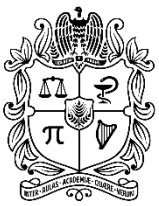


UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano cartesiano en el grado sexto

Amparo Salazar Díaz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2017

Estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano cartesiano en el grado sexto

Amparo Salazar Díaz

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Profesor José Reinaldo Montañez Puentes
Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2017

Dedicatoria

A Dios, a mi amado padre Trinidad Salazar quien con sus consejos y apoyo me motiva a seguir preparándome, a mis hermosas hijas Emilith y Salomé, quienes son mi fuente de motivación e inspiración para seguir cumpliendo mis metas propuestas, a mi querido esposo Jorge Mario quien llegó a mi vida para brindarme su comprensión, cariño y amor.

Agradecimientos

Expreso mis más sinceros agradecimientos al profesor del Departamento de Matemáticas José Reinaldo Montañez Puentes, por sus valiosos aportes y ser mi guía durante todo el trabajo de grado. Su amabilidad, paciencia, dedicación y amor a su labor docente lo hacen un ser único.

Resumen

Se presenta una estrategia didáctica dirigida a estudiantes del grado sexto, para aproximarlos a los conceptos de congruencia, semejanza y área por recubrimiento a través del estudio de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano y empleando una herramienta tecnológica, el software de geometría dinámica Geogebra.

Este trabajo pretende devolver el origen activo y dinámico de los conceptos geométricos que usualmente se han reducido a sus componentes, como puntos, líneas, planos y en general objetos geométricos estáticos que han dejado en la penumbra a las transformaciones.

Palabras clave: Transformaciones geométricas, plano cartesiano, congruencia, semejanza, teselados, Geogebra.

Abstract

A didactic strategy is presented addressed to students of the sixth grade, to approximate them to the concepts of congruence, similarity and area by coating trough the study of the geometric transformations in the cartesian plane and using a technological tool, the Geogebra dynamic geometry software.

This work aims to return the active and dynamic origin of the geometric concepts that have usually been reduced to their components, such as points, lines, planes and in general static geometric objects that have left transformations in the shadows.

Keywords: Geometric transformations, cartesian plane, congruence, similarity, tessellations, Geogebra.

Contenido

Pág.

Resumen ..... **IX**

Lista de figuras ..... **XIII**

Lista de tablas ..... **XVI**

Introducción **1**

1. Aspectos históricos **5**
1.1 Transformaciones geométricas 5
1.2 Coordenadas cartesianas 13
1.3 Las transformaciones geométricas en el siglo XIX 15
1.4 Teselados 18

2. Aspectos disciplinares **21**
2.1 Conceptos preliminares de geometría 21
2.1.1 Términos no definidos: Punto, recta y plano 21
2.1.2 Segmento, rayo y ángulo 22
2.2 Polígonos 25
2.3 Triángulos 29
2.3.1 Congruencia de triángulos 31
2.3.2 Semejanza de triángulos 34
2.4 Cuadriláteros 36
2.5 Área de regiones poligonales 39
2.6 Números reales y plano coordenado 40
2.6.1 Plano coordenado 40
2.6.2 Axiomas para los números reales 42
2.7 Transformaciones geométricas 46
2.7.1 Isometrías en el plano 48
2.7.2 Homotecias 60
2.7.3 La congruencia y las transformaciones geométricas 64
2.7.4 La semejanza y las transformaciones geométricas 66
2.7.5 Transformaciones geométricas y el plano de coordenadas cartesianas 70
2.8 Teselaciones en el plano 71
2.8.1 Mosaicos con polígonos regulares 75
2.8.2 Mosaicos con polígonos no regulares 78
2.8.3 Mosaicos con más de una baldosa 80

3. Aspectos didácticos **83**

3.1 Herramientas tecnológicas y enseñanza de la geometría....83
3.2 Uso didáctico de Geogebra....85
3.3 Teoría de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Modelo de Van Hiele, niveles y fases de aprendizaje....88
3.4 Estándares básicos de competencias y las transformaciones geométricas en el plano cartesiano....91
3.5 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las transformaciones geométricas en el plano cartesiano....93
3.6 Lineamientos curriculares y las transformaciones geométricas en el plano cartesiano....95
3.7 Estrategia didáctica....96
3.8 Actividades....98

4. Conclusiones y recomendaciones....139

Bibliografía....141

Lista de figuras

Pág.

Figura 1-1: Ciervo acompañado de un signo en forma de cuadrilátero seguido de puntuaciones -Cueva de Lascaux..... 7
Figura 1-2: Signos geométricos: líneas paralelas, perpendiculares, puntuaciones y cuadriláteros..... 7
Figura 1-3: Modelos decorativos de la cerámica cardinal 7
Figura 1-4: Vaso inciso de la cueva de los murciélagos de Zuheros - Córdoba..... 7
Figura 1-5: Decoración geométrica del Arte Nazarí –Palacio de Alhambra - Granada..... 9
Figura 1-6: Dibujos de Wentzel Jamnitzer 12
Figura 1-7: La latitud de las formas 14
Figura 1-8: Grabado en madera llamado *Círculo límite III* por el artista holandés M.C. Escher..... 17
Figura 2-1: Representación de las dos partes del rayo..... 23
Figura 2-2: Representación del ángulo $\measuredangle BAC$ o $\measuredangle CAB$..... 23
Figura 2-3: Ángulo recto y perpendicularidad. 24
Figura 2-4: Rectas paralelas..... 24
Figura 2-5: Representación de polígono..... 25
Figura 2-6: Diagonal, ángulo interior y ángulo exterior..... 25
Figura 2-7: Polígono no convexo y polígono convexo..... 26
Figura 2-8: Polígono regular $ABCDE$..... 27
Figura 2-9: Regiones poligonales..... 27
Figura 2-10: Ángulo interior hexágono regular..... 28
Figura 2-11: Ángulos interior-exterior adyacente del polígono..... 28
Figura 2-12: Circunferencia 29
Figura 2-13: ΔABC 29
Figura 2-14: Bases y alturas del ΔABC 30
Figura 2-15: Clasificación de triángulos según la medida de sus lados 30
Figura 2-16: Clasificación de triángulos según la amplitud de sus ángulos..... 31
Figura 2-17: Congruencia entre los ΔABC y ΔDEF..... 32
Figura 2-18: Postulado LAL..... 33
Figura 2-19: Postulado ALA..... 33
Figura 2-20: Postulado LLL 33
Figura 2-21: Semejanza entre dos triángulos. 34
Figura 2-22: Teorema LAL..... 35
Figura 2-23: Teorema semejanza AAA..... 35

Figura 2-24: Semejanza AA 35
Figura 2-25: Teorema LLL 36
Figura 2-26: Cuadrilátero 36
Figura 2-27: Cuadrilátero no convexo y convexo 37
Figura 2-28: Paralelogramo 37
Figura 2-29: Rectángulo $ABCD$ 38
Figura 2-30: Cuadrado $ABCD$ 38
Figura 2-31: Rombo $ABCD$ 38
Figura 2-32: Trapecio $ABCD$ 39
Figura 2-33: Polígono regular 40
Figura 2-34: Recta numérica. 41
Figura 2-35: Plano cartesiano. 45
Figura 2-36: Coordenada de un punto P 45
Figura 2-37: Compuesta de una transformación f con su inverso f^{-1} 47
Figura 2-38: Circunferencia C y su imagen C' son congruentes 50
Figura 2-39: ΔABC al aplicarle una isometría f. 51
Figura 2-40: $\measuredangle ABC$ al aplicarle una isometría f 51
Figura 2-41: Polígono P y su imagen P' 52
Figura 2-42: Paralelogramo $ABB'A'$ 54
Figura 2-43: Congruencia de los vectores AB y CC'. 54
Figura 2-44: Rotación del punto Q 55
Figura 2-45: Simetría central 57
Figura 2-46: Composición de dos simetrías centrales con distinto centro 58
Figura 2-47: Composición de tres simetrías centrales con distintos centros no alineados 58
Figura 2-48: Simetría axial 59
Figura 2-49: Composición de dos simetrías axiales 59
Figura 2-50: Homotecias con distintos valores k 62
Figura 2-51: $\Delta CPQ \sim \Delta CP'Q'$ 62
Figura 2-52: Composición de homotecias del mismo centro 63
Figura 2-53: Polígono $PQRS$ y su homólogo 63
Figura 2-54: $\square PQRS \sim \square P'Q'R'S'$ 64
Figura 2-55: Homotecia 66
Figura 2-56: Composición de una homotecia y una rotación 68
Figura 2-57: $\Delta CDE \sim \Delta CAB$ 68
Figura 2-58: $ABCD \sim A'B'C'D'$ 69
Figura 2-59: Mosaicos 72
Figura 2-60: Mosaico 4.8.8 73
Figura 2-61: Mosaico 6.6.6 73
Figura 2-62: Teselado con paralelogramos 74
Figura 2-63: Paralelogramo a partir de triángulos 74
Figura 2-64: Teselado con triángulos 74

Figura 2-65: Teselado con triángulos 75
Figura 2-66: Pentágono regular al intentar formar un mosaico 77
Figura 2-67: Mosaicos Regulares 78
Figura 2-68: Construcción de un par-hexágono con cuadriláteros 79
Figura 2-69: Teselado con cuadriláteros 79
Figura 2-70: Mosaicos no regulares con pentágonos 79
Figura 2-71: Mosaicos semirregulares 82
Figura 3-1: Herramienta para realizar transformaciones 86
Figura 3-2: Opciones de construcción de la herramienta de transformaciones geométricas 87

Lista de tablas

Pág.

Tabla 2-1: Medida ángulo interior polígono regular 28
Tabla 2-2: Formación de mosaicos regulares 76
Tabla 2-3: Soluciones posibles a la ecuación 1 con 3, 4, 5 y 6 polígonos 81
Tabla 3-1: Estándares de matemáticas relacionados a transformaciones geométricas .. 92
Tabla 3-2: DBA de matemáticas relacionados a transformaciones geométricas. 93

Introducción

La Matemática, a nivel de Educación Básica, es una de las asignaturas donde más se presentan dificultades y más específicamente en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, pues en muchos de los casos, el docente no trabaja usualmente, temas de geometría a pesar que están contemplados en todos los programas, debido a factores tales como: desconocimiento de la importancia de esta disciplina para el ser humano, falta de conocimiento y, por ende, de dominio de los contenidos geométricos que debe administrar y, en algunos casos, cuando es impartida, se enfoca de manera inadecuada limitándola sólo a fórmulas y cálculo de áreas (Báez & Iglesias, 2007).

Con respecto a la organización curricular del área de matemáticas, se puede observar en el diseño, que al componente geométrico (Pensamiento espacial y sistemas geométricos y Pensamiento métrico y sistemas de medida) se le dedica solo el 10% de la intensidad horaria del área, lo cual indica que se le da más importancia al componente numérico-variacional. Es decir, la escuela confinó la enseñanza de la Geometría a los aspectos métricos (aritmetización) y a una introducción a la trigonometría, caracterizándose, a la vez, por una fuerte tendencia a la resolución automática de problemas (Afonso Martín, 2003). De esta forma, los docentes desplazaron paulatinamente los contenidos relativos a geometría hacia las últimas unidades didácticas de su planificación escolar, llegándose inclusive a prescindir de su tratamiento en muchos cursos del nivel medio. (Abrate, Delgado, & Pochulu). Y como resultado, tenemos que los estudiantes han basado sus aprendizajes de geometría casi exclusivamente en el estudio memorístico de fórmulas de áreas y volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones descontextualizadas.
Atendiendo a las razones expuestas y teniendo en cuenta que el estudio de las transformaciones en el plano es un tópico de la geometría que es fundamental, entre otras cosas, para el reconocimiento e interpretación de las propiedades de las figuras planas y que desarrolla niveles de abstracción para el desarrollo del pensamiento

matemático de los estudiantes, es importante desde los primeros niveles de la educación básica introducir la geometría de transformaciones y construir estrategias que permitan un trabajo más significativo.

Se pensó entonces, en el diseño de una estrategia de enseñanza y aprendizaje para los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa de Aguas Blancas que permitiera reconocer y aplicar las transformaciones geométricas a figuras bidimensionales, logrando así desarrollar lo estipulado en los estándares de competencias en matemáticas, en particular el estándar del Pensamiento espacial y los Sistemas geométricos: "Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte" (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Teniendo en cuenta que, las transformaciones geométricas son movimientos en el plano, y los objetos geométricos tienen un enfoque dinámico, creemos necesario para su enseñanza el uso de herramientas que permitan a los estudiantes entender y visualizar dichos movimientos. Esto es posible con el software de geometría dinámica Geogebra, el cual tiene el potencial de proporcionar a los estudiantes un medio creativo y adecuado que les ofrece la posibilidad de poder interactuar directamente con objetos matemáticos tales como puntos, ángulos, segmentos, rectas y figuras, de una manera simple y natural, ayudando a fortalecer la autonomía en su aprendizaje. En pocos minutos el estudiante puede construir figuras, observar patrones, regularidades e invariantes que requerirían mucho más tiempo al solo utilizar lápiz y papel.

En consecuencia, la propuesta pretende aportar hacia el cambio en la orientación tradicional de la clase de matemáticas, basada en la transmisión de contenidos estáticos, y busca fortalecer el pensamiento espacial[1] de los estudiantes, por medio del estudio de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano, el cual es un tema que se caracteriza por tener un carácter mucho más dinámico.

[1] Se entiende por pensamiento espacial el "conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Algo interesante de las transformaciones geométricas es que al estudiarlas se convierte en un tema de estudio especialmente motivador, que abarca y permea variados temas de la geometría en general, tales como: congruencia, semejanza, área por recubrimiento, teselados, permitiendo a su vez cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas. Esta particularidad, hemos querido aprovecharla para el diseño de las actividades en donde se pretende aproximar al estudiante a otros conceptos, usando como medio el estudio de las transformaciones y a su vez lograr una visualización más amplia de los conceptos básicos de la geometría.

El trabajo se encuentra distribuido en cuatro capítulos, y sus contenidos se describen a continuación:

Capítulo 1. Se revisan los *aspectos históricos* en forma cronológica de las transformaciones geométricas, considerados a partir de la prehistoria y pasando por las diversas civilizaciones de las que se ha tenido conocimiento que han aportado a la evolución de la noción y el concepto de transformación. Así mismo con las coordenadas cartesianas, se realiza un estudio de los elementos históricos desde su aparición y su relación con el tema de las transformaciones. Luego, se considera la evolución de las transformaciones en el siglo XIX y, por último, la información histórica relevante acerca de los teselados.

Capítulo 2. Se consideran los *aspectos disciplinares* necesarios para el desarrollo de la propuesta de enseñanza. Se inicia con las definiciones más sencillas y fundamentales de la geometría; luego se estudian los polígonos, triángulos, cuadriláteros y sus áreas. A continuación, se presentan el plano coordenado y los números reales, luego, se estudian las transformaciones geométricas (isometrías y homotecias) y la relación que existe entre las transformaciones con los conceptos de congruencia, semejanza y teselados en el plano que intuitivamente nos lleva al concepto de área por recubrimiento.

Capítulo 3. Se plantean los *aspectos didácticos,* que son el soporte del diseño de la estrategia de enseñanza. Inicialmente se realiza un análisis de la influencia de las herramientas tecnológicas en especial del software de geometría dinámica Geogebra en la enseñanza de la geometría, luego se estudia el modelo de Van Hiele como gran

referente en el desarrollo del pensamiento geométrico y en la forma de enseñanza de la geometría, luego se hace un estudio acerca de lo que mencionan los estándares básicos de competencias, los derechos básicos de aprendizaje y los lineamientos curriculares acerca de la enseñanza de los conceptos de transformaciones geométricas en el plano cartesiano, y para cerrar el capítulo se hace el planteamiento de la estrategia didáctica junto con las actividades que buscan llevar al estudiante a aprender acerca de las transformaciones geométricas y a su vez aproximarlos a conceptos como son: la congruencia, la semejanza, números enteros, el área por recubrimiento a través de la construcción de teselados o mosaicos.

Capítulo 4. Se encuentran las *conclusiones y recomendaciones* sobre el trabajo realizado. Se destacan los elementos más importantes observados durante la elaboración de la estrategia de enseñanza y las sugerencias a tener en cuenta al momento de ser implementada en el aula de clase.

1. Aspectos históricos

A continuación, se encuentran los aspectos históricos divididos en cuatro secciones: La primera sección trata acerca de los aspectos históricos de las transformaciones geométricas, luego una revisión por la historia de las coordenadas cartesianas y los números reales que son un eje principal para el desarrollo del trabajo, pasamos luego a una historia más reciente con las transformaciones en el siglo XIX y por último lo relacionado a las teselaciones.

1.1 Transformaciones geométricas

En este aparte se describen los elementos históricos relacionados con las transformaciones geométricas que fundamentan este trabajo. Consideraré el surgimiento y la evolución de la noción y el concepto de transformación en el plano cartesiano presente desde la prehistoria, pasando por todas las grandes civilizaciones que han existido hasta nuestros días. Teniendo en cuenta que el conocimiento de la historia de la noción de transformación puede aportar a su enseñanza.

Para comenzar, remontémonos a la prehistoria y cómo intuitivamente y por el hecho que, al observar la naturaleza, nos quedamos sorprendidos al ver no solo la belleza que hay en ella, sino también en ver que cada ser que la compone se trata de una figura proporcionada, bien equilibrada, lo cual nos conduce automáticamente al concepto de simetría, en donde hay una especie de concordancia entre partes diversas que integran un todo. El interés del hombre prehistórico por los diseños y las relaciones espaciales puede haber surgido de su sentido estético, para disfrutar de la belleza de la forma.

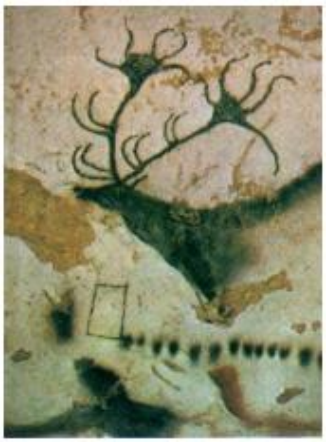
Desde tiempos inmemoriales la geometría y el concepto de transformación ha acompañado las producciones humanas, incluso desde la prehistoria cuando nuestros antepasados comenzaron a reproducir los distintos aspectos de su realidad utilizando dibujos o comenzaron a adornar sus pertenencias con motivos geométricos simples o producidos por medio de simetrías. Igualmente, cuando empezaron a hacer sus primeras construcciones, comenzaron a disponerlas en forma geométrica. En este primer momento, el aspecto visual de la geometría es predominante. (Castiblanco A. , Urquina, Camargo, & Acosta, 2004).

Las transformaciones geométricas han estado presentes a lo largo de la historia en todas las culturas. Las podemos encontrar en muchas facetas del mundo físico: en la naturaleza (hojas de los árboles, telas de araña, paneles de abeja, entre otros), en la arquitectura (fachadas de edificios que presentan simetría axial respecto a un eje, frisos donde se repiten el mismo adorno ornamental, entre otros), en la cultura y en muchas creaciones artísticas (esculturas, pinturas), son muchos los artistas que realizan sus creaciones con base en repeticiones de un mismo elemento o motivo geométrico. Todas las culturas han utilizado las transformaciones geométricas en sus manifestaciones artísticas, utilizando los movimientos en el plano para crear bellísimas decoraciones geométricas.

La geometría y el arte indudablemente desde sus orígenes han estado ligados, tanto así, que se usa el término de arte geométrico.

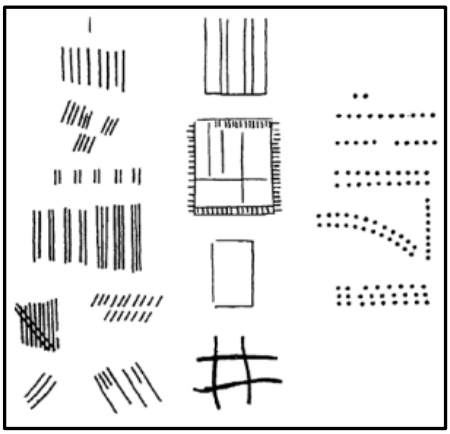
De la época del paleolítico han sido halladas no solo la representación de animales (Figura 1-1), sino la existencia de un arte con representaciones de carácter geométrico y trazos lineales de carácter abstracto, tales como: círculos, triángulos, cuadriláteros, puntuaciones, líneas paralelas y líneas perpendiculares (Figura 1-2). Estas formas de expresión geométrica han sido consideradas como signos o símbolos, aunque no todos tienen carácter geométrico.

Figura 1-1: Ciervo acompañado de un signo en forma de cuadrilátero seguido de puntuaciones -Cueva de Lascaux.



Fuente: (Leroi-Gourhan, 1968) p. 191.

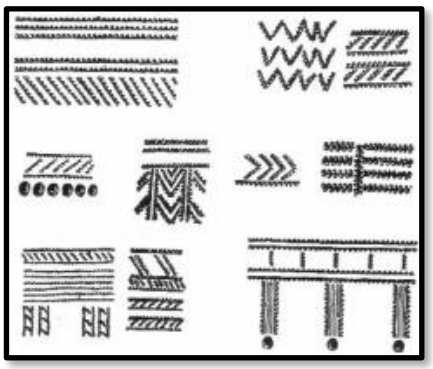
Figura 1-2: Signos geométricos: líneas paralelas, perpendiculares, puntuaciones y cuadriláteros.



Fuente: (Leroi Gourhan, 1984) p. 361-363.

El período Neolítico se ha caracterizado por la utilización del tejido de la arquitectura megalítica y un aspecto relevante ha sido el uso de la cerámica, la cual sin duda fue la gran innovación artística de este período, en donde se realizaban vasijas en cerámica para su posterior decoración caracterizados por varios tipos de adornos geométricos, como se ilustra en la Figura 1-3 y Figura 1-4. De este modo, se considera que el arte del período neolítico evolucionó acercándose cada vez más a las formas regulares de la geometría y “las traslaciones se convirtieron en una herramienta artística importante, porque dependiendo de las figuras geométricas que allí se esculpían se podía distinguir la cultura que la elaboraba” (Holderlin, 2000). El estilo naturalista que predominó durante el período paleolítico fue sustituido por un estilo más geometrizado.

Figura 1-3: Modelos decorativos de la cerámica cardinal.



Fuente: (Frejeiro, 1981) p. 185.

Figura 1-4: Vaso inciso de la cueva de los murciélagos de Zuheros – Córdoba.

Fuente: (López, 1989) p.32.

En la antigua Mesopotamia hace 6000 años, la geometría no era sino una cosa más entre las muchas de la vida diaria, a las cuales era posible aplicarles los métodos aritméticos. La geometría babilónica venía a reducirse a una colección de reglas para el cálculo de áreas de figuras planas sencillas, incluyendo los polígonos regulares, y de los volúmenes de cuerpos sólidos también sencillos. La geometría no era una disciplina especial, sino que era tratada igualmente que a cualquier otra forma de relación numérica entre objetos de uso práctico. La Geometría según escritos de los historiadores griegos Heródoto, Estrabón y Diodoro, atribuían a los egipcios el nacimiento de la geometría como ciencia. Inicialmente la geometría constituía un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, ángulos, áreas y volúmenes. Las razones prácticas, según Heródoto, se hallan en Egipto, donde era necesario trazar los linderos de las tierras cada vez que el río Nilo las inundaba y con base en esos linderos había que pagar los impuestos.

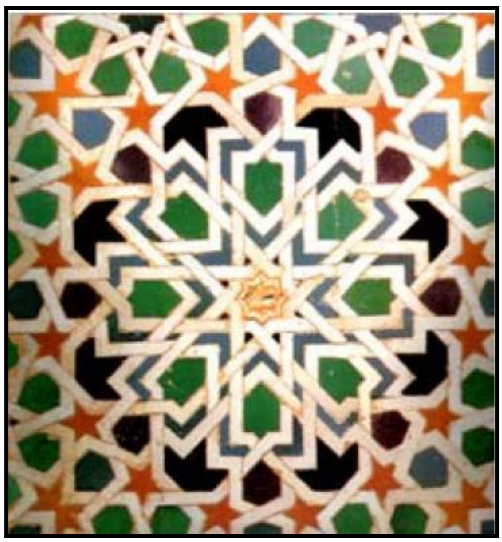
Para los griegos la geometría deja de ser un conocimiento puramente práctico, y se eleva como modelo conceptual del razonamiento. Los griegos fueron grandes geómetras, inquirieron sobre la geometría fundamentalmente a partir del siglo VII a.C. hasta aproximadamente el III a.C., cuando ésta alcanza su mayor esplendor. Los geómetras griegos tenían gran interés por cuestiones de rigor y validez lógica. En el siglo III a. C. el matemático griego Euclides en su célebre obra llamada *Los Elementos* configuró la geometría en forma axiomática, marco teórico que orientó y sigue orientando el trabajo en geometría Euclidiana. La obra está compuesta por trece libros: en el libro I Euclides desarrolla 48 proposiciones a partir de 23 definiciones (como punto, línea y superficie), 5 postulados y 5 nociones comunes (axiomas). Dentro de las nociones comunes encontramos en la noción 4 lo siguiente: *"Cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí".*

Lo que se puede evidenciar de la noción 4 del libro I de *Los Elementos,* es que para Euclides aún no existía el concepto de transformación, debido a que estos desplazamientos que intervienen, son desplazamientos de figuras y no transformaciones que operan sobre el espacio como conjuntos de puntos. Euclides simplemente logró establecer una correspondencia entre los elementos de dos figuras mediante la superposición para afirmar la igualdad de las mismas. Para Euclides los movimientos

constituyen un concepto básico y la congruencia es un concepto derivado de los movimientos. Es decir, dos figuras geométricas son congruentes si por un movimiento coinciden en todas sus partes. Por lo tanto, las propiedades geométricas de las figuras congruentes, son aquellas que no cambian por un movimiento.
Entonces, sin haberlo hecho explícito, notamos que los griegos manejaban intuitivamente el concepto de transformación rígida y de semejanza cuando, por ejemplo, en el axioma “todos los ángulos rectos son iguales”, en la palabra “iguales” se incluye la idea de que se puede mover uno hasta traslaparse sobre el otro.

En el arte Islámico se encuentran muchas representaciones de carácter geométrico, posiblemente el arte Islámico sea uno de los mayores exponentes del arte geométrico en la antigüedad. El arte Islámico utiliza el espacio y el movimiento de formas geométricas para representar a Dios y el universo. En el arte Islámico la utilización de formas geométricas es la principal fuente de expresión artística, estas representaciones geométricas están basadas en fuentes abstractas puras o en estilizaciones geométricas de la flora. Su decoración está formada casi exclusivamente por la formación de patrones, limitados en su forma tradicional a la geometría Euclidiana y el uso de la simetría.

Figura 1-5: Decoración geométrica del Arte Nazarí –Palacio de Alhambra – Granada.



Fuente: (V.V.A.A, 1994) p. 148, 208, 212, 216.

Las manifestaciones artísticas islámicas muestran distintos tipos de ornamentaciones planas en donde se aprecia la repetición regular de un motivo formando mosaicos geométricos. En la Figura 1-5 se ilustran decoraciones de la Alhambra, en donde se evidencia que los árabes fueron unos excelentes creadores de mosaicos geométricos, dado que los artistas nazaríes conocían todas las formas posibles de rellenar el plano utilizando simetrías, giros y traslaciones.

La noción de transformación empezó a evolucionar junto al arte renacentista, cuando los pintores y artistas de la época del renacimiento intentaban aproximar al máximo sus obras a la realidad. Para ello, exploraron las leyes de la visión, se dedicaron a estudiar la naturaleza, adquirieron suficientes conocimientos sobre el cuerpo humano y sus proporciones. La conjunción del arte, de las matemáticas y de la técnica, juntamente con el deseo de lograr la corrección y verosimilitud en la representación del espacio, dieron origen a una rama de la geometría: la perspectiva. Según Michael Kubovy "*era un sistema que permitía a los artistas representar el espacio de acuerdo con reglas geométricas*"[2] o también definía la perspectiva como un "*procedimiento puramente*

[2] Tomado de [18], p. 191.

geométrico para la representación de un mundo tridimensional sobre una superficie bidimensional."[3] (Kubovy, 1996).

Haciendo un recuento de los artistas más sobresalientes de la época del Renacimiento tenemos a:

- *Filippo Brunelleschi* (1377-1446) arquitecto florentino, fue pionero al incorporar correctamente la perspectiva lineal en sus pinturas.

- *Leon Battista Alberti* (1404-1472) en un tratado escrito en el año 1435 e impreso en 1511, titulado *Della pictura* expone formalmente algunos de los problemas matemáticos y el primer análisis geométrico y óptico conocido sobre la perspectiva lineal.

- *Piero Della Francesca* (1415-1492), pintor italiano que en su obra *De prospectiva pingendi*, se ocupó del problema de representar sobre el plano del cuadro objetos tridimensionales tal como se ven desde un punto de vista dado[4].

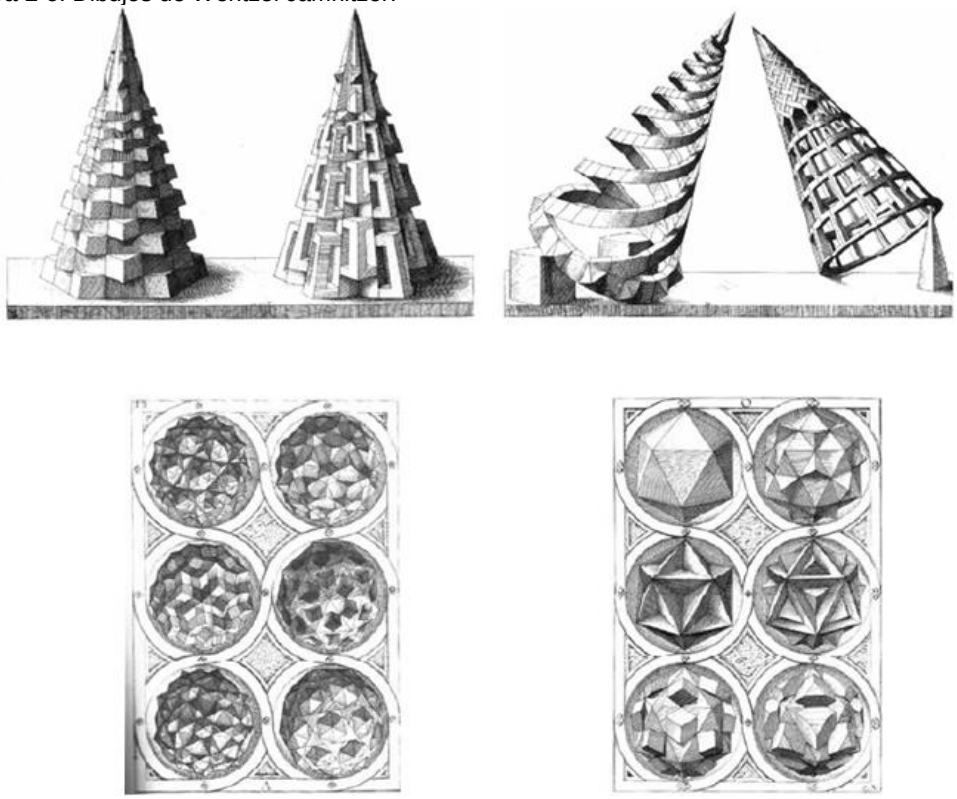
- *Leonardo da Vinci* (1452-1519), conocido por sus aplicaciones de la matemática a la ciencia y a la técnica y por su teoría de la perspectiva.[5]

- *Albert Dürer* (1471-1528), artista alemán, introdujo el uso de las proyecciones horizontales y verticales en las proporciones del cuerpo humano.

- Wentzel Jamnitzer, artista nacido en Viena en el año 1508. Escribió el libro "*Perspectiva Corpurum Regularium"*. El artista realiza diversas transformaciones a partir de una estructura y le da continuidad, son dibujos muy interesantes debido a la tridimensionalidad que alcanzan (Figura 1-6). También realizó 44 dibujos que como el diría: *"siguen el renombrado arte de la perspectiva."* [6]

[3] Tomado de [18], p.39.
[4] Tomado de [5], p.377.
[5] Tomado de [5], p.359.
[6] Tomado de [14], p.96.

Figura 1-6: Dibujos de Wentzel Jamnitzer.



Fuente: Tomado de (Franco Ruschmann, 2003).

El arquitecto e ingeniero francés Gerard Desargues (1591-1661), es considerado por Carl Boyer como el "verdadero profeta de la geometría proyectiva."[7] Fue el precursor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes. La Geometría proyectiva de Desargues, derivó de la técnica renacentista de la perspectiva y del principio de continuidad de Johannes Kepler. Según Carl Boyer, "las formas y tamaños aparentes cambian según el plano de incidencia que corta al cono de los rayos visuales o de los rayos de luz, pero ciertas propiedades permanecen invariantes bajo tales cambios, y son precisamente estas propiedades las que estudió Desargues. Una sección cónica sigue siendo una sección cónica independientemente de cuántas veces se vea sometida a proyección."[8]

[7] Tomado de [5], p.454.
[8] Tomado de [5], p.452.

Blaise Pascal (1632-1662) trabajó en las secciones cónicas y desarrolló importantes teoremas en la geometría proyectiva. Pascal se familiarizó con las ideas de Gerard Desargues y en 1640 redactó su ensayo sobre las cónicas (Essay pour les coniques) dedicado a la transformación de figuras geométricas por las proyecciones entonces llamadas Cónicas, simplifica la geometría proyectiva y expone el hexágono que lleva su nombre.

En resumen, según menciona Jahn (1998):

"En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante." (Jahn, pág.36).

1.2 Coordenadas cartesianas

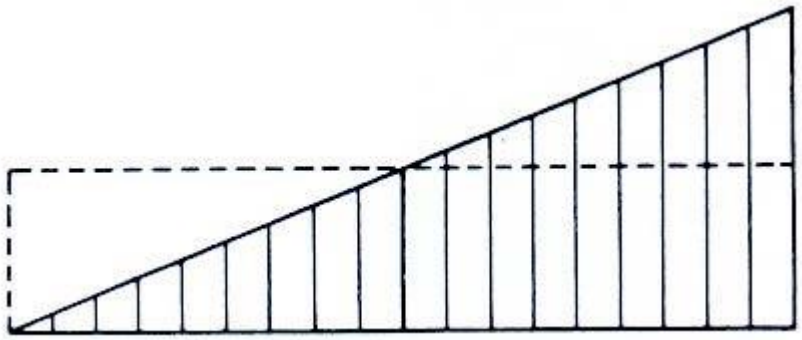
Apolonio (262 – 190 a. de C.) anticipó a Descartes y Fermat en unos 1800 años cuando en los métodos que utilizó en las *cónicas* utiliza coordenadas. Unas rectas como referencia y un diámetro y una tangente en uno de sus extremos. Las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las abscisas y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las ordenadas.

Nicole Oresme (1323-1382) introdujo un método llamado la "latitud de las formas" para mostrar gráficamente las velocidades con el que representó el movimiento uniformemente acelerado. Menciona Boyer (1968) que "los puntos de una recta horizontal representan los instantes de tiempo (o *longitudes)* y para cada instante de tiempo traza un segmento *(o latitudes*) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en dicho instante"[9]. Y además que "los

[9] Tomado de [5], p.339.

términos de latitud y longitud que utilizaba Oresme vienen a ser completamente equivalentes a nuestras ordenadas y abscisas respectivamente, y sus representaciones gráficas se parecen mucho ya a la actual geometría analítica"[10] (Figura 1-7). Lo nuevo de su método no fue la utilización de un sistema de coordenadas sino la representación gráfica de una cantidad variable.

Figura 1-7: La latitud de las formas.



Fuente: (Boyer C. , 1968) p. 339.

En el siglo XVII, René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) produjeron casi paralelamente un momento crucial con la invención de la geometría analítica, la cual se basa en una correspondencia entre las curvas estudiadas por la geometría y las ecuaciones estudiadas por el álgebra, lo que permite reformular los problemas geométricos en términos algebraicos.

Según Boyer (1968), "el uso de las coordenadas no surge de consideraciones de tipo práctico ni de la representación gráfica de funciones medieval, sino que aparece al aplicar el álgebra renacentista a problemas geométricos de la antigüedad griega."[11]

Los autores Piaget y García en su obra "Psicogénesis e historia de las ciencias" (1983), concluyen que "la noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica".

[10] Tomado de [5], p.340.
[11] Tomado de [5], p.437.

1.3 Las transformaciones en el siglo XIX

Abordaremos ahora lo ocurrido con el desarrollo de las transformaciones en el siglo XIX. Boyer (1968) menciona lo siguiente:

"Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que estudiaron los matemáticos una gran variedad de transformaciones. De entre ellas, las que se hicieron más populares fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que define la llamada geometría proyectiva. Los orígenes de esta nueva geometría estaban ya, en realidad, en las obras de Pascal y de Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo sistemático, desarrollo debido especialmente a Poncelet."[12]

Cómo principales exponentes tenemos entonces a:

Jean-Victor Poncelet (1788-1867). Considerado como el verdadero fundador de la geometría proyectiva. En su obra *Traité des propriétés projectives des figures* (tratado de las propiedades proyectivas de las figuras) publicada en 1822, es notoria su clara inclinación hacia los métodos sintéticos dejando a un lado la geometría analítica y se convierte entonces en un gran impulsor de los planteamientos puramente geométricos, desarrollando y difundiendo el método de las transformaciones e inspirando obras tan diversas como las de Möbius, Steiner, Plücker, Gergonne y Chasles.

Jakob Steiner (1796-1863). Nació en Suiza e hizo sus estudios en Alemania. Suele considerarse como el más grande de los geómetras de la época moderna, e influenciado por Poncelet, hizo progresos en el campo de la geometría utilizando exclusivamente métodos sintéticos, contribuyendo así al campo de la geometría proyectiva.

A mediados del siglo XIX se conocían una gran cantidad de geometrías que tenían sumida a la geometría en un pequeño caos. Évariste Galois (1811-1832) en su corta vida

[12] Tomado de [5], p.661.

hizo importantes aportes, y uno de ellos fue usar la palabra grupo en el sentido técnico de la matemática, usándolo como idea central en la teoría de ecuaciones algebraicas, y fue precisamente el concepto de grupo lo que tuvo un papel unificador en la geometría. A finales del siglo XIX el alemán Félix Klein (1849 – 1925), presentó una conferencia con el largo título "Consideraciones Comparativas sobre las Investigaciones Matemáticas Modernas", conocida hoy en día por el sobrenombre de Programa de Erlangen.[13] En ella, Klein asienta sobre el concepto de grupo todas las geometrías conocidas en aquella época, haciendo una clasificación perfecta y elegante de las geometrías.

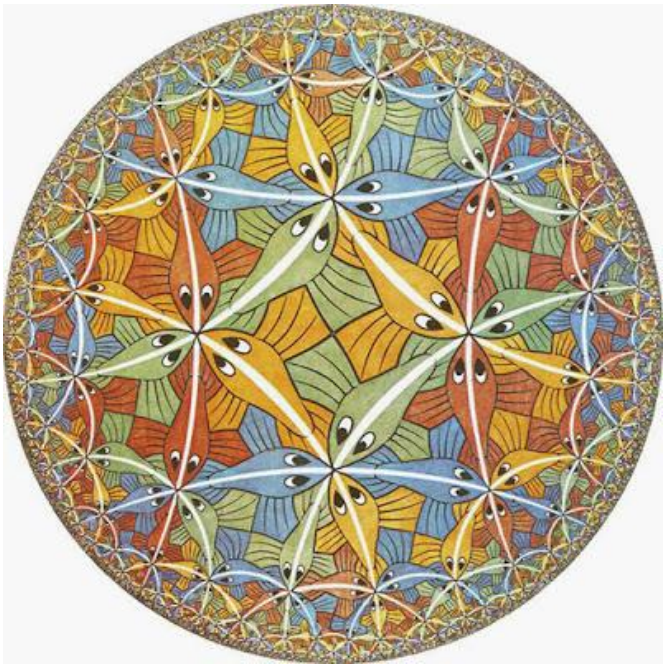
Klein consideraba que "las propiedades geométricas se clasifican y se caracterizan por las transformaciones que las dejan invariantes y a cada tipo de transformación le corresponde una geometría[14]." Es decir que, para Klein, cada geometría da lugar a un grupo, formado por las transformaciones que dejan invariante los elementos geométricos. Sin embargo, planteó que: dado un grupo, estudiamos sus invariantes, lo que da lugar a una geometría. Klein en colaboración con el matemático noruego Sophus Lie (1842–1899) desarrollan, aplican y popularizan la teoría de grupos de transformaciones y logran que las transformaciones fueran consideradas como grupos y así se comenzó a reconocer su alcance en geometría. En resumen, una geometría es el estudio de las propiedades invariantes por un grupo operando sobre un espacio y ese grupo determina la estructura de la geometría. Así, para Klein, las transformaciones actúan sobre un espacio y no solamente sobre las figuras. Jahn (1998) afirma que "considerar al espacio como objeto de estudio geométrico es el otro punto importante que se desprende del análisis del Programa de Erlangen." [15]

Maurits Cornelis ESCHER (1898–1972) fue un artista holandés consumado en la técnica de composición a modo de teselas. Una teselación, es una regularidad o patrón de figuras que cubre o pavimenta completamente una superficie plana. Cumple con dos

[13] http://documentosmatematicos.blogspot.com/2010/11/el-programa-de-erlangen.html
[14]Transformaciones: Afín (afinidad), Isométrica (rotación), Proyectiva (proyectividad), Conforme (semejanza), Alométrica (alometría) y topológica (homeomorfismo).
[15] Tomado de [15], p. 49.

requisitos: que no queden huecos y que no se superpongan las figuras. Las teselaciones se crean usando transformaciones isométricas sobre una figura inicial. Escher admiraba profundamente las teselaciones del complejo palaciego Alhambra, de Granada, España, y dedicó muchos años de su vida a la creación de diferentes series de teselaciones[16]. En la Figura 1-8 se aprecia un cuadro de Escher en donde mezcla: simetría, patrones, objetos con "doble" sentido y no necesariamente hay que saber matemática para disfrutarlo.

Figura 1-8: Grabado en madera llamado *Círculo límite III* por el artista holandés M.C. Escher.



Fuente: tomado de: http://jamessimat.blogspot.com.co/2016/06/arte-y-matematica-teselados-de-escher-y.html

Recordemos que para Euclides los movimientos constituyen un concepto básico y la congruencia es un concepto derivado de los movimientos. Es decir, dos figuras geométricas son congruentes si por un movimiento coinciden en todas sus partes. Por lo tanto, las propiedades geométricas de las figuras congruentes, son aquellas que no cambian por un movimiento. Mientras que el alemán David Hilbert (1862-1943) en su monografía *Fundamentos de la geometría*, introdujo la palabra "congruencia" como

[16] Recuperado el 14-dic-2016 de: http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__d77f8acf-7a06-11e1-831b-ed15e3c494af/index.html

concepto básico y definió el movimiento como concepto derivado. El movimiento es, entonces, una correspondencia que lleva una figura a otra congruente.[17]

1.4 Teselados

Esta sección trata acerca de los aspectos históricos de los teselados y toma como principal referencia el libro titulado Simetría dinámica (Alsina, Pérez, & Ruiz, 1989).

La palabra teselado proviene de “tessellae”, pues así llamaban los romanos a las construcciones y pavimento de su ciudad.

La geometría ha sido usada hace muchísimos años con fines decorativos, cientos de culturas han dejado su legado en muchos lugares y objetos que han sido embellecidos con diseños geométricos regulares. Los teselados han sido una forma común de decorar utilizada en diversos lugares desde tiempos antiguos con el objetivo de recubrir suelos, paredes o como motivo decorativo en objetos tales como muebles, alfombras tapices, entre otros.

De las primeras civilizaciones que se tiene conocimiento haya utilizado esta técnica son los Sumerios hace 4000 a.C. Algunos mosaicos sumerios con varios miles de años de antigüedad contienen regularidades geométricas en donde usaban arcilla cocida que coloreaban y esmaltaban.

Arquímedes, en el siglo III a.C. hizo un estudio acerca de los polígonos regulares que pueden cubrir el plano.

Johannes Kepler (1571-1630), astrónomo alemán, probablemente fue el primero en investigar las posibles maneras de llenar el plano con polígonos regulares, en su obra *Harmonice mundi*, de 1619. Además, realizó estudios en tres dimensiones de los llamados sólidos platónicos.

[17] Recuperado de: http://s1e00454ab0d2eb82.jimcontent.com/download/version/1317747175/module/5436082469/name/Movimientos%20en%20el%20planosep2011.docx

Entre 1869 y 1891, el matemático Camille Jordan, el cristalógrafo ruso Evgenii Konstantinovitch Fiodorov y la psicóloga Camila Rial, estudiaron completamente las simetrías del plano, e iniciaron así el estudio sistemático y profundo de los teselados. En 1891 se demostró que no hay más de 17 estructuras básicas para las infinitas decoraciones posibles del plano formando mosaicos periódicos.

Más recientemente, en 1924 G. Polya y P. Niggli redescubrieron la existencia de los 17 grupos de isometrías en el plano, es decir, que todas las formas de recubrir un plano mediante la repetición regular de un motivo dado puede clasificarse, atendiendo a sus simetrías, en 17 clases distintas y desde entonces se ha comenzado la búsqueda de decoraciones periódicas del plano en obras de arte de determinadas culturas que han destacado en estas realizaciones.

H. Weyl asegura en su obra simetría de 1958, que las 17 posibilidades eran conocidas por los artesanos del viejo Egipto.

Fejes Tóth en *regular figures* de 1964 asegura que, en La Alhambra de Granada hay una representación geométrica de cada uno de los 17 modelos posibles.

Un personaje clave en este tema de los teselados, es el artista holandés M. C, Escher (1898-1972) quien por sugerencia de su amigo matemático H.S.M. Coxeter, aprendió los teselados hiperbólicos, lo que motivó su interés por el palacio de La Alhambra, en Granada. Con los trabajos de Polya y el arte incomparable que caracterizó, Escher llegó a realizar unos mosaicos que incluso llegan a estar basados en geometrías no-euclídeas. Fue así, como dejó un legado artístico con un sinnúmero de bellas, curiosas y misteriosas obras de arte.

2. Aspectos disciplinares

En esta sección se relacionan los conceptos geométricos necesarios para el desarrollo de la propuesta de enseñanza de las transformaciones geométricas en el plano. El capítulo inicia con las definiciones más sencillas y fundamentales de la geometría; luego se estudian los polígonos, triángulos, cuadriláteros y sus áreas. A continuación, se presentan los números reales y el plano coordenado, luego, se estudian las transformaciones geométricas y como se relacionan con los conceptos de congruencia, semejanza y área por recubrimiento. Es de resaltar que, se elaboraron suficientes ilustraciones para facilitar la comprensión de los conceptos involucrados y que para la consolidación de esta sección fue necesaria la consulta de distintas fuentes bibliográficas. Como referentes más importantes tenemos: el texto *Geometría Elemental* (Moise & Downs, 1964) para los conceptos geométricos, el texto de *La Geometría en el Arte y el Diseño* (Mariño, 2004) para las teselaciones en el plano, para lo relacionado con los conceptos de transformaciones geométricas el libro *Lecciones de Geometría Euclidiana* (Castillo, 1993) y el trabajo de grado titulado *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza* (Julio Barrera, 2014).

2.1 Conceptos preliminares de geometría

2.1.1 Términos no definidos: Punto, recta y plano

Los términos geométricos más sencillos y fundamentales no tienen una definición precisa y por ello se les conoce como *términos no definidos.* Estos términos no definidos son *punto, recta y plano.* Sin embargo, mediante la utilización de objetos reales se puede elaborar una idea de lo que sería un *punto*, una *recta* y un *plano*.

Si se hace una marca en una hoja de papel con la punta de un lápiz bien afilado, se obtendrá una representación bastante fiel de un punto. La palabra recta se asocia inmediatamente a una línea recta. Una recta se extiende indefinidamente en ambos sentidos por lo cual se marca con flechas los extremos de las porciones de rectas que se dibujan. Si se piensa en una superficie perfectamente lisa en todas las direcciones, se tendrá una buena idea de lo que se supone es un plano.

A partir de estos términos no definidos se pueden enunciar las siguientes definiciones.

2.1.2 Segmento, rayo y ángulo

Postulado 1. Postulado de la distancia.

"A cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único."[18]

Definición 1. "La distancia entre dos puntos es el número obtenido mediante el postulado de la distancia. Si los puntos son A y B, entonces indicamos la distancia por AB."[19]

Definición 2. Dados dos puntos A y C se dice que **"***B* ***está entre*** *A* y *C* si:

(1) *A*, *B* y *C* son puntos distintos de una misma recta.
(2) *AB* + *BC* = *AC.*"[20]

Definición 3. "Para dos puntos cualesquiera *A* y *B*, el ***segmento*** $\overline{AB}$ es el conjunto de los puntos *A* y *B*, y de todos los puntos que están entre *A* y *B*. Los puntos *A* y *B* se llaman los extremos de $\overline{AB}$."[21]

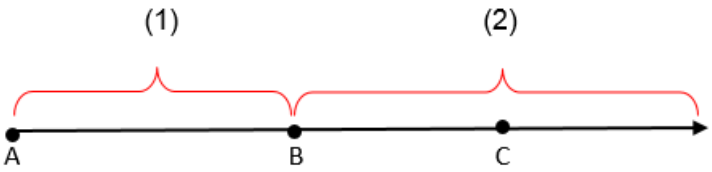
Definición 4. "El número *AB* se llama la ***longitud*** del segmento $\overline{AB}$."[22]

[18] Tomado de [27], p. 31.
[19] Tomado de [27], p. 31.
[20] Tomado de [27], p. 39.
[21] Tomado de [27], p. 41.
[22] Tomado de [27], p. 42.

Es de resaltar la diferencia entre los símbolos $\overline{AB}$ y AB. El símbolo $\overline{AB}$ que se mencionó en la definición 3, se utiliza para representar el segmento, es decir, un conjunto de puntos, mientras que AB se utiliza para expresar un número que da la medida de la distancia entre los extremos.

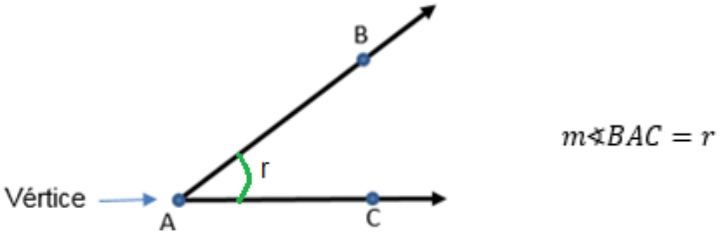
Definición 5. "Sean *A* y *B* dos puntos de una recta *l*. El ***rayo*** $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la reunión de (1) el segmento $\overline{AB}$ y (2) el conjunto de todos los puntos *C* para los cuales es cierto que *B* está entre *A* y *C*. El punto *A* se llama el *extremo* de $\overrightarrow{AB}$. "[23]

Figura 2-1: Representación de las dos partes del rayo



Definición 6. "Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un ***ángulo***. Los dos rayos se llaman los *lados del ángulo* y el extremo común se llama el *vértice*. Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo se indica con $\measuredangle BAC$ o con $\measuredangle CAB$."[24]

Figura 2-2: Representación del ángulo $\measuredangle BAC$ o $\measuredangle CAB$



Para hallar la medida de un ángulo se utiliza el transportador, el cual tiene como unidad de medida el grado y resulta la siguiente definición:

Definición 7. El número de grados de un ángulo se llama su ***medida***. Si hay *r* grados en el $\measuredangle BAC$, entonces escribimos $m\measuredangle BAC = r$. ().

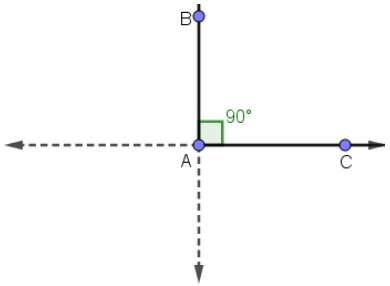
[23] Tomado de [27], p. 42.
[24] Tomado de [27], p. 75.

Definición 8. "Dos ***ángulos*** *son* ***congruentes***, si tienen la misma medida. Dos ***segmentos*** *son* ***congruentes***, si tienen la misma longitud."[25]

Definición 9. Un ***ángulo recto*** es un ángulo cuya medida es 90°.

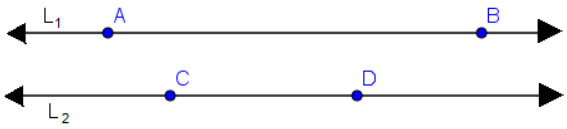
Definición 10. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo recto como se observa en la Figura 2-3, entonces, se llaman ***perpendiculares***, y escribimos: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, esto aplica para cualquier combinación de rectas, rayos o segmentos.

Figura 2-3: Ángulo recto y perpendicularidad.



Definición 11. **"**Dos rectas son ***paralelas***, si están en un mismo plano y no se intersecan."[26]

Figura 2-4: Rectas paralelas.



Para indicar que las rectas L_1 y L_2 de la Figura 2-4 son paralelas, se escribe: $L_1 \parallel L_2$.

Los segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{BC}$ están en las rectas paralelas L_1 y L_2, entonces, se escribe:

$\overline{AB} \parallel \overline{BC}$.

[25] Tomado de [27], p. 112.
[26] Tomado de [27], p. 229.

2.2 Polígonos

Definición 12. "Sean P_1, P_2, …, P_n, una sucesión de n puntos distintos de un plano con $n \geq 3$. Suponiendo que los n segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, …, $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$, tienen las siguientes propiedades:

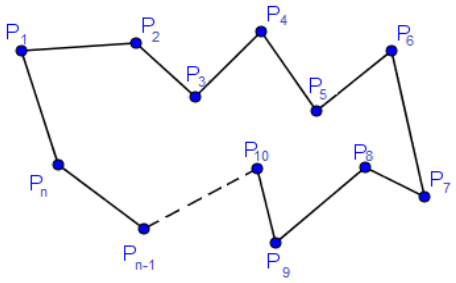
(1) Ningún par de segmentos se intersecan, salvo en sus puntos extremos.

(2) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales." [27]

Se llama ***polígono*** a la reunión de los n segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, …, $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$, que son los *lados* del polígono y si sumamos las longitudes de los lados del polígono, ésta suma recibe el nombre de ***perímetro*** del polígono.

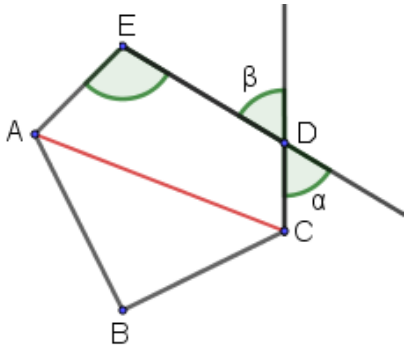
Los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los ***vértices*** *del polígono*. Los ***ángulos*** *del polígono* se simbolizan: el $\measuredangle P_nP_1P_2$, el $\measuredangle P_1P_2P_3$, y así sucesivamente. (Figura 2-5).

Figura 2-5: Representación de polígono



Definición 13. Una ***diagonal*** *de un polígono* es un segmento que une dos vértices no consecutivos. Una de las diagonales en el polígono de la Figura 2-6 es $\overline{AC}$.

Figura 2-6: Diagonal, ángulo interior y ángulo exterior.



Definición 14. Dos lados de un polígono que comparten un vértice común forman un **ángulo interior** del polígono.

Uno de los ángulos interiores del polígono de la es $\measuredangle AED$.

Definición 15. El ángulo formado por un lado de un polígono y la prolongación del lado adyacente se denomina **ángulo exterior** o ángulo externo del polígono.

---

[27] Tomado de [27], p. 513.

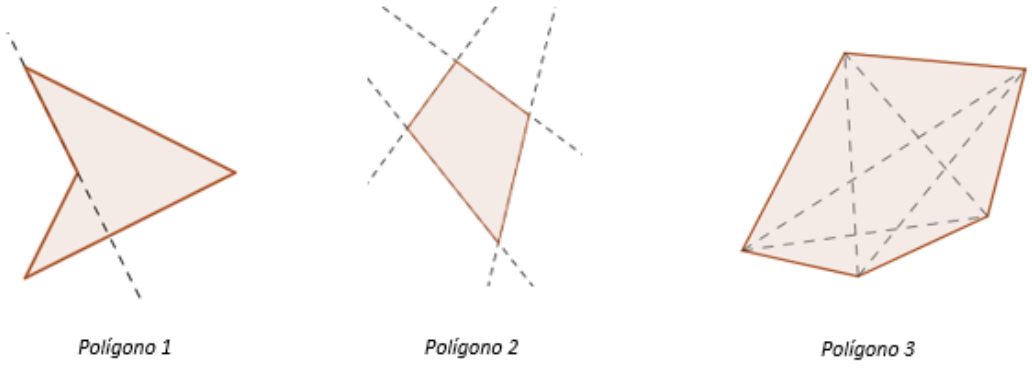
Definición 16. Dos ***polígonos*** son ***congruentes*** si sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.

Definición 17. Dos ***polígonos*** son ***semejantes*** si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales.

Definición 18. Un ***polígono*** es ***convexo*** cuando ningún par de sus puntos está a lados opuestos de una recta que contenga un lado del polígono, o si todas sus diagonales están en el interior del polígono.

En el caso del polígono 1 que se muestra en la Figura 2-7, se observa que al trazar una recta que contiene un lado del polígono quedan puntos a ambos lados de la recta, por tanto, no sería un polígono convexo. Mientras que en el polígono 2, se trazaron las 4 rectas que contienen los 4 lados del polígono y vemos que todos los puntos del polígono siempre quedan a un solo lado de la recta, entonces, es un polígono convexo. En el polígono 3 se observa que todas sus diagonales están en su interior, entonces, es convexo.

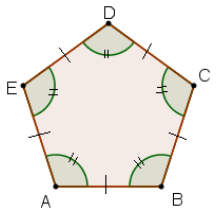
Figura 2-7: Polígono no convexo y polígono convexo



Definición 19. Un ***polígono*** es ***regular***, cuando es convexo y todos sus lados y ángulos son congruentes.

Por ejemplo: En la Figura 2-8 se muestra el polígono regular $ABCDE,$ el cual es convexo y donde sus lados y ángulos interiores son congruentes, así:

Figura 2-8: Polígono regular $ABCDE$



$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{AE}$$

$$\measuredangle A \cong \measuredangle B \cong \measuredangle C \cong \measuredangle D \cong E$$

Entre los polígonos regulares tenemos el ***triángulo equilátero*** (polígono regular de 3 lados), el ***cuadrado*** (polígono regular de 4 lados), los demás tienen nombres que derivan de acuerdo al número de lados. El ***pentágono regular*** (5 lados), ***hexágono regular*** (6 lados), ***heptágono regular*** (7 lados) … en general, un polígono de *n* lados se denomina ***n-gono.***

Ángulos de un polígono

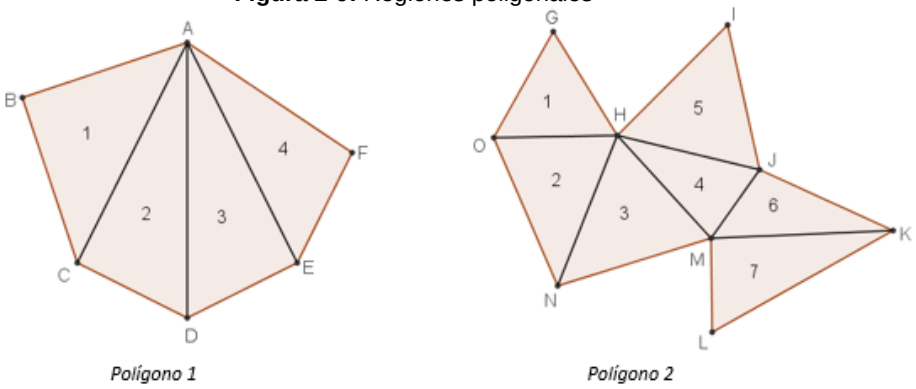
Teorema (1).

La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es: $(n - 2)\ 180°$.

Demostración:

Dado un polígono, desde un vértice del polígono se pueden trazar $n - 3$ diagonales que determinan $n - 2$ triángulos, puesto que en cada triángulo la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 180°, se tiene que la suma de las medidas de los ángulos interiores del póligono dado es $(n - 2)\ 180°$. La Figura 2-9 ilustra el teorema (1):

Figura 2-9: Regiones poligonales

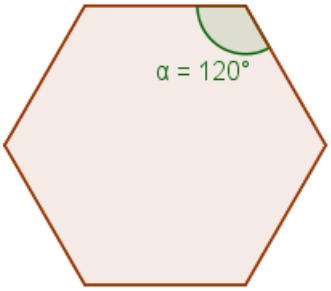


Corolario

La medida de un ángulo interior de un polígono regular de *n* lados es $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$

Véase una ilustración de este resultado en la Figura 2-10.

Figura 2-10: Ángulo interior hexágono regular



La Figura 2-10 muestra el caso para cuando $n = 6\ lados$, entonces, la medida de un ángulo interior es 120°.

Tabla 2-1: Medida ángulo interior polígono regular

n	**Ángulo**
3	60°
4	90°
5	108°
6	120°
7	128,57…°
8	135°
9	140°
10	144°

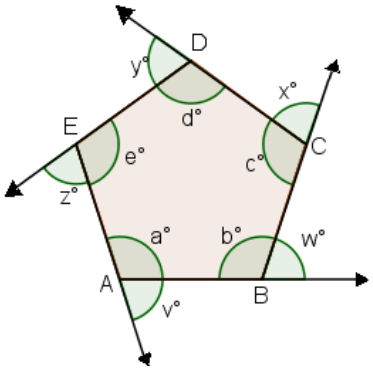
En la Tabla 2-1 se observan algunos polígonos regulares con la respectiva medida del ángulo interior:

Teorema (2)

La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono, uno en cada vértice, es 360°.

Demostración:

Figura 2-11: Ángulos interior-exterior adyacente del polígono



En cada vértice de un polígono regular de *n* lados la suma del ángulo interior y de su ángulo exterior adyacente correspondiente es de 180°.

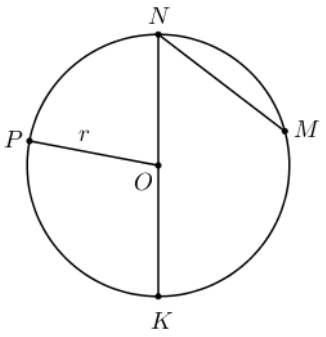
Entonces, si sumamos los ángulos interiores y exteriores del polígono considerando sólo un par interior-exterior esto sería $n \cdot 180°$. La diferencia entre esta suma y la suma de las medidas de los ángulos interiores es entonces:

$$n \cdot 180° - (n-2)180° = 360°$$

Tenemos que, en la Figura 2-11 en el vértice C: $c° + x° = 180°$, en el vértice D: $d° + y° = 180°$ y así en los otros vértices.

Definición 20. En un plano, dado un punto *O* y un número real positivo *r*, la ***circunferencia*** de centro *O* y radio *r* es el conjunto de puntos del plano que están a una distancia *r* del punto *O*.

Figura 2-12: Circunferencia



Un *radio* de la circunferencia es un segmento cuyos extremos son el centro y un punto de la circunferencia ($\overline{OP}$), una *cuerda* es un segmento cuyos extremos están en la circunferencia ($\overline{MN}$) y un diámetro es una cuerda que pasa por el centro ($\overline{KN}$). (Figura 2-12).

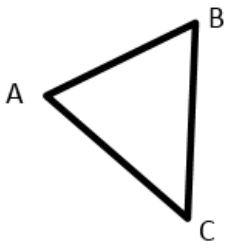
Definición 21. Un polígono está ***inscrito*** en una circunferencia si todos sus vértices están en la circunferencia.

Observación

Teóricamente un polígono regular puede considerarse inscrito en una circunferencia. En efecto, para construir un polígono de *n* lados basta con dibujar una circunferencia y construir ángulos centrales de $\frac{360°}{n}$.

2.3 Triángulos

Figura 2-13: *ΔABC*



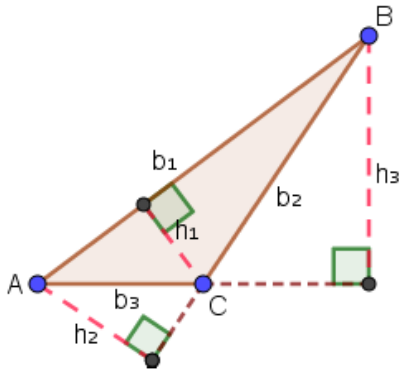
Definición 22. "Si A, B, y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama un ***triángulo***, y se indica con ΔABC. Los puntos A, B, y C se llaman *vértices,* y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman *lados*."[28]

[28] Tomado de [27], p. 76.

Definición 23. Una ***altura de un triángulo*** es un segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene el lado opuesto que se denomina ***base*.**

En la Figura 2-14 se observa que se puede elegir cualquiera de los tres lados como base (b_1, b_2, y b_3) y los segmentos llamados alturas (h_1, h_2 y h_3) que los cortan perpendicularmente respectivamente. Por ejemplo, si se elige el segmento $\overline{AB}$ de base (b_1), su respectiva altura es h_1 (segmento perpendicular que parte del vértice C a b_1).

Figura 2-14: Bases y alturas del ΔABC

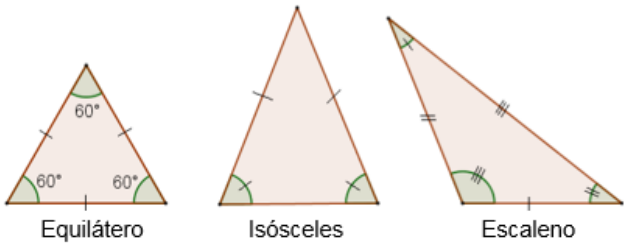


Clasificación de triángulos

Según la *medida de sus lados* los triángulos se clasifican en *isósceles, equiláteros* y *escalenos*. (Figura 2-15).

- Un triángulo ***equilátero*** es aquel que tiene sus tres lados y ángulos congruentes, también recibe el nombre de triángulo equiángulo.
- Un triángulo ***isósceles*** es aquel que tiene dos de sus lados congruentes.
- Un triángulo ***escaleno*** es aquel en el cual dos lados cualesquiera no son congruentes.

Figura 2-15: Clasificación de triángulos según la medida de sus lados



Según la *amplitud de sus ángulos* los triángulos se clasifican en *rectángulos*, obtusángulos y acutángulos. (Figura 2-16).

- Un triángulo ***rectángulo*** es aquel que tiene un ángulo interior recto (90°).
- Un triángulo ***obtusángulo*** es aquel que tiene un ángulo interior obtuso (mayor de 90°), en tal caso sus otros dos ángulos son agudos (menores de 90°).

- Un triángulo ***acutángulo*** es aquel que tiene sus tres ángulos interiores agudos (menores de 90°).

Figura 2-16: Clasificación de triángulos según la amplitud de sus ángulos.

Un triángulo es **equiángulo** si todos sus ángulos son congruentes.

A continuación, algunos teoremas en relación a los triángulos:

Teorema (3)

Si en un triángulo se tienen dos ángulos congruentes, entonces, los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

Teorema (4)

Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

Corolario

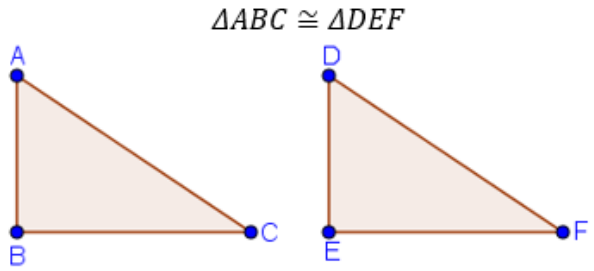
Un triángulo es equiángulo si y solamente si es equilátero.

2.3.1 Congruencia de triángulos

Definición 24. "Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre los vértices de dos triángulos. Si los pares de los lados correspondientes son *congruentes*, y los pares de ángulos correspondientes son *congruentes*, entonces la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ se llama una *congruencia* entre los dos *triángulos.*"[29] Esta situación se representa en la Figura 2-17.

[29] Tomado de [27], p. 113.

Figura 2-17: Congruencia entre los ΔABC y ΔDEF.



La expresión $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ nos dice a la vez seis cosas:

- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, o $\overline{AB} = \overline{DE}$
- $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, o $\overline{AC} = \overline{DF}$
- $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, o $\overline{BC} = \overline{EF}$
- $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, o $m\measuredangle A = m\measuredangle D$
- $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, o $m\measuredangle B = m\measuredangle E$
- $\measuredangle C \cong \measuredangle F$, o $m\measuredangle C = m\measuredangle F$

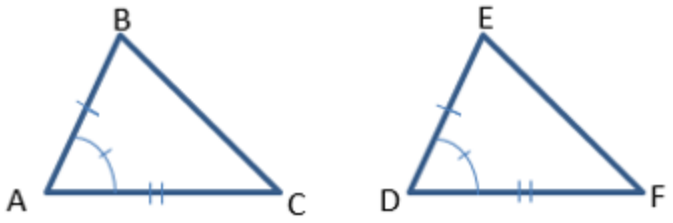
Postulados de congruencia para triángulos

Con menos información es posible determinar si dos triángulos son congruentes y no necesariamente hay que comprobar que sus tres lados y sus tres ángulos sean congruentes, a esto se le conoce como los *postulados de congruencia para triángulos* y hay inicialmente tres casos en los que se puede concluir que una correspondencia entre dos triángulos es una congruencia y son:

Postulado *LAL*. Toda correspondencia *LAL* es una congruencia.

LAL significa lado-ángulo-lado, es decir que, dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo y de ser así se deduce que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Es común indicar la congruencia de los ángulos y de los segmentos con marcas como se muestra en la Figura 2-18 del postulado *LAL*.

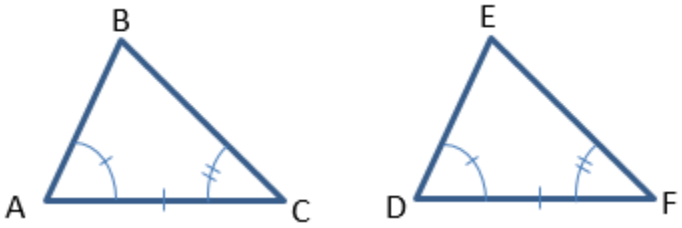
Figura 2-18: Postulado LAL.



Postulado *ALA*. Toda correspondencia *ALA* es una congruencia.

ALA significa ángulo-lado-ángulo, es decir que, dos ángulos y el lado comprendido del primer triángulo, son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo en este caso también se deduce que, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ como se muestra en la Figura 2-19.

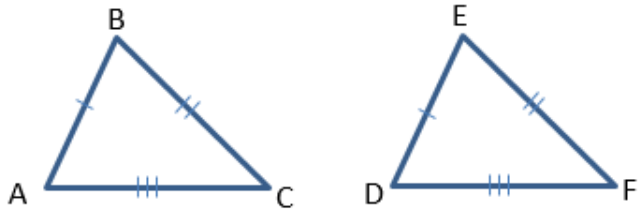
Figura 2-19: Postulado ALA.



Postulado *LLL*. Toda correspondencia *LLL* es una congruencia.

LLL significa lado-lado-lado, es decir que, los tres lados del primer triángulo son congruentes con los lados correspondientes del segundo triángulo. Así tenemos que, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, como se muestra en la Figura 2-20.

Figura 2-20: Postulado LLL.



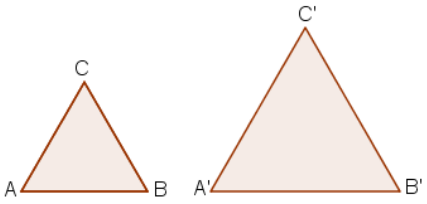
2.3.2 Semejanza de triángulos

Intuitivamente dos triángulos son semejantes si uno es una ampliación de otro. Veamos la definición de carácter formal.

Definición 25.

"Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia se llama una *semejanza* y decimos que los triángulos son *semejantes*." [30]

Figura 2-21: Semejanza entre dos triángulos.



Esta situación se ilustra en la Figura 2-21 y se escribe de manera más formal:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

De otro modo, se dice que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si tienen sus ángulos homólogos congruentes y sus lados homólogos proporcionales, esto es,

$$\measuredangle A = \measuredangle A',\ \measuredangle B = \measuredangle B',\ \measuredangle C = \measuredangle C' \quad \text{y} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Teoremas para la semejanza de triángulos

Teorema de semejanza *LAL*

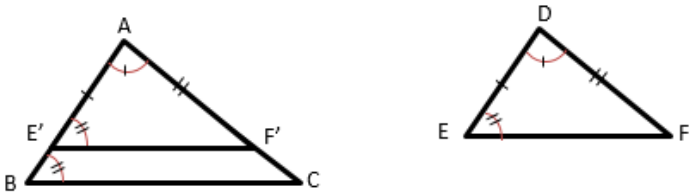
Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

Se tienen dos triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta DEF$, y la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ (Figura 2-22),

Si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}\ \ y\ \measuredangle A \cong \measuredangle D$, entonces, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

[30] Tomado de [27], p. 327.

Figura 2-22: Teorema LAL.



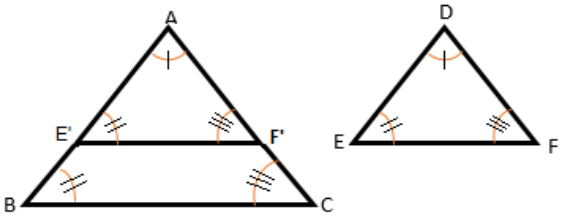
Teorema de semejanza *AAA*

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza. Es decir:

Dada la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos (Figura 2-23),

Si $\measuredangle A \cong \measuredangle D, \measuredangle B \cong \measuredangle E \; y \; \measuredangle C \cong \measuredangle F$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

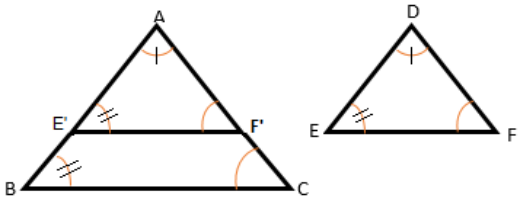
Figura 2-23: Teorema semejanza AAA.



Corolario *AA*

Se da una correspondencia entre dos triángulos, si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

Figura 2-24: Semejanza AA



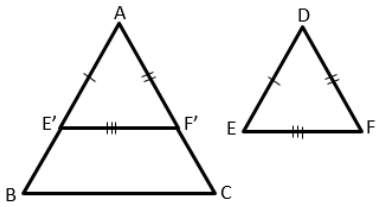
Teorema de semejanza *LLL*

Se da una correspondencia entre dos triángulos, si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza. Es decir:

Si tenemos los triángulos $\Delta ABC \; y \; \Delta DEF$, y la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ (Figura 2-25),

Si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Figura 2-25: Teorema LLL

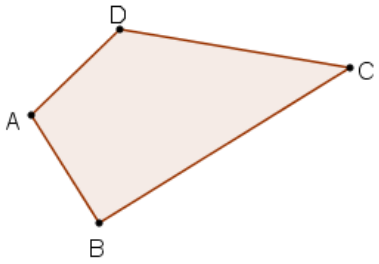


2.4 Cuadriláteros

Definición 26. "Sean *A, B, C* y *D* cuatro puntos coplanarios. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se intersecan solamente en sus extremos, entonces la reunión de los cuatro segmentos se llama ***cuadrilátero.***"[31]

Teniendo en cuenta la Figura 2-26, tenemos que:

Figura 2-26: Cuadrilátero.



- El cuadrilátero se indica como $\square ABCD$.
- Los puntos *A, B, C* y *D* se llaman *vértices.*
- Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son los *lados.*
- Los *ángulos* del cuadrilátero se pueden nombrar así: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ y $\sphericalangle D$.

A continuación, se mencionan algunas definiciones necesarias para abordar el tema de los cuadriláteros, que consideraremos mas adelante al realizar transformaciones geométricas.

- *Lados opuestos:* Dos lados de un cuadrilátero son *opuestos*, si no se intersecan.
- *Ángulos opuestos:* Dos ángulos son *opuestos,* si no tienen común un lado del cuadrilátero.
- *Lados consecutivos*: Dos lados son *consecutivos,* si tienen común un vértice del cuadrilátero.

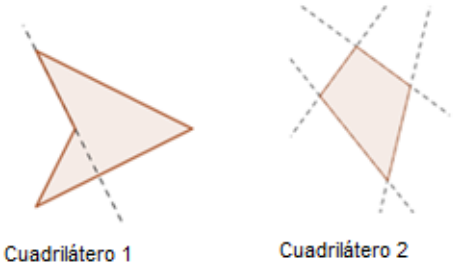
[31] Tomado de [27], p. 144.

- *Diagonal:* Una *diagonal* de un cuadrilátero es un segmento determinado por dos vértices no consecutivos.

Definición 27. "Un *cuadrilátero es* ***convexo***, si dos cualesquiera de sus vértices no están en lados opuestos de una recta que contiene a un lado del cuadrilátero."[32]

El cuadrilátero 1 de la Figura 2-27, no satisface las condiciones para ser un cuadrilátero convexo, mientras el cuadrilátero 2, si las satisface y por lo tanto este es convexo.

Figura 2-27: Cuadrilátero no convexo y convexo



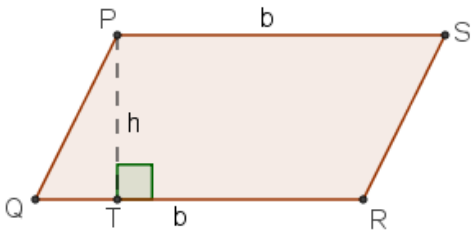
Veamos ahora algunos cuadriláteros convexos que consideramos de interés en nuestro trabajo:

Definición 28. Un ***Paralelogramo*** es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos. De la Figura 2-28 resulta que:

$$\overline{PQ} \parallel \overline{RS} \text{ y } \overline{PS} \parallel \overline{QR}$$

El segmento perpendicular que une dos de los lados de un paralelogramo se denomina *altura del paralelogramo (h),* en tal caso cualquiera de los lados se denomina *base (b).*

Figura 2-28: Paralelogramo



Teorema (5)

Un cuadrilátero es un paralelogramo, si y solamente si, cada par de lados opuestos son congruentes.

Teorema (6)

Dado un paralelogramo, se tienen las siguientes afirmaciones:

[32] Tomado de [27], p. 246.

a) Cada diagonal determina dos triángulos congruentes.
b) Las diagonales se bisecan.
c) Dos ángulos consecutivos son suplementarios.
d) Los ángulos opuestos son congruentes.

Ahora bien, si un cuadrilátero cumple cualquiera de las condiciones del teorema anterior el cuadrilátero es un paralelogramo.

Veamos ahora algunos paralelelogramos particulares:

Definición 29. ***Rectángulo:*** Es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos.

Figura 2-29: Rectángulo $ABCD$.

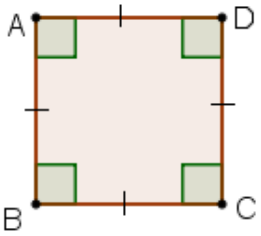
De la Figura 2-29 resulta:

$\measuredangle A \cong \measuredangle B \cong \measuredangle C \cong \measuredangle D$, cada ángulo es recto.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Definición 30. *Cuadrado:* Es un paralelogramo que presenta cuatro ángulos rectos y por tanto es una clase de rectángulo con la particularidad que tiene los cuatro lados congruentes que lo hace un polígono regular.

Figura 2-30: Cuadrado $ABCD$.



De la Figura 2-30 resulta:

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$

$\measuredangle A \cong \measuredangle B \cong \measuredangle C \cong \measuredangle D$, cada ángulo es recto.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

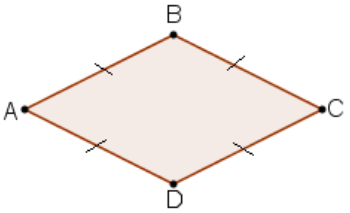
Definición 31. *Rombo:* Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados congruentes.

De la Figura 2-31 resulta:

Figura 2-31: Rombo $ABCD$.

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$

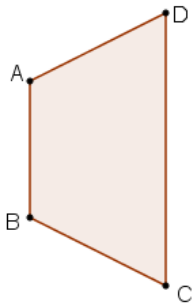
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Definición 32. ***Trapecio:*** Es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

En la Figura 2-32 tenemos que: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Figura 2-32: Trapecio $ABCD$.



2.5 Área de regiones poligonales

Definición 33. Una ***región poligonal*** es la reunión de un polígono y su interior.

Hallar el área de una región poligonal es compararla con un patrón de medida. Así que, para poder calcular el área de un polígono es necesario establecer un patrón de medida para realizar comparaciones. Es de anotar que, por comodidad se identificará el área de un polígono con el área de la región poligonal que el polígono determina.

Al establecer los siguientes postulados, se pueden calcular el área de figuras planas conocidas de interés en este trabajo.

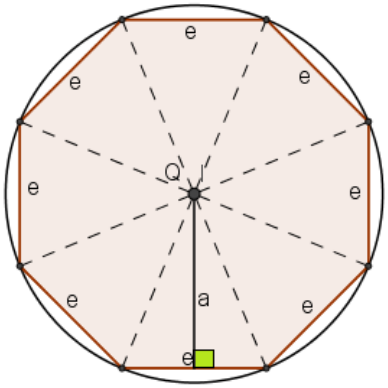
Postulados

1. A toda región poligonal le corresponde un número positivo único.
2. Si dos polígonos son congruentes, entonces, las regiones poligonales determinadas por ellos tienen la misma área.
3. Si un polígono se descompone en regiones poligonales más pequeñas sin que estas se traslapen, el área del polígono inicial es la suma de las áreas de las regiones poligonales pequeñas determinadas.
4. El área de un cuadrado es el cuadrado de su lado.

Teoremas (7)

1. El área de un rectángulo es el producto de su base y su altura.
2. El área de un paralelogramo es el producto de una base cualquiera y la altura correspondiente.
3. El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente.
4. El área de un trapecio es la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.
5. Teóricamente, un polígono regular puede considerarse inscrito en una circunferencia (Figura 2-33), por tanto, el área de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro (l) y la medida de la distancia de su centro (Q) a un lado (apotema) (a). $A = \frac{1}{2}al$, donde $l = ne$ y n es el número de lados.

Figura 2-33: Polígono regular



2.6 Números reales y plano coordenado

2.6.1 Plano coordenado

Para empezar, tomaremos del texto de Moise el postulado de la distancia, el cual plantea que: "a cada par de puntos diferentes le corresponde un número positivo único." [33] En la definición de distancia dice que: "la distancia entre dos puntos es el número obtenido mediante el postulado de la distancia. Si los puntos son P y Q, entonces indicamos la distancia por PQ."

[33] Postulado 1. Tomado de [27], p. 31.

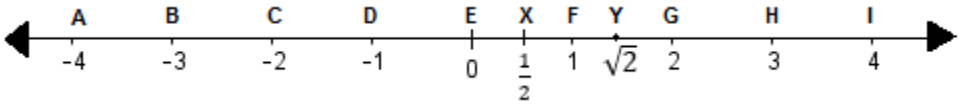
Una vez fijada una escala numérica cualquiera que sea, sobre cualquier recta utilizando la escala dada por el postulado de la distancia y al existir una correspondencia entre los puntos de dicha recta y el conjunto de los números reales, se determina un sistema de coordenadas. Para representar los números reales se usa un sistema coordenado llamado *recta real*, en donde el número correspondiente a un punto particular de la *recta real* se llama coordenada del punto. La *recta real* proporciona una visualización perfecta de los números reales. Esto es, cada punto de la recta corresponde a uno y sólo un número real y viceversa, a este tipo de correspondencia se le llama biyectiva.

En el *Postulado de la regla* (Moise & Downs, 1964), se establece una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que:

(1) "A cada punto de la recta corresponde exactamente un número real;
(2) a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta; y
(3) la distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes." [34]

El postulado de la regla plantea que si la coordenada de P es x y la coordenada de Q es y, entonces la distancia entre P y Q es $PQ = |y - x|$.
La correspondencia descrita entre los puntos de una recta y los números reales recibe el nombre de sistema de coordenadas.

Figura 2-34: Recta numérica.



Observación:
Recordemos que números como $1, 2, 3, \ldots$ se denominan ***enteros positivos*** o ***números naturales***. En la recta numérica de la Figura 2-34 podemos observar que, estos números se encuentran a la derecha de cero.

[34] Postulado 2, Tomado de [27], p. 34.

Los números naturales junto con el ***cero*** y los ***enteros negativos*** (…, -3, -2, -1), forman el conjunto de los ***números enteros*****.**

En la tenemos que, la coordenada correspondiente al punto X es 0,5, y éste puede expresarse como el cociente de dos números *enteros* $(0{,}5 = \frac{1}{2})$, tales números se denominan ***racionales*** y se representan bien sea por decimales finitos $\left(\text{como } \frac{2}{5} = 0{,}4\right)$ o por decimales que presentan un desarrollo decimal infinito periódico (como $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$).

Los números reales que no son racionales se llaman ***irracionales*** y no pueden representarse como decimales de tipo finito o infinito periódico. Usualmente se representan por alguna aproximación decimal (como $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623$) y presentan un desarrollo decimal infinito y no periódico.

Tenemos entonces, que el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama ***conjunto de los números reales*** y se representa por $\mathbb{R}$. En la recta real, cada número es representado precisamente por un punto de $\mathbb{R}$, y cada punto de $\mathbb{R}$ representa precisamente un número real.

La existencia de un conjunto de números reales, junto con las operaciones de adición y multiplicación y una relación de orden, tomados en conjunto satisfacen 13 axiomas que agruparemos en 2 categorías: axiomas de cuerpo y axiomas de orden. Estos axiomas definen lo que se conoce como un *cuerpo ordenado completo*, y constituyen la respuesta a la pregunta ¿Qué son los números reales? A continuación, están listados los 13 axiomas que definen el *cuerpo ordenado de los números reales*.

2.6.2 Axiomas para los números reales

Si bien es cierto que hemos utilizado los números reales de manera esporádica por ejemplo en la medida, conviene aquí resaltar algunas de sus propiedades.

Asumimos la existencia de dos operaciones, llamadas *suma y producto,* tales que, a cada par de números reales *x* e *y*, la suma $x + y$ y el producto $x \cdot y$ son números que pertenecen al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ unívocamente determinados por *x* e *y.*

Asumimos también la existencia de una relación $<$ que establece un orden entre los números reales. Suponemos que la cuádrupla determinada $(R, +, \cdot, <)$ satisface los axiomas enunciados a continuación:

1. AXIOMAS DE CUERPO

1.1 Axiomas para la adición.

i) *Conmutatividad.*

Para todo $x,\ y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.

ii) *Asociatividad.*

Para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$.

iii) *Existencia del elemento identidad.*

Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, tal que $x + 0 = 0 + x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

iv) *Existencia de elemento inverso.*

Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$, tal que $-x + x = 0$.

1.2 Axiomas para la multiplicación.

v) *Conmutatividad.*

Para todo $x,\ y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x$.

vi) *Asociatividad.*

Para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

vii) *Existencia del elemento identidad.*

Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

viii) *Existencia de elemento inverso.*

Para todo $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, existe un elemento $y \in \mathbb{R}$. tal que $x \cdot y = 1$.

1.3 Axioma de distributividad.

El siguiente axioma expresa una relación entre la adición y la multiplicación:

ix) *Distributividad.*

Para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

2. AXIOMAS DE ORDEN

x) *Tricotomía.*

Si $x,\ y \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y solamente una de las siguientes afirmaciones: $x < y;\ \ x = y;\ \ x > y$.

xi) *Transitividad.*

Si $x < y$ y además $y < z$, entonces $x < z$ para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

xii) *Propiedad aditiva.*

Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$ para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

xiii) *Propiedad multiplicativa.*

Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z < y \cdot z$ para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

Si $x < y$ y $z < 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$ para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales es ampliamente utilizado en la geometría, por ello la importancia de haber examinado la interpretación geométrica de los números reales como puntos en la recta real y también los axiomas que satisfacen el conjunto de los números reales. Ahora bien, es necesario remontarnos al siglo XVII con René Descartes quien aportó de manera significativa al avance de la geometría y al cálculo al desarrollar un nuevo método llamado geometría cartesiana. Con éste nuevo método se establecieron relaciones entre la geometría y el álgebra y además una correspondencia entre una ecuación y su gráfica. De forma similar a lo que ocurre en una recta numérica como ya fue mencionado, en donde todo número corresponde a un punto y todo punto corresponde a un número, ocurre con el plano, con la diferencia que un punto no corresponde a un número, sino que ahora a cada punto del plano le corresponde una pareja de números y viceversa.

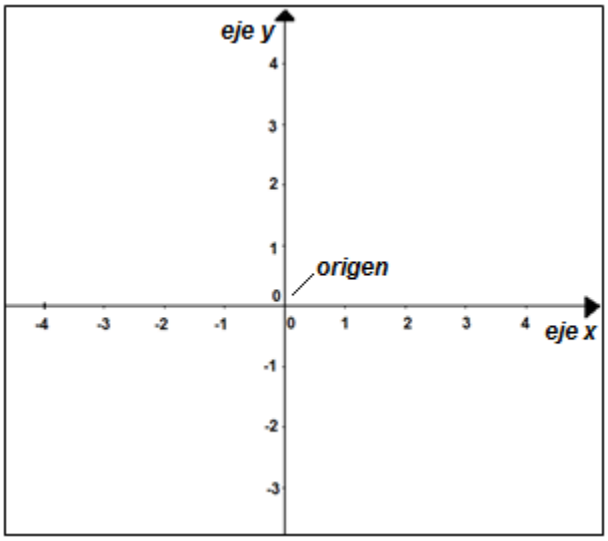
En la Figura 2-35 se encuentra un esquema para la conformación de un plano cartesiano de la siguiente manera:

Una recta X con un sistema de coordenadas que recibe el nombre de *eje* x y a su derecha una punta de flecha que se utiliza para distinguir el sentido positivo en X.

Vemos otra recta Y, también con un sistema de coordenadas, que recibe el nombre de *eje* y, el cual se encuentra perpendicular al *eje* x y hacia arriba una punta de flecha indicando el sentido positivo en Y.

Los puntos con coordenada 0 en el *eje* y, y con coordenada 0 en el *eje* x se ubican de tal modo que coincidan, y a este punto donde se intersecan ambas rectas se le llama *origen*.

Figura 2-35: Plano cartesiano.

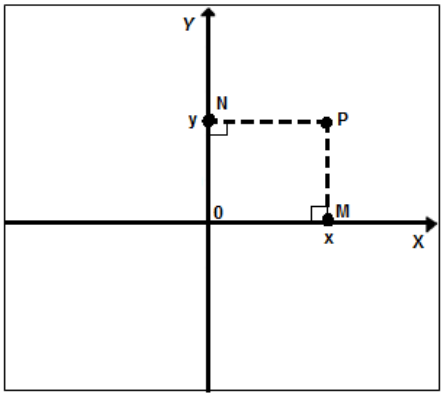


A continuación, se presenta una definición acerca de la coordenada x y y de un punto P*:*

"La *coordenada* x de un punto P es la coordenada del pie de la perpendicular desde P al *eje* x. La *coordenada* y del punto P es la coordenada del pie de la perpendicular desde P al *eje* y. Si P tiene coordenadas x y y, entonces escribimos $P(x, y)$*".* (Moise & Downs, 1964)*.*

De esta forma, observamos en la Figura 2-36 que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales. Tal correspondencia se llama un *sistema de coordenadas* y determinan las coordenadas de todos los puntos del plano y es bajo este sistema de referencia que se desarrollarán las actividades de la propuesta de enseñanza.

Figura 2-36: Coordenada de un punto P



2.7 Transformaciones geométricas

Si nos detenemos a pensar en la mayoría de temas desarrollados en geometría prevalece una idea común: las posiciones de todas las figuras geométricas son fijas. Es decir, cuando se considera un triángulo ΔABC éste permanece inmóvil, pero bajo la óptica de las transformaciones geométricas se consideran los objetos geométricos (triángulos, líneas, puntos, círculos, entre otros) mientras cambian su posición y los objetos se moverán como resultado de una transformación del plano. Hemos tomado por referencia para el tema de las transformaciones geométricas los libros: *Lecciones de Geometría Euclidiana* (Castillo, 1993), *Simetría Dinámica* (Alsina, Pérez, & Ruiz, 1989) y el trabajo de grado titulado *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza* (Julio Barrera, 2014).

Definición 34. Una *transformación en un plano* π es una función biyectiva[35] del plano en sí mismo.

Es decir que, en las transformaciones geométricas en el plano, la transformación se hace de figuras en el plano, a figuras en el mismo plano. En términos de funciones se simboliza así: $f : \pi \to \pi$

"En una transformación geométrica hay que tener en cuenta tres aspectos: la figura original, una regla u operación que describa el cambio, y la figura que resulta después del cambio." [36]

Así en $f : \pi \to \pi$ tenemos que, la figura original es un elemento de π, f es la regla que describe el cambio, y la figura que resulta después del cambio pertenece al codominio π.

[35] Una función es biyectiva o de correspondencia biunívoca, si es al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento en el conjunto de salida.

[36] Tomado de [8], capítulo 13, p. 476.

En particular con la expresión $f(X) = X'$ se está diciendo que a todo punto X del plano π, se le asocia un punto X' y uno solo. X que es el objeto al que se le aplicará la transformación se le denomina *objeto inicial* o *preimagen* y, a X' se le denomina *transformado*, *homólogo* o *imagen* de X.

Definición 35. Dada una transformación f, un punto X del plano se llama *fijo* si su imagen $f(X)$ es el mismo punto X. Esto es $f(X) = X$.

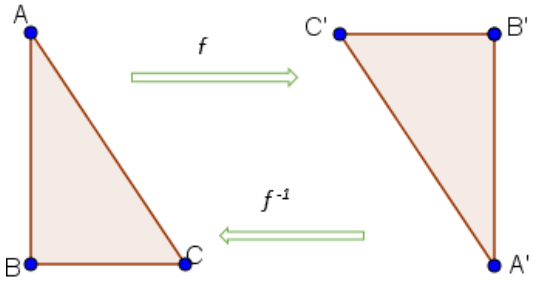
Es decir que, cuando a un punto X del plano π, una transformación le hace corresponder consigo mismo, se dice que dicho punto es fijo. Es importante considerar este tipo especial de puntos, los puntos fijos. Los cuales en el giro o rotaciones que veremos más adelante, se reducen al centro. En la simetría son fijos los puntos del eje, y la traslación no deja fijo ningún punto.

La transformación o movimiento más simple y evidente en un plano π se conoce como función identidad (lo denotamos *id)*, pues es la transformación que aplica todo punto en sí mismo, dejando igual todo el plano, o dicho de otra forma deja a todos los puntos del plano fijos. Entonces: $id(X) = X$.

La compuesta de una transformación f con su inverso f^{-1} es igual a *id.*

Es decir que al aplicar a un objeto X (ΔABC de la Figura 2-37) una transformación y luego a su imagen X' ($\Delta A'B'C'$ de la Figura 2-37) la transformación inversa, se produce de nuevo el punto inicial.

Figura 2-37: Compuesta de una transformación f con su inverso f^{-1}



Definición 36. Sea G un conjunto no vacío y $*$ una operación interna definida en G. Se dice que $(G, *)$ es un ***grupo*** si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) La operación $*$ es asociativa.

ii) Existe un elemento distinguido en G notado e tal que, para todo a de G se tiene que: $a * e = e * a = a$.

iii) Para todo elemento a de G existe un elemento notado a^{-1} tal que, $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Cuando en el presente trabajo se utiliza la palabra grupo es para enfatizar que el conjunto tiene una estructura algebraica especial.

El conjunto de transformaciones en el plano junto con la operación de composición tiene estructura de grupo. En efecto, la función identidad es una transformación, la composición de transformaciones es asociativa y la inversa f^{-1} de una transformación f también es una transformación.

Ahora estudiaremos una clase de transformaciones en el plano que preservan distancias y que intuitivamente podríamos decir que "envían figuras en figuras congruentes", estas transformaciones se denominan isometrías.

2.7.1 Isometrías en el plano

La palabra *isometría* tiene su origen en el prefijo griego *iso*, que significa igual o mismo, y *metria*, que significa medir. Una definición pertinente para isometría sería *igual medida*.

Las Isometrías también se conocen como *transformaciones euclídeas*, ya que son las transformaciones más importantes para la geometría euclidiana, o como movimientos *rígidos*, debido a que estas transformaciones no alteran métricamente las figuras geométricas (ni la forma, ni el tamaño) solo involucran un cambio de posición de ellas (en la orientación o en el sentido) y por tanto conservan la estructura rígida.

Definición 37. Una transformación $f : \pi \to \pi$ en un plano π es una ***isometría*** si preserva distancias.

Es decir, si $d(X,Y)$ es la distancia entre dos puntos X y Y, la transformación f es una isometría si para todo par de puntos X y $Y \in \pi$ se cumple que: $d(X,Y) = d\big(f(X), f(Y)\big)$.

Nótese que, de acuerdo a la definición de isometría es fácil ver que un polígono y su imagen por una isometría son congruentes. Del mismo modo, una circunferencia y su imagen por una isometría son congruentes. En general, dos polígonos son congruentes, si y solo si, uno es la imagen del otro al aplicar una isometría. A continuación, se mencionan con más detalle algunos teoremas relacionados a propiedades importantes que poseen las isometrías que vale la pena destacar:

Teorema (8). La composición de dos isometrías, es a su vez otra isometría.

Demostración:

Sean π un plano, X y $Y \in \pi$ y f y g dos isometrías definidas en π. De la isometría f tenemos que para todo par de puntos X y Y resulta: $d(X,Y) = d\big(f(X), f(Y)\big)$. Si se aplica la isometría g a los puntos $f(X)$ y $f(Y)$ obtenemos: $d(g(f(X)), g(f(Y))) = d\big(f(X), f(Y)\big)$. Entonces, por transitividad obtenemos los siguiente: $d(X,Y) = d\big(g(f(X), g(f(Y)\big)$.

Sea un plano π, la función identidad $id: \pi \to \pi$ definida por $id(X) = X$, para todo $X \in \pi$ es una isometría. Además, la composición de isometrías es asociativa.

Teorema (9). La transformación inversa f^{-1} de una isometría f también es una isometría.

Demostración:

Dado que toda isometría f es una función biyectiva existe su inversa f^{-1} que también es una isometría. Una isometría f se llama involutiva si $f \circ f = id$.

Se ha demostrado el siguiente teorema:

Teorema (10). El conjunto de las isometrías en un plano con la composición tiene estructura de grupo.

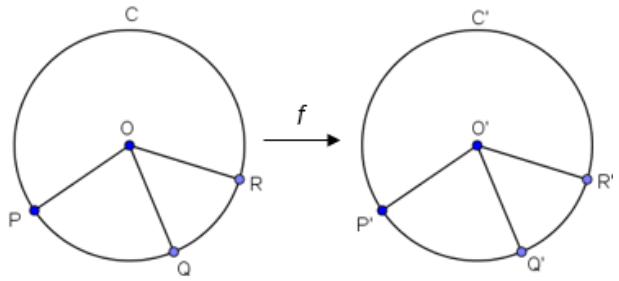
Veamos ahora algunos resultados relacionados con la preservación de figuras en el plano relacionados con las isometrías.

Teorema (11). Las isometrías transforman circunferencias en circunferencias de igual radio.

Demostración:

Dada una circunferencia C y O su respectivo centro (Figura 2-38). Al aplicar la isometría f del plano π al punto O obtenemos su imagen O'. Si tomamos un punto P sobre la circunferencia C y aplicamos isometría f obtenemos su imagen P'. Como la isometría mantiene la congruencia entre segmentos tenemos que $\overline{OP} \cong \overline{O'P'}$. Si aplicamos la isometría f a otros puntos de la circunferencia C, por ejemplo, a los puntos Q y R, obtenemos que $\overline{OP} \cong \overline{O'P'}$; $\overline{OQ} \cong \overline{O'Q'}$; $\overline{OR} \cong \overline{O'R'}$. Por tanto, los puntos P', Q' y R' determinan una circunferencia C' de centro O' congruente con C. Es decir que, se comprueba que una circunferencia C y su imagen C' son congruentes al aplicar una isometría f, es decir: $f(C) = C'$ donde $C \cong C'$.

Figura 2-38: Circunferencia C y su imagen C' son congruentes.



Teorema (12). Un triángulo y su imagen son congruentes al aplicar una isometría.

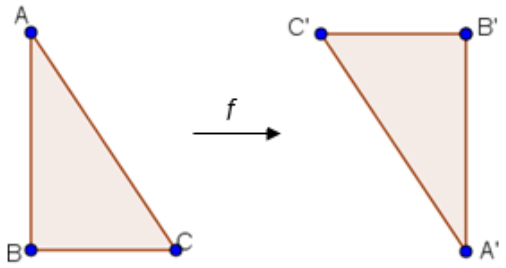
Demostración:

Sea ΔABC un triángulo y f una isometría. Al aplicar f a los puntos $A, B, \text{y } C$ obtenemos los puntos $A'B'\text{y } C'$, tales que:

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y según el criterio (LLL) se concluye que:

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. (Figura 2-39).

Figura 2-39: ΔABC al aplicarle una isometría f.



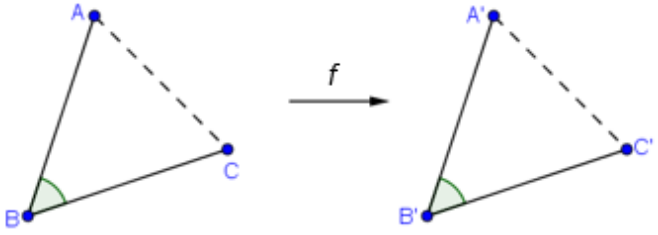
Corolario

Un ángulo y su imagen son congruentes al aplicar una isometría.

Demostración:

En efecto, si $\measuredangle ABC$ es un ángulo y se le aplica una isometría f a los puntos $A, B, \text{y } C$ obtenemos los puntos $A', B', \text{y } C'$. Es decir, $f(\measuredangle ABC) = \measuredangle A'B'C'$. Como resultado tenemos que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, se concluye entonces que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes por el teorema LLL y por partes correspondientes se tiene que $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$. Es decir que, toda isometría conserva el valor de los ángulos como se aprecia en la Figura 2-40.

Figura 2-40: $\measuredangle ABC$ al aplicarle una isometría f.



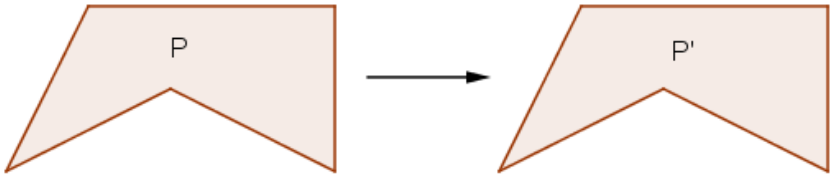
Como consecuencia de los anteriores resultados tenemos el siguiente corolario:

Corolario

Un polígono P y su imagen P' son congruentes al aplicar una isometría f, esto es,

$f(P) = P'$, donde, $P \cong P'$ como se observa en la siguiente figura:

Figura 2-41: Polígono P y su imagen P'



A continuación, se abordan tres tipos de isometrías del plano que consideramos básicas y de gran importancia para el desarrollo del trabajo, estas son: las traslaciones, las rotaciones y las simetrías; estudiaremos sus definiciones y las principales características de sus estructuras algebraicas y de sus distintas composiciones.

Traslaciones, rotaciones y simetrías

▪ Traslaciones

Las traslaciones son los movimientos rígidos más intuitivos del plano, debido a que corresponden a auténticos movimientos rectilíneos, son el resultado de desplazar el plano sobre sí mismo en línea recta, sin deformarlo ni darle la vuelta.

Conociendo un punto P y su punto trasladado Q a través de una traslación t, sabemos que:

- La longitud de la trayectoria es la distancia $d(P, Q)$.
- La traslación se ha realizado según la dirección de la recta $r(P, Q)$.
- El sentido es el que va desde P hasta Q.
- En general, para realizar una traslación necesitamos conocer: distancia, dirección y sentido, lo que en matemáticas se puede representar con un vector fijo $\boldsymbol{v}$. A continuación, dado el interés del trabajo, se da una idea intuitiva de lo que es un vector.

Sean $P(a\,,b)$ y $Q(c\,,d)$ dos puntos en el plano de coordenadas cartesianas $\mathbb{R}^2$, el segmento de recta dirigido que va de P a Q denotado $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento rectilíneo que va de P a Q. El punto P se llama el punto inicial del segmento y el punto Q el punto final. Las dos propiedades principales de un segmento dirigido son su longitud que corresponde a la longitud del segmento, su dirección que corresponde a una recta paralela al segmento PQ y el sentido que intuitivamente dice de donde parte y a donde llega; así que, los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son diferentes.

Dos segmentos de recta dirigidos se dicen equivalentes si tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido. Al restar componente a componente P de Q se obtiene la pareja $(c-a\,,\ d-b)$ a la que se llama las componentes del segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$; así que dos segmentos dirigidos son equivalentes si tienen las mismas componentes.

Definición 38. El conjunto de todos los segmentos dirigidos equivalentes a un segmento dirigido dado se llama ***vector***.

Un tratamiento más formal del concepto de vector puede encontrarse en el libro de *Álgebra lineal* (Grossman, 2012).

Para nuestro trabajo basta utilizar un segmento dirigido como representante de un vector y realmente al segmento dirigido en cuestión nos referiremos como vector.

Si tenemos cualquier otro punto P', éste generará como imagen por la traslación t, el punto Q' que está a distancia $d(P',Q') = d(P,Q)$ *de* P', sobre la recta paralela a $r(P,Q)$ que pasa por P', en el mismo sentido que va de P a Q. Por tanto, todos los puntos del plano difieren de sus imágenes por una traslación t, en un vector fijo $\boldsymbol{v}$ que se denomina vector de traslación. $t(P) = Q = P + \boldsymbol{v}$.

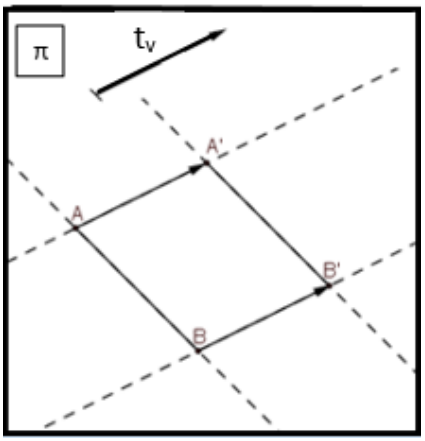
La anterior expresión indica que Q es el transformado de P por la traslación asociada al vector $\boldsymbol{v}$.

Dado un vector no nulo $\boldsymbol{v}$ del plano π, la transformación que lleva cada punto P en el punto $P + \boldsymbol{v}$ es una isometría. Toda traslación es una isometría.

Lo anterior se evidencia al considerar dos puntos A y B que distan entre sí $d(A,B)$ y sus transformados $A' = A + \boldsymbol{v}$ y $B' = B + \boldsymbol{v}$, como las rectas $r(A,A')$ y $r(B,B')$ son paralelas y:

$$d(A,A') = d(B,B') = [\boldsymbol{v}],$$

Figura 2-42: Paralelogramo $ABB'A'$.

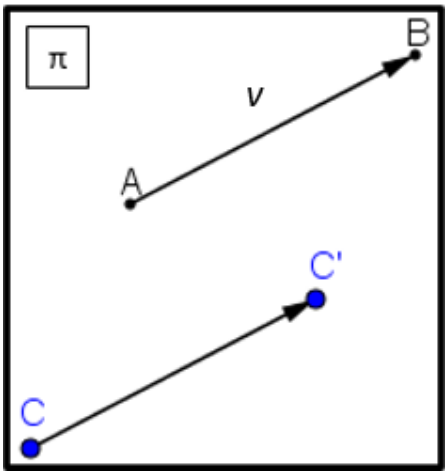


Como se observa en la Figura 2-42, resulta que $ABB'A'$ son los vértices de un paralelogramo, por lo que los lados opuestos $[A,B]$ y $[A',B']$ tienen igual longitud resultando que:

$$d(A',B') = d(A,B).$$

Por tanto, la transformación en cuestión es una isometría, siendo concretamente la traslación de vector $\boldsymbol{v}$, que notaremos $t_{\boldsymbol{v}}$.

Figura 2-43: Congruencia de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CC'}$.



Otra notación que usaremos será teniendo en cuenta los dos puntos A y B de un plano π . Es decir, un segmento orientado que va desde el punto A (origen) al punto B (extremo) del vector de traslación $\boldsymbol{v}$, entonces la traslación AB, denotada por t_{AB}, es el movimiento del plano que envía cada punto C en un punto C' y los vectores AB y CC' entonces son congruentes $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CC'}$. Ver Figura 2-43.

Nótese que la traslación no tiene puntos fijos a menos que sea la traslación idéntica, en donde todos los puntos del plano son fijos. Tenemos que, al hacer la misma construcción con el vector nulo 0, se observa que todos los puntos del plano quedan invariantes, entonces se podría decir que la identidad es la traslación de vector nulo, $id = t_0$

La suma de dos vectores es conmutativa y, por lo tanto, la compuesta de dos traslaciones del mismo plano, es una nueva traslación que tiene como vector la suma de

los vectores de las traslaciones dadas, siendo así conmutativa y asociativa. Ahora bien, admitimos por definición que la función identidad es una traslación y en tal caso cada traslación tiene inversa. Por lo tanto, el conjunto de las traslaciones del plano junto con la operación de composición es un grupo abeliano.

▪ Rotaciones

Las rotaciones o giros son los movimientos rígidos que resultan de fijar un punto del plano y hacer girar el plano sobre sí mismo, dejando fijo dicho punto.

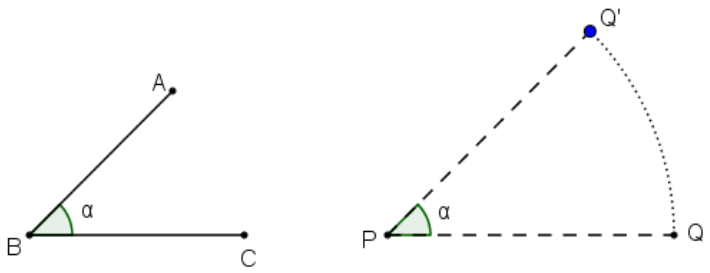
La rotación es un movimiento directo que deja fijo un único punto, denominado *centro de giro;* conocido dicho centro P, está determinado por el ángulo α que forman las semirrectas de extremo P y que pasan por cualquier punto distinto de P y por su imagen por dicha transformación; es llamado *ángulo de giro.* El giro de centro P y ángulo α lo notaremos $R_{P\alpha}$.

Al giro de ángulo π $(180°)$ se le llama *semigiro* o *simetría respecto a un punto*.

Definición 39. Dados un punto P del plano y un ángulo ABC; una ***rotación*** $R_{P\alpha}$ en el plano es una función que asigna a cada punto Q del plano un punto Q' tal que,

$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle QPQ'.$$

Figura 2-44: Rotación del punto Q.



La imagen de Q por la rotación de centro P y ángulo α es Q' y se escribe:

$$R_{p\propto}(Q) = Q'.$$

Nótese en la Figura 2-44 que P es el único punto fijo de la rotación $R_{p\propto}$ y que toda rotación es una isometría.

Al considerar un ángulo de amplitud nula o de medida 0, se obtiene la rotación que corresponde a la función identidad y por supuesto es una rotación. Así mismo, la inversa de una rotación también es una rotación, denotada por ${R^{-1}}_{(O,\alpha)} = R_{(O,-\alpha)}$. Dicho de otra manera, toda rotación tiene su inversa, de tal manera que al componerlas resulta la rotación identidad. En un plano π el conjunto de las rotaciones con el mismo centro, junto con la operación de composición es un grupo abeliano (conmutativo). En efecto, la composición de dos rotaciones, del mismo centro, es una rotación y dicha operación es asociativa, es conmutativa, es decir, es un grupo donde no importa el orden en que se hagan las rotaciones y cada rotación tiene inversa como se acaba de anotar.

▪ Simetrías

Entre las simetrías aparecen las definidas por un punto llamadas simetrías centrales y las definidas por una recta llamadas simetrías axiales.

Simetría central

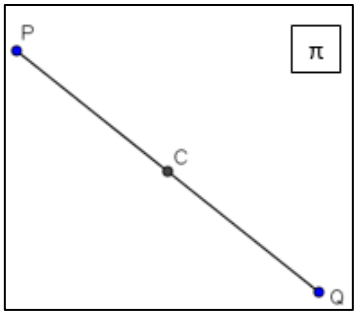
Para poder dar una definición de simetría central es necesario determinar un punto C que se denomina el centro de la simetría.

La notación $Sc(P) = Q$ significa que Q es la imagen de P, por la simetría de centro C.

Definición 40. La ***simetría central*** Sc respecto a un punto C en un plano π, es una función que asigna a cada punto P del plano un punto Q de tal manera que C es el punto medio del segmento PQ.

$Sc(P) = Q$ si C es el punto medio del segmento PQ.

Figura 2-45: Simetría central



En tal caso se dice que Q es el simétrico de P con respecto a C. Puede observarse en la Figura 2-45 que C es el único punto fijo de la simetría central Sc y que toda simetría central es una isometría.

Un semigiro de un punto P es una rotación de centro en C un ángulo de 180°, es decir $R_{(C,180°)}(P) = Q$ y a su vez es una simetría central cuyo centro de rotación es el centro de simetría $Sc(P) = Q$.

Si una simetría central es un semigiro, la composición de dos simetrías centrales con el mismo centro C es un giro[37] y un giro representa la isometría identidad. Entonces, la compuesta de una simetría central de un punto A consigo misma es la idéntica, esto es: $(S_C \circ S_C)A = A$.

Nótese que, una simetría es una isometría y que en este caso no tiene sentido hablar de la estructura algebraica de simetrías con el mismo centro. Sin embargo, es de anotar que la composición de dos simetrías centrales con distinto centro es una traslación, por ejemplo, al componer dos simetrías con diferentes centros digamos A y B se determina una traslación t_{CE}, donde $t_{CE} = S_B(D) \circ S_A(C)$ y $CE = 2\,AB$ y el segmento CE es paralelo al segmento AB $(\overline{CE} \parallel \overline{AB})$ como se aprecia en la Figura 2-46. Se puede decir que t_{CE} es una traslación de vector el doble que el vector que une A y B, t_{AB}.

[37] El giro es una rotación de un punto A con centro en un punto C un ángulo de 360°, el punto A en el plano se moverá la circunferencia completa.

Figura 2:46: Composición de dos simetrías centrales con distinto centro.

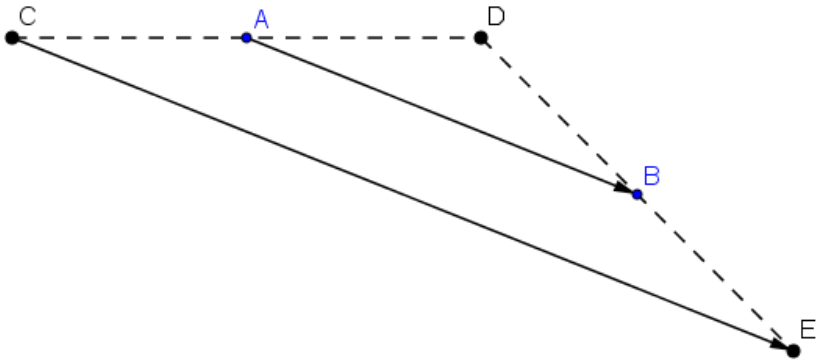
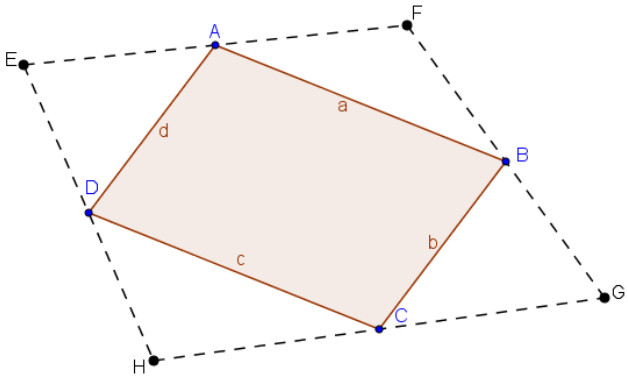


Figura 2-47: Composición de tres simetrías centrales con distintos centros no alineados



La composición de tres simetrías centrales de centros no alineados $(A, B \text{ y } C)$, es otra simetría central, cuyo centro es el cuarto vértice (D) del paralelogramo $ABCD$ que los tres centros anteriores, en forma ordenada determinan. (Figura 2-47).

Simetría axial

Dada una recta r en un plano π, una simetría axial o reflexión con respecto a la recta r, que notamos Sr es una función que asigna a cada punto P del plano que no está en r un punto P' de tal manera que r es la mediatriz del segmento PP'.

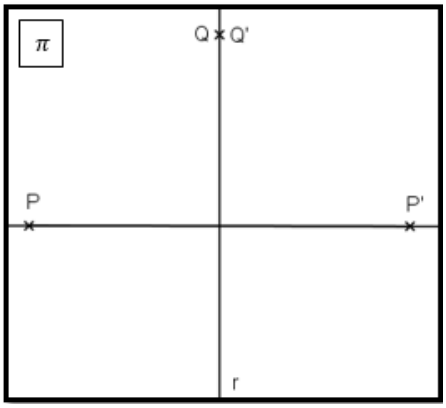
En tal caso la recta r se llama eje de simetría o eje de reflexión.

$Sr(P) = P'$. ⟶ Esto expresa que P' es la imagen de P por la reflexión de eje r.

Si Q es un punto de r, entonces, $Sr(Q) = Q$. Lo cual significa que Q es un punto fijo de Sr y se deduce que los puntos fijos de esta transformación son los del eje de reflexión.

Como se puede observar en la Figura 2-48, los puntos fijos de la simetría axial Sr corresponden a los puntos de r.

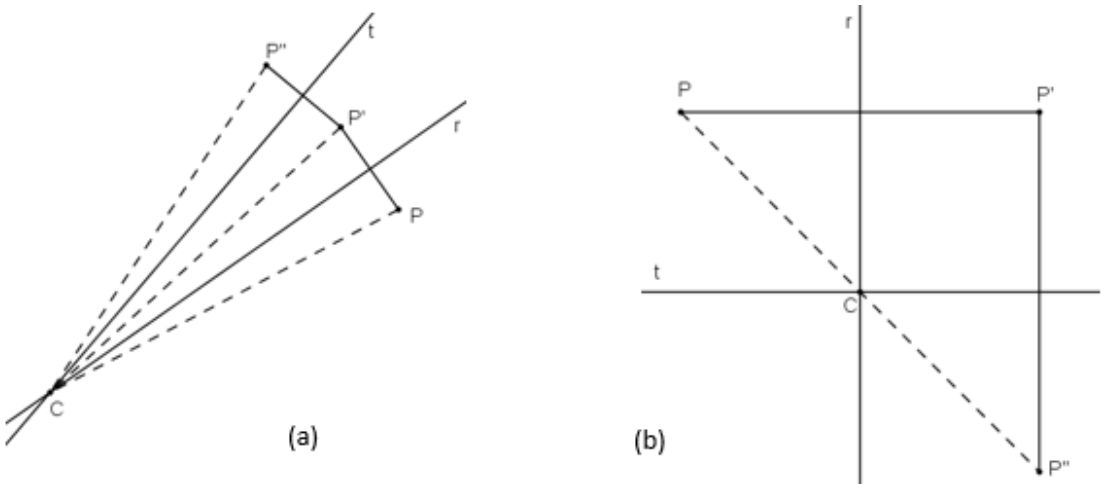
Figura 2-48: Simetría axial.



Toda simetría axial es una isometría cuyos puntos fijos son los del eje de reflexión.

Nótese que de nuevo no tiene sentido hablar de la estructura algebraica de las simetrías axiales. Sin embargo, es de anotar que la composición de dos simetrías axiales con ejes de simetría r y t, los cuales se intersecan en un punto C formando un ángulo α, es una rotación cuyo centro es el punto C y ángulo de rotación es 2α, como se muestra en la ilustración (a) de la Figura 2-49; si en particular r y t son perpendiculares como se muestra en la ilustración (b) de la Figura 2-49, se determina una simetría central con centro C.

Figura 2-49: Composición de dos simetrías axiales.



Según lo observado en la ilustración (a) toda rotación se puede descomponer en dos simetrias axiales donde el centro de rotación C es la intersección de dos ejes de simetría r y t, y el ángulo α entre ellos es la mitad del ángulo de rotación (2α).

Ya sabemos que las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma se denominan figuras *congruentes*, y que al aplicar por ejemplo a un triángulo una transformación como una traslación, una rotación, o una simetría, nos genera un triángulo congruente, lo mismo podemos hacer con una circunferencia, un polígono y en general al aplicar una transformación como las mencionadas a una figura determinamos una figura semejante a esta. Ahora estudiaremos una transformación en el plano que ocasiona que las figuras inicial y final se denominen *semejantes*. Las figuras que son objeto de este tipo de transformación no preservan sus distancias, pues los lados correspondientes sufren una modificación en su tamaño en forma proporcional, lo que sí mantienen es una congruencia angular, es así que intuitivamente podríamos decir que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, o se pueden considerar como agrandamientos o reducciones de las figuras sin distorsiones. Recordemos que, según la definición 17 citada en esta sección, dos *polígonos* son *semejantes* si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales, u otra forma es decir que dos polígonos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro, hablamos de la homotecia o la composición entre una homotecia y una isometría.

2.7.2 Homotecias

La homotecia es una transformación en el plano que provoca un aumento o disminución del tamaño original de la figura; si se miran las homotecias como una función son simples "cambios de escala", en donde se conserva la medida de los ángulos aunque no la longitud de los lados correspondientes, sin embargo, entre estos se conserva una relación de proporcionalidad. Para poder definir homotecia es necesario contar con un punto C en un plano π, que se denominará *centro* de la homotecia y tomar un número k en donde $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$ y que a partir del punto C, multiplica todas las distancias por un mismo factor que se llamará *razón* de la homotecia. Una vez definidos el centro y la razón de la homotecia, $H_{(C,k)}$ representará la homotecia de centro C y razón k.

Definición 41. Dado un punto fijo C y un número real k, en donde $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$, se llama ***homotecia*** de centro C y razón k a la transformación en el plano π en sí mismo, que hace corresponder a cada punto P el punto P' lo cual se simboliza $H_{(C,k)}(P) = P'$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $CP' = k \cdot CP$.
2. C, P y P' son colineales.

k corresponde al factor de reducción o amplificación de la homotecia (determina el tamaño de la figura resultante) siendo k la razón entre las medidas de los lados correspondientes.

Dependiendo del valor que puede tomar k las homotecias se clasifican en:

- Homotecia directa. Si $k > 0$, la razón es positiva y las figuras quedan a un mismo lado del centro de la homotecia.
- Homotecia inversa. Si $k < 0$, la razón es negativa, y las figuras se encuentran en lados opuestos con respecto al centro de la homotecia.

Si tenemos en cuenta el valor absoluto de k, sucede:

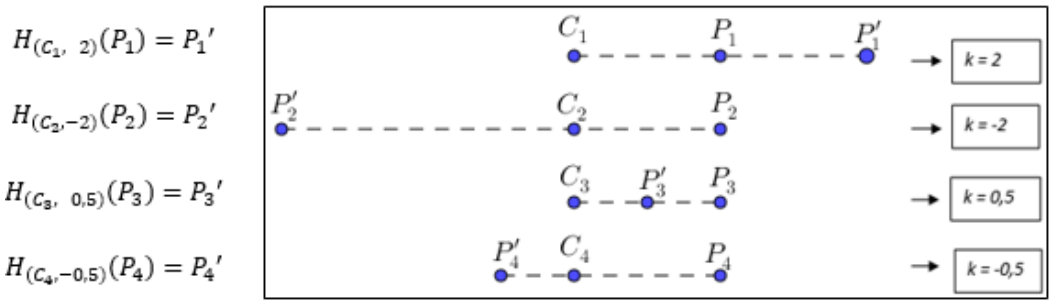
- Si $|k| > 1$, la homotecia es una dilatación del plano. Es decir, que la figura aumenta su tamaño original.
- Si $|k| < 1$, la homotecia es una contracción del plano. Es decir, que la figura reduce su tamaño original.

Como k, la razón de la homotecia es un número real, a continuación analizaremos lo que sucede con algunos valores especiales que puede tomar k*:*

- Si $k = 0$ $\longrightarrow$ Sin importar el punto que se considere, $k \cdot CP$ es el vector nulo. Así las cosas, la imagen de cualquier punto del plano es el punto C y se determina que la transformación es constante.
- Si $k = 1$ $\longrightarrow$ $CP' = CP$, como $P = P'$, es la transformación identidad *(id)*
- Si $k = -1$ $\longrightarrow$ $CP' = PC$, esto significa que P y P' son simétricos con respecto al punto C y se dice entonces que la homotecia es una simetría central.

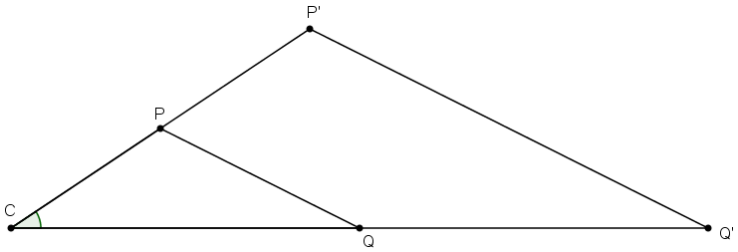
A continuación, en la Figura 2-50 observamos algunos ejemplos de homotecias con distintos valores para k.

Figura 2-50: Homotecias con distintos valores k.



Podemos observar en la Figura 2-51, que se ha definido en un plano π una homotecia de centro C y razón k. Entonces para dos puntos del plano, digamos P y Q con imágenes P' y Q' se verifica $\frac{CP'}{CP} = \frac{CQ'}{CQ}$ y el ángulo $P'CQ'$ es congruente con el ángulo PCQ. Por lo tanto, el triángulo CPQ es semejante al triángulo $CP'Q'$.

Figura 2-51: $\Delta CPQ \sim \Delta\, CP'Q'$.



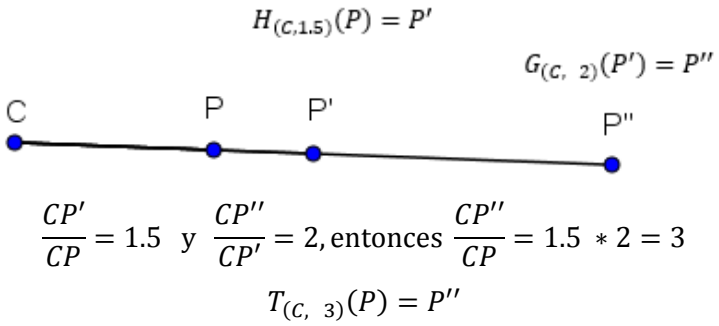
Ahora mencionaremos algunas propiedades importantes de las homotecias:

- Toda homotecia de centro C y razón k que no sea una transformación constante $(k \neq 0)$ es una transformación en el plano π y es inyectiva.[38]
- La inversa de la homotecia de centro C y razón k, es la homotecia de centro C y razón $1/k$ con $k \neq 0$. Es decir que, dado un punto P' del plano existe un punto P tal que $H_{(C,K)}(P) = P'$, siempre que se dé la relación $CP = \frac{1}{K}CP'$ que es la función inversa de $H^{-1}{}_{\left(C,\frac{1}{K}\right)}(P') = P$.
- El único punto fijo de una homotecia de centro C y razón $k \neq 1$, es el centro de la homotecia.

[38] Una función f es inyectiva si, cuando $f(x) = f(y),\ x = y$.

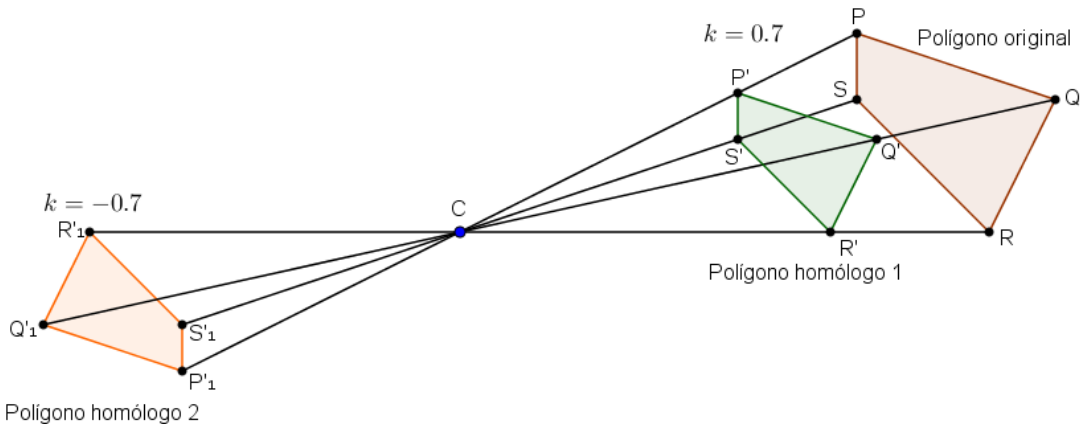
- La composición de homotecias del mismo centro es otra homotecia del mismo centro, cuya razón de homotecia es el producto de las razones. Si tenemos dos homotecias con el mismo centro $H_{(C,k_1)}$ y $G_{(C,k_2)}$ y razones distintas k_1 y k_2, su compuesta es otra homotecia del mismo centro y la razón es el producto de k_1 y k_2 $T_{(C,k_1 \cdot k_2)}$. Entonces, $H_{(C,k_1)} \circ G_{(C,k_2)} = T_{(C,k_1 \cdot k_2)}$.

Figura 2-52: Composición de homotecias del mismo centro.



- En un plano, el conjunto de las homotecias con el mismo centro junto con la composición es un grupo abeliano. La compuesta de dos homotecias es una homotecia y el conjunto de las homotecias no constantes de centro C, con la operación de composición, es un grupo abeliano.
- La composición de dos homotecias con distinto centro es una homotecia.
- Para el caso de un polígono y su homólogo, el centro de la homotecia es la intersección de las rectas determinadas por los vértices del polígono dado y sus respectivos vértices homólogos que se cortan en un único punto. Ver ejemplo, en la Figura 2-53.

Figura 2-53: Polígono $PQRS$ y su homólogo.



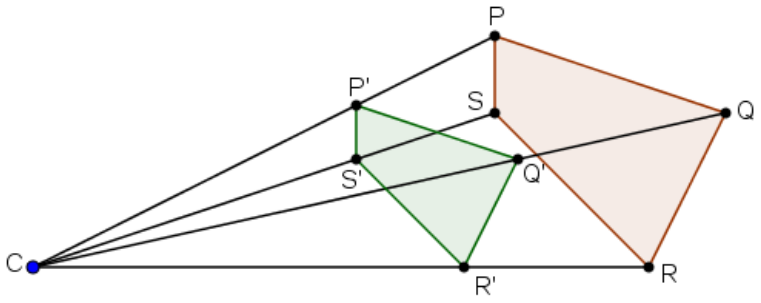
- Si unimos los vértices de un polígono a un punto C del plano, y a cada una de esta líneas de unión las dividimos en la misma razón, los puntos de división son los vértices de un polígono semejante.

Para ilustrar lo anterior consideremos una figura plana cualquiera, como por ejemplo, un cuadrilátero (Figura 2-54), que consista en el sistema de puntos P, Q, R y S; sean líneas CP, CQ, CR y CS las que unen estos puntos a cualquier punto C del plano. Si P', Q', R' y S' son puntos de estas líneas respectivamente y si existe un número k tal que:

$$k = \frac{CP'}{CP} = \frac{CQ'}{CQ} = \frac{CR'}{CR} = \frac{CS'}{CS}$$

entonces, la figura formada por los puntos P', Q', R' y S' es semejante a la figura dada, y está semejantemente colocada.

Figura 2:54: $\square PQRS \sim \square P'Q'R'S'$.



2.7.3 La congruencia y las transformaciones geométricas

Las definiciones presentadas en la sección de aspectos disciplinares fueron tomadas en su mayoría del texto Geometría moderna (Moise & Downs, 1964), en donde gran cantidad de conceptos y definiciones se expresan considerando a las figuras como cuerpos fijos o inmóviles. Ahora estudiaremos la congruencia entre segmentos, ángulos, polígonos y en particular entre los triángulos, que nos permitirán comprender el concepto de congruencia desde el punto de vista de las transformaciones.

- Congruencia entre segmentos: Se dice que “Dos *segmentos son congruentes*, si tienen la misma longitud.”[39] Si usamos un modo intuitivo y menos estático para realizar la definición de segmentos congruentes se puede decir que dos segmentos son congruentes si al “mover” uno de ellos, rotándolo sobre uno de sus extremos y trasladándolo, es posible hacerlo coincidir con el otro segmento.

- Congruencia entre ángulos: En forma similar a la congruencia entre segmentos se dice que “dos *ángulos son congruentes*, si tienen la misma medida”[40] o también llamada amplitud. Si se aplica una isometría a una figura geométrica su imagen preserva la medida de sus ángulos. Por tanto, un ángulo localizado en un vértice A de la figura original será congruente con el ángulo del vértice correspondiente de la imagen transformada A'. Es decir $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$.

- Congruencia entre triángulos: “Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre los vértices de dos triángulos. Si los pares de los lados correspondientes son *congruentes*, y los pares de ángulos correspondientes son *congruentes*, entonces la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ se llama una *congruencia* entre los dos *triángulos.”* [41] *E*ntonces, una definición menos estática acerca de la congruencia entre triángulos enlazada al tema de las transformaciones es que:

Teorema (13)

“Dos triángulos son congruentes**,** si y solo si, uno es la imagen del otro al aplicar una isometría.”[42] Parte de la prueba es el teorema 12 del presente trabajo.

- Congruencia entre polígonos: “Dos *polígonos* son *congruentes* si sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.”[43] Entonces, se puede considerar que dos polígonos son congruentes, si uno de ellos se puede “mover”; rotándolo sobre un punto, reflejándolo sobre un eje y trasladándolo, de tal manera que coincida

[39] Definición 8. Sección Aspectos disciplinares, p. 24.
[40] Definición 8. Sección Aspectos disciplinares, p. 24.
[41] Definición 24. Sección Aspectos disciplinares, p. 31.
[42] Una demostración completa del teorema se encuentra en [16], p. 39.
[43] Definición 16. Sección Aspectos disciplinares, p. 26.

con el otro, o, dicho de otra manera, dos polígonos son congruentes si existe una isometría que los relaciona: una transformación que puede ser de traslación, rotación y/o simetría**.** Lo anterior se expresa en el siguiente teorema:

Teorema (14)

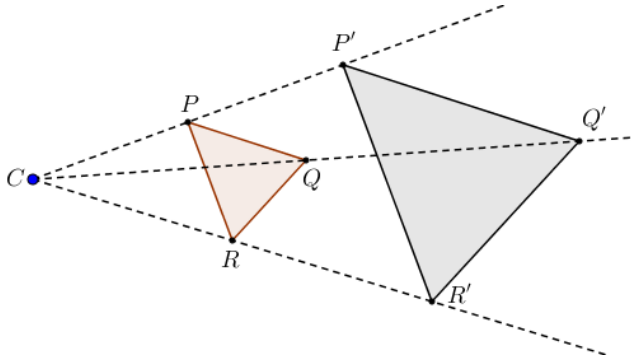
Dos polígonos son congruentes si y solo si uno es la imagen del otro al aplicar una isometría.[44]

2.7.4 La semejanza y las transformaciones geométricas

Consideramos que para esta sección es importante tener a la mano la definición de semejanza de triángulos. Recordemos que: "dos triángulos ABC y DEF son semejantes, lo cual se escribe: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ si tienen sus ángulos homólogos congruentes y sus lados homólogos proporcionales, esto es, $\measuredangle A = \measuredangle D,\ \measuredangle B = \measuredangle E,\ \measuredangle C = \measuredangle F$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

La Figura 2-55 ilustra el "trabajo" de una homotecia de centro C y razón k y $k > 1$.
En tal caso se verifican los siguientes hechos:

Figura 2-55: Homotecia



a. $\Delta CQP \sim CQ'P'$. En efecto,
$\frac{CP'}{CP} = \frac{CQ'}{CQ} = k$ y $\measuredangle PCQ \cong \measuredangle P'CQ'$.

b. $\Delta CRQ \sim CR'Q'$. En efecto,
$\frac{CR'}{CR} = \frac{CQ'}{CQ} = k$ y $\measuredangle QCR \cong \measuredangle Q'CR'$.

c. $\Delta CRP \sim CR'P'$. En efecto,
$\frac{CR'}{CR} = \frac{CP'}{CP} = k$ y $\measuredangle PCR \cong \measuredangle P'CR'$.

[44] Una demostración completa del teorema se encuentra en [16], p. 40.

De a. b. y c se tiene que:

$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{Q'R'}{QR} = \frac{P'R'}{PR} = k$, de donde, $\Delta PRQ \sim \Delta P'R'Q'$.

Por lo tanto, la homotecia dada transforma triángulos en triángulos semejantes y por lo tanto preserva la congruencia de ángulos.

A continuación, un teorema de semejanza de triángulos desde el punto de vista de las transformaciones:

Teorema (15)

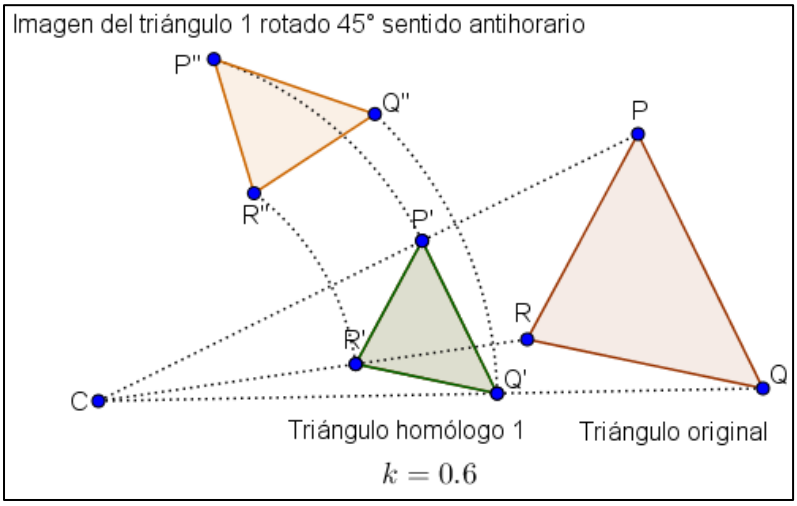
"Dos triángulos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro, en este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición de una homotecia con una isometría."[45]

Observación:

En la Figura 2-56 vemos el triángulo PQR que luego de aplicarle una homotecia con $k = 0.6$ produjo el triángulo homólogo *1* como imagen resultante, por lo tanto, los triángulos PQR y $P'Q'R'$ son semejantes, esto es: $\Delta PQR \sim \Delta P'Q'R$, así mismo tenemos que, luego de aplicarle una rotación al triángulo homólogo *1* se produjo un nuevo triángulo $P''Q''R''$ también semejante al polígono original PQR. Entonces $\Delta PQR \sim \Delta P''Q''R''$.

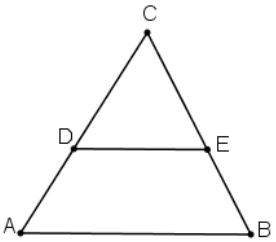
[45] Una demostración completa del teorema se encuentra en [16], p. 46.

Figura 2-56: Composición de una homotecia y una rotación.



Teorema (16). Toda paralela a un lado de un triángulo, determina un triángulo semejante al primero. Si $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, entonces, $\Delta CDE \sim \Delta CAB$.

Figura 2-57: $\Delta CDE \sim \Delta CAB$.



Al observar la Figura 2-57 y aplicar los criterios de la semejanza[46] notamos que los tres ángulos correspondientes son congruentes y los tres pares de lados homólogos proporcionales.

Visto el tema de la semejanza entre triángulos y su relación con las transformaciones geométricas veamos qué sucede con los polígonos:

Recordemos que: **"**dos *polígonos* son *semejantes* si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales."[47]

[46] Sección Aspectos disciplinares. p.34.
[47] Definición 17. Sección Aspectos disciplinares. p. 26.

Pero de forma intuitiva se puede decir que dos polígonos son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque su tamaño sea diferente, a continuación, el teorema que contiene la definición de polígonos semejantes teniendo en cuenta las transformaciones que es nuestro principal tema de interés.

Teorema (17)

"Dos polígonos son semejantes si y solo si existe una transformacion que envía uno en el otro, en este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición entre una homotecia y una isometría."[48]

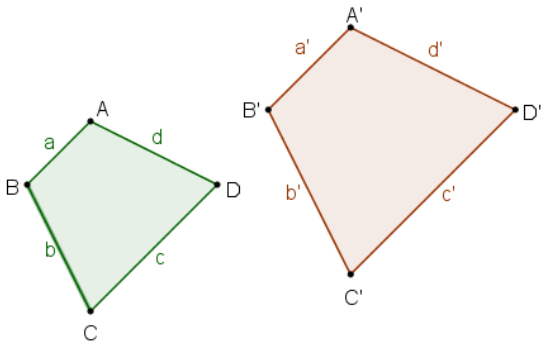
Observaciones:

- Los lados de un polígono se dicen homólogos si están comprendidos entre dos ángulos respectivamente congruentes.
- Todos los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes entre sí.
- De lo anterior se desprende entonces que todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí.
- Todas las circunferencias son semejantes entre sí.
- Dados dos polígonos semejantes, aun cuando no sean regulares, se cumple que la razón k que hay entre cualquier par de lados homólogos es la misma. En la Figura 2-58 se observa lo aquí planteado.

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d}$$

Entonces, $ABCD \sim A'B'C'D'$

Figura 2-58: $ABCD \sim A'B'C'D'$.



[48] Una demostración completa del teorema se encuentra en [16], p. 47.

2.7.5 Transformaciones geométricas y el plano de coordenadas cartesianas

Finalizamos esta sección con algunos ejemplos de transformaciones geométricas en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Solo para mencionar, de manera informal, $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, lo cual significa que existe una operación interna en $\mathbb{R}^2$ y una operación de multiplicación de los elementos de $\mathbb{R}^2$ con los elementos de $\mathbb{R}$, que en ambos casos cumplen ciertas propiedades y relaciones de coherencia entre ellas.

Una transformación lineal T: $\mathbb{R}^2$ ----$\mathbb{R}^2$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$
2. $T\alpha(x, y) = \alpha T(x, y)$

Ahora sí, pasando al caso que nos ocupa veamos algunos ejemplos de transformaciones geométricas.

1. La función T: $\mathbb{R}^2$ ---- $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = T(-y, -x)$ es una transformación lineal y corresponde a una simetría central con centro el origen $(0, 0)$.

2. La función T: $\mathbb{R}^2$ ---- $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = T(-x, y)$ es una transformación lineal y corresponde a una simetría axial, en este caso a una simetría con respecto al eje Y.

3. La función T: $\mathbb{R}^2$ ---- $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = T(x, -y)$ es una transformación lineal y corresponde a una simetría axial, en este caso a una simetría con respecto al eje X.

4. La función T: $\mathbb{R}^2$---- $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = T(x + 2, y)$ corresponde a una traslación, en este caso trasladar cada punto dos unidades a la derecha.

Nótese que T no es una transformación lineal. En efecto, $T(0,0) = (2,0)$.

Ahora $T[(0,0)+(0,0)] = T(0,0) = (2,0)$ y $T(0,0) + T(0,0) = (2,0) + (2,0) = (4,0)$.

Por lo tanto $T[(0,0)+(0,0)] \neq T(0,0) + T(0,0)$.

5. La función $T: \mathbb{R}^2$ ---- $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = T(x-4, y+3)$ se puede ver como la compuesta de dos traslaciones, que finalmente se puede interpretar como trasladar cada punto cuatro unidades a la izquierda y tres unidades hacia arriba.

   Nótese que T no es una transformación lineal, porque en efecto, $T(0,0) = (-4,3)$.

   Ahora $T[(0,0)+(0,0)] = T(0,0) = (-4, 3)$ y $T(0,0) + T(0,0) = (-4, 3) + (-4,3) = (-8,6)$.

   Por lo tanto $T[(0,0) + (0,0)] \neq T(0,0) + T(0,0)$.

2.8 Teselaciones en el plano

A continuación, revisaremos algunas definiciones y teoremas básicos sobre teselaciones, tomando como referencia los libros: *La geometría en el arte y el diseño* (Mariño, 2004), *Simetría dinámica* (Alsina, Pérez, & Ruiz, 1989), y el trabajo de grado titulado *El arte un contexto para la enseñanza de polígonos en grado séptimo* (Mendoza, 2016), pues vemos como el recubrimiento del plano es una cuestión que ha suscitado gran interés en todos los tiempos y ésta inquietud, que ha dado lugar a diseños de gran belleza, ha surgido de problemas tan cotidianos como levantar muros, decorar paredes, pavimentar suelos, estampar tejidos.

En geometría es común el estudio de los movimientos que dejan invariante una figura, que no son otra cosa que un grupo de simetrías, pero estudiar los subgrupos que permiten rellenar periódicamente un friso o un plano completo, es decir una teselado, es ir más allá, pues se ingresa en el estudio de las teselaciones en el plano en donde se usan transformaciones isométricas sobre una figura inicial, es decir, copias idénticas de una o diversas piezas o teselas con las cuales se componen figuras para recubrir enteramente una superficie, por tal razón se ha incluido esta temática por su gran riqueza

didáctica en la enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano y uno de los principales intereses es mostrar como mediante las transformaciones se pueden generar recubrimientos en el plano y aproximarnos a la noción de área por recubrimiento.

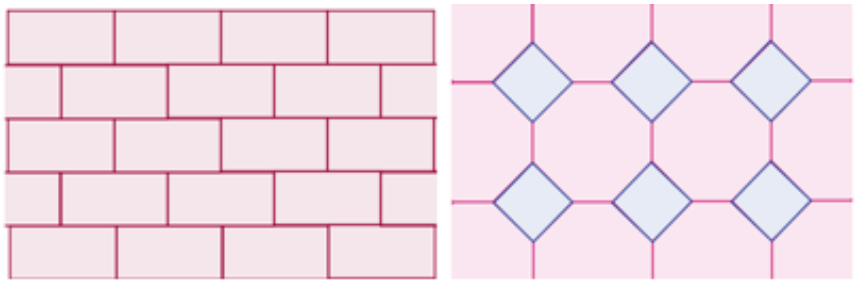
Definición 42. Un ***mosaico*** es un arreglo de formas que cubre completamente un plano sin huecos o traslapes.

A los *mosaicos* también se les conoce como *embaldosados* o *teselaciones*. Estos consisten en un recubrimiento especial del plano con figuras, que se genera con la repetición de un módulo que cumple ciertas características de acoplamiento y regularidad de tal manera que ningún espacio queda sin cubrir y ningún espacio queda cubierto más de una vez.

Si recubrimos o decoramos, el plano con "baldosas", sin solapamientos ni agujeros, decimos que hemos hecho un mosaico.

Si para formar un mosaico se usa una sola baldosa entonces al mosaico se le denomina *monohedro*; si se usan dos*, diedro*; si se usan tres*, triedro* y así sucesivamente. El mosaico *(a)* de la Figura 2-59, es un ejemplo de mosaico monohedro y el mosaico *(b)* es un ejemplo de mosaico diedro.

Figura 2-59: Mosaicos.

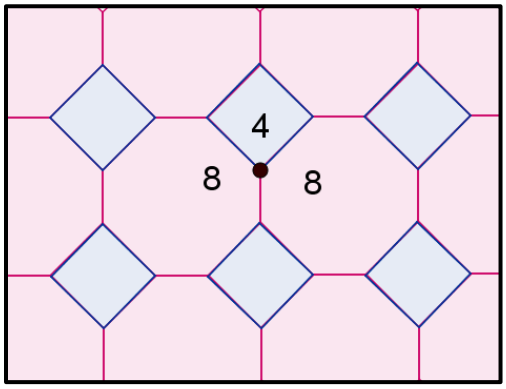


a) Mosaico monohedro *b) Mosaico diedro*

Un mosaico de polígonos se denomina "*borde- con- borde"* si cada borde es lado común de dos polígonos adyacentes. Los *vértices* son los puntos extremos de los bordes, o los puntos en donde se encuentran las baldosas, que mínimo deben ser tres. En la Figura 2-59, el mosaico *(b)* es borde-con-borde, mientras que el mosaico *(a)*, no lo es.

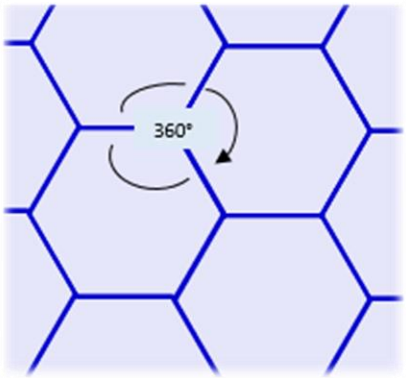
Para nombrar los distintos mosaicos de polígonos borde-con-borde existentes se suele utilizar una notación en la cual se tienen en cuenta el número de vértices que convergen en un punto. Por ejemplo, el mosaico de la Figura 2-60, se denomina mosaico **4.8.8**. La razón que tenga tres cifras es porque se encuentran tres vértices es un mismo punto en el cual convergen dos octágonos (8 lados) y un cuadrado (4 lados).

Figura 2-60: Mosaico 4.8.8.



En todo mosaico borde-con-borde para que las formas creen una teselación, sus ángulos, al acomodarse alrededor de un punto, deben tener medidas que sumen exactamente 360° (Figura 2-61).

Figura 2-61: Mosaico 6.6.6.



Teniendo en cuenta lo anterior, fácilmente se puede deducir que, con los paralelogramos y con los triángulos es posible rellenar el plano.

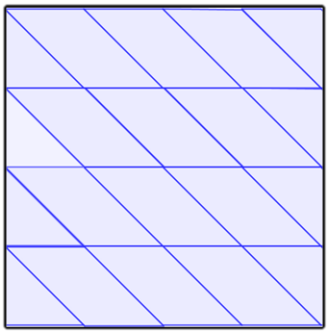
A continuación, los teoremas que establecen formalmente esta situación:

Teorema (18). Con cualquier paralelogramo es posible teselar el plano.

Observación:

Como la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es 360°, al hacerlos coincidir alrededor de un vértice, cuatro cuadriláteros rellenan totalmente el espacio (Figura 2-62) que rodea dicho vértice. Se procede de igual forma con los demás vértices.

Figura 2-62: Teselado con paralelogramos.



Del anterior teorema es sencillo deducir que con triángulos también ocurre lo mismo, pues si consideramos un triángulo cualquiera y hacemos una copia de este triángulo y lo giramos 180° y luego pegamos estos dos triángulos, podemos ver en la Figura 2-63 como se crea un paralelogramo.

Figura 2-63: Paralelogramo a partir de triángulos.

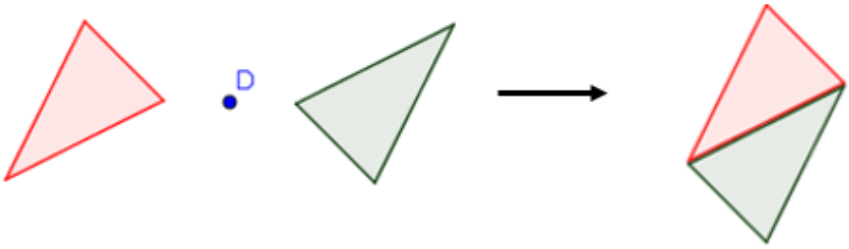
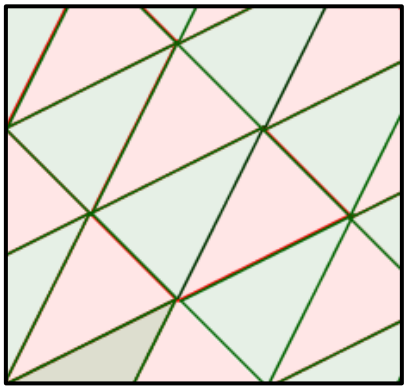


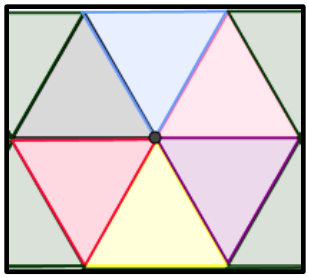
Figura 2-64: Teselado con triángulos.



Teorema (19). Con cualquier triángulo es posible teselar el plano.

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°, al hacerlos coincidir alrededor de un vértice, seis triángulos rellenan totalmente el espacio que rodea dicho vértice. se procede de igual forma con los demás vértices. (Figura 2-64 y Figura 2-65).

Figura 2-65: Teselado con triángulos.



2.8.1 Mosaicos con polígonos regulares

Definición 43. Se dice que un *mosaico es regular* cuando es monohedro y borde-con-borde formado a partir de un polígono regular.

Dicho de otra forma, un mosaico es *regular* cuando las baldosas tienen todas el mismo tamaño y la misma forma y ésta es la de un polígono regular.

Teorema (20). Los únicos polígonos que crean un mosaico regular son los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos regulares.

Demostración

Sea α la medida de uno de los ángulos interiores de un polígono regular, n el número de lados y m el número de polígonos regulares de ese tipo que se necesitan alrededor de un punto para construir el mosaico.

Entonces, $m\alpha = 360°$ **(1)**

y tenemos que, la medida de un ángulo interior de un polígono regular de n lados es:

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180° \quad \textbf{(2)}$$

Se reemplaza **(2)** en **(1):**

$$m\frac{180°(n-2)}{n} = 360°$$

Entonces, $m = \frac{2n}{n-2}$

Como n es el número de lados del polígono, se debe cumplir que $n \in \mathbb{Z}^+$ y además $n \geq 3$

Como m es el número de polígonos regulares a utilizar para formar el mosaico $m \in \mathbb{Z}^+$.

En la Tabla 2-2, se analizan los posibles valores que puede tomar n y el respectivo resultado de m para la formación de un mosaico regular.

Tabla 2-2: Formación de mosaicos regulares

Número de lados (n)	***Ángulo interior***	$\boldsymbol{\frac{2n}{n-2}}$	***m***	***Arreglos - MOSAICO REGULAR***
3	60°	$\frac{2(3)}{3-2}$	6	6 triángulos alrededor de un punto
4	90°	$\frac{2(4)}{4-2}$	4	4 cuadrados alrededor de un punto
5	108°	$\frac{2(5)}{5-2}$	$\frac{10}{3} = 3,\hat{3}$	$m \notin \mathbb{Z}^+$. NO es posible formar un mosaico regular con pentágonos
6	120°	$\frac{2(6)}{6-2}$	3	3 hexágonos alrededor de un punto
7	128,57…°	$\frac{2(7)}{7-2}$	$\frac{14}{5} = 2,8$	$m \notin \mathbb{Z}^+$. NO es posible formar un mosaico regular con heptágonos
8	135°	$\frac{2(8)}{8-2}$	$\frac{16}{6} = 2.\hat{6}$	$m \notin \mathbb{Z}^+$. NO es posible formar un mosaico regular con octágonos

En la Tabla 2-2 observamos que para $n = 5$ y para $n > 6$, m resulta un número racional y no entero, por lo que no formarían mosaicos regulares.

Para ampliar lo anterior, veamos el caso del pentágono regular $(n = 5)$. Al utilizar únicamente pentágonos regulares para cubrir el plano notamos que es uno de los

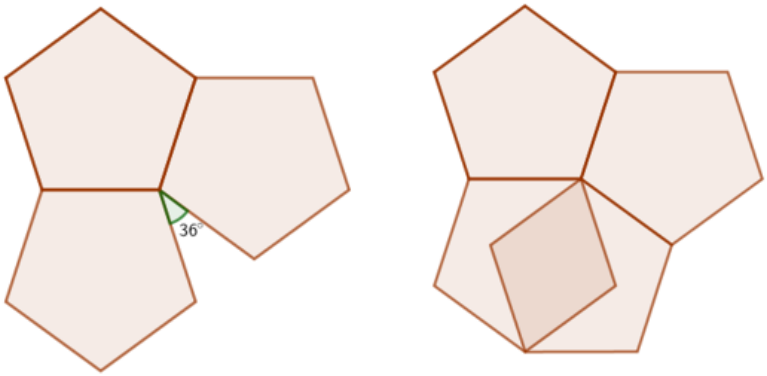
polígonos regulares que no embaldosa el plano debido a que la medida del ángulo interior del polígono viene dado por la expresión:

$a = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$ donde n es el número de lados del polígono regular y α su ángulo interior en grados. Así para un pentágono regular con 5 lados $(n = 5)$, el ángulo interior es:

$$a = \frac{5-2}{5} \cdot 180° = 108°$$

Como cada uno de los ángulos interiores del pentágono regular mide 108° y 360 no es múltiplo entero de 108, tenemos que, con tres pentágonos en un vértice, se cubren 324° de los 360°, quedando 36° sin cubrir y con 4 pentágonos regulares en un vértice común, no hay más opción que solaparlos, dejando así de ser un mosaico. (Figura 2-66).

Figura 2-66: Pentágono regular al intentar formar un mosaico



Ahora veamos el caso para polígonos regulares con más de 6 lados $(n > 6)$.

Teniendo en cuenta que:

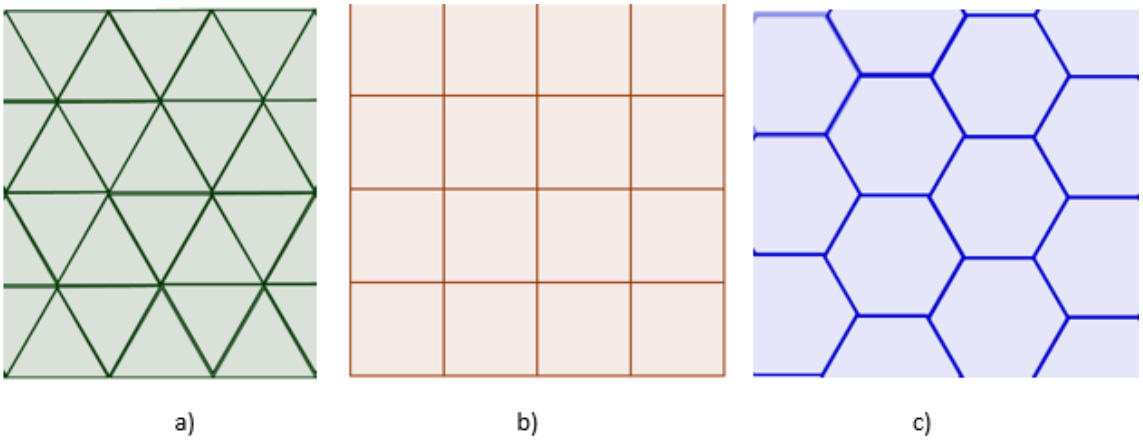
- Los vértices son los puntos donde se encuentran las baldosas, sabemos que, para formar un mosaico, mínimo deben concurrir tres polígonos en un vértice.
- Al observar la Tabla 2-2, podemos notar que los ángulos interiores de los polígonos regulares con más de 6 lados tienen medidas mayores a 120°.

Se puede concluir entonces que, al utilizar cualquier polígono regular con $(n > 6)$ no se puede cubrir el plano debido a que, al colocar tres polígonos de los mismos se solapan por sumar más de 360° en un vértice común.

Por otro lado, si nos fijamos en los resultados de la Tabla 2-2 y si continuamos el proceso para $n > 6$, los valores para m resultan ser números racionales no enteros y además son valores menores que 3. Recordemos que se necesitan mínimo tres polígonos regulares que concurran en un vértice para formar un mosaico y queda claro entonces que, solo resultan mosaicos regulares con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares ya que son los únicos polígonos cuyas medidas angulares son factores de 360°.

A continuación, la Figura 2-67 ilustra acerca de los tres mosaicos regulares posibles:

Figura 2-67: Mosaicos Regulares.



2.8.2 Mosaicos con polígonos no regulares

Sabemos que se puede teselar el plano con cualquier triángulo y con cualquier paralelogramo, pero en realidad, no se limita a paralelogramos, con cualquier cuadrilátero también se puede teselar.

Teorema (21). Con cualquier cuadrilátero se puede teselar el plano.

Demostración:

Si construimos un cuadrilátero cualquiera, luego hacemos una copia de éste rotada 180° y la colocamos encima del cuadrilátero original, se forma un hexágono con lados opuestos paralelos y congruentes que recibe el nombre de par-hexágono.

Figura 2-68: Construcción de un par-hexágono con cuadriláteros.

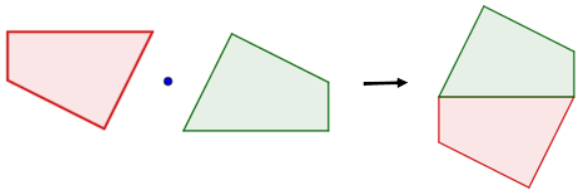
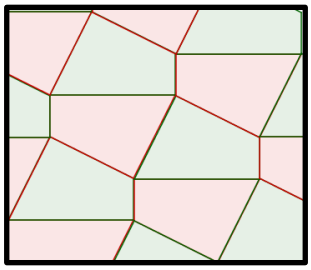


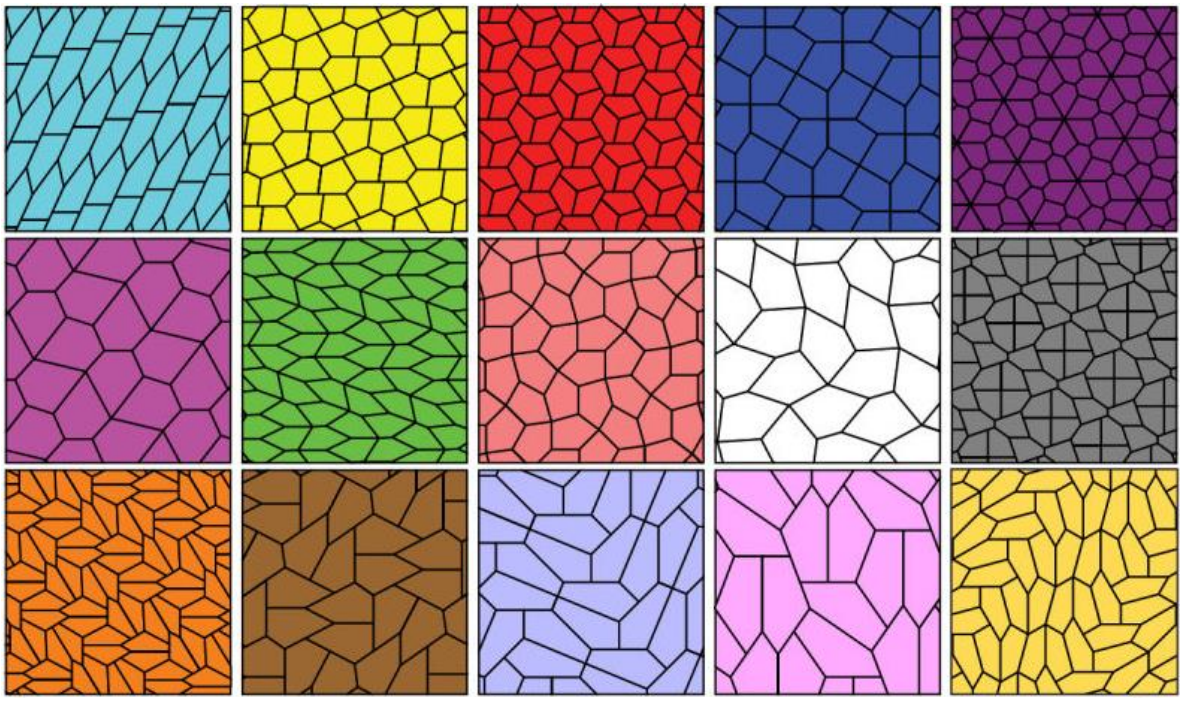
Figura 2-69: Teselado con cuadriláteros.



Sucede que con cualquier par-hexágono se puede teselar el plano, por tanto, con el cuadrilátero original también se puede.

Siguiendo el análisis de otros posibles mosaicos no regulares, se debe aclarar que, aunque no hay mosaicos con pentágonos regulares, esto no significa que no se puedan formar mosaicos con pentágonos de algún otro tipo. En Figura 2-70 se presentan 15 ejemplos de mosaicos no regulares a partir de pentágonos.

Figura 2-70: Mosaicos no regulares con pentágonos.



Fuente: Tomado de http://es.gizmodo.com/matematicos-hallan-una-nueva-variedad-de-pentagono-desp-724510164

2.8.3 Mosaicos con más de una baldosa

Mosaico Semi-regular

Definición 44. Un *mosaico semi-regular* es un mosaico borde-con-borde con más de una baldosa que deben ser polígonos regulares y con las mismas configuraciones en los vértices.

Los mosaicos semi-regulares son composiciones formadas por dos o más tipos de polígonos regulares en las que hay un solo tipo de polígono en los puntos medios. El patrón debe ser el mismo en todos los vértices.

Para realizar un mosaico semi-regular, la clave está en encontrar combinaciones de ángulos interiores de polígonos regulares que sumen 360° alrededor de un vértice y encontrar la manera de acomodar las formas en que el patrón pueda continuarse indefinidamente siguiendo el mismo orden. Como consecuencia de lo anterior, se sabe de manera implícita que el número menor de polígonos regulares necesarios para rodear un vértice es tres y el máximo es seis.

Teorema (22). Hay exactamente ocho mosaicos semi-regulares.

Demostración:

Tenemos que el ángulo interior de un polígono regular es: $\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}$

Una forma equivalente a la anterior es: $\alpha = 180° \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ $(\mathbf{1})$

Si intervienen 3 polígonos regulares diferentes de *n, m* y *p* lados, respectivamente, debe cumplirse que: $180° \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + 180° \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) + 180° \cdot \left(1 - \frac{2}{p}\right) = 360°$

Simplificando quedaría $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$

Esta ecuación tiene soluciones enteras que nos dan el número de lados de cada uno de los tres polígonos que intervienen y se pueden observar en la Tabla 2-3.

El proceso para obtener las ecuaciones con cuatro, cinco y seis polígonos regulares en cada vértice es similar y se muestran en la Tabla 2-3, donde se muestran todas las soluciones posibles.

Tabla 2-3: Soluciones posibles a la ecuación (**1**) con 3, 4, 5 y 6 polígonos

Ecuación	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	Número de Soluciones
$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$	6	6	6				10 soluciones
	5	5	10				
	4	5	20				
	4	6	12				
	4	8	8				
	3	7	42				
	3	8	24				
	3	9	18				
	3	10	15				
	3	12	12				
$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$	4	4	4	4			4 soluciones
	3	3	4	12			
	3	3	6	6			
	3	4	4	6			
$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{3}{2}$	3	3	3	3	6		2 soluciones
	3	3	3	4	4		
$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=2$	3	3	3	3	3	3	1 solución

En la Tabla 2-3 podemos observar que resultan en total 17 soluciones básicas. Así mismo, Fedorov, un cristalógrafo ruso en 1891 demostró que no hay más de 17 estructuras básicas para las infinitas decoraciones posibles del plano formando mosaicos periódicos.

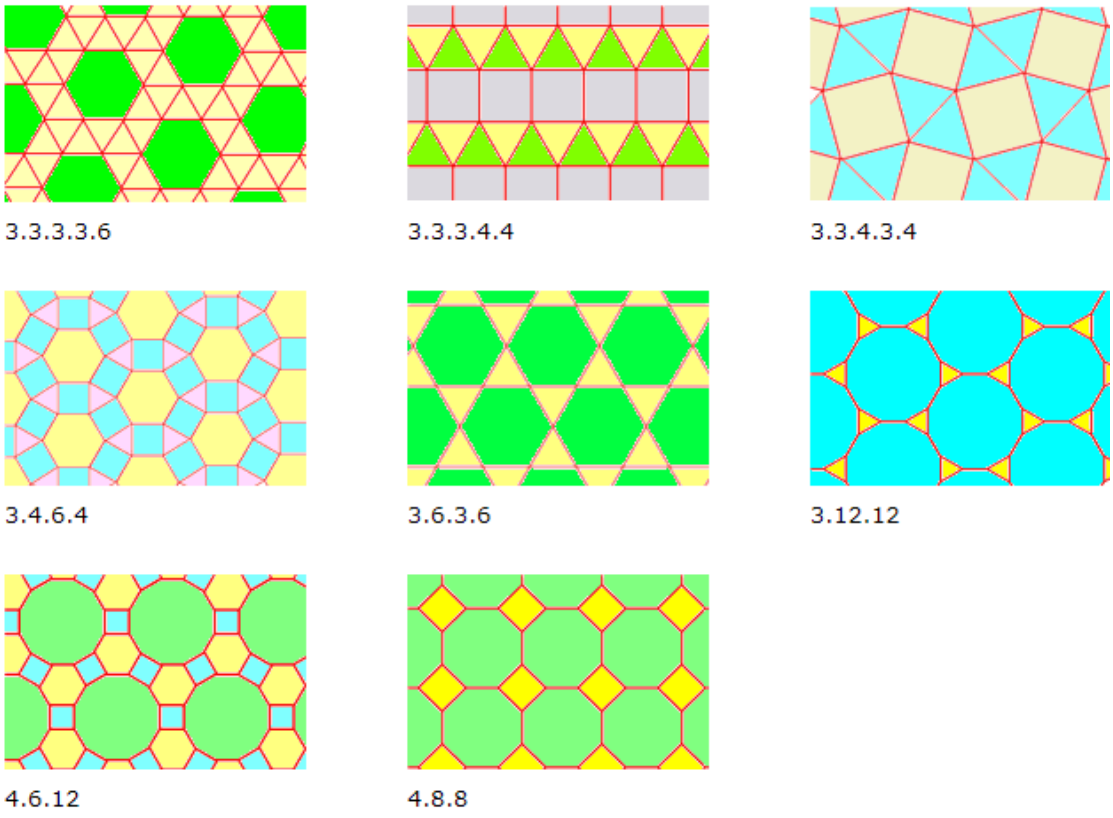
De las 17 soluciones existentes ya son conocidas tres de ellas, que son las pertenecientes a los mosaicos regulares: 6.6.6, 4.4.4.4, y 3.3.3.3.3.3.

De las 14 soluciones restantes hay algunas que no originan mosaicos semi-regulares debido a que hay disposiciones diferentes en los vértices, y para ser considerado un

mosaico semi-regular se exige que todas las configuraciones en los vértices deben ser iguales. Las soluciones 5.5.10, 4.5.20, 3.7.42, 3.8.24, 3.9.18 y 3.10.15 no forman mosaicos semi-regulares.

Las 8 soluciones restantes son todos los mosaicos semi-regulares posibles, los cuales se encuentran ilustrados a continuación con su respectiva notación; recordemos que la notación se hace teniendo en cuenta el orden según se vaya avanzando en un vértice enumerando el número de lados de cada forma.

Figura 2-71: Mosaicos semirregulares



Fuente: Tomado de: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html

3. Aspectos didácticos

En este capítulo se realiza un análisis de la influencia de las herramientas tecnológicas en especial del software de geometría dinámica Geogebra en la enseñanza de la geometría, luego se estudia el modelo de Van Hiele como gran referente en el desarrollo del pensamiento geométrico y en la forma de enseñanza de la geometría, luego se hace un estudio acerca de lo que mencionan los estándares básicos de competencias, los derechos básicos de aprendizaje y los lineamientos curriculares acerca de la enseñanza de los conceptos de transformaciones geométricas en el plano cartesiano, así mismo se hace el planteamiento de la propuesta para abordar estos temas.

3.1 Herramientas tecnológicas y enseñanza de la geometría

Según lo planteado en los lineamientos curriculares de matemáticas se dice que:
La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación. Desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bidimensionales y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas así como del efecto que ejercen sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones, el análisis y resolución de situaciones problemas que propicien diferentes miradas desde lo analítico, desde lo sintético y lo transformacional. (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Tenemos entonces, que el aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación para lograr un aprendizaje significativo, y es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido y, a su vez, las habilidades visuales deben ser guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia (Castiblanco, Urquina, Camargo, & Acosta, 2004).

Por otro lado, tenemos que, en la práctica docente es indispensable el diseño de estrategias por medio de las cuales, se planeen y desarrollen las interacciones que enlazan la construcción del conocimiento de los docentes con el contenido que aprenden los estudiantes. El diseño de estrategias didácticas debe ser un acto creativo y reflexivo a través del cual, los docentes logren crear ambientes en los que los estudiantes reconozcan sus conocimientos previos, los profundicen, creen nuevos conocimientos, los apliquen y transmitan a los demás para enriquecer la conciencia colectiva. En tal sentido, las estrategias didácticas convierten los objetivos de aprendizaje en acciones concretas.

Por lo mencionado anteriormente en la enseñanza de las matemáticas y particularmente de la geometría, es común que los docentes en sus estrategias didácticas integren herramientas que se derivan del uso de las TIC y también a nuevos desarrollos basados en software y programas de computadoras que permiten desarrollar competencias a diferentes niveles del pensamiento geométrico. Es por esto que, la aparición de herramientas tecnológicas ha producido una revolución en la enseñanza de la geometría, debido a que constituye una importante fuente de modelación con el cual se posibilita desarrollar habilidades visuales y de percepción espacial.

En la enseñanza de la geometría el desarrollo de software y programas de computadoras ha llevado a la construcción de diferentes programas cada vez más afines al entorno escolar, que permiten ilustrar de forma gráfica y hasta interactiva situaciones problema que generan el desarrollo de unidades temáticas que se imparten en el aula de clase.
Es así como surgieron variados softwares de geometría dinámica que presentan la posibilidad de desarrollar habilidades de visualización y permiten la exploración experimental y la modificación continua de las construcciones, obteniendo fácil y casi

inmediatamente numerosos ejemplos con una sola figura, además de introducir un cambio fundamental en la enseñanza de la demostración. Entre los numerosos softwares que surgieron de geometría dinámica, en la actualidad existen, por ejemplo: Geogebra, cabri-Géomètre, Geometer´s Sketchpad, Cinderella, Geonext, entre otros. Geogebra fue el software seleccionado para servir como apoyo al desarrollo de la presente estrategia de enseñanza-aprendizaje y las razones serán expuestas más adelante.

3.2 Uso didáctico de Geogebra

Existen programas sobre sistemas de álgebra computacional, que permiten cálculos simbólicos y numéricos y otros sobre sistemas de geometría dinámica, que permiten la introducción directa en la ventana gráfica de objetos geométricos y la representación dinámica de los mismos. Existe un software que tiene algo de las dos categorías de forma conjunta, y esto es lo más interesante. Combina las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. Se trata de Geogebra: un software matemático interactivo libre desarrollado por Markus Hohenwarter como resultado de su proyecto de tesis en su maestría de educación matemática, y culminado, exitosamente, en su doctorado en la Universidad de Salzburgo (Austria). El software está lleno de funcionalidades tendientes a simplificar las construcciones geométricas. Está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas. Sus gráficas son de alta calidad y pueden manipularse de forma simple para aumentar el rendimiento visual.

Geogebra es un software computacional, educativo, dinámico y gratuito. La aparición de este recurso ha producido una revolución en la enseñanza de la geometría y a continuación mencionaré con más detalle las razones por las cuales Geogebra es la herramienta tecnológica escogida para el desarrollo de la presente estrategia de enseñanza-aprendizaje:

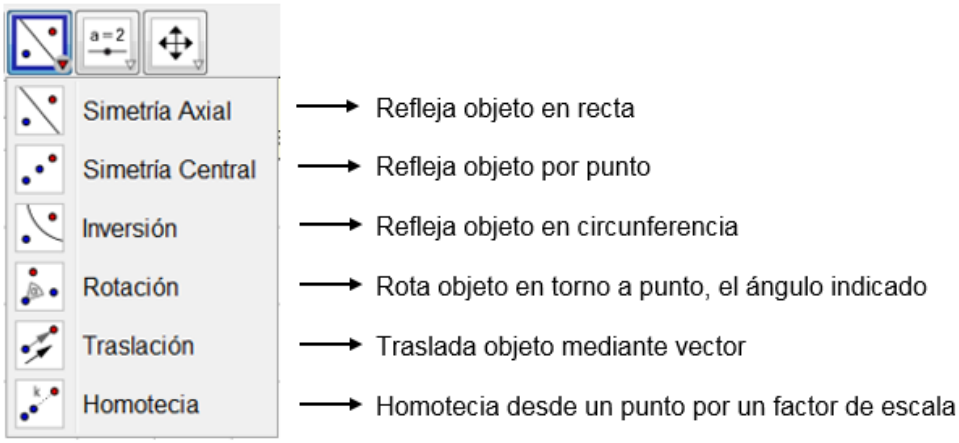
- Por razones de conectividad, por presentar la posibilidad de ser usado offline debido a que en la zona donde se encuentra ubicada la Institución Educativa no ha sido posible tener conectividad.

- Es un software educativo de libre descarga. No genera costo alguno adquirirlo, es de fácil instalación y permite disfrutar de todas las ventajas que posee para el campo de la enseñanza de las transformaciones geométricas.
- El uso de presentaciones dinámicas puede ser favorable al método expositor del docente.
- Realizar cambios a la hora de impartir la clase haciendo uso del computador como elemento motivador, puede ayudar no sólo con respecto al aspecto y la dinámica del aula, sino al tipo de actividades que podemos planear los docentes.
- Geogebra proporciona a los estudiantes un medio creativo y adecuado que les ofrece la posibilidad de poder interactuar directamente con objetos matemáticos tales como puntos, ángulos, segmentos, rectas, figuras de una manera simple y natural ayudando a fortalecer la autonomía en su aprendizaje. Es decir que, entre las ventajas que ofrece Geogebra está la posibilidad de implementar una visión constructivista que es justamente la que plantea el PEI de la Institución Educativa de Aguas Blancas.
- Se suelen presentar ciertas dificultades en la enseñanza de algunos temas cuando se realiza sólo usando el tablero, o con papel y lápiz. El software de geometría dinámica Geogebra, es una herramienta potente para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano, ya que permite visualizar los movimientos.
- Se facilita la construcción de las isometrías y los lugares geométricos, comprobando propiedades, tratando elementos invariantes y composición de movimientos.
- Geogebra tiene dentro de su barra de herramientas una específica para realizar transformaciones geométricas.

Figura 3-1: Herramienta para realizar transformaciones.

Dando clic en la herramienta para realizar transformaciones geométricas tenemos variedad de opciones de construcción que se muestran en la Figura 3-2.

Figura 3-2: Opciones de construcción de la herramienta de transformaciones geométricas.



Los estándares básicos de competencias en matemáticas mencionan que: “El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional.”[49]

El Dr. Howard Gardner en su teoría de inteligencias múltiples propuesta en 1983 plantea la existencia de siete tipos de inteligencia en todos los seres humanos, una de ellas es la inteligencia espacial, la cual abarca la capacidad de formar e imaginar dibujos de dos y tres dimensiones y el potencial de comprender, manipular y modificar las configuraciones del espacio amplio y limitado. La inteligencia espacial se considera como la habilidad de observar el mundo y los objetos desde diferentes perspectivas; esto se hace más fácil de realizar mediante el uso de la geometría activa, pues como es considerada en los lineamientos curriculares es una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio. Y a su vez el trabajo con la geometría activa al complementarse con programas de computación permite representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional, favoreciendo así al desarrollo de la inteligencia espacial considerada por el Dr. Gardner.

[49] Tomado de [25], p. 62.

Por último se espera que el uso didáctico del software Geogebra permita que la enseñanza del tema de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano proporcione un medio adecuado para que la interacción de los estudiantes produzca efectivamente un aprendizaje y a la vez sea motivante para ellos, ya que “los conceptos matemáticos (representación, situación, clasificación, dimensión, entre otros) de este tema es posible contextualizarlos con el entorno cotidiano y permiten cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas” (Felipe, 2010).

3.3 Teoría de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Modelo de Van Hiele, niveles y fases de aprendizaje

El modelo de Van Hiele, llamado también, teoría de Van Hiele, o niveles Van Hiele se originó en el año 1957 cuando la pareja de holandeses *Dina Van Hiele-Geldof* y *Pierre M. Van Hiel*e en sus disertaciones doctorales (Universidad de Utrech, Holanda) diseñaron una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El libro original donde se desarrolla la teoría se titula *Structure and Insight: A theory of mathematics education*.

El modelo Van Hiele describe el proceso de construcción del pensamiento geométrico como un proceso que se da en forma lenta en donde el alumno debe pasar por determinados niveles organizados de forma secuencial y jerárquica. El paso de un nivel a otro no se da en forma automática y es más dependiente de la instrucción que de la edad o la maduración biológica. Los Van Hiele dividen el proceso de construcción del pensamiento geométrico en niveles llamados niveles de pensamiento geométrico y éstos muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría y ayudan a secuenciar los contenidos que podemos diseñar en las unidades didácticas.

- *Nivel 1. Visualización.*

Llamado también de reconocimiento o de familiarización, en el que el estudiante percibe las figuras geométricas globalmente por su forma y no por sus propiedades.

- *Nivel 2. Análisis.*

Los estudiantes pueden verificar la verdad de una afirmación y de propiedades básicas mediante mediciones, realizando transformaciones, dibujos, construcción de modelos, recuentos, etc.

- *Nivel 3. Ordenamiento.*

Llamado también de clasificación, en donde el estudiante puede clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y hace demostraciones informales mediante argumentos deductivos luego de analizar ejemplos o realizar mediciones, transformaciones, etc.

- *Nivel 4. Deducción formal.*

Los estudiantes pueden realizar razonamientos lógicos formales, entienden el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no hacen razonamientos abstractos. Entienden que la verdad de una proposición se demuestra mediante la producción de demostraciones deductivas formales.

- *Nivel 5. Rigor.*

Los estudiantes son capaces de trabajar en distintos sistemas axiomáticos y es allí donde el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Están en la capacidad de estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Además de los niveles de aprendizaje, los Van Hiele hacen unas recomendaciones a los docentes de geometría para organizar su enseñanza siguiendo unas determinadas pautas denominadas “fases de aprendizaje”. El estudiante debe pasar por todas las fases de aprendizaje para llegar a alcanzar el nivel de razonamiento superior. A continuación, las fases de aprendizaje según los Van Hiele:

- *Fase 1. Información.*

Determinar o acercarse lo más posible a la situación real de los estudiantes mediante preguntas adecuadas y así determinar el nivel de partida y camino a seguir de las actividades posteriores.

Durante esta fase el docente debe indicar a sus estudiantes sobre el campo de estudio que van a trabajar, los conceptos que van a manejar, el tipo de problemas que se van a plantear, materiales que van a utilizar, entre otros. En esta fase es importante también que el estudiante adquiera los conocimientos básicos necesarios para poder iniciar el trabajo propiamente dicho.

- *Fase 2. Orientación dirigida.*

Conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos y propiedades principales en el área de la geometría estudiada, mediante actividades convenientemente organizadas por el docente y que se hallen de manera progresiva.

Durante esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio, por medio de la resolución de problemas y actividades planteados en los materiales proporcionados por el docente.

- *Fase 3. Explicitación.*

Conseguir que los estudiantes afiancen lo aprendido mediante la socialización entre ellos mismos.

Los estudiantes intercambian experiencias y comentan lo que han observado con sus compañeros en un diálogo de grupo, esto les obliga a tener que ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de un modo comprensible para los demás.

- *Fase 4. Orientación libre.*

Buscar que los estudiantes perfeccionen conocimientos relacionados al campo de estudio que ya conocen, tanto de contenido, como de habilidades de razonamiento, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas e importantes.

Los estudiantes aplican y combinan los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para resolver actividades de mayor nivel. Se recomiendan actividades con problemas abiertos y que puedan ser abordados de distintas maneras.

- *Fase 5. Integración.*

Se sintetizan los contenidos ya trabajados, tratando de adquirir una visión general de los contenidos y métodos, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que se

hayan estudiado anteriormente, y se busca la creación de una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados para sustituir los que ya se poseían.

En esta fase se podrían rehacer los grupos para profundizar algo más con aquellos estudiantes de mejor rendimiento e integrar actividades de recuperación para aquellos estudiantes que han presentado dificultades en la adquisición de alguno de los conocimientos geométricos.

3.4 Estándares básicos de competencias y las transformaciones geométricas en el plano cartesiano

Los estándares básicos de competencias en matemáticas mencionan que el hecho de localizar figuras geométricas en relación con sistemas de referencia, y el estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones ayuda en la apropiación por parte de los estudiantes del espacio físico y geométrico. Según los estándares básicos de competencias en matemáticas tenemos que el tema de transformaciones geométricas se empieza a tratar a partir del primer ciclo conformado por los grados de primero a tercero. A continuación, en la Tabla 3-1 se presenta un resumen de los estándares que mencionan las transformaciones geométricas (rotaciones, traslaciones, reflexiones y homotecias), así mismo, los estándares que se relacionan con temas que se encuentran íntimamente relacionados tales como las simetrías, la semejanza, la congruencia y el uso de sistemas de coordenadas.

Tabla 3-1: Estándares de matemáticas relacionados a transformaciones geométricas.

CONJUNTOS DE GRADOS	ESTÁNDAR
Primero a tercero	▪ Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia. ▪ Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. ▪ Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño. ▪ Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).
Cuarto y quinto	▪ Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. ▪ Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. ▪ Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.
Sexto y séptimo	▪ Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. ▪ Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. ▪ Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
Octavo y noveno	▪ Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

3.5 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las transformaciones geométricas en el plano cartesiano

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para el área de matemáticas se trata de un documento de referencia relativamente reciente publicado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), que ha tomado fuerza paulatinamente y se ha venido integrando al currículo de las distintas instituciones educativas. Los DBA están conformados por "un conjunto de aprendizajes estructurantes[50] que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once" (Ministerio de Educación Nacional, 2016). A partir del año 2016 se encuentra a disposición la segunda versión de los DBA, en donde se menciona el tema de las transformaciones geométricas (rotaciones, traslaciones, reflexiones y homotecias), y del plano cartesiano. A continuación, se muestra la Tabla 3-2, en donde se destacan los DBA de matemáticas relacionados con el tema de transformaciones geométricas y sistemas de referencia o plano cartesiano.

Tabla 3-2: DBA de matemáticas relacionados a transformaciones geométricas.

GRADO	APRENDIZAJE ESTRUCTURANTE	EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE
Tercero	Formula y resuelve problemas que se relacionan con la posición, la dirección y el movimiento de objetos en el entorno.	▪ Identifica y describe patrones de movimiento de figuras bidimensionales que se asocian con transformaciones como: reflexiones, traslaciones y rotaciones de figuras. ▪ Identifica las propiedades de los objetos que se conservan y las que varían cuando se realizan este tipo de transformaciones. ▪ Plantea y resuelve situaciones en las que se requiere analizar las transformaciones de diferentes figuras en el plano.

[50] Entendido como un conjunto coherente de conocimientos y habilidades con potencial para organizar los procesos necesarios en el logro de nuevos aprendizajes y, que, por ende, permiten profundas transformaciones en el desarrollo de las personas. (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

Tabla 3-2: Continuación

GRADO	APRENDIZAJE ESTRUCTURANTE	EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE
Cuarto	Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que pueden sufrir las formas (ampliación- reducción).	▪ Aplica movimientos a figuras en el plano. ▪ Diferencia los efectos de la ampliación y la reducción. ▪ Elabora argumentos referentes a las modificaciones que sufre una imagen al ampliarla o reducirla. ▪ Representa elementos del entorno que sufren modificaciones en su forma.
Quinto	Resuelve y propone situaciones en las que es necesario describir y localizar la posición y la trayectoria de un objeto con referencia al plano cartesiano.	▪ Localiza puntos en un mapa a partir de coordenadas cartesianas. ▪ Interpreta los elementos de un sistema de referencia (ejes, cuadrantes, coordenadas). ▪ Grafica en el plano cartesiano la posición de un objeto usando direcciones cardinales (norte, sur, oriente y occidente). ▪ Emplea el plano cartesiano al plantear y resolver situaciones de localización. ▪ Representa en forma gráfica y simbólica la localización y trayectoria de un objeto.
Sexto	Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico.	▪ Localiza, describe y representa la posición y la trayectoria de un objeto en un plano cartesiano. ▪ Identifica e interpreta la semejanza de dos figuras al realizar rotaciones, ampliaciones y reducciones de formas bidimensionales en el plano cartesiano.
Séptimo	Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.	▪ Establece relaciones entre la posición y las vistas de un objeto. ▪ Reconoce e interpreta la representación de un objeto. ▪ Representa objetos tridimensionales cuando se transforman.

3.6 Lineamientos curriculares y las transformaciones geométricas en el plano cartesiano

A continuación, la forma en que se debe abordar el tema de las transformaciones y algunas recomendaciones que se encuentran en los lineamientos curriculares.[51]

“Comenzar por los desplazamientos que pueden hacerse con el propio cuerpo, o deslizando objetos y figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero. Con esto se llega primero a las rotaciones y a las traslaciones. Se trata de ver qué tipo de movimientos conservan la dirección, cuáles la orientación en el plano o en el espacio, cuáles cambian de órdenes cíclicos de los vértices, sin definir verbalmente ninguna de estas transformaciones.”

Carlos E. Vasco recomienda que “una transformación no puede definirse, ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con los movimientos del cuerpo o de las manos.”

“Las reflexiones no pueden hacerse con figuras de material concreto: o se hacen con el cerebro o no pueden hacerse. La ayuda de espejos, láminas semitransparentes, calcado en papel transparente o de copia, etc., pueden ayudar al cerebro a interiorizar, reversar y coordinar las reflexiones, pero no pueden suplantarlo. Por lo tanto, no se debe comenzar por las reflexiones para obtener las rotaciones y las traslaciones.

De esta manera se propone que se trabaje la geometría por medio de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar sus representaciones en la imaginación y en el plano del dibujo.”

---

[51] Tomado de [24], p. 40.

3.7 Estrategia didáctica

Teniendo en cuenta lo expuesto en la presente sección de aspectos didácticos fue diseñada una estrategia didáctica, que tiene como finalidad principal que los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa de Aguas Blancas aprendan sobre las distintas transformaciones geométricas, en particular las isometrías (traslación, rotación y simetría) y las homotecias.

Este proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano, servirá como medio para abordar una visualización más amplia de los conceptos básicos de la geometría desarrollando el razonamiento y estimulando el análisis de las propiedades de las figuras y sus transformaciones. Es de anotar que las actividades que se plantean en este trabajo buscan aproximar a los estudiantes a conceptos tales como, la congruencia, la semejanza, las teselaciones del plano que intuitivamente llevan al concepto de área por recubrimiento.

Lo interesante del tema de las transformaciones geométricas es que al estudiarlas vemos como se involucran muchos otros conceptos claves de la geometría. Esta particularidad hemos querido aprovecharla para el diseño de las actividades en donde se pretende aproximar al estudiante a otros conceptos usando como medio el estudio de las transformaciones.

Es común que la mayoría de temas desarrollados en geometría tengan un carácter estático, es decir la posición de las figuras es fija, mientras que las transformaciones logran dar un enfoque distinto debido a que se trata de movimientos. Por la esencia misma de las transformaciones geométricas y por tratarse de movimientos en el plano, es fundamental que para su enseñanza sean utilizadas herramientas que permitan a los estudiantes entender y visualizar dichos movimientos que resultan más difíciles de visualizar con lápiz y papel. Es por esto, que, para el diseño de las distintas actividades, se ha tenido en cuenta el uso por parte de los estudiantes del software de geometría dinámica Geogebra que como ya mencionamos es una herramienta potente y pertinente

para la enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano, porque permite visualizar los movimientos y desarrollar un entendimiento intuitivo del proceso de modelación y a su vez desarrollar habilidades de visualización.

Se espera que el uso didáctico del software Geogebra permita que la enseñanza del tema de las transformaciones geométricas en el plano cartesiano proporcione un medio adecuado para que la interacción de los estudiantes produzca efectivamente un aprendizaje y a la vez sea motivante para ellos, ya que “los conceptos matemáticos (representación, situación, clasificación, dimensión, entre otros.) de este tema es posible contextualizarlos con el entorno cotidiano y permiten cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas”.

Finalmente, es de anotar que dado el grado escolar para el cual están dirigidas las actividades, que es el grado sexto, se podrá apreciar que los diferentes niveles de Van Hiele se adaptan de forma conveniente y estarán presentes hasta el nivel 2 en donde además de lo exigido en este nivel se pide a los estudiantes razones no necesariamente formales para justificar procedimientos y resultados.

3.8 Actividades

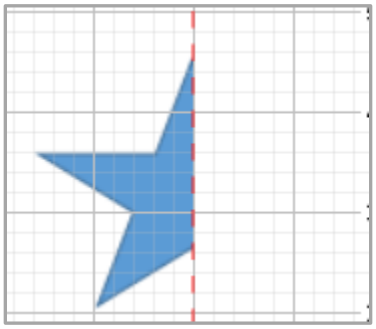
ACTIVIDAD 1

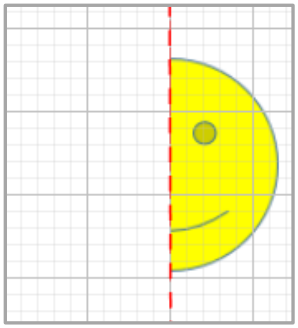
COMPLETANDO FIGURAS

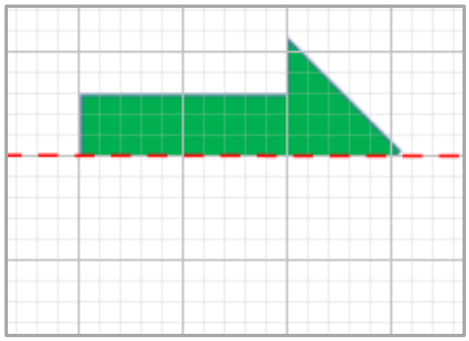
Objetivos

- Identificar figuras simétricas.
- Establecer los ejes de simetría en una figura.

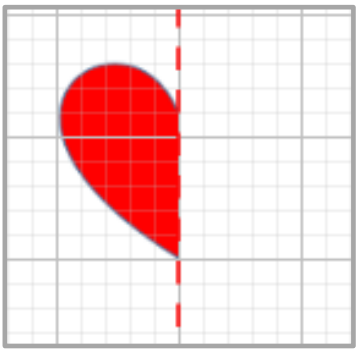
1. Completa cada figura. La línea punteada es el eje de simetría.

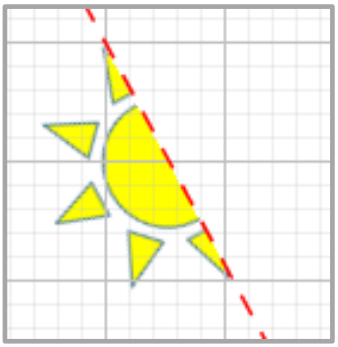


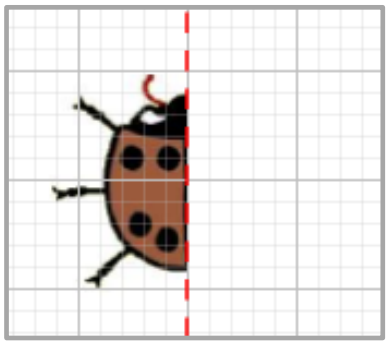




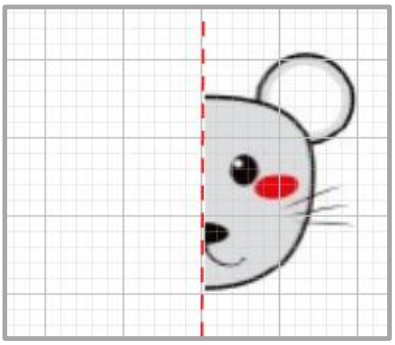
¿Qué figura es? _____ ¿Qué figura es?_____ ¿Qué figura es?_____

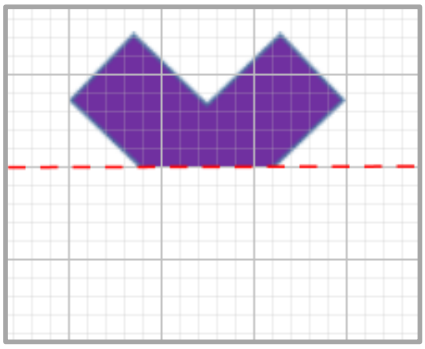






¿Qué figura es?_____ ¿Qué figura es? _____ ¿Qué figura es?_____



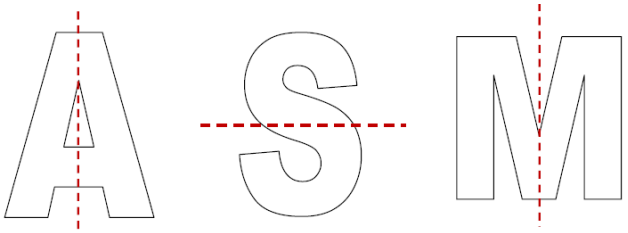


¿Qué figura es? _____ ¿Qué figura es?_____

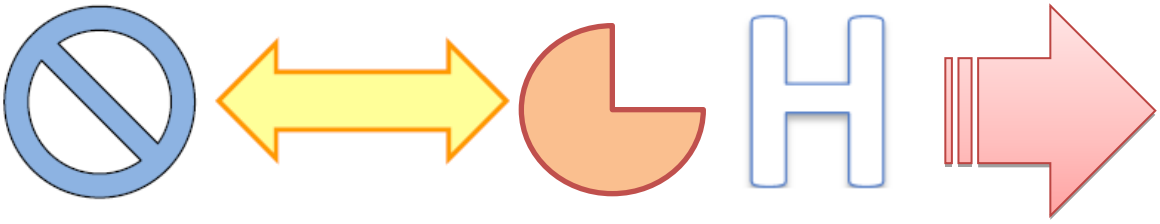
Para tener en cuenta

Una figura es **simétrica** cuando su otra mitad es exactamente igual o al doblarla por la mitad sus partes son congruentes. La línea que divide una figura en dos mitades congruentes se llama **eje de simetría**.

2. El estudiante Diego de grado sexto ha trazado los ejes de simetría de las letras A, S y M, como se muestra en la figura.[52] Sin embargo, su profesora le advierte que una de las letras no es simétrica. ¿Cuál crees es? _____



3. Traza los ejes de simetría correspondientes a las figuras presentadas a continuación.



a. ¿Cuáles figuras son simétricas? _____
b. ¿Pudiste encontrar más de un eje de simetría en alguna de las figuras? _____
c. ¿Cuáles figuras presentan más de un eje de simetría? _____
d. Dibuja una figura que no sea simétrica.

_____

[52] Guía para estudiantes asignatura geometría (Cárdenas, 2013).

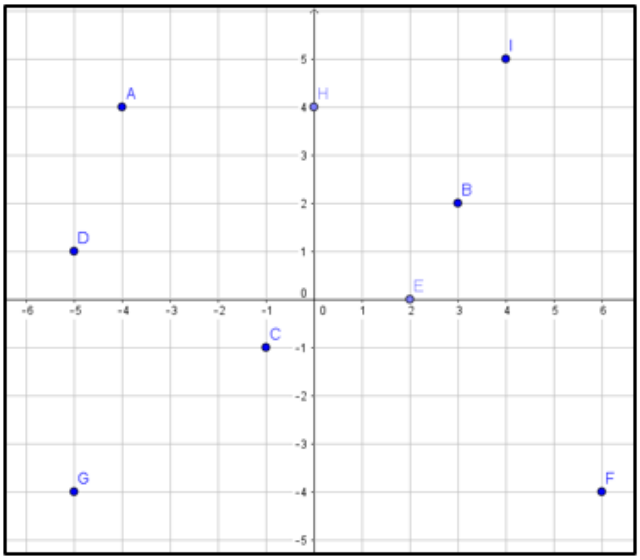
ACTIVIDAD 2

UBICANDO PUNTOS EN EL PLANO DE COORDENADAS CARTESIANAS

Objetivos:

- Determinar las coordenadas cartesianas dado un punto.
- Ubicar puntos en el plano cartesiano según las coordenadas dadas.

1. Escriba las coordenadas de los puntos que aparecen en el siguiente plano cartesiano.



A (__ , __)

B (__ , __)

C (__ , __)

D (__ , __)

E (__ , __)

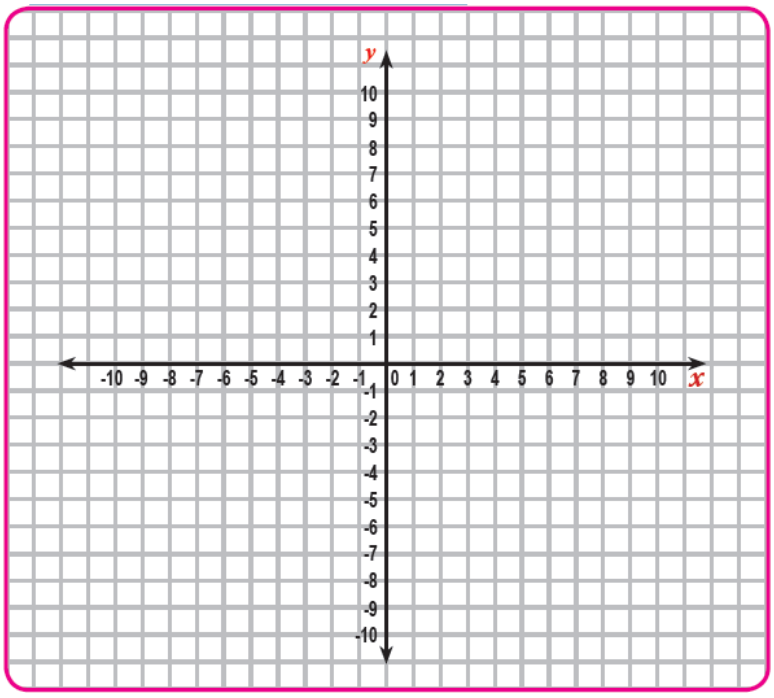
F (__ , __)

G (__ , __)

H (__ , __)

I (__ , __)

2. Ubica en el plano cartesiano los puntos dados.



$A\,(6, 10)$

$B\,(-6, 5)$

$C\,(10, 10)$

$D\,(3, -2)$

$E\,(8, -4)$

$F\,(-1, -1)$

$G\,(6, 0)$

$H\,(0, -2)$

$I\,(-8, -10)$

$J\,(-10, 7)$

ACTIVIDAD 3

UBICANDO FIGURAS EN EL PLANO DE COORDENADAS CARTESIANAS

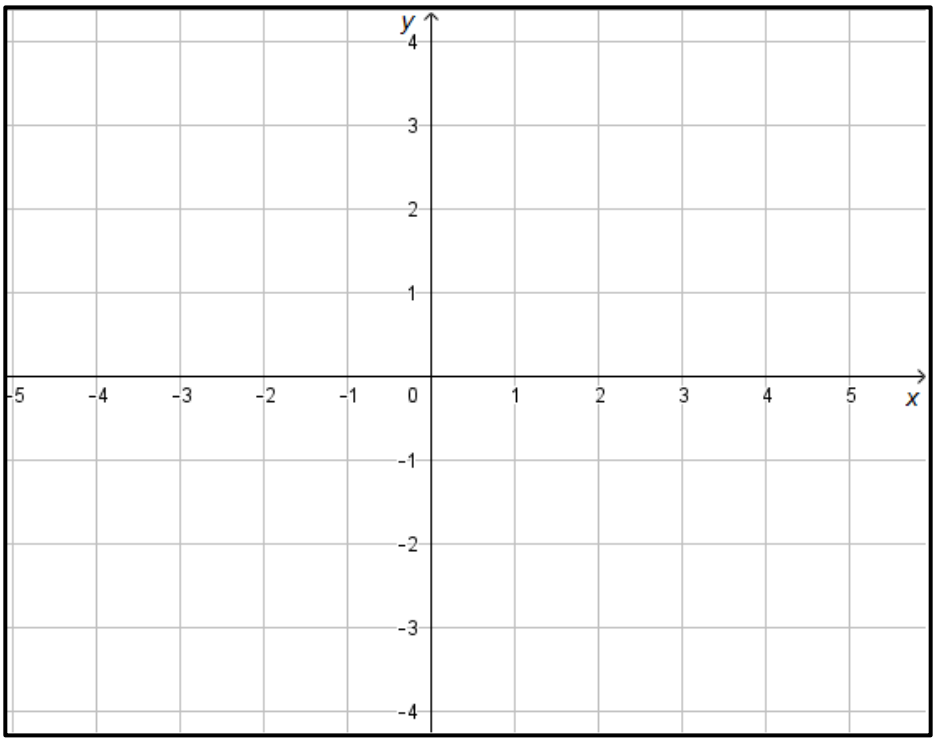
Objetivos:

- Representar en el plano cartesiano diferentes figuras dadas las coordenadas de los vértices.
- Hallar perímetro de las figuras geométricas.
- Hallar área de figuras geométricas.
- Determinar la coordenada de uno de los vértices cuando se trata de cuadrados y rectángulos conociendo tres de ellos.

1. Traza en el plano cartesiano el polígono que se indica en cada caso, según las coordenadas de sus vértices.

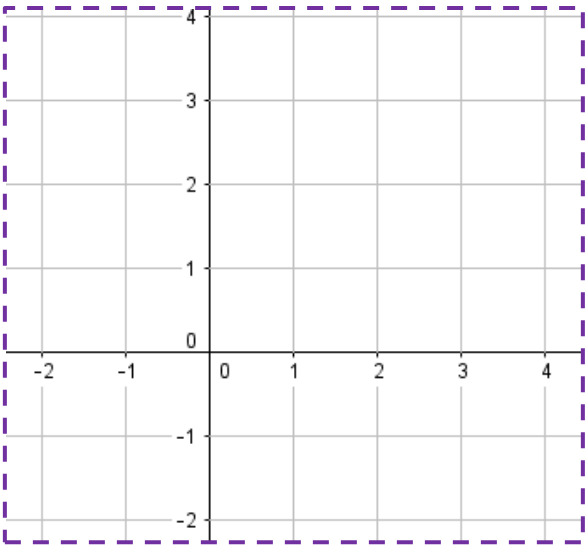
a. Cuadrado *ABCD* con vértices de coordenadas: $A(-2,-1), B(2,-1), C(2,3)\ y\ D(-2,3)$. Une los puntos con color azul.

b. Pentágono *PQRST* con vértices de coordenadas: $P(-3,1), Q(-1,-1), R(1,1), S(1,3)$y $T(-1,3)$. Une los puntos con color rojo.



2. Representa en el plano cartesiano las figuras que se indican a continuación. Luego halla su perímetro y área teniendo en cuenta que cada tiene de lado 1 cm.

a. Triángulo de vértices $A(1,3), B(-1,1)$ y $C(3,1)$.

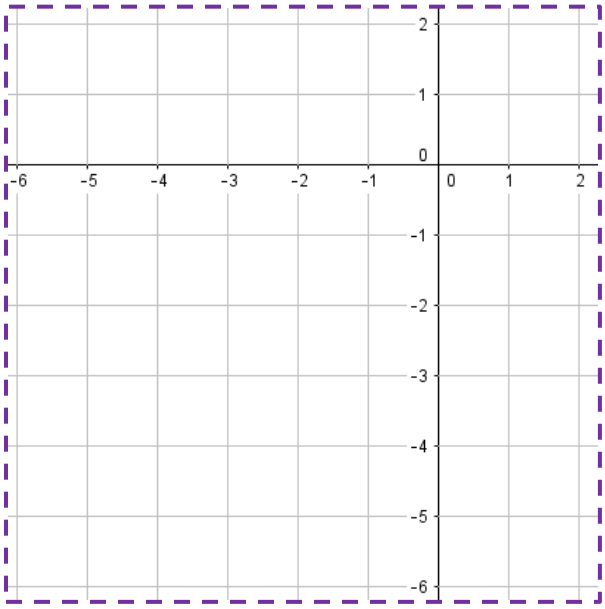


$\overline{AB} = 2{,}83\ cm$

Perímetro: _____

Área: _____

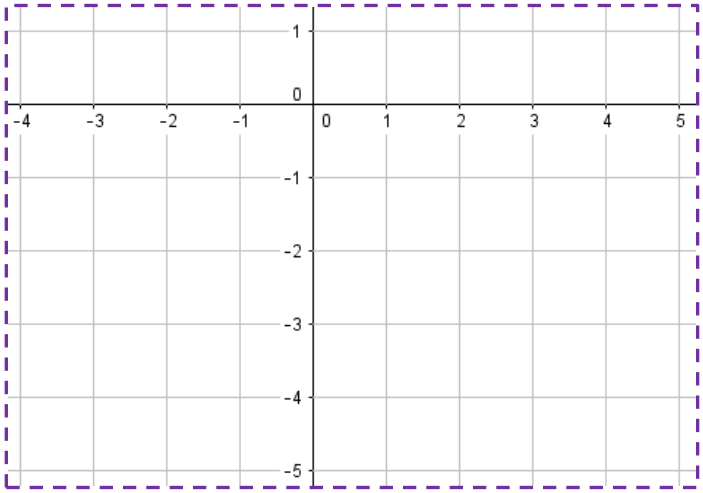
b. Cuadrado de vértices $A(-2,-1), B(-5,-1), C(-5,-4)$. Encuentra el vértice D(__, __).



Perímetro: _____

Área: _____

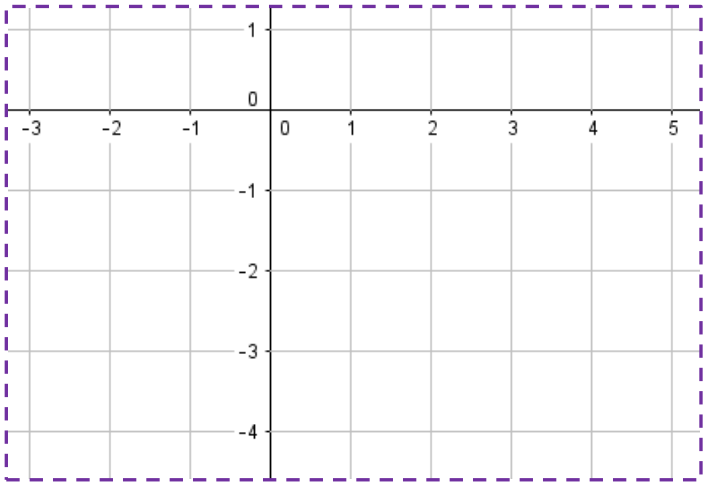
c. Rectángulo de vértices $A(-2,-1), C(4,-4), D(\,4,-1)$. Encuentra el vértice $B(__,__)$.



Perímetro: _____

Área: _____

d. Trapecio de vértices $A(1,-1), B(-1,-3), C(4,-3), D(\,2,-1)$.

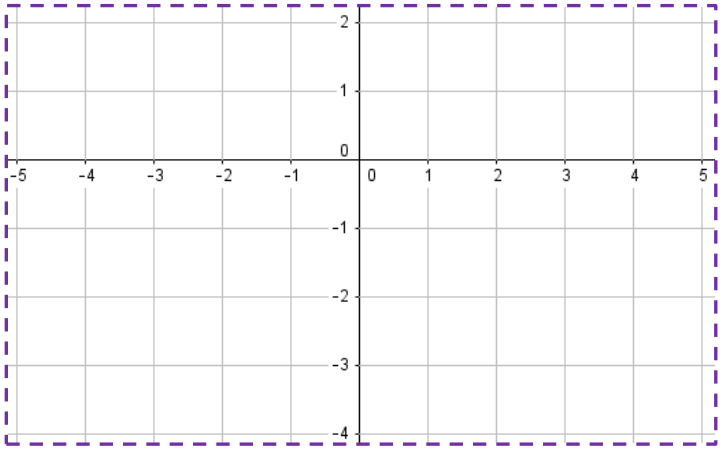


$\overline{AB} = 2{,}83\ cm$

Perímetro: _____

Área: _____

e. Rombo de vértices $A(-4,-1), B(0,1), C(4,-1), D(\,0,-3)$.



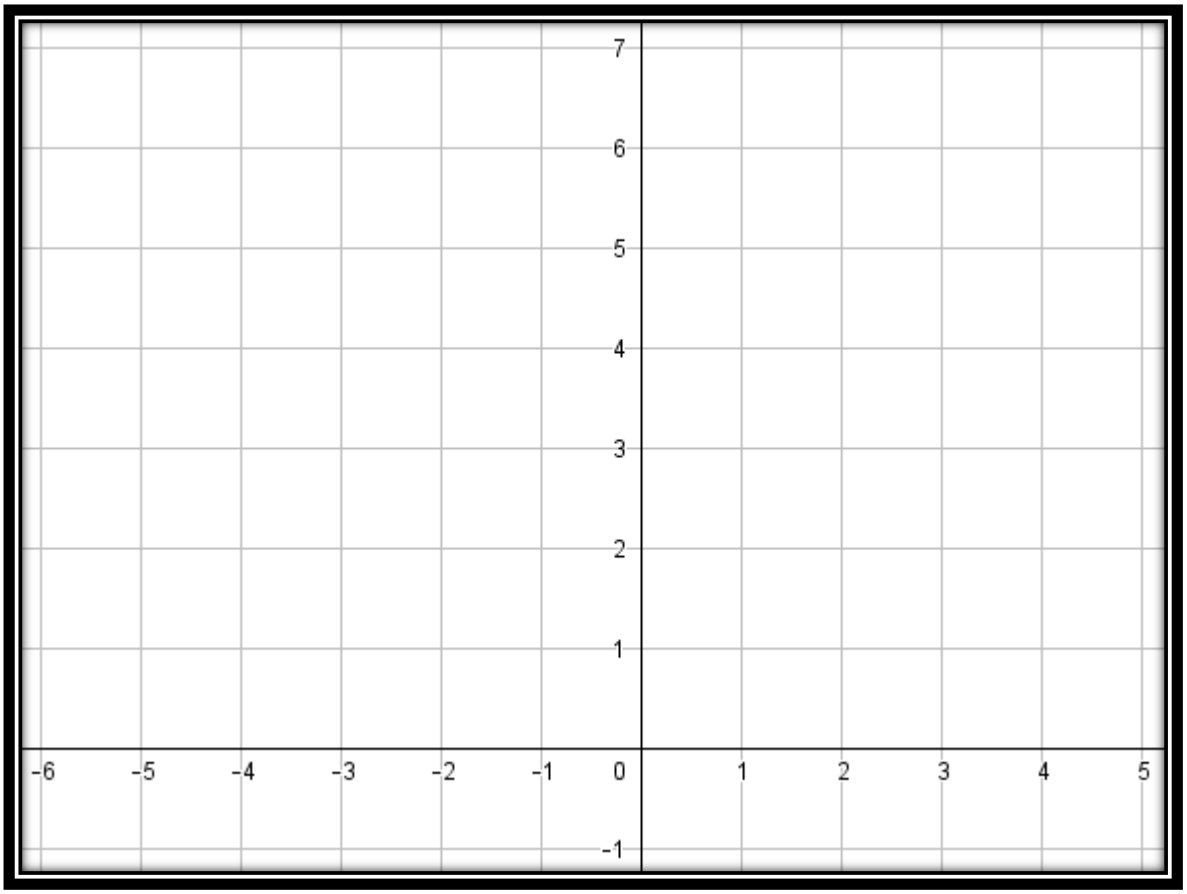
$\overline{AB} = 4{,}47\ cm$

Perímetro: _____

Área: _____

3. Ubica en el plano cartesiano los vértices de coordenadas de las figuras geométricas dadas a continuación, debes ir uniendo los puntos formando las figuras. Por último, colorea y lograrás darle vida a la figura que se hallaba oculta.

- Cuadrado: $A(-2,4)$, $B(-2,6)$, $C(-4,6)$ y $D(-4,4)$. Une los puntos con color azul.
- Cuadrado: $D(-4,4)$, $E(-5,4)$, $F(-5,5)$ y $G(-4,5)$. Une los puntos con color rojo.
- Cuadrilátero: $A(-2,4)$, $H(-4,1)$, $I(2,1)$, $J(1,3)$. Une los puntos con color morado.
- Paralelogramo: $J(1,3)$, $K(3,4)$, $L(4,5)$ y $M(2,4)$. Une los puntos con color naranja.
- Paralelogramo: $H(-4,1)$, $N(-5,0)$, $0(-3,1)$ y $P(-4,0)$. Une los puntos con color verde.
- Paralelogramo: $Q(1,1)$, $R(2,0)$, $S(3,0)$ y $I(2,1)$. Une los puntos con color verde.
- Paralelogramo: $T(-2,5)$, $U(-4,5)$, $V(-4,3)$ y $W(-3,3)$. Une los puntos con color gris.



a. ¿Qué figura se hallaba oculta?

ACTIVIDAD 4

TRASLACIONES EN EL PLANO CARTESIANO

Objetivos:

- Comprender los elementos necesarios para realizar una traslación.
- Indicar las coordenadas cartesianas de los vértices de un polígono.
- Reconocer la figura resultante (imagen) al aplicarle una traslación.
- Reconocer figuras congruentes luego de aplicar una traslación.
- Aplicar traslaciones a polígonos construidos en Geogebra.

Observa las siguientes artesanías presentes comúnmente en nuestra región:

1. ¿Qué elementos geométricos logras ver que tienen en común los objetos mostrados?

_____

Para tener en cuenta:

TRASLACIÓN: La traslación es una transformación que consiste en desplazar una figura siguiendo la dirección de una línea recta, en este desplazamiento la figura conserva su forma y su tamaño.

Para realizar la traslación de una figura debes tener en cuenta tres aspectos:

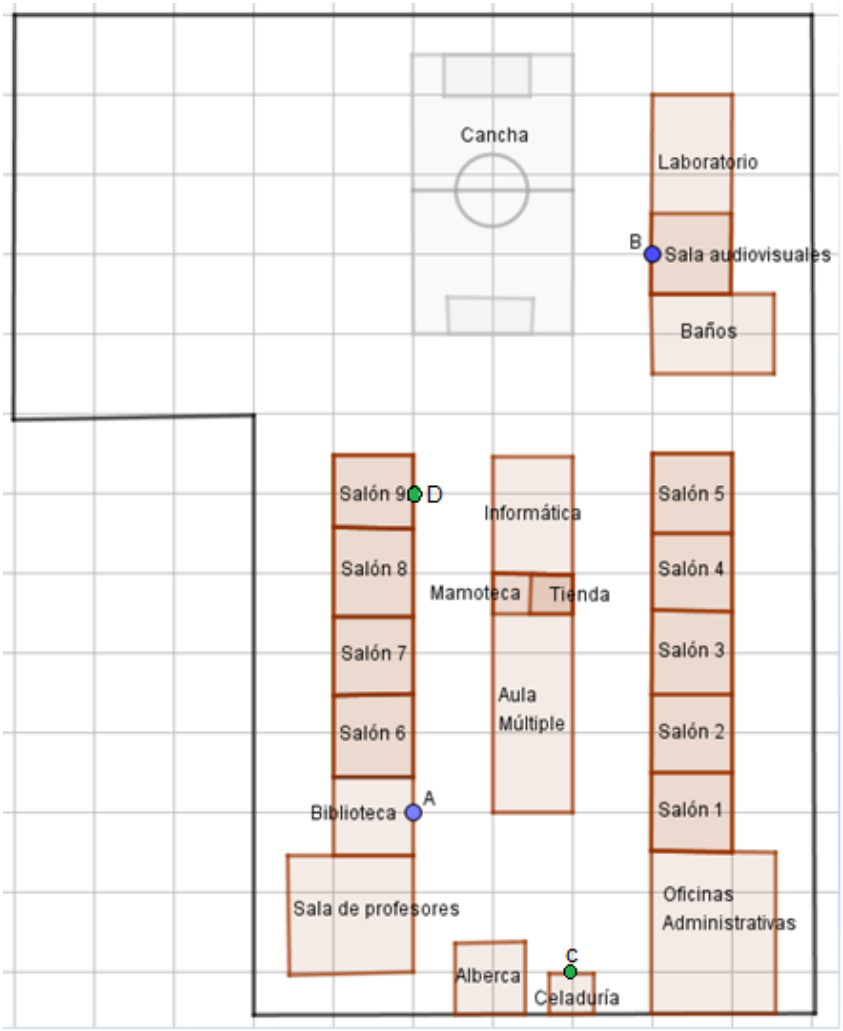
Magnitud: corresponde a la cantidad de unidades que se va a trasladar la figura.

Dirección: Puede ser horizontal o vertical.

Sentido: Puede ser derecha, izquierda, arriba o abajo.

Ejercicio 4.1: HACIA LA NOCIÓN Y RECONOCIMIENTO DE LAS TRASLACIONES

Observa un plano de la Institución Educativa de Aguas Blancas y responde:



2. Para trasladarte de la biblioteca (punto A) a la sala de audiovisuales (punto B) debes:

a. Avanzar 3 cuadros a la izquierda y 6 hacia arriba.
b. Avanzar 2 cuadros a la derecha y 10 hacia arriba.
c. Avanzar 5 cuadros a la derecha y 3 hacia abajo.
d. Avanzar 3 cuadros a la derecha y 7 hacia arriba.

3. Para trasladarte de la celaduría (punto C) al salón 9 (punto D) debes:

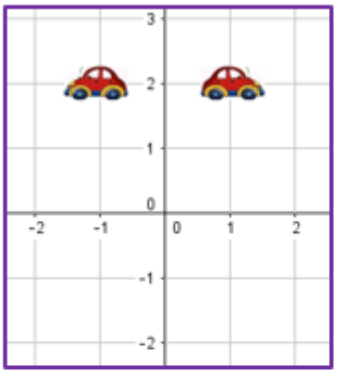
a. Avanzar 2 cuadros a la izquierda, 2 hacia arriba y 4 a la derecha.
b. Avanzar 2 cuadros a la derecha, 1 hacia arriba y 2 a la izquierda.
c. Avanzar 1 cuadro hacia arriba, 2 a la izquierda y 5 hacia arriba.
d. Avanzar 1 cuadro hacia arriba, 1 a la derecha y 7 hacia arriba.

Las preguntas 4 y 5 son preguntas de selección múltiple con única respuesta.

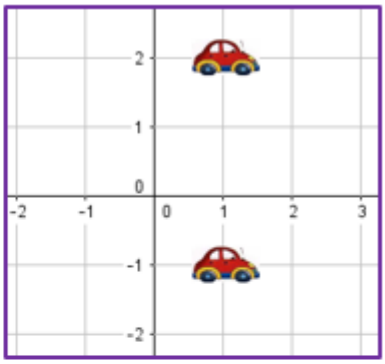
Observa bien la figura y responde.

4. ¿En cuáles de los siguientes casos hubo una traslación?

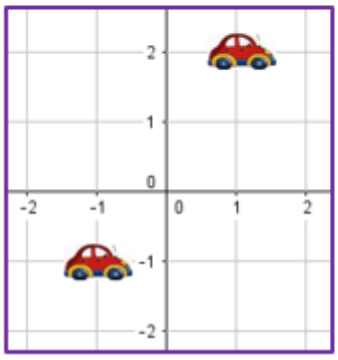
Caso1.



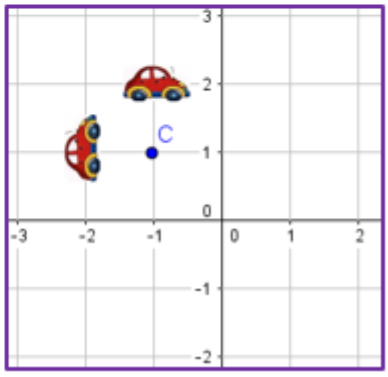
Caso 2.



Caso 3.



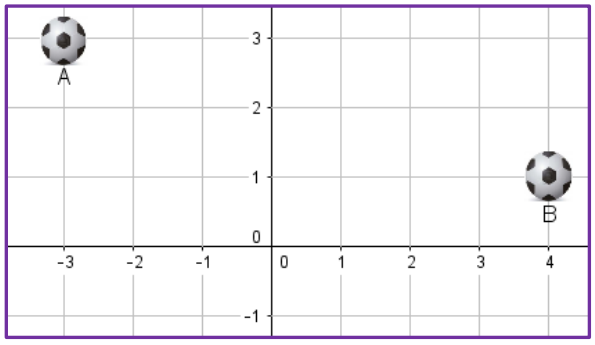
Caso 4.



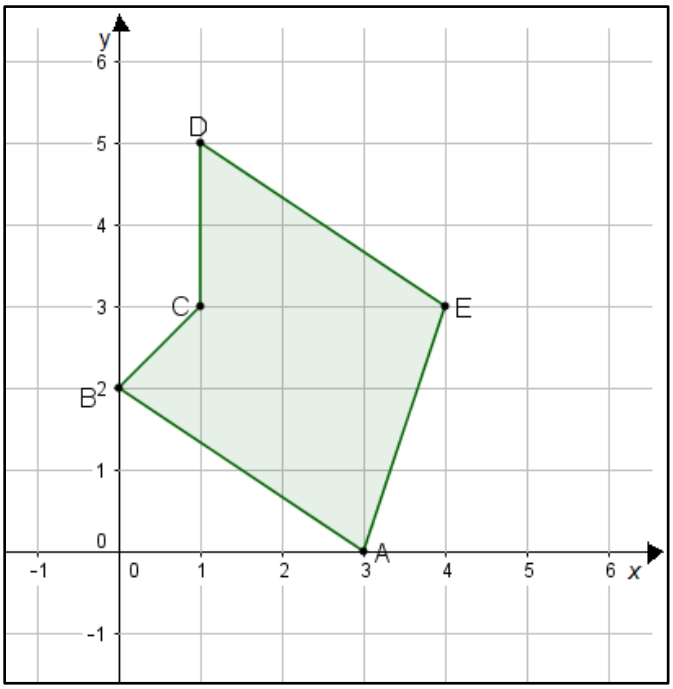
a. Casos 1 y 2.
b. Casos 1, 2 y 3.
c. Casos 2 y 3.
d. Casos 1 y 4.

5. ¿Qué sucedió para que el balón en la posición $A\,(-3,3)$ quedara en la posición $B(4,1)$?

a. Fue trasladado 3 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo.
b. Fue trasladado 7 unidades a la derecha y 3 hacia abajo.
c. Fue trasladado 2 unidades hacia abajo y 7 unidades a la derecha.
d. Fue trasladado 5 unidades hacia la derecha y 3 hacia abajo.



6. Observa la siguiente figura en el plano cartesiano. Luego completa.



a. Escribe las coordenadas de los vértices del polígono $ABCDE$.

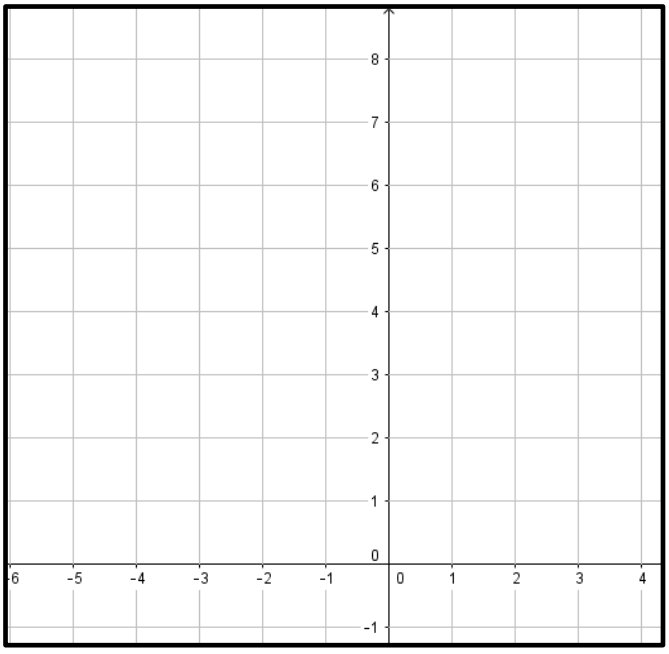
$A\,(_\,,_)$ $B\,(_\,,_)$

$C\,(_\,,_)$ $D\,(_\,,_)$

$E(_\,,_)$

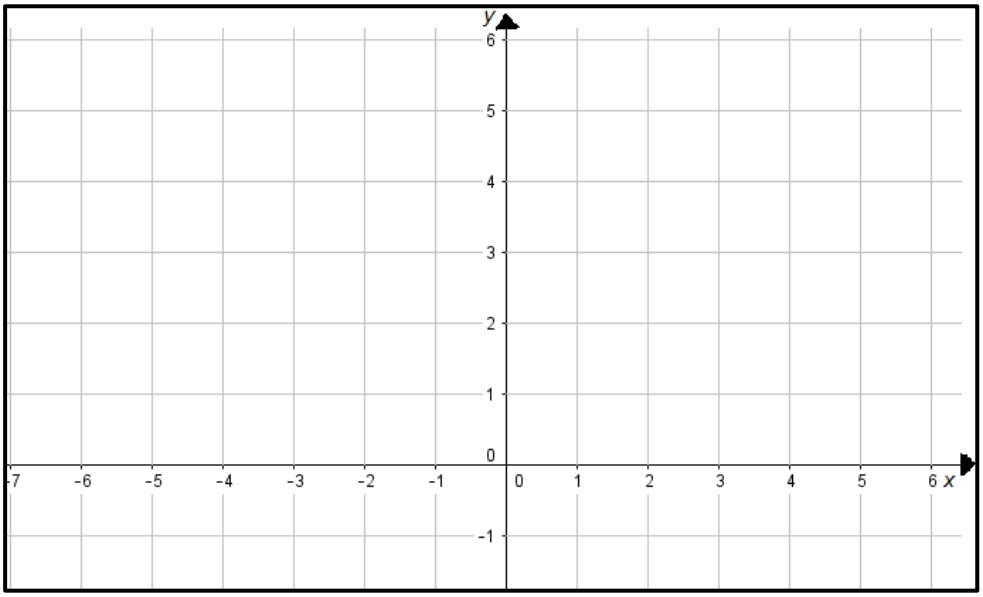
b. Responde: Si se traslada cada punto del polígono, 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo. ¿Cuáles serán las nuevas coordenadas de la figura?

7. Grafica en el plano cartesiano el cuadrilátero $PQRS$ con vértices $P(1,3), Q(-2,5), R(-3,2)\ y\ S(-1,2)$. Luego, traslada 2 unidades en dirección horizontal a la derecha y 3 unidades en dirección vertical hacia arriba.



8. Tenemos el triángulo $P'Q'R'$. Sus vértices tienen las siguientes coordenadas: $P'(-5,2), Q'(-3,3), R'(-5,5)$, y es la imagen del triángulo PQR que ha sido trasladado 7 unidades en dirección horizontal hacia la izquierda.

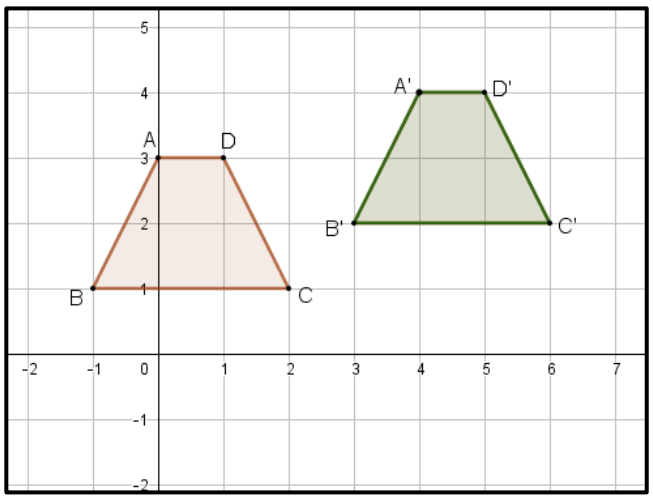
a. Representa la situación en el siguiente plano cartesiano.



b. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo PQR?

$P(__,__)$ $Q(__,__)$ $R(__,__)$

9. Describe con tus palabras la transformación que ha sufrido el polígono $ABCD$ para obtener el polígono $A'B'C'D'$.



10. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas del polígono después de la traslación?

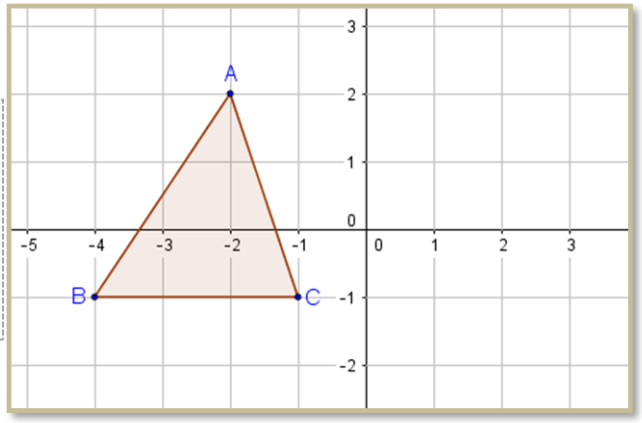
$A'(__,__)$ $B'(__,__)$ $C'(__,__)$ $D'(__,__)$.

Ejercicio 4.2: TRABAJANDO CON GEOGEBRA

1. Realiza la siguiente construcción en Geogebra:

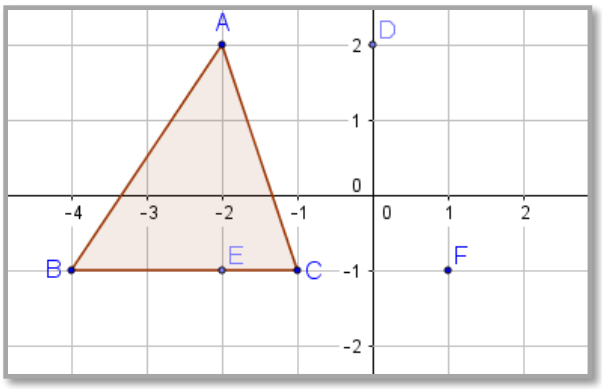
a. Utiliza la herramienta *polígono* y traza el triángulo de vértices:

$A(-2,2), B(-4,-1)$ y $C(-1,-1)$



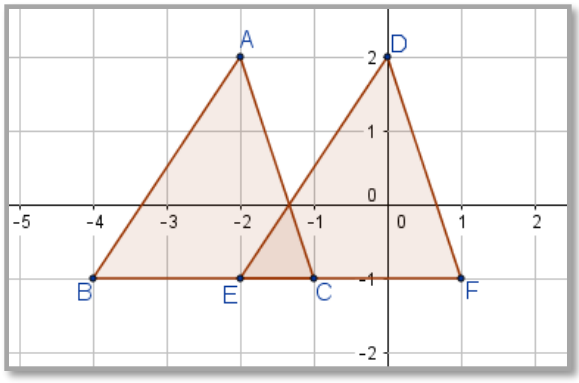
c. Elige la opción *polígono*

Forma un triángulo uniendo los puntos D, E y F.



b. Elige la opción *punto*.

Luego ubícate en el punto A y cuenta dos unidades a la derecha y marca el punto D; Luego en el punto B, cuenta dos unidades a la derecha y marca el punto E; luego en el punto C cuenta dos unidades a la derecha y marca el punto F.



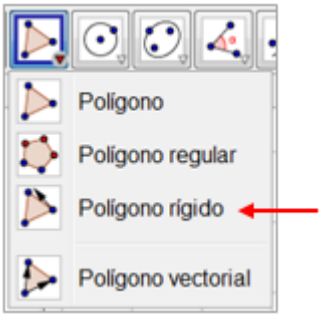
a. ¿Notaste que resultó un nuevo triángulo DEF "*igual*" al triángulo original ABC?_____

b. ¿Cómo puedo llamar a las figuras que tienen *igual* medida en sus lados y que sus ángulos también miden lo mismo? _____

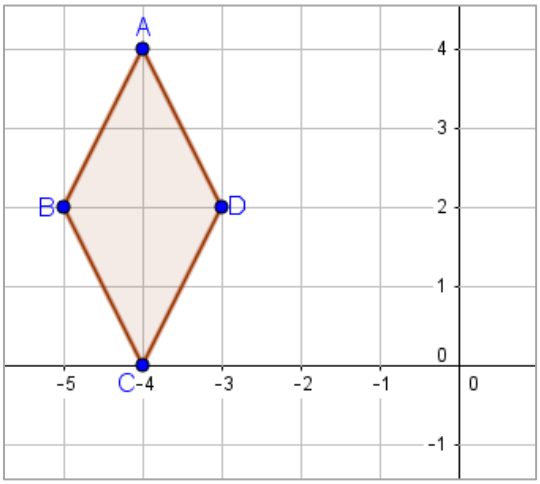
Ejercicio 4.3: TRABAJANDO CON GEOGEBRA TRASLACIONES

Realiza la siguiente construcción en Geogebra

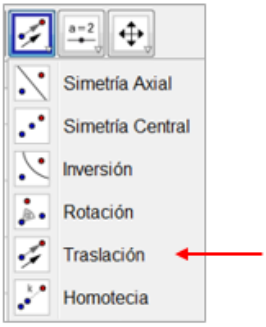
1. Utiliza la herramienta *polígono rígido*



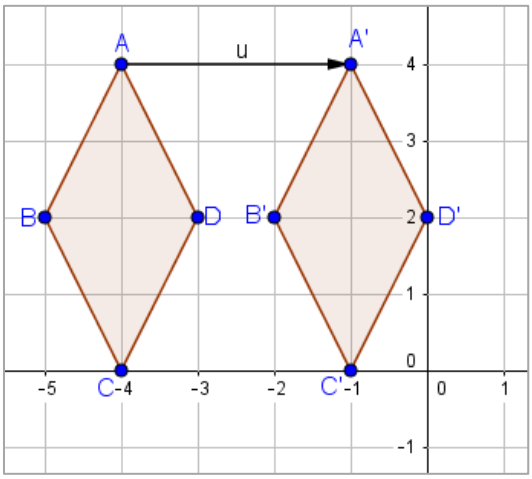
y traza el cuadrilátero de vértices: $A(-4,4), B(-5,2), C(-4,0), D(-3,2)$.



2. Selecciona la herramienta *traslación,*



y luego, haz clic en el cuadrilátero $ABCD$, luego en el vértice A y, por último, en el punto $(-1,4)$.



Responde las siguientes preguntas

a. ¿Cuántas unidades hay de A a A' ___de B a B'? ___ de C a C'? ___ de D a D'?___

b. ¿Qué crees le sucedió al cuadrilátero $ABCD$? _____

c. ¿Notas alguna diferencia en el tamaño y forma del cuadrilátero $ABCD$ con respecto a $A'B'C'D'$? _____

d. ¿Qué nombre reciben las figuras de igual forma e igual tamaño? _____

e. ¿Puedo trasladar una figura dos o más veces sin que se altere su forma y su tamaño? _____

f. ¿Es posible realizar traslaciones en cualquier dirección? _____

ACTIVIDAD 5

ROTACIONES EN EL PLANO

Objetivos:

- Identificar cuándo una figura ha sido rotada.
- Realizar rotaciones de figuras dado: centro de rotación, ángulo de giro y sentido del giro.
- Identificar que las figuras producto de las rotaciones son congruentes con respecto a la figura original.
- Realizar teselados en Geogebra usando la herramienta Rotación.

1. Observa las figuras 1[53], 2[54] y 3[55]

Fig. 1

Fig. 2

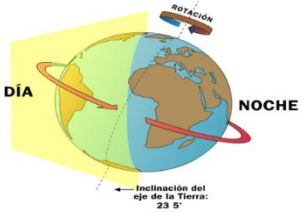


Fig. 3

a. ¿Qué encuentras en común en las figuras? _____

Para tener en cuenta[55]

La **rotación** es una transformación en el plano que consiste en girar una figura alrededor de un punto fijo.

La rotación o giro de una figura se expresa en grados.

Para rotar una figura se debe indicar:

Ángulo de giro: Desde 1° a 360°.

Sentido: Puede ser en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Centro de giro: Punto que permanece fijo y sobre el cual se realiza la rotación. Puede estar en el interior de la figura, en uno de sus vértices o en el exterior de ella.

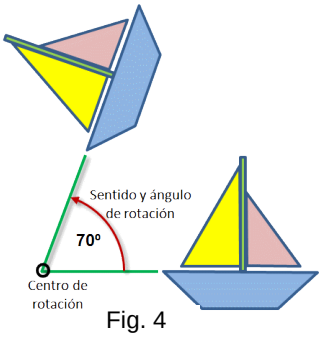


Fig. 4

En la Fig. 4[57] se muestran cada uno de los elementos a indicar en una rotación.

Ver vídeo en el enlace: YouTube
https://www.youtube.com/watch?v=ON1vmae39rQ

[53] Imagen tomada de: https://fancy.com.bd/product/metal-fitget-spinner/
[54] Imagen tomada de: https://cdnblog-199133.c.cdn77.org/blog/wp-content/uploads/A_las_5.png
[55] Imagen tomada de: http://1.bp.blogspot.com/-9gDemH0NdVY/Tws_h3YRZKI/AAAAAAAAAKg/zH3X1wFGtaw/s1600/ROTACI%25C3%2593N.png
[56] Imagen tomada de: https://www.marketingdirecto.com/wp-content/uploads/2011/06/tweetsy.jpg
[57] http://www.bartolomecossio.com/MATEMATICAS/posicion_rotacion_2.gif

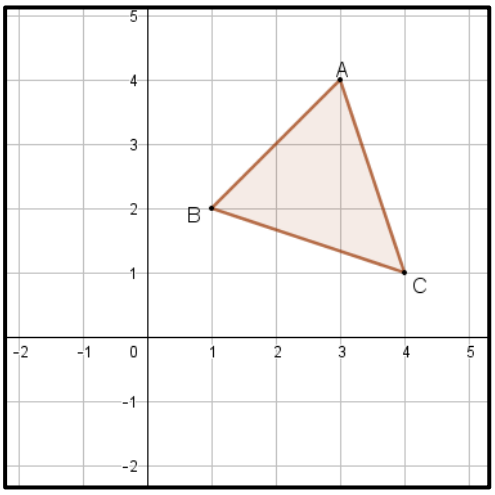
Ejercicio 5.1: APRENDIENDO A HACER ROTACIONES

Manos a la obra[58]

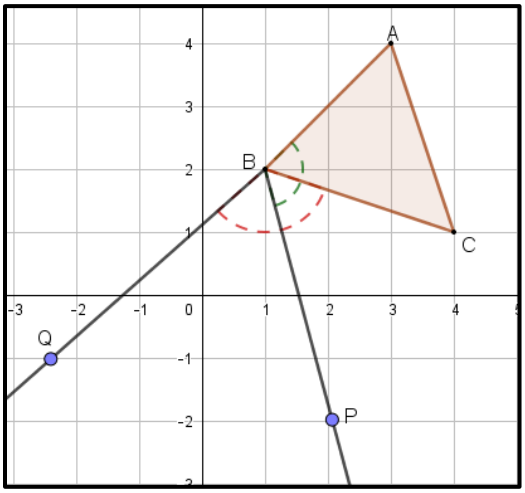
Para la actividad necesitarás: Lápiz, cuaderno (cuadriculado) regla y transportador.

Sigue las instrucciones dadas a continuación para rotar el triángulo ABC alrededor del vértice B, $120°$ en el sentido de las manecillas del reloj.

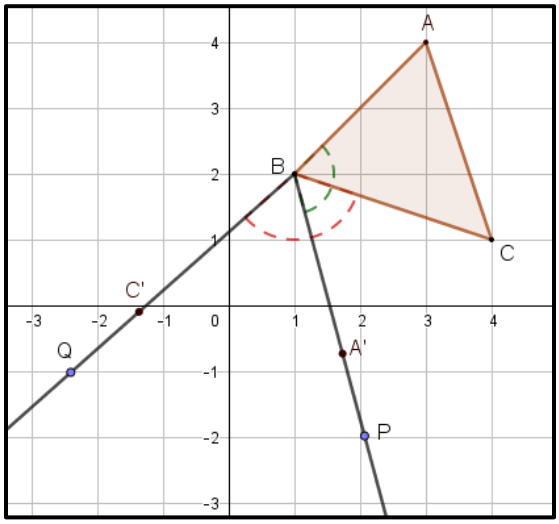
1. Haz el dibujo de un plano cartesiano en tu libreta, y allí ubicarás el triángulo *ABC* de vértices: $A(2,4), B(1,2)$ y $C(4,1)$



2. Con la ayuda del transportador construye los ángulos $\measuredangle ABP$ y $\measuredangle CBQ$ de 120°



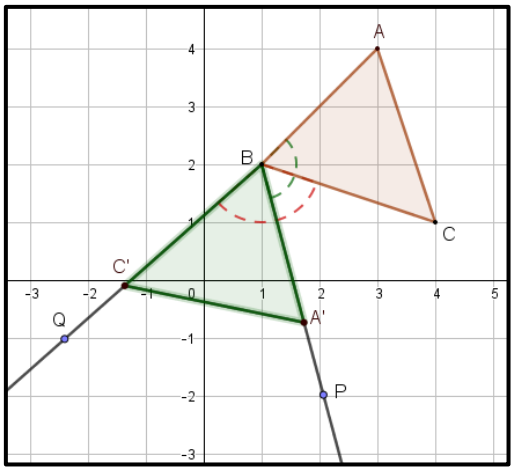
3. Con ayuda de la regla, toma la medida del segmento $\overline{AB}$ y traslada la medida sobre la semirrecta $\overrightarrow{BP}$. Luego, toma la medida del segmento $\overline{BC}$ y traslada la medida sobre la semirrecta $\overrightarrow{BQ}$. De esta manera, se forman los segmentos $\overline{BA'}$ y $\overline{BC'}$ respectivamente.



[58] Imagen tomada de: https://image.slidesharecdn.com/cuerpoesgeomtrico-150617010401-lva1-app6892/95/cuerpoes-geomtrico-2-638.jpg?cb=1434503116.

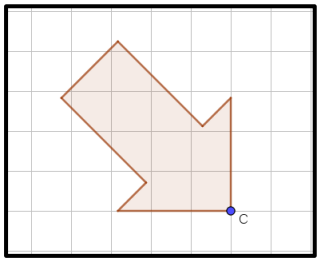
4. Por último, traza el segmento $\overline{A'C'}$ y así se forma el triángulo $A'BC'$,el cual es imagen del triángulo ABC, al ser rotado 120° en el sentido de las manecillas del reloj.

Colorea de distintos colores los triángulos y ¡listo! tendrás la rotación del triángulo ABC.

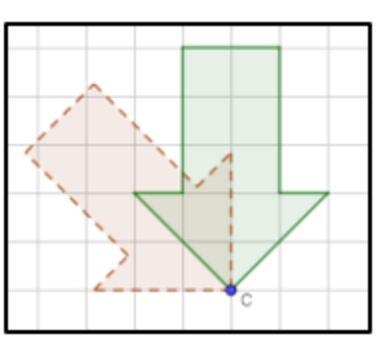


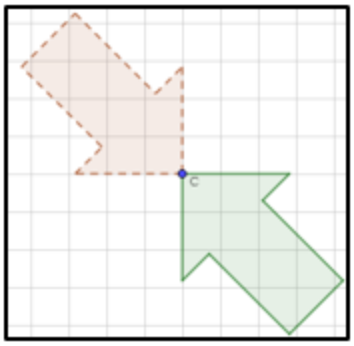
a. Al comparar el triángulo original ABC y su imagen $A'BC'$ ¿Son de distinto tamaño? ¿Tienen la misma forma?
b. ¿Qué nombre reciben las figuras que tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño?

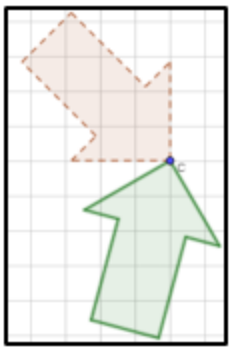
Ejercicio 5.2: Observa la figura y responde.



1. Si a la figura le aplicamos una rotación de 180° en sentido horario, alrededor del punto C. ¿Cuál de las gráficas representa esta rotación de la figura?







2. ¿Cuál sería el resultado si se hace una rotación de 180° esta vez en sentido antihorario?
3. ¿Cambia la forma de la figura al aplicarle una rotación? ¿Cambia el tamaño?
4. ¿Qué nombre reciben las figuras que tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño?

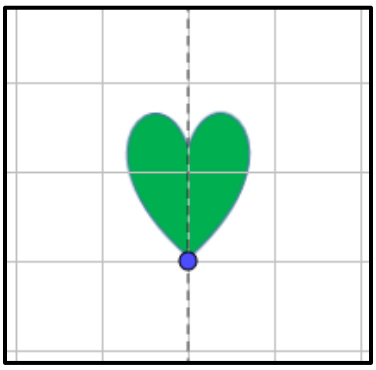
Ejercicio 5.3: APRENDIENDO A HACER ROTACIONES

Manos a la obra

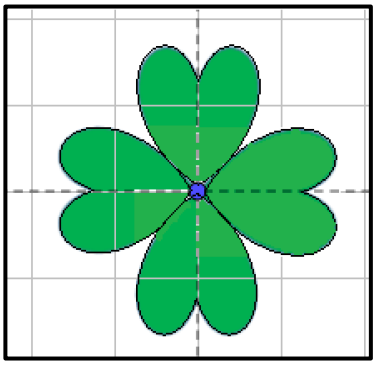
Para la actividad necesitarás: Lápiz, cuaderno (cuadriculado), regla, transportador, compás, papel mantequilla, cartulina y tijeras.

Objetivo: Dibujar flores aplicando rotaciones.

1. Calca en un papel mantequilla la figura y haz un molde en un pedazo de cartulina.



2. Toma el molde de cartulina y ponlo sobre tu cuaderno. Debes procurar que la parte inferior de la figura encaje perfectamente en un punto de encuentro de las cuadrículas y que el centro del corazón quede bien alineado con la línea vertical de las cuadrículas. Ahora, dibuja la figura en tu cuaderno.



3. Con la ayuda del compás o del lápiz bien afilado pincha la figura lo más abajo que puedas, para que ésta quede fija y haz rotaciones de 90°, 180° y 270°, en cualquier sentido horario o antihorario.

Colorea y ¡listo! tendrás una preciosa flor. Aunque si aplicas color verde parece un trébol.

4. Algo curioso… al dibujar una flor, dependiendo del número de pétalos que queremos agregarle a nuestro dibujo varían los ángulos de giro al realizar las rotaciones del pétalo original.

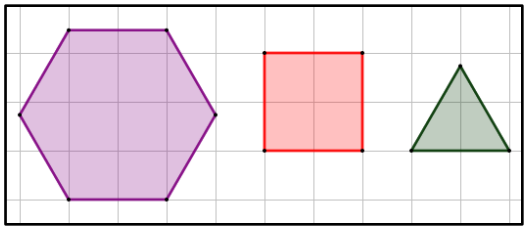
Ahora que sabes esto… completa la tabla en donde se consideran flores de 2, 3, 4, 5 y 6 pétalos, aunque hay flores que tienen muchos más.

Pétalos	N° rotaciones	Ángulo de giro
2		
3		
4	3	Cada 90°
5		
6		

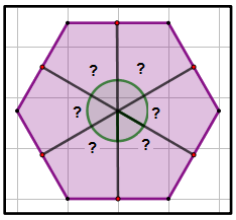
Ejercicio 5.4: - ROTACIÓN Y MOSAICO SEMI-REGULAR

Manos a la obra

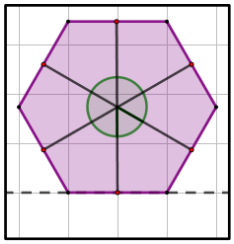
Para la actividad necesitarás: Lápiz, cuaderno (cuadriculado), regla, transportador, compás, papel mantequilla, cartulina, colores y tijeras.



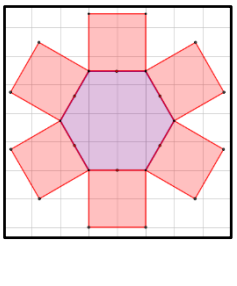
1. Calca en un papel mantequilla las figuras y haz moldes en cartulina.



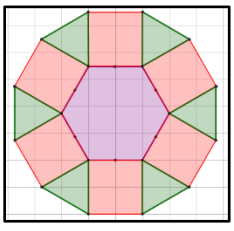
2. Dobla el molde de cartulina del hexágono por los ejes de simetría que se indican en la figura buscando que sean la mediatriz de los lados del hexágono y repíntalos con lápiz, con ayuda de una regla. Mide con un transportador y coloca la medida de cada uno de los ángulos que allí se formaron.



3. Toma el molde de cartulina del hexágono y ponlo sobre tu cuaderno. Debes ubicarlo en el centro de la hoja y que quede bien alineado con la línea horizontal de las cuadrículas de tu cuaderno en la parte inferior. Ahora, dibuja la figura en tu cuaderno.



4. Ahora toma el molde de cartulina del cuadrado, ponlo sobre uno de los lados del hexágono que dibujaste en el cuaderno fijándote en que coincidan sus lados y dibújalo. Así mismo, continua el proceso hasta dibujar cuadrados en cada uno de los lados del hexágono.

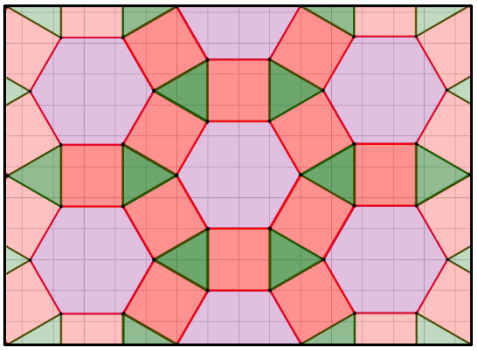


5. Toma ahora el molde del triángulo y ponlo entre los espacios que quedan entre los cuadrados y dibújalos como se indica en la figura.

6. Continua el proceso hasta llenar la hoja, colorea y así tendrás un mosaico semi-regular.

Para tener en cuenta ➡

Un mosaico es una obra pictórica en la que se usan diversos elementos decorativos.
Muchos mosaicos se construyen a partir de polígonos.



7. Responde en tu cuaderno:

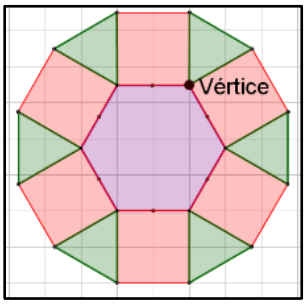
a. ¿Cuánto mide cada ángulo interior del triángulo? ¿del cuadrado? ¿del hexágono? Escríbelos también en los moldes de cartulina.

b. ¿Qué nombre recibe el nuevo polígono que se ha formado?

c. ¿Cuánto mide cada ángulo interior de ese nuevo polígono?

d. ¿De cuántos hexágonos, cuadrados y triángulos se conforma el nuevo polígono?

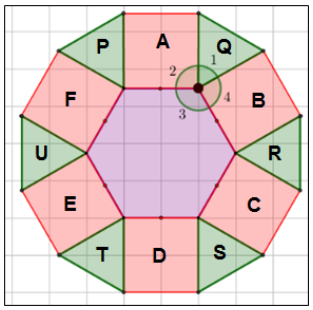
e. En un vértice común como se muestra en la figura. ¿Qué figuras concurren en ese mismo vértice?, ¿Cuántas de cada una?



f. En un vértice común ¿Cuánto suman la medida de los ángulos de las figuras que allí convergen? Es decir, ¿Cuánto suman el $\measuredangle 1,\ \measuredangle 2,\ \measuredangle 3\ y\ \measuredangle 4$ de la figura?

g. ¿Qué transformación geométrica ocurrió para que el cuadrado A se moviera al B?

h. ¿Cuál fue el centro de rotación?



8. Completa la siguiente tabla

Figura Inicial	Figura final	Grados rotación	Sentido
Cuadrado A	Cuadrado B		
Cuadrado A	Cuadrado C		
Cuadrado A	Cuadrado D		
Cuadrado A	Cuadrado E		
Cuadrado A	Cuadrado F		
Triángulo P	Triángulo Q		
Triángulo P	Triángulo R		
Triángulo P	Triángulo S		
Triángulo P	Triángulo T		
Triángulo P	Triángulo U		
Cuadrado E	Cuadrado C		
Triángulo R	Triángulo Q		

Ejercicio 5.5: - ROTACIÓN Y MOSAICOS SEMI-REGULARES

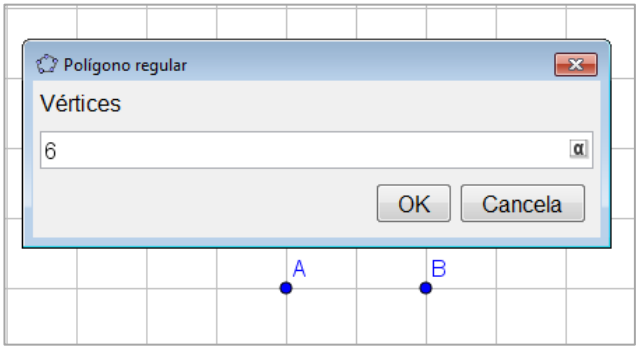
Objetivos:

- Elaborar en Geogebra distintos polígonos regulares.
- Construir mosaicos con Geogebra, a partir de la rotación de polígonos.

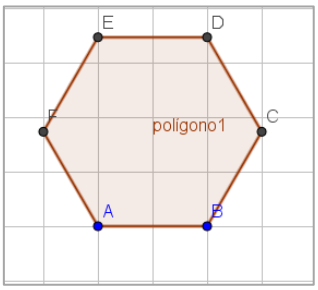
TRABAJANDO CON GEOGEBRA

1. Selecciona la herramienta *polígono regular*

Haz clic en la coordenada (7, 4) y luego en (9, 4) marcando así los puntos *A* y *B* distanciados dos unidades. Luego, emergerá una ventana que pide ingresar el número de vértices y debemos escribir el número 6 y dar clic en OK.

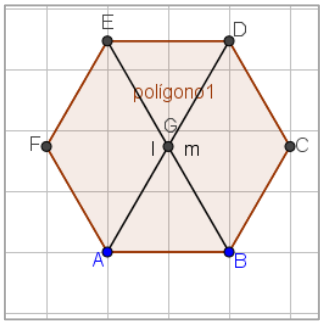


Así tendremos un hexágono regular que tiene 2 unidades de lado, como el que se muestra en la figura.



2. Selecciona la herramienta *Segmento.*

Haz clic en uno de los vértices del hexágono y traza una diagonal haciendo clic en otro vértice no consecutivo que pase por el centro de la figura. Luego toma otro vértice y haz una segunda diagonal que pase por el centro. En la figura se observan las diagonales $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$.



3. Selecciona la herramienta *Intersección.*

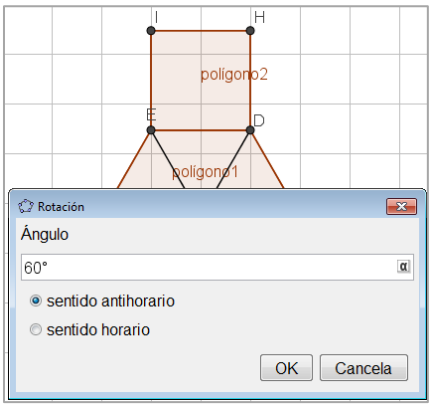
Haz clic sobre una de las diagonales y luego sobre la otra y resultará el punto G que es el centro del hexágono.

4. Selecciona la herramienta *polígono regular.*

Haz clic sobre los puntos E y D del hexágono y escribe 4 en el número de vértices que solicita. Así resulta un cuadrado de 2 unidades de lado. (***Nota:*** *Debes hacer clic primero sobre el punto E y luego sobre el punto D, porque de hacerlo al contrario el cuadrado sale hacia abajo superponiéndose al hexágono y no es la intención si queremos obtener un mosaico*).

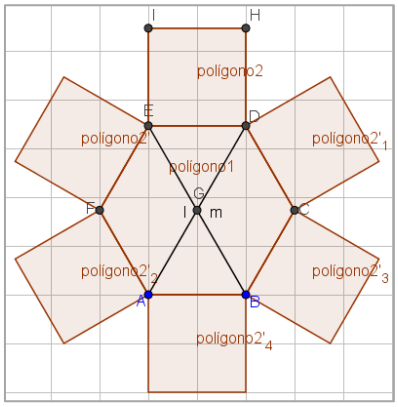
5. Selecciona la herramienta *Rotación.*

Haz clic sobre el cuadrado, luego clic en el centro del hexágono (punto G en el ejemplo), y en la ventana emergente que solicita los grados escribirás 60°, luego, selecciona el sentido antihorario y das clic en OK. (***Nota****: Aquí tambien podrías seleccionar el sentido horario si lo deseas, solo debes fijarte en que la primera rotación del punto 5 debes hacerla en sentido anti horario y no horario como está planteada*).



6. Repite el proceso del paso 5 haciendo rotaciones del cuadrado original.

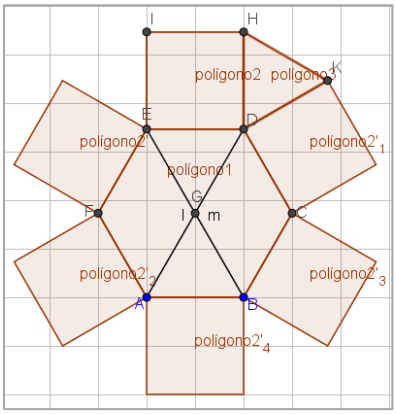
- Rotación de 60° en sentido horario.
- Rotación de 120° en sentido horario.
- Rotación de 120° en sentido anti horario.
- Rotación de 180° (***Nota:*** *Para esta rotación no es importante el sentido, pues sea que escojamos sentido horario o antihorario quedará en la misma posición, así que escoge cualquiera de los dos, después puedes verificar este hecho*).



Al finalizar este proceso debe quedarte como la imagen que se muestra en la figura.

Selecciona la herramienta *polígono regular.*

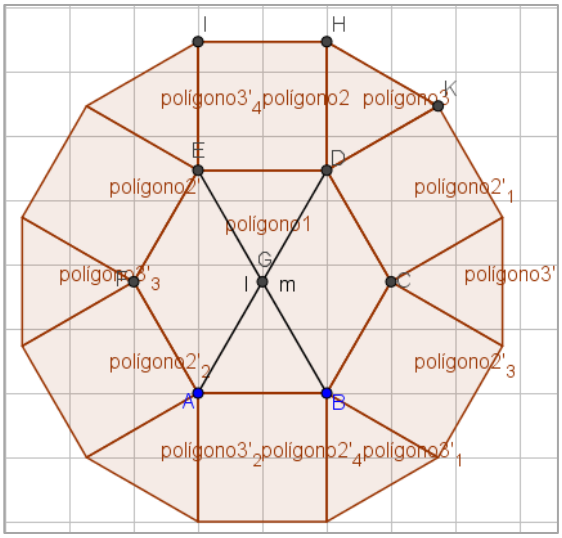
Haz clic sobre los puntos D y H del cuadrado y escribe 3 en el número de vértices que solicita. Así resulta un triángulo equilátero de 2 unidades de lado. (***Nota:*** *Debes hacer clic primero sobre el punto D y luego sobre el punto H, porque de hacerlo al contrario el triángulo resulta superponiéndose al cuadrado y recordemos que para crear un mosaico esto no debe ocurrir*).



7. Selecciona la herramienta *Rotación.*

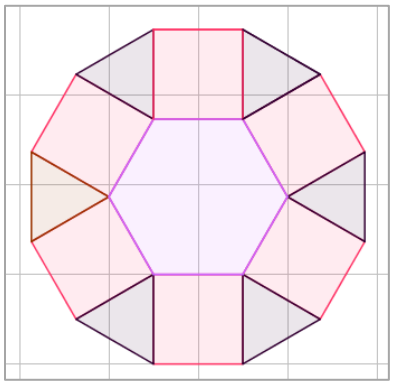
Harás 5 rotaciones del triángulo original con centro de giro en el centro del hexágono o punto G y son:

- Rotación de 60° sentido horario o, de 300° sentido anti horario.
- Rotación de 120° sentido horario o, de 240° sentido anti horario.
- Rotación de 180° sentido horario o, de 180° sentido anti horario.
- Rotación de 240° sentido horario, o de 120° sentido anti horario
- Rotación de 300° sentido horario, o rotación de 60° sentido anti horario

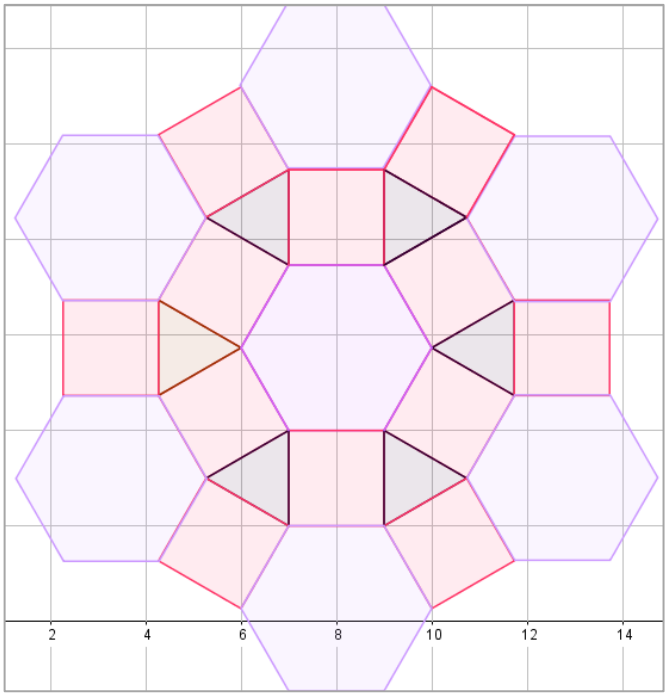


Al finalizar este proceso debe quedarte como la imagen que se muestra en la figura.

Luego de ocultar las etiquetas, algunos objetos y aplicar color tendríamos el siguiente teselado semi-regular:



Si preferimos expandirlo aún más, se siguen haciendo traslaciones del hexágono y rotaciones del cuadrado y del triángulo para obtener un teselado semi-regular como el que se muestra en la figura:



ACTIVIDAD 6

SIMETRÍA CENTRAL

Objetivos:

- Identificar la imagen o el simétrico que resulta al aplicar una simetría central.
- Comprender los elementos necesarios para realizar una simetría central.
- Identificar figuras simétricas.
- Identificar el centro de la simetría.
- Reconocer figuras congruentes luego de aplicarles simetría central.

Manos a la obra

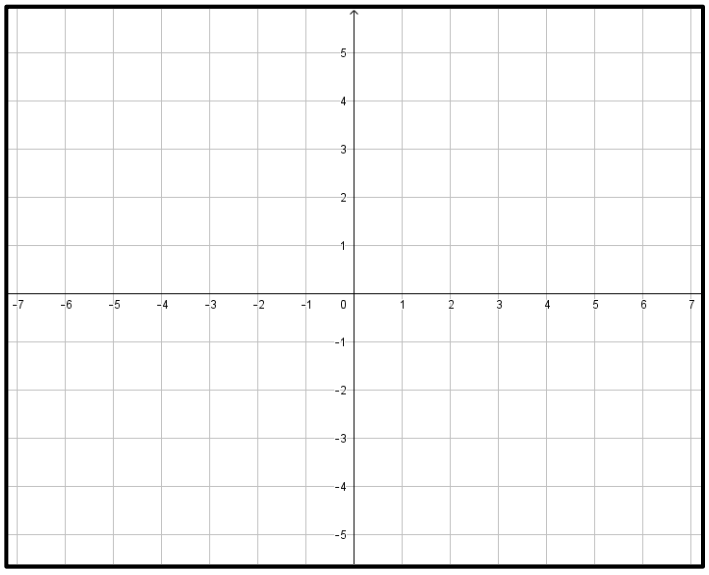
Materiales: Lápiz, compás, y regla.

EJERCICIO 6.1

Hallar el simétrico de un triángulo con respecto al punto $C\ (0,0)$.

1. En el sistema de coordenadas cartesianas ubica los puntos $C(0,0), P(2,2), Q(4,3)$ y $R(2,4)$

2. Traza las siguientes rectas:
   a. Recta $\overleftrightarrow{CP}$
   b. Recta $\overleftrightarrow{CQ}$
   c. Recta $\overleftrightarrow{CR}$



3. Sobre la recta $\overleftrightarrow{CP}$ ubica el punto P', de manera que la distancia del punto C al punto P' sea igual a la distancia del punto C al punto P. (*Sugerencia: Ubica la parte fija del compás en el punto C y toma la medida de punto C al punto P, sin levantar el compás da media vuelta y marca sobre la recta CP el punto P'*).

4. Sobre la recta $\overleftrightarrow{CQ}$ ubica el punto Q', de manera que la distancia del punto C al punto Q' sea igual a la distancia del punto C al punto Q.

5. Sobre la recta $\overleftrightarrow{CR}$ ubica el punto R', de manera que la distancia del punto C al punto R' sea igual que la distancia del punto C al punto R.

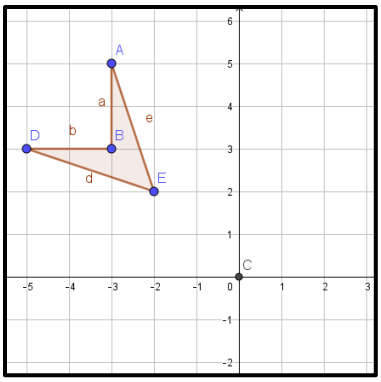
6. Dibuja los triángulos PQR y $P'Q'R'$.

7. Con el compás toma la medida del lado PQ del triángulo PQR y compárala con el lado $P'Q'$ del triángulo $P'Q'R'$. ¿Tienen igual medida?

8. Repite el anterior procedimiento con los otros dos lados. ¿Los lados QR y $Q'R'$ miden lo mismo? ¿Los lados RS y $R'S'$ tiene igual medida?

9. ¿Qué puedes concluir acerca de los triángulos PQR y $P'Q'R'$?

Ejercicio 6.2: TRABAJANDO SIMETRIA CENTRAL CON GEOGEBRA



1. Selecciona la herramienta *punto* . Ubica los puntos con coordenadas:
$A(-3,5), B(-3,3), C(0,0), D(-5,3), E(-2,2)$.

2. Selecciona la herramienta *polígono* . Forma el polígono $ABDE$, haciendo clic en esos puntos.

3. Selecciona la herramienta *simetría central*.
Haz clic sobre el polígono y luego clic en punto C. Así resulta la imagen, el polígono $A'B'D'E'$.

4. Selecciona la herramienta *área* . Haz clic sobre los polígonos $ABDE$ y $A'B'D'E'$
Escribe los resultados: Área Polígono $ABDE$: _____Área Polígono $A'B'D'E'$: _____

5. Selecciona la herramienta . Mide los lados y escribe los resultados:

Polígono $ABDE$		Polígono $A'B'D'E'$	
Lado	Medida	Lado	Medida
$\overline{AB}$		$\overline{A'B'}$	
$\overline{BD}$		$\overline{B'D'}$	
$\overline{DE}$		$\overline{D'E'}$	
$\overline{AE}$		$\overline{A'E'}$	

6. Selecciona la herramienta ángulo.

Para obtener la medida del primer ángulo en la tabla, $\measuredangle BAE$ debes hacer clic en forma ordenada sobre los vértices que indica el ángulo. Primero clic en B, luego en A y después en E. Completa la tabla.

Polígono $ABDE$		Polígono $A'B'D'E'$	
Ángulo	Medida	Ángulo	Medida
$\measuredangle BAE$		$\measuredangle B'A'E'$	
$\measuredangle AED$		$\measuredangle A'E'D'$	
$\measuredangle EDB$		$\measuredangle E'D'B'$	
$\measuredangle DBA$		$\measuredangle D'B'A'$	

7. Luego de revisar, áreas, medida de los lados y medida de sus ángulos. ¿Los polígonos $ABDE$ y $A'B'D'E'$ son congruentes?

8. Selecciona la herramienta *elige y mueve.* Haz clic sostenido sobre cualquiera de los vértices del polígono $ABDE$ y muéve el vértice. Notarás que también se mueve el polígono imagen.

ACTIVIDAD 7

SIMETRIA AXIAL O REFLEXIONES

Objetivos:

- Identificar la imagen que resulta al aplicar una reflexión.
- Comprender los elementos necesarios para realizar una reflexión.
- Identificar figuras simétricas.
- Trazar correctamente ejes de simetría.
- Reconocer figuras congruentes luego de aplicar reflexiones.
- Usar reflexiones para establecer la congruencia entre figuras.

Observa las siguientes imágenes[59]

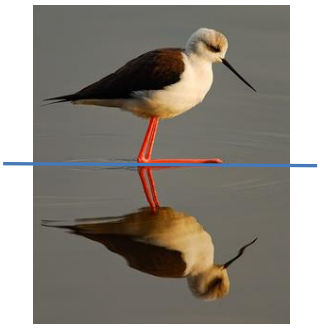


Fig. 1

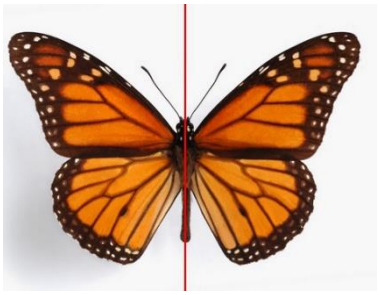


Fig. 2

Fig. 3

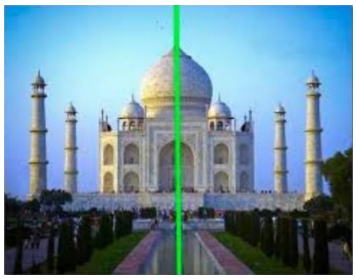


Fig. 4

Fig. 5

¿Qué encuentras en común en las imágenes? ¿Qué significan las líneas que las cruzan?

_____

[59] Fig. 1 tomada de: http://1.bp.blogspot.com/-wmVLS5ERkH8/U8C4WrFBRhI/AAAAAAAAAL4/0o6sE0JnBSg/s1600/Tipos-de-simetri%CC%81a-axial.jpg
Fig. 2 tomada de: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQakJ0nnCQa06iAWV4t9AsSrbQOmUt9IOwJRPOA134JkcVFrpMb
Fig. 3 tomada de: http://3.bp.blogspot.com/-QlrXFelPMa4/VCN9fCpzqVI/AAAAAAAAADw/xaB1I3bk2EM/s1600/11929970AR.jpg
Fig. 4 tomada de: https://http2.mlstatic.com/D_Q_NP_724163-MCO25598941144_052017-Q.jpg
Fig. 5 tomada de: https://http2.mlstatic.com/sombrero-vueltiao-de-19-vueltas-el-mejor-precio-de-colombia-D_NQ_NP_2297-MCO4785871945_082013-F.jpg

Para tener en cuenta:

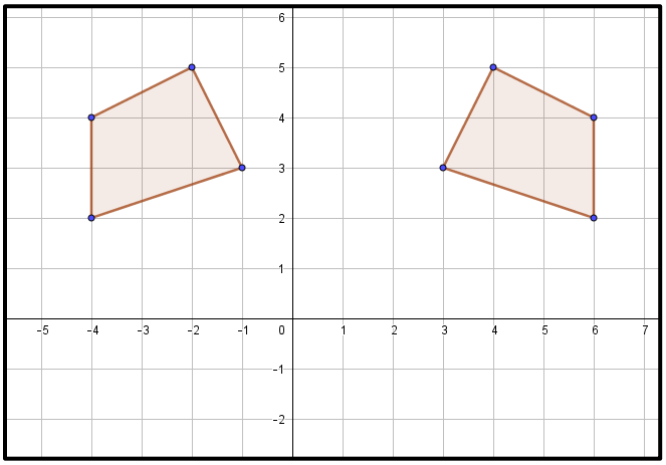
Una reflexión o simetría axial es una transformación en el plano que consiste en "dar media vuelta" a una figura a partir de una recta llamada eje de reflexión o eje de simetría. Al reflejar un polígono, sus vértices y los de su imagen, equidistan del eje de reflexión.

EJERCICIO 7.1

Manos a la obra

Materiales: Lápiz, compás, papel mantequilla, cartulina, tijeras, regla.

Observa la figura, hazla en tu cuaderno y sigue las instrucciones dadas a continuación:



1. Nombra los vértices.
2. Encuentra las coordenadas de cada polígono.
3. Con el papel mantequilla calca uno de los polígonos, luego colócalo sobre una cartulina y recorta para sacar un molde del polígono.
4. Utilizando el molde compara superponiéndolo sobre el otro polígono. ¿son congruentes?
5. Traza el eje de simetría.
6. Verifica que las distancias de los vértices de ambos polígonos al eje de reflexión que trazaste están a igual distancia.

Ejercicio 7.2 - SIMETRIAS

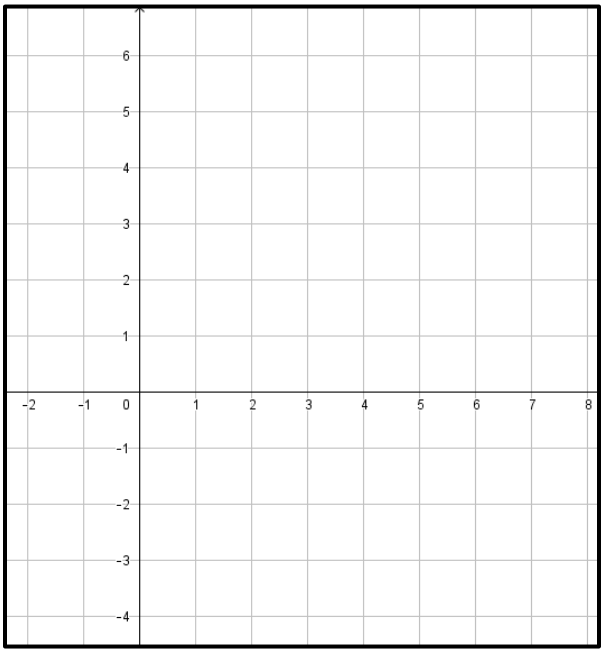
Manos a la obra

Materiales: Lápiz, compás, papel mantequilla, cartulina, tijeras, regla.

1. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos:

$A(2,-2), B(3,-3), C(5,-3), D(6,-2), E(4,-1), F(1,1), G(7,1)$

2. Dibuja el polígono $ABCDE$.



3. Traza una recta que pase por los puntos F y G. La recta $\overleftrightarrow{FG}$ será el eje de simetría.

4. Realiza la reflexión del polígono $ABCDE$. Ubicando cada vértice del polígono imagen de modo que los vértices correspondientes queden a la misma distancia del eje de reflexión. Ejemplo: para ubicar A', toma la distancia entre el punto A y el eje de simetría, luego, ubica el punto A' de tal forma que lo separe esa misma distancia al eje de simetría.

5. Escribe las coordenadas de los vértices del polígono reflejado $A'B'C'D'E'$.

$A'(__,__), B'(__,__), C'(__,__), D'(__,__), E'(__,__)$

6. Con papel mantequilla calca el polígono imagen $A'B'C'D'E'$, coloca sobre cartulina y recorta un molde. Al colocar el molde sobre el polígono inicial, ¿qué puedes concluir?

7. ¿El polígono inicial $ABCDE$ y el polígono imagen $A'B'C'D'E'$ son congruentes?

8. Realiza una reflexión del polígono $A'B'C'D'E'$ tomando un nuevo eje de simetría que bien pueden ser: el *eje x*, el *eje y* o cualquier recta que desees trazar.

Ejercicio 7.3: TRABAJANDO REFLEXIONES CON GEOGEBRA

1. Selecciona la herramienta *polígono* . Haz un polígono $ABCD$ con la forma que prefieras, lo importante es que tenga cuatro vértices, procura que los vértices queden en los puntos donde se encuentran las cuadrículas del plano cartesiano y que el polígono NO quede sobre ninguno de los ejes x y y.

2. Selecciona la herramienta *simetría axial*. Selecciona el polígono $ABCD$ y luego haz clic sobre el eje y. Así, aparecerá la imagen producto de la reflexión el polígono $A'B'C'D'$.

3. Ahora, con la herramienta de simetría axial seleccionada, haz clic sobre el polígono $A'B'C'D'$ y luego sobre el eje x. Así, aparecerá la imagen producto de la reflexión el polígono $A''B''C''D''$.

4. Comprueba, completando las tablas, que el polígono inicial $ABCD$ y el polígono resultado de las dos reflexiones $A''B''C''D''$ son congruentes. Para ello debes utilizar las herramientas *distancia o longitud* y *ángulo*.

polígono $ABCD$		polígono $A'B'C'D'$	
Lado	Medida	Lado	Medida
$\overline{AB}$		$\overline{A''B''}$	
$\overline{BC}$		$\overline{B''C''}$	
$\overline{CD}$		$\overline{C''D''}$	
$\overline{AD}$		$\overline{A''D''}$	

polígono $ABCD$		polígono $A''B''C''D''$	
Ángulo	Medida	Ángulo	Medida
$\measuredangle BAD$		$\measuredangle B''A''D''$	
$\measuredangle ADC$		$\measuredangle A''D''C''$	
$\measuredangle DCB$		$\measuredangle D''C''B''$	
$\measuredangle CBA$		$\measuredangle C''B''A''$	

5. Selecciona la herramienta *área* . Haciendo clic sobre cada polígono halla sus áreas.

Área del polígono $ABCD$: _____

Área del polígono $A'B'C'D'$: _____

Área del polígono $A''B''C''D''$: _____

6. Lee atentamente: *Al realizar dos simetrías axiales con los ejes x y y que son perpendiculares entre sí, resulta una simetría central con centro en el origen de coordenadas $C\ (0\ ,0)$.*

Comprueba lo anterior, seleccionando la herramienta de simetría central , luego selecciona el polígono $ABCD$ y el punto $C\ (0\ ,0)$. ¿Es cierto el enunciado?

ACTIVIDAD 8- HOMOTECIAS

Objetivos

- Reconocer cuando a una figura se le ha aplicado una homotecia.
- Identificar los elementos necesarios para realizar una homotecia.
- Transformar figuras geométricas bajo homotecias utilizando números enteros como razón de homotecia.

Manos a la obra

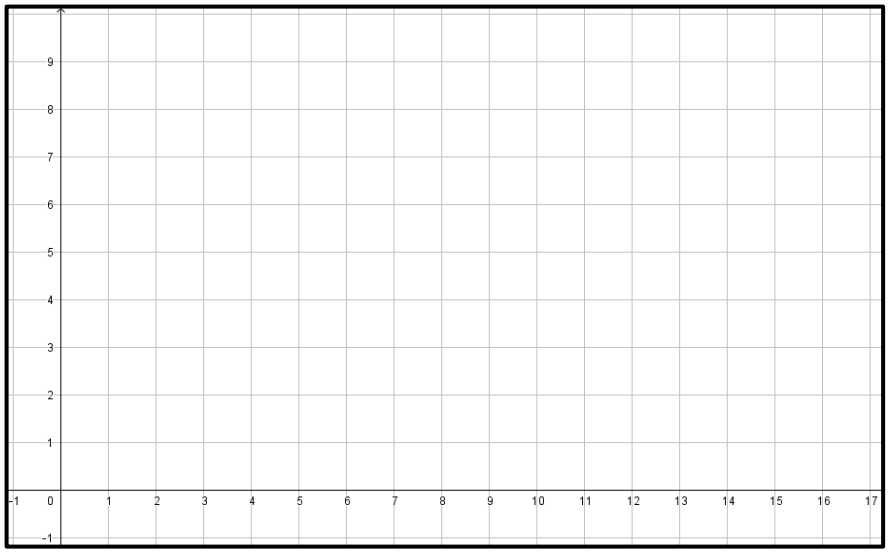
Para la actividad necesitarás: Lápiz, regla.

EJERCICIO 8.1: HOMOTECIA DE UN PUNTO

1. Ubica los puntos $C(0,0)$ y $A(3,2)$ en el plano cartesiano. Ahora sigue los pasos para **aplicar una homotecia al punto *A* con razón de homotecia $k = 3$.**

Paso 1: Ubícate en el punto *C* y nota que para llegar al punto *A* debes trasladarte 3 unidades a la derecha y luego 2 unidades hacia arriba.

Paso 2: Para encontrar el punto A' debes ubicarte nuevamente en el punto *C* y como la razón de homotecia es 3, entonces debes trasladarte 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba 3 veces.



Responde:

a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A'? (__ , __).

b. Traza una semirrecta que inicie en *C* que pase por el punto *A*. ¿El punto A' quedó ubicado sobre la semirrecta que trazaste? _____. Entonces los puntos C, A y A' son colineales.

EJERCICIO 8.2: HOMOTECIA DE UN PUNTO

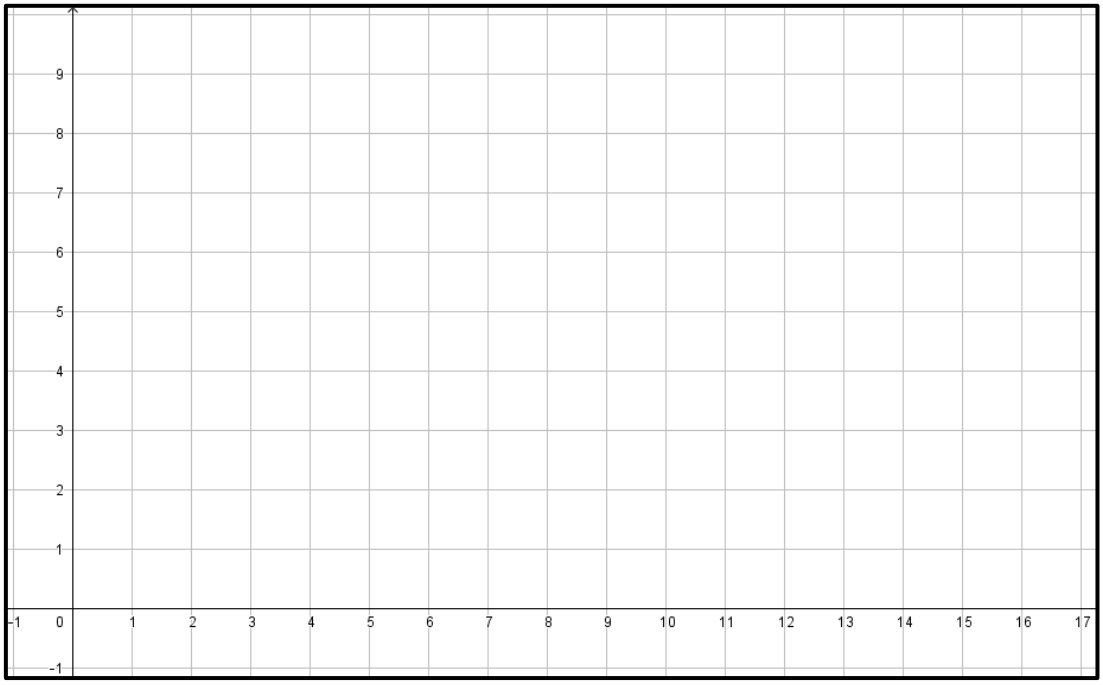
Manos a la obra

Materiales: Lápiz, regla, compás.

1. Ubica los puntos $C(0,0)$ y $A(3,2)$ en el plano cartesiano. Ahora sigue los pasos para **aplicar una homotecia al punto *A* con razón de homotecia $k = 3$.**

Paso 1: Traza la semirrecta $\overrightarrow{CA}$.

Paso 2: Con ayuda del compás toma la medida del segmento $\overline{CA}$ y sobre la semirrecta $\overrightarrow{CA}$ ubica el punto A' de tal forma que la distancia entre C y A' sea tres veces la medida que tomaste con el compás del segmento $\overline{CA}$.



Responde:

a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A'? (__ , __).

b. ¿Coinciden las coordenadas del punto A' que obtuviste con las coordenadas del punto A' del ejercicio 8.1?

c. ¿Los puntos C, A y A' están sobre la misma recta?

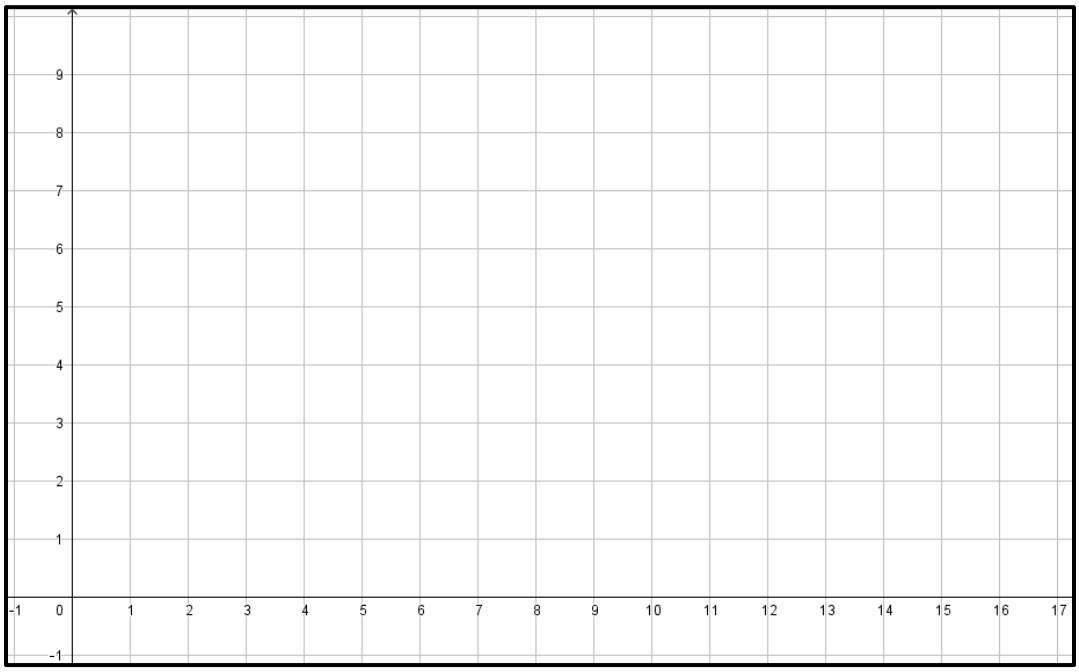
d. ¿Qué nombre reciben los puntos que se encuentran sobre una misma recta?

EJERCICIO 8.3: HOMOTECIA DE UN TRIÁNGULO

Manos a la obra

Materiales: Lápiz, papel mantequilla, tijeras, regla, cartulina.

1. Ubica los puntos $C(0,0)$, $A(3,0)$, $B(2,2)$, $D(0,3)$, $A'(6,0)$, $B'(4,4)$ y $D'(0,6)$ en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas.



a. Dibuja el triángulo ABD y el triángulo $A'B'D'$.

b. Con papel transparente calca el triángulo ABD, luego ponlo sobre una cartulina y recorta para obtener un molde del triángulo y escríbele los vértices al molde. Verifica que el molde y los vértices coincidan con el dibujo del triángulo ABD.

c. Ubica el molde en el vértice A' del triángulo $A'B'D'$, de tal forma coincida con el vértice A del molde y compara el $\measuredangle A$ y $\measuredangle A'$, ¿qué observas?. Ahora compara $\measuredangle B$ y $\measuredangle B'$, ¿qué observas?. Ahora compara $\measuredangle D$ y $\measuredangle D'$ ¿qué observas?. ¿Qué conclusión tienes con respecto a los ángulos de los triángulos ABD y $A'B'D'$?

d. Ubica el molde en el vértice A' del triángulo $A'B'D'$, de tal forma coincida con el vértice A del molde. El lado AD del molde debes hacerlo coincidir con el lado $A'D'$ del triángulo $A'B'D'$. Cuenta y responde:

e. ¿Cuántas veces cabe el lado AD del molde en el lado $A'D'$?

Siguiendo la metodología aplicada en el inciso *d*, responde:

f. ¿Cuántas veces cabe el lado AB del molde en el lado $A'B'$?

g. ¿Cuántas veces cabe el lado BD del molde en el lado $B'D'$?

h. Es el triángulo $A'B'D'$ una ampliación del triángulo ABD? De otro modo, ¿es el triángulo $A'B'D'$ semejante al triángulo ABD?

i. Observa que los puntos C, A y A' están sobre la misma recta. lo mismo sucede con los puntos C, B y B' y de igual manera con los puntos C, D y D'. ¿Qué nombre reciben los puntos que se encuentran sobre la misma recta?

Bien, ya que hemos hecho algunos ejercicios que nos dan una idea intuitiva de qué es una homotecia, veamos de una manera más formal su concepto y los elementos necesarios para realizar homotecias.

Ejercicio 8.4: ¿QUÉ ES UNA HOMOTECIA?

Observa las tres siguientes imágenes[60]. ¿Qué ves en común en ellas?

Fig. 1

Fig 2

Fig. 3

[60]Fig. 1 tomada de: https://st2.depositphotos.com/4187959/9441/v/950/depositphotos_94411352-stock-illustration-people-watching-movie-in-cinema.jpg
Fig. 2 tomada de: http://photos1.blogger.com/blogger/4171/1580/400/piramides.0.jpg
Fig. 3 tomada de: https://i.ytimg.com/vi/LJCSRXifwlA/maxresdefault.jpg

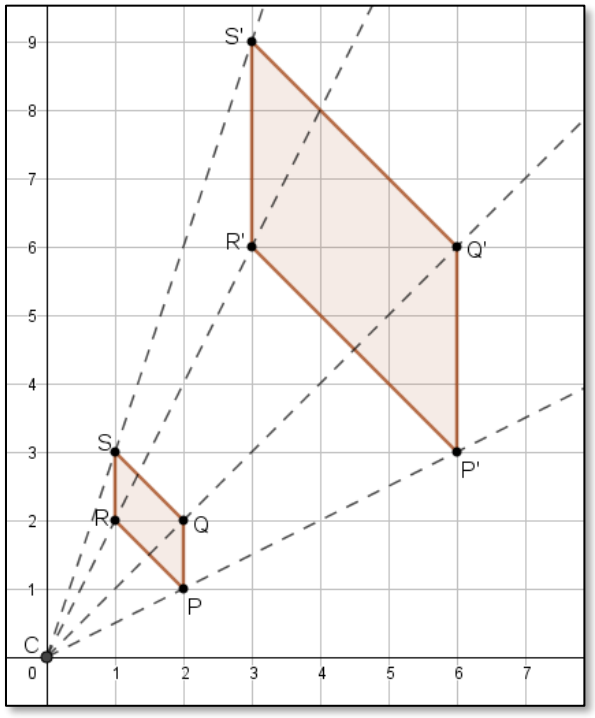
Para saber más aplicaciones de la homotecia:

Ver vídeo en el enlace: YouTube
https://www.youtube.com/watch?v=NQoeOFdy

Para tener en cuenta:

Una homotecia es una transformación en el plano que conserva la forma de la figura pero cambia la longitud de sus lados. Una homotecia se relaciona con idea de ampliar o reducir una figura.

Para realizar una homotecia se deben tener en cuenta los siguientes elementos:



Centro de homotecia: Es el punto a partir del cual se trazan líneas imaginarias que pasan por los vértices de la figura que se van a transformar. En la imagen es el punto C.

Razón de homotecia: Es el cociente de las medidas de los lados correspondientes entre la figura y su imagen. En el ejemplo tenemos que:

$$k = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{Q'S'}{QS} = \frac{S'R'}{SR} = \frac{R'P'}{RP}$$

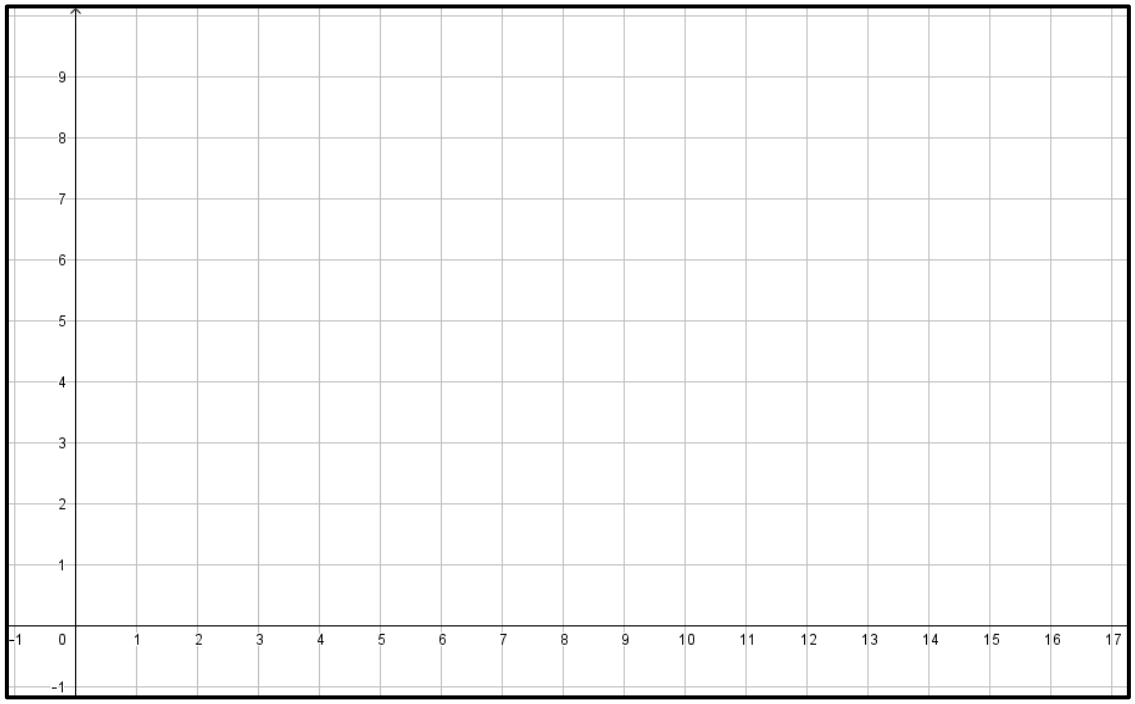
Ejercicio 8.5: HOMOTECIA DE UN RECTÁNGULO

Manos a la obra

Materiales: Lápiz, regla.

Realizar una transformación del rectángulo $PQRS$ bajo una homotecia con razón de homotecia $k = 3$ y centro de homotecia el punto $C(0,0)$. Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. En el siguiente sistema de coordenadas cartesianas ubica los puntos: $C(0,0), P(1,1), Q(2,1), R(2,3)$ y $S(1,3)$.



a. Traza las semirrectas $\overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CR}$ y $\overrightarrow{CS}$.

b. Con el compás toma la medida de la distancia del punto C al punto Q.

c. Sobre la semirrecta que pasa por los puntos C y Q ubica un punto Q' que esté al triple de la distancia que separa los puntos C y Q. Esto lo logras ubicándote en el punto C y trasladando la medida del compás tres veces sobre la semirrecta $\overrightarrow{CQ}$.

d. Con el compás toma la medida de la distancia del punto C al punto P.

e. Sobre la semirrecta que pasa por los puntos C y P ubica un punto P' que esté al triple de la distancia que separa los puntos C y P.

f. Con el compás toma la medida de la distancia del punto C al punto R.

g. Sobre la semirrecta que pasa por los puntos C y R ubica un punto R' que esté al triple de la distancia que separa los puntos C y R.

h. Con el compás toma la medida de la distancia del punto C al punto S.

i. Sobre la semirrecta que pasa por los puntos C y S ubica un punto S' que esté al triple de la distancia que separa los puntos C y S.

j. Dibuja el rectángulo $PQRS$.

k. Dibuja el rectángulo $P'Q'R'S'$.

l. Mide los lados del rectángulo $PQRS$ y los lados del rectángulo $P'Q'R'S'$. Registra los resultados en las siguiente tablas.

Rectángulo $PQRS$	
Lado	Medida
$\overline{PQ}$	
$\overline{QR}$	
$\overline{RS}$	
$\overline{SP}$	

Rectángulo $P'Q'R'S'$	
Lado	Medida
$\overline{P'Q'}$	
$\overline{Q'R'}$	
$\overline{R'S'}$	
$\overline{S'P'}$	

m. Ahora realiza las siguientes divisiones entre las medidas de los lados encontrados y completa la tabla.

División	Cociente
$P'Q' \,/\, PQ$	
$Q'R' \,/\, QR$	
$R'S' \,/\, RS$	
$S'P' \,/\, SP$	

¿Notas alguna relación entre ese resultado y el valor k dado al inicio del ejercicio?

Ese resultado común que hallaste en las divisiones de los lados correspondientes entre el rectángulo y su imagen se le conoce como *razón de homotecia.*

n. ¿Es el rectángulo $P'Q'R'S'$una ampliación del rectángulo $PQRS$? De otro modo, ¿es el rectángulo $P'Q'R'S'$semejante al rectángulo $PQRS$?

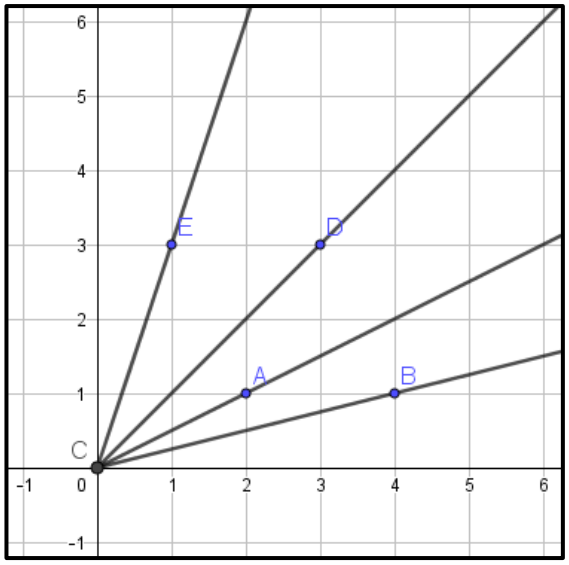
Ejercicio 8.6: TRABAJANDO HOMOTECIAS EN GEOGEBRA

1. Elige la herramienta *punto* y ubica los siguientes:

$$A(2,1), B(4,1), C(0,0)\ \ D(3,3)\ y\ E(1,3).$$

2. Elige la herramienta semirrecta y traza las siguientes semirrectas:

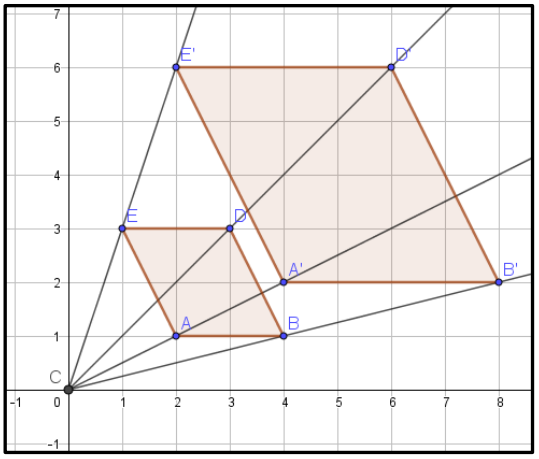
- Semirrecta $\overrightarrow{CB}$: Haz clic en el punto C y luego en el punto B.
- Semirrecta $\overrightarrow{CA}$: Haz clic en el punto C y luego en el punto A.
- Semirrecta $\overrightarrow{CD}$: Haz clic en el punto C y luego en el punto D.
- Semirrecta $\overrightarrow{CE}$: Haz clic en el punto C y luego en el punto E.



3. Selecciona la herramienta *polígono*, y crea el polígono $ABDE$ haciendo clic en los puntos A, B, D, E y nuevamente *A*.

4. Selecciona la herramienta *Homotecia.* Selecciona el polígono, luego haz clic en el punto C, a continuación, aparecerá una ventana solicitando el factor de la escala (razón de homotecia) y escribirás 2 y luego clic en OK.

Debes notar que la figura imagen que se produjo luego de la homotecia encaja perfectamente sobre las semirrectas trazadas en el paso 2.



5. Con ayuda de la herramienta *distancia o longitud* , tomarás las medidas de los lados de los polígonos $ABDE$ y $A'B'D'E'$ y registrarás los datos en las siguientes tablas:

Debes hacer clic en los dos puntos que conforman el segmento y así sabrás cuanto mide.

Polígono $ABDE$	
Lado	Medida
$\overline{AB}$	
$\overline{BD}$	
$\overline{DE}$	
$\overline{AE}$	

Polígono $A'B'D'E'$	
Lado	Medida
$\overline{A'B'}$	
$\overline{B'D'}$	
$\overline{D'E'}$	
$\overline{A'E'}$	

6. ¿Qué conclusión puedes sacar acerca de la medida de los lados de los polígonos $ABDE$ y $A'B'D'E'$?

7. Selecciona la herramienta *ángulo* y mide los cuatro ángulos interiores de ambos polígonos. Registra los datos en las tablas.

Para hallar la medida de los ángulos, debes hacer lo siguiente:

Por ejemplo, el $\measuredangle A$ o $\measuredangle BAE$ debes hacer clic en el vértice B, luego A y luego E. Sigue el orden en el que están escritos en la tabla.

Polígono $ABDE$	
Ángulo	Medida
$\measuredangle A$ o $\measuredangle BAE$	
$\measuredangle B$ o $\measuredangle DBA$	
$\measuredangle D$ o $\measuredangle EDB$	
$\measuredangle E$ o $\measuredangle AED$	

Polígono $A'B'D'E'$	
Ángulo	Medida
$\measuredangle A'$ o $\measuredangle B'A'E'$	
$\measuredangle B'$ o $\measuredangle D'B'A'$	
$\measuredangle C'$ o $\measuredangle E'D'B'$	
$\measuredangle D'$ o $\measuredangle AED$	

Luego de comparar los resultados. ¿Qué sucedió con los ángulos de los polígonos $ABDE$ y $A'B'D'E'$? ¿Se conservaron o sufrieron algún cambio?

8. ¿Es el polígono $A'B'D'E'$ semejante al polígono $ABDE$?

9. Selecciona la herramienta *área.* Luego selecciona los polígonos y aparecerá encima de ellos el valor del área.

Área $ABDE$ _____ Área $A'B'D'E'$ _____

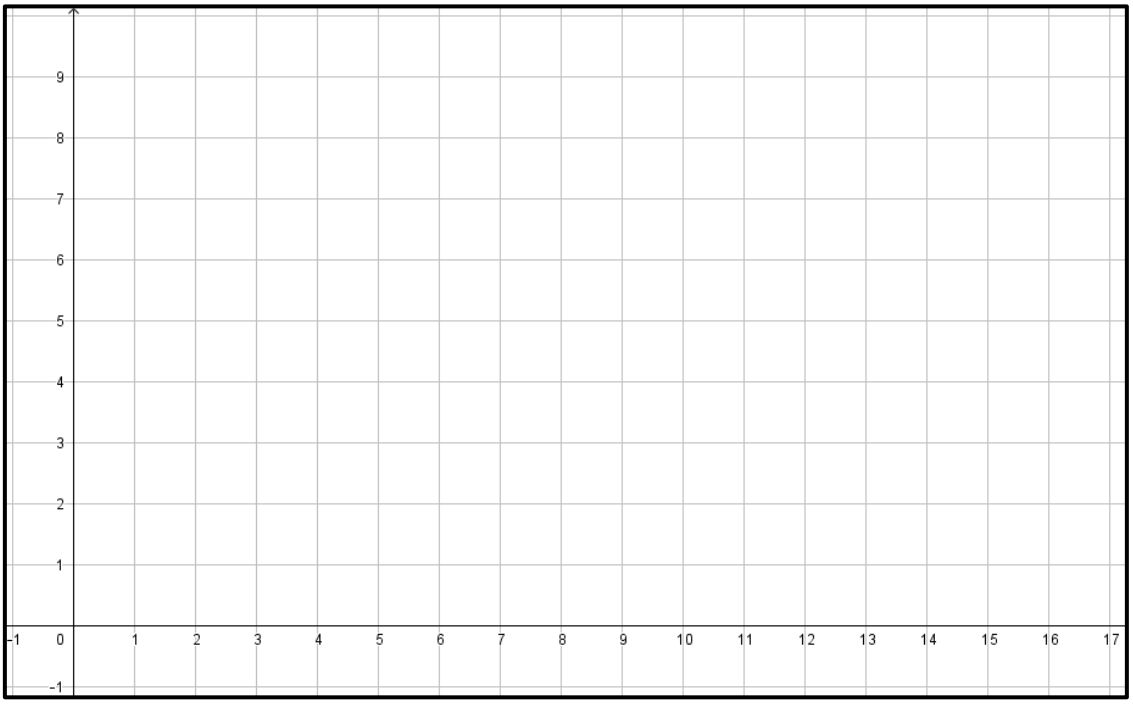
Comprueba que la razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza $\frac{A'}{A} = k^2$.

Ejercicio 8.7: HOMOTECIA DE UN TRIÁNGULO (Reducción)

Manos a la obra

Materiales: Lápiz, regla, compás.

1. En un sistema de coordenadas cartesianas ubica los puntos $C(0,0), A(12,0), B(7,7),\ D(0,9)$.



a. Sobre la recta que pasa por los puntos C y A ubica un punto A' que esté a la tercera parte de la distancia que separa los puntos A y C.

b. Sobre la recta que pasa por los puntos C y B ubica un punto B' que esté a la tercera parte de la distancia que separa los puntos B y C.

c. Sobre la recta que pasa por los puntos C y D ubica un punto D' que esté a la tercera parte de la distancia que separa los puntos D y C.

d. Dibuja el triángulo ABD.

e. Dibuja el triángulo $A'B'D'$.

f. Con ayuda del compás toma la medida del lado $A'B'$ y cuenta ¿cuántas veces cabe esta medida en el lado correspondiente AB del triángulo ABD?

g. Repite el procedimiento con los otros lados y cuenta ¿cuántas veces cabe $A'D'$ en AD? y ¿$B'D'$ en BD?

h. ¿Es el triángulo $A'B'D'$ una reducción del triángulo ABC? De otro modo, es el triángulo $A'B'D'$ semejante al triángulo ABD?

4. Conclusiones y recomendaciones

A continuación, se señalan algunas reflexiones derivadas del trabajo realizado:

Al abordar una temática, en particular para el grado 6°, se considera importante identificar contextos significativos y motivantes para el estudiante, estos pueden estar cercanos a su entorno y a su cultura, o en la misma matemática. Para el caso de las transformaciones geométricas hemos detectado que estas permean la congruencia, la semejanza y el área, pero también las encontramos presentes en el arte de la región como sombreros y mochilas. De esta manera, el estudio de las transformaciones se hace más ameno y enriquecedor para el estudiante, pero sobre todo le posibilita el acercamiento al aprendizaje de otros conceptos de la matemática.

Consideramos importante que el profesor esté formado en la disciplina, es importante tener seguridad de lo que se enseña. Ahora bien, la enseñanza de una temática de matemáticas es de forma gradual, se considera que deben seleccionarse contextos adecuados y divisar el horizonte del porqué y para qué se enseñan las cosas. Pero además se debe tener cuidado con el lenguaje a usar en el aula de clase, se puede empezar con un lenguaje natural y cercano a los estudiantes e ir creciendo hasta un intento de un lenguaje formal. En este mismo sentido, con respecto a la exigencia hacia los estudiantes, al comienzo se pueden exigir razones y explicaciones no necesariamente formales para explicar procedimientos y de igual manera ir creciendo hasta exigir razones de carácter formal.

El uso de la tecnología, en particular software de geometría dinámica como el Geogebra se justifica en el proceso de enseñanza - aprendizaje por cuanto nos lleva a explorar propiedades de los objetos matemáticos, a observar patrones y regularidades, a hacer conjeturas, actividades propias del quehacer de un matemático.

El aprendizaje de los conceptos matemáticos no se da de manera espontánea, esto es producto del trabajo, así que es importante diseñar actividades para que el estudiante manipule, invente y descubra. Esto debe ser un trabajo sistemático del estudiante y necesariamente orientado por el profesor.

Es recomendable revisar la historia de la matemática, estudiarla y ver como los conceptos se transforman, además, analizar los obstáculos iniciales para su creación. Esto brinda elementos de trabajo que bien aprovechados generan reflexiones de porqué se proponen innovaciones en la enseñanza de la matemática.

Bibliografía

[1] Abrate, R. S., Delgado, G. I., & Pochulu, M. D. (s.f.). *Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática.* Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

[2] Afonso Martín, M. C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele.* Tenerife, España: Universidad de La Laguna.

[3] Alsina, C., Pérez, R., & Ruiz, C. (1989). *Simetría Dinámica.* Madrid: Síntesis.

[4] Báez, R., & Iglesias, M. (2007). *Principios Didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en la UPEL* "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*, 67-87.

[5] Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

[6] Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico Tecnologías Computacionales.* Bogotá: Enlace Editores Ltda.

[7] Castillo, H. A. (1993). *Lecciones de Geometría Euclidiana.* Bogotá: Publicación del Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

[8] Clemens, S. (1984). *Geometría. Con aplicaciones y solución de problemas.* Wilmington Delaware E.U.A.: Addinson Esley Longman.

[9] Felipe, G. S. (2010). *Transformaciones en el plano usando software de geometría dinámica*. Número*s.* Revista de didáctica de las matemáticas, 43-70.

[10] Franco Ruschmann, C. B. (2003). *Arte Geométrico: Análisis y tendencias de su desarrollo plástico.* Granada: Universidad de Granada.

[11] Frejeiro, A. B. (1981). *Historia del arte hispánico I. La antigüedad. Vol. II.* Madrid: Alhambra.

[12] Grossman, S. (2012). *Álgebra lineal. Séptima edición.* México D.F.: McGrawHil Interamericana Editores.

[13] Holderlin. (2000). *El descubrimiento de la belleza.* Obtenido de http://www.mty.itesm.mx/dhcs/deptos/ri/ri95-801/lecturas/lec194.html.

[14] Jamnitzer, Wentzel. (2006). *Perspectiva Corpurum Regularium*. Madrid: Editorial Siruela.

[15] Jahn, Ana Paula. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles*. Francia: Université Joseph Fourier.

[16] Julio Barrera, L. J. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[17] Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antogüedad a nuestros días. Tomo I, II y III.* Madrid: Alianza Editorial.

[18] Kubovy, M. (1996). *Psicología de la perspectiva y el arte del Renacimiento.* Madrid: Trotta.

[19] Leroi Gourhan, A. (1984). *Símbolos artes y creencias de la prehistoria.* Madrid: Itsmo.

[20] Leroi-Gourhan, A. (1968). *Prehistoria del arte occidental.* Barcelona: Gustavo Gili.

[21] López, E. P. (1989). *Historia del arte de Andalucía. La antigüedad.* Sevilla: Gever.

[22] Mariño, R. (2004). *La Geometría en el arte y el diseño.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[23] Mendoza, B. C. (2016). *El arte, un contexto para la enseñanza de polígonos en grado séptimo.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[24] Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos currriculares matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

[25] Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

[26] Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje - Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

[27] Moise, E., & Downs, F. (1964). *Geometría Moderna.* Massachusetts: Addison Wesley Iberoamérica.

[28] Moriena, S. (2006). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano.* Prov. de Santa Fe - Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

[29] V.V.A.A. (1994). *El Legado Andalusí.* Granada: Sierra Nevada.