Colombia), el cual tiene como objetivo acercar al niño a la concepción de partes de un todo.

[11] Se cree que Dedekind se inspiró en la teoría de las de proporciones de Eudoxio para dar su definición.

[12] SÁNCHEZ BOTERO, Clara H. La construccion de los números reales. En XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadistica, Cuadernillo. Bogotá: 1997. p.22.

2.1. Historia de la notación de los racionales

2.1.1.Notación como Fracción

El concepto de fracción viene del término latino “factio” que significa “parte obtenida rompiendo”, de lo cual no se sobreentiende que las partes obtenidas en la acción de “romper” sean iguales como lo afirma Fandiño (2009,38).

La simbología puede llegar a tener un origen incierto, se conoce con exactitud que Bell (1949,70) en su libro nombra inicialmente a Pitágoras como uno de los autores que descubrió la razones para las longitudes de las cuerdas de instrumentos musicales sometidas a una misma tensión para dar la octava, la quinta y la cuarta, pero fue Leonardo Fibonnacci Pisano (1180-1250) quien lo usó explícitamente en su texto “Liber Abaci” en el 1202. Los números con representación fraccionaria son llamados “rupi” o (rotos) o también “fracti” (pedazos) y la raya que existe entre el numerador y el denominador se llama “vírgula” o traducido al lenguaje moderno “bastoncillo” (virga, bastón).

Este bastoncillo o “raya” según Cajori, (1928) citado en Fandiño (2009) fue utilizado anteriormente por el matemático árabe Abu Zakhariya Muhammand Ibn abreviado al-Hassar, casi un siglo antes que Fibonacci, según (Yuskevevic, 1976), aunque se piensa que los orígenes son aún mucho más antiguos atribuidos a los Hindúes.

Sin embargo los griegos usaban ya las fracciones colocando lo que hoy llamamos el numerador debajo del denominador sin utilizar la “raya”. Las palabras numerador y denominador tienen al igual un origen incierto, sólo se conoce que se cimentaron en el siglo XV en Europa.

Ahora bien la llamada reducción de fracciones, se presenta en un texto oficial por Lucca Pacioli alrededor de 1445 y 1515, y por Nicolo en 1499 a 1557. Esta reducción a la fracción según Nicolo se encontraba bajo el nombre de “dividir”, y fue llamada a finales de la edad media como “ultima depresiones fractorum” o “ridur li rotti allla sua menor denominatione”.

También se puede encontrar la distinción entre fracciones propias e impropias en el siglo XVII donde se distinguió el uso de los números en representación de Mixtos, es decir con cantidad entera y cantidad fraccionaria. Los cuales fueron llamados “enteros rotos”

2.1.2.Notación como decimal

La representación de las fracciones mediante los números decimales se puede observar en la obra de Simeone de Burges también llamado Stevin (1548-1620), quien no utilizaba la coma sino que usaba un símbolo diferente como un cero ʘ con un número adentro el cual indicaba la posición del número, por ejemplo para escribir el número 34,65 se utilizaba el 3 4 ⓪6 ①5 ②. Mientras que el signo de la coma “,” fue propuesta por John Wallis (1616-1703), quien fue el maestro de Isaac Newton (1642- 1727), fue generalizado e introducido en Francia, Italia y luego toda Europa en el siglo XVII como el sistema métrico decimal. Según Konic, P. Godino, J. (2010) la notación decimal se da en el siglo

XIX, influido por la coma como un elemento determinante para el valor posicional de un número.

Es mediante los decimales que se puede determinar si un número es racional o no. Y es en este punto de la historia cuando se definen los racionales en la representación decimal como los decimales finitos, decimales infinitos periódicos y los decimales infinitos no periódicos.

3. El Conjunto de los Racionales

A continuación se presentan diversas construcciones de los números racionales, con el fin de proporcionar elementos de tipo teórico que soporten esta propuesta.

3.1. Construcción didáctica de los Números Racionales

3.1.1. Construcción de los racionales a partir de la medida

Es conveniente considerar algunos aspectos frente a las ideas de magnitud, cantidad y medida que están directamente relacionadas con el concepto de número racional en diversos contextos. Por ejemplo, Godino (2002) afirma que:

> Es importante tener en cuenta que las prácticas y el lenguaje cambian según el contexto institucional en el que se estudia y usa la medida.
>
> En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. “Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad”; “Cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar” (Diccionario de M. Moliner).
>
> En la matemática (pura), como veremos después, con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales.

Por su lado, Centeno (1988) aplica las ideas anteriores para mostrar cómo se pueden construir los números racionales a partir de la noción de medida, y hace ver que este conjunto de números surge dada la insuficiencia que tienen los números enteros para medir magnitudes continuas. Efectivamente este problema era bien conocido desde los griegos, cuando diferenciaron entre magnitudes conmensurables y magnitudes inconmensurables. Para las primeras existía una medida común. Para las segundas no existía esta unidad como es el caso entre la diagonal de un cuadrado y su lado. En el caso de las magnitudes conmensurables al existir esa medida común se le asociaba una

relación entre números naturales (razón numérica), lo que tenía implícito el concepto de número racional.

Cejas (2003, p.316) en su libro “Teoría de las proporciones en los Elementos de Euclides”, afirma acerca de las diversas construcciones, postulados y definiciones que hace Euclides en su libro V que “Euclides no da una definición de lo que es una magnitud, pero engloba en este concepto a las longitudes, las áreas y los volúmenes”.

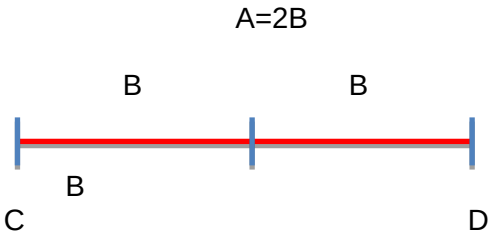
De la misma manera enuncia que Euclides contempla las nociones de orden y de suma, entre magnitudes homogéneas de la siguiente manera:

> Si A y B son magnitudes homogéneas, debe ser A<B, A=B o A>B, al igual existe una magnitud C del mismo tipo que A y B, tal que A+B=C dando allí como nociones comunes en su libro I algunas propiedades de orden y de suma tales como:
>
> Si A=B, entonces A+C = B + C
> Si A=B, entonces A -C = B - C
> Si A<B, Entonces A+C < B + C
>
> El producto de un número natural por una magnitud se entiende como una suma repetida: nA=A+A+A+…+A (n veces).
>
> Por lo cual se llega a que si A y B son magnitudes tales que A=nB, para un cierto número natural n, se dice entonces que B es una parte alícuota o submúltiplo de A (definición V.1) de Euclides y que A es múltiplo de B definición V.2 (Cejas, p.317)

Estos elementos permiten a Euclides definir operaciones entre las magnitudes y además relacionarlas entre ellas mismas, lo cual va a ser de gran importancia en la construcción de los racionales. Por ejemplo, cuando se tienen dos magnitudes A y B tales que A=2B se puede decir que B es una parte alícuota o submúltiplo de A y además que A es múltiplo de B.

Si, por ejemplo, consideramos que la magnitud A es el segmento CD y que la magnitud B es el segmento EF como se observa en las figuras

tenemos que



Ceja (2003) presenta la definición de magnitudes conmensurables del libro X de los Elementos de Euclides[13] como sigue:

Sean A y B dos magnitudes homogéneas, se dice que son conmensurables si A y B tienen una parte alícuota común; esto significa que existe una magnitud C, del mismo tipo que A y B, de modo que A=mC y B=nC donde m y n son números naturales y se podrían relacionar como sigue:

$$\frac{A}{B} = \frac{mC}{nC} = \frac{m}{n}$$

Por ejemplo, si se tienen tres segmentos A, B y C

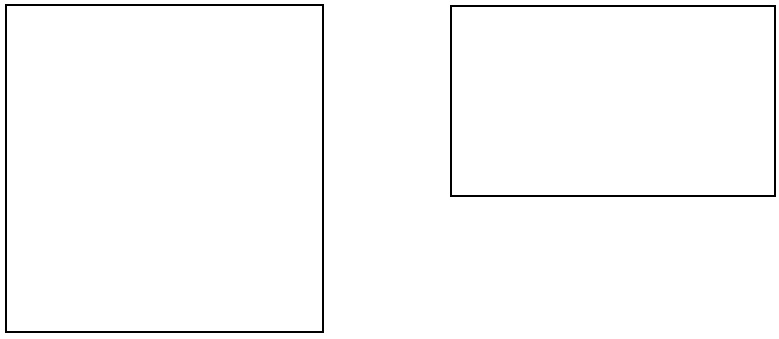
obsérvese que:

de donde A=3C, B=2C y por lo tanto, a la razón A/B se le asignará la razón numérica 3/2, con lo cual las magnitudes A y B resultan conmensurables.

Otro ejemplo con superficies sería:

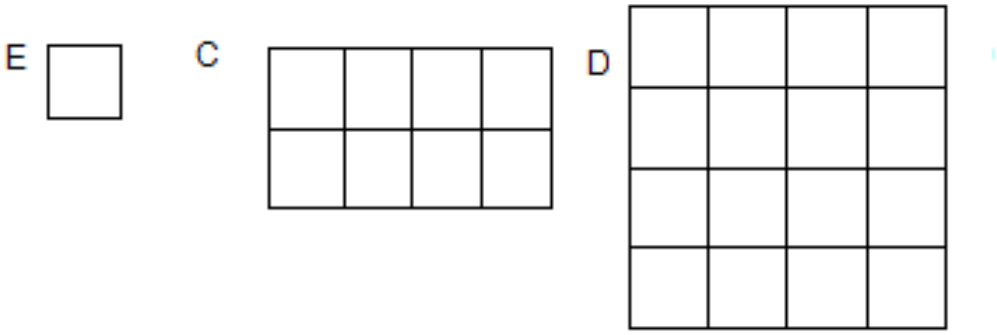
Se toman las superficies C y D (magnitudes de la misma especie)

C D



[13]"Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida y inconmensurables aquellas de las que no es posible hallar una medida común" Euclides, Elementos, libro X, definición 1.

y se tiene que E sirve de medida común a C y D como se observa en la siguiente figura



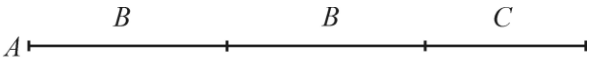
de donde se tiene que C=12E y D=8E, y por lo tanto la razón numérica asociada a C/D es 12/8 y las magnitudes son conmensurables.

Luego, si las magnitudes A y B son conmensurables, a ella puede asociarse una razón de números naturales de la forma m/n. Y si a la razón entre dos magnitudes A y B se les puede asociar una razón numérica m/n con m y n números naturales evidentemente las magnitudes son conmensurables

Ahora bien, cuando se dan dos magnitudes conmensurables y **una se escoge como unidad**, si esta cabe un número exacto de veces tendremos que la medida será un número natural, pero si no habrá que encontrar una "nueva" unidad. Este proceso debe terminar en un número finito de pasos, pues hemos supuesto que las magnitudes iníciales eran conmensurables. En Centeno (2008) encontramos una descripción de ese proceso donde las "unidades" se van partiendo adecuadamente, tomando el número de partes que conviene hasta encontrar la unidad buscada.

Por ejemplo, si se toman las magnitudes A y B donde B se selecciona como unidad

obsérvese que el segmento B es de menor tamaño que el segmento A, por lo cual podemos incluir a B en A tantas veces como se pueda. Este caso particular muestra que B cabe dos veces dentro de A, pero deja un restante: un segmento C que, como es natural, es menor que B.



$A = 2B+C \qquad 0<C<B$

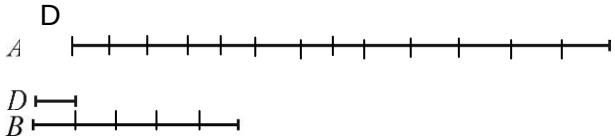
Podemos, por lo tanto, incluir a C dentro de B tantas veces como quepa, en este caso una que deja un remanente, un segmento D menor que C.

B=1C+D 0<D<C

Este proceso se podría realizar un numero finito *n* de veces, ya que si este proceso no termina no podríamos encontrar una unidad común que pudiera medir a las dos magnitudes A y B y diríamos que A y B son magnitudes inconmensurables.

Repetimos el procedimiento colocando D dentro de C las veces que sea posible, en este caso, cuatro, y vemos que ya no queda remanente ninguno.

En consecuencia, el segmento D es medida común de los segmentos A y B pues está contenido un número entero de veces en cada uno de ellos: 14 veces en el primero y 5 en el segundo, esto es *A=14D y B=5D*, como se observa a continuación:



Obteniendo así la relación entre A/B como 14/5.

Más precisamente, Centeno realiza el procedimiento seguido en los dos ejemplos anteriores, suponiendo que cualquiera que sea la naturaleza de una magnitud puede medirse con instrumentos de medida adecuados, una vez que se haya fijado una unidad. Y que si bien es cierto que en el campo de la medición de magnitudes la medida de una cantidad respecto de la unidad de la misma especie puede darse por un número natural, también puede ocurrir que la medida esté comprendida entre dos números naturales.

Para la descripción de este tipo de construcción didáctica, que permite sea usada para el aprendizaje del concepto de número racional en los niños, se asume que una magnitud M está conformada por cantidades $[a]$[14] y que la medida de ésta está determinada por la unidad μ, que es de la misma especie de a. Además, suponemos que existen cantidades a' para las cuales no existe un entero p tales

[14] Se le llama $[a]$ a la clase de equivalencia conformada por todas las cantidades a que pertenecen a la magnitud M cuya medida es la misma.

que $a' = \mu p$.

Entonces, se asumirá que la cantidad a' será igual a p veces μ más un resto γ que es más pequeño que μ.

Lo anterior se expresará como:

$$a' = p\mu + \gamma \quad y \quad 0 < \gamma < p$$

En seguida se asume que la unidad μ se puede dividir en un número *n* de partes iguales, esto es, que existe una cantidad x tal que:

$$nx = \mu \qquad \text{o} \qquad n[x] = 1$$

Donde tendremos un nuevo número que no es entero y que denominaremos $1/n$, con lo cual $[x] = 1/n$ donde n es el número natural tal que:

$$1/n + 1/n + \cdots + 1/n = 1/n * n = 1$$

Al igual se asumirá que μ/n mide a γ, por lo cual existe *q* tal que $\gamma = q\frac{\mu}{n}$.

Ahora ya se tiene que tanto *p* como *q* esta medidos mediante la unidad γ por lo cual se observa que

$a' = p\mu + \gamma$ y $n * \frac{\mu}{n} = \mu$ Sustituyendo

$a' = pn\frac{\mu}{n} + \gamma$ Remplazando γ con $q\frac{\mu}{n}$

$a' = pn\frac{\mu}{n} + q\frac{\mu}{n}$ Se obtiene

$a' = (pn + q)\frac{\mu}{n}$

Luego a' tiene por media $pn + q$ con respecto a la nueva unidad $\frac{\mu}{n}$; si tomamos $m = pn + q$ entonces, la cantidad $m\frac{1}{n}$ sería la medida de a' con la unidad $\frac{\mu}{n}$ y se designa como $\frac{m}{n}$.

A este símbolo que representa la medida de a' se le llama **razón** o **fracción** y se le considera un número.

Centeno (2008) al igual afirma que desde el punto de vista algebraico sólo quedaría definir operaciones apropiadas para con estos números tales como la suma y la multiplicación. Estas como es bien conocido están dadas por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad y \quad \frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Las operaciones están bien definidas dado que son compatibles con la relación de equivalencia definida por

$$\frac{a}{b} R \frac{c}{d} \; si \; y \; solo \; si \; ad = bc \; .$$

Con estas definiciones se puede demostrar que:

Dado un número racional m/n existe su inverso aditivo que se denota –m/n y su inverso multiplicativo que se nota n/m. Naturalmente

$0 = \left[\frac{0}{\mathrm{n}}\right] \; \mathrm{donde\,n} \; \in \mathrm{N}; \mathrm{n} \neq 0$, $1 = \left[\frac{n}{n}\right] \; donde \; n \; \in N; n \neq 0$

Así $\frac{m}{n} * \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$ y $\frac{m}{n} + \left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{mn-nm}{n^2} = \frac{0}{n^2} = 0$, gracias a las propiedades de la suma y la multiplicación en N.

Igualmente, las operaciones de sustracción y división se obtienen como las operaciones inversas de la adición y multiplicación respectivamente.

Se tiene entonces que con esta forma de construir los números racionales se proporciona una definición que hace posible la existencia de números “obtenidos de medidas”. No obstante, esta definición se apoya en la geometría y en la intuición geométrica de la posibilidad de hacer indefinidamente subdivisiones de la unidad.

En realidad, esta no es una construcción formal desde el punto de vista estrictamente matemático, sin embargo, desde el punto de vista histórico vale la pena señalar que la noción de número racional de los griegos que prevaleció en la antigüedad procedía de la intuición geométrica que proporciona la medida.

3.2. Construcción Matemática de los Números Racionales

3.2.1. Construcción de racionales a partir de relaciones de equivalencia[15]

Modelo Algebraico

En la sección anterior se presentó una manera de generar números racionales desde una perspectiva geométrica basada en la medida de magnitudes. Ahora se presentará una construcción de tipo algebraico.

Para empezar, se debe observar que en los números naturales N la sustracción no siempre es posible. Para superar esta dificultad se construyen los números enteros Z como conjunto numérico que amplía a los naturales y en el que todas las ecuaciones que tengan la forma $a + x = b$ con a y b como elementos de N, tengan solución, particularmente tienen solución aquellas en las cuales b < a. Con esto la resta b-a queda definida como un numero entero *-(a-b),* donde; *a-b =a + (-b).*

De la misma forma que la sustracción se define en términos de la adición la ecuación $a + x = b$ es equivalente a $x = b – a$ también podemos definir la división en términos de multiplicación la ecuación $b \cdot x = a$ es equivalente a $x = a \div b$. donde se define *a/b* como *a*1/b*

Del mismo modo, en los números enteros (Z) la división no es siempre posible, basta observar que las ecuaciones de la forma $b \cdot x = a$ con *a y b* elementos de Z y *b* distinto de 0, sólo tienen solución cuando *a* es múltiplo de *b*. Para eliminar este defecto se construye un conjunto más amplio que el de los enteros en el que la división sea siempre posible con la condición de que *b* sea siempre distinto de 0.

Por ejemplo, en la ecuación $2 \cdot x = 3$, x es el número que multiplicado por 2 da 3 y por tanto x es cociente de 3 por 2 y podemos representarla por el símbolo *3/2*,que llamaremos fracción. El cociente *a/b* es solución de la ecuación $b \cdot x = a$ y cada fracción representa un número en el nuevo conjunto. Sin embargo, los números de este conjunto no son simples fracciones, sino familias de fracciones, puesto que muchas fracciones pueden representar el mismo número. De esta manera se puede asociar cada fracción con una familia de fracciones de acuerdo con la siguiente regla:

Dada la fracción $\frac{a}{b}$ con *b* distinto de 0, están asociadas todas las fracciones de la forma $\frac{v}{u}$ con *u* distinto de 0, tales que $\frac{a}{b} = \frac{v}{u} \leftrightarrow a * u = v * b$ y será denotada como $\left[\frac{a}{b}\right]$.Así pues, $\left[\frac{a}{b}\right]$ es una familia de fracciones a la que se le llama número racional; en otras palabras, la clase de las fracciones equivalentes a $\frac{5}{3}$ denotada como $\left[\frac{5}{3}\right]$ es la que define a un número

[15] La clasificación de estas construcciones se tomaron con referencia a Centeno (1988)

racional. Entonces se debe entender que $\frac{5}{3}$, no es en sí mismo un número racional sino un representante de la clase $\left[\frac{5}{3}\right]$, la cual define propiamente al número racional. Por otra parte, cabe aclarar que como el par de números que conforman la fracción $\frac{5}{3}$ son primos relativos, a este representante se le llama fracción irreducible. Generalmente la fracción irreducible es el representante más utilizado para referenciar a una clase, sin embargo es bueno enfatizar que éste no es el único representante de la misma.

Para hacer operativa a esta familia de clases de equivalencia, es decir, al conjunto de los racionales denominado con la letra Q, las operaciones de adición y multiplicación se pueden definir así:

- [a/b] + [c/d] = [(ad + cb)/bd]

- [a/b] * [c/d] = [ac/bd]

Que como las operaciones son compatibles con la relación de equivalencia entre las fracciones estas son independientes del representante escogido, se tiene en realidad que *a/b + c/d = (ad + cb)/bd*

En resumen, al observar que los enteros eran insuficientes, para resolver cierto tipo de ecuaciones, mediante la construcción presentada se ha obtenido un conjunto en el que la división es posible, y por tanto, todas las ecuaciones de la forma *b x = a* tienen solución en Q porque el cociente a/b es un número.

3.2.2.Construcción de los decimales

Actualmente existen distintas formas de construir los decimales. Algunas de ellas son las siguientes:

- Construcción basada en una extensión de los números naturales.

- Construcción pasando por la construcción de los racionales.

En los siguientes apartados daremos algunos detalles relativos a estas construcciones.

3.2.2.1. Construcción de decimales como extensión de los naturales

Una forma de construir los números decimales consiste en encontrar las soluciones de la ecuación $[10^n \cdot x = a]$, siendo *a* un número entero y n un número natural. La clase del par (a, n) se escribe $[a/10^n]$, y es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a la fracción $a/10^n$, a las que se le llamará número decimal. Por ejemplo, una solución para la ecuación $100 \cdot x = 6$ es 6/100, que lleva a la clase del par (6, 2) que pertenece a la clase de equivalencia $[6/10^2]$.

Entonces, se tiene que el conjunto de los números decimales, que se denominará con la

letra D, es el conjunto de las familias de clases de equivalencia determinada en el conjunto Z x N por los representantes de la forma $a/10^n$.

Donde la relación de equivalencia R está definida por:

(*a, n*) R (*b, p*) si sólo si *a · 10p = b · 10n* donde *a y b* son enteros y *n y p* naturales.

Las operaciones se definen así:

$(a, n) + (b, p) = (a \cdot 10n + b \cdot 10p\ ,\ n+ p)$para la adición

y $(a, n) \cdot (b, m) = (a \cdot b,\ n \cdot m)$ para la multiplicación

junto con el orden definido como:

$(a, n) \leq (b, p)$ si sólo si $a \cdot 10p \leq b \cdot 10n$

prolongan las del conjunto de los naturales, y hacen posible verificar que D tiene una estructura de anillo conmutativo, unitario, íntegro y totalmente ordenado.

3.2.3. Construcción de los decimales pasando por la construcción de Q

La idea en este caso es la de la de realizar la construcción por restricción. Es decir, una vez definida la estructura general de los racionales, basta con limitarse a tomar solo una parte de sus elementos, para este caso los decimales son los racionales que pueden escribirse en la forma de fracción decimal. Es decir de la forma $\frac{a}{10^n} con\ a, n\ \in\ N$.

3.3. Cambio de representación en los racionales.

Para realizar los diversos cambios de la representación fraccionaria a decimal o viceversa se deben realizar cierto tipo de operaciones o algoritmos las cuales se presentarán a continuación:

3.3.1. De Fracción a Decimal

Si se tiene una fracción y se requiere pasar a decimal el proceso a realizar más inmediato es el de **dividir el numerador entre el denominador**, de esta manera el cociente obtenido entre estos dos números será el decimal equivalente a la fracción dada. Sin embargo existe otra técnica si la fracción es decimal (su denominador es una potencia de 10), la cual consiste en el **conteo de cifras y movimiento de la coma**.

3.3.1.1. Conversión mediante la división

El Algoritmo de la división

Para el proceso de conversión de fracción a decimal es necesario realizar la división y es por ello que antes de continuar se explicará de cómo surge este algoritmo.

Sea el número $\frac{3}{7}$ el cual se desea convertir a decimal mediante la division por lo cual tendriamos que:

$\frac{3}{4} = \frac{3*10}{4*10}$	$Multiplicando\ por\ 1$
$\frac{30}{4*10} = \left(\frac{30}{4}\right) * \frac{1}{10}$	Este proceso se realiza con el fin de buscar que el numerador sea mayor que el denominador, pensando en la noción básica de reparto
$\left(\frac{4*7+2}{4}\right) * \frac{1}{10} = \left(7 + \frac{2}{4}\right) * \frac{1}{10}$	Al repartir 30 entre 4 daría 7 y un resto de 2, luego se simplifica
$\frac{7}{10} + \frac{2}{4*10} = 0{,}7 + \frac{2}{4} * \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{10} + \frac{2}{40}$	En este caso ya se tiene una fracción decimal y faltaría repetir el mismo procedimiento anterior con la fracción $\frac{2}{40}$.
$\frac{2}{40} * \left(\frac{10}{10}\right) = \frac{20}{4} * \left(\frac{1}{100}\right) = (5) * \frac{1}{100} = \frac{5}{100}$	Realizando el procedimiento anterior
$\frac{4}{10} + \frac{5}{100}$	Dando así fracciones decimales
0,4+0,05	Convirtiendo la fracción decimal a decimal
$\frac{3}{4} = 0{,}45$	Dando así la división

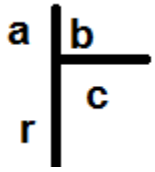
Es válido anotar que el algoritmo de la división se debería pensar como una operación inversa a la multiplicación, donde si la multiplicación se da como una suma reiterada la división se daría como una resta reiterada, pensado en los repartos de una cantidad determinada.

Este proceso de conversión mediante la división es válido para cualquier tipo de fracción sea fracción decimal o no. Al realizar la división se puede dar que el cociente tenga

como resultado un número decimal finito, un número decimal infinito periódico[16], a continuación se explicará cada una de estas posibilidades:

- **Decimal finitos (no periódicos)**

Esto indica que si tengo la fracción $\frac{a}{b}$ al realizar la división $a \div b$ como sigue



$$c \in N \; y \; r = 0$$

Cabe indicar que al nombrar a *c* en los naturales no se excluye a *c* de la representación en decimal ya que este tiene como cifra periódica en su parte decimal el 0. De allí que todo número natural o entero se puede expresar como un decimal con la cifra 0 periódica en su parte decimal. Por ejemplo:

$$3 = 3{,}00000000 \ldots\ldots = 3{,}\hat{0}$$

$$4{,}5 = 4{,}50000000 \ldots\ldots = 4{,}5\hat{0}$$

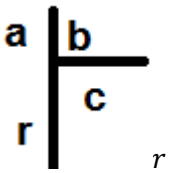
Este tipo de números se llaman decimales finitos

Este caso se da cuando el numerador cabe exactamente n veces en el denominador es decir cuándo $x \times a = b$ y x es un número natural.

Esto se da debido a que si el denominador tiene como factor(es) primo(s) al 2 y/o de 5 ya que con este este puede llegar a formar potencias de 10. De lo contrario no podrían dar en su residuo 0.

- **Decimal infinito periódico.**

Esto indica que si tengo la fracción $\frac{a}{b}$ al realizar la división

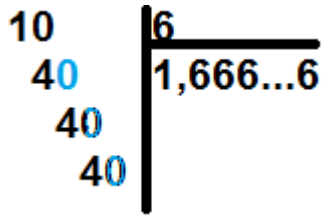


r *se repite indefinidamente y c en su parte decimal se repite indefinidamente una o varias cifras*

Esto indica que llega un momento al realizar la división en la cual el residuo se repite cíclicamente por lo cual una o varias cifras en el cociente se repetirá. Por ejemplo:

[16] También esta el caso en que se encuentren con decimales infinitos NO periódicos, pero este caso no es abordado debido a que este tipo de números pertenecen a los Irracionales.

Tomemos la fracción $\frac{10}{6}$ $esto\ dará$



Donde el residuo 40 y el número 6 en el cociente se repiten indefinidamente.

Las fracciones que dan mediante la división números decimales infinitos periódicos tiene la característica que su denominador está compuesto por números primos diferentes a 2 y/o al 5[17].

3.3.1.2. Conversión mediante conteo de cifras y movimiento de la coma

Esta técnica es utilizada única y exclusivamente para las fracciones decimales (denominador es potencia de 10), este proceso consiste en:

a) Colocar el número que está en el numerador
b) Contar la cantidad de 0´s que hay en el denominador
c) Correr la coma tantas veces como 0´s exista en el número.

Veamos un ejemplo:
Si se tiene la fracción decimal $\frac{853}{100}$ al convertirlo a decimal aplicando los pasos anteriores daría:

a) Colocar el número que está en el numerador

853

b) Contar la cantidad de 0´s que hay en el denominador

$\overline{100}$ $dos\ ceros$

c) Correr la coma tantas veces como 0´s exista en el número

8,53

Dando así la conversión de $\frac{853}{100} = 8{,}53$

En muchas ocasiones no se da tan explícito el hecho que la fracción sea decimal ya que es mediante la amplificación o simplificación por la cual se pueden obtener dichas

[17] Esto será explicado más adelante cuando se aborde otra metodología para convertir a decimal mediante conteo y movimiento de la coma.

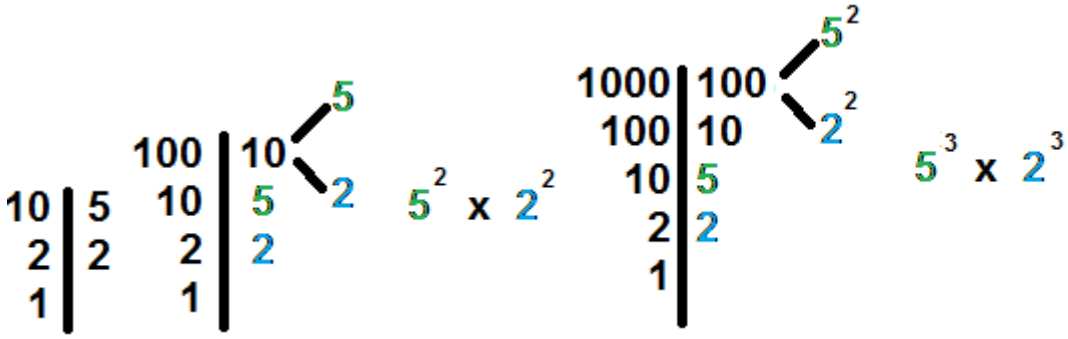
fracciones, es por ello que puede existir una forma de conocer si una fracción es decimal o no mediante su descomposición en factores primos.

Observe la fracción $\frac{3}{2}$ esta NO es una fracción decimal ya que su denominador no es una potencia de 10, sin embargo existe la posibilidad mediante la amplificación en convertirla a fracción decimal, veamos:

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{10}$$

Y al aplicarle la técnica vista daría $\frac{15}{10} = 1{,}5$ en donde se ha convertido la fracción $\frac{3}{2}$ en decimal sin aplicarle el algoritmo de la división.

De allí surge la pregunta acerca de cómo saber si una fracción dada puede convertirse en una fracción decimal. Como ya se mencionó anteriormente las fracciones decimales tienen como denominador potencias de 10, si se descompone cualquier potencia de 10 en sus factores primos esto daría:

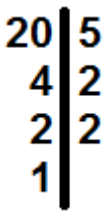


$$10^1 = 5^1 \times 2^1 10^2 = 5^2 \times 2^2 10^3 = 5^3 \times 2^3$$

Como se puede observar todas las potencias de 10 estarían compuestas de los factores primos 2 y 5 elevados a la misma potencia que el 10 donde

$$10^n = 2^n \times 5^n$$

Por lo cual para identificar si una fracción en o no una fracción decimal, se debe descomponer el denominador en sus factores primos y si estos están compuestos únicamente de potencias de 2 y/o de 5, estos se pueden convertir a fracciones decimales mediante la amplificación o simplificación, Observe el siguiente ejemplo:



$\frac{3}{20}$ Es una fracción decimal ya que si descomponemos su denominador este está compuesto por potencias de 2 y/o 5. Para este caso se tiene que $20 = 2^2 \times 5^1$ lo que indica que para convertirlo en potencia de 10 faltaría multiplicar por 5 a toda la fracción, esto con el fin de cumplir que $10^n = 2^n \times 5^n$, para este caso quedaría $10^2 = 2^2 \times 5^2$, por lo cual se amplifica la fracción obteniendo:

$$\frac{3}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

Dando de esta manera la conversión de la fracción.

3.3.2.De Decimal a Fracción

Si se tiene un decimal y se quiere convertir a fracción es necesario primero identificar el tipo de decimal que se tiene, este decimal puede ser:

- Decimal finito (no periódico)
- Decimal periódico infinito
- Decimales infinitos NO periódicos[18]

3.3.2.1. Conversión de decimales finitos a fracción

Para los decimales finitos solo es necesario realizar el proceso opuesto al trabajado cuando se da una fracción decimal, este proceso consiste en:

a) Cuente cuantos cifras hay desde la coma al último digito a la derecha
b) Coloque el número decimal sin coma como el Numerador
c) En el denominador coloque un 1 seguido de tantos 0´s como espacios haya contado anteriormente.
d) Simplifique la fracción si así lo requiere

Mirémoslo a través de un ejemplo

Convierta 3,45 en Fracción

a) Cuente cuantos cifras hay desde la coma al último digito a la derecha
3,45 dos cifras después de la coma

b) Coloque el número decimal sin coma como el Numerador

$$345$$

c) En el denominador coloque un 1 seguido de tantos 0´s como espacios haya contado anteriormente.

$$\frac{345}{100}$$ Dos espacios por lo tanto se colocan 2 ceros

d) Simplifique la fracción si así lo requiere

$$\frac{69}{20}$$

De esta manera se pueden convertir los decimales finitos en fracciones

3.3.2.2. Conversión de decimales infinitos periódicos a fracción

[18] Estos decimales son utilizados para representar los numero Irracionales y no serán tenidos en cuenta para este trabajo

Para convertir los decimales periódicos infinitos a fracciones se utilizan las ecuaciones como una herramienta en el proceso, es importante clasificar el decimal periódico infinito mediante a la posición del período en el decimal ya que según esta posición se modifica el proceso en las ecuaciones a realizar.

Los decimales periódicos infinitos se pueden clasificar según la posición del período en:

- Decimales con el período pegado a la coma: $3,\hat{4}$
- Decimales con el período despegado de la coma: $3{,}2\hat{5}$

A continuación se propone un ejemplo con cada uno de estos decimales con el fin de mejor manera el proceso.

Decimales con período pegado a la coma.

Convierta $3,\hat{4}$ a fracción

Sea $x = 3,\hat{4}$	Tomamos la variable x como la fracción equivalente al número decimal dado.
$10x = 3,\hat{4}$	Se multiplica en este caso por 10 a ambos lados de la ecuación, esto dependerá de la cantidad de cifras que tenga como período el número decimal. Si el número fuese $3,\widehat{45}$ se debe multiplicar por 100.
$10x = 3,\hat{4}$ $x = 3,\hat{4}$	Se colocan las ecuaciones obtenidas en un sistema de ecuaciones, con el fin operar las variables y operar los números
$10x = 3,\hat{4}$ $-\quad x = 3,\hat{4}$ $9x = 3$	Se resta la ecuación de arriba de la de abajo, el objetivo de esto es precisamente eliminar el período.
$x = \frac{3}{9}$	Se despeja el valor de la x
$x = \frac{1}{3}$	Se simplifica si es que lo requiere
$3,\hat{4} = \frac{1}{3}$	Completando la conversión

Decimales con el período despegado de la coma

Convierta $3{,}262\widehat{53}$ en fracción

Sea $R1$: $x = 3{,}262\widehat{53}$	Tomamos la variable x como la fracción equivalente al número decimal dado.
$R2$: $1000x = 3262,\widehat{53}$	Se multiplica en este caso por 1000 a

	ambos lados de la ecuación[19], esto dependerá de la cantidad de cifras que este separado el período de la coma. Si el número fuese $3{,}2\widehat{45}$ se debe multiplicar por 10.
$R2: \quad 1000x = \quad 3262,\widehat{53}$ $R3: \quad 100000x = 326253,\widehat{53}$	Basándose en la ecuación obtenida R2 se genera otra ecuación R3 multiplicando en este caso por 100, ya que ya dos cifras en el período. Si el número tuviera 3 cifras se multiplicaría por 1000. El objetivo es que queden dos ecuaciones con el mismo período
$R3: \quad 100000x = 326253,\widehat{53}$ $R2: \quad 1000x = \quad 3262,\widehat{53}$ $99000x = 322991$	Se resta la ecuación R3 (la mayor) de R2 (la menor), el objetivo de esto es precisamente eliminar el período.
$x = \frac{322991}{99000}$	Se despeja el valor de la x
$3{,}262\widehat{53} = \frac{322991}{99000}$	Completando la conversión

Generalización

Observe que si:

Se tiene dos cifras decimales en el período habrá dos nueves (99) en el denominador de la fracción
Se tiene tres números entre la coma y el período habrá tres ceros (000) en el denominador de la fracción

[19] Recuerde que se multiplica por 10^n siendo *n* la cantidad de espacios que hay desde la coma hasta el período

El numerador de la fracción es igual a la resta entre el número completo y el número hasta el período
Por lo tanto se puede generalizar de la siguiente manera Toda expresión decimal periódica infinita puede representarse como una fracción en donde el denominador posee un nueve por cada cifra que tenga en el período, estos seguidos de un 0 por cada cifra que hay entre la coma y el período, y el numerador es la diferencia del número completo omitiendo la posición de la coma y el período menos el número sin el período. Perilla (1996) $1,2\overline{3456} = \frac{123456 - 123}{99900}$

4. Propuesta de Actividades

En esta parte del documento se realiza una propuesta para el manejo de la conversión de decimal a fraccionario y viceversa en el aula de clase, tomando como base lo desarrollado en los capítulos anteriores, con el fin de fundamentar una propuesta completa, en el sentido de tener todos los elementos necesarios para que el docente de grado 7 de matemáticas, pueda abordar este contenido con los elementos suficientes para la enseñanza.
La propuesta estará dividida en los siguientes talleres:

Taller 0 Preconceptos

Taller 1 Conversión de Fracción a Decimal

Taller 2 Conversión de Decimal a Fracción

Taller 3 Aplicaciones de las Conversiones[20]

A continuación se dará una guía paso a paso para que el docente desarrolle las actividades con los estudiantes, guiándolo en el proceso de conversión de la manera más adecuada basándose en los elementos conceptuales mencionados en los capítulos anteriores.

4.1. Guía del Docente

4.1.1. Taller 0

Preconceptos

Este taller tiene como objetivo revisar y fortalecer los conceptos previos que debe manejar el estudiante para el proceso de conversión de racionales. Es de suma importancia que realice este tipo de ejercicios con los estudiantes para garantizar de una manera efectiva que se pueda realizar los diversos procesos o procedimientos para la

[20] Los talleres para aplicar a los estudiantes se encuentran en los Anexos A, B, C y D respectivamente.

conversión.
Los preconceptos sé que requieren serán:

- Algoritmo de la División
- Escritura de los números decimales
- Potenciación
- Manejo fracciones equivalentes
- Conversiones previas

Algoritmo de la División

El ejercicio que se le dará al estudiante es el siguiente:

Realiza las siguientes divisiones:

$3/4$	$2/5$	$5/3$	$2/8$	$3/8$
$12/5$	$14/4$	$21/7$	$16/4$	$7/3$
$52/4$	$123/14$	$326/16$	$1276/42$	$3452/42$
$1673/45$	$35/416$	$15/422$	$3287/75$	$324/44$

En este punto el estudiante debe realizar el algoritmo de la división en cada uno de los puntos solicitados; dentro de estos puntos se pueden identificarlas siguientes dificultades:

- Posición de la coma al realizar la división
- Dificultades en el proceso de encontrar el divisor
- Identificar la división no como elemento de conversión sino como una operación sin un objetivo específico (esto se evidencia si utilizan el residuo).
- Cabe indicar que es importante que el docente se dé cuenta que la conversión se maneja de forma diferente si se tiene una fracción a/b donde a>b y otra donde a<b[21]

Escritura de números decimales

En este segundo punto se le solicita al estudiante que lea y escriba cantidades numéricas para ello se le dará un ejemplo para que se pueda guiar, el ejemplo dado al estudiante es:

235,34: doscientos treinta y cinco enteros treinta y cuatro centésimas
Se espera que el estudiante lo escriba de esta manera sin embargo algunos estudiantes pueden darle solución como doscientos treinta y cinco coma treinta y cuatro, se espera que el docente direccione al estudiante a que este lo escriba como el ejemplo dado.

[21] Es importante que observe los errores relacionados en el capitulo 1 de este escrito ya que basados en ellos se pudieron plantear los ejercicios plasmados en la secuencia de actividades.

Los ejercicios planteados el estudiante son los siguientes:

164,2	2504,03	54376,76	231,009
2043,030	4304,0201	302,006	27648,5001
5007,0002	40021,603	403,003	3201,040

Este punto tiene la intención que el docente identifique las dificultades en el sistema de numeración decimal. Estas dificultades están relacionadas con:

- Sistema de Numeración Decimal
- Descomposición de un número
- Identificación de la parte decimal

Potenciación

Al estudiante se le solicitará realizar los siguiente ejercicios:

Resuelve

10^3	4^3	10^1	3^2
5^3	10^0	1^4	5^0
4^0	1^3	10^2	6^1
4^1	0^0	10^2	0^3
2^0	10^{10}	10^5	1^3

En este ejercicio se le solicita al estudiante realizar procesos de potenciación, ya que para el adecuado manejo de los números decimales se debe hacer énfasis en que estos números emergen a partir de las potencias de 10. Los estudiantes pueden tener dificultades al:

- Realizar operaciones con el 0 ya sea como base o como potencia
- Multiplicar la base con el exponente en cambio de realizar la potenciación.

Fracciones equivalentes

Al estudiante se le presentaran los siguientes ejercicios:

Amplifica las siguientes fracciones

$\frac{4}{8}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{5}$

$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{30}{6}$

Simplifica las siguientes fracciones

$\frac{10}{8}$	$\frac{24}{2}$	$\frac{48}{3}$	$\frac{22}{4}$
$\frac{18}{60}$	$\frac{58}{86}$	$\frac{786}{968}$	$\frac{286}{12}$
$\frac{54}{9}$	$\frac{288}{84}$	$\frac{48}{26}$	$\frac{36}{58}$
$\frac{300}{1600}$	$\frac{200}{6000}$	$\frac{14000}{354320}$	$\frac{30000}{6500}$

En el desarrollo de este ejercicio se le solicita al estudiante realizar amplificaciones y simplificaciones de diversas fracciones, esto se realiza con el fin de poder identificar fracciones reducibles a su mínima expresión, ya que con este tratamiento al estudiante se le facilita el proceso de conversión a decimal.

Generalmente cuando se le solicita al estudiante simplificar, puede tener inconvenientes al identificar los posibles divisores comunes entre el numerador y el denominador. Las dificultades que el estudiante puede presentar están relacionadas con:

- Identificación de divisores comunes
- Valor relativo del 0
- Descomposición de un número en sus factores primos

Conversiones

Para este punto se le dará algunas indicaciones al estudiante antes de desarrollarlos ejercicios, estas indicaciones son las siguientes:

Observa:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{5}{10^0} = \frac{5}{5^0} = \frac{5}{2^0} = 5{,}0 = 5{,}000 = 0{,}5\text{x}10^1 = 0{,}05\text{x}10^2$$

Se pueden encontrar muchas formas de escribir el número 5 entre ellas como fracción, como fracción decimal, como fracción con denominador con potencia 0, como número decimal, como expresión científica.

Por lo cual se puede llegar a la conclusión que pueden existir varias representaciones de un mismo número.

A continuación de las indicaciones se le solicita al estudiante desarrollar el siguiente

ejercicio:

Expresa en diferentes representaciones el número dado.

Número Natural	con denominador 1	Denominador 10^0	El denominador igual al numerador elevado a la cero	Denominador elevado a la 0	Con una cifra decimal 0	Con varias cifras decimales en 0	Elevado a la 10^1	Elevado a la 10^2
3								
	$\frac{4}{1}$							
		$\frac{8}{10^0}$						
			$\frac{9}{9^0}$					
				$\frac{18}{3^0}$				
					14,0			
						23,0000		
							$4{,}2\text{x}10^1$	
								$4{,}36\text{x}10^2$

En este proceso se quiere que el estudiante sea capaz de convertir un número racional en diferentes tipos de representación, Esto según Duval (1999a) entre más representaciones se tenga de un objeto matemático, será mucho más asequible que el estudiante comprenda este objeto.

El punto tiene como finalidad que el estudiante pueda establecer diferentes equivalencias entre los números, tratando de identificar el sistema de numeración decimal. El estudiante puede llegar a tener dificultades relacionadas con:

- Identificación del valor relativo y valor posicional de un número
- Potenciación e identificación de la equivalencia de un número elevado a la 0
- Posicionamiento de la coma al trabajar con potencias de 10
- Identificación del 0 periódico en cualquier número dado.

6. Ecuaciones

Allí se le dará la siguiente instrucción a realizar al estudiante:

Encuentre el valor de la incógnita en cada una de las ecuaciones planteadas

$2x = 10$	$5x + 3 = 4$	$4x + 3 = 8$
$10x - 3 = 8x + 2$	$4x + 4 = 4 - 4x$	$3x + 5 = 8$
$8x - 4 = 4x + 5$	$4x + 3 = 8x + 2$	$3x - 4x + 4 = 5x + 3x + 3$

Este punto tiene como finalidad establecer las diferentes dificultades que tienen los

estudiantes al manejar ecuaciones, ya que este procedimiento es de gran importancia en el paso de decimal periódico infinito a fracción.

Los estudiantes pueden llegar a tener dificultades relacionadas con:

- Despeje de ecuaciones incorrecto
- Suma de variables con valores
- Cambio de signo al pasar de un lado de la igualdad a otro

4.1.2. Taller 1

De Fracción a Decimal

La intensión con el taller 1 es la de que el estudiante realice el proceso de conversión de fraccionario a decimal. Como las fracciones se pueden dar en fracciones decimal y no decimales los procesos para cada una de ellas puede variar, sin embargo existe la posibilidad que el estudiante siempre utilice la división como procedimiento para poder realizar dicho cambio.

La intención del docente será pues la de que el estudiante no solo se quede haciendo un proceso algorítmico como el de la división sino que indague y profundice con los estudiantes los diferentes tipos de formas de presentar los racionales, para luego si escoger el procedimiento que más se adecue a la conversión solicitada.

Muchas veces el docente no profundiza en el objeto matemático (número Racional) y tan solo se queda en procedimiento de tipo algorítmico en el cual el estudiante no tendrá ninguna dificultad adicional que es la de seguir unas reglas y unos lineamientos para obtener la finalidad (en este caso el de la conversión) es por ello que se le sugiere al docente inicialmente abordar este tipo de contenido mediante la identificación de fracciones y luego si abordar los procedimientos para tener un existo en la enseñanza de este tópico.

El proceso de conversión de fracción decimal a decimal es uno de los más sencillos, ya que lo que el estudiante realiza se basa en el algoritmo de la división, entre el numerador y el denominador. Algunos errores que pueden tener los estudiantes están relacionados con la posición de la coma, y la cantidad de ceros antes o después de la coma.

A continuación se propone que el estudiante observe una división, donde tendrá que comparar y diferenciar entre fracciones decimales y las que no son decimales. Se puede ver que con las fracciones que no son decimales los números decimales darán diferentes, tratando que el estudiante pueda establecer una relación entre la coma y el número.

Identificación de una Fracción Decimal

Inicialmente se conceptualiza la noción de fracción decimal mediante el siguiente cuadro:

Se llama Fracción Decimal a toda fracción cuyo denominador es una potencia de 10

Ejemplos:

$$\frac{15}{1000}, \frac{23}{10}, \frac{123}{100}, \frac{67}{100000}$$

Luego se le solicitará que realice el siguiente ejercicio:

De las siguientes fracciones encierre con un círculo cuales son fracciones decimales

$\frac{23}{1000}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{50}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{12}{10000000}$	$\frac{2343}{10}$	$\frac{10}{100}$

Mediante la conceptualización dada en el recuadro se espera que el estudiante logre identificar claramente las fracciones decimales, algunas dificultades que se pueden presentar pueden estar relacionadas con:

- Identificación del numerador y denominador en una fracción
- Identificación de una potencia de 10, aquí los estudiantes pueden confundir las potencias de 10 con los múltiplos de 10.

Algunos estudiantes pueden amplificar la fracción para convertirla en fracción decimal, sin embargo realice el énfasis que solo les pide identificar, más no transformarlas en fracción decimal. Eso se verá más adelante

Fracción Decimal a Decimal

A continuación se le solicita al estudiante que observe algunas conversiones como las siguientes:

a) $$\frac{2}{10} = 0{,}2$$

Aquí se convierte a decimal $\frac{2}{10}$ mediante la division en 0,2 observe que es una fracción decimal y los elementos que están en la fracción están también en el decimal, el 0 y el 2.

En este punto es interesante plantearle al estudiante la relación de equivalencia entre la fracción y el decimal. Esto lo podría realizar mediante preguntas como:

- ¿Tiene algo en común la fracción decimal del número decimal?
- ¿Qué elementos tienen en común?
- ¿Qué tipo de relación puede existir entre la coma y la cantidad de 0 en el decimal?

Trate de establecer un dialogo entre sus estudiantes para que ellos se den cuenta de las equivalencias entre las dos representaciones.

b)

$$\frac{53}{4} = 13{,}5$$

En el siguiente ejercicio se le coloca una fracción cuyo denominador no es una potencia de 10 (fracción NO decimal), esto con la intensión que el estudiante realice la conversión mediante el algoritmo de la división, y se pueda observar que allí no existen elementos significantes[22] entre la representación en fracción y la del decimal, ya que $\frac{53}{4}$ al convertirse en decimal da como resultado 13, 5.

c)

$$\frac{524}{100} = 5{,}24$$

En este ejercicio se le muestra una fracción decimal a diferencia del primer ejercicio aquí se le maneja el denominador más cantidad de ceros, de nuevo se le pedirá hacer la conversión y en esta ocasión el estudiante empieza a relacionar la cantidad de ceros con la cantidad de espacios de la coma, esto ayudara a realizar un proceso aún más rápido. Aquí es necesario tener en cuenta la cantidad de ceros colocolo en antes de la coma, ya que pueden equivocarse. El estudiante establece de nuevo una relación de correspondencia entre las unidades significantes.

d)

$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

Se le solicita al estudiante que realice la conversión, aquí el estudiante espera utilizar la relación entre la coma y el cero, dando como posible resultado 3,4 sin embargo se debe dar cuenta que esta no es una fracción decimal. Por lo cual utilizará la división para convertirlo.

2. **Argumentación del procedimiento de cambio**

[22] La palabra elemento significante NO hace parte del vocabulario que el estudiante, se menciona con el fin de que el docente maneje la teoría que esta inmersa en el proceso de conversión.

En el siguiente punto se le solicita al estudiante que escriba el procedimiento observado cómo sigue en la instrucción:

Describa cual es la diferencia entre los ejercicios a y c con respecto a los ejercicios b y d al observar la conversión de fracción a decimal:

……...……
……..……
……..……
…….……

En esta parte el estudiante debe dar cuanta de los elementos significantes equivalentes que existen de una representación a otra, guíelo para que el (la) se dé cuenta de la existencia de estas equivalencias.

Identificación de Fracciones Decimales

El ejercicio siguiente esta dado para que el estudiante identifique de las fracciones decimales, el ejercicio se presenta de la siguiente manera:

De las siguientes fracciones encierre con un círculo cuales se pueden pasar a expresión decimal sin efectuar la división:

$\frac{23}{1000}$ $\frac{12}{21}$ $\frac{3}{13}$ $\frac{10}{3}$ $\frac{24}{55}$ $\frac{2343}{10}$

$\frac{1}{100}$ $\frac{12}{10000000}$

Para complementar el ejercicio de identificación de fracciones decimales se propone el ejercicio de encerrar las fracciones decimales, esto con el fin de asegurarse que el estudiante comprenda la noción que se quiere dar.

Convertir una fracción decimal a expresión decimal

Para el desarrollo de este punto se le da la siguiente indicación al estudiante:

Observe la conversión realizada de fracciones decimales a decimales en los siguientes ejercicios.

a) $$\frac{21}{100} = 0{,}21$$

b) $$\frac{21}{1000} = 0{,}021$$

c) $$\frac{21}{10000} = 0{,}0021$$

Al estudiante se le debe hacer énfasis en la posición de la coma del decimal y la cantidad de ceros en el denominador de la fracción en cada uno de los ejercicios planteados, Además el docente debe enfocar al estudiante que este procedimiento se realiza para fracciones decimales. Este ejercicio le permite apropiarse de la regla al estudiante e identificar las fracciones decimales.

Argumentación del algoritmo de conversión

En esta parte se le propone al estudiante que argumente un método para la conversión de fracción decimal a decimal. El enunciado de este punto se describe de la siguiente manera:

Proponga un método para pasar de fracción decimal a decimal sin tener que realizar la división

……..……
……..……
……..……
……..…….

El objetivo de este punto es que el estudiante pueda escribir[23] con sus propias palabras un método para la conversión, guíelo para que esta metodología sea la indicada.

A continuación se formaliza el algoritmo para esta conversión

*Para convertir una **fracción decimal** a expresión decimal colocamos la coma en el numerador contando tantas cifras decimales como ceros en el denominador, ejemplo:*

$$\frac{15}{1000} = 0{,}015$$

Este paso se llama institucionalización según la teoría de situaciones de Brouseau (1980), y permite generalizar un concepto dado por cada individuo.

Ejercitación de fracción decimal a decimal

[23] Al solicitarle al estudiante que escriba se fuerza a pueda desarrollar competencias argumentativas, ya que debe proponer un método adecuado, mediante la observación y generalización

El estudiante debe realizar las siguientes conversiones:

Fracción decimal	Decimal
$\frac{23}{1000}$	
$\frac{12}{10}$	
$\frac{213}{10}$	
$\frac{213}{1000}$	
$\frac{2343}{10}$	
$\frac{12}{10000000}$	

En este ejercicio se presentan fracción decimales y se le solicita al estudiante que realice la conversión a decimal, sin efectuar el algoritmo de la división, teniendo en cuenta que en ejercicios anteriores el estudiante ya ha podido identificar plenamente las fracciones decimales, y las reglas para la conversión. En este ejercicio el estudiante puede cometer errores en la posición de la coma y la cantidad de ceros en el decimal, sin embargo ya en ejercicios anteriores se ha podido establecer la relación plena entre las unidades significantes.

Amplificación en busca de fracciones decimales

No en todas las ocasiones se presentan las fracciones en la forma de fracción decimal, es por ello que es necesario realizar ciertas operaciones como la amplificación o la simplificación

Se tiene $\frac{1}{2}$ esta fracción no esta como fracción decimal sin embargo se podría averiguar si se puede convertir a fracción decimal, para ello se toma el denominador, que para este caso es 2 y se descompone en sus factores primos

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Con esto se trata de buscar mediante la multiplicación el número 10 o una potencia de 10.

Por ejemplo el 10 se puede descomponer

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 0 & 2 \\ & 5 & 5 \\ & 1 & \end{array}$$

Y se comprueba que efectivamente un factor de ese número es 10 al multiplicarlo por 5. Esto indica que se podría Amplificar la fracción por 5 y se obtendría una potencia de 10 en el denominador

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

De allí se puede determinar que el decimal correspondiente a

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Los decimales obtenidos son decimales finitos

Los decimales Finitos son aquellos que tienen una cantidad determinada de cifras en su parte decimal.				
Ej. : 3,4	2,5	3,0	1,4	76,5

En esta parte del taller es importante que se enfatice en la equivalencia de las fracciones mediante la amplificación, ya que algunos estudiantes puedan que no comprendan el concepto de fracción equivalente, ya que no existen elementos significantes entre las representaciones. Por ejemplo $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ no presentan equivalencias entre cada uno de los elementos representantes.

Es mediante la descomposición factorial la que permite encontrar fracciones equivalentes, es por ello que los estudiantes pueden presentar dificultades al descomponer un número específico, ahora bien también tiene que completar las parejas para conformar la potencia de 10, y puede ser que allí el estudiante aun no comprenda por qué se debe completar solo con 2´s o con 5´s. Por ello es importante enfatizar sobre el sistema de numeración decimal (en base 10) para que el estudiante pueda llegar a comprender el por qué se debe amplificar la fracción, y no vea este procedimiento como un algoritmo sin sentido.

Veamos otros ejemplos:

Convertir $\frac{5}{4}$

Fracción	Descomposición del denominador	Completamos la potencia de 10	Amplificamos y convertimos	A decimal
$\frac{5}{4}$	$4 \mid 2$ $2 \mid 2$ $1 \mid$	$1\,0\,0 \mid 2$ $5\,0 \mid 2$ $2\,5 \mid 5$ $5 \mid 5$ $1 \mid$	$\frac{5}{4}=\frac{5}{2\times2\times5\times5}\times5\times5=\frac{125}{100}$	$\frac{5}{4}=1{,}25$

Convertir $\frac{9}{20}$

Fracción	Descomposición del denominador	Completamos la potencia de 10	Amplificamos y Convertimos	A decimal
$\frac{9}{20}$	$2\,0 \mid 2$ $1\,0 \mid 2$ $5 \mid 5$ $1 \mid$	$1\,0\,0\,0 \mid 2$ $5\,0\,0 \mid 2$ $2\,5\,0 \mid 2$ $1\,2\,5 \mid 5$ $2\,5 \mid 5$ $5 \mid 5$ $1 \mid$	$\frac{9}{20}=\frac{9}{2\times2\times5\times5}\times5=\frac{45}{100}$	$\frac{9}{20}=0{,}45$

Al convertir

$$\frac{6}{125}=\frac{6}{5\times5\times5\times2\times2\times2}\times2\times2\times2=\frac{48}{1000}$$

$1\,2\,5 \mid 5$
$2\,5 \mid 5$
$5 \mid 5$
$1 \mid$

Daría como resultado 0,048

Para algunas fracciones es posible encontrar una fracción decimal por medio de la amplificación de fracciones. Si al descomponer su denominador sus factores primos son dos o cincos, basta con completar las parejas, debe haber un 2 por cada 5 así:

$$\frac{3}{20}=\frac{3}{2\times2\times5\times5}\times5=\frac{15}{100}$$

Mediante el ejemplo se trata dar a conocer los procedimientos utilizados para la conversión a fracciones decimales, observe que en este caso los ejercicios propuestos dan por defecto fracciones decimales, esto es totalmente intencional ya que si se le diera a los estudiantes fracciones con las cuales no se pudieran encontrar fracciones decimales, es bastante probable que el proceso no le den la confiabilidad necesaria.

Luego de la conceptualización y ejemplificación dada se le propone al estudiante que realice los siguientes ejercicios:

Transforma las siguientes fracciones en fracciones con denominadores de potencias de 10.

Fracción	Descomposición del denominador	Completamos la potencia de 10	Amplificamos y Convertimos	A decimal
$\frac{7}{5}$				
$\frac{23}{50}$				
$\frac{3}{8}$				
$\frac{8}{25}$				
$\frac{17}{20}$				
$\frac{5}{2}$				

El estudiante debe encontrar la fracción decimal equivalente a una fracción dada, esto tiene como objetivo que el estudiante utilice equivalencias con fracciones decimales para poder convertir en decimal.

Se puede observar que la mayoría de estudiantes no realizan este procedimiento para la conversión, esto se debe a que no establecen las relaciones de equivalencia entre los mismos fraccionarios Fandiño, (2009).

Conversión de Fracción a decimal mediante la división

En los ejercicios anteriores se ha desarrollado la conversión de fracción decimal a números decimal, sin embargo si se tiene cualquier fracción se puede expresar como número decimal mediante el algoritmo de la división.

Cabe aclarar que si se trata de una fracción decimal va ser mucho más sencillo utilizar el método trabajado anteriormente.

Luego de lo dicho anteriormente se le solicita al estudiante que encierre en un círculo las fracciones que se deben convertir a decimal utilizando el algoritmo de la división, a los siguientes ejercicios son los propuestos:

$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{8}{7}$
$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{34}{3}$	$\frac{2}{29}$
$\frac{14}{5}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{1000}{7}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{7}{5}$

Si se conoce que la fracción no es decimal (su denominador no es una potencia de 10), se debe realizar el algoritmo de la división para convertirlo.

Ejemplo

Observa:

$$\frac{11}{12} \rightarrow \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 1 & 0 & & & \multicolumn{1}{|c}{1} & 2 & & & & & & \\ \cline{6-7} & & 2 & 0 & & 0 & , & 9 & 1 & 6 & 6 & 6 & \\ & & & 8 & 0 & & & & & & & & \\ & & & & 8 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & 8 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & 8 & & & & & & \end{array} \rightarrow \frac{11}{12} = 0{,}91666... = 0{,}91\overline{6}$$

Observe que es necesario reforzar la equivalencia de los números con la parte decimal en 0´s, es decir enuncia r al estudiante que el número 3 es igual que 3,00000 ya que esto permitirá realizar la división de forma completa

En este caso podemos ver que mediante la división da un decimal infinito periódico.

$$\frac{2221}{3333}\rightarrow \begin{array}{rrrrrr|lllll} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & & 0 & , & 6 & 6 & 6 & 3 & 6 \\ & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & & & & & & & \\ & & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & & & & & & \\ & & & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & & & & & \end{array} \rightarrow \frac{2221}{3333} = 0,\overline{6663}$$

Los decimales infinitos periódicos son aquellos decimales los cuales se repite indefinidamente una o varias cifras decimales. Estos números hacen parte de los racionales.

Basando en la conceptualización dada se le solicita al estudiante que convierta las siguientes fracciones utilizando la división.

Fracción	División	Decimal
$\frac{1}{3}$		
$\frac{5}{6}$		
$\frac{3}{11}$		
$\frac{25}{14}$		
$\frac{12}{7}$		
$\frac{8}{13}$		

Al desarrollar este ejercicio tenga bastante atención en la división realizada por los estudiantes, ya que se pueden observar dificultades frente a:

- Posición de la coma al realizar el decimal
- Identificación del periodo si es que lo tiene
- Escritura del decimal (sistema de numeración base 10)

Al finalizar este taller se sugiere al docente realizar un recuento general de paso de fracción a decimal.

4.1.3. Taller 2

De Decimal a Fracción

De Decimal Finito a Fracción

Es importante que el docente realice una reflexión acerca del proceso de conversión de decimal a fracción, resaltando que este proceso requiere que el estudiante identifique las diferentes clases de decimales (decimales finitos, decimales infinitos periódicos y decimales infinitos no periódicos), con esta reflexión se esperaría que el estudiante pueda realizar los procesos correctos de conversión dados en el taller dado.

Para iniciar se le solicita al estudiante que observe el cambio de decimal finito a fracción con los siguientes ejemplos:

$$\frac{6}{100} = 0{,}06 \rightarrow 0{,}06 = \frac{6}{100}$$

$$\rightarrow 0{,}28 = \frac{28}{100}$$

$$\rightarrow 14{,}3 = \frac{143}{10}$$

$$\rightarrow 5{,}28 = \frac{528}{100}$$

Luego se le pedirá que argumente una metodología para realizar el cambio de representación, recuerde que este proceso fortalece competencias argumentativas en los estudiantes. Ya para finalizar después de que el estudiante haya argumentado el procedimiento de cambio se le conceptualiza mediante el siguiente cuadro.

Para convertir un decimal finito en fracción decimal colocamos el número sin la coma en el numerador y como denominador la potencia de diez con igual cantidad de ceros como cifras decimales, Ejemplo:

$$1{,}28 = \frac{128}{100}$$

Después de la conceptualización se le solicitará al estudiante que convierta expresiones decimales a fracción, los ejercicios propuestos son:

Decimal Finito	Fracción Decimal	Fracción Simplificada
12,3		
1,25		
35,5		
24,05		
317,004		
0,00023		
0,000302		

Los estudiantes pueden tener dificultades frente al conteo de los 0´s y en la posición de la coma, por ejemplo pueden contar todos los 0´s sin diferenciar los que están dentro del número.

Conversión de Decimales infinitos periódicos Mediante Ecuaciones

A continuación se propone un mecanismo para realizar la conversión de decimales infinitos periódicos utilizando ecuaciones:

¿Cuál será la fracción correspondiente al decimal 0,3333…?

- Recuerde que $0,33... = 0,\overline{3}$
- Se llamara a la fracción correspondiente a la expresión decimal correspondiente con la incógnita x, es decir: $x = 0,\overline{3}$
- Se genera una ecuación equivalente multiplicando la primera ecuación por una potencia de 10 obteniendo una ecuación equivalente con un periodo igual a la inicial $x = 0,\overline{3} \rightarrow 10x = 3,\overline{3}$

Es importante diferenciar entre los decimales finitos y los decimales periódicos infinitos, ya que con cada uno de estos se debe realizar un proceso diferente para la conversión, es necesario que se realice un gran énfasis en el uso de las ecuaciones para los decimales periódicos infinitos y el proceso de igualación de periodo vinculado la equivalencia entre las ecuaciones.

Otro ejemplo: $a = 1{,}0\overline{72} \rightarrow 1000a = 1072{,}\overline{72}$

Luego de la ejemplificación dada anteriormente se le propone al estudiante realizar los siguientes ejercicios:

1. Encuentre una ecuación equivalente con el mismo periodo:

a) $x = 0{,}\overline{7}$ b) $a = 0{,}\overline{13}$ c) $m = 1{,}3\overline{45}$

d) $10x = 12{,}\overline{014}$ e) $b = 1{,}01\overline{4}$ f) $n = 0{,}\overline{123}$

En este caso existen ejercicios donde los estudiantes tendrían realizar las equivalencias a ambos lados, aunque sea solo la multiplicación por potencias de 10 a ambos lados de la ecuación, esto puede llevar dificultades relacionadas con el manejo de ecuaciones.

- Retomando el ejercicio planteado, se tiene dos ecuaciones con el mismo periodo las cuales se restan entre sí, para eliminar el periodo

$$\begin{array}{rl} 10x = & 3{,}33\ldots \\ -x = & -0{,}33\ldots \\ \hline 9x = & 3{,}00\ldots \end{array}$$

- Finalmente se obtiene una ecuación con términos enteros la cual se despeja y simplifica

$$9x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{9} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$0{,}\overline{3} = x = \frac{1}{3}$$

Observe otro ejemplo:

$$1{,}\overline{42} \rightarrow p = 1{,}\overline{42}$$

$$p = 1{,}\overline{42} \rightarrow 100p = 142{,}\overline{42}$$

$$\begin{array}{rl} 100p = & 142{,}\overline{42} \\ -p = & -1{,}\overline{42} \\ \hline 99p = & 141 \end{array}$$

$$p = \frac{141}{99} = \frac{67}{33} \rightarrow 1,\overline{42} = \frac{67}{33}$$

Para verificar se realiza la división

Mediante los ejemplos proporcionados se espera que estudiante pueda visualizar el proceso completo de convertir un decimal periódico infinito en fracción, la idea de utilizar diferentes letras para las variables es intencional ya que los estudiantes pueden solo relacionar la variable solo con la letra x y en el momento en el cual se le cambia la letra se puede que tengan dificultades al identificar y resolver la ecuación.

A continuación se propone que el estudiante realice los siguientes ejercicios:

Convierta a fracción las siguientes expresiones decimales infinitos periódicos:

a) $0,\bar{8}$

b) $12,\overline{41}$

c) $0,\overline{123}$

d) $0,1\bar{5}$

En el ejercicio anterior del numeral d), existe una complicación al no poder efectuar la diferencia de $x = 0,1\bar{5}$ y $100x = 15,\bar{5}$ para estos casos en los que aparecen más cifras entre la coma y el periodo, se realiza un paso inicial donde se busca una ecuación que tenga el periodo inmediatamente después de la coma y luego se realizan los pasos ya estudiados.

Ejemplo:

$$x = 0,1\bar{5} \rightarrow 10x = 1,\bar{5}$$

$$10x = 1,\bar{5} \rightarrow 100x = 15,\bar{5}$$

$$\begin{array}{r} 100x = \ 15,\bar{5} \\ -10x = -1,\bar{5} \\ \hline 90x = \ 14 \end{array}$$

$$x = \frac{14}{90} = \frac{7}{45} \rightarrow 0,1\bar{5} = \frac{7}{45}$$

Veamos otro ejemplo:

$1,23\bar{6}$

$$x = 1,23\bar{6} \rightarrow 100x = 123,\bar{6} \rightarrow 1000x = 1236,\bar{6}$$

$$\begin{array}{r} 1000x = 1236,\bar{6} \\ -100x = -123,\bar{6} \\ \hline 900x = 1113 \end{array}$$

$$x = \frac{1113}{900} = \frac{371}{300} \rightarrow 1,23\bar{6} = \frac{371}{300}$$

Luego de la ejemplificación se proponen los siguientes ejercicios:

Convierte a expresión fraccionaria:

a) $0,\bar{4}$

b) $2,\bar{4}$

c) $3,\overline{13}$

d) $2,\overline{431}$

e) $2,1\bar{4}$

f) $12,3\bar{1}$

g) $8,12\bar{3}$

h) $25,6\overline{51}$

i) $0,00\bar{8}$

j) $2,25\overline{417}$

En los ejercicios anteriores se proponen diversas conversiones de decimales periódicos infinitos con las diferencia que para unos casos estos decimales tienen el periodo pegado a la coma, lo cual requieren realizar solo una equivalencia entre las ecuaciones y en otros casos, con decimales periódicos infinitos con el periodo despegado a la coma, en los cuales se requiere más de una equivalencia entre las ecuaciones. Es importante hacer ver a los estudiantes que es necesario realizar las equivalencias para que se pueda eliminar el periodo.

Para este tipo de ejercicios los estudiantes pueden tener dificultades relacionadas al:

- Identificar el periodo pegado o despegado de la coma
- Identificar una ecuación equivalente a otra en la cual se elimine el periodo
- Restar de una ecuación a otra con el mismo periodo.

Para finalizar este procedimiento se le conceptualiza al estudiante en el siguiente cuadro

Toda expresión decimal periódica infinita puede representarse como una fracción de enteros por medio de un sistema de ecuaciones que permiten eliminar el periodo.

Conversión de Decimales infinitos periódicos Mediante (ALGORITMO DEL 9[24])

Decimales con el periodo unido a la coma.

A continuación se le da la siguiente tabla al estudiante:

Observe las siguientes conversiones:

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Fila 1	$0,\bar{4}=\frac{4}{9}$	$0,\overline{43}=\frac{43}{99}$	$0,\overline{436}=\frac{436}{999}$
Fila 2	$1,\bar{4}=\frac{13}{9}$	$1,\overline{43}=\frac{142}{99}$	$1,\overline{436}=\frac{1435}{999}$
Fila 3	$2,\bar{4}=\frac{22}{9}$	$2,\overline{43}=\frac{241}{99}$	$2,\overline{436}=\frac{2434}{999}$

Inicialmente tenemos en la columna 1 que al realizar la conversión da como denominador 9, 99 y 999. Teniendo en cuenta que existe una cifra, dos cifras y tres cifras periódicas correspondientemente.

De allí se podría decir que por cada cifra decimal se colocará un 9 en el denominador.

De esta misma manera se observa en las demás columnas 2 y 3, determinando por la cantidad numérica periódica.

Si se observa cada fila, los numeradores en la primera fila aparece el número 4, el cual también está en el número decimal. Pero en la segunda fila aparece en el numerador el número 13 en el cual se podría expresar como 14- 1. Observe que es el número completo menos el número hasta su parte periódica.

[24] El nombre de Algoritmo del 9 fue tomado de Sánchez (2006)

En la fila 3 de la misma columna aparece en el numerador el número 22, donde se puede expresar como 24-2. Observe que al número completo sin coma se le resta el número hasta su parte periódica.

Este procedimiento se puede generalizar, por lo tanto se le solicita al estudiante realizar los siguientes ejercicios:

Cuáles serían los denominadores de las siguientes conversiones:

$0,\bar{7} = \frac{}{[\ ]}$ $\qquad$ $12,\overline{321} = \frac{}{[\ ]}$ $\qquad$ $124,\overline{31} = \frac{}{[\ ]}$

$3,\overline{56} = \frac{}{[\ ]}$ $\qquad$ $6,\overline{572} = \frac{}{[\ ]}$ $\qquad$ $5,\bar{5} = \frac{}{[\ ]}$

El objetivo de este ejercicio es que el estudiante identifique la cantidad de 9´s que debe tener el denominador al realizar la conversión.

Observa:

$$1,\overline{36} = \frac{135}{99}$$

$$1,\overline{36} = \frac{136-1}{99} = \frac{135}{99}$$

Ya con el algoritmo dado se les solicitará a los estudiantes que realicen los siguientes ejercicios:

Cuáles serían los numeradores de las siguientes conversiones:

$3,\overline{24} = \frac{\quad}{99}$ $\qquad$ $12,\bar{5} = \frac{\quad}{9}$ $\qquad$ $1,\overline{023} = \frac{\quad}{999}$

$512,\bar{7} = \frac{\quad}{9}$ $\qquad$ $2,\bar{8} = \frac{\quad}{9}$ $\qquad$ $0,\overline{45} = \frac{\quad}{99}$

En esta parte se requiere que el estudiante identifique muy bien el numero completo (quitándole la coma y contando el periodo una sola vez), y el numero hasta donde llega el periodo, ya que sin este paso no se podrá hacer la resta de manera adecuada. De la misma manera el estudiante puede tener dificultades con los ceros inmersos en los decimales, es por ellos que se le debe hacer explícito cual es el procedimiento a trabajar. En esta parte ya se le dan los denominadores, esto con el fin de reforzar el proceso anterior.

Ya en este punto se le solicita al estudiante que realice el paso completo de conversión mediante los siguientes ejercicios:

Convierta las siguientes expresiones decimales infinitos periódicos en fracciones y verifíquelas con la división:

a) $12,\bar{8} =$

b) $3,\overline{41} =$

c) $0,\overline{032} =$

d) $14,\overline{21} =$

e) $3,\overline{120} =$

f) $1,\overline{32} =$

Decimales con el periodo separado de la coma.

En los ejercicios anteriores el periodo llega hasta la coma del decimal, ahora se realizara la conversión con el periodo separado de la coma.

Observe los denominadores de las siguientes conversiones:

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Fila 1	$524,\bar{3} = \frac{4719}{9}$	$52,4\bar{3} = \frac{4719}{90}$	$5,24\bar{3} = \frac{4719}{900}$
Fila 2	$1,2\bar{4} = \frac{112}{90}$	$1,2\overline{43} = \frac{1231}{990}$	$1,2\overline{436} = \frac{12424}{9990}$

Observe en la segunda columna esta el 3 periódico y antes de este está el número 4, como se puede observar en el denominador después del 9 en la conversión esta un 0. Al igual en la columna 3 hay dos números antes de la coma, indicando dos 0´s después del 9 en la conversión. Esto nos podría indicar que por cada cifra decimal que esta antes del periodo se le coloca un 0 después del 9 en el denominador.

Luego de lo anterior los estudiantes deben realizar los siguientes ejercicios:

Cuáles serían los denominadores de las siguientes conversiones:

$0,54\bar{7} = \frac{\quad}{\lfloor\quad\rfloor}$ $12,2\overline{321} = \frac{\quad}{\lfloor\quad\rfloor}$ $124,01\overline{31} = \frac{\quad}{\lfloor\quad\rfloor}$

$3,1\overline{56} = \frac{\quad}{\lfloor\quad\rfloor}$ $6,321\overline{572} = \frac{\quad}{\lfloor\quad\rfloor}$ $5,12\bar{5} = \frac{\quad}{\lfloor\quad\rfloor}$

Recuerda que:

$$3,2\overline{35} = \frac{3235 - 32}{990}$$

Ya con la conceptualización del algoritmo se le solicita al estudiante que realice los siguientes ejercicios:

Convierta las siguientes expresiones decimales infinitos periódicos en fracciones y verifíquelas con la división:

a) $12,\bar{8} =$

b) $3,\overline{41} =$

c) $0,\overline{032} =$

d) $14,\overline{21} =$

e) $3,\overline{120} =$

f) $1,\overline{32} =$

Luego de esto se le conceptualiza el algoritmo del 9 al estudiante mediante el siguiente cuadro

Todo expresión decimal periódica infinita puede representarse como un fracción de enteros en donde el denominador posee un nueve por cada cifra en el periodo seguido de un 0 por cada cifra entre ella coma y el periodo, y el numerador es la diferencia del numero incluyendo el periodo una vez y el numero sin el periodo.

$$1,23\overline{456} = \frac{123456 - 123}{99900}$$

En los anexos están los talleres formalizados con el fin de implementarlos en el aula de clase, allí se propondrá un taller adicional con el nombre de taller de aplicaciones en el cual se presenta algunas ejercicios de tipo aplicativo en el cual están inmersos los procesos de cambio entre fracción a decimal y viceversa.

5. Conclusiones

El manejo de los números racionales en la educación básica no es tan fácil de abordar como muchos docentes lo podrían pensar al implementarlo en las aulas, ya que el uso de las diferentes representaciones de los racionales muestra un nivel de complejidad mayor en la comprensión de este concepto. Las representaciones por medio del sistema decimal o por medio de fracciones son las más utilizadas por los docentes y estudiantes para el manejo de los racionales, por ello es necesario entonces que el estudiante pueda realizar las conversiones de una representación a otra para que tenga conciencia de que estas son dos representaciones del mismo objeto matemático y pueda realizar en proceso de conversión.

Esta conversión entre fracción y decimal no se puede pensar como un algoritmo en doble vía, es decir los procedimientos para ir de fracción a decimal son distintos de los de decimal a fracción, y es por esto que los estudiantes pueden llegar a tener dificultades ya que los procesos de aprendizaje son diferentes.

Para la enseñanza de los racionales mediante la representación en fracción el estudiante debe manejar la definición de número racional como una clase de equivalencia. Ya que esto va a permitir que se escoja como representante de la clase a una fracción decimal para que se pueda realizar la conversión a decimal. Para el paso de decimal a fracción es necesario que el docente identifique claramente los diferentes tipos de decimales (finitos, periódicos) ya que esto va a facilitar que el estudiante pueda realizar los algoritmos de conversión, cabe aclarar que este proceso es mucho más complejo que el de fracción a decimal ya que se utilizan ecuaciones para la conversión.

Para el trabajo específico con los estudiantes es necesario que el docente inicie realizando un taller diagnóstico el cual permitirá observar las dificultades que tienen los estudiantes frente al manejo de los procedimientos y algoritmos inmersos en el cambio de representación. Luego de aplicar este taller diagnóstico se debería empezar por la conversión de fracción a decimal, enfatizando en los diferentes tipos de fracciones tales como las fracciones decimales y las fracciones no decimales, ya que son estas las que generan diferentes procesos al realizar dicha conversión. Es importante resaltar que mediante la división se pueden realizar las conversiones, pero el uso de este algoritmo limita la enseñanza a un solo procedimiento y no se profundiza en los números racionales. Luego se propone trabajar con la conversión de decimal a fracción empezando por las fracciones finitas para luego si llegar a las fracciones periódicas infinitas mediante el uso de las ecuaciones. Es conveniente mencionar que el docente debe conocer las diferentes construcciones de los racionales ya que este conocimiento le va facilitar tener un buen dominio del tema para su enseñanza.

El uso del algoritmo del 9 permite observar un procedimiento sencillo para la conversión de fracciones periódicas infinitas a decimal. El uso de este algoritmo se debe proponer como herramienta final para la conversión ya que si solo se presenta a los estudiantes como un procedimiento no podrá realizar un ejercicio profundo de la conversión y el concepto de racional no quedará bien cimentado para trabajos posteriores.

Si se observa con mayor intensidad el cambio de representaciones entre los racionales se podría ver que para pasar de una representación a otra por ejemplo de pictórico a porcentual o de fracción a porcentual, generalmente es necesario hacer el cambio de fracción a decimal o de decimal a fracción, es por ello que se debe realizar un mayor énfasis en el estudio de la enseñanza de los cambios de representación estudiados en este trabajo.

A. Anexo: TALLER 0

Revisión de Preconceptos

Revisión de Preconceptos

Colegio: …….

Nombre:……..……Grado:……

Docente: ……..

1. Algoritmo de la División

Realiza las siguientes divisiones:

Ejercicio	*Solución*	*Ejercicio*	*Solución*
3/4		2/5	
12/5		14/4	
52/4		123/14	
1673/45		35/416	
5/3		2/8	
21/7		16/4	
326/16		1276/42	
15/422		3287/75	
3/8		3452/42	
7/3		324/44	

2. Lee y escribe los siguientes números
   Ejemplo:
   235,34: doscientos treinta y cinco enteros treinta y cuatro centésimas

164,2	
2504,03	
54376,76	
231,009	
2043,030	
5007,0002	
4304,0201	
40021,603	
302,006	
403,003	
27648,5001	

3201,040	

3. Potenciación

Resuelve:

Ejercicio	*Solución*	*Ejercicio*	*Solución*
10^3		4^3	
5^3		10^0	
4^0		1^3	
4^1		0^0	
2^0		10^{10}	
1^4		5^0	
10^2		6^1	
10^2		0^3	
10^5		1^3	
10^1		3^2	

4. Fracciones equivalentes
   Amplifica las siguientes fracciones

$\frac{4}{8}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{30}{6}$

Simplifica las siguientes fracciones

$\frac{10}{8}$	$\frac{24}{2}$	$\frac{48}{3}$	$\frac{22}{4}$
$\frac{18}{60}$	$\frac{58}{86}$	$\frac{786}{968}$	$\frac{286}{12}$
$\frac{54}{9}$	$\frac{288}{84}$	$\frac{48}{26}$	$\frac{36}{58}$
$\frac{300}{1600}$	$\frac{200}{6000}$	$\frac{14000}{354320}$	$\frac{30000}{6500}$

5. Conversiones

Observa:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{5}{10^0} = \frac{5}{5^0} = \frac{5}{2^0} = 5{,}0 = 5{,}000 = 0{,}5x10^1 = 0{,}05x10^2$$

Se pueden encontrar muchas formas de escribir el número 5 entre ellas como fracción, como fracción decimal, como fracción con denominador con potencia 0, como número decimal, como expresión científica.

Por lo cual se puede llegar a la conclusión que pueden existir varias representaciones de un mismo número.

Expresa en diferentes representaciones el número dado.

Número Natural	con denominador 1	Denominador 10^0	El denominador igual al numerador elevado a la cero	Denominador elevado a la 0	Con una cifra decimal 0	Con varias cifras decimales en 0	Elevado a la 10^1	Elevado a la 10^2
3								
	$\frac{4}{1}$							
		$\frac{8}{10^0}$						
			$\frac{9}{9^0}$					
				$\frac{18}{3^0}$				
					14,0			
						23,0000		
							$4{,}2x10^1$	
								$4{,}36x10^2$

6. Ecuaciones

Encuentre el valor de la incógnita en cada una de las ecuaciones planteadas

$2x = 10$	$5x + 3 = 4$	$4x + 3 = 8$
$10x - 3 = 8x + 2$	$4x + 4 = 4 - 4x$	$3x + 5 = 8$
$8x - 4 = 4x + 5$	$4x + 3 = 8x + 2$	$3x - 4x + 4 = 5x + 3x + 3$

B. Anexo: Taller 1 De Fracción a Decimal

De Fracción a Decimal

Colegio: …….

Nombre:……..…….Grado:……

Docente: ……..

Identificación de una Fracción Decimal

Se llama Fracción Decimal a toda fracción cuyo denominador es una potencia de 10

Ejemplos:

$$\frac{15}{1000}, \frac{23}{10}, \frac{123}{100}, \frac{67}{100000}$$

1. De las siguientes fracciones encierre con un círculo cuales son fracciones decimales

$\frac{23}{1000}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{55}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{12}{10000000}$	$\frac{2343}{10}$	$\frac{10}{100}$

2. Observa:

Al realizar las conversión utilizando la división daría:

a) $\frac{2}{10} = 0{,}2$

b) $\frac{53}{4} = 13{,}5$

c) $$\frac{524}{100} = 5{,}24$$

d) $$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

2. Describa cual es la diferencia entre los ejercicios a y c con respecto a los ejercicios b y d al observar la conversión de fracción a decimal:

……...……
……..……
……..……
…….……

3. De las siguientes fracciones encierre con un círculo cuales se pueden pasar a expresión decimal sin efectuar la división:

$\frac{23}{1000}$ $\frac{12}{21}$ $\frac{3}{13}$ $\frac{10}{3}$ $\frac{24}{55}$ $\frac{2343}{10}$

$\frac{1}{100}$ $\frac{12}{10000000}$

Convertir una fracción decimal a expresión decimal

4. Observe la conversión realizada de fracciones decimales a decimales en los siguientes ejercicios.

a) $$\frac{21}{100} = 0{,}21$$

b) $$\frac{21}{1000} = 0{,}021$$

c) $$\frac{21}{10000} = 0{,}0021$$

Proponga un método para pasar de fracción decimal a decimal sin tener que realizar la división

……
……
……
……

*Para convertir una **fracción decimal** a expresión decimal colocamos la coma en el numerador contando tantas cifras decimales como ceros en el denominador, ejemplo:*

$$\frac{15}{1000} = 0{,}015$$

5. Convierte las siguientes fracciones decimales en expresión decimal sin efectuar la división:

Fracción decimal	Decimal
$\frac{23}{1000}$	
$\frac{12}{10}$	
$\frac{213}{10}$	
$\frac{213}{1000}$	
$\frac{2343}{10}$	
$\frac{12}{10000000}$	

Amplificación en busca de fracciones decimales

No en todas las ocasiones se presentan las fracciones en la forma de fracción decimal, es por ello que es necesario realizar ciertas operaciones como la amplificación o la simplificación

Se tiene $\frac{1}{2}$ esta fracción no esta como fracción decimal sin embargo se podría averiguar si se puede convertir a fracción decimal, para ello se toma el denominador, que para este caso es 2 y se descompone en sus factores primos

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Con esto se trata de buscar mediante la multiplicación el número 10 o una potencia de 10.

Por ejemplo el 10 se puede descomponer

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 0 & 2 \\ & 5 & 5 \\ & 1 & \end{array}$$

Y se comprueba que efectivamente un factor de ese número es 10 al multiplicarlo por 5. Esto indica que se podría Amplificar la fracción por 5 y se obtendría una potencia de 10 en el denominador

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

De allí se puede determinar que el decimal correspondiente a

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Los decimales obtenidos son decimales finitos

Los decimales Finitos son aquellos que tiene una cantidad determinada de cifras.

Veamos otros ejemplos:

Convertir $\frac{5}{4}$

Fracción	Descomposición del denominador	Completamos la potencia de 10	Amplificamos y convertimos	A decimal
$\frac{5}{4}$	$4 \mid 2$ $2 \mid 2$ $1 \mid$	$1\ 0\ 0 \mid 2$ $5\ 0 \mid 2$ $2\ 5 \mid 5$ $5 \mid 5$ $1 \mid$	$\frac{5}{4}=\frac{5}{2\times2\times5\times5}\times5\times5=\frac{125}{100}$	$\frac{5}{4}=1{,}25$

Convertir $\frac{9}{20}$

Fracción	Descomposición del denominador	Completamos la potencia de 10	Amplificamos y Convertimos	A decimal
$\frac{9}{20}$	$2\ 0 \mid 2$ $1\ 0 \mid 2$ $5 \mid 5$ $1 \mid$	$1\ 0\ 0\ 0 \mid 2$ $5\ 0\ 0 \mid 2$ $2\ 5\ 0 \mid 2$ $1\ 2\ 5 \mid 5$ $2\ 5 \mid 5$ $5 \mid 5$ $1 \mid$	$\frac{9}{20}=\frac{9}{2\times2\times5\times5}\times5=\frac{45}{100}$	$\frac{9}{20}=0{,}45$

Al convertir

$$\frac{6}{125}=\frac{6}{5\times5\times5\times2\times2\times2}\times2\times2\times2=\frac{48}{1000}$$

$1\ 2\ 5 \mid 5$
$2\ 5 \mid 5$
$5 \mid 5$
$1 \mid$

Daría como resultado 0,048

Para algunas fracciones es posible encontrar una fracción decimal por medio de la amplificación de fracciones. Si al descomponer su denominador sus factores primos son dos o cincos, basta con completar las parejas, debe haber un 2 por cada 5 así:

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \times 2 \times 5 \times 5} \times 5 = \frac{15}{100}$$

Transforma las siguientes fracciones en fracciones con denominadores de potencias de 10

Fracción	Descomposición del denominador	Completamos la potencia de 10	Amplificamos y Convertimos	A decimal
$\frac{7}{5}$				
$\frac{23}{50}$				
$\frac{3}{8}$				

$\frac{8}{25}$				
$\frac{17}{20}$				
$\frac{5}{2}$				

Conversión de Fracción a decimal mediante la división

En los ejercicios anteriores se ha desarrollado la conversión de fracción decimal a números decimal, sin embargo si se tiene cualquier fracción se puede expresar como número decimal mediante el algoritmo de la división.

Cabe aclarar que si se trata de una fracción decimal va ser mucho más sencillo utilizar el método trabajado anteriormente.

Encierra en un círculo las fracciones que se deben convertir a decimal utilizando el algoritmo de la división

$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{8}{7}$
$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{34}{3}$	$\frac{2}{29}$
$\frac{14}{5}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{1000}{7}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{7}{5}$

Si se conoce que la fracción no es decimal (su denominador no es una potencia de 10), se debe realizar el algoritmo de la división para convertirlo.

Ejemplo

Observa:

$$\frac{11}{12} \rightarrow \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 1 & 0 & & & \multicolumn{1}{|c}{1} & 2 & & & & & & \\ \cline{6-7} & & 2 & 0 & & 0 & , & 9 & 1 & 6 & 6 & 6 & \\ & & & 8 & 0 & & & & & & & & \\ & & & & 8 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & 8 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & 8 & & & & & & \end{array} \rightarrow \frac{11}{12} = 0{,}91666... = 0{,}91\overline{6}$$

En este caso podemos ver que mediante la división da un decimal infinito periódico.

Los decimales infinitos periódicos son aquellos decimales los cuales se repite indefinidamente una o varias cifras decimales. Estos números hacen parte de los Racionales

$$\frac{2221}{3333} \rightarrow \begin{array}{ccccccccccccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & & \multicolumn{1}{|c}{3} & 3 & 3 & 3 & 3 & & \\ \cline{7-8} & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & , & 6 & 6 & 6 & 3 & 6 \\ & & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & & & & & \\ & & & & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & & & & \end{array} \rightarrow \frac{2221}{3333} = 0,\overline{6663}$$

Convierte a decimal:

Fracción	División	Decimal
$\frac{1}{3}$		
$\frac{5}{6}$		
$\frac{3}{11}$		
$\frac{25}{14}$		
$\frac{12}{7}$		
$\frac{8}{13}$		

C. Anexo: Taller 2 De Decimal a Fracción

De Decimal a Fracción

Colegio: …….

Nombre:……..…….Grado:……

Docente: ……..

De Decimal Finito a Fracción

Observa:

$$\frac{6}{100} = 0{,}06 \rightarrow 0{,}06 = \frac{6}{100}$$

$$\rightarrow 0{,}28 = \frac{28}{100}$$

$$\rightarrow 14{,}3 = \frac{143}{10}$$

$$\rightarrow 5{,}28 = \frac{528}{100}$$

Escriba una metodología para convertir de decimal a fracción observando los ejemplos anteriores.

……
……
……
……

Para convertir un decimal finito en fracción decimal colocamos el número sin la coma en el numerador y como denominador la potencia de diez con igual cantidad de ceros como cifras decimales, Ejemplo:

$$1{,}28 = \frac{128}{100}$$

Convierte las siguientes expresiones decimales a fracción decimal

Decimal Finito	Fracción Decimal	Fracción Simplificada
12,3		
1,25		
35,5		
24,05		
317,004		
0,00023		
0,000302		

Conversión de Decimales infinitos periódicos Mediante Ecuaciones

Observa:

¿Cuál será la fracción correspondiente al decimal 0,3333…?

- Recuerde que $0,33... = 0,\overline{3}$

- Se llamara a la fracción correspondiente a la expresión decimal correspondiente con la incógnita x, es decir: $x = 0,\overline{3}$

- Se genera una ecuación equivalente multiplicando la primera ecuación por una potencia de 10 obteniendo una ecuación equivalente con un período igual a la inicial $x = 0,\overline{3} \rightarrow 10x = 3,\overline{3}$

Otro ejemplo: $a = 1,0\overline{72} \rightarrow 1000a = 1072,\overline{72}$

2. Encuentre una ecuación equivalente con el mismo período:

a) $x = 0,\bar{7}$ b) $a = 0,\overline{13}$ c) $m = 1,3\overline{45}$

d) $10x = 12,\overline{014}$ e) $b = 1,01\bar{4}$ f) $n = 0,\overline{123}$

- Retomando el ejercicio planteado, se tiene dos ecuaciones con el mismo período las cuales se restan entre sí, para eliminar el período

$$\begin{array}{rl} 10x = & 3,33\ldots \\ -x = & -0,33\ldots \\ \hline 9x = & 3,00\ldots \end{array}$$

- Finalmente se obtiene una ecuación con términos enteros la cual se despeja y simplifica

$$9x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{9} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$0,\bar{3} = x = \frac{1}{3}$$

Observe otro ejemplo:

$$1,\overline{42} \rightarrow p = 1,\overline{42}$$

$$p = 1,\overline{42} \rightarrow 100\,p = 142,\overline{42}$$

$$\begin{array}{rl} 100\,p = & 142,\overline{42} \\ -\,p = & -\,1,\overline{42} \\ \hline 99p = & 141 \end{array}$$

$$p = \frac{141}{99} = \frac{67}{33} \rightarrow 1,\overline{42} = \frac{67}{33}$$

Para verificar se realiza la división

3. Convierta a fracción las siguientes expresiones decimales infinitas periódicas:

a) $0,\bar{8}$

b) $12,\overline{41}$

c) $0,\overline{123}$

d) $0,1\bar{5}$

- En el ejercicio anterior del numeral d), existe una complicación al no poder efectuar la diferencia de $x = 0,1\bar{5}$ y $100x = 15,\bar{5}$ para estos casos en los que aparecen más cifras entre la coma y el período, se realiza un paso inicial donde se busca una ecuación que tenga el período inmediatamente después de la coma y luego se realizan los pasos ya estudiados. Ejemplo:

$$x = 0,1\bar{5} \rightarrow 10x = 1,\bar{5}$$

$$10x = 1,\overline{5} \rightarrow 100x = 15,\overline{5}$$

$$\begin{array}{r} 100x = 15,\overline{5} \\ -10x = -1,\overline{5} \\ \hline 90x = 14 \end{array}$$

$$x = \frac{14}{90} = \frac{7}{45} \rightarrow 0,1\overline{5} = \frac{7}{45}$$

Veamos otro ejemplo: $1,23\overline{6}$

$$x = 1,23\overline{6} \rightarrow 100x = 123,\overline{6} \rightarrow 1000x = 1236,\overline{6}$$

$$\begin{array}{r} 1000x = 1236,\overline{6} \\ -100x = -123,\overline{6} \\ \hline 900x = 1113 \end{array}$$

$$x = \frac{1113}{900} = \frac{371}{300} \rightarrow 1,23\overline{6} = \frac{371}{300}$$

Convierte a expresión fraccionaria:

a) $0,\overline{4}$

b) $2,\overline{4}$

c) $3,\overline{13}$

d) $2,\overline{431}$

e) $2,1\overline{4}$

f) $12,3\overline{1}$

g) $8,12\overline{3}$

h) $25,6\overline{51}$

i) $0,00\overline{8}$

j) $2,25\overline{417}$

Toda expresión decimal periódica infinita puede representarse como una fracción e enteros por medio de un sistema de ecuaciones que permiten eliminar el período.

Conversión de Decimales infinitos periódicos Mediante (ALGORITMO DEL 9)

Decimales con el período unido a la coma.

Observe las siguientes conversiones:

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Fila 1	$0,\overline{4} = \frac{4}{9}$	$0,\overline{43} = \frac{43}{99}$	$0,\overline{436} = \frac{436}{999}$
Fila 2	$1,\overline{4} = \frac{13}{9}$	$1,\overline{43} = \frac{142}{99}$	$1,\overline{436} = \frac{1435}{999}$
Fila 3	$2,\overline{4} = \frac{22}{9}$	$2,\overline{43} = \frac{241}{99}$	$2,\overline{436} = \frac{2434}{999}$

Inicialmente tenemos en la columna 1 que al realizar la conversión da como denominador 9, 99 y 999. Teniendo en cuenta que existe una cifra, dos cifras y tres cifras periódicas correspondientemente.

De allí se podría decir que por cada cifra decimal se colocará un 9 en el denominador.

De esta misma manera se observa en las demás columnas 2 y 3, determinando por la cantidad numérica periódica.

Si se observa cada fila, los numeradores en la primera fila aparece el número 4, el cual también está en el número decimal. Pero en la segunda fila aparece en el numerador el número 13 en el cual se podría expresar como 14- 1. Observe que es el número completo menos el número hasta su parte periódica.

En la fila 3 de la misma columna aparece en el numerador el número 22, donde se puede expresar como 24-2. Observe que al número completo sin coma se le resta el número hasta su parte periódica.

Este procedimiento se puede generalizar

Cuáles serían los denominadores de las siguientes conversiones:

$0,\overline{7} = \frac{\quad}{[\ ]}$ $12,\overline{321} = \frac{\quad}{[\ ]}$ $124,\overline{31} = \frac{\quad}{[\ ]}$

$3,\overline{56} = \frac{\quad}{[\ ]}$ $6,\overline{572} = \frac{\quad}{[\ ]}$ $5,\overline{5} = \frac{\quad}{[\ ]}$

Observa:

$$1,\overline{36} = \frac{135}{99}$$

$$1,\overline{36} = \frac{136-1}{99} = \frac{135}{99}$$

Cuáles serían los numeradores de las siguientes conversiones:

$3,\overline{24} = \frac{\quad}{99}$ $12,\overline{5} = \frac{\quad}{9}$ $1,\overline{023} = \frac{\quad}{999}$

$512,\overline{7} = \frac{\quad}{9}$ $2,\overline{8} = \frac{\quad}{9}$ $0,\overline{45} = \frac{\quad}{99}$

Convierta las siguientes expresiones decimales infinitos periódicos en fracciones y verifíquelas con la división:

a) $12,\overline{8} =$

b) $3,\overline{41} =$

c) $0,\overline{032} =$

d) $14,\overline{21} =$

e) $3,\overline{120} =$

f) $1,\overline{32} =$

Decimales con el período separado de la coma.

En los ejercicios anteriores el período llegada hasta la coma del decimal, ahora se realizara la conversión con el período separado de la coma.

Observe los denominadores de las siguientes conversiones:

	Columna 1	Columna 2	Columna 3
Fila 1	$524,\bar{3} = \frac{4719}{9}$	$52,4\bar{3} = \frac{4719}{90}$	$5,24\bar{3} = \frac{4719}{900}$
Fila 2	$1,2\bar{4} = \frac{112}{90}$	$1,2\overline{43} = \frac{1231}{990}$	$1,2\overline{436} = \frac{12424}{9990}$

Observe en la segunda columna esta el 3 periódico y antes de este está el número 4, como se puede observar en el denominador después del 9 en la conversión esta un 0. Al igual en la columna 3 hay dos números antes de la coma, indicando dos 0´s después del 9 en la conversión. Esto nos podría indicar que por cada cifra decimal que esta antes del período se le coloca un 0 después del 9 en el denominador.

Cuáles serían los denominadores de las siguientes conversiones:

$0,54\bar{7} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad$ $12,2\overline{321} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad$ $124,01\overline{31} = \frac{\quad}{\quad}$

$3,1\overline{56} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad$ $6,321\overline{572} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad$ $5,12\bar{5} = \frac{\quad}{\quad}$

Recuerda que: $3,2\overline{35} = \frac{3235 - 32}{990}$

Convierta las siguientes expresiones decimales infinitos periódicos en fracciones y verifíquelas con la división:

a) $12,\bar{8} =$

b) $3,\overline{41} =$

c) $0,\overline{032} =$

d) $14,\overline{21} =$

e) $3,\overline{120} =$

f) $1,\overline{32} =$

Todo expresión decimal periódica infinita puede representarse como un fracción de enteros en donde el denominador posee un nueve por cada cifra en el período seguido de un 0 por cada cifra entre ella coma y el período, y el numerador es la diferencia del número incluyendo el período una vez y el número sin el período.

$$1,2\overline{3456} = \frac{123456 - 123}{99900}$$

D. Anexo: Taller 3 Aplicaciones de las conversiones de Fracción a Decimal y Viceversa

Aplicaciones de la Conversión de Decimal a Fracción y viceversa

Colegio: …….

Nombre:……..…….Grado:……

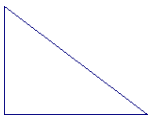
Docente: ……..

Indicador

- Utiliza la conversión de expresiones de los racionales para la solución de problemas

---

Hallar la altura del triángulo rectángulo cuya base mide $1,\bar{3}$ y su hipotenusa mide $1,\bar{6}$



Dato	*f*	*fa*	*fr*	*fra*
10	9	9	0,3	
11	10	19	$0,\bar{3}$	
12	5	24	$0,1\bar{6}$	
13	4	28	$0,1\bar{3}$	
14	1	29	$0,0\bar{3}$	
15	1	30	$0,0\bar{3}$	1
	30	30	1	1

Complete la frecuencia relativa acumulada

Halla los siguientes logaritmos con o sin calculadora:

$\log_5 0{,}008 =$ $\log_3 0,\bar{3} =$ $\log_2 0{,}125 =$ $\log_3 0,\overline{037} =$

Bibliografía

ALCALÁ, M. Construcción del lenguaje matemático. En: El simbolismo de tercer orden. La enseñanza del álgebra inicial. Madrid: Editorial Graö. (s.f). p. 125-154.

ÁVILA, Alicia. Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible.En: Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal: Redalyc. Vol. 20, Núm. 2. México: Editorial Santillana.2008. p. 6 -20.

BOYER, C. Historia de la Matemática. Madrid: Editorial Alianza Editorial.1986. p. 33-67.

BROUSSEAU, G.. Les obstacles épistemologiques et les problémes enmathematiques. En: Recherches en didactique des mathématiques. Madrid:1980.

CHAMORRO, Mª del Carmen. Didáctica de las matemáticas para primaria. Madrid: Pearson. 2003a. p. 187-221.

_____Comportamiento de los Racionales en la Educación Básica. Madrid: Pearson 2003b.

CENTENO PEREZ, Julia. Números decimales ¿Por qué? Y ¿Para qué? España: Editorial Síntesis. 1988. p. 39-78.

COLLETTE, Jean P. Historia de las Matemáticas. 1ª edición, Madrid: Editorial Siglo XXI de España Editores .1985.

D´AMORE, Bruno. Objetos significados, representaciones semióticas y sentidos. En: Revista latinoamericana de investigación educación matemática: Relime. Número especial. 2006. p. 177 – 195.

DUVAL, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Cali: Universidad del Valle, 1999. p. 14 - 63.

_____ Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle, 1999.p.15 -55.

FANDIÑO PINILLA, Martha. Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: Editorial Magisterio, 2009. p. 37-120.

GODINO, J y BATANERO, C y ROA, R. Magnitudes y Medida. En: Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros, Universidad de Granada, Granada España: Febrero 2002. p. 615.

HENRY, E y KYBURG, Jr. Quantities, Magnitudes, and Numbers. En: Philosophy of Science, Vol. 64, No. 3. Departments of Philosophy and Computer Science, University of Chicago: 1997. p. 377-410.

INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Documentación: Citas y notas de pie de página. Bogotá: ICONTEC, 2002. 23 p. (NTC 1487)

KLINE, Morris. El fracaso de la matemática moderna. Madrid: Editorial Siglo XXI.1981.

KONIC, P y GODINO, J. Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. En: Revista de didáctica de las matemáticas. España: 2010.

LLINARES, Salvador y SANCHEZ Mª Victoria. (1997). Fracciones La relación parte todo. Madrid: Editorial Síntesis, 1997. p. 19 – 72.

MEN. Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.1999. p. 194.

_____ Estándares Básicos para las Competencias Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio. 2006. p. 137.

OSSA PARRA, Marcela. Cartilla de citas. Bogotá: Universidad de los Andes. 2006. p.9 - 27.

PERILLA, M. Procesos Matemáticos 7. Bogotá: Editorial Santillana: 1996.

SANCHEZ ACERO, Francisco. Las representaciones en el conjunto de los racionales. Bogotá, 2010. p. 45-89. Tesis (Especialista en Pedagogía y Didáctica de las Matemáticas). Universidad Gran Colombia. Departamento de Postgrados.

_____ Unidad didáctica para el proceso de conversión de decimal a fraccionario y viceversa en estudiantes de grado 5. Bogotá, 2006. p. 68 -96. Tesis (Licenciado en Matemáticas). Universidad Pedagógica Nacional. Departamento de Matemáticas.

SANCHEZ BOTERO, Clara H. El origen de los números y los sistemas de numeración. En: Memorias del XIII Encuentro de Geometría y II de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional. 2002. p.197-206.

THOMPSON, P y SALDANHA, L.Fractions and multiplicative reasoning . En:Research companion to the principles and standards for school mathematics.Virginia: 2003.

VERGNAUD, G. El niño, las matemáticas y la realidad. En: Problemas de tipomultiplicativo. México: Editorial Trillas.1995.

Documentos de consulta y referencia adicionales

ADJIAGE, R. L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial. Thèse, IREM, 1999.

BROITMAN, Cy ITZCOVICH, H yQUARANTA, M. La enseñanza de los números decimales: En: El análisis de valor posicional y una aproximación a la densidad. México:2003.

BROITMAN, CyITZCOVICH, H y SANCHA, I. Matemática Nº 4.En: Números racionales y geometría una propuesta para alumnos de 6º año. Buenos Aires:2007.

BROUSSEAU, G. Problemas de didáctica de los decimales, RDM, Vuelo 2.1, el Pensamiento Salvaje (éd), Grenoble: 1981. p. 37-128.

DUVAL, R. Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: Análisis de la didáctica y ciencias cognitivas.1993. p. 37.

OBANDO, G. La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. (Tesis de Maestría en Educación). Universidad del Valle Cali: 1999.

PONTÓN, T. Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones. (Tesis de Maestría en Educación). Universidad del Valle.Cali. 2008.

_____ La comprensión de problemas en la enseñanza y el aprendizaje inicial de los números racionales. (Tesis de Doctorado en Educación). Universidad del Valle. Cali:2012.