HÉCTOR BARCO RÍOS
EDILBERTO ROJAS CALDERÓN

# ELECTROMAGNETISMO Y FÍSICA MODERNA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

**I.S.B.N 958-9322-71-9**

© 2001 UNIVERSIDAD NACIONAL
DE COLOMBIA SEDE MANIZALES

**AUTORES:**
**HÉCTOR BARCO RÍOS**
Ingeniero Electricista
Esp. Ciencias Físicas
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

**EDILBERTO ROJAS CALDERÓN**
Licenciado Física y Matemáticas
Esp. Ciencias Físicas
Profesor Asistente
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

**IMPRESO**
Centro de Publicaciones
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

Diciembre de 2001
Primera Edición

# CONTENIDO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

PRÓLOGO ..... 9

INTRODUCCIÓN ..... 11

**PARTE I ELECTROMAGNETISMO**

CAPITULO 1. CAMPO MAGNETICO
1.1 Introducción ..... 15
1.2 Campo magnético ..... 15
1.3 Inducción magnética ..... 16
1.4 Unidades de la inducción magnética ..... 17
1.5 Flujo magnético ..... 17
1.6 Unidades del flujo magnético ..... 18
1.7 Ley de Gauss para el magnetismo ..... 18
1.8 Fuerza magnética sobre un conductor por el cual circula una corriente ..... 19
1.9 Momento o torque sobre una espira con corriente ..... 19
1.10 Energía potencial almacenada en el sistema espira-$\vec{B}$ ..... 20
1.11 Carga aislada dentro de un campo magnético ..... 20
Problemas resueltos ..... 22
Problemas propuestos ..... 30

CAPÍTULO 2. LEY DE AMPERE
2.1 Introducción ..... 33
2.2 Dirección y sentido del campo magnético cerca de un conductor con corriente ..... 33
2.3 Ley de Biot-Savart ..... 34
2.4 Ley de Ampere ..... 35
2.5 Corriente de desplazamiento ..... 35
2.6 Fuerza magnética entre dos conductores paralelos ..... 36
2.7 Campo magnético en un solenoide ..... 37
Problemas resueltos ..... 38
Problemas propuestos ..... 46

CAPITULO 3. LEY DE FARADAY
3.1 Introducción ..... 49
3.2 Ley de la inducción electromagnética de Faraday ..... 49
3.3 Ley de Lenz ..... 49
3.4 Fuerza electromotriz inducida por movimiento ..... 50
3.5 Campo magnético variable con el tiempo ..... 50
Problemas resueltos ..... 52
Problemas propuestos ..... 58

CAPÍTULO 4. INDUCTANCIA

4.1 Introducción ..... 61
4.2 Autoinducción ..... 61
4.3 Inductancia de una bobina con núcleo de aire ..... 62
4.4 Inductancias en serie ..... 62
4.5 Inductancias en paralelo ..... 63
4.6 Circuito RL ..... 63
4.7 Energía almacenada en un campo magnético ..... 65
4.8 Densidad de energía en un campo magnético ..... 65
4.9 Inducción mutua ..... 65
4.10 Transformador ..... 66
Problemas resueltos ..... 67
Problemas propuestos ..... 74

CAPÍTULO 5. PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA

5.1 Introducción ..... 77
5.2 Corriente de magnetización ..... 77
5.3 Vector de magnetización ..... 78
5.4 Ley de Ampere en materiales magnéticos ..... 78
5.5 Susceptibilidad magnética ..... 79
5.6 Materiales ferromagnéticos ..... 80
5.7 Materiales paramagnéticos ..... 81
5.8 Materiales diamagnéticos ..... 81
5.9 Ciclo de histéresis ..... 81
Problemas resueltos ..... 83
Problemas propuestos ..... 88

CAPÍTULO 6. ECUACIONES DE MAXWELL

6.1 Introducción ..... 91
6.2 Ecuaciones de Maxwell en forma integral ..... 91
6.3 Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial ..... 92
6.4 Ecuación de la onda electromagnética ..... 92
6.5 Energía de la onda electromagnética ..... 94
6.6 Intensidad de la onda electromagnética ..... 95
6.7 Densidad de energía de la onda electromagnética ..... 95
6.8 Cantidad de movimiento de la onda electromagnética ..... 96
6.9 Presión de radiación de la onda electromagnética ..... 96
6.10 Espectro de radiación electromagnética ..... 97
Problemas resueltos ..... 99
Problemas propuestos ..... 105

## PARTE II. FÍSICA MODERNA

CAPÍTULO 7. RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO
7.1 Introducción ..... 109
7.2 Cuerpo negro ..... 109
7.3 Leyes empíricas de la radiación del cuerpo negro ..... 110
7.3.1 Ley de Stefan-Boltzman ..... 110
7.3.2 Ley de desplazamiento de Wien ..... 110
7.3.3 Ley de Wien ..... 111
7.3.4 Ley de Rayleigh-Jeans ..... 112
7.4 Teoría cuántica de la radiación del cuerpo negro ..... 113
Problemas resueltos ..... 114
Problemas propuestos ..... 118

CAPÍTULO 8. EFECTO FOTOELÉCTRICO
8.1 Introducción ..... 121
8.2 Efecto fotoeléctrico ..... 121
8.3 Resultados experimentales ..... 122
8.4 Explicación cuántica del efecto fotoeléctrico ..... 124
Problemas resueltos ..... 126
Problemas propuestos ..... 131

CAPÍTULO 9. EFECTO COMPTON
9.1 Introducción ..... 133
9.2 Efecto Compton ..... 133
9.3 Resultados experimentales ..... 134
9.4 Explicación cuántica del efecto Compton ..... 134
Problemas resueltos ..... 136
Problemas propuestos ..... 147

CAPÍTULO 10. RAYOS X
10.1 Introducción ..... 149
10.2 Producción de Rayos X ..... 149
10.3 Resultados experimentales ..... 150
10.4 Propiedades de los Rayos X ..... 151
10.5 Ley de Moseley ..... 152
10.6 Absorción de Rayos X ..... 152
Problemas resueltos ..... 154
Problemas propuestos ..... 158

CAPÍTULO 11. ESPECTROSCOPIA Y MODELOS ATÓMICOS
11.1 Introducción ..... 161
11.2 Espectroscopía ..... 161
11.3 Series espectrales del átomo de Hidrógeno ..... 163
11.4 Modelos atómicos ..... 164

11.5 Modelo matemático del modelo atómico de Bohr ..... 166
11.6 El modelo atómico de Bohr y el principio de correspondencia ..... 167
11.7 Experimento de la dispersión de las partículas α ..... 168
Problemas resueltos ..... 171
Problemas propuestos ..... 176

CAPÍTULO 12. PROPIEDADES ONDULATORIAS DE LA MATERIA
12.1 Introducción ..... 179
12.2 Ondas de Broglie ..... 179
12.3 Paquete de ondas asociada a la materia ..... 180
12.4 Velocidad de fase ..... 181
12.5 Velocidad de grupo ..... 181
12.6 Principio de incertidumbre ..... 182
Problemas resueltos ..... 183
Problemas propuestos ..... 187

CAPÍTULO 13. MECÁNICA CUÁNTICA ONDULATORIA
13.1 Introducción ..... 189
13.2 Función de onda ..... 189
13.3 Ecuación de Schrödinger en estado estacionario ..... 190
13.4 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo ..... 190
13.5 Operadores mecanocuánticos ..... 191
13.6 Primer postulado de la mecánica cuántica ..... 191
13.7 Valor esperado ..... 191
13.8 Segundo postulado de la mecánica cuántica ..... 192
13.9 Números cuánticos ..... 192
Problemas resueltos ..... 193
Problemas propuestos ..... 207

APÉNDICE. SISTEMAS DE COORDENADAS
Coordenadas cartesianas ..... 209
Coordenadas cilíndricas ..... 210
Coordenadas esféricas ..... 212
Algunas constantes físicas ..... 214
Alfabeto griego ..... 215
Prefijos para múltiplos de unidades del Sistema Internacional ..... 215
Factores de conversión ..... 216
Unidades básicas del Sistema Internacional ..... 218
Premios Nobel de física ..... 219

BIBLIOGRAFÍA ..... 223

ÍNDICE ..... 224

# PRÓLOGO

La elaboración del presente texto surge como respuesta a los cambios que se hicieron en el plan de estudios de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales a comienzos de los 90 y la necesidad de presentar a los estudiantes, en un solo texto, los contenidos relacionados con el electromagnetismo y elementos de Física Moderna necesarios para entender los principios en los cuales se basa el funcionamiento de gran parte de la tecnología que a diario es utilizada.

Los contenidos están acorde con lo que en la actualidad representa la Física III que deben cursar todos los estudiantes de Ingeniería en una intensidad de 6 horas por semana durante el semestre, considerando el carácter teórico-práctico demandado por ésta asignatura.

La teoría en cada capítulo se presenta de manera sucinta pero clara y está acompañada de 10 ejercicios resueltos tomados textualmente de los libros que se mencionan al final del texto. En adición a éstos, se proponen 10 problemas, para que los estudiantes se familiaricen con la teoría y conceptualicen de manera más clara los temas que se discuten.

El diseño del libro se hizo pensando en tener para los estudiantes un material nuevo, de fácil consulta, que complemente los contenidos expuestos en clase sin perder continuidad en los temas (pues se obvian demostraciones y procedimientos matemáticos que con frecuencia fatigan a los lectores perdiendo la esencia de los fenómenos tratados) y que a través de los problemas resueltos, encuentren una herramienta para abordar otros, que con seguridad les permitirá resolverlos con más elementos de juicio. Los desarrollos matemáticos y demostraciones normalmente se hacen en la clase.

Los autores

# INTRODUCCIÓN

En las leyes de la electricidad y el magnetismo se soporta la operación y funcionamiento de centrales eléctricas y diversos dispositivos como radios, televisores, motores eléctricos, computadoras, equipos de transmisión de señales útiles en la comunicación y equipos que con frecuencia se utilizan en medicina. James Clerk Maxwell, en 1873, formuló las leyes del electromagnetismo como se conocen hoy día y Heinrich Hertz, poco después, en 1888, comprobó la validez de éstas, produciendo ondas electromagnéticas en el laboratorio, lo que condujo al desarrollo práctico de dispositivos como la radio y la televisión.

Los logros alcanzados para explicar el comportamiento de la materia a escala atómica, han permitido los desarrollos tecnológicos que disfrutamos en la actualidad. Todo esto hubiese sido imposible, sin haber encontrado una teoría capaz de explicar fenómenos como la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, y la emisión de líneas espectrales definidas por los átomos en una descarga en un gas. La respuesta a éstos y otros interrogantes condujo a una nueva teoría que se desarrolló en el primer tercio del siglo veinte denominada Mecánica Cuántica. Las primeras ideas de esta teoría las introdujo Planck, pero los aportes e interpretaciones más destacadas fueron hechos por físicos tan notables como Schroödinger, De Broglie, Einstein, Bohr, Heisenberg, Born y Dirac.

En este libro se presentan en forma resumida, los principios en los cuales se fundamenta el electromagnetismo y la Física Moderna. Aunque nuestro propósito no es reemplazar los textos tradicionales, sí pretendemos que se convierta en un auxiliar tanto para estudiantes como para profesores que deseen consultar estos temas de manera general con una amplia gama de aplicaciones, lo que conduce, con seguridad, a un mejor entendimiento de estos principios que por su complejidad, no son tan fáciles de asimilar.

La primera parte, Electromagnetismo, se ha dividido en seis capítulos que de manera general, comprenden los siguientes temas: Ley de Gauss para el magnetismo, Ley de Biot-Savart, Ley de Ampere, Ley de Faraday, Inductancia, Propiedades magnéticas de la materia y Ecuaciones de Maxwell. Cada capítulo cuyos temas se desglosan en la tabla de contenido, están enriquecidos por ilustraciones, definiciones, problema resueltos y propuestos que hacen del texto una herramienta bastante útil para comprender mejor cuales son las fuentes del magnetismo, como funcionan los motores y generadores eléctricos, los transformadores, como es la propagación del campo electromagnético y qué es lo que transporta.

En la segunda parte, Física Moderna, se cubren los siguientes temas: Radiación de cuerpo negro, Espectroscopía y modelos atómicos, Propiedades corpusculares de la radiación, Propiedades ondulatorias de la materia y Mecánica Cuántica Ondulatoria. Tiene por objeto analizar las contribuciones de Planck para explicar el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton, los rayos X y la base de la teoría de Bohr para postular su modelo atómico. Por otra parte, con los postulados de De Broglie y Heisenberg, se descubre la necesidad de generar una nueva teoría basada en el carácter ondulatorio que manifiestan las partículas y que se sintetiza en la Mecánica Cuántica Ondulatoria desarrollada por E. Scrhödinger, aquí se apreciará en que se fundamenta y cómo puede aplicarse.

# PARTE I.

# ELECTROMAGNETISMO


**CAPÍTULO 1. CAMPO MAGNÉTICO**

**CAPÍTULO 2. LEY DE AMPERE**

**CAPÍTULO 3. LEY DE FARADAY**

**CAPÍTULO 4. INDUCTANCIA**

**CAPÍTULO 5. PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA**

**CAPÍTULO 6. ECUACIONES DE MAXWELL**



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

# CAPÍTULO 1

# CAMPO MAGNÉTICO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## 1.1 INTRODUCCIÓN

Las primeras observaciones que se hicieron sobre el magnetismo son muy antiguas. Se piensa que fueron los griegos los primeros en observar dichos fenómenos en una ciudad del Asia, llamada Magnesia. Encontraron que en esa región existían ciertas piedras que eran capaz de atraer pequeños trozos de hierro. En la actualidad se sabe que estas piedras están constituidas por óxido de hierro llamado "Magnetita", y se les denomina imanes naturales. De manera que el término magnetismo se usó para describir las propiedades que tienen éstas piedras en honor a la ciudad en donde fueron encontradas.

Nikola Tesla
(1856–1943)
Yugoslavia

## 1.2 CAMPO MAGNÉTICO

Todo espacio cercano a un imán o a un conductor por el cual circula una corriente eléctrica es el asiento de un campo magnético. El campo magnético en un punto se representa por un vector $\vec{B}$ llamado ***Inducción magnética o Densidad de flujo magnético*** y por medio de líneas de inducción que deben cumplir con lo siguiente:

a) La tangente a una línea de inducción en un punto cualquiera indica la dirección de $\vec{B}$ en ese punto. Fig. 1.1.a

b) Las líneas de inducción se dibujan de tal manera que el número de ellas por unidad de área de sección transversal sea proporcional a la magnitud de $\vec{B}$. Si las líneas están muy cercanas entre sí, la magnitud de $\vec{B}$ es grande y donde están muy separadas, la magnitud de $\vec{B}$ es pequeña. Fig. 1.1.b

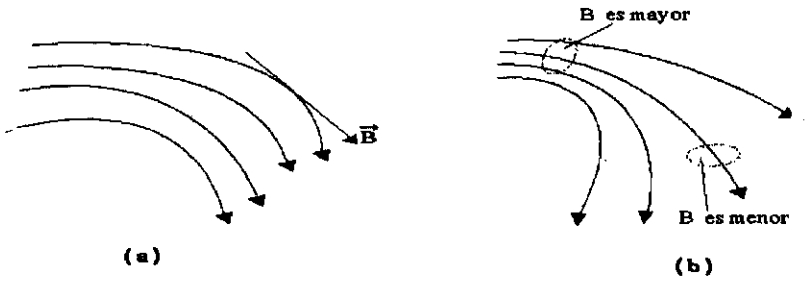



FIG. 1.1 A) LA DIRECCIÓN DE LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA $\vec{B}$ EN UN PUNTO CUALQUIERA ES TANGENTE A LA LÍNEA DE INDUCCIÓN. B) LA MAGNITUD DE LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA $\vec{B}$ ES PROPORCIONAL AL NÚMERO DE LÍNEAS DE INDUCCIÓN POR UNIDAD DE ÁREA DE SECCIÓN TRANSVERSAL

## 1.3 INDUCCIÓN MAGNÉTICA

Si una carga positiva $Q_0$ se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en una región donde existe una Inducción Magnética $\vec{B}$ experimenta una fuerza lateral $\vec{F}$ que viene dada por la siguiente relación

$$\vec{F}=Q_0\vec{v}\times\vec{B}$$

La fuerza es lateral y siempre perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\vec{B}$ (Fig. 1.2).

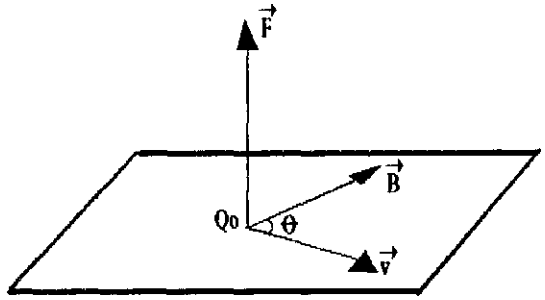



FIG. 1.2 LA FUERZA MAGNÉTICA $\vec{F}$ SIEMPRE ES PERPENDICULAR AL PLANO QUE CONTIENE A LOS VECTORES $\vec{v}$ Y $\vec{B}$ .

Si en una región del espacio existe un campo magnético $\vec{B}$ y un campo eléctrico $\vec{E}$, la fuerza total que actúa sobre la carga $Q_0$ viene dada por la siguiente expresión conocida como la ***Fuerza de Lorentz.***

$$\vec{F} = Q_0\,\vec{v}\times\vec{B} + Q_0\,\vec{E}$$

## 1.4 UNIDADES DE LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA

a) SISTEMA CGS.
F : Dinas
Q : Stat Coul
v : cm/seg
B : Gauss

Un Gauss es la Inducción Magnética para que una carga de un StatCoulomb que se mueve con una velocidad de un cm/seg experimente una fuerza lateral de una Dina.

b) SISTEMA MKS
F : Newton
Q : Coulomb
v : m/seg
B : Weber/m$^2$ = Tesla

Un Tesla (T) es la Inducción Magnética para que una carga de un Coulomb que se mueve con una velocidad de un m/seg experimente una fuerza lateral de un Newton.

$$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$$

## 1.5 FLUJO MAGNÉTICO

Mide la cantidad de líneas de inducción que atraviesa una superficie cualquiera. Fig. 1.3. Se define por la expresión:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde $\vec{B}$, es la inducción magnética que atraviesa un diferencial de superficie $d\vec{S}$ .

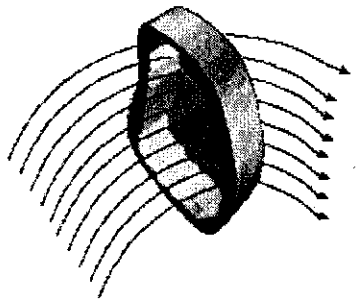


FIG. 1.3 LÍNEAS DE INDUCCIÓN QUE ATRAVIESAN UNA SUPERFICIE CUALQUIERA.

## 1.6 UNIDADES DEL FLUJO MAGNÉTICO

a) SISTEMA CGS

B : Gauss
S : $cm^2$
$\phi$ : Maxwell

Un Maxwell es el flujo magnético que resulta cuando una Inducción Magnética de un Gauss atraviesa una superficie de un $cm^2$.

b) SISTEMA MKS

B : Weber/$m^2$
S : $m^2$
$\phi$ : Weber

Un Weber es el flujo magnético que resulta cuando una Inducción Magnética de un Weber/$m^2$ atraviesa una superficie de un $m^2$.

## 1.7 LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

Como en magnetismo no existen polos magnéticos aislados sus líneas de inducción siempre son cerradas. Por lo tanto, el flujo que atraviesa una superficie gaussiana es cero. Fig. 1.4.

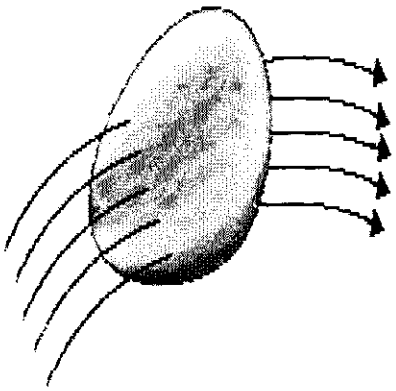
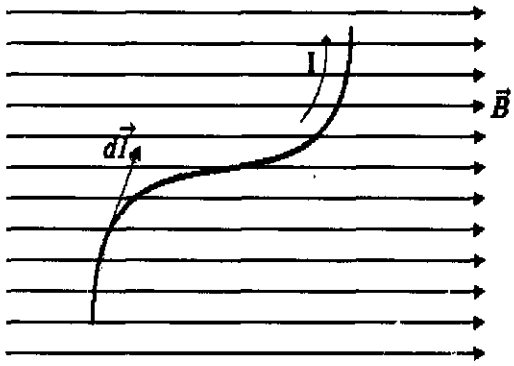


FIG. 1.4 LÍNEAS DE INDUCCIÓN QUE ATRAVIESAN UNA SUPERFICIE CERRADA (SUPERFICIE GAUSSIANA).

## 1.8 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR POR EL CUAL CIRCULA UNA CORRIENTE

Debido a que un campo magnético ejerce una fuerza lateral sobre una carga en movimiento, ejercerá también una fuerza lateral sobre un conductor por el cual circula una corriente eléctrica (Fig. 1.5). Esta fuerza está dada por la expresión

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$




UNIVERSIDAD NACIONAL DE
BIBLIOTECA
MANIZALES

FIG. 1.5 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR CON CORRIENTE COLOCADO DENTRO DE UN CAMPO MAGNÉTICO

## 1.9 MOMENTO O TORQUE SOBRE UNA ESPIRA CON CORRIENTE

Una espira con corriente situada dentro de un campo magnético $\vec{B}$ externo y constante Fig. 1.6, experimenta un momento dado por la siguiente expresión.

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$\vec{\mu}$ : Vector momento de dipolo magnético cuya dirección es siempre perpendicular al plano de la espira. Su valor es

$$\mu = NIA$$

Donde N, es el número de espiras, I es la intensidad de la corriente que circula por la espira y A, es el área de ésta.

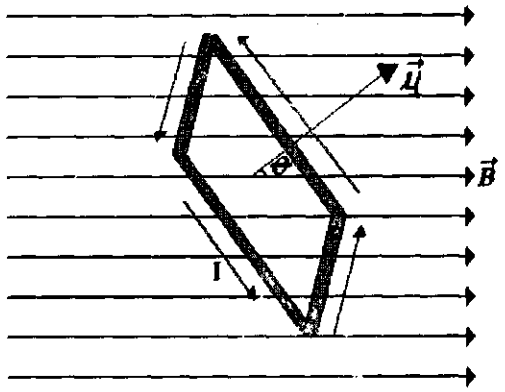



FIG. 1.6 UNA ESPIRA COLOCADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO EXPERIMENTA UN TORQUE QUE TIENDE A HACERLA GIRAR.

Para hallar el sentido de $\vec{\mu}$ se coge la espira de perfil con la mano derecha, de tal manera que los dedos tengan la misma dirección de la corriente por la espira; la dirección del pulgar indicará el sentido del vector momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ . (Fig. 1.6)

## 1.10 ENERGÍA POTENCIAL ALMACENADA EN EL SISTEMA ESPIRA "CAMPO"

El trabajo realizado para hacer girar una espira dentro de un campo magnético $\vec{B}$ queda almacenado como energía potencial U en el sistema compuesto por la espira y el campo magnético $\vec{B}$.

$$U = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

## 1.11 CARGA AISLADA DENTRO DE UN CAMPO MAGNÉTICO

Una carga Q de masa *m* que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ perpendicular a la dirección de un campo magnético constante $\vec{B}$ (Fig. 1.7), sigue una trayectoria circular cuyo radio es

$$R = \frac{m\,v}{Q\,B}$$

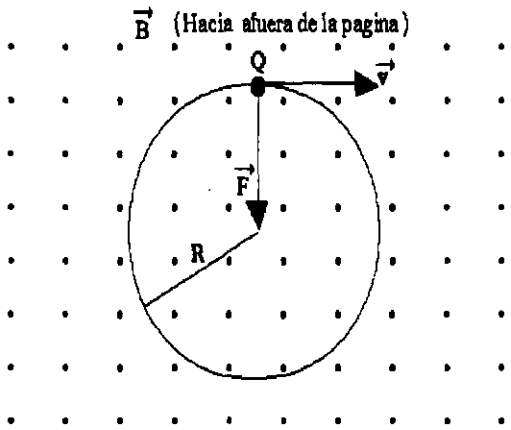



FIG. 1.7 TODA CARGA ELÉCTRICA QUE SE MUEVE PERPENDICULARMENTE A UN CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO EXPERIMENTA UNA TRAYECTORIA CIRCULAR.

La frecuencia llamada *frecuencia de ciclotrón* con que gira la carga se calcula de la siguiente manera

$$\mathbf{f = \frac{Q\,B}{2\,\pi\,m}}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

1.1 Un protón se mueve con una velocidad de $8 \times 10^6$ m/seg, a lo largo del eje X. El protón entra a una región donde se tiene un campo magnético de 2.5 T, su dirección forma un ángulo de 60° con el eje X y está en el plano XY. Halle la fuerza y aceleración iniciales del protón.

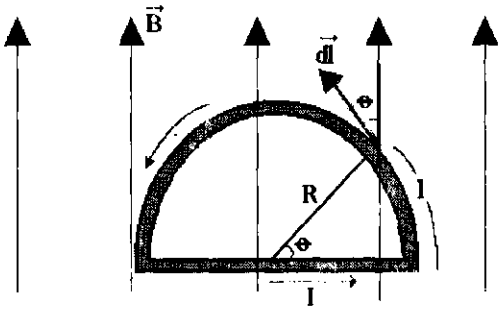
$$\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = Q\,v\,B \operatorname{sen}\theta$$

$$F = \left(1.6\text{x}10^{-19}\right)\left(8\text{x}10^{6}\right)\left(2.5\right)\operatorname{sen} 60^{o} = 2.8 \times 10^{-12} \quad \text{Nw} \quad \text{(hacia el eje Z)}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2.8 \times 10^{-12}}{1.67\text{x}10^{-27}} = 1.67 \times 10^{15} \quad \frac{m}{seg^2}$$

1.2 Un alambre al que se le da la forma de semicircunferencia de radio R forma un circuito cerrado y lleva una corriente I. El circuito se muestra en el plano XY y está frente a un campo magnético uniforme a lo largo del eje Y positivo. Determine la fuerza magnética sobre la porción recta y curva del alambre.




Para la sección curva:

$$dF = I\,dl\,B \operatorname{sen}\theta$$

$$F = I\,B \int dl \operatorname{Sen}\theta$$

$$l = R\,\theta \quad \Rightarrow \quad dl = R\,d\theta$$

$$F = I B \int R \operatorname{Sen}\theta \, d\theta$$

$$F = I B R \int_0^{\pi} \operatorname{Sen}\theta \, d\theta$$

$$F = 2 R I B$$

La fuerza tiene la dirección Z negativo.

Para la sección recta:

$$F = I l B \quad \Rightarrow \quad F = 2 R I B$$

La fuerza tiene la dirección Z positivo.

1.3 Un protón se mueve en una órbita circular con un radio de 14 cm, cuando se coloca en un campo magnético uniforme de magnitud 0.35 Weber/m$^2$, dirigido perpendicularmente a la velocidad del protón. Determine la velocidad del protón, su frecuencia angular y su período de revolución.

$$R = \frac{m v}{Q B} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{Q B R}{m}$$

$$v = \frac{(1.6x10^{-19})(0.35)(0.14)}{1.67x10^{-27}} = 4.69x10^{6} \quad \frac{m}{seg}$$

$$\omega = \frac{Q B}{m} = \frac{(1.6x10^{-19})(0.35)}{1.67x10^{-27}} = 3.35x10^{7} \quad \frac{rad}{seg}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.35x10^{7}} = 1.87x10^{-7} \quad seg$$

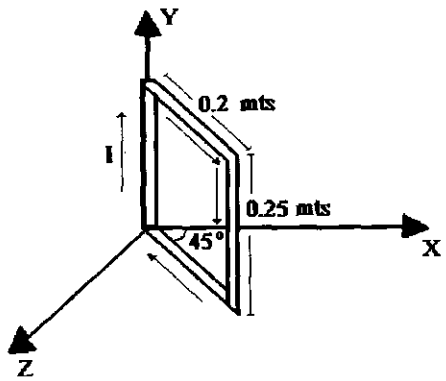
1.4 Una bobina rectangular consta de 40 vueltas y sus dimensiones son 0.25 m por 0.2 m. La bobina está articulada a lo largo del eje Y y el plano de la bobina forma un ángulo de 45° con el eje X. Halle el momento de torsión ejercido sobre la espira por un campo magnético uniforme de 0.25 T dirigido a lo largo del eje X, cuando la corriente por la bobina es de 0.5 A en la dirección indicada. Determine el sentido de rotación.

$$M = N I A B \operatorname{Sen}\theta$$

$$M = (40)(0.5)(0.2)(0.25)(0.25)(\operatorname{Sen} 45^{o})$$

$$M = 0.18 \quad \text{Nw.m}$$

Sentido de las manecillas del reloj.



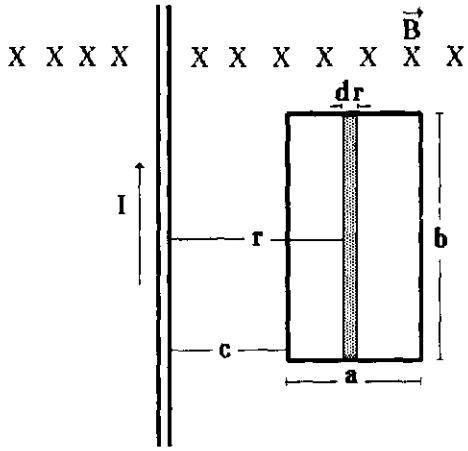

1.5 Una espira rectangular de anchura a y longitud b está situada a una distancia c de un alambre largo que conduce una corriente I. Determine el flujo magnético total a través de la espira.

$$\varphi = \int_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \quad ; \quad dS = b\,dr$$

$$\Phi = \int_c^{a+c} \frac{\mu_o I}{2\pi r} b\,dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \operatorname{Ln}\left(\frac{a+c}{c}\right)$$




1.6 Un protón se mueve en un campo magnético con un ángulo de 30° con respecto al campo. La velocidad es de $10^7$ m/seg y el campo magnético es de 1.5 T. Calcule (a) el radio del movimiento helicoidal , (b) la distancia de avance por revolución y (c) la frecuencia del movimiento angular.

a) $$R = \frac{m v_{\perp}}{QB} \quad \therefore \quad v_{\perp} = v \operatorname{Sen}\theta \,,\; v_{\Pi} = v \operatorname{Cos}\theta$$

b) $$R = \frac{m v \operatorname{Sen}\theta}{QB} = \frac{(1.67x10^{-27})(1x10^{7})(\operatorname{Sen} 30^{o})}{(1.6x10^{-19})(1.5)} = 0.034 \quad \text{m}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi m}{QB}$$

$$T = \frac{(2\pi)(1.67x10^{-27})}{(1.6x10^{-19})(1.5)} = 4.36x10^{-8} \quad seg$$

$$x = v_{\parallel} T = (1x10^{7})(0.86)(4.36x10^{-8}) = 0.377 \quad m$$

c) $$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4.36x10^{-8}} = 22.9x10^{6} \quad \frac{rev}{seg}$$

1.7 (a) Un protón con una energía cinética de 30 MeV se mueve transversalmente respecto a un campo magnético de 1.5 T. Determinar el radio de la trayectoria y el período de revolución. (b) Repita el problema si la energía del protón es de 30 GeV.

a) $$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad R = \frac{mv}{QB} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{QBR}{m}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{QBR}{m}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{2E_k m}}{QB}$$

$$R = \frac{\sqrt{(2)(30x10^{6})(1.6x10^{-19})(1.67x10^{-27})}}{(1.6x10^{-19})(1.5)} = 0.528 \quad m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{QB/m} = \frac{2\pi m}{QB} = \frac{(2\pi)(1.67x10^{-27})}{(1.6x10^{-19})(1.5)} = 4.37x10^{-8} \quad s$$

UNIVERSIDAD NACIONAL BIBLIOTECA MANIZALES

b) Ahora el problema se trata en forma relativista.

$$E_k = mc^2 - m_o c^2$$

$$mc^2 = E_k + m_o c^2$$

$$mc^2 = (30x10^{9})(1.6x10^{-19}) + (1.67x10^{-27})(3x10^{8})^2$$

$$mc^2 = 4.95x10^{-9}$$

$$m = \frac{4.95x10^{-9}}{\left(3x10^8\right)^2} = 5.5 \times 10^{-26} \quad kg$$

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_o^2}{m^2}$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_o}{m}\right)^2} = 3x10^8\sqrt{1-\left(\frac{1.67x10^{-27}}{5.5 \times 10^{-26}}\right)^2} = 2.99 \times 10^8 \quad \frac{m}{seg}$$

$$R = \frac{m_o V}{QB} = \frac{\left(1.67 \times 10^{-27}\right)\left(2.99 \times 10^8\right)}{\left(1.6x10^{-19}\right)\left(1.5\right)} = 2 \quad m$$

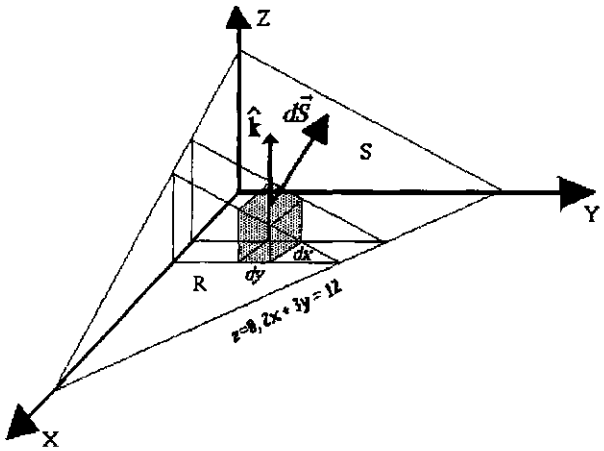
$$T = \frac{2\pi m}{QB} = \frac{\left(2\pi\right)\left(5.5 \times 10^{-26}\right)}{\left(1.6x10^{-19}\right)\left(1.5\right)} = 1.43 \times 10^{-6} \quad seg$$

1.8 Halle el flujo magnético que atraviesa la región limitada por el plano 2x + 3y +6z = 12 (ver figura), donde las coordenadas vienen dadas en m, situada en el primer octante si la inducción magnética es $\vec{B} = 18\,z\,\hat{i} - 12\,\hat{j} + 3y\,\hat{k}$ T .

$$\Phi = \int_S \vec{B}.d\vec{S} = \int_R \vec{B}.\hat{u}\,\frac{dx\,dy}{\left|\hat{u}.\hat{k}\right|}$$

Para hallar el vector perpendicular a la superficie,

$$\nabla\left(2x + 3y + 6z\right) = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$




El vector unitario en la dirección perpendicular a la superficie,

$$\hat{u} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\,\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$$

$$\hat{u}.\hat{k} = \left(\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}\right).\hat{k} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{dx\,dy}{\left|\hat{u}.\hat{k}\right|} = \frac{7}{6}dx\,dy$$

$$\vec{B}.\hat{u} = \left(18z\,\hat{i} - 12\,\hat{j} + 3y\,\hat{k}\right).\left(\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}\right)$$

$$\vec{B}.\hat{u} = \frac{36\,z - 36 + 18\,y}{7}$$

Pero se tiene que,

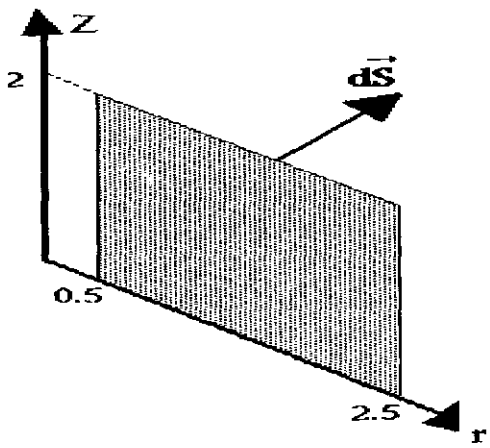
$$2x + 3y + 6z = 12 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{12 - 2x - 3y}{6}$$

$$\vec{B}.\vec{u} = \frac{36\left(\frac{12 - 2x - 3y}{6}\right) - 36 + 18y}{7} = \frac{36 - 12x}{7}$$

$$\Phi = \int_{x=0}^{x=6} \int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}} (6-2x)\,dx\,dy$$

$$\Phi = \int_{x=0}^{x=6} \left(24 - 12x + \frac{4x^2}{3}\right) dx = 24 \quad \text{Weber}$$

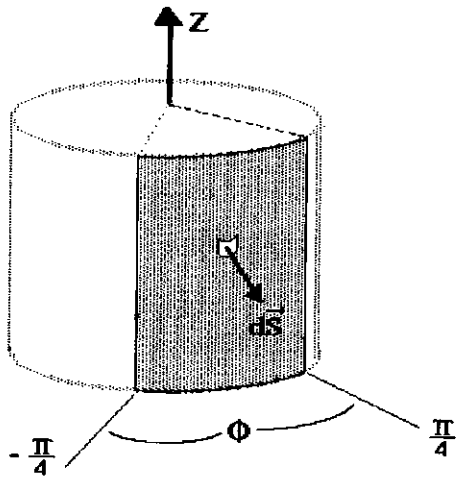
1.9 En coordenadas cilíndricas, $\vec{B} = \frac{2}{r}\hat{u}_\varphi$ T. Determine el flujo magnético que cruza la superficie plana definida por $0.5 \le r \le 2.5$ m y $0 \le z \le 2$ m.




$$\Phi = \int_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_0^2 \int_{0.5}^{2.5} \frac{2}{r}\hat{u}_\varphi \, dr\,dz\,\hat{u}_\varphi = 4\,\mathrm{Ln}\left(\frac{2.5}{0.5}\right) = 6.44 \quad \text{Weber}$$

1.10 Un campo magnético radial $\vec{B} = \frac{3}{r}\cos\varphi\,\hat{u}_r$ T, sale del espacio vacío. Halle el flujo magnético que cruza la superficie definida por $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$, $0 \le z \le 1$ m.



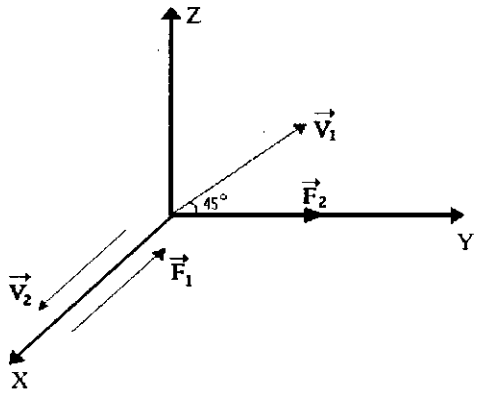

$$\Phi = \int_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{r}\operatorname{Cos}\varphi\right)\hat{u}_r \; r\,d\varphi\,dz\,\hat{u}_r = 4.24 \quad \text{Weber}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

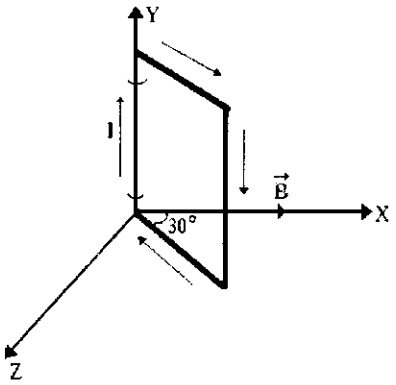
1- Una partícula tiene una carga de $4 \times 10^{-9}$ Coul. Cuando se mueve con una velocidad $v_1$ de $3 \times 10^4$ m/seg a 45° por encima del eje Y y en el plano YZ, un campo magnético uniforme ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ según el eje X. Cuando la partícula se mueve con una velocidad $\vec{V}_2$ de $2 \times 10^4$ m/seg según el eje X, se ejerce una fuerza $\vec{F}_2$ de $4 \times 10^{-5}$ Nw según el eje Y. Cuáles son el módulo y la dirección del campo magnético.

**R/ta:** $\vec{B} = 0.5\,\hat{k}$ T




2- En la figura se muestra una bobina rectangular de 20 espiras de 10 cm de ancho y 5 cm de alto. Lleva una corriente de 0.1 A y tiene goznes en un lado. Qué momento obra sobre la bobina si está montada con su plano formando un ángulo de 30° con respecto a la dirección de un campo magnético uniforme de 0.5 Weber/m$^2$.

**R/ta:** $\tau = 4.3 \times 10^{-3}$ Nw.m Paralelo al eje Y.




3- Un ion con carga +3e se proyecta a un campo magnético uniforme de 1.5 Weber/m$^2$. Viaja a $10^7$ m/seg formando un ángulo de 45°con la dirección del campo. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza sobre el ion.

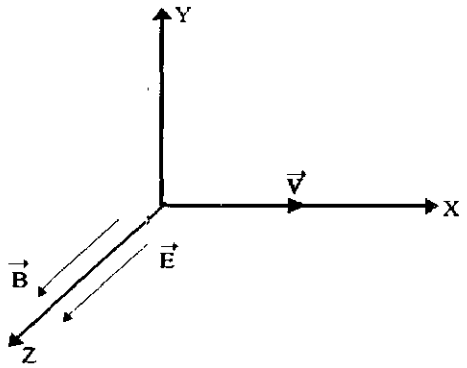
**R/ta:** $5.09 \times 10^{-12}$ Nw

4- Un segmento conductor recto de 2 m de largo forma un ángulo de 30° con un campo magnético uniforme de 5000 Gauss. Hallar la fuerza que actúa sobre el conductor si por él circula una corriente de 2 A.

**R/ta:** 1 Nw

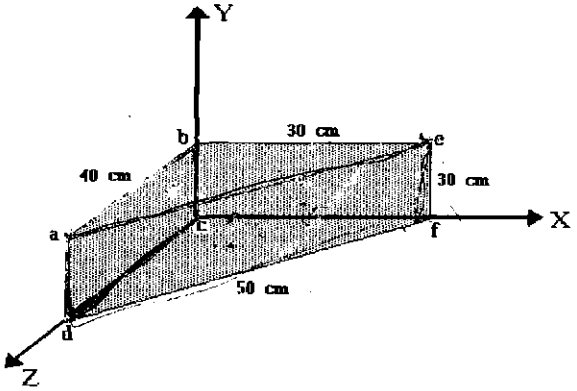
5- Una región del espacio contiene un campo magnético $\vec{B} = 5 \times 10^{-4}\,\hat{k}$ T, un campo eléctrico $\vec{E} = 5\,\hat{k}$ V/m. Un protón entra a la región con una velocidad $\vec{V} = 2.5 \times 10^{5}\,\hat{i}$ m/seg. Después de tres revoluciones completas: a) Describa el movimiento del protón. b) Hallar la posición.

**R/ta:** a) Helicoidal. b) z = 37 m




6- La inducción magnética en cierta región es de 2 Weber/m$^2$ y su sentido coincide con el eje positivo del eje X. a) Cuál es el flujo magnético que atraviesa la superficie abcd. b) Cuál es el flujo magnético que atraviesa la superficie becf. c) Cuál es el flujo magnético que atraviesa la superficie aefd.

**R/ta:** a) $\phi = 0.24$ Weber b) 0 c) 0.24 Weber



7- Hallar la magnitud de la fuerza ejercida sobre una carga puntual de 0.2 Coul que tiene una velocidad de $4\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ m/seg en el campo. a) $\vec{E}=20(\hat{i}+\hat{k})$ V/m. b) $\vec{B}=3\hat{i}-5\hat{j}-6\hat{k}$ Weber/m$^2$.

**R/ta:** a) $\vec{F}=4\hat{i}+4\hat{k}$ Nw b) $\vec{F}=5.4\hat{i}+6.6\hat{j}-2.8\hat{k}$ Nw

8- En un ciclotrón, el radio de la órbita de salida de los protones es de 0.4 m. La frecuencia de ciclotrón es de $10^7$ Hz. a) Hallar el campo magnético aplicado. b) Hallar la velocidad de salida de los protones. c) Hallar su energía. d) Hallar el mínimo número de vueltas que debe dar un protón si el máximo voltaje entre las D es de 20000 V.

**R/ta:** a) B = 0.65 T. b) v = 2.5 x $10^7$ m/seg . c) $E_k$ = 3.26 MeV. d) N = 163

9- Calcule el flujo magnético total que cruza el plano z=0 en coordenadas cilíndricas para $r \leq 5$ x $10^{-2}$ m, si $\vec{B}=\frac{0.2}{r}\text{sen}^2\varphi\,\hat{k}$ T.

**R/ta:** $\phi$ = 3.14 x $10^{-2}$ Weber

10- Calcule el flujo magnético total que cruza la franja $z = 0$, $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 2$ m, si

$$\vec{B}=2.5\left(\text{sen}\frac{\pi x}{2}\right)e^{-2y}\hat{k} \quad T$$

**R/ta:** $\phi$ = 1.59 Weber

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

# CAPÍTULO 2

# LEY DE AMPERE

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Hans Christian Oersted descubrió que las corrientes eléctricas producen campos magnéticos, estableciendo una relación muy estrecha entre la electricidad y el magnetismo, llamándosele ***Electromagnetismo***.

André Marie Ampere
(1775 – 1836)
Francia

Al colocar varios imanes pequeños rodeando un conductor con corriente, se observa que estos imanes se orientan de tal forma que las líneas de inducción forman círculos cerrados alrededor del conductor (Fig. 2.1)

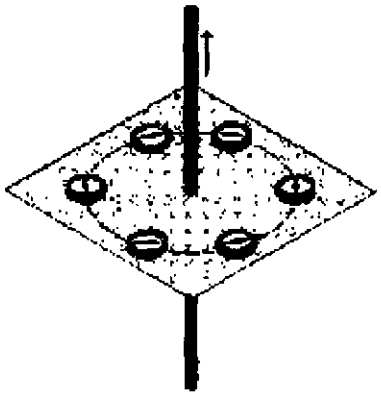


FIG. 2.1 LOS IMANES SE ORIENTAN EN LA DIRECCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

## 2.2 DIRECCIÓN Y SENTIDO DEL CAMPO MAGNÉTICO CERCA A UN CONDUCTOR CON CORRIENTE

Para hallar la dirección y el sentido de un campo magnético producido por una corriente que circula por un conductor, se utiliza la regla de la mano derecha. Se coge el conductor con la mano derecha, con el pulgar apuntando en la dirección de la corriente; entonces la curvatura de los dedos alrededor del conductor indica la dirección y el sentido del campo magnético (Fig. 2.2).

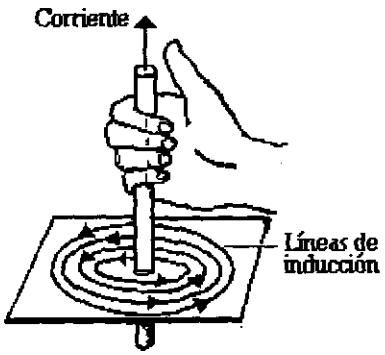



FIG. 2.2 MÉTODO PARA DETERMINAR EL SENTIDO DE LAS LÍNEAS DE INDUCCIÓN

## 2.3 LEY DE BIOT-SAVART

Para evaluar el campo magnético cerca a un conductor por el cual circula una corriente I, Biot y Savart encontraron la siguiente ley empírica obtenida por experimentación.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

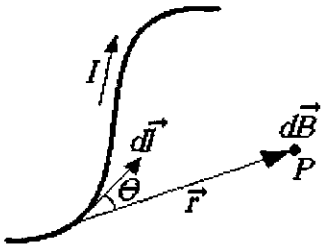



FIG. 2.3 FORMA DE APLICAR LA LEY DE BIOT-SAVART PARA CALCULAR EL CAMPO MAGNÉTICO EN UN PUNTO CERCANO A UN CONDUCTOR CUALQUIERA

Donde,

$d\vec{B}$ : Diferencial de campo magético en el punto P.

$d\vec{l}$ : Diferencial de longitud del conductor en la dirección de la corriente I.

$\vec{r}$ : Vector de posición que va desde el diferencial de conductor hasta el punto P.

$\mu_0$ : Coeficiente de Permeabilidad Magnética en el vacío. Su valor es:
$\mu_0 = 4\pi x 10^{-7}$ Weber/A.m.

## 2.4 LEY DE AMPERE

Así como la ley de gauss relaciona la integral del Campo Eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga neta encerrada por dicha superficie. La ley de Ampere relaciona la integral del Campo Magnético a través de una trayectoria cerrada con la corriente neta encerrada por dicha trayectoria. (Figura 2.4)

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o I_n$$

Donde,

$\vec{B}$ : Inducción Magnética.

$d\vec{l}$ : Diferencial de longitud de la trayectoria cerrada.

$\mu_o$ : Permeabilidad Magnética en el vacío.

$I_n$ : Corriente neta encerrada por la trayectoria.

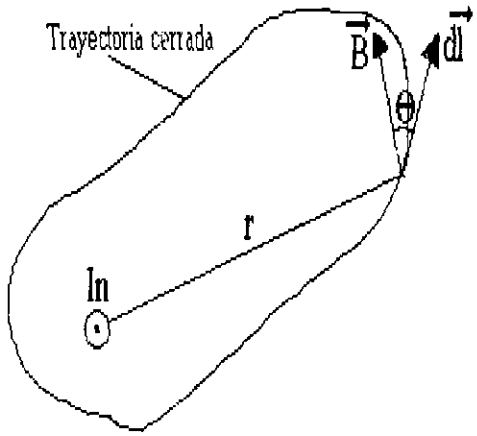



FIG. 2.4 TRAYECTORIA CERRADA ALREDEDOR DE UN CONDUCTOR CON CORRIENTE

## 2.5 CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

Consideremos un conductor por el cual circula una corriente de conducción $I_c$ conectado a las placas de un condensador, como se muestra en la Fig. 2.5.

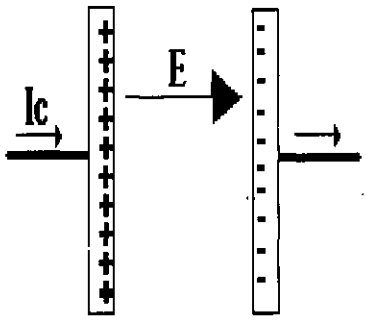



FIG. 2.5 CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO QUE CIRCULA ENTRE LAS PLACAS CUANDO EL $\vec{E}$ VARÍA CON EL TIEMPO

Maxwell propuso que la corriente que se usa en la ley de Ampere está compuesta por la suma de dos corrientes: Una corriente de conducción $I_c$ y una corriente de ***desplazamiento*** $I_d$. Como la corriente de conducción que llega a las placas hace aumentar el campo eléctrico entre las placas del condensador, Maxwell supuso que la corriente de desplazamiento estaba relacionada con la variación del campo, de la siguiente manera,

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi E}{\partial t}$$

donde, $\phi_E$ es el flujo eléctrico.

## 2.6 FUERZA MAGNÉTICA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS

Dos conductores rectos y paralelos de longitud l separados una distancia d, por los cuales circulan corrientes $I_a$ e $I_b$ , como se muestra en la Fig. 2.6, experimentan una fuerza dada por la expresión:

$$F = \frac{\mu_0 I_a I_b l}{2 \pi d}$$

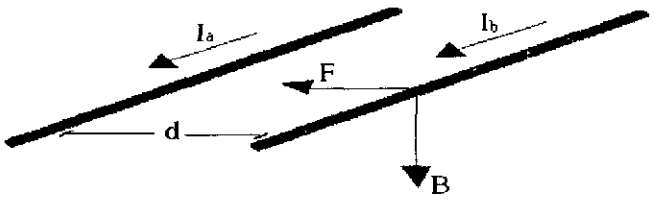



FIG. 2.6 FUERZA DE ATRACCIÓN ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS CUANDO LAS CORRIENTES TIENEN IGUAL SENTIDO

Si las corrientes tienen diferente sentido se ejercen una fuerza de repulsión.

## 2.7 CAMPO MAGNÉTICO EN UN SOLENOIDE

Un solenoide es un conductor arrollado sobre una superficie cilíndrica por el cual circula una corriente eléctrica. Observando la Fig. 2.7, se puede concluir que para puntos exteriores al solenoide, el campo magnético es despreciable y para puntos en el interior el campo magnético se puede considerar constante y uniforme siempre y cuando la longitud del solenoide sea mucho mayor que su diámetro.

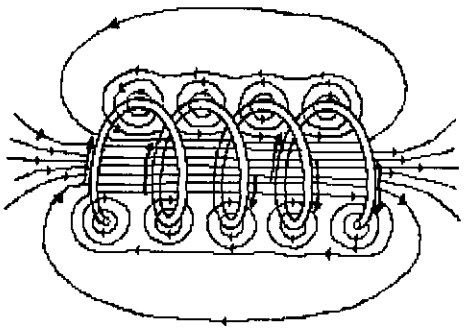


FIG. 2.7 LÍNEAS DE INDUCCIÓN DENTRO DE UN SOLENOIDE CON NÚCLEO DE AIRE

El valor del campo magnético en el interior del solenoide se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{B} = \mu \, \mathbf{n} \, \mathbf{I}$$

donde $\mu$, es la permeabilidad absoluta del núcleo del solenoide, n es el número de espiras por unidad de longitud, e I, es la corriente que circula por el solenoide.

La permeabilidad relativa de un núcleo viene dada por la relación entre la permeabilidad absoluta y la permeabilidad en el vacío,

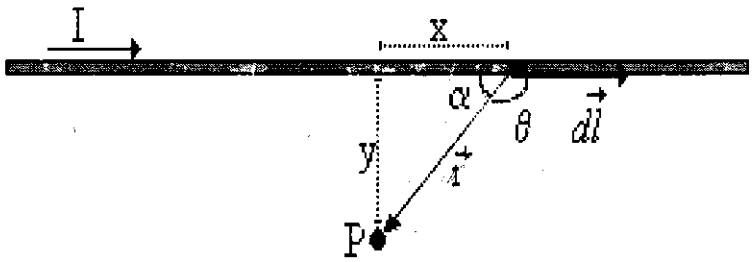
$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Si el núcleo del solenoide es aire, entonces $\mu = \mu_0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## PROBLEMAS RESUELTOS

2.1 Determine el campo magnético en un punto a una distancia y de un conductor recto e infinito por el cual circula una corriente constante I.




Aplicando la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl\, r \operatorname{sen} \theta}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

$$\alpha = 180 - \theta \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \alpha$$

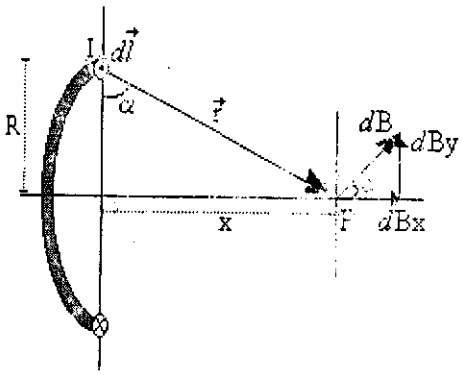
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{y}{r} \therefore \qquad dl = dx$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y\, dx}{y^2 + x^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\mu_0 I y}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

resolviendo la integral se llega a . $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$

2.2 En la figura se muestra una espira circular de radio R que lleva una corriente I. Halle el campo magnético para el punto P situado sobre el eje.




Aplicando la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\, r \operatorname{sen} 90}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}$$

$$dB_x = dB\cos\alpha \quad , \quad dB_y = 0 \quad (\text{Simetría})$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\cos\alpha}{r^2} \qquad \therefore \qquad \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\, R}{r^2\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad \therefore \qquad r^2 = R^2 + x^2$$

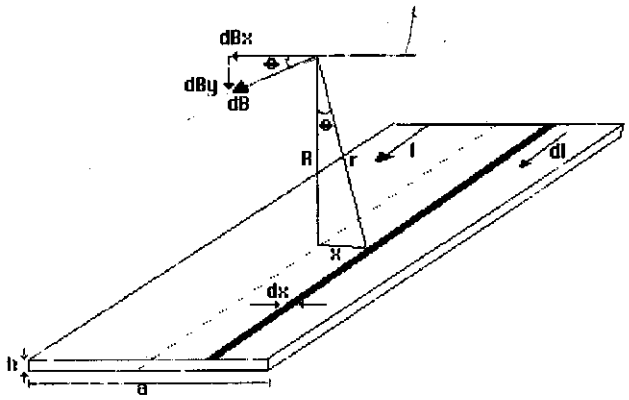
$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R\, dl}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \Rightarrow \qquad B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi R} dl$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{i}$$

Si el punto P se encuentra en el centro de la espira, x = 0:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

2.3 En la figura se muestra una tira plana de cobre de anchura a y espesor insignificante h que lleva una corriente I. Encontrar el campo magnético a una distancia R del centro de la tira, perpendicularmente a ella.




$$dB = \frac{\mu_0\, dI}{2\pi r} \quad \text{(Campo magnético de un hilo conductor)}$$

$$dB_x = dB\cos\theta \qquad B_y = 0 \qquad \text{(Simetría)}$$

$$B_x = \int dB\cos\theta \qquad \therefore \quad \cos\theta = \frac{R}{r}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0\, dI}{2\pi r}\left(\frac{R}{r}\right)$$

$$\frac{I}{A} = \frac{dI}{dA} \quad \Rightarrow \quad dI = \frac{I}{A}dA \quad \therefore \quad dA = h\,dx \quad \Rightarrow \quad dI = \frac{I}{a}dx$$

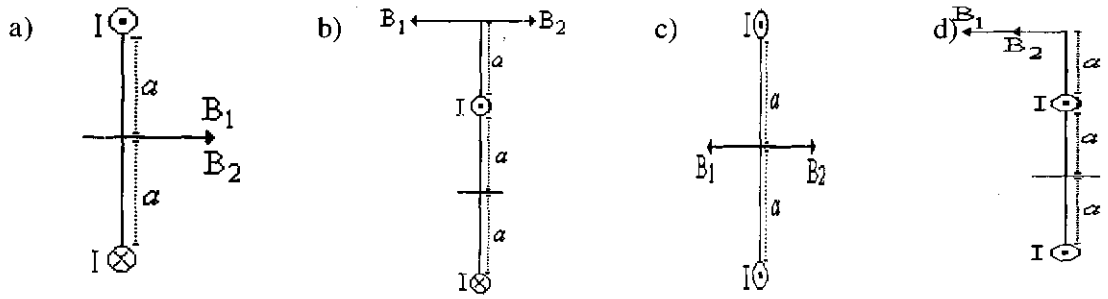
$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{2\pi a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{R^2 + x^2} = \frac{\mu_0 IR}{\pi a}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{R^2 + x^2}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{\pi a}\left[\frac{1}{R}\,tg^{-1}\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\mu_0 IR}{\pi a}\left[\frac{1}{R}\,tg^{-1}\left(\frac{a}{2R}\right)\right]$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi a} tg^{-1}\left(\frac{a}{2R}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} tg^{-1}\left(\frac{a}{2R}\right)\hat{i}$$

2.4 Dos largos hilos rectilíneos y paralelos están separados una distancia 2a. Si transportan intensidades iguales y de sentidos opuestos, calcúlese la inducción magnética en los siguientes puntos: a) En un punto equidistante entre ellos. b) A una distancia a por encima del hilo superior. Si ambos hilos transportan intensidades del mismo sentido, determine la inducción magnética en los siguientes puntos: c) En un punto equidistante entre ellos. d) A una distancia a por encima del hilo superior.




a) $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ , $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

$B = B_1 + B_2$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}$

b) $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ , $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3a)}$

$B = B_2 - B_1$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3a)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = -\frac{\mu_0 I}{3\pi a}$

c) $B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$ , $B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$

$$B = B_2 - B_1$$

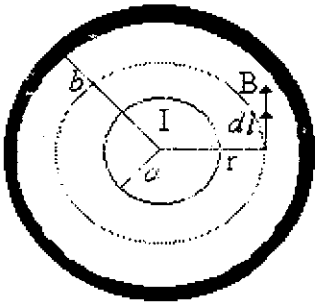
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a} - \frac{\mu_o I}{2\pi a} = 0$$

d) $B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$ , $B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi(3a)}$

$$B = -B_1 - B_2$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a} - \frac{\mu_o I}{2\pi(3a)} = -\frac{2}{3}\frac{\mu_o I}{\pi a}$$

2.5 En la figura se muestra un conductor cilíndrico hueco de radios a y b que lleva una corriente I uniformemente distribuida en su sección transversal. Determine el campo magnético para puntos dentro del cuerpo del conductor (a<r<b).




Aplicando la ley de Ampere:

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o I_n$$

$$\oint_c B\,dl\cos 0^o = \mu_o I_n \quad \Rightarrow \quad B(2\pi r) = \mu_o I_n$$

$$A_n = \pi r^2 - \pi a^2$$

$$\frac{I}{A} = \frac{I_n}{A_n} \quad \therefore \quad A = \pi b^2 - \pi a^2$$

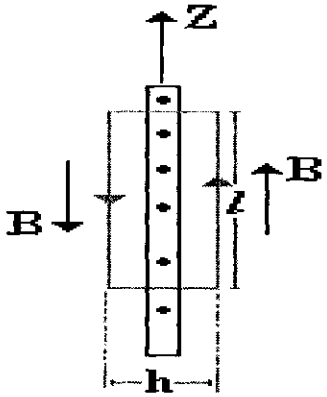
$$B(2\pi r) = \mu_o \frac{I}{A} A_n \quad \Rightarrow \quad B(2\pi r) = \frac{\mu_o I}{A}\left(\pi r^2 - \pi a^2\right)$$

$$B(2\pi r) = \mu_o I\left(\frac{\pi r^2 - \pi a^2}{\pi b^2 - \pi a^2}\right)$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi\left(b^2 - a^2\right)}\left(\frac{r^2 - a^2}{r}\right)$$

2.6 Una lámina infinita está colocada como se muestra en la figura vista de perfil y transporta una densidad de corriente superficial Js (puntos). Js representa la corriente por unidad de longitud medida a lo largo de la lámina. Determinar el campo magnético en puntos cercanos a la lámina.

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o I_n \Rightarrow \oint_c B\,dl\cos 0^o = \mu_o I_n$$

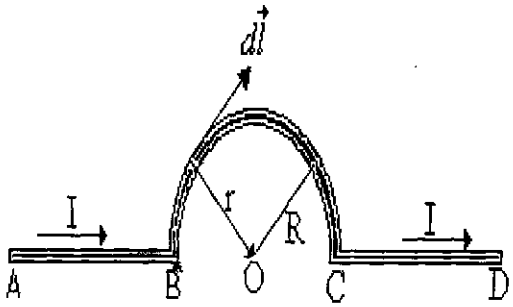



$$B(2l) = \mu_o I_n \quad \therefore \quad \frac{I}{Lh} = \frac{I_n}{lh}$$

$$I_n = \frac{l}{L} I \quad \Rightarrow \quad I_n = J_s l$$

$$B(2l) = \mu_o J_s l \quad \Rightarrow \quad B = \mu_o \frac{J_s}{2}$$

2.7 Una corriente I fluye por un alambre semicircular, de radio R como se muestra en la figura. Cuál es el valor del campo magnético en el centro O. Cuál es su dirección.




Aplicando la ley de Biot-Savart para la sección curva:

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dl\,r\,\text{sen}\,90^o}{r^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2} \int_0^{\pi R} dl = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}(\pi R)$$

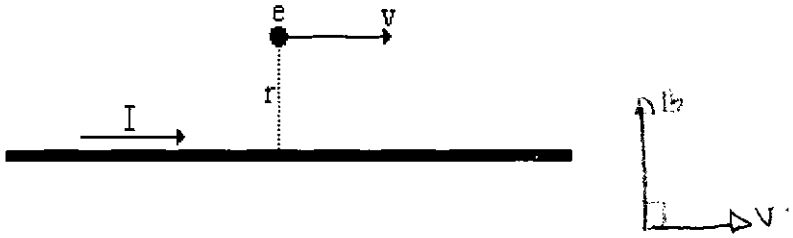
$$B = \frac{\mu_o I}{4R}$$ entrando a la página.

Para la sección recta AB y CD :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dl r \operatorname{sen} 0^o}{r^3} = 0$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dl r \operatorname{sen} 0^o}{r^3} = 0$$

2.8 Un hilo rectilíneo muy largo transporta una corriente de 1.5 A. Un electrón se desplaza paralelamente al hilo, a una distancia de 10 cm de él, en el mismo sentido de la corriente y con una velocidad de 5 x $10^6$ cm/seg. Qué fuerza ejerce sobre el electrón el campo magnético creado por la corriente.




$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{(4\pi x 10^{-7})(1.5)}{(2\pi)(0.1)} = 3x10^{-6} \quad T$$

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} = Q\, v\, B \operatorname{sen} 90^o = QvB$$

$$F = (1.6x10^{-19})(5x10^4)(3x10^{-6}) = 2.4x10^{-20} \quad Nw \quad \text{(hacia arriba)}$$

2.9 Un solenoide de 30 cm de longitud está arrollado con dos capas de hilo. La interior tiene 300 y la externa 250 espiras. La corriente es de 3 A, con el mismo sentido en ambas capas. Cuál es la inducción magnética en un punto próximo al centro del solenoide.

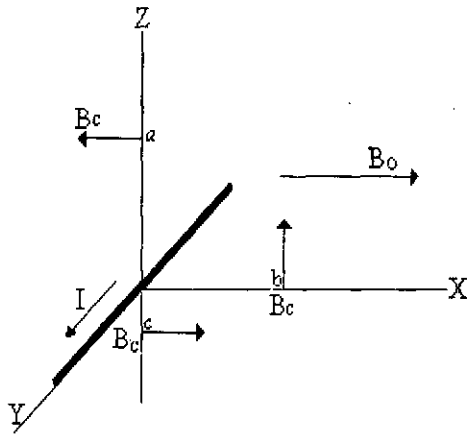
$$B = \mu_o n I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o N I}{l}$$

$$B = \frac{(4\pi x 10^{-7})(550)(3)}{0.3} = 6.91x10^{-3} \quad \frac{\text{Weber}}{\text{mt}^2}$$

2.10 Un hilo rectilíneo muy largo transporta corriente de 10 A a lo largo del eje -Y como se muestra en la figura. Un campo magnético uniforme, cuya densidad de flujo es $10^6$ Weber/m$^2$ está dirigido paralelamente al eje X. Cuál es el campo magnético resultante en los siguientes puntos: a) x=0, z=2 m. b) x=2 m, z=0. c) x=0, z=-0.5 m.

a) $$B = \frac{\mu_o I}{2\pi z} - 1x10^{-6}$$

$$B = \frac{(4\pi x 10^{-7})(10)}{(2\pi)(2)} - 1x10^{-6} = 0$$




b) $$B = \sqrt{B_c^2 + B_o^2} = \sqrt{\left(1x10^{-6}\right)^2 + \left(1x10^{-6}\right)^2} = 1.41x10^{-6} \quad T$$

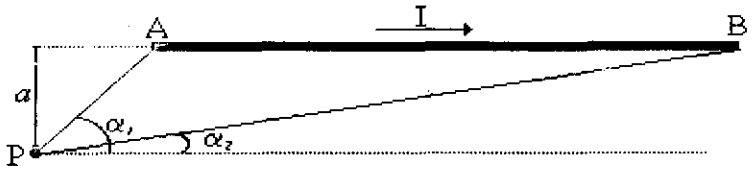
c) $$B = B_c + B_o$$

$$B = \frac{(4\pi x 10^{-7})(10)}{(2\pi)(0.5)} + 1x10^{-6} = 5x10^{-6} \quad T$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## PROBLEMAS PROPUESTOS

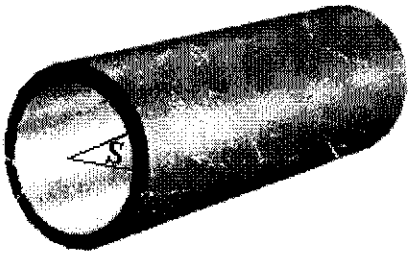
1- En la figura, AB es un alambre de longitud finita que transporta una corriente I. La distancia perpendicular de cualquier punto P a la línea es $a$. a) Determinar el campo magnético en P debido al alambre. b) Con el anterior resultado determine el campo si el alambre es infinito.




**R/ta:** a) $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)$ b) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

2- Un alambre de cobre largo lleva una corriente de 10 A. Calcular el flujo magnético por metro de alambre para una superficie plana S dentro del alambre como se muestra en la figura.

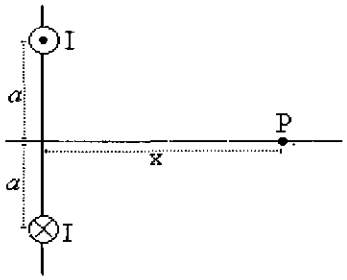
**R/ta:** $\phi = 1 \times 10^{-6}$ Weber/m




3- En la figura se muestran dos conductores largos y paralelos entre sí, por cada uno de los cuales circula una intensidad I, en sentidos opuestos. a) Determine el campo magnético en un punto cualquiera sobre el eje X en el punto P. b) Para qué valor de x alcanza su valor máximo.

**R/ta**: a) $B = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I a}{a^2 + x^2}$

b) $x = 0$



4- Una espira cuadrada de alambre, de lado $a$ lleva una corriente I. Hallar B en el centro de la espira.

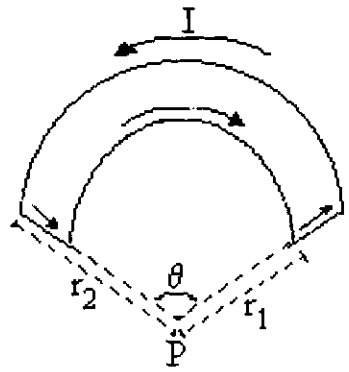
**R/ta:** $B = \dfrac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}$

5- En un condensador de láminas paralelas circulares de 1 cm de radio separadas 1 mm cuyo dieléctrico es aire, está entrando una carga por la placa superior y saliendo por la placa inferior a un ritmo de 5 A. a) Hallar la variación respecto al tiempo del campo eléctrico situado entre las placas. b) Hallar la corriente de desplazamiento. c) Hallar la densidad de corriente de desplazamiento entre las placas.

**R/ta:** a) $dE/dt = 1.8 \times 10^{15}$ Nw/Coul.seg
b) $I_d = 5$ A
c) $J = 1.6 \times 10^4$ A/m$^2$

6- Una espira lleva una corriente I como se muestra en la figura. Hallar el campo magnético en el punto P.

**R/ta:** $B = \dfrac{\mu_0 I \theta (r_2 - r_1)}{4\pi r_1 r_2}$

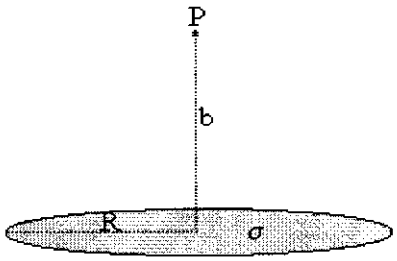



7- Calcular el campo magnético creado por un electrón que se mueve con una velocidad de $2 \times 10^8$ m/seg en un punto situado a $4 \times 10^{-8}$ m de distancia. a) En la dirección del movimiento. b) En la dirección que forma un ángulo de 30° con la velocidad. c) En la dirección perpendicular a la velocidad.

**R/ta:** a) $B = 0$ b) $B = 1 \times 10^{-3}$ T c) $B = 2 \times 10^{-3}$ T

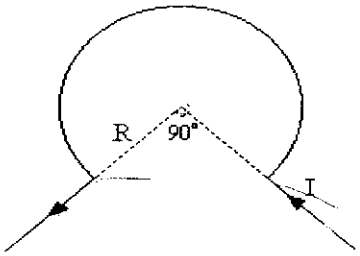
8- Un disco de radio R lleva una carga uniforme por unidad de área $\delta$ y gira con una velocidad angular $\omega$ en torno a su eje. Hallar el campo magnético en el punto P.

**R/ta:** $B = \frac{\mu_0 \delta \omega}{2} \left( \frac{R^2 + 2b^2}{\sqrt{R^2 + b^2}} - 2b \right)$




9- Por el alambre que se muestra en la figura de radio de 2 cm, circula una corriente de 40 A. Halle el campo magnético en el centro de la espira.

**R/ta:** $B = 9.4 \times 10^{-4}$ T , saliendo de la página.




10- Un alambre largo transporta una corriente de 20 A a lo largo del eje de un solenoide largo de 300 vueltas/m y con una corriente de 10 A. Determine el campo magnético total localizado a 3 mm del eje del solenoide.

**R/ta**: $B = 4 \times 10^{-3}$ T

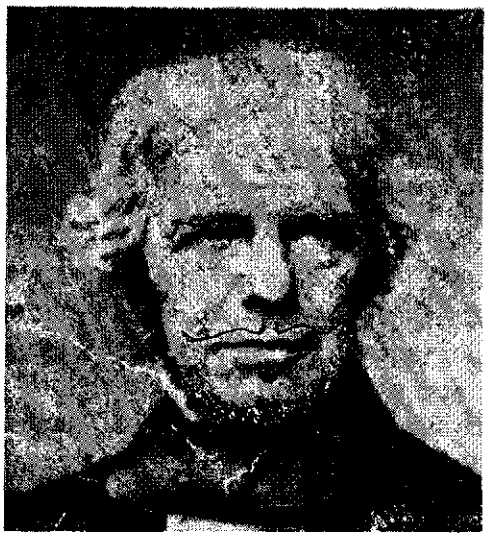
# CAPÍTULO 3

# LEY DE FARADAY

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## 3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se observó que existe una relación íntima entre la electricidad y el magnetismo. En este capítulo se presenta una ley física nueva, la Ley de Faraday. Establece que un flujo magnético variable en una región del espacio, induce un campo eléctrico en esta misma región a lo largo de una trayectoria cerrada.



Michel Faraday
(1791 – 1867)
Inglaterra

La ley de Faraday tiene aplicaciones tecnológicas trascendentes, es la responsable de la generación de energía eléctrica y desempeña un papel importante en la mayoría de los dispositivos eléctricos que utilizamos.

## 3.2 LEY DE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE FARADAY

La fuerza electromotriz (fem) inducida entre los terminales de una bobina es igual al valor negativo de la rapidez con que varía el flujo magnético que atraviesa dicha bobina. O sea:

$$V = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

donde, N es el número de espiras.

## 3.3 LEY DE LENZ

La ley de Lenz se utiliza para hallar el sentido de la fuerza electromotriz inducida. La corriente inducida aparece en un sentido tal que se opone a la causa que la produce. (Fig. 3.1).

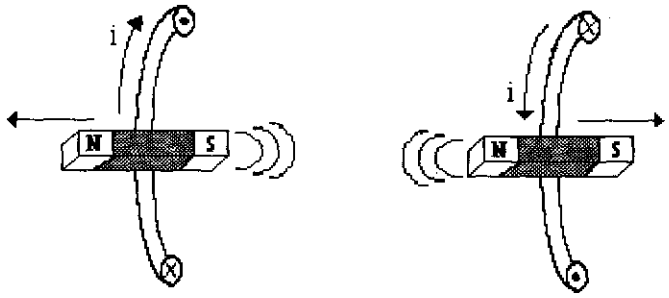



FIG. 3.1 SENTIDO DE LA CORRIENTE INDUCIDA DEBIDO A LA LEY DE LENZ

## 3.4 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA POR MOVIMIENTO

Supongamos un conductor que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ dentro de un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y constante, como se muestra en la Fig. 3.2. La fuerza electromotriz inducida en los extremos del conductor viene expresada por la siguiente ecuación.

$$V = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) . d\vec{l}$$

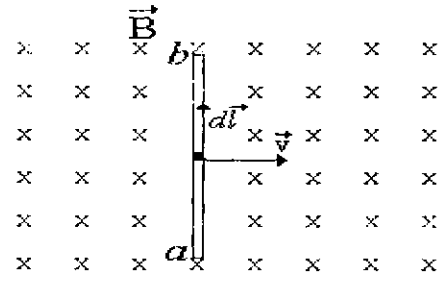



FIG. 3.2 FEM INDUCIDA POR MOVIMIENTO

## 3.5 CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE EN EL TIEMPO

Cuando un campo magnético varia en el tiempo en una región del espacio, se induce un campo eléctrico no conservativo como se muestra en la figura. Por lo tanto, según la ley de Faraday, se tiene

$$\oint_c \vec{E}.dl = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

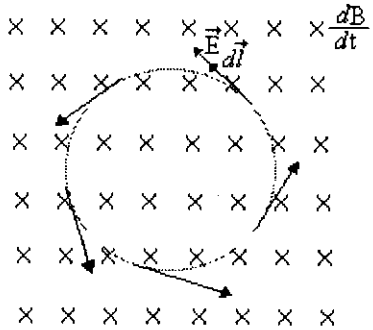
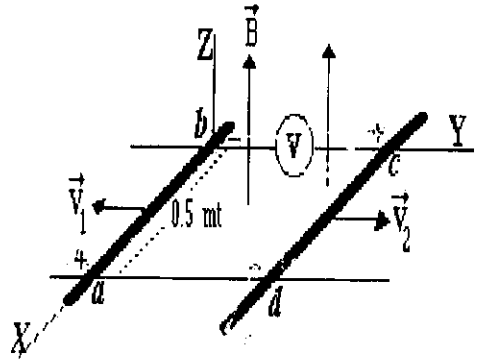



FIG. 3.3 DIRECCIÓN Y SENTIDO DEL CAMPO ELÉCTRICO INDUCIDO POR LA VARIACIÓN DE UN CAMPO MAGNÉTICO

## PROBLEMAS RESUELTOS

3.1 En la figura se muestran dos barras conductoras que se mueven hacia afuera con velocidades $\vec{v}_1 = -12.5\,\hat{j}$ m/seg y $\vec{v}_2 = 8\,\hat{j}$ m/seg en un campo magnético $\vec{B} = 0.35\,\hat{k}$ T. halle el voltaje de b respecto de c.




$$V_{ba} = -\int_a^b (\vec{v}_1 \times \vec{B})\,d\vec{l}$$

$$V_{ba} = \int_a^b (4.38)\,dx = \int_0^{0.5} (4.38)\,dx = 2.18 \text{ V}$$

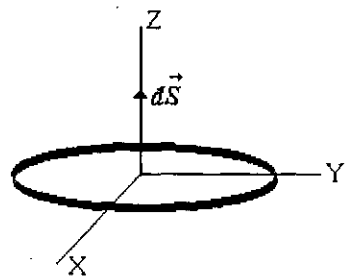
$$V_{cd} = -\int_c^d (\vec{v}_2 \times \vec{B})\,d\vec{l}$$

$$V_{cd} = -\int_a^b (8\vec{j} \times 0.35\vec{k})\,dx\,\hat{i} = \int_0^{0.5} (2.8)\,dx = -1.4 \quad \text{V}$$

$$V - V_{cd} + V_{da} - V_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = V_{cd} - V_{da} + V_{ab}$$

$$V = -1.4 - 0 + (-2.18) = -3.58 \quad \text{V}$$

3.2 La espira conductora circular que aparece en la figura, yace en el plano $z = 0$, tiene un radio de 0.1 m y una resistencia de 5 Ω. El campo magnético viene dado por $\vec{B} = 0.2\,\text{sen}(10^3\,t)\,\hat{K}$ T. Determine la corriente por la espira.




$$\Phi = \int_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\Phi = \int \left(0.2\,\text{Sen}10^3\,t\right)\hat{k}.dS\hat{k}$$

$$\Phi = \left(0.2\,\text{Sen}10^3\,t\right)\pi\,(0.1)^2 = 6.28\,x\,10^{-3}\,\text{Sen}\left(10^3\,t\right) \quad \text{Weber}$$

$$V = -N\frac{d\Phi}{dt} = -(1)\left(6.28x10^{-3}\right)\left(10^3\right)\text{Cos}10^3\,t = -6.28\,\text{Cos}10^3\,t \quad V$$

$$i = \frac{V}{R} = -\frac{6.28\,\text{Cos}10^3\,t}{5} = -1.25\,\text{Cos}10^3\,t \quad A$$

3.3 Una bobina consta de 200 espiras de alambre enrolladas sobre el perímetro de una estructura cuadrada cuyo lado mide 18 cm. Cada espira tiene la misma área, igual a la de la estructura, y la resistencia total de la bobina es de 2 Ω. Se aplica un campo magnético uniforme y perpendicular al plano de la bobina. Si el campo magnético cambia linealmente de 0 a 0.5 weber/m² en un tiempo de 0.8 seg. a) Determine la magnitud de la fem inducida en la bobina. b) Cuál es la magnitud de la corriente inducida en la bobina debida al cambio del flujo.

$$A = (0.18)^2 = 0.0324 \quad m^2$$

a)

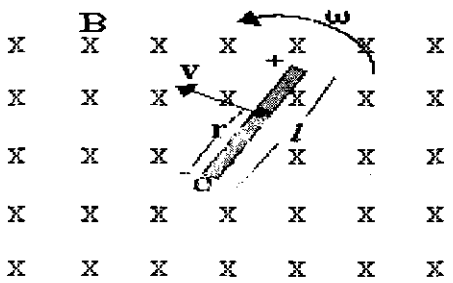
$$\Phi_1 = 0\,,\ \Phi_2 = (0.5)(0.0324) = 0.0162 \quad \text{Weber}$$

$$V = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{(200)(0.0162-0)}{(0.8-0)} = -4.05 \quad V$$

b) $$i = \frac{V}{R} = -\frac{4.05}{2} = -2.03\ A$$

3.4 Una barra conductora de longitud L gira con una velocidad angular ω constante alrededor de un pivote fijo en un extremo. Un campo magnético uniforme está dirigido perpendicularmente al plano de rotación, como se muestra en la figura. Determinar la fem inducida entre los extremos de la barra y la polaridad.

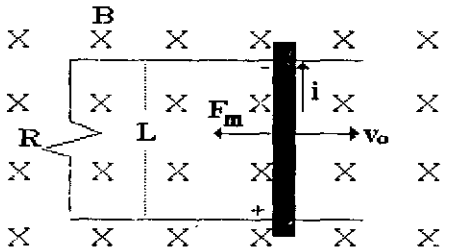
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES




$$V = vlB \Rightarrow dV = vBdr$$

$$V = \int_0^L vBdr = \int_0^L \omega r B\, dr = \frac{1}{2}\omega BL^2$$

3.5 Una barra de masa m y longitud L se mueve sobre dos rieles paralelos lisos de resistencia R en presencia de un campo magnético B uniforme como se muestra en la figura. Se imprime a la barra una velocidad inicial $v_o$ hacia la derecha y después se libera. Determine la velocidad de la barra en función del tiempo y la corriente inducida.



$$-F = ma$$

$$-iBL = m\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

$$i = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{vLB}{R} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$-\frac{vL^2B^2}{R} = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{L^2B^2}{mR}dt$$

$$Ln\left(\frac{v}{v_o}\right) = -\frac{L^2B^2}{mR}t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v}{v_o}\right) = e^{-\frac{L^2B^2}{mR}t}$$

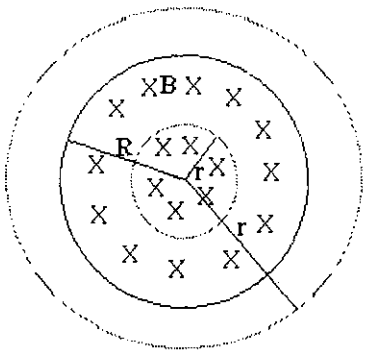
haciendo, $\tau = \dfrac{mR}{L^2B^2} \quad \Rightarrow \quad v = v_o e^{-\frac{t}{\tau}}$

Reemplazando en la expresión (2)

$$i = \frac{LB}{R} \; v_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3.6 En una región circular de radio R existe un campo magnético que varía según dB/dt. Determine el campo eléctrico inducido para: a) r < R. b) r > R.

a)




$$\oint_c \vec{E}.d\vec{l} = -N\frac{d\varphi}{dt}$$

$$El = -\frac{d(BA)}{dt} = -A\frac{dB}{dt}$$

$$E2\pi r = -A\frac{dB}{dt} = -\pi r^2\frac{dB}{dt}$$

$$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{dB}{dt}\right)r$$

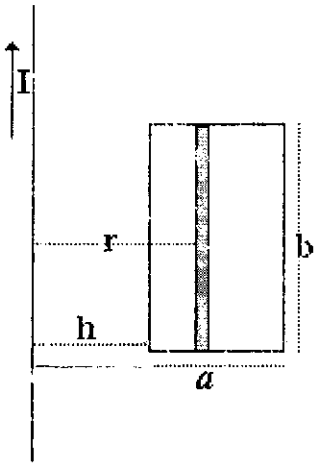
b) $E\,2\pi r = -\pi R^2 \dfrac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad E = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dB}{dt}\right)\dfrac{R^2}{r}$

3.7 Una barra de metal de 1 m cae libremente en posición horizontal con sus extremos indicando el Este y Oeste. Halle la diferencia de potencial que existe entre sus extremos cuando ha caído 20 m. La componente horizontal del campo magnético terrestre es $1.7 \times 10^{-5}$ Weber/m$^2$.

$$v^2 = v_o^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{-2gh} = \sqrt{-(2)(9.8)(-20)} = -19.7 \quad \frac{m}{seg}$$

$$V = Blv = (19.7)\left(1.7\times10^{-5}\right)(1) = 33.5\times10^{-5} \quad V$$

3.8 Una corriente I de 20 A fluye por un alambre recto situado en las cercanías de una espira rectangular, como se muestra en la figura. Si la corriente se suspende y llega a cero en 0.02 seg. Halle la fem inducida en la espira y la dirección de la corriente inducida. Los datos son: h = 10 cm, $a$ = 20 cm, b = 30 cm y N = 1.




$$V = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

$$d\Phi = \frac{\mu_o I}{2\pi r} b\,dr$$

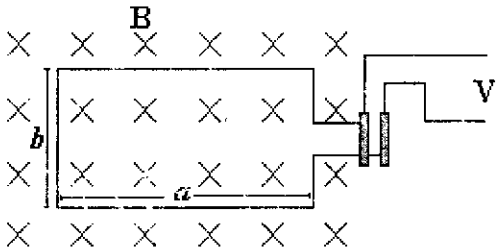
$$\Phi = \int_h^{h+a} \frac{\mu_o I b}{2\pi r} dr = \frac{\mu_o I b}{2\pi} Ln\left(\frac{h+a}{h}\right)$$

$$\Phi = 131\times10^{-6} \quad \text{Weber}$$

$$V = -(1)\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\left(1.31\times10^{-6} - 0\right)}{0.02 - 0}$$

$$V = -6.5\times10^{-5} \quad V$$

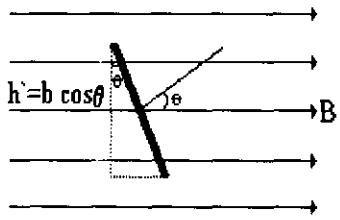
3.9 Una bobina rectangular de N vueltas de longitud $a$ y anchura b gira con una frecuencia f en un campo magnético B uniforme, como se muestra en la bobina (principio del generador eléctrico). Determinar la fem inducida en la bobina.




$$V = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = BA \quad \therefore A = ha$$

$$\Phi = Bha \quad \therefore \quad h = b\cos\theta$$




$$\Phi = BabCos\theta \quad \therefore \quad \theta = \omega t$$

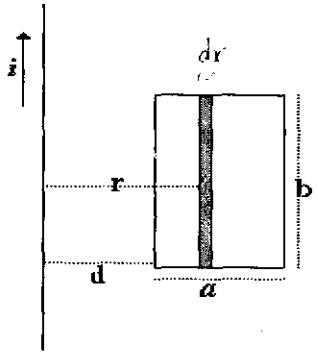
$$\Phi = BACos\omega t$$

$$V = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d(BACos\omega t)}{dt}$$

$$V = -NBA(-\omega Sen\omega t)$$

$$V = \omega NBASen\omega t$$

3.10 Se coloca una espira rectangular de alambre cerca de un conductor largo y recto en el que la corriente aumenta linealmente con el tiempo de acuerdo con $i = \alpha t$. Determine la fem inducida en la espira y el sentido de la corriente que se induce en la espira.




$$V = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

$$d\Phi = B\,dA \quad \therefore \quad dA = b\,dr$$

$$d\Phi = \frac{\mu_o I}{2\pi r}b\,dr$$

$$\Phi = \frac{\mu_o Ib}{2\pi}\int_d^{a+d}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_o Ib}{2\pi}Ln\left(\frac{a+d}{d}\right)$$

$$V = -(1)\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_o Ib}{2\pi}Ln\left(\frac{a+d}{d}\right)\right] = -\frac{\mu_o b}{2\pi}Ln\left(\frac{a+d}{d}\right)\frac{d(\alpha t)}{dt}$$

$$V = \frac{\mu_o \alpha b}{2\pi}Ln\left(\frac{a+d}{d}\right)$$

La corriente inducida tiene dirección antihoraria.

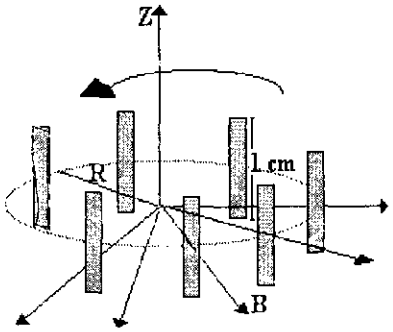
## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Un área de 0.65 $m^2$ en el plano z=0 está encerrada por un filamento conductor. Halle la fem inducida sabiendo que: $\vec{B}=0.035\cos 10^3 t\hat{j}+0.035\cos 10^3 t\hat{k}$ T

**R/ta** : V = 23 Sen $10^3$ t V.

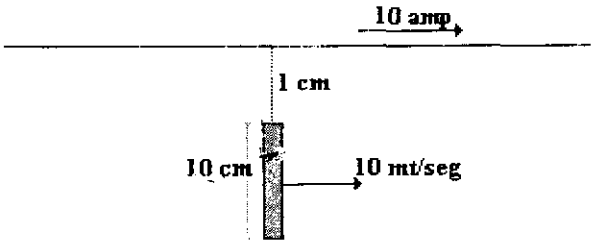
2- Un conductor de longitud 1 cm es paralelo al eje Z y rota a un radio de 25 cm a 1200 rpm. Determine la fem inducida si el campo magnético radial está dado por: $\vec{B}=0.5\,\hat{u}_r$ T.

**R/ta :** V = - 0.15 V.



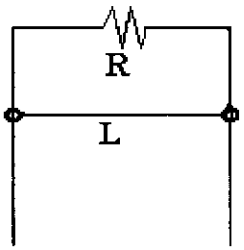

3- En la figura se presenta un alambre perpendicular a otro alambre largo y recto. El primer alambre se mueve en forma paralela al segundo con una velocidad de 10 m/seg en la dirección en que fluye una corriente de 10 A en éste último. Determinar la fem inducida en los extremos del alambre y su polaridad.

**R/ta :** V = 4.6 x $10^{-5}$ V.




4- Un conductor de longitud L y masa m puede deslizarse en un par de guías metálicas verticales conectadas a una resistencia R, como se muestra en la figura. La fricción y la resistencia del conductor y de las guías son despreciables. Hay un campo magnético uniforme y horizontal normal al plano de la página y dirigido hacia afuera. Determine la velocidad límite final de caída bajo la acción gravitatoria.

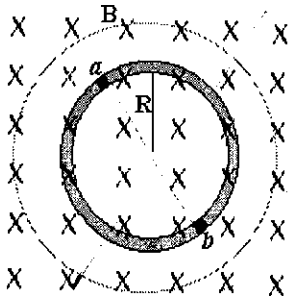
**R/ta :** $v = \frac{mgR}{B^2L^2}$




UNIVERSIDAD NACIONAL
BIBLIOTECA
MANIZALES

5- El campo magnético B en todos los círculos de trazos de la figura es igual a 0.5 T, entrando a la página y disminuyendo a razón de 0.1 T/seg. a) Cuál es la dirección y sentido de las líneas de fuerza del campo eléctrico inducido en la espira. b) Cuál es el valor y dirección del campo en un punto cualquiera de la espira circular de radio 10 cm y cuál es la fem inducida de la espira. c) Cuál es la intensidad de la corriente de la espira, si su resistencia es de 2 Ω. d) Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y b de la espira. e) Si se corta el anillo en cierto punto y se separan ligeramente los extremos. Cuál será la fem inducida entre dichos extremos.

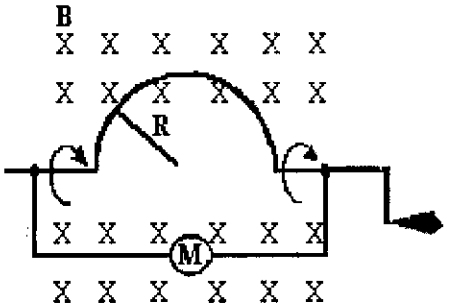
**R/ta :**
a) Sentido horario
b) 0.005 v/m
c) 3.14 mV
d) 1.57 mV
e) 0
f) 3.14 mV




6- Un alambre rígido doblado en un semicírculo de radio R como se muestra en la figura, se hace girar con una frecuencia f. Determine el voltaje inducido y la corriente inducida si el medidor M tiene una resistencia $R_M$ y el resto del circuito tiene una resistencia insignificante.

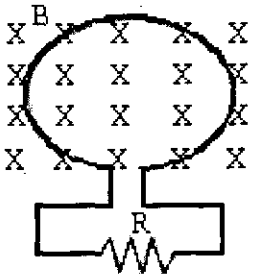
**R/ta :** $V_M = \pi B R^2 f$

$I_M = \frac{\pi^2 B R^2 f}{R_M}$



7- En la figura, el flujo magnético que pasa por la espira perpendicularmente al plano de la espira y con sentido entrando a la página, está variando de acuerdo con la siguiente relación: $\Phi = 6t^2 + 7t + 1$, donde $\Phi$ está dado en Weber y t en seg. a) Cuál es la magnitud de la fem inducida en la espira cuando t = 2 seg. b) Cuál es la dirección de la corriente que pasa por R.

**R/ta :** a) $3.1 \times 10^{-2}$ V
b) De izquierda a derecha

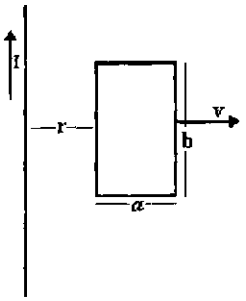



8- Hallar la fem inducida en los extremos de una varilla de 1 m de longitud que se desplaza con una velocidad de $\vec{v} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ m/seg en un campo magnético de $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 10\hat{k}$ T. La varilla se desplaza formando un ángulo de 45° con respecto al eje X.

**R/ta :** $7\sqrt{2}$ V

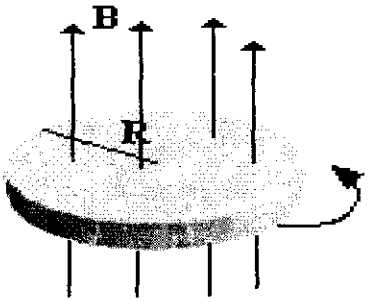
9- La espira rectangular de la figura se mueve con una velocidad v alejándose de un conductor que tiene una corriente I. Hallar la fem inducida en la espira.

**R/ta :** $V = \dfrac{\mu_0 I a b v}{2\pi (r + vt)(r + a + vt)}$




10- El disco que se muestra en la figura, tiene un radio de 15 cm y está girando a 2400 rpm., en un campo magnético uniforme de 2000 Gauss. Hallar la fem inducida entre el centro y el borde del disco

**R/ta : - 0.565 V.**



# CAPÍTULO 4

# INDUCTANCIA

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Una bobina o inductor es un elemento de circuito que almacena energía en el campo magnético en el interior de la bobina por la cual circula una corriente. Así como un condensador se caracteriza por su capacitancia, el inductor se caracteriza por su **inductancia**, la cual depende de la geometría de su construcción y describe su comportamiento en un circuito.

Joseph Henry
(1797 – 1878)
USA

## 4.2 AUTOINDUCCIÓN

Es el fenómeno que se produce cuando se induce una fem en una bobina si la corriente que circula por esta cambia con el tiempo. (Fig. 4.1).

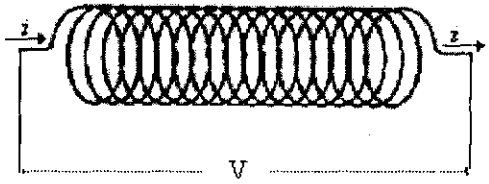



FIG. 4.1 SI LA CORRIENTE CAMBIA EN LA BOBINA SE INDUCE UNA FEM ENTRE SUS EXTREMOS.

Para hallar la fem autoinducida en la bobina se utiliza la ley de Faraday y se llega a la siguiente expresión:

$$V = -L\frac{di}{dt}$$

Donde,

L: Coeficiente de autoinducción llamada también ***Inductancia*** de la bobina.

La inductancia L para un conductor se puede calcular con la expresión:

$$L = \frac{N\Phi}{i}$$

Siendo N el número de espiras para el caso de una bobina, $\phi$ es el flujo magnético e $i$, la corriente que circula por el conductor.

El símbolo eléctrico de la inductancia es:

FIG. 4.2 SÍMBOLO ELÉCTRICO DE LA INDUCTANCIA

La unidad de inductancia es el HENRY (H) que se define como la inductancia de una bobina cuando en ella varia la corriente a razón de un amperio en un segundo produciéndose una fem autoinducida de un voltio.

## 4.3 INDUCTANCIA DE UNA BOBINA CON NÚCLEO DE AIRE

La inductancia de una bobina de longitud l, área de sección transversal A y con un número de espiras por unidad de longitud $n$ como se muestra en la figura 4.3, y en la que además el diámetro de la bobina es muy pequeño con respecto a su longitud viene dada por la expresión:

$$L = \mu_0 n^2 l A$$

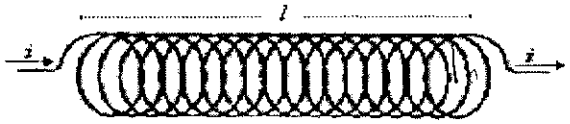



FIG. 4.3 BOBINA CON NÚCLEO DE AIRE

## 4.4 INDUCTANCIAS EN SERIE

Cuando se tiene un sistema de bobinas conectadas en serie lo suficientemente lejos entre ellas para que no haya interacción de flujos como se muestra en la figura 4.4.

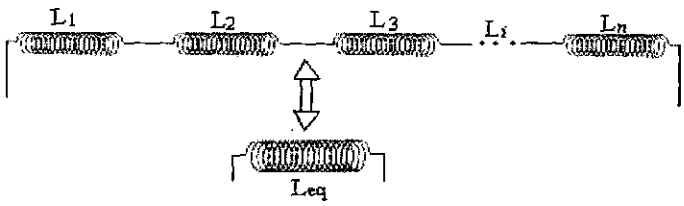



FIG. 4.4 UN SISTEMA DE INDUCTANCIAS EN SERIE SE PUEDE REEMPLAZAR POR UNA SOLA INDUCTACIA EQUIVALENTE

Este sistema se puede reemplazar por una sola bobina cuya inductancia equivalente viene dada por la siguiente expresión:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$$

## 4.5 INDUCTANCIAS EN PARALELO

Cuando se tiene un sistema de bobinas conectadas en paralelo lo suficientemente lejos entre ellas para que no haya una interacción de flujos como se muestra en la figura 4.5.

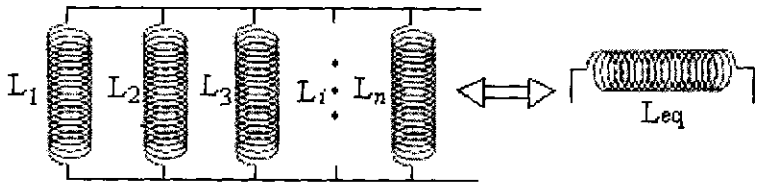



FIG. 4.5 UN SISTEMA DE INDUCTANCIAS EN PARALELO SE PUEDE REEMPLAZAR POR UNA SOLA INDUCTANCIA EQUIVALENTE

Este sistema se puede reemplazar por una bobina cuya inductancia equivalente viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + ... + \frac{1}{L_n}$$

## 4.6 CIRCUITO RL

Si se tiene el circuito que se muestra en la figura 4.6.

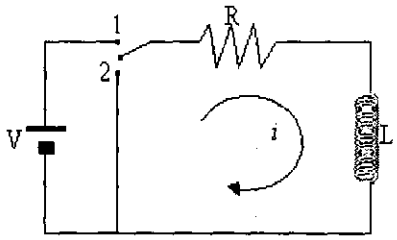



FIG. 4.6 CIRCUITO RL

Cuando el interruptor se encuentra en la posición 1, se alcanzan los siguientes resultados:

$$i=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\left(\frac{R}{L}t\right)}\right)$$

$$V_L=-Ve^{-\left(\frac{R}{L}t\right)}$$

El tiempo $t = \tau = L/R$, llamada constante de tiempo inductivo del circuito RL resulta ser el tiempo que tarda la bobina en disminuir su voltaje a un 37% del voltaje máximo.

Cuando el interruptor se coloca en la posición 2, como se muestra en la Fig. 4.7.

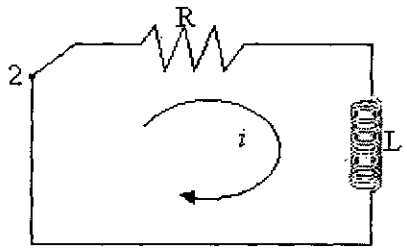



FIG. 4.7 EL INTERRUPTOR SE ENCUENTRA EN LA POSICIÓN 2, ES DECIR, SE DESCONECTA DE LA FUENTE

Resolviendo el circuito se encuentran los siguientes valores para la corriente y voltaje a través de la inductancia:

$$i=\frac{V}{R}e^{-\left(\frac{R}{L}t\right)}$$

$$V_L=Ve^{-\left(\frac{R}{L}t\right)}$$

## 4.7 ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

La energía almacenada en el campo magnético dentro de una bobina de inductancia L y por la cual circula una corriente I, se calcula por la expresión:

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

## 4.8 DENSIDAD DE ENERGÍA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Si en una región del espacio vacío existe un campo magnético B, en dicha región hay una densidad de energía almacenada que se puede expresar por:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

## 4.9 INDUCCIÓN MÚTUA

Es la generación de una fem inducida en un circuito debido a los cambios de flujo de otro circuito cercano al primero.

Cuando dos bobinas se encuentran cercanas entre sí de tal manera que sus flujos magnéticos interaccionan como se muestra en la figura 4.8, se dice que están acopladas magnéticamente y por lo tanto se produce en ellas una ***Inducción mutua.***

La fem inducida en cada una de las bobinas que se encuentran acopladas magnéticamente se calcula con las siguientes expresiones:

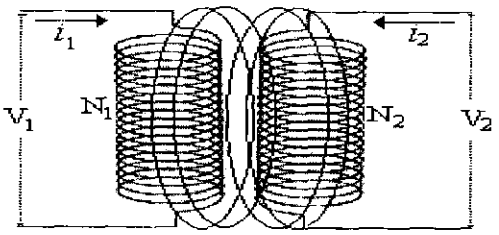



FIG. 4.8 BOBINAS ACOPLADAS MAGNÉTICAMENTE

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2' = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

$M_{12}$ es la inductancia mutua de la bobina 1 debido a la bobina 2

$M_{21}$ es la inductancia mutua de la bobina 2 debido a la bobina 1

Si las bobinas tienen la misma área de sección transversal y la misma longitud se tiene, $M_{12} = M_{21} = M$

Bajo estas condiciones se puede obtener la inductancia mutua con la siguiente expresión:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

## 4.10 TRANSFORMADOR

Es un dispositivo compuesto básicamente por dos bobinas acopladas magnéticamente por medio de un núcleo como se muestra en la figura 4.9.

La bobina por donde entra la energía se le llama *primario* y la bobina por donde sale la energía se le llama *secundario*.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

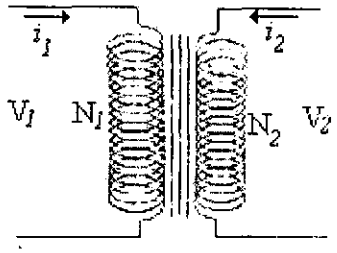



FIG. 4.9 EL TRANSFORMADOR

La razón de transformación del transformador es:

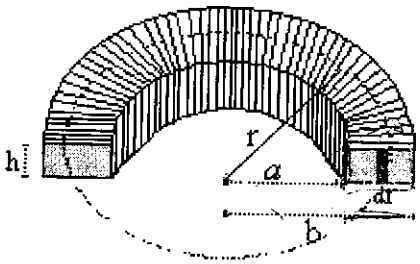
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

La potencia de entrada en el transformador es aproximadamente igual a la potencia de salida, por lo tanto,

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

4.1 Determine la inductancia de un toroide de N espiras de sección transversal rectangular como se muestra en la figura.




$$L = \frac{N\Phi}{I} \qquad (1)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}.d\vec{S} = \int B.dS \qquad (2)$$

Para hallar B se aplica la ley de Ampere a la trayectoria circular punteada,

$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o I_n \quad , \quad I_n = Ni$$

$$B2\pi r = \mu_o Ni \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_o Ni}{2\pi r}$$

Reemplazando en la expresión (2)

$$\Phi = \int \frac{\mu_o Ni}{2\pi r} dS \quad \therefore \quad dS = h\,dr$$

$$\Phi = \int \frac{\mu_o Ni}{2\pi r} h\,dr = \frac{\mu_o Nih}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_o Nih}{2\pi} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Reemplazando en la expresión (1),

$$L = \frac{N}{i}\frac{\mu_o Nih}{2\pi} Ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_o N^2 h}{2\pi} Ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4.2 Una inductancia de 3 H se conecta en serie con una resistencia de 10 Ω, y se aplica repentinamente una fem de 3 voltios al circuito. Para un tiempo igual a la constante de tiempo después de cerrar el interruptor. Determine: a) Con qué rapidez está entregando energía la batería. b) Con qué rapidez se desarrolla energía calorífica en la resistencia. c) Con qué rapidez se está almacenando energía en el campo magnético.

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad \text{para}: t = \tau = \frac{L}{R}$$

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{3}{10}\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}189\ A$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{R}{L}\right) = \frac{V}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Para $t = \tau = \frac{L}{R}$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{L}e^{-1} = \frac{3}{3}(0.368) = 0.368 \quad \frac{A}{seg}$$

a) $P_f = Vi = (3)(0.189) = 0.568$ Watts

b) $P_R = i^2 R = (0.189)^2(10) = 0.357$ Watts

c) $P_L = V_L i = L\frac{di}{dt}i = (3)(0.368)(0.189) = 0.21$ Watts

4.3 Una bobina toroidal delgada tiene 15 cm de radio medio y 4 cm² de área de sección transversal. Su devanado primario es de 75 vueltas/cm, el secundario tiene 40 vueltas/cm. Determine el valor de la inductancia mutua. Suponga que el secundario se enrolla directamente sobre el devanado primario.

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \qquad \therefore \qquad \Phi_{21} = BA$$

$$B = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r}A = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{2\pi r}$$

$$N_1 = n_1 l \quad \Rightarrow \quad N_1 = n_1 2\pi r \quad , \quad N_2 = n_2 2\pi r$$

$$M = \frac{\mu_o n_1 n_2 4\pi^2 r^2 A}{2\pi r} = 2\mu_o \pi r n_1 n_2 A$$

$$M = (2)(4\pi x 10^{-7})(\pi)(0.15)\left(\frac{75}{0.01}\right)\left(\frac{40}{0.01}\right)(4x10^{-4}) = 14 \quad mH$$

4.4 Un solenoide de longitud 0.5 m tiene 500 espiras y el área de su sección transversal es $3 \times 10^{-3}$ m$^2$. Una segunda bobina que tiene 8 espiras está devanada alrededor del centro de la primera. Determine la inductancia mutua del sistema.

$$l = 0.5 \quad m \quad , \quad N_1 = 500 \quad \text{espiras} \quad , \quad A = 3x10^{-3} \quad m^2$$

$$N_2 = 8 \quad \text{espiras}$$

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \quad , \quad \Phi_{21} = B_1 A \quad \therefore \quad B_1 = \frac{\mu_o N_1 i_1}{l}$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_o N_1 i_1 A}{l}$$

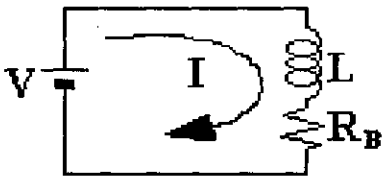
$$M = \frac{\mu_o N_1 i_1 A N_2}{l i_1} = \frac{\mu_o N_1 N_2 A}{l}$$

$$M = \frac{(4\pi x 10^{-7})(500)(8)(3x10^{-3})}{0.5} = 3x10^{-5} \quad H$$

4.5 La corriente que circula por una bobina de inductancia desconocida es de 3.5 A, cuando se mantiene a través de una diferencia de potencial de 2.8 voltios. Cuando se conecta en un circuito, con ayuda de un osciloscopio se observa que la diferencia de potencial a través de una resistencia de 1 Ω colocada en serie con la bobina se eleva a 90% de su valor máximo en $4.2 \times 10^{-3}$ seg. Cuál es la inductancia de la bobina.

$$R_B = \frac{V}{i} = \frac{2.8}{3.5} = 0.8 \quad \Omega$$

$$i = \frac{V}{R_t}\left(1 - e^{-\frac{R_t}{L}t}\right)$$



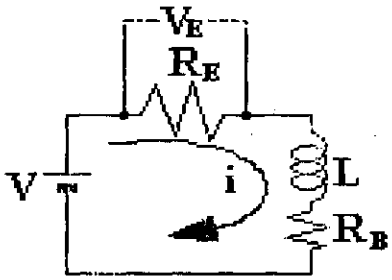

Para hallar $V_E$:

$$iR_E = \frac{VR_E}{R_t}\left(1 - e^{-\frac{R_t}{L}t}\right)$$

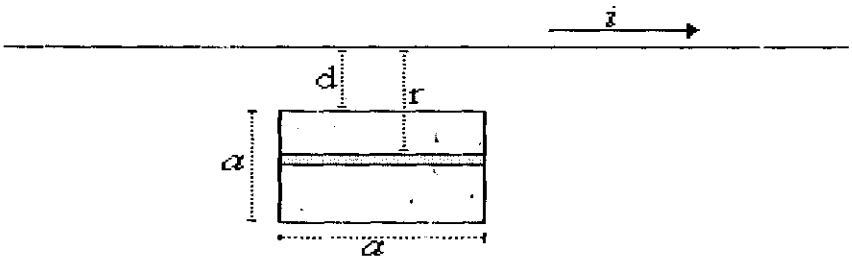
$$V_E = \frac{VR_E}{R_t}\left(1 - e^{-\frac{R_t}{L}t}\right)$$

$$0.9 = 1 - e^{-\frac{R_t}{L}t} \Rightarrow e^{-\frac{R_t}{L}t} = 0.1 \Rightarrow L = \frac{R_t t}{2.3}$$

$$L = \frac{(1.8)(4.2 \times 10^{-3})}{2.3} = 3.3 \times 10^{-3} \quad H$$




4.6 En la figura se muestra un alambre recto por el que circula una corriente I, y una espira cuadrada de alambre, con uno de sus lados paralelo al alambre recto y a una distancia d de él. Calcule la inductancia mutua del sistema.



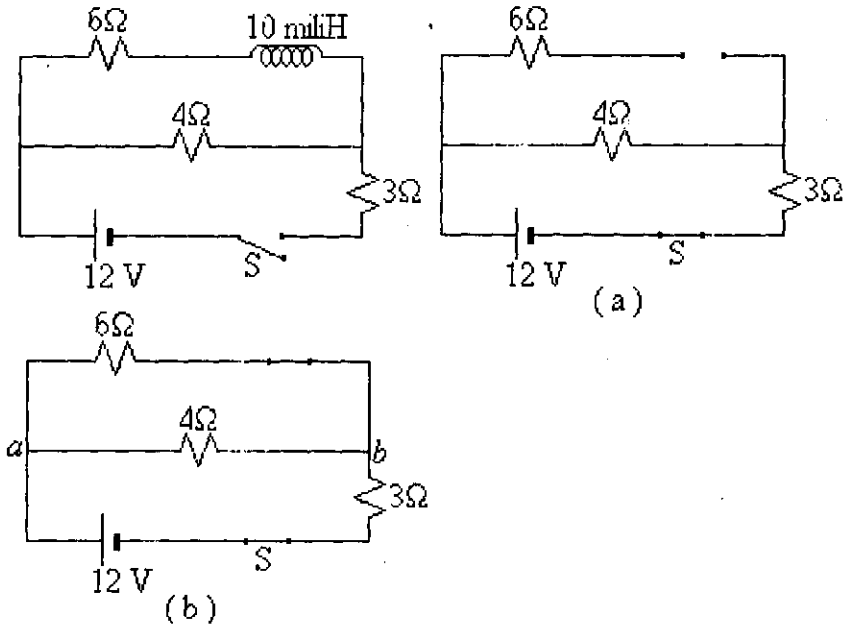
$$M = \frac{N\Phi_{21}}{i}$$

$$d\Phi_{21} = B\,dA = \frac{\mu_o i}{2\pi r} a\,dr$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_o ia}{2\pi}\int_d^{d+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_o ia}{2\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

$$M = \frac{N\mu_o ia}{2\pi i}\mathrm{Ln}\left(\frac{d+a}{d}\right) = \frac{\mu_o a}{2\pi}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{a}{d}\right)$$

4.7 a) Cuales son las corrientes a través de cada elemento del circuito de la figura inmediatamente después de haber cerrado el interruptor. b) Cuales son las corrientes después de un tiempo largo.




a) Para t = 0:

$i_6 = i_1 = 0$

$i_4 = \frac{12}{7} = 1.7 \quad A$

$i_3 = i_4 = 1.7 \quad A$

b) Para $t \to \infty$

$i_3 = i = 2.2 \quad A$

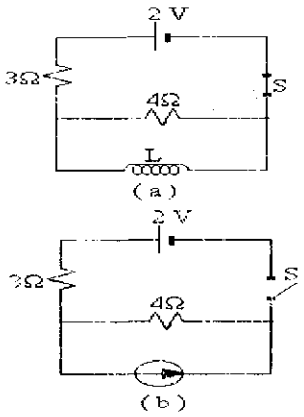
$V_{ab} = (2.2)(2.4) = 5.3 \quad V$

$i_4 = \frac{V_{ab}}{4} = \frac{5.3}{4} = 1.3 \quad A$

$i_6 = \frac{V_{ab}}{6} = \frac{5.3}{6} = 0.9 \quad A$

$i_L = i_6 = 0.9 \quad A$

4.8 El interruptor del circuito que se muestra en la figura se ha cerrado hace un tiempo muy largo. a) Cuál es la corriente en cada elemento del circuito. b) Cuando se abre el interruptor, la corriente en el inductor baja en un factor 3, en 5 mili seg. Cuál es el valor de L. c) Cuál es la corriente por cada elemento a los 10 mili seg.




a) $i_3 = i_L = \frac{2}{3} \quad A$

$i_4 = 0$

b) $i = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$

$\frac{1}{3}\frac{V}{R} = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = e^{-\frac{R}{L}t}$

$$L = \frac{Rt}{1.0986} = \frac{(4)(5 \times 10^{-3})}{1.0986} = 18.2 \text{ mH}$$

c) $i_3 = 0$

$$i_4 = I_o e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{2}{3} e^{-\left(\frac{4}{18.2 \times 10^{-3}}\right)\left(10 \times 10^{-3}\right)} = 74 \quad \text{mA}$$

$$i_L = i_4 = 74 \quad \text{mA}$$

4.9 La corriente en un inductor de 10 H varía con el tiempo según: $i = 2t^2 - 3t$, donde i está en amperios y t en seg. a) Calcule la magnitud de la fem inducida en t=0 y t=3 seg. b) Para que valor de t la fem inducida será cero.

a) $V_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow V_L = 10(4t - 3)$

Para $t = 0 \Rightarrow V_L = 30 \quad V$

Para $t = 3$ seg $\Rightarrow V_L = 10[4(3) - 3] = 90 \quad V$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

b) $V_L = 10(4t - 3)$ si $V_L = 0$

$0 = (4t - 3) \Rightarrow t = \frac{3}{4}$ seg

4.10 Calcule la densidad de energía magnética almacenada cerca del centro de un solenoide devanado en forma estrecha con 1200 espiras/m, cuando la corriente en el solenoide es de 3 A.

$$u = \frac{B^2}{2\mu_o} \quad \therefore \quad B = \mu_o n I$$

$$B = \left(4\pi \times 10^{-7}\right)(1200)(3) = 0.00452 \quad T$$

$$u = \frac{(0.00452)^2}{2\left(4\pi \times 10^{-7}\right)} = 8.13 \quad \frac{\text{Joules}}{m^3}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Dos alambres paralelos de igual radio $a$ cuyos centros están separados una distancia d llevan corrientes iguales en sentidos contrarios. Sin tomar en cuenta el flujo que existe entre los alambres, determine la inductancia para un tramo de longitud l para ese par de alambres.

**R/ta:** $L=\frac{\mu_o l}{\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{d-a}{a}\right)$

2- Una bobina con una inductancia de 2 H y una resistencia de 10 Ω se conecta de pronto con una batería de 100 V. Después de 0.1 seg de hacerse la conexión determine: a) La rapidez con que se está almacenando energía en el campo magnético. b) La rapidez con que se disipa energía en forma de calor en la resistencia. c) La rapidez con que está entregando energía la batería.

**R/ta:** a) 238.6 Watts b) 154.8 Watts c) 393.5 Watts

3- Una espira circular de alambre de radio R lleva una corriente I. Cuál es la energía en el centro de la espira.

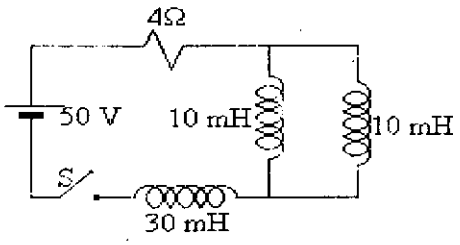
**R/ta:** $U=\frac{\mu_o I^2}{8R^2}$

4- Dos bobinas vecinas A y B tienen 300 y 600 espiras, respectivamente. Una corriente de 1.5 amp en A origina que $1.2 \times 10^{-4}$ weber pasen a través de A y $0.9 \times 10^{-4}$ weber a través de B. Determinar a) la inductancia de A , b) la inductancia mutua de A y B, c) la fem inducida en B cuando la corriente en A se interrumpe en 0.2 seg.

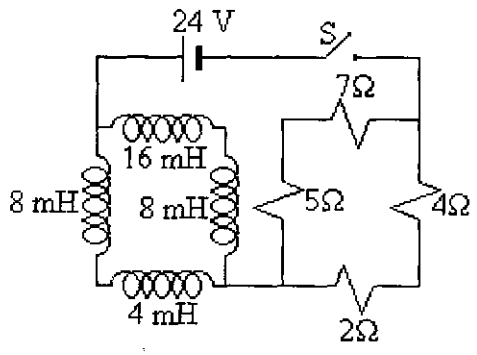
**R/ta:** a) 24 mH b) 36 mH c) 0.27 V

5- a) Determine la constante de tiempo del circuito que se muestra en la figura. b) Qué cantidad de energía hay almacenada en el inductor de 30 mH cuando la energía total almacenada en el circuito sea el 50% del valor máximo posible. (Desprecie la inductancia mutua entre las bobinas)

**R/ta:** a) 8.75 miliseg
b) U = 1.17 Joules



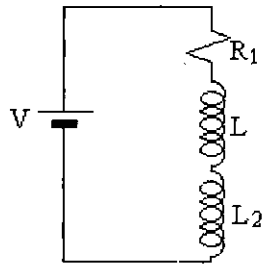
6- La batería del circuito que se muestra en la figura tiene una fem de 24 V. a) Qué corriente estará entregando la batería 1 miliseg después de que el interruptor se haya cerrado. b) Determine la diferencia de potencial a través de la resistencia de 5 Ω después de 3 miliseg de que el interruptor se cierre. Desprecie la inductancia mutua entre las bobinas.



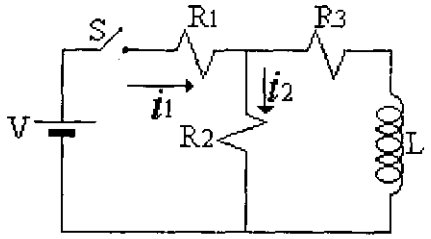

**R/ta:** a) $3 \times 10^{-3}$ A b) 0.015 V

7- En el circuito que se muestra en la figura, las dos bobinas están acopladas magnéticamente. Halle la inductancia equivalente.

**R/ta:** $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$




8- En el circuito que se muestra en la figura. Halle los valores de $i_1$ e $i_2$.




$V = 100$ V

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 20\ \Omega$

$R_3 = 30\ \Omega$

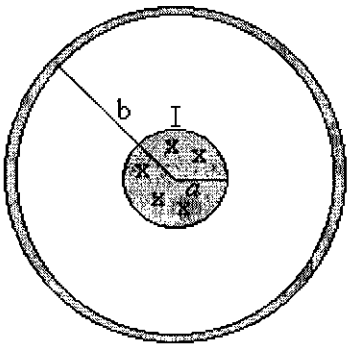
$L = 2$ H

a) Inmediatamente después de haber sido cerrado el interruptor S.
b) Para un tiempo largo después.
c) Inmediatamente después de que es abierto de nuevo el interruptor S.
d) Un tiempo largo después.

**R/ta:** a) $i_1 = i_2 = 3.33$ A. b) $i_1 = 4.55$ A, $i_2 = 2.73$ A.

c) $i_1 = 0$, $i_2 = 1.82$ A. d) $i_1 = i_2 = 0$

9- Un cable coaxial largo como se muestra en la figura, consta de dos conductores cilíndricos concéntricos con radios $a$ y b, donde b>>$a$. Su conductor central conduce una corriente estacionaria I, y el conductor exterior proporciona la trayectoria de retorno. a) Determine la energía total almacenada en el campo magnético para una longitud l del cable. b) Cuál es la inductancia para una longitud l del cable.




**R/ta:** a) $U = \frac{\mu_o I^2 l}{4\pi} \mathrm{Ln} \frac{b}{a}$ b) $L = \frac{\mu_o l}{2\pi} \mathrm{Ln} \frac{b}{a}$

10- Un alambre largo y recto de radio $a$, lleva una corriente total I distribuida uniformemente en su sección transversal. Determine la energía total magnética por unidad de longitud almacenada en el alambre y demuestre que es independiente del radio.

**R/ta:** $\frac{U}{l} = \frac{\mu_o I^2}{16\pi}$

# CAPÍTULO 5

# PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

## 5.1 INTRODUCCIÓN

El hecho de que un cuerpo tenga propiedades magnéticas se debe a que sus átomos poseen momentos de dipolos magnéticos. Estos dipolos magnéticos se deben a trayectorias de corriente asociadas al movimiento de los electrones dentro del átomo y al hecho de que el spin del electrón también tiene un momento de dipolo magnético.

Heinrich Rudolf Hertz
(1857 – 1894)
Alemania

## 5.2 CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN

En la Fig. 5.1(a), se muestra la sección transversal de un material magnético; cada cuadro representa el volumen que ocupa un sólo átomo. Las flechas alrededor de la periferia de cada cuadro indican la circulación de la corriente electrónica. Las corrientes a lo largo de cada frontera interna van en sentido contrario, por lo que se cancelan mutuamente. Pero las corrientes atómicas en la superficie del material no se cancelan produciéndose una corriente total llamada ***Corriente de magnetización superficial neta*** $I_m$, siendo esta corriente la fuente del magnetismo del material.

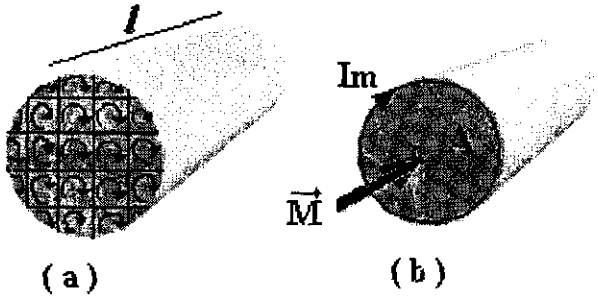



FIG. 5.1 A) SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN MATERIAL MAGNÉTICO, DONDE TODAS LAS CORRIENTES ATÓMICAS CIRCULAN EN LA MISMA DIRECCIÓN. B) TODAS LAS CORRIENTES ATÓMICAS SE PUEDEN SUSTITUIR POR UNA CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN NETA $I_m$. $\vec{M}$ REPRESENTA EL VECTOR DE MAGNETIZACIÓN.

El momento dipolar magnético total del material está dado por:

$$\mathbf{P}_m = I_m A$$

Donde, A es el área de la sección transversal del material.

## 5.3 VECTOR DE MAGNETIZACIÓN

El campo magnético de un material magnético puede expresarse en términos de un vector de Magnetización $\vec{M}$, definido como el momento de dipolo magnético por unidad de volumen del material.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{P}_m}{dV}$$

La dirección del vector $\vec{M}$ es la que se muestra en la Fig. 5.1(b), perpendicular al área de la sección transversal y orientado de acuerdo con la regla de la mano derecha.

## 5.4 LEY DE AMPERE EN MATERIALES MAGNÉTICOS

Cuando se tiene un cilindro magnético dentro de un solenoide largo que lleva una corriente I, ésta produce un campo magnético dentro del cilindro que lo magnetiza y da lugar en él una corriente superficial de magnetización en la misma dirección que I, como se muestra en la Fig. 5.2.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

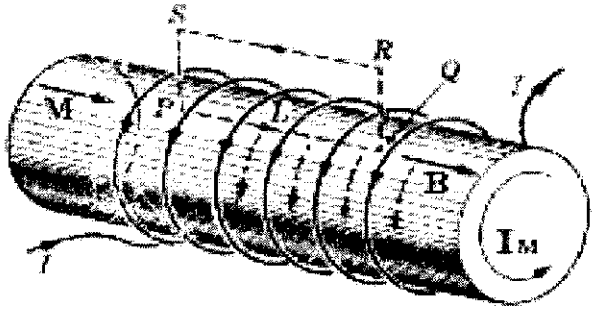



FIG. 5.2 CILINDRO MAGNÉTICO DENTRO DE UN SOLENOIDE

Aplicando la ley de Ampere a lo largo de la trayectoria cerrada PQRS, se tiene,

$$\oint_c \vec{H}.d\vec{l} = NI_c$$

Donde,

$\vec{H}$ : Intensidad magnética [ A/ m ]
N : Número de espiras
$I_c$ : Corriente de conducción por el solenoide

Siendo,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$$

## 5.5 SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA

En general para muchos materiales magnéticos, la magnetización es directamente proporcional a la intensidad magnética (H) siempre y cuando sus valores no sean excesivos. O sea:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Donde,

$\chi_m$ : Susceptibilidad magnética del material.

Los materiales que cumplen con la anterior relación se les llama ***Materiales magnéticos lineales.***

Con las expresiones

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Se tienen las siguientes relaciones:

$$\vec{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\vec{H}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\mu = \mu_o(1 + \chi_m)$$

La susceptibilidad magnética de algunos materiales magnéticos a temperatura ambiente es:

| MATERIAL | $\chi_m$ |
|---|---|
| Aluminio | $2.3 \times 10^{-5}$ |
| Bismuto | $-1.66 \times 10^{-5}$ |
| Cobre | $-0.98 \times 10^{-5}$ |
| Oro | $-3.6 \times 10^{-5}$ |
| Plomo | $-1.7 \times 10^{-5}$ |
| Magnesio | $1.2 \times 10^{-5}$ |
| Plata | $-2.6 \times 10^{-5}$ |
| Sodio | $-0.24 \times 10^{-5}$ |
| Tungsteno | $6.8 \times 10^{-5}$ |
| Agua | $-0.88 \times 10^{-5}$ |
| Hidrógeno | $-9.9 \times 10^{-9}$ |
| Oxígeno | $2.1 \times 10^{-6}$ |
| Hierro dulce | 5000 |

## 5.6 MATERIALES FERROMAGNETICOS

Los materiales ferromagnéticos como el hierro, níquel y cobalto son aquellos que presentan en sus dipolos atómicos magnéticos interacciones intensas haciendo que estos dipolos atómicos se puedan alinear sin necesidad de aplicar un campo magnético externo intenso. En otra forma, se puede decir que los materiales ferromagnéticos son aquellos que presentan susceptibilidades magnéticas muy grandes y positivas; y la permeabilidad absoluta es mucho mayor que la permeabilidad en el vacío.

Cuando la temperatura alcanza o excede el valor de una temperatura crítica, llamada temperatura ***Curie***, el material ferromagnético pierde su magnetización espontánea y se convierte en un material paramagnético.

La temperatura Curie para algunos materiales ferromagnéticos es:

| MATERIAL | $T_c$ [°K] |
|---|---|
| Hierro | 1043 |
| Cobalto | 1394 |
| Níquel | 631 |
| Gadolinio | 317 |
| $F_{e2}O_3$ | 893 |

En contraste con los materiales paramagnéticos, la magnetización de los materiales ferromagnéticos no es una función lineal del campo magnético aplicado; la susceptibilidad de estos materiales varía según la forma en que cambia el campo aplicado.

## 5.7 MATERIALES PARAMAGNÉTICOS

Son aquellos materiales en los cuales sus momentos de dipolos magnéticos atómicos tienden a alinearsen paralelamente a un campo magnético externo. La susceptibilidad magnética de estos materiales es positiva pero muy pequeña ( $0<\chi_m<<1$ ) y la permeabilidad absoluta es mayor que la permeabilidad en el vacío.

La influencia orientadora de un campo magnético sobre las moléculas de una sustancia paramagnética queda disminuida por el efecto desorientador de la agitación térmica, tanto mayor cuanto más elevada sea la temperatura. Por tanto, la susceptibilidad magnética de una sustancia paramagnética *disminuye* al aumentar la temperatura. Para muchas sustancias, la variación de la temperatura queda representada satisfactoriamente por la ***ley de Curie***:

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

Donde C es llamada constante de Curie, que depende del número de átomos por unidad volumen, de la constante de Boltzman y del momento magnético por átomo; T es la temperatura absoluta de Kelvin.

## 5.8 MATERIALES DIAMAGNÉTICOS

Son aquellos materiales en los cuales sus dipolos magnéticos atómicos se alinean en la dirección contraria a un campo magnético externo aplicado al material; debido a esto es que la susceptibilidad de estos materiales es negativa. Además, se encuentra que un material diamagnético es repelido cuando se coloca cerca del polo de un imán (en contraste con una muestra paramagnética, la cual es atraida).

Las susceptibilidades de las sustancias diamagnéticas son independientes de la temperatura.

## 5.9 CICLO DE HISTÉRESIS

En la Fig. 5.3, se muestra la gráfica de la magnetización M contra la intensidad magnética H, de un material ferromagnético utilizado como núcleo de una bobina por la cual circula una corriente.

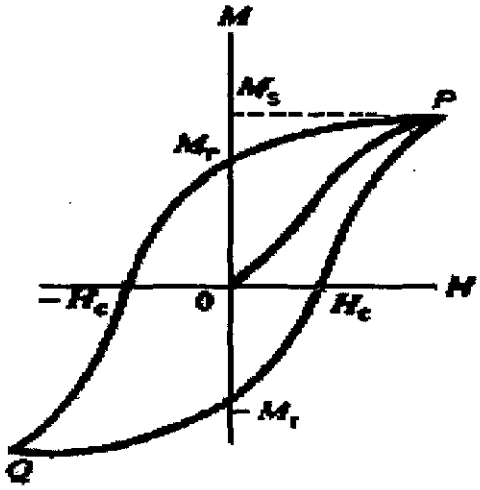



FIG. 5.3 CICLO DE HISTÉRESIS

$M_r$ : Magnetización remanente.
$H_c$ : Campo coercitivo.

La gráfica anterior se conoce como ***Ciclo de Histéresis***, su forma y tamaño dependen de las propiedades del material y de la intensidad del campo magnético aplicado.

Con mucha frecuencia, el ciclo de Histéresis se puede representar por medio de una gráfica de B contra H. Los materiales magnéticamente duros como los imanes permanentes son aquellos que tienen un ciclo de Histéresis ancho (área encerrada por la curva es grande); y los materiales magnéticamente blandos como los núcleos de los transformadores tienen un ciclo de Histéresis angosto (área encerrada por la curva es pequeña).

El área encerrada por la curva representa la energía disipada durante el ciclo de magnetización.

## PROBLEMAS RESUELTOS

5.1 Un toroide (anillo de Rowland) que tiene 500 vueltas de hilo y una circunferencia media de 50 cm de longitud, transporta una corriente de 0.3 A. La permeabilidad relativa del núcleo es 600. a) Cuál es la densidad de flujo en el núcleo. b) Cuál es la intensidad magnética.

a) $$B = \frac{\mu N I}{l}$$

$$B = \frac{\mu_r \mu_o N I}{l}$$

$$B = \frac{(600)\left(4\pi 10^{-7}\right)(500)(0.3)}{0.5} = 0.226 \quad \frac{\text{Weber}}{m^2}$$

b) $$B = \mu H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{B}{\mu} = \frac{B}{\mu_r \mu_o}$$

$$H = \frac{0.226}{(600)\left(4\pi 10^{-7}\right)} = 300 \quad \frac{A}{m}$$

5.2 La intensidad de la corriente en el arrollamiento de un anillo de Rowland es de 2 A. El anillo tiene 400 vueltas y la longitud de su circunferencia media es de 40 cm. Utilizando una bobina exploradora y un galvanómetro balístico se ha encontrado que la inducción magnética es de 1 Weber/m². Calcúlese: a) La intensidad magnética. b) La magnetización. c) Susceptibilidad magnética. d) La corriente de magnetización superficial. e) La permeabilidad relativa.

e) $$B = \frac{\mu_r \mu_o N I}{l} \quad \Rightarrow \quad \mu_r = \frac{B l}{\mu_o N i}$$

$$\mu_r = \frac{(1)(0.4)}{\left(4\pi 10^{-7}\right)(400)(2)} = 398$$

a) $$H = \frac{B}{\mu_r \mu_o}$$

$$H = \frac{1}{\left(4\pi 10^{-7}\right)(398)} = 2000 \quad \frac{A}{m}$$

b) $M = \frac{B}{\mu_o} - H$

$$M = \frac{1}{4\pi 10^{-7}} - 2000 = 7.9x10^5 \quad \frac{A}{m}$$

c) $\mu_r = 1 + \chi_m \quad \Rightarrow \quad \chi_m = \mu_r - 1$

$$\chi_m = 398 - 1 = 397$$

d) $I_M = Ml \quad \Rightarrow \quad I_M = (7.9x10^5)(0.4) = 316000 \quad A$

5.3 Una barra imanada tiene una fuerza coercitiva de 4 x $10^3$ A/m. Se desea desimanarla introduciéndola en un solenoide de 12 cm de longitud, que tiene 60 espiras. Qué intensidad de corriente debe circular por el solenoide.

$$B = \frac{\mu_o NI}{l} \quad , \quad B = \mu_o H$$

$$\mu_o H = \frac{\mu_o NI}{l} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{NI}{l}$$

$$I = \frac{Hl}{N} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{(4x10^3)(0.12)}{60} = 8 \ A$$

5.4 Un devanado toroidal que lleva una corriente de 5 A consta de 300 espiras/m de alambre. El núcleo es hierro, el cual tiene una permeabilidad de $5000\mu_0$ bajo las condiciones dadas. Determinar H, B y M dentro del núcleo.

$$H = nI \quad \Rightarrow \quad H = (300)(5) = 1500 \quad \frac{A}{m}$$

$$B = \mu H \quad \Rightarrow \quad B = (5000\mu_o)(1500) = 9.42 \quad T$$

$$M = \frac{B}{\mu_o} - H \quad \Rightarrow \quad M = \frac{(5000\mu_o H)}{\mu_o} - H \approx 5000H$$

$$M = (5000)(1500) = 7.5x10^6 \quad \frac{A}{m}$$

5.5 Hallar la inductancia de una bobina toroidal cuyo núcleo está lleno con un material de permeabilidad $\mu$. La bobina tiene N vueltas y el toroide tiene un radio medio R.

$$B = \mu H \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu NI}{2\pi r}$$

$$\Phi = BA$$

$$\Phi = \frac{\mu NIA}{2\pi r}$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu N^2 A}{2\pi r}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

5.6 Un toroide de núcleo de hierro está devanado con 230 vueltas de alambre por metro de longitud. La corriente en el arrollado es de 6 A. Tomando la permeabilidad magnética del hierro como $5000\mu_o$, calcule: a) La intensidad magnética. b) La inducción magnética. c) La magnetización.

a) $$H = nI \quad \Rightarrow \quad H = (230)(6) = 1380 \quad \frac{A}{m}$$

b) $$B = \mu H \quad \Rightarrow \quad B = (5000)(4\pi 10^{-7})(1380) = 8.67 \quad T$$

c) $$M = \frac{B}{\mu_o} - H \quad \Rightarrow \quad M = \frac{8.67}{4\pi 10^{-7}} - 1380 = 6.9x10^6 \quad \frac{A}{m}$$

5.7 Un toroide tiene 300 espiras de alambre y radio medio de 12 cm, lleva una corriente de 5 A. El núcleo es de hierro el cual tiene una permeabilidad relativa de 400. Cuál es la inducción magnética en el toroide.

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_r \mu_o NI}{2\pi r}$$

$$B = \frac{(400)\left(4\pi 10^{-7}\right)(300)(5)}{2\pi(0.12)} = 1 \quad T$$

5.8 Un toroide tiene un radio medio de 18 cm. La corriente en la bobina es de 0.4 A. Cuántas vueltas se requieren para producir una intensidad magnética de 600 A/m en el interior del toroide.

$$H = \frac{NI}{2\pi R} \Rightarrow \quad N = \frac{2\pi r H}{I}$$

$$N = \frac{(2\pi)(0.18)(600)}{0.4} = 1696 \quad \text{vueltas}$$

5.9 Un toroide de núcleo de aluminio está arrollado estrechamente con $10^4$ vueltas/m. a) Qué corriente dará por resultado una magnetización de 1.61 A/m. b) Cuál es la densidad de flujo magnético en el núcleo.

$\chi_m$ para el aluminio es de $2.3 \times 10^{-5}$.

$$M = \chi_m H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1.61}{2.3 \times 10^{-5}} = 70000 \quad \frac{A}{m}$$

a)

$$H = nI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{H}{n} = \frac{70000}{1 \times 10^4} = 7 \quad A$$

$$H = \frac{B}{\mu_o} - M \quad \Rightarrow \quad B = (H + M)\mu_o$$

b)

$$B = [(70000) + (1.61)]4\pi 10^{-7} = 0.088 \quad T$$

5.10 Una bobina toroidal delgada, de 55 cm de longitud total, se devana con 1100 vueltas de alambre. Por el alambre pasa una corriente de 1.7 A. Cual es la magnitud de la intensidad magnética dentro del toroide si el núcleo consiste de un material ferromagnético, con susceptibilidad magnética de $1.2 \times 10^3$.

$$H = \frac{NI}{l}$$

$$H = \left(\frac{1100}{0.55}\right)1.7 = 3400 \quad \frac{A}{m}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- En la tabla se muestra los datos experimentales de la susceptibilidad magnética del alambre férrico. Construya una gráfica de $1/\chi_m$ en función de la temperatura Kelvin y determine si se cumple la ley de Curie. En caso afirmativo, cuál es la constante de Curie.

| T [ °C ] | -258 | -173 | -73 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_m \times 10^{-4}$ | 75 | 11.3 | 5.65 | 3.77 |

**R/ta:** C=0.113 grados

2- La tabla siguiente relaciona valores correspondientes de H y B para una muestra de acero comercial al silicio laminado en caliente, material que se utiliza mucho para construir núcleos de transformadores. a) Construya gráficas de B y de M en función de H, en el intervalo comprendido entre H=0 y H=1000 A/m. b) Cuál es la permeabilidad máxima. c) Cuál es la permeabilidad inicial (H=0). d) Cuál es la permeabilidad para H=800000 A/m.

| H [A/m] | 0 | 10 | 20 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| B [ T ] | 0 | 0.05 | 0.15 | 0.43 | 0.54 |

| H [A/m] | 60 | 80 | 100 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| B [ T ] | 0.62 | 0.74 | 0.83 | 0.98 | 1.07 |

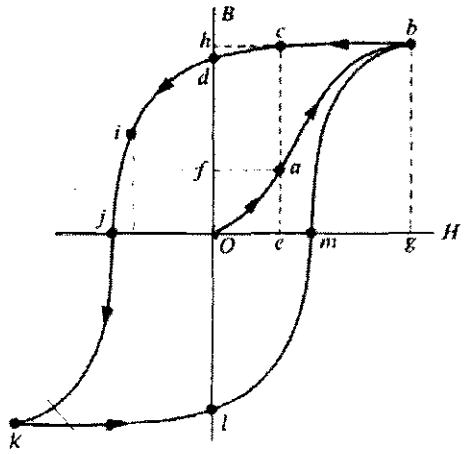
| H [A/m] | 500 | 1000 | 1000 | 100000 | 800000 |
|---|---|---|---|---|---|
| B [ T ] | 1.27 | 1.34 | 1.65 | 2.02 | 2.92 |

**R/ta:** b) 0.0108 Weber/A.m
c) 0.005 Weber/A.m
d) $3.7 \times 10^{-6}$ Weber/A.m

3- Un disco de hierro de 6 cm de diámetro y 4 mm de espesor está imanado uniformemente en dirección perpendicular a sus bases. La magnetización es 1.5 x $10^6$ A/m. a) Cuál es la corriente superficial de magnetización equivalente alrededor del borde del disco. b) Cuál es la densidad del flujo en el centro del disco. c) Cuál es la intensidad magnética en el centro del disco y su dirección respecto a la densidad de flujo. d) Cuál es la permeabilidad relativa del disco. e) Cuál es el momento magnético del disco.

**R/ta:** a) 6000 A
b) 0.126 Weber/$m^2$
c) -14 x $10^5$ A/m
d) 1/14
e) 17 A.$m^2$

4- Teniendo en cuenta el ciclo de Histéresis que se muestra en la figura. Supóngase que la ordenada del punto b, corresponde a una densidad de flujo de 1.6 Weber/$m^2$, y la abcisa, a una intensidad magnética H de 1000 A/m.Cuál será aproximadamente, la permeabilidad en los puntos a, b, c, d, i, y j.




**R/ta:** Punto a: 1280
Punto b: 1280
Punto c: 3840
Punto d: ∞
Punto i : 1600
Punto j: 0

5- Calcule la intensidad del campo magnético de una sustancia que se caracteriza por una magnetización de 1.02 x $10^6$ A/m y una densidad de flujo magnético de 2.28 T.

**R/ta:** 7.95 x $10^5$ A/m

6- La densidad de flujo magnético es 1.2 T y está actuando sobre un toroide de núcleo de hierro. El toroide tiene un radio medio de 20 cm y una permeabilidad magnética de $5000\mu_o$. a) Qué corriente se requiere si existen 300 espiras de alambre en el devanado. b) Cuál es la magnetización bajo estas condiciones.

**R/ta:** a) 0.8 A
b) 9.55 x $10^5$ A/m

7- El material del núcleo de cierto toroide tiene una susceptibilidad magnética de $-0.24 \times 10^{-5}$. El toroide contiene 15 espiras/cm y lleva una corriente de 5 A. Calcule la magnetización del material del núcleo.

**R/ta:** 0.018 A/m

8- Cuál es la permeabilidad magnética relativa de un material que tiene una susceptibilidad magnética de $1.2 \times 10^{-5}$.

**R/ta:** 1.000012

9- El campo magnético en el interior de cierto solenoide tiene el valor de $6.5 \times 10^{-4}$ T cuando el solenoide está vacío. Cuando se coloca un núcleo de hierro, el campo es de 1.4 T. a) Halle la permeabilidad magnética relativa en estas condiciones. b) Determine el vector de magnetización.

**R/ta:** a) 2300
b) $1.11 \times 10^{6}$ A/m

10- Un solenoide recto de 5 cm de diámetro y 25 cm de longitud está devanado con 200 vueltas de alambre, por el cual pasan 5 A. Tiene un núcleo de susceptibilidad magnética de $10^{-5}$. Calcule: a) La intensidad magnética dentro del alambre. b) El campo magnético dentro del solenoide. c) En qué factor cambia el campo magnético debido a la presencia del núcleo.

**R/ta:** a) 4000 A/m
b) $5 \times 10^{-3}$ T
c) $\chi_m$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

# CAPÍTULO 6

# ECUACIONES DE MAXWELL

## 6.1 INTRODUCCIÓN

James Clerk Maxwell
(1831 – 1879)
Escocia

James Clerk Maxwell formuló cuatro ecuaciones que relacionan los campos eléctricos y los campos magnéticos con distribuciones de carga y densidades de corriente. Estas ecuaciones son la base de la teoría clásica electromagnética y se pueden representar en forma integral y diferencial.

A continuación se dan las ecuaciones de Maxwell en las dos formas.

## 6.2 ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL

a) Ley de Gauss

$$\varepsilon_o \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \int_v \rho.dv$$

b) Ley de Gauss para el magnetismo

$$\oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

c) Ley de Ampere

$$\oint_l \vec{H}.d\vec{l} = \int_S \vec{J}.d\vec{S} + \varepsilon_o \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}.d\vec{S}$$

d) Ley de Faraday

$$\oint_l \vec{E}.d\vec{l} = -N\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}.d\vec{S}$$

## 6.3 ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL

a) Ley de gauss

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

b) Ley de Gauss para el magnetismo

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z}=0$$

c) Ley de Ampere

$$\nabla \mathbf{x}\vec{\mathbf{H}}=\vec{\mathbf{J}}+\varepsilon_o\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

d) Ley de Faraday

$$\nabla \mathbf{x}\vec{\mathbf{E}}=-\mathbf{N}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

## 6.4 ECUACIÓN DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

La ecuación de onda electromagnética se puede deducir y obtener sus propiedades aplicando las ecuaciones de Maxwell.

Supongamos que se tiene un campo eléctrico $\vec{E}$ en la dirección Y y un campo magnético $\vec{B}$ en la dirección Z en el vacío como se muestra en la figura.

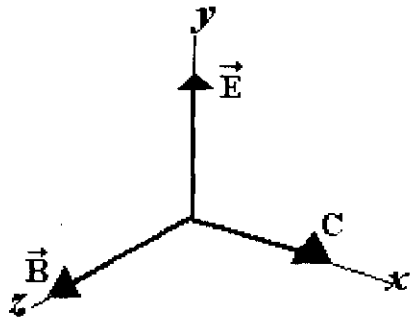



FIG. 6.1 CAMPO ELÉCTRICO Y CAMPO MAGNÉTICO VIBRANDO PERPENDICULARMENTE ENTRE SÍ

Aplicando las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para el vacío se obtienen las siguientes relaciones.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2}$$

Con las dos ecuaciones (1) y (2) se obtiene la ecuación diferencial de una onda para el campo eléctrico y para el campo magnético,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

La velocidad de estas ondas viene dada por

$$C = \sqrt{\frac{1}{\mu_o \varepsilon_o}}$$

Colocando los valores correspondientes en las constantes se obtiene

$$C = 3 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

Que es precisamente la velocidad de la luz en el vacío.

La solución de las ecuaciones diferenciales anteriores para el campo eléctrico y para el campo magnético de una onda plana es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{3}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{4}$$

Donde $E_m$ y $B_m$ son los valores máximos de los campos. La constante K, llamada constante de propagación de la onda viene dada por

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

siendo $\lambda$ la longitud de onda, y $\omega$ la frecuencia angular que viene dada por

$$\omega = 2\pi f$$

donde f es la frecuencia.

La relación $\omega/K$ es

$$\frac{\omega}{K} = \lambda f = C$$

Aplicando la ecuación (1) en las ecuaciones (3) y (4), se obtiene

$$\frac{E_m}{B_m} = C \qquad (5)$$

En la figura se muestra la representación gráfica de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección x positiva.

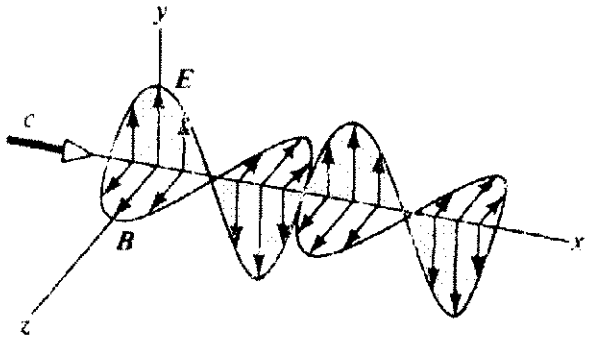



FIG. 6.2 REPRESENTACIÓN DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA QUE SE PROPAGA EN LA DIRECCIÓN X

## 6.5 ENERGÍA DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Las ondas electromagnéticas transportan energía, y a medida que se propagan a través del espacio pueden transferir energía a los cuerpos que encuentra a su paso.

El flujo de energía de una onda electromagnética o lo que es lo mismo, la rapidez con que fluye la energía por unidad de superficie de un área perpendicular al flujo se describe por un vector $\vec{S}$, denominado ***vector de Poyting*** y definido por la expresión

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o} \vec{E} \times \vec{B} \qquad (6)$$

Las unidades del flujo de energía son (Joules/seg).m$^2$ = Watt/m$^2$

## 6.6 INTENSIDAD DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Como el flujo de energía varía en función del tiempo. El valor promedio de la magnitud de $\vec{S}$ en un ciclo de la onda electromagnética se llama Intensidad (I), de la radiación.

Teniendo en cuenta las relaciones (5) y (6), se obtiene la expresión para la intensidad de la onda electromagnética

$$I = \frac{E_m B_m}{2\mu_o}$$

## 6.7 DENSIDAD DE ENERGÍA DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Se sabe que la densidad de energía instantánea de un campo eléctrico es

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2$$

y la densidad de energía instantánea del campo magnético es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_o}$$

Relacionando las dos densidades de energía se obtiene lo siguiente

$$u_E = u_B$$

De lo anterior se concluye que, para una onda electromagnética la densidad de energía instantánea asociada con el campo eléctrico es igual a la densidad de energía instantánea asociada con el campo magnético. Por lo tanto, en un volumen dado, la energía se comparte igualmente por los dos campos.

La densidad de energía instantánea total es igual a la suma de las densidades de energía asociadas con los campos eléctrico y magnético:

$$u = \varepsilon_o E^2$$

La densidad de energía total promedio en un ciclo es

$$u_m = \frac{1}{2}\varepsilon_o E_m^2$$

Comparando la expresión anterior con la ecuación de la intensidad de la onda se obtiene

$$I = C u_m$$

## 6.8 CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Si la superficie absorbe toda la energía U que incide durante un tiempo t, la cantidad de movimiento total **p** entregada a esa superficie, es:

$$p = \frac{U}{C}$$

Para el caso en que la superficie sea completamente reflectora, la cantidad de movimiento total transferida a esa superficie, es

$$p = \frac{2U}{C}$$

## 6.9 PRESIÓN DE RADIACIÓN DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

La presión de radiación electromagnética en una superficie completamente absorbente es

$$P_r = \frac{S}{C}$$

Si la superficie es completamente reflectora, la presión de radiación viene dada por

$$P_r = \frac{2S}{C}$$

## 6.10 ESPECTRO DE RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Todas las ondas electromagnéticas viajan en el espacio vacío con la velocidad de la luz C. Estas ondas transportan energía y cantidad de movimiento de alguna fuente hasta un receptor como se observó anteriormente.

La frecuencia f y la longitud de onda $\lambda$ de las ondas electromagnéticas se pueden relacionar mediante la siguiente expresión

$$C = \lambda f$$

A continuación se muestra un diagrama del espectro electromagnético en función de la frecuencia y longitud de onda de todas las ondas existentes en la naturaleza.

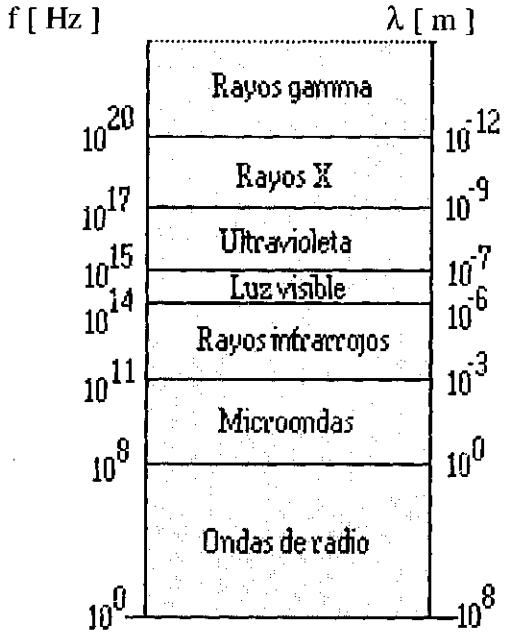



FIG. 6.3 ESPECTRO DE LA RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA QUE EXISTE EN LA NATURALEZA

**Ondas de radio:** Son el resultado de la aceleración de cargas a través de alambres conductores. Son generadas por dispositivos electrónicos como osciladores.

**Microondas:** Son ondas de radio de corta longitud de onda y son generadas por dispositivos electrónicos.

**Radiación infrarroja:** También llamadas ondas térmicas, son generadas por las vibraciones de los átomos o moléculas.

**Luz visible:** Es la parte del espectro que puede percibir el ojo humano, es generada por los cambios de estado de los electrones en los átomos.

**Ultravioleta:** Se genera por las transiciones atómicas de los electrones exteriores y por las transiciones nucleares que ocurren en el sol.

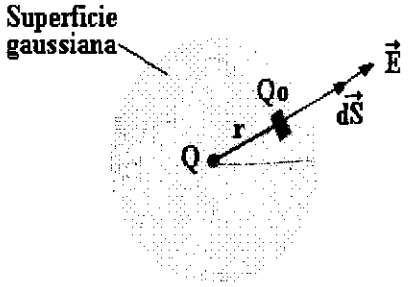
**Rayos X:** Se generan por las transiciones electrónicas de los electrones interiores de los átomos y por la desaceleración brusca de las cargas eléctricas (como los electrones).

**Rayos gamma:** Son generadas por las transiciones en el núcleo atómico y por la desintegración de ciertas partículas elementales.

**Rayos cósmicos:** Son partículas cargadas que se originan del Sol, de las estrellas y cuerpos del universo.

## PROBLEMAS RESUELTOS

6.1 A partir de la las ecuaciones de Maxwell deduzca la ley de Coulomb.




Aplicando la ley de Gauss:

$$\varepsilon_o \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = Q_n$$

$$\varepsilon_o \int_S EdSCoso = Q_n$$

$$\varepsilon_o ES = Q$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o 4\pi r^2}$$

$$F = EQ_o$$

$$F = \frac{QQ_o}{\varepsilon_o 4\pi r^2} \Rightarrow F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{QQ_o}{r^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

Donde $Q_o$ es la carga de prueba colocada en la superficie gaussiana.

6.2 El campo de una onda electromagnética plana en el vacío se representa por: $E_x = 0$, $E_y = 0.5 \cos[2\pi \times 10^8 (t - x/c)]$, $E_z = 0$. a) Determinar la longitud de onda. b) La dirección de propagación. c) Calcular el campo magnético de la onda. d) Calcular la intensidad de la onda electromagnética.

a) $K = \frac{\omega}{c}$

$$K = \frac{2\pi x 10^8}{3x10^8} = \frac{2\pi}{3} \quad m^{-1}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \quad m$$

b) Dirección positiva de x.

c) $B_x = B_y = 0$

$$B_z = B_o \cos\left(2\pi x 10^8 t - \frac{2\pi x 10^8}{c} x\right) T$$

$$B_O = \frac{E_O}{c} = \frac{0.5}{3x10^8} = \frac{1}{6} x10^{-8} \quad T$$

$$B_z = \frac{1}{6} x10^{-8} \cos\left(2\pi x 10^8 t - \frac{2\pi x 10^8}{c} x\right) T$$

d) $$S = \frac{E_o B_o}{2\mu_o} = \frac{(0.5)\left(\frac{1}{6} x10^{-8}\right)}{2\left(4\pi 10^{-7}\right)} = 3.31x10^{-4} \quad \frac{Watt}{m^2}$$

6.3 Una onda electromagnética de la parte visible del espectro tiene una longitud de onda de 550 nanómetros, y la amplitud de su campo eléctrico es de 670 V/m. Determine la frecuencia de la onda y la amplitud del campo magnético. Si la onda viaja en dirección X positiva y su fase es cero cuando x y t son cero, escriba las ecuaciones de E(x,t) y B(x,t).

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3x10^8}{550x10^{-9}} = 5.5x10^{14} \quad Hz$$

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{670}{3x10^8} = 2.2x10^{-6} \quad T$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\left(5.5x10^{14}\right) = 3.4x10^{15} \quad \frac{rad}{seg}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{550x10^{-9}} = 1.14x10^7 \ m^{-1}$$

$$E(x,t) = 670\,\text{Sen}\left(1.14\text{x}10^{7}\,x - 3.4\text{x}10^{15}\,t\right)$$

$$B(x,t) = 2.2\text{x}10^{-6}\ \text{Sen}\left(1.14\text{x}10^{7}\,x - 3.4\text{x}10^{15}\,t\right)$$

6.4 Determine la intensidad a la que una onda electromagnética plana de amplitud $E_m = 17$ V/m transporta energía por unidad de área.

$$I = \frac{E^2}{2\mu_o c} = \frac{(17)^2}{(2)(4\pi 10^{-7})(3\text{x}10^{8})} = 0.38 \quad \frac{\text{Watt}}{m^2}$$

6.5 Un haz de rayo láser con $S = 1 \text{ x } 10^6$ Watt/m$^2$ incide normalmente en una lámina de plástico; el 70% se refleja y el 30% se absorbe. Calcule la presión de radiación sobre el plástico.

Para la fracción reflejada: $P_r = \eta\frac{2S}{c}$ , donde $\eta$ es la fracción porcentual.

Para la fracción absorbida: $P_a = (1-\eta)\frac{S}{c}$

$$P = P_r + P_a = \eta\frac{2S}{c} + (1-\eta)\frac{S}{c} = (\eta+1)\frac{S}{c}$$

$$P = (1.7)\left(\frac{1\text{x}10^{6}}{3\text{x}10^{8}}\right) = 5.7\text{x}10^{-3} \quad \frac{\text{Nw}}{m^2}$$

6.6 El sol emite radiación ultravioleta de $1.216 \text{ x } 10^{-7}$ m de longitud de onda. Si la magnitud media del vector Poyting debido sólo a esta longitud de onda es de $6 \text{ x } 10^{-3}$ Watt/m$^2$ en la tierra, determinar la potencia total radiada por el sol, determinar la amplitud del campo eléctrico y magnético en la superficie del sol y en la tierra. La distancia entre sol y tierra es de $1.496 \text{ x } 10^{11}$ m. El radio del sol es de $696 \text{ x } 10^{6}$ m.

Para la tierra: $$\bar{S} = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad P = 4\pi r^2 \bar{S}$$

$$P = (4\pi)(1.496 \text{ x } 10^{11})^2(6\text{x}10^{-3}) = 1.7\text{x}10^{21} \quad \text{Watt}$$

$$\overline{S} = \frac{E_m^2}{2\mu_o c} \quad \Rightarrow \quad E_m = \sqrt{2\mu_o c\overline{S}}$$

$$E_m = \sqrt{(2)(4\pi x10^{-7})(3x10^8)(6x10^{-3})} = 2.13 \quad \frac{V}{m}$$

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{2.13}{3x10^8} = 7.1x10^{-9} \quad T$$

Para el sol:

$$\overline{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.7x10^{21}}{(4\pi)(6.96x10^8)^2} = 279.4 \quad \frac{watt}{m^2}$$

$$\overline{S} = \frac{E_m^2}{2\mu_o c} \quad \Rightarrow \quad E_m = \sqrt{2\mu_o c\overline{S}} = \sqrt{(2)(279.4)(4\pi x10^{-7})(3x10^8)}$$

$$E_m = 459 \quad \frac{V}{m}$$

$$B_m = \frac{E_o}{c} = \frac{459}{3x10^8} = 1.53x10^{-6} \quad T$$

6.7 En una superficie no reflejante, perpendicularmente se hace incidir un haz de luz, con un flujo de energía de 15 Watt/cm$^2$. Si la superficie tiene 40 cm$^2$ de área, calcular la fuerza media ejercida sobre la superficie, durante un lapso de 30 minutos.

$$\overline{S} = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \quad P = \overline{S}A$$

$$U = SAt \quad \Rightarrow \quad U = (15)(40)(30)(60) = 1.08x10^6 \quad \text{Joules}$$

$$p = \frac{U}{c} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1.08x10^6}{3x10^8} = 0.0036 \quad \frac{kg.m}{seg}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0.0036}{(30)(60)} = 2x10^{-6} \quad Nw$$

6.8 Las ondas electromagnéticas planas de determinada frecuencia inciden normalmente a la superficie de la tierra. Suponga que la amplitud del campo eléctrico es de 500 V/m. a) Cuál es la amplitud del campo magnético. b) Obtenga el valor medio del vector Poyting.

a) $$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{500}{3x10^8} = 1.6x10^{-6} \quad T$$

b) $$\overline{S} = \frac{E_m B_m}{2\mu_o} = \frac{(500)(1.66x10^{-6})}{2(4\pi x10^{-7})} = 331.7 \quad \frac{Watt}{m^2}$$

6.9 Una lámpara radia isotrópicamente 15 Watt. Calcule los valores máximos de los campos eléctrico y magnético a distancias de a) 1 m. b) 5 m desde la fuente.

a) $$\overline{S} = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{S} = \frac{P}{4\pi R_1^2} = \frac{15}{(4\pi)(1)^2} = 1.19 \quad \frac{Watt}{m^2}$$

$$\overline{S} = \frac{E_m B_m}{2\mu_o} = \frac{E_m^2}{2\mu_o c} \quad \Rightarrow \quad E_m = \sqrt{2\mu_o c\overline{S}}$$

$$E_m = \sqrt{(2)(4\pi x10^{-7})(3x10^8)(1.19)} = 30 \quad \frac{V}{m}$$

$$B_m = \frac{E_m}{c} \quad \Rightarrow \quad B_m = \frac{30}{3x10^8} = 0.1 \quad \mu T$$

$$\overline{S} = \frac{P}{4\pi R_2^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{S} = \frac{15}{(4\pi)(5)^2} = 0.047 \quad \frac{Watt}{m^2}$$

$$\overline{S} = \frac{E_m B_m}{2\mu_o} = \frac{E_m^2}{2\mu_o c} \quad \Rightarrow \quad E_m = \sqrt{2\mu_o c\overline{S}}$$

b) $$E_m = \sqrt{(2)(4\pi x10^{-7})(3x10^8)(0.047)} = 6 \quad \frac{V}{m}$$

$$B_m = \frac{E_m}{c} \quad \Rightarrow \quad B_m = \frac{6}{3x10^8} = 2x10^{-8} \quad T$$

6.10 A que distancia de una fuente de potencia de 30 Watt de una onda electromagnética isotrópica se tendrá un $E_m = 10$ V/m.

$$\overline{S} = \frac{E_m B_m}{2\mu_o} = \frac{E_m^2}{2\mu_o c} = \frac{(10)^2}{(2)(4\pi x 10^{-7})(3x10^8)} = 0.132 \quad \frac{\text{Watt}}{m^2}$$

$$A = \frac{P}{\overline{S}} = \frac{30}{0.132} = 227.27 \quad m^2$$

$$A = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{A}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{227.27}{4\pi}} = 4.25 \quad m$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Compruebe la consistencia de las dimensiones de ambos lados de cada una de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

2- Las leyes de gauss para los campos eléctrico y magnético difieren debido a la falta de cargas magnéticas. Suponga que existen los monopolos magnéticos (cargas magnéticas), representados por el símbolo M. Formule nuevamente la ley de Gauss para los campos magnéticos y especifique las unidades de M en el sistema internacional.

3- La ley de Ampere y la ley de Faraday difieren por la falta de un término de corriente en la ley de Faraday. Suponga que existen los monopolos magnéticos (M) y reformule la ley de Faraday. Describa el significado físico de los términos nuevos que añada

4- Con base a las ecuaciones de Maxwell demuestre la ley de mallas de Kirchhoff para una malla que contenga R-L-C.

5- Demuestre que $\frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}$ tiene unidades de velocidad.

6- La amplitud del campo magnético de una onda electromagnética es de $2 \times 10^{-7}$ T. Calcule la amplitud del campo eléctrico si la onda viaja a) En el espacio libre. b) En un medio en el cual la velocidad de la onda es 0.75 C.

**R/ta:** a) 60 V/m
b) 45 V/m

7- Determine la presión de radiación que ejerce la luz solar al incidir perpendicularmente sobre una superficie completamente reflectora.

**R/ta:** $P_r = 2S/C$

8- El sol está a $1.5 \times 10^{11}$ m de la tierra, y su potencia lumínica es de $3.9 \times 10^{26}$ Watt. Cuál es la amplitud media del campo eléctrico en la radiación solar en la atmósfera terrestre superior.

**R/ta:** $E_m = 1000$ V/m

9- La radiación electromagnética del sol cae sobre la superficie terrestre a razón de $1.4 \times 10^3$ Watt/m$^2$ Halle las magnitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda.

**R/ta:** $E = 1.15 \times 10^3$ V/m
$B = 3.84 \times 10^{-6}$ T

10- Una onda de radio transmite 1.5 Watt/m$^2$ a una superficie plana perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Calcule la presión de radiación sobre la superficie si ésta es un absorbente perfecto.

**R/ta:** $P_r = 5 \times 10^{-9}$ Nw/m$^2$

# PARTE 2.

# FÍSICA MODERNA


CAPÍTULO 7. RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO

CAPÍTULO 8. EFECTO FOTOELÉCTRICO

CAPÍTULO 9. EFECTO COMPTON

CAPÍTULO 10. RAYOS X

CAPÍTULO 11. ESPECTROSCOPIA Y MODELOS ATÓMICOS

CAPÍTULO 12. PROPIEDADES ONDULATORIAS DE LA MATERIA

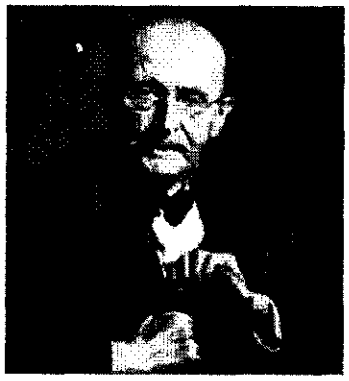
CAPÍTULO 13. MECÁNICA CUÁNTICA ONDULATORIA

APÉNDICE. SISTEMAS DE COORDENADAS

# CAPITULO 7

# RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

## 7.1 INTRODUCCIÓN



Max Planck
(1858 – 1947)
Alemania

El estudio de la radiación del cuerpo negro fue importante porque condujo a la necesidad de postular nuevos conceptos en la física que a su vez abrieron el camino a la Física Moderna llamada también *Física Cuántica*.

## 7.2 CUERPO NEGRO

Son cuerpos que tienen la propiedad de emitir la misma radiación térmica cuando se encuentran a la misma temperatura, independientemente del tipo de material de que están formados. Estos cuerpos absorben o emiten totalmente la radiación que les llega manteniéndose en equilibrio térmico. En las figuras 7.1(a) y 7.1(b) se muestran los agujeros de una cavidad que se comportan como cuerpos negros.

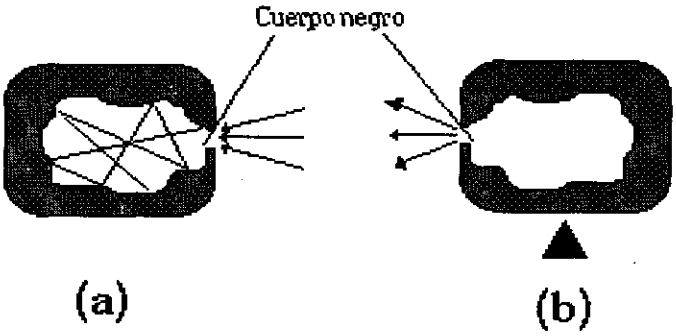



FIG. 7.1 A) ABSORBE TOTALMENTE TODA LA ENERGÍA QUE LE LLEGA.
B) EMITE TOTALMENTE LA ENERGÍA QUE SE LE SUMINISTRA.

Al graficar la densidad de energía radiada por el cuerpo negro en función de la frecuencia de radiación, se obtienen unas curvas típicas de la radiación térmica, como se muestra en la figura 7.2.

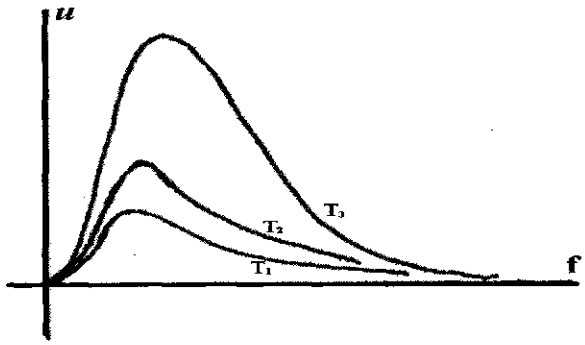



FIG. 7.2 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LA RADIACIÓN DE UN CUERPO NEGRO

De los resultados experimentales, se enunciaron tres leyes empíricas para tratar de dar una base teórica a la radiación del cuerpo negro.

## 7.3 LEYES EMPIRICAS DE LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO

### 7.3.1 Ley de Stefan-Boltzman

La energía total por unidad de área y tiempo radiada por un cuerpo negro es directamente proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta.

$$\mathbf{R=\frac{U}{At}=\sigma T^4}$$

Donde,

R : Radiancia
T : Temperatura absoluta
$\sigma$ : Constante de Stefan-Boltzman = $5.67 \times 10^{-8}$ Watt/ $m^2.°K^4$

### 7.3.2 Ley de desplazamiento de Wien

La frecuencia para la cual ocurre la máxima intensidad de la radiación es directamente proporcional a la temperatura absoluta. (Fig. 7.3).

$$f = \gamma T$$

Donde,

T : Temperatura absoluta
$\gamma$ : Constante calculada experimentalmente = $1.035 \times 10^{11}$ $°K^{-1}. Seg^{-1}$

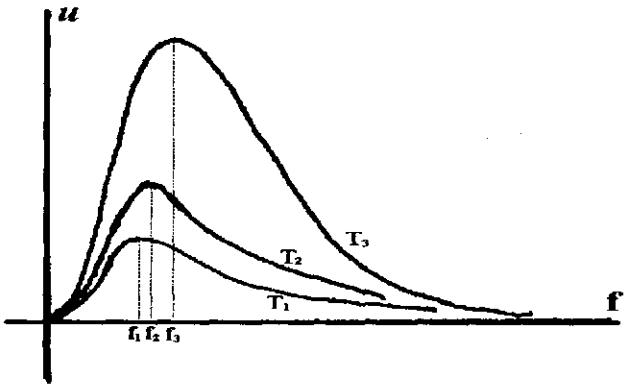



FIG. 7.3 LA FRECUENCIA PARA LA CUAL OCURRE LA MÁXIMA INTENSIDAD DE RADIACIÓN ES PROPORCIONAL A LA TEMPERATURA ABSOLUTA.

### 7.3.3 Ley de Wien

La ley se expresa por la siguiente expresión:

$$u = \frac{C_1 f^3}{e^{C_2 f / T}}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

Donde,

$u$ : Densidad de energía radiada.
T : Temperatura absoluta.
f : Frecuencia de la radiación.
$C_1$ y $C_2$ : Constantes.

La ley de Wien funciona bien para frecuencias grandes pero para frecuencias pequeñas la curva teórica de Wien se aleja de la curva experimental, como se observa en la Fig. 7.4.

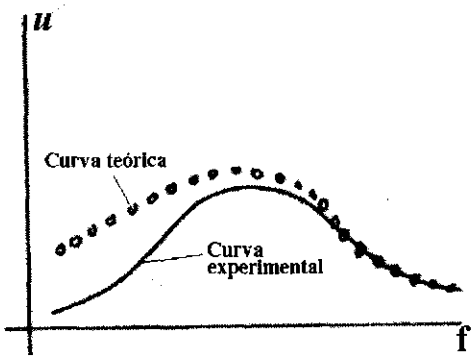



FIG. 7.4 LA LEY DE WIEN SE APROXIMA A LA CURVA EXPERIMENTAL PARA FRECUENCIAS GRANDES

### 7.3.4 Ley de Rayleigh-Jeans

Utilizando las ecuaciones de Maxwell y la ley de distribución de energías de Boltzman llegaron a la siguiente expresión.

$$u = \frac{8\pi KT}{C^3} f^2$$

Donde,

K : Constante de Boltzman = $1.38 \times 10^{-23}$ Joules/°K
T : Temperatura absoluta.
C : Velocidad de la luz.
f : Frecuencia de la radiación.

Esta ley concuerda con la curva experimental para valores pequeños de la frecuencia; para valores grandes se aleja totalmente de la curva experimental, como se observa en la Fig. 7.5. A esta situación se le llamó ***Catástrofe ultravioleta***.

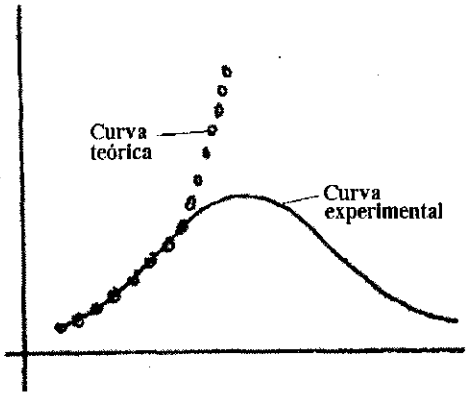



FIG. 7.5 LA LEY DE RAYLEIGH-JEANS SE APROXIMA A LA CURVA EXPERIMENTAL PARA FRECUENCIAS PEQUEÑAS.

## 7.4 TEORIA CUÁNTICA DE LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO

En el año 1900 Max Planck soluciona la discrepancia que se presentaba entre la teoría y los resultados experimentales de la radiación del cuerpo negro.

Planck supone que la energía de cada oscilador debe ser siempre un múltiplo entero de una mínima cantidad de energía $E_0$. Es decir, la energía de un oscilador no puede tener cualquier valor. Por lo tanto, la energía de un oscilador es

$$\mathbf{E = nE_o}$$

Donde n, es un número entero positivo llamado ***número cuántico.***

Se demuestra que la mínima energía $E_0$ llamado ***Cuanto de energía*** es directamente proporcional a la frecuencia de la radiación.

$$\mathbf{E_o = hf}$$

Siendo h una constante llamada ***Constante de Planck*** y su valor es: $6.63 \times 10^{-34}$ Joules.seg.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, Planck llega a la siguiente expresión para la radiación del cuerpo negro.

$$u = \frac{8\pi h}{C^2} \frac{f^3}{e^{hf/KT} - 1}$$

Donde,

$u$ : Densidad de energía radiada.
h : Constante de Planck.
C : Velocidad de la luz.
K : Constante de Boltzman.
T : Temperatura absoluta
f : Frecuencia de radiación.

La ley de la radiación de Planck para el cuerpo negro predice correctamente los resultados experimentales, reproduce la ley de Rayleigh-Jeans para frecuencias pequeñas, la ley de Wien para frecuencias grandes, la ley de Stefan-Boltzman y la ley de desplazamiento de Wien.

Clásicamente, un oscilador puede tener cualquier energía a partir de un valor cero, mientras que, de acuerdo con Planck solo puede tener ciertos valores. En el primer caso la energía es continua, todos los valores son posibles; en el segundo caso la energía es discreta, es decir, emite paquetes de energía llamados "Cuantos" o "fotones" de ahí el nombre de ***Cuantización*** de la energía. Adicionalmente, en el enfoque clásico, la energía es función de la amplitud de la oscilación, en tanto que, en este nuevo enfoque, es función de la frecuencia de la radiación.

## PROBLEMAS RESUELTOS

7.1 La potencia de radiación de un cuerpo negro es de 10 KWatt. Encuentre el área de la superficie de este cuerpo, si la longitud de onda a la cual la densidad de energía es máxima es de 7 x $10^{-5}$ cm.

$$\frac{U}{At} = \sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{A} = \sigma T^4$$

$$f_m = \gamma T \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\lambda_{min}} = \gamma T$$

$$T = \frac{c}{\lambda_{min}\,\gamma} = \frac{3x10^8}{(7x10^{-7})(1.03x10^{11})} = 4140 \quad {}^{o}K$$

$$A = \frac{P}{\sigma T^4} = \frac{10000}{(5.67x10^{-8})(4140)^4} = 0.0006 \quad m^2$$

7.2 Una superficie metálica de 10 $cm^2$ de área, se encuentra a una temperatura de 2500 °K y emite por minuto una energía térmica de 4 x $10^4$ Joules. Encuentre: a) La energía emitida por la superficie si fuera un cuerpo negro. b) La razón de la radiancia de esta superficie a la de un cuerpo negro de igual área y a la misma temperatura.

a) $$\frac{U}{At} = \sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad U = At\sigma T^4$$

$$U = (10)(1x10^{-4})(5.67x10^{-8})(2500)^4(60) = 1.32x10^5 \quad \text{Joules}$$

b) $$\frac{E}{U} = \frac{4x10^4}{1.32x10^5} = 0.3$$

7.3 La temperatura de un cuerpo negro se elevó por calentamiento desde 1000 °K hasta 3000 °K. a) Cuántas veces aumentó su radiancia. b) En cuánto varió la longitud de onda correspondiente al máximo de energía emitida.

a) $R_1 = \sigma T_1^4 \quad , \quad R_2 = \sigma T_2^4$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sigma T_2^4}{\sigma T_1^4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{3000}{1000}\right)^4 = 81$$

b) $f_m = \gamma T \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\lambda_{min}} = \gamma T \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{c}{\gamma T_1}$

$$\lambda_1 = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(1000)} = 2.9x10^{-6} \quad m$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{\gamma T_2} = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(3000)} = 9.6x10^{-7} \quad m$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 1.9x10^{-6} \quad m$$

7.4 Un cuerpo negro, se encuentra a una temperatura de 2900 °K, se enfría y la longitud de onda correspondiente al máximo de densidad de energía radiada cambia en 9 x $10^{-6}$ m. Cuál es la temperatura final del cuerpo.

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c}{\gamma T_2} - \frac{c}{\gamma T_1}$$

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\gamma T_2} - \frac{c}{\gamma T_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda + \frac{c}{\gamma T_1} = \frac{c}{\gamma T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{c}{(9.99x10^{-6})\gamma}$$

$$T_2 = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(9.99x10^{-6})} = 290 \quad °K$$

7.5 a)Qué longitud de onda emite un objeto, a la temperatura ambiente (20°C), la máxima radiación. b) A qué temperatura se debe calentar para que su radiación térmica máxima esté en la región roja del espectro. c) Cuántas veces más radiación térmica emite cuando está a la temperatura más alta.

a) $f_m = \gamma T \quad \Rightarrow \quad \dfrac{c}{\lambda_{min}} = \gamma T$

$$\lambda = \frac{c}{\gamma T_1} = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(293)} = 9.89 \quad \mu m$$

b) En la región roja del espectro $\lambda = 650$ nanómetros

$$\lambda = \frac{c}{\gamma T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{c}{\gamma\lambda} = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(650x10^{-9})} = 4460 \quad {}^\circ K$$

c) $R_1 = \sigma T_1^4 \quad , \quad R_2 = \sigma T_2^4$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sigma T_2^4}{\sigma T_1^4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 5.37x10^4$$

7.6 Recientemente se descubrió que estamos empotrados con una radiación de cuerpo negro de 2.7 °K. Calcule el valor de la longitud de onda al que alcanza su punto máximo esta radiación.

$$\lambda = \frac{c}{\gamma T} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(2.7)} = 1.07x10^{-3} \quad m$$

7.7 A qué longitud de onda una cavidad a 6000 °K radiará más por unidad de longitud de onda.

$$\lambda = \frac{c}{\gamma T} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(6000)} = 4830 \quad \mathring{A}$$

7.8 En una explosión termonuclear, la temperatura en la bola de fuego es, momentáneamente, $10^7$ °K. Encuentre la longitud de onda para la cual la radiación emitida es máxima.

$$\lambda = \frac{c}{\gamma T} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3x10^8}{(1.035x10^{11})(10^7)} = 2.89 \quad \mathring{A}$$

7.9 Una fuente de luz monocromática a 5500 Å emite 5 Watt de radiación. Determinar cuántos fotones son emitidos por segundo.

$$E = nhf \quad \Rightarrow \quad E = \frac{nhc}{\lambda}$$

$$Pt = \frac{nhc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{t} = \frac{P\lambda}{hc}$$

$$\frac{n}{t} = \frac{(5)(5500x10^{-10})}{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})} = 1.38x10^{19} \quad \frac{\text{fotones}}{\text{seg}}$$

7.10 Cuál es la energía de un cuanto de energía si emite una radiación de longitud de onda de 1240 nanómetros (radiación infrarroja).

$$E = hf \quad \Rightarrow \quad E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{1240x10^{-9}} = 1.6x10^{-19} \quad \text{Joules} = 1 \quad \text{eV}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Suponiendo que la radiación del sol es constante, cuanto tiempo tardará la masa del sol en reducirse a la mitad. La temperatura de la superficie del sol es 5800 °K; su masa de $1.97 \times 10^{30}$ kg y su radio de $6.5 \times 10^{8}$ m. Cuánto disminuirá la masa del sol durante un año a causa de la radiación que emite.

**R/ta:** $t = 7.21 \times 10^{12}$ años
$M = 1.4 \times 10^{17}$ kg

2- Una esfera ennegrecida se enfría desde una temperatura de 27 °K hasta 20 °K. En cuánto variará la longitud de onda correspondiente a la máxima densidad de energía emitida.

**R/ta:** $\Delta\lambda = 0.23$ mm

3- A partir de la ley de la radiación del cuerpo negro de Planck, demuestre que para frecuencias pequeñas la ley de Planck se reduce a la ley de Rayleigh-Jeans.

4- A partir de la ley de la radiación del cuerpo negro de Planck, demuestre que para frecuencias grandes la ley de Planck se reduce a la ley de Wien.

5- Si solamente el 5% de la energía disipada por un bombillo es irradiada en forma de luz visible. Cuántos fotones por segundo son emitidos por el bombillo de 100 Watt. Suponga que la longitud de onda de la luz es de 5600 Å.

**R/ta:** $14 \times 10^{18}$ fotones/seg

6- La luz solar llega a la tierra en una cantidad aproximada de 1400 Watt/m$^2$. Cuando el sol se encuentra exactamente sobre la tierra. El radio solar es de $6.96 \times 10^{8}$ m y el radio medio de la órbita terrestre es $1.49 \times 10^{11}$ m. A partir de estos datos, hallar la temperatura de la superficie del sol considerando que irradia como un cuerpo negro.

**R/ta:** T = 5800 °K

7- El universo está lleno de radiación térmica, la cual tiene un espectro de cuerpo negro a una temperatura de 2.7 °K. Cuál es la longitud de onda correspondiente al máximo de esta radiación. Cuál es la energía en eV de los cuantos con la longitud de onda pico. En qué región del espectro electromagnético se encuentra esta longitud de onda pico.

**R/ta:** $\lambda = 1.1$ mm
$E = 1.1 \times 10^{-3}$ eV
Infrarroja

8- Un sistema masa-resorte, tiene una masa de 1 kg, la constante del resorte es de 4 Nw/m. Se estira 0.5 m desde su posición de equilibrio y luego se suelta. a) Encontrar su energía clásicamente.b) Si se cuantíza su energía, determine el número cuántico n.

**R/ta:** a) $U = 0.5$ Joules
b) $n = 2.37 \times 10^{33}$

9. A partir de la ley de la radiación de Planck, demuestre la ley de la radiación de Stefan-Boltzman

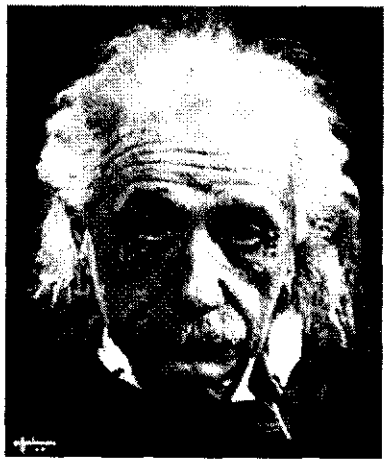
10- A partir de la ley de la radiación de Planck, demuestre la ley de desplazamiento de Wien.

# CAPÍTULO 8

# EFECTO FOTOELÉCTRICO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## 8.1 INTRODUCCIÓN



Albert Einstein
(1879 – 1955)
Alemania

Ha sido uno de los fenómenos más interesantes e importantes en el desarrollo de la mecánica cuántica, y además, es de gran utilidad práctica hoy día. Hertz fue el primero en descubrir este fenómeno observando que una chispa saltaba más fácilmente en el espacio de dos cuerpos conductores cuando una de estas superficies recibía iluminación. Además, encontró que la luz ultravioleta era más efectiva en este aspecto que luz de mayor longitud de onda.

## 8.2 EFECTO FOTOELÉCTRICO

Es el fenómeno que ocurre cuando hay emisión de electrones en un material (en particular metales) debido a que un haz de luz, o sea radiación electromagnética incide sobre él. El esquema de un dispositivo para observar el efecto fotoeléctrico es el que se muestra en la figura 8.1.

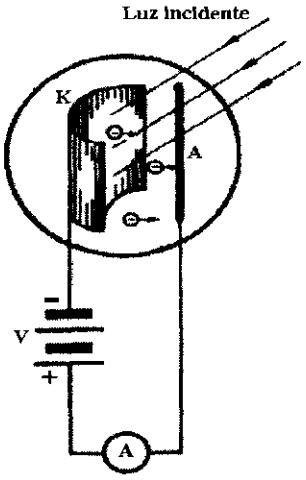



FIG. 8.1 ESQUEMA EXPERIMENTAL PARA OBSERVAR EL EFECTO FOTOELÉCTRICO

Donde,

K : Es el cátodo donde llega la radiación.

A : Es el ánodo donde llegan los electrones que salen del cátodo.

V : Voltaje aplicado a los electrodos.

A : Amperímetro destinado a medir la fotocorriente.

## 8.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

a) De acuerdo a la clase de material utilizado para el cátodo, existe una frecuencia $f_o$ de la radiación incidente llamada ***Frecuencia umbral,*** para que se produzca el desprendimiento de electrones del cátodo y en el amperímetro se observe el paso de la corriente. Si la frecuencia de la radiación incidente tiene una frecuencia menor que la frecuencia umbral $f_o$ para un material dado, no habrá efecto fotoeléctrico y en el amperímetro no se registra el paso de la corriente.

b) Al graficar la corriente en función del voltaje acelerador para una frecuencia de radiación dada y para varias intensidades de radiación. (Fig. 8.2). Se observa que el contravoltaje $V_o$ es independiente de la intensidad I de la radiación.

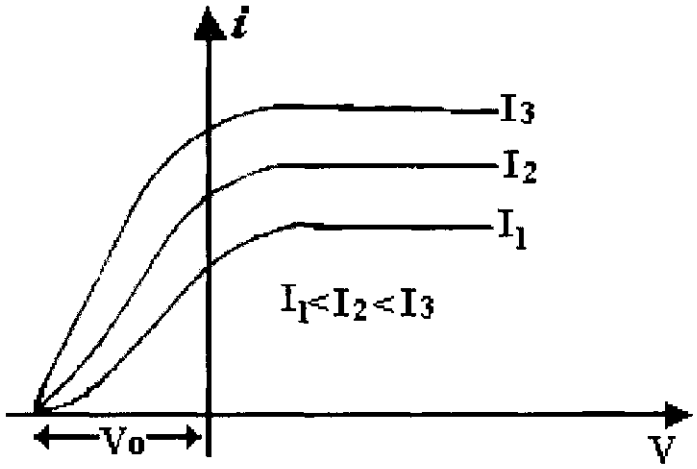



FIG. 8.2 CORRIENTE EN FUNCIÓN DEL VOLTAJE ACELERADOR PARA DIFERENTES INTENSIDADES DE RADIACIÓN

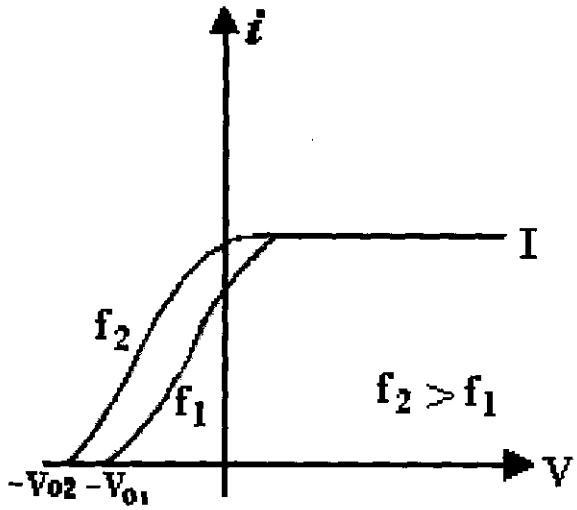



FIG. 8.3 CORRIENTE EN FUNCIÓN DEL VOLTAJE ACELERADOR PARA DIFERENTES FRECUENCIAS DE RADIACIÓN

c) La gráfica de la corriente en función del voltaje acelerador, manteniendo la intensidad de la radiación constante y variando la frecuencia de la radiación incidente es como se muestra en la Fig. 8.3.

d) La gráfica del contravoltaje o voltaje de frenado $V_o$ en función de la frecuencia de la radiación incidente, para diferentes materiales utilizados en el cátodo es como se muestra en la Fig. 8.4

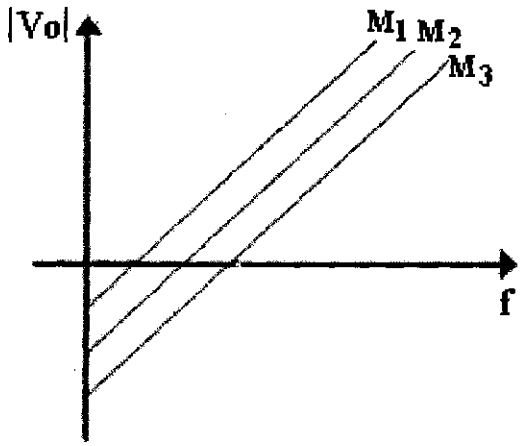



FIG. 8.4 VOLTAJE DE FRENADO EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA DE RADIACIÓN PARA DIFERENTES MATERIALES EN EL CÁTODO

De las anteriores gráficas se establecen los siguientes resultados:

- La corriente es proporcional a la intensidad de la radiación incidente, o sea que, el número de electrones liberados es proporcional a la intensidad, mientras que el contravoltaje permanece constante.(Fig. 8.2)

- El contravoltaje depende de la frecuencia de la radiación incidente. A mayor frecuencia, mayor el contravoltaje necesario para que la corriente sea nula. (Fig. 8.3)

- De la gráfica que se muestra en la Fig. 8.4, se obtiene lo siguiente,

Donde,

$$|V_o| = af + b$$

$$E_c = Af + B$$

$E_c$ : Energía cinética máxima de los electrones emitidos ($eV_o$)
A : Pendiente de la recta
B : Constante que depende del material.

- La emisión de electrones empieza sin demora observable de tiempo, aun para la radiación incidente de intensidad muy baja.

## 8.4 EXPLICACIÓN CUÁNTICA DEL EFECTO FOTOELÉCTRICO

En 1905 Albert Einstein (Fig. 8.5) logra explicar correctamente los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico, utilizando la hipótesis cuántica de Planck.

FIG. 8. 5 ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

En el efecto fotoeléctrico se tiene un proceso de colisión inelástica entre dos partículas, un fotón y un electrón, en el cual el fotón cede toda su energía al electrón. El electrón inicialmente se encuentra ligado al material. Einstein, aplica el principio de conservación de la energía en el proceso de la colisión y obtiene la siguiente ecuación llamada ecuación del efecto fotoeléctrico

$$\mathbf{E_c = hf - \varphi_o}$$

Donde,

$E_c$ : Energía cinética máxima de los electrones
h : Constante de Planck = $6.63 \times 10^{-34}$ joules.seg
f : Frecuencia de la radiación incidente

$\varphi_0$ : Función de trabajo, es la energía necesaria para desprender el electrón del material y depende del tipo de material utilizado en el cátodo.

$$\varphi_0 = hf_0$$

siendo $f_0$ la frecuencia mínima necesaria que debe tener un fotón para lograr desprender un electrón del material llamada ***Frecuencia umbral.***

Las funciones de trabajo para algunos materiales, se ilustran en la siguiente tabla:

| **MATERIAL** | Sodio | Aluminio | Cobalto | Cobre | Zinc | Plata | Platino | Plomo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$\varphi_0$ (eV)** | 2.28 | 4.08 | 3.9 | 4.7 | 4.31 | 4.73 | 6.35 | 4.14 |

## PROBLEMAS RESUELTOS

8.1 Una lámina de potasio se encuentra a 3 m de una fuente de luz cuya potencia es de 1 Watt. Si suponemos que un electrón del metal puede tomar su energía de un área circular alrededor de él, de radio 0.5 x $10^{-10}$ m, desde el punto de vista clásico. Cuánto tiempo necesitará para absorber la energía suficiente que le permita liberarse. Para sacar un electrón del potasio se necesitan 1.8 eV.

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

La potencia que le llega al electrón:

$$P_e = IA_e \quad \Rightarrow \quad P_e = \frac{P}{4\pi R^2}\pi r^2$$

$$P_e = \frac{E}{t} \quad \Rightarrow \quad E = P_e t \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{t} = \frac{P}{4\pi R^2}\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4\pi R^2 E}{P\pi r^2}$$

$$t = \frac{(4)(9)(1.8)(1.6x10^{-19})}{(1)(0.5x10^{-10})^2} = 4147.2 \quad \text{Seg} = 69.12 \quad \text{minutos}$$

8.2 El contravoltaje en un efecto fotoeléctrico para una superficie iluminada con luz de longitud de onda de 4910 Å, es de 0.71 V. Cuando se cambia la luz incidente el contravoltaje pasa a 1.43 V. Cuál es la nueva longitud de onda de la luz incidente.

$$K_1 = hf_1 - \varphi_o \quad \Rightarrow \quad eV_{o1} = \frac{hc}{\lambda_1} - \varphi_o$$

$$K_2 = hf_2 - \varphi_o \quad \Rightarrow \quad eV_{o2} = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi_o$$

$$eV_{o1} - eV_{o2} = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad e(V_{o1} - V_{o2}) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$\frac{e(V_{o1} - V_{o2})}{hc} = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{e(V_{o1} - V_{o2})}{hc}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{hc - e\lambda_1(V_{o1} - V_{o2})}{hc\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{hc\lambda_1}{hc - e\lambda_1(V_{o1} - V_{o2})}$$

$$\lambda_2 = \frac{(4910x10^{-10})(6.63x10^{-34})(3x10^8)}{(6.63x10^{-34})(3x10^8) - (1.6x10^{-19})((4910x10^{-10})(0.71 - 1.43))} = 3823 \text{ Å}$$

8.3 El umbral fotoeléctrico característico de cierto metal es 2750 Å. Encuentre:

a) El trabajo necesario para extraer un electrón del metal.

b) La máxima velocidad de los electrones liberados por luz de longitud de onda de 1800 Å. c) La energía cinética máxima de los fotoelectrones.

a) $$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{2750 \times 10^{-10}} = 1.09x10^{15} \text{ Hz}$$

$$\varphi_2 = hf_0 = (6.63 \times 10^{-34})(1.09 \times 10^{15}) = 7.23 \times 10^{-19} \text{ joules}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

b) $$K = hf - \varphi_O \quad \Rightarrow \quad K = \frac{hc}{\lambda} - \varphi_O$$

$$K = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^8)}{1800x10^{-10}} - 7.23x10^{-19} = 3.82x10^{-19} \quad \text{Joules} = 2.38 \quad \text{eV}$$

c) $$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(3.82 \times 10^{-19})}{9.1 \times 10^{-31}}} = 9.16 \times 10^5 \quad \frac{m}{seg}$$

8.4 Al producirse efecto fotoeléctrico con platino, el contravoltaje resultó ser de 0.8 V. Encuentre: a) La longitud de onda de la radiación utilizada. b) La longitud de onda máxima con la cual se puede conseguir efecto fotoeléctrico con este material. La función de trabajo del platino es de 5.3 V.

a) $$K = hf - \varphi_O \quad \Rightarrow \quad eV_O = hf - \varphi_O \quad \Rightarrow \quad f = \frac{eV_O + \varphi_O}{h}$$

$$f = \frac{(1.6x10^{-19})(0.8) + (5.3)(1.6x10^{-19})}{6.63x10^{-34}} = 1.47x10^{15} \quad Hz$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3x10^{8}}{1.47x10^{15}} = 2.03x10^{-7} \quad m = 2037 \text{ Å}$$

b) $$\varphi_o = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{\varphi_o} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(5.3)(1.6x10^{-19})} = 2.345x10^{-10} \quad m$$

$$\lambda = 2345 \text{ Å}$$

8.5 La longitud de onda umbral para emisión fotoeléctrica en tungsteno es de 2300 Å. Cuál debe ser la longitud de onda de la radiación incidente para que los electrones tengan una energía cinética máxima de 1.5 eV.

$$\varphi_o = \frac{hc}{\lambda_o} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{2300x10^{-10}} = 8.64x10^{-19} \quad \text{Joules}$$

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \varphi_o$$

$$\lambda = \frac{hc}{K + \varphi_o} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.5)(1.6x10^{-19}) + 8.64x10^{-19}} = 1.8x10^{-7} \quad m = 1800 \text{ Å}$$

8.6 La función de trabajo para el tungsteno metálico es 4.52 eV. a) Cuál es la longitud de onda de corte para el tungsteno. b) Cuál es la máxima energía cinética de los electrones cuando se usa radiación con una longitud de onda de 200 x $10^{-9}$ m. c) Cuál es el potencial de frenado.

a) $$\varphi_o = hf_o = \frac{hc}{\lambda_o} \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \frac{hc}{\varphi_o}$$

$$\lambda_o = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(4.52)(1.6x10^{-19})} = 2.75x10^{-7} \quad m = 2750 \text{ Å}$$

b) $$K = hf - \varphi_o = \frac{hc}{\lambda} - \varphi_o$$

$$K = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(200x10^{-9})} - (4.52)(1.6x10^{-19}) = 2.713x10^{-19} \quad \text{Joules}$$

$$K = 1.69 \quad eV$$

c) $$K = eV_o \quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{K}{e} = \frac{2.713x10^{-19}}{1.6x10^{-19}} = 1.69 \quad V$$

8.7 La mayor longitud de onda de luz que puede producir efecto fotoeléctrico en el potasio es 564 nanómetros. Calcule la función de trabajo del potasio.

$$\varphi_o = \frac{hc}{\lambda_o} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{564x10^{-9}} = 3.52x10^{-19} \quad \text{Joules} = 2.2 \quad eV$$

8.8 La longitud de onda umbral para el efecto fotoeléctrico en el tungsteno es de 270 nanómetros. Calcule la función de trabajo del tungsteno, y la energía cinética máxima que puede tener los electrones, cuando incide en él radiación de 120 nanómetros.

$$\varphi_o = \frac{hc}{\lambda_o} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{270x10^{-9}} = 7.36x10^{-19} \quad \text{Joules} = 4.6 \quad eV$$

$$K = hf - \varphi_o = \frac{hc}{\lambda} - \varphi_o$$

$$K = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{120x10^{-9}} - 7.36x10^{-19} = 9.2x10^{-19} \text{Joules} = 5.75 \quad eV$$

8.9 La función de trabajo del sodio metálico es 2.3 eV. Cuál es la luz de longitud de onda mayor que puede causar la emisión fotoeléctrica del sodio.

$$\varphi_O = \frac{hc}{\lambda_O} \quad \Rightarrow \quad \lambda_O = \frac{hc}{\varphi_O}$$

$$\lambda_O = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(2.3)(1.6x10^{-19})} = 540x10^{-9} \quad m$$

8.10 Qué diferencia de potencial debe aplicarse para detener los electrones más veloces emitidos por una superficie de níquel bajo la acción de luz ultravioleta de longitud de onda de 2000 Å. La función de trabajo del níquel es 5.01 eV.

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \varphi_O = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{2000x10^{-10}} - (5.01)(1.6x10^{-19})$$

$$K = 1.92x10^{-19} \text{ Joules}$$

$$V_O = \frac{K}{e} = \frac{1.92x10^{-19}}{1.6x10^{-19}} = 1.2 \quad V$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Cuantos de luz de energía 4.9 eV liberan electrones de un metal realizando un trabajo de 4.5 eV. Encuentre la máxima cantidad de movimiento que se transmite a la superficie del metal cada vez que se desprende un electrón.

**R/ta:** $3.41 \times 10^{-25}$ kg.m/seg.

2- Cuando se ilumina una superficie metálica con radiación de diferentes longitudes de onda, los contravoltajes de los electrones emitidos son los siguientes:

| $\lambda \times 10^{-7}$ m | 3.66 | 4.05 | 4.36 | 4.92 | 5.46 | 5.79 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_o$ [V] | 1.48 | 1.15 | 0.93 | 0.62 | 0.36 | 0.24 |

Haga una gráfica de voltaje contra frecuencia y a partir de ella encuentre: a) La frecuencia umbral del material. b) La función de trabajo del material. c) El valor de la constante de Planck.

3- La energía cinética máxima de los electrones del aluminio es 2.3 eV para radiación de 200 nanómetros de longitud de onda y 0.9 eV para 261 nanómetros. Con estos datos, calcule la constante de Planck y la función de trabajo del aluminio.

**R/ta:** $h = 6.6 \times 10^{-34}$ Joules.seg
$\varphi_o = 3.9$ eV

4- ¿Se emitirán electrones de una superficie de cobre, de función de trabajo 4.4 eV, cuando se ilumina con luz visible ( 400 nanómetros - 700 nanómetros)?

**R/ta:** No se emiten electrones.

5- Cuál es la función de trabajo del sodio metálico si la longitud de onda del umbral fotoeléctrico es de 680 nanómetros.

**R/ta:** 1.82 eV

6- Determine la energía cinética máxima de los electrones emitidos de una superficie de potasio por medio de luz ultravioleta de longitud de onda 2000 Å. Qué diferencia de potencial de frenado se requiere para detener la emisión de electrones. La longitud de onda umbral para el potasio es de 4400 Å.

**R/ta:** $K = 3.38$ eV
$V_o = 3.38$ V

7- Con qué rapidez serán emitidos los electrones más veloces desde una superficie cuya longitud de onda umbral es 600 nanómetros, cuando la superficie se ilumina con una longitud de onda de 400 nanómetros.

**R/ta:** $6 \times 10^5$ m/seg

8- Se emiten electrones desde una superficie metálica, con una energía cinética máxima de 3 eV, por medio de luz ultravioleta de longitud de onda de 1500 Å. Determine la función de trabajo del metal, la longitud de onda umbral del metal y la diferencia de potencial de frenado que se requiere para detener la emisión de electrones.

**R/ta:** $\varphi_o = 5.27$ eV
$\lambda_o = 2350$ Å
$V_o = 3$ V

9- Una superficie de sodio se ilumina con luz de longitud de onda 300 nanómetros. La función de trabajo del metal de sodio es de 2.46 eV. a) Determine la energía cinética máxima de los electrones emitidos. b) Determine la longitud de onda umbral para el sodio.

**R/ta:** a) $K = 1.68$ eV
b) $\lambda_o = 503$ nanómetros

10- Considere los metales litio, hierro y mercurio, los cuales tienen funciones de trabajo de 2.3 eV, 3.9 eV y 4.5 eV, respectivamente. Si sobre cada uno de estos metales incide luz de longitud de onda de 300 nanómetros, determine: a) Qué metales exhiben el efecto fotoeléctrico. b) La energía cinética máxima de los electrones en cada caso.

**R/ta:** a) Para $\varphi_o > 4.14$ eV, el mercurio no presenta efecto fotoeléctrico.
b) K (Li) = 1.84 eV, K (fe) = 0.241 eV

# CAPÍTULO 9

# EFECTO COMPTON

## 9.1 INTRODUCCIÓN

Arthur Compton
(1892 – 1962 )
USA

A pesar del éxito que tuvo la teoría cuántica para explicar el efecto fotoeléctrico, todavía se dudaba de su veracidad y entre los científicos que no la aceptaban del todo se encontraba Max Planck, su fundador. En 1923 Arthur H Compton observó un nuevo fenómeno que vino a ser la confirmación experimental de la naturaleza corpuscular de la radiación electromagnética y por ello se conoce como ***Efecto Compton***.

## 9.2 EFECTO COMPTON

El experimento para observar el fenómeno consiste en que un haz de rayos X monocromático (una sola frecuencia) incide sobre un blanco de grafito donde es dispersado por el blanco a diferentes ángulos con respecto a su dirección incidente. (Fig. 9.1)

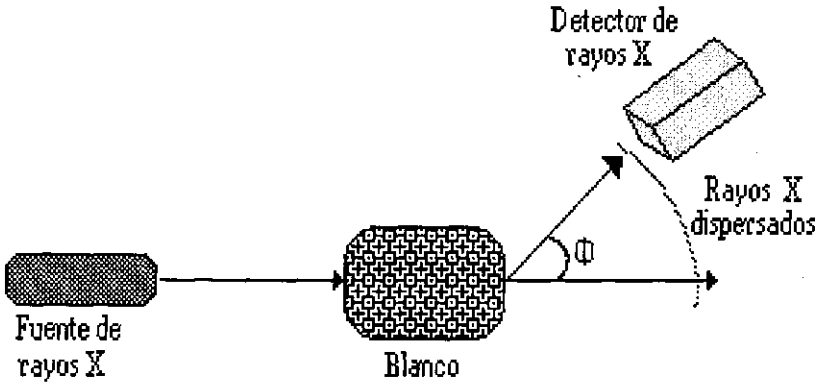



FIG. 9.1 ESQUEMA EXPERIMENTAL PARA OBSERVAR EL EFECTO COMPTON

## 9.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

a) A pesar de que el haz incidente era monocromático, el haz dispersado presenta dos longitudes de onda: La longitud de onda original $\lambda_0$ y otra longitud de onda mayor $\lambda$, donde $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ se le llama ***Corrimiento Compton.*** (Fig. 9.2)

b) El valor del corrimiento Compton, $\Delta\lambda$, crece hasta un máximo para luego disminuir a medida que el ángulo de dispersión $\varphi$ aumenta; es decir, la longitud de onda de la onda dispersada depende del ángulo de dispersión $\varphi$. (Fig. 9.2)

c) La variación del corrimiento Compton con respecto al ángulo de dispersión se cumple para cualquier material dispersor.

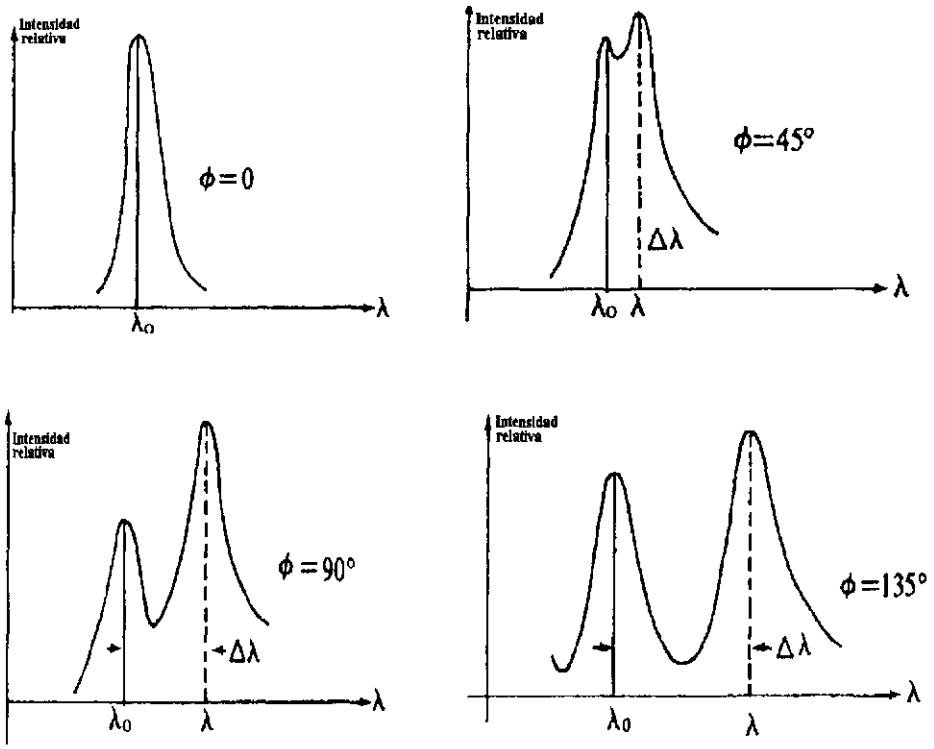



FIG. 9.2 EL CORRIMIENTO COMPTON AUMENTA A MEDIDA QUE EL ÁNGULO DE DISPERSIÓN AUMENTA HASTA LLEGAR A LOS 180° PARA LUEGO COMENZAR A DISMINUIR

## 9.4 EXPLICACIÓN CUÁNTICA DEL EFECTO COMPTON

Desde el punto de vista de la teoría cuántica, los rayos X son fotones de alta energía y cantidad de movimiento; por lo tanto al incidir los fotones sobre el material que sirve de blanco se realizan colisiones entre éstos y los electrones. Como consecuencia el fotón cede parte de su energía y emerge con una energía menor, o sea, una longitud de onda mayor.

Aplicando las leyes de la conservación de la energía y cantidad de movimiento se llega a la siguiente expresión que concuerda exactamente con las curvas experimentales de la Fig. 9.2.

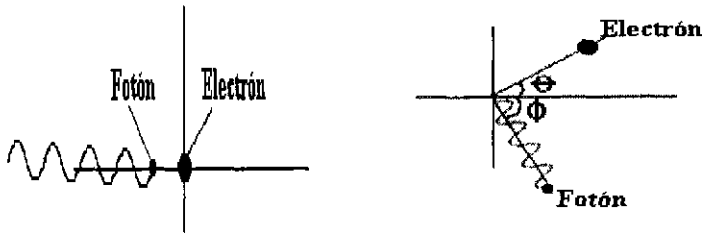
$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 C}(1 - \cos\varphi)$$

Donde $m_o$ es la masa en reposo de la partícula con la cual el fotón choca.

El factor $\frac{h}{m_0 C}$ se le denomina ***"Longitud de onda Compton"*** y tiene un valor de 0.0242 Å para el electrón.

## PROBLEMAS RESUELTOS

9.1 Demuestre la ecuación de Compton.




Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{P}_{inicial_i} = \vec{P}_{final}$$

$$P_i = P_e + P_f \qquad \therefore \qquad P_e = 0 \quad \text{(reposo)}$$

$$P_f = \frac{E}{c} \qquad \text{pero}: E = hf_o \qquad \Rightarrow \qquad P_f = \frac{hf_o}{c}$$

$$P_{inicial_i} = \frac{hf_o}{c} \qquad (1)$$

$$P_{final} = P_e + P_f$$

$$P_{final_x} = \frac{hf}{c}\text{Cos}\varphi + P_e\text{Cos}\theta \quad \text{(dirección en x)} \quad (2)$$

$$P_{final_y} = \frac{hf}{c}\text{Sen}\varphi - P_e\text{Sen}\theta \quad \text{(dirección en y)} \quad (3)$$

igualando (1) y (2):

$$\frac{hf_o}{c} = \frac{hf}{c}\text{Cos}\varphi + P_e\text{Cos}\theta$$

$$hf_o = hf\text{Cos}\varphi + cP_e\text{Cos}\theta$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

$$cP_e \mathrm{Cos}\theta = hf_o - hf\mathrm{Cos}\varphi \qquad (4)$$

igualando las componentes en y :

$$0 = \frac{hf}{c}\mathrm{Sen}\varphi - P_e\mathrm{Sen}\theta$$

$$P_e\mathrm{Sen}\theta = \frac{hf}{c}\mathrm{Sen}\varphi$$

$$cP_e\mathrm{Sen}\theta = hf\mathrm{Sen}\varphi \qquad (5)$$

elevando al cuadrado (4) y (5) :

$$(cP_e\mathrm{Cos}\theta)^2 = (hf_o - hf\mathrm{Cos}\varphi)^2 \qquad (6)$$

$$(cP_e\mathrm{Sen}\theta)^2 = (hf\mathrm{Sen}\varphi)^2 \qquad (7)$$

sumando (6) y (7):

$$(cP_e)^2\cos^2\theta + (cP_e)^2\mathrm{Sen}^2\theta = (hf_o)^2 - 2h^2ff_o\mathrm{Cos}\varphi + (hf)^2\mathrm{Cos}^2\varphi + (hf)^2\mathrm{Sen}^2\varphi$$

$$c^2P_e^2 = (hf_o)^2 + (hf)^2 - 2h^2ff_o\mathrm{Cos}\varphi \qquad (8)$$

$$E_e^2 = m_o^2c^4 + c^2P_e^2 \qquad \Rightarrow \qquad c^2P_e^2 = E_e^2 - m_o^2c^4 \qquad (9)$$

Aplicando el principio de conservación de la energía :

$$E_{inicial} = hf_o + m_oc^2$$

$$E_{final} = hf + E_e$$

Igualando :

$$hf_o + m_oc^2 = hf + E_e$$

$$E_e = hf_o - hf + m_oc^2 \qquad (10)$$

Reemplazando (10) en (9):

$$c^2P_e^2 = (hf_o - hf + m_oc^2)^2 - m_o^2c^4$$

$$c^2P_e^2 = [hf_o - hf]^2 + 2[hf_o - hf]m_oc^2 + m_o^2c^4 - m_o^2c^4 \qquad (11)$$

igualando (8) y (11):

$$(hf_o)^2 + (hf)^2 - 2h^2ff_oCos\varphi = [hf_o - hf]^2 + 2[hf_o - hf]m_oc^2 + m_o^2c^4 - m_o^2c^4$$

$$2h^2ff_o - 2h^2ff_oCos\varphi = 2h(f_o - f)m_oc^2$$

$$2h^2ff_o(1 - Cos\varphi) = 2h(f_o - f)m_oc^2$$

$$\frac{hc^2}{\lambda\lambda_o}(1 - Cos\varphi) = \left(\frac{c}{\lambda_o} - \frac{c}{\lambda}\right)m_oc^2$$

$$\frac{hc^2}{\lambda\lambda_o}(1 - Cos\varphi) = c\left(\frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda\lambda_o}\right)m_oc^2$$

$$hc(1 - Cos\varphi) = (\lambda - \lambda_o)m_oc^2$$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{hc}{m_oc}(1 - Cos\varphi)$$

$$\Delta\lambda = \frac{hc}{m_oc}(1 - Cos\varphi)$$

9.2 Cuando un fotón de longitud de onda 0.024 Å incide sobre un blanco, el fotón dispersado se detecta para un ángulo de 60°. Encuentre: a) La longitud de onda del fotón dispersado. b) La energía cinética del electrón. c) Si el blanco es un átomo de carbono ($m = 2 \times 10^{-26}$ kg), el corrimiento Compton.

a) $$\lambda - \lambda_O = \frac{h}{m_Oc}(1 - Cos\varphi)$$

$$\lambda = \lambda_O + \frac{h}{m_O c}(1 - \cos\varphi)$$

$$\lambda = 0.024x10^{-10} + \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^{8})}(1 - \cos 60) = 0.036 \text{ Å}$$

b) $$K = hf_O - hf = hc\left(\frac{1}{\lambda_O} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$K = (6.63x10^{-34})(3x10^{8})\left(\frac{1}{0.024x10^{-10}} - \frac{1}{0.036x10^{-10}}\right)$$

$$K = 2.76 \text{ x } 10^{-14} \text{ Joules} = 0.172 \text{ MeV}$$

c) $$\Delta\lambda = \frac{h}{m_o c}(1 - \cos\varphi)$$

$$\Delta\lambda = \frac{6.63x10^{-34}}{(2x10^{-26})(3x10^{8})}(1 - \cos 60) = 5.52x10^{-17} \text{ m} = 5.52x10^{-7} \text{ Å}$$

9.3 Un rayo X de longitud de onda de 0.708 Å experimenta dispersión Compton en parafina. Cuál será la longitud de onda del rayo X dispersado cuando el ángulo de dispersión es de: a) 90°. b) 180°.

a) $$\lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - \cos\varphi)$$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^{8})}(1 - \cos 90) = 2.42x10^{-12} \quad \text{m}$$

$$\lambda = \lambda_o + 2.42x10^{-12} = 0.708x10^{-10} + 2.42x10^{-12} = 0.732x10^{-10} \quad \text{m}$$

b) $$\lambda - \lambda_o = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^8)}(1 - Cos180) = 4.857x10^{-12} \quad m$$

$$\lambda = \lambda_o + 4.857x10^{-12} = 0.708x10^{-10} + 4.857x10^{-12} = 0.756x10^{-10} \quad m$$

9.4 Cuál es la longitud de onda de un rayo X que incide sobre grafito si después de ser dispersado con un ángulo de 60° la longitud de onda del rayo X resultó ser de 2.54 x $10^{-9}$ cm.

$$\lambda - \lambda_O = \frac{h}{m_O c}(1 - Cos\varphi)$$

$$\lambda - \lambda_O = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^8)}(1 - Cos60) = 1.21x10^{-12} \quad m$$

$$\lambda_O = \lambda - 1.21x10^{-12} = 2.54x10^{-11} - 1.21x10^{-12} = 2.41x10^{-11} \ m$$

$$\lambda_O = 0.241 \ Å$$

9.5 Un fotón que tiene una energía de $10^4$ eV realiza una colisión con un electrón en reposo y es dispersado con un ángulo de 60°. Encuentre: a) La longitud de onda, frecuencia y energía del fotón dispersado. b) La energía cinética, cantidad de movimiento y dirección del electrón después de la colisión.

a) $$\lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - Cos\varphi)$$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^8)}(1 - Cos60) = 1.21x10^{-12} \quad m$$

$$\lambda = \lambda_o + 1.21x10^{-12}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda_o} \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^8)}{(10^4)(1.6x10^{-19})} = 1.243x10^{-10} \quad m$$

$$\lambda = 1.243x10^{-10} + 1.21x10^{-12} = 1.2552 \quad Å$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3x10^8}{1.2552 \ x10^{-10}} = 2.39x10^{18} \ Hz$$

$$E = hf = (6.63x10^{-34})(2.39x10^{18}) = 1.58x10^{-15} \text{ joules} = 9904 \ eV$$

b) $K = hf_o - hf = h(f_o - f)$

$$K = (6.63x10^{-34})(2.413x10^{18} - 2.39x10^{18}) = 1.52x10^{-17} \quad \text{Joules}$$

$$K = 95.3 \quad eV$$

$$E_e = K + E_o = (95.3)(1.6x10^{-19}) + (9.1x10^{-31})(3x10^8)^2$$

$$E_e = 8.19152 \text{ x } 10^{-14} \quad \text{joules}$$

$$c^2 P_e^2 = E_e^2 - E_o^2 \quad \Rightarrow \quad P_e = \sqrt{\frac{E_e^2 - E_o^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{E_e^2 - m_o^2 c^4}{c^2}}$$

$$P_e = \sqrt{\frac{(8.19152x10^{-14})^2 - (9.1x10^{-31})^2 (3x10^8)^4}{(3x10^8)^2}} = 5.26x10^{-24} \quad \text{kg.m/seg}$$

$$hf\,Sen\varphi = cP_e Sen\theta \quad \Rightarrow \quad Sen\theta = \frac{hf\,Sen\varphi}{cP_e}$$

$$Sen\theta = \frac{(6.63x10^{-34})(2.39x10^{18})(Sen60)}{(3x10^8)(5.26x10^{-24})} = 0.86 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^o$$

9.6 Rayos X con longitud de onda igual a 0.24 x $10^{-9}$ m se dispersan por efecto Compton en un ángulo de 60° con respecto al rayo incidente. Encontrar: a) La longitud de onda de los rayos X dispersados. b) La energía de los fotones de los rayos X dispersados. c) La energía cinética de los electrones dispersados. d) El ángulo con que salen los electrones dispersados.

a) $\lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - Cos\varphi)$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^8)}(1 - Cos60) = 1.21x10^{-12} \quad m$$

$$\lambda = \lambda_o + 1.21\,x10^{-12}$$

$$\lambda = 0.24x10^{-9} + 1.21\,x10^{-12} = 2.41\ \mathring{A}$$

b) $$E = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(6.63x10^{-34}\right)\left(3x10^{8}\right)}{\left(2.41\,x10^{-10}\right)} = 8.24\,x10^{-16} \quad \text{Joules}$$

$$E = 5153.6 \quad eV$$

c) $$K = hf_o - hf = h\left(f_o - f\right) = hc\left(\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$K = \left(6.63x10^{-34}\right)\left(3x10^{8}\right)\left(\frac{1}{0.24x10^{-9}} - \frac{1}{2.41x10^{-10}}\right) = 3.43x10^{-18} \text{ Joules}$$

$$K = 21.5 \quad eV$$

d) $$E_e = K + E_o = (21.5)\left(1.6x10^{-19}\right) + \left(9.1x10^{-31}\right)\left(3x10^{8}\right)^2$$

$$E_e = 8.1904x10^{-14} \quad \text{joules}$$

$$c^2 P_e^2 = E_e^2 - E_o^2 \qquad \Rightarrow \quad P_e = \sqrt{\frac{E_e^2 - E_o^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{E_e^2 - m_o^2 c^4}{c^2}}$$

$$P_e = \sqrt{\frac{\left(8.1904x10^{-14}\right)^2 - \left(9.1x10^{-31}\right)^2\left(3x10^{8}\right)^4}{\left(3x10^{8}\right)^2}}$$

$$P_e = 2.698\,x10^{-24} \quad \text{kg.m/seg}$$

$$hf\,Sen\varphi = cP_e\,Sen\theta \qquad \Rightarrow \qquad Sen\theta = \frac{hf\,Sen\varphi}{cP_e}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3x10^8}{2.41x10^{-10}} = 1.24x10^{18} \quad Hz$$

$$Sen\theta = \frac{(6.63x10^{-34})(1.24\,x10^{18})(Sen60)}{(3x10^8)(2.698\,x10^{-24})} = 0.873 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60.8^o$$

9.7 Fotones incidentes de 10.39 KeV de energía se dispersan por efecto Compton y el haz dispersado se observa a 45° con respecto al haz incidente. a) Cuál es la energía de los fotones dispersados a ese ángulo. b) Cuánta energía cinética se proporciona al electrón dispersado.

a) $$E_o = \frac{hc}{\lambda_o} \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \frac{hc}{E_o} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^8)}{(10.39)(1000)(1.6x10^{-19})} = 1.196x10^{-10} \quad m$$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - Cos\varphi)$$

$$\lambda_{\varphi} = 1.196\,x10^{-10} + 2.4285\,x10^{-12}\,(0.2928) = 1.203\,x10^{-10}\ m$$

b) $$K = hf_o - hf = h(f_o - f) = hc\left(\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$K = (6.63x10^{-34})(3x10^8)\left(\frac{1}{1.196\,x10^{-10}} - \frac{1}{1.203\,x10^{-10}}\right)$$

$$K = 9.67x10^{-18}\ Joules = 60.48\,eV$$

9.8 Rayos $\gamma$ de 0.662 MeV de energía se dispersan por efecto Compton. a) Cuál es la energía del fotón dispersado observado a un ángulo de dispersión de 60°. b) Cuál es la energía cinética de los electrones dispersados.

a) $$E = hf_o = \frac{hc}{\lambda_o} \quad \Rightarrow \quad \lambda_o = \frac{hc}{E}$$

$$\lambda_o = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^8)}{(0.662x10^6)(1.6x10^{-19})} = 1.8778x10^{-12} \quad m$$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - Cos\varphi)$$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^8)}(1 - Cos60) = 1.2142\,x10^{-12} \quad m$$

$$\lambda = \lambda_o + 1.2142\,x10^{-12}$$

$$\lambda = 1.8778\,x10^{-12} + 1.2142\,x10^{-12} = 3.092\,x\,10^{-12} \quad m$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^8)}{3.092x10^{-12}} = 6.432x10^{-14} \quad Joules = 0.402x10^6 \ eV$$

b) $$K = hf_o - hf = h(f_o - f) = hc\left(\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$K = (6.63x10^{-34})(3x10^8)\left(\frac{1}{1.877\,x10^{-12}} - \frac{1}{3.092\,x10^{-12}}\right)$$

$$K = 4.159\,x10^{-14} \ Joules = 0.260\,MeV$$

9.9 Un haz de rayos X es dispersado por electrones libres a 45° de la dirección del haz, los rayos X dispersados tienen una longitud de onda de 0.022 Å. Cuál es la longitud de onda de los rayos X en el haz original.

$$\lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - Cos\varphi)$$

$$\lambda - \lambda_o = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^8)}(1 - Cos45) = 7.113x10^{-13} \quad m$$

$$\lambda_o = \lambda - 7.11x10^{-13}$$

$$\lambda_o = 0.022x10^{-10} - 7.113x10^{-13} = 1.488x10^{-12} m = 0.0148 \text{ Å}$$

9.10 Considérese un haz de rayos X con longitud de onda de 1 Å y también un haz de rayos $\gamma$ provenientes de una muestra $C_8^{137}$ con longitud de onda 1.88 x $10^{-2}$ Å. Si la radiación dispersada por los electrones libres se observan a 90° del haz incidente.

a) Cuál es el corrimiento en longitud de onda Compton en cada caso.
b) Qué energía cinética se le comunica al electrón de retroceso en cada caso.
c) Qué porcentaje de la energía del fotón incidente se pierde en la colisión en cada caso.

a) $$\lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o c}(1 - Cos\varphi)$$

$$\Delta\lambda = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.1x10^{-31})(3x10^8)}(1 - Cos90) = 2.43x10^{-12} \quad m = 0.0243 \text{ Å}$$

Este resultado es el mismo para los rayos X y los rayos $\gamma$.

b) $$c(P_o - P) = K$$

$$\frac{hc}{\lambda_o} = K + \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda$$

$$\frac{hc}{\lambda_o} = K + \frac{hc}{\lambda_o + \Delta\lambda}$$

$$K = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_o(\lambda_o + \Delta\lambda)}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

Para el rayo X con $\lambda_o = 1Å$

$$K = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})(2.43x10^{-12})}{(1x10^{-10})(1+0.024)x10^{-10}} = 4.73x10^{-17} \quad \text{Joules} = 295 \quad \text{eV}$$

Para los rayos $\gamma$ con $\lambda_o = 1.88x10^{-2}$ Å:

$$K = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})(2.43x10^{-12})}{(1.88x10^{-12})(0.0188+0.024)x10^{-10}} = 6x10^{-14} \quad \text{Joules} = 375 \quad \text{KeV}$$

c) La energía del fotón de rayos X incidentes es:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{1x10^{-10}} = 1.99x10^{-15} \quad \text{Joules} = 12.4 \quad \text{KeV}$$

La energía perdida por el fotón es igual a la energía ganada por el electrón, 0.295 KeV, de modo que la pérdida porcentual en energía es:

$$\frac{0.295 \text{ KeV}}{12.4 \text{ KeV}} x\, 100 = 2.4\%$$

La energía del fotón del rayo $\gamma$ incidente es:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \text{ x } 10^{-34})(3 \text{ x } 10^{8})}{1.88 \text{ x } 10^{-12}} = 1.06x10^{-13} \quad \text{Joules} = 660 \quad \text{KeV}$$

La energía perdida por el fotón es igual a la energía perdida por el electrón, 375 KeV, de modo que la pérdida porcentual en energía es:

$$\frac{375 \text{ KeV}}{660 \text{ KeV}} x\, 100 = 57\%$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Fotones de rayos X con una longitud de onda de 0.02480 nanómetros inciden sobre un blanco y los fotones dispersados por efecto Compton se observan a 90°. a) Cuál es la longitud de onda de los fotones dispersados. b) Cuál es la cantidad de movimiento de los fotones incidentes y los fotones dispersados. c) Cuál es la energía cinética de los electrones dispersados. d) Cuál es la cantidad de movimiento (magnitud y dirección) de los electrones dispersados.

**R/ta:** a) $\lambda = 0.272$ Å

b) $P_o = 2.67 \times 10^{-23}$ kg.m/seg; $P = 2.43 \times 10^{-23}$ kg.m/seg

c) $K = 6.63 \times 10^{-16}$ Joules = 4143.8 eV

d) $P_e = 3.5 \times 10^{-23}$ kg.m/seg; $\theta = 44°$

2- En la dispersión de Compton, calcular la energía cinética máxima que se proporciona al electrón dispersado para una energía dada del fotón.

**R/ta:** $K = \dfrac{2E^2}{2E + m_e c^2}$

3- Un fotón de rayos X cuya frecuencia inicial era de $1.5 \times 10^{19}$ Hz emerge de una colisión con un electrón, con una frecuencia de $1.2 \times 10^{19}$ Hz. Cuánta energía cinética le transmitieron al electrón.

**R/ta:** $K = 1.989 \times 10^{-15}$ Joules = 12.43 KeV

4- Un fotón de rayos X de frecuencia inicial $3 \times 10^{19}$ Hz choca con un electrón y es dispersado a 90°. Determinar su nueva frecuencia.

**R/ta** : $f = 2.4 \times 10^{19}$ Hz.

5- Determinar la energía de un fotón de rayos X que puede ceder una energía máxima de 50 KeV a un electrón.

**R/ta:** E = 50 KeV

6- Un haz monocromático de rayos X, cuya longitud de onda es 0.558 Å, se dispersa a 46°. Hallar la longitud de onda del haz dispersado.

**R/ta:** $\lambda = 0.565$ Å.

7- Sobre electrones libres inciden fotones de longitud de onda 0.024 Å. a) Encontrar la longitud de onda de un fotón que es dispersado a 30° de la dirección incidente y la energía cinética suministrada al electrón en retroceso. b) Repetir el cálculo si el ángulo de dispersión es 120°.

**R/ta:** a) $\lambda = 0.027$ Å E = 0.057 MeV
b) $\lambda = 0.060$ Å E = 0.31 MeV

8- Un fotón de rayos X de energía inicial $1 \times 10^5$ eV que viaja en la dirección positiva del eje X, incide sobre un electrón libre y en reposo. El fotón es dispersado a ángulo recto en la dirección positiva del eje Y. Encontrar las componentes de la cantidad de movimiento del electrón en retroceso.

**R/ta:** $P_x = 5.33 \times 10^{-23}$ kg.m/seg
$P_y = 4.46 \times 10^{-23}$ kg.m/seg

9- Determinar el corrimiento máximo en la longitud de onda en la dispersión Compton de fotones por protones.

**R/ta:** $\Delta\lambda = 2.64 \times 10^{-5}$ Å

10- Cuando fotones de longitud de onda de 0.024 Å inciden sobre un blanco, los fotones dispersados son detectados a un ángulo de 60°. Calcular: a) La longitud de onda de los fotones dispersados. b) El ángulo a que es dispersado el electrón.

**R/ta:** a) $\lambda = 0.036$ Å
b) $\theta = 41°$

# CAPÍTULO 10

# RAYOS X

## 10.1 INTRODUCCIÓN

Wilhelm Conrad Röentgen
(1845 – 1923 )
Alemania

Los rayos X son ondas electromagnéticas de longitudes de onda muy pequeñas. La fuente más común de los rayos X es la desaceleración de electrones de alta energía al bombardear un blanco metálico; estos rayos se usan como un medio de diagnóstico en medicina, en el tratamiento de ciertas formas del cáncer, en la conservación de los alimentos, en la metalurgia, en la determinación de fallas estructurales, en la determinación de las estructuras cristalinas de muestras sólidas, etc.

## 10.2 PRODUCCIÓN DE RAYOS X

En el año 1895 el físico alemán Wilhelm Röentgen descubrió que cuando un haz de electrones altamente energéticos choca contra un material duro que sirve de blanco se produce una radiación electromagnética llamada ***Rayos X.***

Para observar y analizar los rayos X se empleó un dispositivo como el que se muestra en la Fig. 10.1. Consiste básicamente de dos electrodos encerrados por un tubo al vacío, a los cuales se les aplica un potencial acelerador (V) para que los electrones salgan del cátodo (K) con una gran energía y choquen en el ánodo (A) que es el material que sirve de blanco.

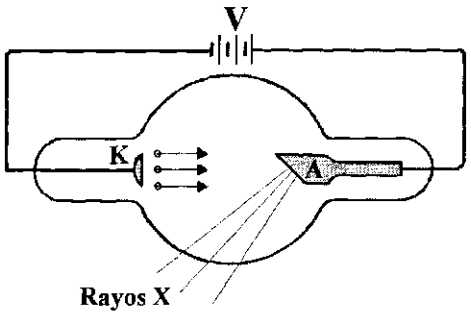



FIG. 10.1 ESQUEMA EXPERIMENTAL PARA PRODUCIR Y ANALIZAR LOS RAYOS X

## 10.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

a) La emisión de rayos X depende del material utilizado como blanco y del voltaje acelerador.

b) Para que halla una emisión de rayos X es necesario aplicar un voltaje acelerador mínimo que a su vez depende del material que sirve de blanco . Si el voltaje no es suficiente no habrá emisión de rayos X.

c) Si se hace una gráfica de la intensidad de la radiación emitida en función de la longitud de onda, se obtienen las curvas para diferentes voltajes aceleradores que se muestran en la figura 10.2.

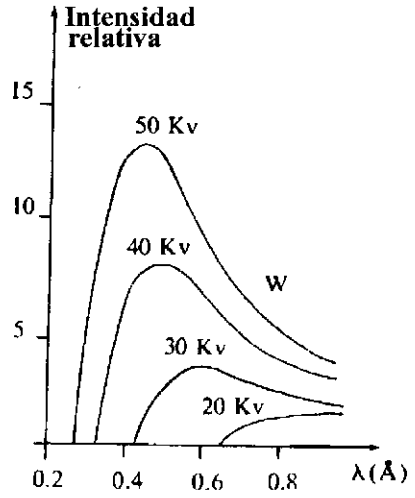



FIG. 10.2 ESPECTRO CONTINUO DE LOS RAYOS X PARA DIFERENTES VALORES DE POTENCIALES ACELERADOS

Cuando se alcanza el voltaje mínimo para que haya emisión de rayos X, la longitud de onda de la radiación puede tomar cualquier valor a partir de una longitud de onda mínima. O sea que, para un valor dado del voltaje acelerador los rayos X presentan un espectro continuo debido a que cuando el electrón choca, pierde su energía para crearse un fotón con esa misma energía. Este proceso se le denomina en alemán ***bremsstrahlung***, que significa ***radiación por frenado***.

Utilizando el principio de conservación de la energía entre un electrón y un fotón se obtiene la siguiente ecuación

$$\lambda_{min} = \frac{hC}{eV}$$

Donde,

$\lambda_{min}$ : Longitud de onda mínima de los rayos X
h : Constante de Planck.
C : Velocidad de la luz.
e : Carga del electrón.
V : Voltaje acelerador.

d) También puede aparecer en la gráfica de la Fig. 10.2 unos picos de radiación intensa que consta de algunas longitudes de onda solamente, llamándosele "Espectro característico" (Fig. 10.3); esta situación se presenta para algunos materiales como por ejemplo el Molibdeno (Mo) y el wolframio (W).

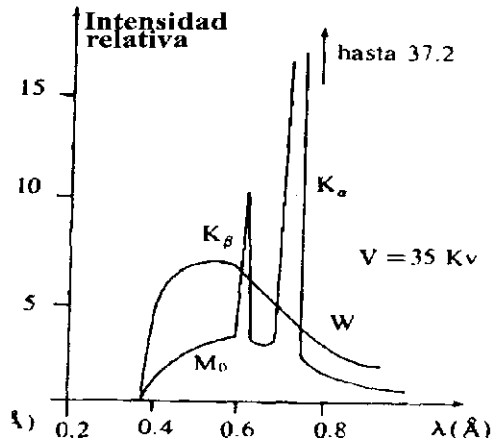



FIG. 10.3 ESPECTRO CARACTERÍSTICO DE LOS RAYOS X PARA EL $M_o$ Y EL W SUJETOS A UN MISMO POTENCIAL ACELERADOR

## 10.4 PROPIEDADES DE LOS RAYOS X

- Velan placas fotográficas
- Descargan objetos cargados eléctricamente
- Ionizan gases
- Penetran en objetos de espesores considerables, cuando estos son de bajo número atómico.
- No son desviados por campos eléctricos ni magnéticos.
- Se propagan en línea recta.
- Se difractan en cristales atómicos, demostrando que son radiaciones electromagnéticas de longitud de onda muy pequeña.
- Se polarizan.
- Presentan una naturaleza corpuscular.

## 10.5 LEY DE MOSELEY

H. Moseley en 1913, quien luego de medir las longitudes de onda correspondientes a las líneas $K_\alpha$ para diferentes elementos, encontró que existía una relación sencilla entre la longitud de onda de la línea y el número atómico del elemento correspondiente. Esta relación se expresa hoy en dia como,

$$\sqrt{f} = A(Z - b)$$

Donde f, es la frecuencia, Z es el número atómico del elemento, A y b dos constantes cuyos valores dependen de la transición observada. El factor ( Z - b) representa la carga neta o efectiva del núcleo que actúa sobre el electrón atómico que realiza la transición, y b se denomina ***Constante de apantallamiento.***

Para las series K y L, que son las más comunes, los valores de la constante b son:

$b_k = 1$, $b_L = 7.4$ y los valores teóricos de la constante A para las líneas $K_\alpha$ y $L_\alpha$ son:

$A_{K\alpha} = 4.97 \times 107\ seg^{-1/2}$
$A_{L\alpha} = 2.14 \times 107\ seg^{-1/2}$

## 10.6 ABSORCIÓN DE RAYOS X

Cuando un haz de rayos X atraviesa un material, los fotones del haz interactúan con los átomos del material produciendo efecto fotoeléctrico y Compton; parte de los fotones incidentes desaparecen, los demás son dispersados y la intensidad del haz cuando emerge del material es menor.

La intensidad de los rayos X cuando atraviesa un material obedece la ley de atenuación exponencial, o sea,

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

Donde,

I : Intensidad de la radiación después de atravesar un espesor x del material.

$I_0$ : Intensidad de la radiación incidente.

$\mu$ : Coeficiente de absorción propia de cada material y depende de la energía del haz de rayos X.

El coeficiente de absorción $\mu$ para un determinado material es proporcional a la densidad ($\delta$) del mismo e independiente de su estado físico o químico, o sea,

$$\mu = \mu_m \delta$$

Donde $\mu_m$, se le denomina ***Coeficiente de absorción másico***, que depende de la energía de los rayos X.

El espesor necesario de un determinado material, que reduce la intensidad del haz incidente a la mitad de su valor: $I = ½ I_o$, denominado ***Capa hemirreductora*** se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$d = \frac{Ln2}{\mu}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## PROBLEMAS RESUELTOS

10.1 Determinar la constante de Planck a partir del hecho de que la longitud de onda mínima de rayos X producida por electrones de 40 KeV es de 3.11 x $10^{-11}$ m.

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

$$h = \frac{eV\lambda_{min}}{c} = \frac{(1.6x10^{-19})(40x10^{3})(3.11x10^{-11})}{3x10^{8}} = 6.63x10^{-34} \quad \text{Joules.Seg}$$

10.2 Un aparato normal de rayos X puede tener un potencial acelerador de 50000 voltios. Determinar la longitud de onda más corta presente en su radiación.

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

$$\lambda_{min} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.6x10^{-19})(50000)} = 0.25 \ \text{Å}$$

10.3 Cuál es la longitud de onda de los rayos X emitidos cuando electrones de 100 KeV golpean un blanco. Cuál es su frecuencia.

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

$$\lambda_{min} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.6x10^{-19})(100x10^{3})} = 1.24x10^{-11} \quad \text{m}$$

$$f_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = \frac{3x10^{8}}{1.24x10^{-11}} = 2.41x10^{19} \quad \text{Hz}$$

10.4 Un aparato produce rayos X de 0.1 Å. Qué voltaje acelerador emplea.

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{hc}{e\lambda_{min}} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.6x10^{-19})(0.1x10^{-10})} = 1.24x10^{5} \quad V$$

10.5 La línea $K_\alpha$ del Tulio tiene una longitud de onda de 0.246 Å. Compare la energía de este fotón $K_\alpha$ con la energía de la masa en reposo de un electrón.

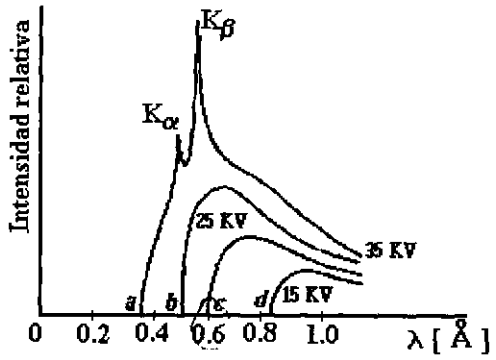
$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} \quad \Rightarrow \quad eV = E_\alpha = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

$$E_\alpha = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{0.246x10^{-10}} = 8.08x10^{-15} \quad \text{Joules}$$

$$E_O = m_O c^2 \quad \Rightarrow \quad E_O = (9.1x10^{-31})(3x10^{8})^2 = 8.19x10^{-14} \quad \text{Joules}$$

$$\frac{E_\alpha}{E_O} = \frac{8.08x10^{-15}}{8.19x10^{-14}} = 0.098 \quad \Rightarrow \quad E_\alpha = 0.098E_O$$

10.6 De la gráfica, determinar el potencial acelerador para la curva que termina en el punto c.




Según la gráfica, el punto c corresponde a la longitud de onda λ = 0.6 Å

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{hc}{e\lambda_{min}}$$

$$V = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.6x10^{-19})(0.6x10^{-10})}$$

$$V = 20718.7 \quad V$$

10.7 De la gráfica del problema 10.6, determine la máxima energía cinética de los electrones que producen espectros de rayos X que termine en el punto c.

Del problema anterior, V = 20718.7 V

$$K = eV$$

$$K = (1.6x10^{-19})(20718.7) = 3.315x10^{-15} \quad \text{Joules}$$

$$K = 20718.7 \quad eV$$

10.8 Determine el voltaje aplicado a un tubo de rayos X que dará un límite de 1 Å a las longitudes de onda corta.

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{hc}{e\lambda_{min}} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.6x10^{-19})(1x10^{-10})} = 1.24 \text{ x } 10^{4} \text{ V}$$

10.9 a) Cuál es el rayo X más energético emitido cuando un blanco de metal es bombardeado por electrones de 40 KeV. b) Cuál es la máxima frecuencia de los rayos X producidos por electrones acelerados a través de una diferencia de potencial de 20 KV

a) $$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.6x10^{-19})(40000)} = 3.1x10^{-11} \quad m$$

b) $$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} = \frac{(6.63x10^{-34})(3x10^{8})}{(1.6x10^{-19})(20000)} = 6.21x10^{-11} \quad m$$

$$f_{max} = \frac{c}{\lambda_{min}} = \frac{3x10^{8}}{6.21x10^{-11}} = 4.8x10^{18} \quad Hz$$

10.10 Calcule el espesor de la capa hemirreductora del aluminio para rayos X de una longitud de onda determinada, sabiendo que el coeficiente de absorción másico del aluminio para esa longitud de onda es de 5.3 $m^2/kg$. La densidad del aluminio es 2.6 $gm/cm^3$.

$$x = \frac{Ln\,2}{\mu_n \delta}$$

$$x = \frac{Ln\,2}{(5.3)(2600)} = 5.03 \text{ x } 10^{-5} \quad m$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Entre los electrodos de un tubo de rayos X se aplica una diferencia de potencial de 60 KV. Si la longitud de onda mínima de los rayos X emitidos por él es de 0.206 Å, encuentre el valor de la constante de Plank.

**R/ta:** $h = 6.592 \times 10^{-34}$ Joules.seg

2- En un tubo de rayos X los electrones son acelerados mediante una diferencia de potencial de 50 KV, Encuentre la longitud de onda mínima de los rayos X emitidos, si solamente la mitad de la energía de cada electrón se convierte en un fotón.

**R/ta:** $l = 0.497$ Å

3- a) Demostrar que la longitud de onda de corte en la parte baja del espectro continuo de rayos X está dada por $\lambda_{min} = 12.4$ Å/V, donde, V es el voltaje aplicado en kilovoltios. b) Cuál es la longitud de onda mínima si el voltaje a través de un tubo de rayos X es de 186 KV.

**R/ta:** $\lambda = 0.067$ Å

4- Cuál es la longitud de onda límite de la región del espectro de rayos X, sabiendo que si el voltaje aplicado al tubo disminuye en 23 KV, la longitud de onda buscada se hace dos veces mayor.

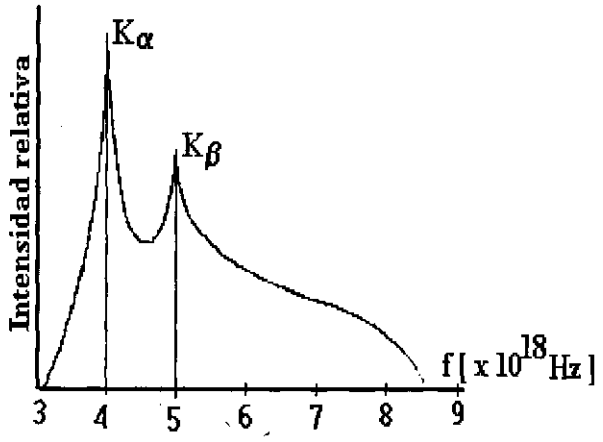
**R/ta:** $\lambda = 0.27$ Å

5- De la gráfica del problema 10.6, determine la máxima energía de los electrones que producen espectros de rayos X que terminen en los puntos a,b, y d

**R/ta:** Punto a : 0.0354 MeV
Punto b : 0.0248 MeV
Punto d : 0. 0151 MeV

6- La gráfica que se muestra, representa un espectro de rayos X de un metal. Si la energía requerida para desalojar un electrón de la capa K es 20 KV, determine de esta gráfica a) la energía requerida para desalojar un electrón de la capa L, y b) la máxima energía cinética de los electrones incidentes sobre este blanco.

**R/ta:** a) 3.425 KeV
b) 35.2 KeV




7- De la gráfica del problema 6, determine el voltaje acelerador máximo requerido para que se produzca la línea $K_\beta$.

**R/ta:** $2.07 \times 10^4$ V

8- Si la línea $K_\alpha$ de un elemento tiene una longitud de onda de 3.50 Å. Cuál es este elemento (consulte la tabla periódica para identificar su símbolo).

**R/ta:** Z = 20

9- Rayos X provenientes de un tubo con blanco de cobalto (Z=27) presentan tres picos en el espectro característico correspondientes a líneas $K_\alpha$ así: Una muy intensa de longitud de onda de 1.785 Å para el cobalto (Z = 27) y las otras dos, más débiles, de longitudes de onda de 2.285 Å y 1. 537 Å provenientes de dos elementos desconocidos presentes en el blanco además del cobalto. A partir de la ley de Moseley y sin utilizar explícitamente el valor de la constante A, encuentre el número atómico de los dos elementos e identifíquelos.

**R/ta:** Z= 24 , Z = 29

10- El coeficiente de absorción de cierto material para rayos X de longitud de onda de 1 Å es de 3 $cm^{-1}$ y para una longitud de onda de 2 Å es de 15 $cm^{-1}$. Si el haz de rayos X que contiene intensidades iguales de las dos radiaciones, incide sobre el material considerado, para qué espesor de éste la razón de las dos intensidades transmitidas ($I_1/I_2$) será de 4 a 3.

**R/ta:** 0.024 cm

# CAPÍTULO 11

# ESPECTROSCOPÍA Y MODELOS ATÓMICOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

## 11.1 INTRODUCCIÓN

Niels Bohr
(1885 – 1962 )
Dinamarca

Uno de los métodos de identificación más poderoso que existe para los elementos y compuestos de la naturaleza, es su análisis espectroscópico. En general cuando una sustancia se somete a condiciones tales que la energía total del sistema se incrementa, luego de cierto tiempo posterior a la extinción de la perturbación externa, el sistema regresa a su condición inicial, emitiendo esta energía extra en forma de radiación. Cada sistema lo hace de manera diferente y el análisis tanto del espectro de emisión como de la absorción, son el tema de la espectroscopía.

## 11.2 ESPECTROSCOPÍA

Es la obtención y el estudio de los espectros atómicos de los elementos. La espectroscopía consiste en lo siguiente: Si por un procedimiento especial se le suministra energía a un átomo de un elemento, en este átomo se producen transiciones electrónicas, emitiendo el exceso de energía en forma de radiación electromagnética. Luego se hace pasar la radiación emitida a través de un prisma que la descompone en diferentes longitudes de onda que componen la radiación; colocando un dispositivo especial detrás del prisma se podrá detectar el espectro (Fig. 11.1). El conjunto de prisma y dispositivo que permite ver el espectro se le llama ***Espectrógrafo.***

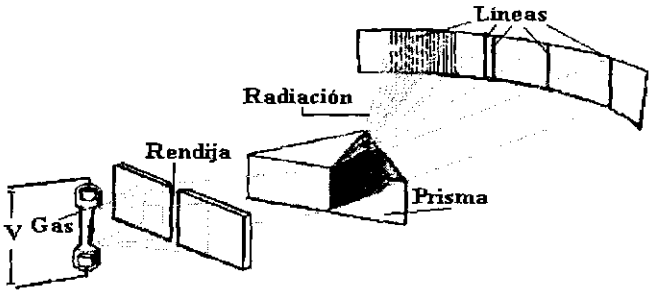



FIG. 11.1 ESQUEMA BÁSICO DE UN ESPECTROGRAFO

Los espectros pueden ser:

a) **Espectro de líneas:** Son radiaciones emitidas por los átomos y cada línea corresponde a una longitud de onda. (Fig. 11.2).

b) **Espectro de bandas:** Son radiaciones emitidas por moléculas presentando bandas más o menos anchas de diferentes intensidades que también corresponde a ciertas longitudes de onda. (Fig. 11.3).

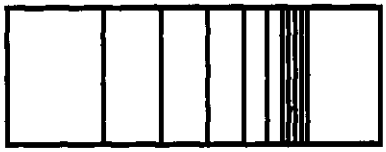


FIG. 11.2 ESPECTRO DE LÍNEAS

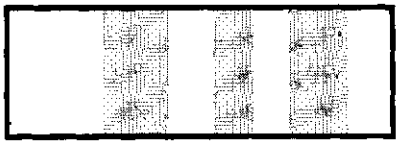


FIG. 11.3 ESPECTRO DE BANDAS

Para suministrar el exceso de energía a los átomos o moléculas de una sustancia, se utilizan los siguientes métodos:

- Absorción de radiación electromagnética
- Transformación de la energía cinética en colisiones entre electrones y átomos.
- Excitación térmica

Según el método utilizado para suministrar el exceso de energía a los átomos de una sustancia, el espectro resultante de la radiación que emiten puede ser de dos clases:

1. **Espectro atómico de emisión:** Se obtiene a partir de la radiación emitida directamente por los átomos de la sustancia que tienen un exceso de energía. (Fig. 11.4).

2. **Espectro atómico de absorción:** Se coloca frente a la sustancia una fuente de luz de una amplio espectro continuo. Al incidir la radiación sobre la muestra, esta absorbe ciertas longitudes de onda y el resto de la radiación atraviesa la muestra sin modificarse. (Fig. 11.5).

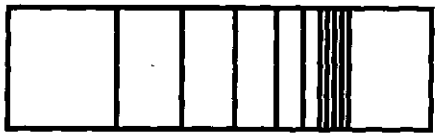


FIG. 11.4 LÍNEAS DEL ESPECTRO ATÓMICO DE EMISIÓN

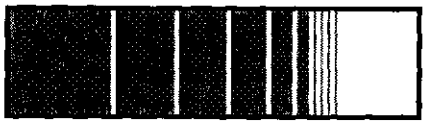


FIG. 11.5 LÍNEAS DEL ESPECTRO ATÓMICO DE ABSORCIÓN

Al comparar el espectro de emisión y el espectro de absorción para el mismo elemento, las líneas oscuras de la emisión coinciden con las líneas blancas del de absorción. O sea que las longitudes de onda que un cuerpo emite son las mismas que el cuerpo puede absorber.

## 11.3 SERIES ESPECTRALES DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

Inicialmente se pensó que la serie de líneas que aparecen en un espectro atómico se encontraban distribuidas al azar, pero aproximadamente en al año 1883 se observó que a medida que la longitud de onda correspondiente a cada línea se va haciendo menor, su intensidad disminuye y las líneas se van acercando entre sí hasta que es imposible ver la separación entre ellas. A este conjunto de líneas que tienen estas propiedades se le llama **"Serie espectral"**.

Una de las series espectrales del átomo de hidrógeno en la región visible es la "Serie de Balmer" (Fig. 11.6); quien encontró una ecuación para determinar las longitudes de onda de las líneas que componen la serie.

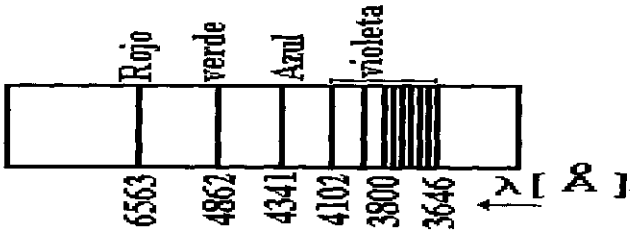



FIG. 11.6 SERIE ESPECTRAL DE BALMER

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Donde R, es la constante de Rydberg que se determina experimentalmente. Su valor es:

$$R = 1.0967800 \times 10^7 \ m^{-1}.$$

Trabajos posteriores demostraron que además de la serie de Balmer de la radiación emitida por el átomo de hidrógeno excitado; existían otras series espectrales que se encuentran en la región del ultravioleta (serie de Lyman) y en la región infrarroja del espectro electromagnético (series de Paschen, brackett, Pfund y Humphrey), algunas de estas series se muestran en la Fig 11.7.

Rydberg generalizó la ecuación de Balmer para cualquier serie espectral del átomo de hidrógeno por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^{\,2}} - \frac{1}{n_2^{\,2}}\right) \quad n_2 > n_1$$

FIG. 11.7 ALGUNAS SERIES ESPECTRALES DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

Donde $n_1 = 1, 2, 3, \ldots$ es el número que corresponde a cada una de las series conocidas y $n_2$ es la línea correspondiente a la serie considerada.

## 11.4 MODELOS ATÓMICOS

Para tratar de entender como es la estructura del átomo, se idearon varios modelos entre los cuales los más importantes fueron:

**a) Modelo atómico de Thomson:** En 1898, Joseph John Thomson supone que los electrones se encuentran sumergidos dentro de una esfera de materia de carga positiva, uniformemente distribuida en ella (Fig 11.8).

La cantidad de carga negativa era igual a la cantidad de carga positiva para que el átomo fuera neutro.

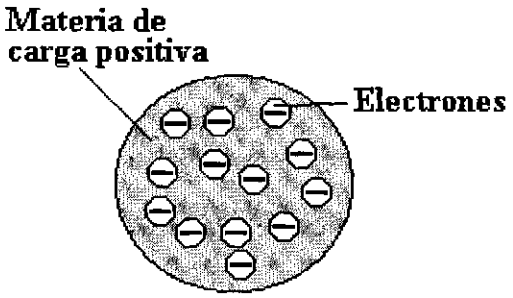



FIG. 11.8 MODELO ATÓMICO DE THOMSON

Los electrones ocupaban ciertas posiciones de equilibrio dentro de la esfera de materia, de manera que las fuerzas electrostáticas estaban equilibradas y el sistema fuera estable.

Además podían oscilar alrededor de su posición de equilibrio y emitir radiación electromagnética.

Este modelo podía explicar los siguientes hechos:

- La existencia de los espectros atómicos aunque no la presencia de una frecuencia límite.
- Algunos fenómenos eléctricos como la conductividad y la polarización eléctrica.
- El carácter periódico de las propiedades químicas de los elementos.

Ernest Rutherford sugirió un experimento ejecutado por Geiger y Marsden en 1911 llamado **"Dispersión de las partículas α"**, el cual demostró que el modelo de Thompson no era el correcto.

**b) Modelo atómico de Rutherford:** Debido al experimento de la dispersión de las partículas α, Rutherford propone un nuevo modelo atómico en el cual el átomo está formado por un pequeño núcleo de materia donde se encuentra concentrada toda la carga positiva y la mayor parte de la masa, y a cierta distancia de él, se encuentran distribuidos los electrones en cantidad tal que la carga neta del átomo sea neutro ( Fig 11.9).

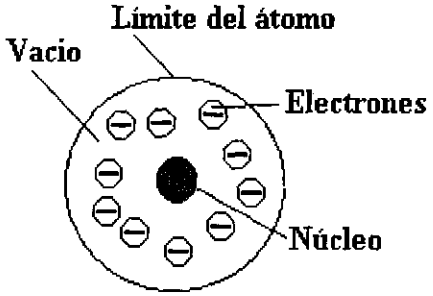



FIG. 11.9 MODELO ATÓMICO DE RUTHERFORD

Con este modelo explica correctamente los resultados obtenidos experimentalmente en la dispersión de las partículas $\alpha$. Pero este modelo no explica la estabilidad de la materia ni la existencia de los espectros atómicos discretos.

**c) Modelo atómico de Bohr:** En el año 1913 Niels Bohr, tomando como base el modelo de Rutherford y enunciando tres postulados propone su modelo.

- Existe para el átomo un conjunto discreto de estados energéticos en los cuales el electrón puede moverse sin emitir radiación electromagnética. A estos estados se les llama ***"Estados estacionarios"*** en ellos la energía es constante.

- El electrón puede estar solamente en ciertas órbitas en las cuales es estable y no emite radiación electromagnética, de tal forma que:

$$L = \frac{nh}{2\pi}$$

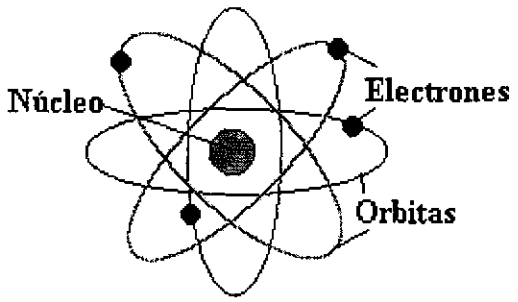



FIG. 11.10 MODELO ATÓMICO DE BOHR

Donde L, es el momento angular del electrón, n es el número cuántico y h es la constante de Planck.

- Cuando un electrón pasa de un estado estacionario de energía a otro estado energético, emite o absorbe radiación electromagnética.

## 11.5 MODELO MATEMÁTICO DEL MODELO ATÓMICO DE BOHR

Supongamos un núcleo con una carga total Ze, siendo Z el número de cargas positivas (Número atómico) y alrededor de éste se encuentra girando un electrón de carga e, como se muestra en la Fig 11.11.

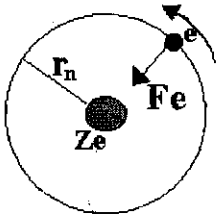



FIG. 11.11 ANÁLISIS DINÁMICO DEL ÁTOMO DE BOHR

Teniendo en cuenta que la fuerza electrostática es igual a la fuerza centrípeta y siguiendo un proceso matemático utilizando los tres postulados de Bohr, se llega a las siguientes expresiones:

Para el radio permitido:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi Z m e^2}$$

El radio de Bohr para el átomo de hidrógeno, con Z = 1 y n =1; es

$$r_o = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

La energía total del electrón es:

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8\varepsilon_0^{\,2} n^2 h^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando n = 1, el átomo se encuentra en el menor estado energético llamado **"Estado base o fundamental"**. Par el hidrógeno, la energía de este estado es de -13.6 eV. Los niveles de energía correspondientes a n = 2, 3, 4, ... se les llama **"Estados excitados"**.

## 11.6 EL MODELO ATÓMICO DE BOHR Y EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

Las predicciones que hace la teoría cuántica para el comportamiento de un sistema físico deben corresponder a las predicciones de la física clásica para valores grandes de los números cuánticos que especifican el sistema.

De la sección anterior se demuestra que la frecuencia orbital del electrón es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m r^3}}$$

Los radios permitidos de las órbitas estacionarias según el modelo de Bohr son:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_o n^2 \hbar^2}{me^2}$$

Reemplazando ésta en la expresión para la frecuencia, se obtiene

$$f = \frac{me^4}{64\pi^3\varepsilon_o^2\hbar^3}\frac{2}{n^3}$$

La frecuencia del fotón emitido en una transición, es

$$f = \frac{me^4}{64\pi^3\hbar^3\varepsilon_o^2}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Resolviendo lo que está dentro del paréntesis y tomando los números cuánticos grandes, se llega a

$$f = \frac{me^4}{64\pi^3\hbar^3\varepsilon_o^2}\frac{2}{n^3}$$

## 11.7 EXPERIMENTO DE LA DISPERSIÓN DE LAS PARTÍCULAS α

El experimento diseñado por E. Rutherford consiste en observar el comportamiento de las partículas α (núcleo de helio) que realizan colisiones con átomos de una lámina muy delgada de oro. Como las partículas α no se pueden ver, detrás de la lámina se coloca una pantalla de sulfuro de zinc, que permite detectar las partículas α desviadas al atravesar la lámina, al producir destellos de luz cada vez que una de ellas hace impacto.

En la Fig 11.12, se observa la trayectoria que sigue una partícula α dispersada por un núcleo de oro de la lámina.

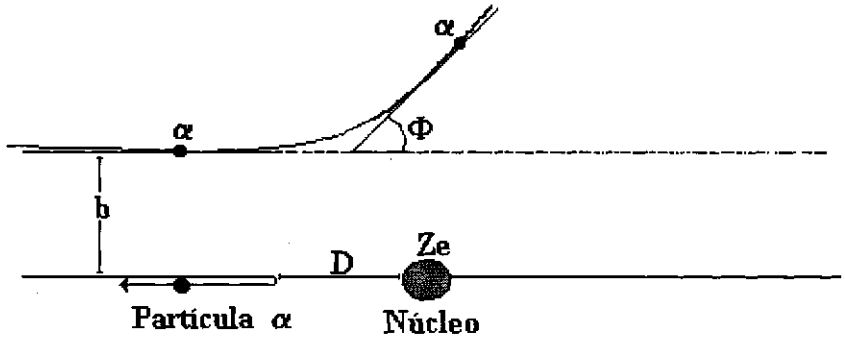



FIG. 11.12 TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA α DISPERSADA POR UN NÚCLEO ATÓMICO

Haciendo un análisis dinámico se obtienen las siguientes expresiones;

$$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{K_\alpha}$$

D : Distancia de máximo acercamiento entre la partícula α y el núcleo.
Z : Número atómico del núcleo.
$K_\alpha$ : Energía cinética de la partícula α.

Para hallar el parámetro de impacto se utiliza la expresión:

$$b = \frac{Ze^2}{K_\alpha 4\pi\varepsilon_0}\cot\frac{\varphi}{2}$$

b : Parámetro de impacto, es la distancia mínima que la partícula α se aproximaría al núcleo sin chocar con éste, si no existiera fuerza electrostática de Coulomb.
φ : Angulo de dispersión, es el ángulo que se desvía la partícula α con respecto a su dirección original.

Para determinar la sección transversal integral, se utiliza la ecuación:

$$\sigma = \pi b^2$$

σ : Sección transversal integral, es el área alrededor de cada núcleo.
b : Parámetro de impacto.

Para determinar la fracción de partículas α que sufren dispersiones mayores que las dadas por el ángulo de dispersión φ, se utiliza la expresión;

$$f = n\sigma t$$

f : Fracción de partículas $\alpha$ que sufren dispersiones mayores que las dadas por el ángulo de dispersión $\varphi$.
n : Número de núcleos por unidad de volumen.
t : Espesor de la lámina.

El número de núcleos por unidad de volumen puede calcularse por

$$\mathbf{n = \frac{\rho N_A}{M}}$$

$\rho$ : Densidad del material de la lámina.
$N_A$: Número de Avogadro = $6.02 \times 10^{26}$ átomos/kg. Mol.
M : Peso atómico.

## PROBLEMAS RESUELTOS

11.1 Si la energía cinética de las partículas $\alpha$ en el experimento de Geiger-Marsden fuera de 8 MeV. Calcular: a) La distancia de máximo acercamiento a un núcleo de oro (Z=79). b) El parámetro de impacto necesario para producir ángulos de desviación mayores de 90 grados. c) La fracción de partículas $\alpha$ desviadas un ángulo mayor de 90 grados. Los datos del oro son: $\rho = 1.93 \times 10^4$ kg/m$^3$, M = 197 gm/mol, $t = 6 \times 10^{-7}$ m

a) $$D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Ze^2}{K_\alpha}$$

$$D = \frac{2(79)(1.6 \times 10^{-19})^2}{4(3.14)(8.85\text{x}10^{-12})(8\text{x}10^6)(1.6\text{x}10^{-19})} = 2.84\text{x}10^{-14} \quad \text{m}$$

b) $$b = \frac{D}{2}\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$b = \frac{2.84\text{x}10^{-14}}{2}\cot\left(\frac{90}{2}\right) = 1.42\text{x}10^{-14} \quad \text{m}$$

c) $$n = \rho\frac{N_A}{M}$$

$$n = \frac{(1.93\text{x}10^4)(6.02\text{x}10^{26})}{.197} = 5.9\text{x}10^{28} \quad \text{átomos}$$

$$f = \frac{N}{N_o} = n\sigma t = n\pi b^2 t$$

$$f = (5.9\text{x}10^{28})(\pi)(1.42\text{x}10^{-14})^2(6\text{x}10^{-7}) = 2.24\text{x}10^{-5}$$

Tan sólo 2 de cada 100000 partículas experimenta desviaciones mayores de 90 grados.

NAL DE COLOMBIA

11.2 Cuál es la velocidad de una partícula $\alpha$ con una energía cinética de 8 MeV.

$$m_\alpha = 4\ m_p = 4\ (1.67 \times 10^{-27}) = 6.68 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$K_\alpha = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2K_\alpha}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(8x10^6)(1.6x10^{-19})}{6.68x10^{-27}}} = 1.95x10^7 \quad \text{m/seg}$$

11.3 Suponga que el modelo planetario describe el movimiento del electrón en el átomo de hidrógeno. Si el radio de la órbita del electrón es 0.53 Å, calcule a) La frecuencia angular del electrón, b) su velocidad lineal, c) la energía total en eV.

a) $$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, m r^3}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(9x10^9)(1.6x10^{-19})^2}{(9.1x10^{-31})(0.53x10^{-10})^3}} = 4.12x10^{16} \quad \text{rad/seg}$$

b) $$v = \omega r = (4.12x10^{16})(0.53x10^{-10}) = 2.19x10^6 \quad \text{m/seg}$$

c) $$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}(9.1x10^{-31})(2.19x10^6)^2 - (9x10^9)\frac{(1.6x10^{-19})^2}{0.53x10^{-10}} = -13.6 \quad \text{eV}$$

11.4 En el modelo planetario del átomo, el radio de la órbita es 0.53 Å y la velocidad lineal es aproximadamente $2.2 \times 10^6$ m/seg. Encuentre a) la aceleración centrípeta, b) la fuerza centrípeta y c) la fuerza de atracción electrostática entre el electrón y el protón.

a) $$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2.2x10^6)^2}{0.53x10^{-10}} = 9.13x10^{22} \quad \text{m/seg}^2$$

b) $F_c = m\,a = (9.1x10^{-31})(9.13x10^{22}) = 8.3x10^{-8}$ Nw

c) $F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{r^2} = -(9x10^9)\frac{(1.6x10^{-19})^2}{(0.53x10^{-10})^2} = -8.2x10^{-8}$ Nw

11.5 En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, las órbitas n = 1, 2, 3, ... son representadas simbólicamente por las letras K, L, M, N , ...,etc. Para los electrones en las órbitas K y L, calcule los radios y las frecuencias de revolución.

n = 1

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_o(1)^2\hbar^2}{me^2} = \frac{(1)^2\left(\frac{6.63x10^{-34}}{2\pi}\right)^2}{(9x10^9)(9.1x10^{-31})(1.6x10^{-19})^2} \approx 5..3x10^{-11} \quad m \approx 0.53\,\mathring{A}$$

$$f_1 = \frac{me^4}{64\pi^3\varepsilon^2{}_o\hbar^3}\frac{2}{(1)^3} = \frac{(9.1x10^{-31})(1.6x10^{-19})^4}{(64)(8.85x10^{-12})^2\left(\frac{6.63x10^{-34}}{2\pi}\right)^3\pi^3}(2) = 6.53x10^{15} \quad Hz$$

n =2

$$r_2 = \frac{4\pi\varepsilon_o(2)^2\hbar^2}{me^4} = 4r_1 = 4(0.53) = 2.12\,\mathring{A}$$

$$f_2 = \frac{me^4}{64\pi^3\varepsilon_o^2\hbar^3}\frac{2}{3^2} = \frac{f_1}{9} = 7.25x10^{14} \quad Hz$$

11.6 Calcule las tres primeras longitudes de onda para la serie de Paschen del hidrógeno.

La primera línea: $n_f = 3$; $n_i = 4$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = 1.09678x10^7\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = 533156.9 \quad m^{-1}$$

$$\lambda = 1.87x10^{-6} \quad m$$

Segunda línea: $n_f = 3$; $n_i = 5$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = 1.09678 \times 10^7 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right) = 779932.4 \quad m^{-1}$$

$$\lambda = 1.28 \times 10^{-6} \quad m$$

Segunda línea: $n_f = 3$; $n_i = 6$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = 1.09678 \times 10^7 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36}\right) = 914500 \quad m^{-1}$$

$$\lambda = 1.09 \times 10^{-6} \quad m$$

11.7 En el átomo de hidrógeno un electrón experimenta una transición de un estado cuya energía de enlace es 0.54 eV a otro cuya energía de excitación es 10.2 eV. Encuentre los números cuánticos de estos estados.

La energía de excitación, es : $E_K - E_1$

$$10.2 - 13.6 = -3.4 \quad eV = -\frac{13.6}{n^2} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{13.6}{3.4}} = 2$$

La energía de enlace, es : $E_\infty - E_K$

$$0.54 \quad eV = \frac{13.6}{n^2} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{13.6}{0.54}} = 5$$

11.8 Para el problema anterior calcule la longitud de onda del fotón emitido y diga a qué serie pertenece esta línea.

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = 1.09678 \times 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) = 2303238 \quad m^{-1}$$

$\lambda = 4.341 \times 10^{-7} \quad m = 4341 \text{ Å}$

Pertenece a la serie de Balmer.

11.9 Un haz de electrones incide sobre una muestra de hidrógeno gaseoso. A qué diferencia de potencial se deben acelerar los electrones para que los átomos de hidrógeno, al regresar a su estado base, emitan durante el proceso la primera línea de la serie de Balmer.

$$eV = E_i - E_f = -\frac{13.6}{n_i^2} - \left(-\frac{13.6}{n_f^2}\right) = 13.6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) eV = 1.88 \quad eV$$

$V = 1.88$ Voltios

11.10 Qué variación experimenta la energía cinética del electrón en el átomo de hidrógeno cuando emite un fotón de longitud de onda 4860 Å

$$E_f = \frac{hC}{\lambda} = \frac{\left(6.63 \times 10^{-34}\right)\left(3 \times 10^{8}\right)}{4.86 \times 10^{-7}} = 4.09 \times 10^{-19} \quad \text{Joules} = 2.55 \quad eV$$

$E_f = 2.55$ eV que corresponde a la variación que experimenta la energía cinética del electrón.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Una partícula $\alpha$ de 5 MeV alcanza un núcleo de oro con un parámetro de impacto de $2.6 \times 10^{-13}$ m. Bajo qué ángulo será dispersada ?

**R/ta:** 10°

2- Qué fracción de un haz de partículas $\alpha$ de 7.7 MeV que inciden sobre una lámina de oro de $23 \times 10^{-7}$ m de espesor se dispersa con un ángulo menor de 1°.

**R/ta:** 0.876

3- Determinar la mínima distancia de aproximación de los protones de 1 MeV que inciden sobre núcleos de oro.

**R/ta:** $1.14 \times 10^{-13}$ m

4- Para un electrón que gira en la primera órbita (n = 1) alrededor de un protón: a) Determine la frecuencia de revolución, b) el valor de la corriente de la espira equivalente, y c) la densidad de flujo magnético en el centro de esta trayectoria circular.

**R/ta:** a) $7 \times 10^{5}$ Hz
b) 1.13 mA
c) 13.3 Weber/m$^2$

5- Si un blanco de sodio (Z=11, A = 23) dispersa $1 \times 10^{4}$ partículas $\alpha$ en una dirección dada, a) Cuántas serán dispersadas a través del mismo ángulo si el blanco de sodio se reemplaza por una hoja de oro (Z=79, M =197 gm/mol) del mismo espesor. b) Cuántas serán dispersadas en la misma dirección si el espesor del blanco de sodio se reduce a la mitad de su valor original. La densidad del sodio es $0.93 \times 10^{4}$ kg/m$^3$.

**R/ta:** a) $1.25 \times 10^{5}$ partículas
b) $6.25 \times 10^{4}$ partículas

6- Un fotón de energía 12.1 eV absorbido por un átomo de hidrógeno, originalmente en estado base, eleva al átomo a un estado excitado. Encuentre el número cuántico de este estado.

**R/ta:** n = 3

7- Un haz de electrones bombardea una muestra de hidrógeno. Hallar la diferencia de potencial a la cual se deben acelerar los electrones si se desea que se emita la primera línea de la serie de Balmer.

**R/ta:** 12 V

8- Hallar la longitud de onda del fotón emitido por un átomo de hidrógeno al pasar del estado $n = 10$ a su estado fundamental.

**R/ta:** $\lambda = 920$ Å

9- Para el átomo de helio ionizado (He+), encuentre el radio de la primera órbita de Bohr y la energía de ionización.

**R/ta:** $r_o = 2.65 \times 10^{-11}$ m
$E = 54.4$ eV

10- Muestre que la energía de los niveles en el átomo de hidrógeno se puede expresar como:

$E_n = -hC\frac{R_H}{n^2}$ . Donde $R_H$, es la constante de Rydberg.

# CAPÍTULO 12

# PROPIEDADES ONDULATORIAS DE LA MATERIA

## 12.1 INTRODUCCIÓN

En 1924 Louis de Broglie propuso una hipótesis revolucionaria en ausencia de una base experimental firme diciendo que la materia poseía propiedades tanto ondulatorias como corpusculares. La existencia de las ondas de Broglie se demostró en 1927 y el principio de dualidad que representan sirvió de punto de partida en los años previos al desarrollo afortunado de la mecánica cuántica desarrollada por Schrödinger.

Louis De Broglie
(1892 – 11987 )
Francia

## 12.2 ONDAS DE BROGLIE

Planck había relacionado la energía de los corpúsculos de la radiación electromagnética (fotones) con su frecuencia de radiación,

$$E = hf$$

$$mc^2 = \frac{hc}{\lambda}$$

$$mc = \frac{h}{\lambda}$$

$$\mathbf{p = \frac{h}{\lambda}} \qquad (1)$$

Según la ecuación anterior, existe una relación íntima entre la longitud de onda del fotón (característica ondulatoria) y la cantidad de movimiento (característica corpuscular).

Entonces, Louis DeBroglie, partiendo de que la naturaleza es simétrica, propuso que si las ondas pueden tener una naturaleza corpuscular entonces la materia puede tener características ondulatorias. Partiendo de la ecuación (1), determinó que la longitud de onda del electrón es

$$\mathbf{p = \frac{h}{mv}} \qquad (2)$$

La ecuación (2) se le llama Longitud de onda de De Broglie, siendo m, la masa relativista y v, la velocidad de la partícula.

En 1927, Davisson y Germer en los Estados Unidos y G. P Thomson en Inglaterra, confirmaron independientemente, la hipótesis de De Broglie, demostrando que los electrones se difractan al ser dispersados en cristales cuyos átomos tienen un espaciamiento adecuado.

## 12.3 PAQUETE DE ONDA ASOCIADA A LA MATERIA

Es la onda que representa a la onda asociada a la partícula y es la resultante de varias ondas que se superponen.

Consideremos dos ondas de igual amplitud pero que difieren en su velocidad angular y en la constante de propagación.

$$\psi_1(x,t) = A\,\mathrm{Sen}\left(Kx - \omega t\right)$$

$$\psi_2(x.t) = A\,\mathrm{Sen}\left[(K + dK)x - (\omega + d\omega)t\right]$$

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x.t)$$

$$\psi(x,t) = 2A\,\mathrm{Cos}\left(Kx - \omega t\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{dK}{2}x - \frac{d\omega}{2}t\right)$$

Gráficamente,

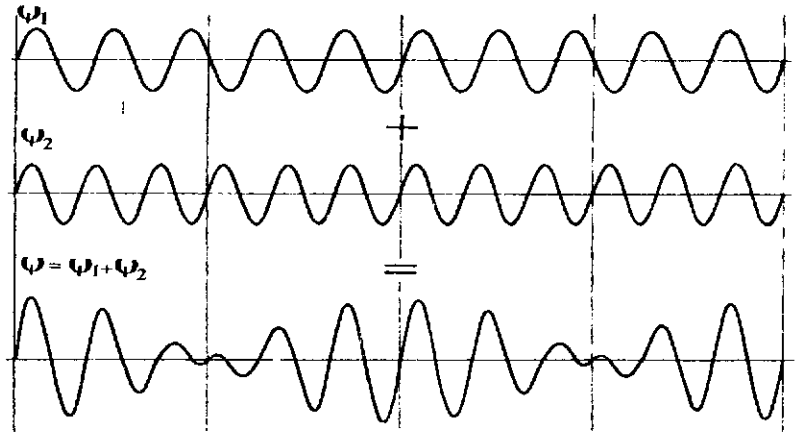



FIG. 12.1 RESULTANTE DE DOS ONDAS CON DIFERENTE FRECUENCIA Y CONSTANTE PROPAGACIÓN

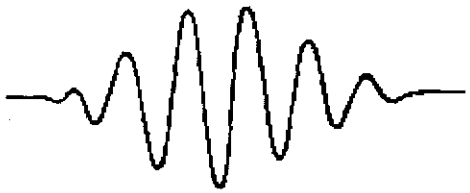


FIG. 12.2 PAQUETE DE ONDAS ASOCIADA A LA MATERIA

## 12.4 VELOCIDAD DE FASE

Es la velocidad con que se propaga cada una de las ondas.

$$v_f = \lambda f$$

$$v_f = \frac{h\,E}{p\,h} = \frac{E}{mv}$$

$$v_f = \frac{mc^2}{mv}$$

Por lo tanto, la velocidad de fase es,

$$\mathbf{v_f = \frac{c^2}{v}} \qquad (3)$$

Siendo v, la velocidad de la partícula.

## 12.5 VELOCIDAD DE GRUPO

La velocidad de grupo se define como,

$$\mathbf{v_g = \frac{d\omega}{dK}}$$

Haciendo operaciones se llega a

$$\mathbf{v_g = v}$$

Siendo v la velocidad de la partícula.

## 12.6 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

El físico alemán Werner Heisenberg le dio otro significado más al concepto ondulatorio-corpuscular; llamado ***Principio de Incertidumbre o de Indeterminación.*** Este principio indica un límite fundamental a la determinación simultánea de ciertas variables. Matemáticamente se puede expresar como:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{5}$$

Donde $\Delta x$, es la incertidumbre en la medición de la posición de la partícula, $\Delta P_x$, es la incertidumbre en la medición de la cantidad de movimiento, $\Delta E$ y $\Delta t$, son las incertidumbres en la medición de la energía y tiempo de la partícula, respectivamente.

Así, la posición y la cantidad de movimiento de una partícula no se pueden medir exactamente en forma simultánea.

## PROBLEMAS RESUELTOS

12.1 Calcular la longitud de onda de De Broglie para un electrón de 54 eV de energía cinética.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mK}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63x10^{-34}}{\sqrt{(2)(9.1x10^{-31})(54)(1.6x10^{-19})}} = 1.67x10^{-10}\ m = 1.67\ Å$$

12.2 Hallar la longitud de onda de De Broglie de un electrón cuya velocidad es $10^8$ m/seg.

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9.1x10^{-31}}{\sqrt{1 - (0.33)^2}} = 9.65x10^{-31} \quad kg$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63x10^{-34}}{(9.65 \times 10^{-31})(1 \times 10^8)} = 6.87x10^{-12} \quad m$$

12.3 A qué velocidad debe moverse un electrón para que su energía cinética sea igual a la energía de un fotón de longitud de onda igual a 5200 Å.

$$K = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)} = \sqrt{\frac{2}{9.1x10^{-31}}\left(\frac{(6.63x10^{-34})(3x10^8)}{5.2x10^{-7}}\right)} = 9.16x10^5 \quad m/seg$$

12.4 Deducir una fórmula que exprese la longitud de onda de De Broglie (en Å) de un electrón en función de la diferencia de potencial por medio del cual es acelerado.

La energía total del electrón a través de la diferencia de potencial, es:

$$E = E_o + eV \tag{1}$$

En términos de la cantidad de movimiento, es

$$E^2 = p^2c^2 + E_o^2 \qquad \Rightarrow \qquad p^2 = \frac{E^2 - E_0^2}{c^2} \tag{2}$$

Hallando la diferencia de cuadrados en la ecuación (1) y reemplazando en la (2),

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{2E_o eV}\sqrt{1 + \frac{eV}{2E_o}}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{2m_o c^2 e}\sqrt{V}\sqrt{1 + \frac{eV}{2m_o c^2}}}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_o e}}\left[V\left(1 + \frac{eV}{2m_o c^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = 12.28\left[V\left(1 + \frac{eV}{2m_o c^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Å}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

12.5 La velocidad de las olas del océano es $\sqrt{g\lambda/2\pi}$ , donde g es la aceleración debido a la gravedad. Hallar la velocidad de grupo de estas ondas.

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{g}{K}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} \quad , \quad \omega = Kv$$

$$v_g = \frac{d}{dK}(Kv) = K\frac{dv}{dK} + v$$

$$v_g = K\frac{d}{dK}\left(\frac{g}{K}\right)^{\frac{1}{2}} + v = K\frac{1}{2}\left(\frac{g}{K}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{g}{K^2}\right) + v$$

$$v_g = -\frac{1}{2}K\left(\frac{K}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{g}{K^2} + v$$

$$v_g = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{v} + v = \frac{1}{2}v$$

12.6 Considere que las ondas electromagnéticas son un caso especial de las ondas de De Broglie. Demuestre que los fotones se deben mover con la velocidad de onda c.

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{pc^2}{E} \quad , \quad E = pc$$

$$v_g = \frac{E}{c}\frac{c^2}{E} = c$$

$$v_g = c$$

12.7 Un microscopio que usa fotones para iluminar, se utiliza para localizar un electrón en un átomo con una precisión de 0.1 Å. Cuál es la incertidumbre en la cantidad de movimiento del electrón.

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad ; \quad \Delta x = 0.1\text{x}10^{-10}\ \text{m}$$

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{6.63\text{x}10^{-34}}{(2)(2\pi)(0.1\text{x}10^{-10})} = 5.27\text{x}10^{-24} \quad \text{kg.m/seg}$$

12.8 Si el tiempo de vida de un estado excitado de un átomo es $10^{-9}$ seg, hallar la mínima incertidumbre en la determinación de la energía de éste estado.

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{6.63x10^{-34}}{(2)(2\pi)(10^{-9})} = 5.27x10^{-26} \text{ Joules} = 3.29x10^{-7} \quad \text{eV}$$

12.9 La velocidad de una partícula nuclear que marcha en la dirección x se mide con una exactitud de $10^{-6}$ m/seg. Determine el límite de exactitud con que puede localizarse su posición: a) A lo largo del eje x, b) A lo largo del eje y.

a) $$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.055x10^{-34}}{(2)(1.67x10^{-27})(10^{-6})} = 0.03 \text{ m}$$

b) $$\Delta y = 0$$

12.10 Determine la cantidad de movimiento y la energía para a) un fotón de rayos X, y b) un electrón, cada uno con una longitud de onda de 1 Å.

a) $$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63x10^{-34}}{10^{-10}} = 6.63x10^{-24} \quad \text{kg.m/seg}$$

$$E = pc = (6.63x10^{-24})(3x10^{8}) = 1.989x10^{-15} \text{ Joules} = 1.24x10^{4} \text{ eV}$$

b) $$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63x10^{-34}}{10^{-10}} = 6.63x10^{-24} \quad \text{kg.m/seg}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(6.63x10^{-24})^2}{(2)(9.1x10^{-31})} = 2.41x10^{-17} \text{ Joules} = 151 \text{ eV}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1- Hallar la longitud de onda asociada a) Un electrón de 100 eV y b) una pelota de golf de 1.65 onzas con una velocidad de 60 m/seg.

**R/ta:** a) 1.25 Å
b) $2.39 \times 10^{-24}$ Å

2- Cuál es la masa relativista de un electrón con una longitud de onda de 0.042 Å.

**R/ta:** $5.25 \times 10^{-30}$ kg

3- Demuestre que si la incertidumbre en la posición de una partícula es aproximadamente igual a su longitud de onda de De Broglie, entonces la incertidumbre en su velocidad es aproximadamente igual a su velocidad.

4- Una partícula cargada que ha sido acelerada por un potencial de 200 voltios tiene una longitud de onda de 0.0202 Å. Encuentre la masa de esta partícula si su carga es numéricamente igual a la del electrón.

**R/ta:** $1.68 \times 10^{-27}$ kg

5- Muestre que la velocidad de grupo de una partícula se puede expresar en la forma $v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dK}$

6- La velocidad de las ondas en una superficie líquida es $\sqrt{2\pi S/\lambda\rho}$ , donde S es la tensión superficial y ρ la densidad del líquido. Hallar la velocidad de grupo de estas ondas.

**R/ta:** $v_g = \frac{3}{2}v$

7- Se determinan al mismo tiempo la posición y la cantidad de movimiento de un electrón de 1 KeV. Si la posición se determina con una precisión de 1 Å. Cuál es el porcentaje de incertidumbre en su cantidad de movimiento.

**R/ta:** 3.1 %

8- Comparar las incertidumbres en las velocidades de un electrón y de un protón confinados en una caja de 10 Å de lado.

**R/ta:** $5.79 \times 10^{4}$ m/seg
31.6 m/seg

9- Demuestre que para una partícula libre, la relación de incertidumbre $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ puede escribirse como $\Delta x \Delta \lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi}$ .

10- La incertidumbre en la posición de un electrón que se mueve en línea recta es de 10 Å. Calcule la incertidumbre en a) su cantidad de movimiento, b) su velocidad y c) su energía cinética.

**R/ta:** a) $5.275 \times 10^{-26}$ kg.m/seg

b) $5.79 \times 10^{4}$ m/seg

c) $1.52 \times 10^{-21}$ Joules

# CAPÍTULO 13

# MECÁNICA CUÁNTICA ONDULATORIA

## 13.1 INTRODUCCIÓN

Erwin Scrhödinger
(1887 – 1961)
Austria

En 1924 Louis de Broglie propuso una hipótesis revolucionaria en ausencia de una base experimental firme diciendo que la materia poseía propiedades tanto ondulatorias como corpusculares. La existencia de las ondas de Broglie se demostró en 1927 y el principio de dualidad que representan sirvió de punto de partida en los años previos al desarrollo afortunado de la mecánica cuántica de la radiación.

## 13.2 FUNCIÓN DE ONDA

La cantidad variable que caracteriza las ondas de De Broglie se le conoce como función de onda. El valor de la función de onda $\psi$ asociada con un cuerpo en movimiento en un punto particular (x,y,z) y en un instante de tiempo t, está relacionado con la probabilidad de encontrar el cuerpo en ese punto y en ese instante.

Sin embargo $\psi$ no tiene significado físico, ya que como onda que es puede tomar valores positivos o negativos y una probabilidad negativa no tiene sentido. Por tal motivo, se toma, $|\Psi|^2$ dV, llamada ***Densidad de probabilidad.*** Es decir, la probabilidad de encontrar experimentalmente el cuerpo descrito por la función de onda $\psi$, en el punto (x,y,z) en un instante de tiempo t, es proporcional al valor $|\Psi|^2$ en ese punto del espacio y en el instante de tiempo t.

Como $|\Psi|^2$ es proporcional a la probabilidad de encontrar el cuerpo descrito por la función de onda $\psi$, la integral de $|\Psi|^2$ sobre todo el espacio debe ser igual a 1, ya que el cuerpo debe estar en alguna parte de ese espacio. O sea,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1 \qquad (1)$$

Toda función de onda que cumpla con la ecuación (1) se dice que está ***normalizada.***

Para que una función de onda pueda describir completamente el comportamiento de un cuerpo en movimiento debe cumplir con las siguientes propiedades:

a- La función de onda puede ser en general una función compleja.

b- La función de onda y su primera derivada deben ser finitas, es decir, cuando $r \to \infty \Rightarrow \psi(r) \to 0$ y cuando $r \to \infty \Rightarrow \psi'(r) \to 0$

c- La función de onda y su primera derivada deben ser continuas y univaluadas.

d- La función de onda debe cumplir con la condición de normalización.

La función de onda para una partícula que se mueva con una energía total E y una cantidad de movimiento P es:

$$\Psi(\mathbf{r},\mathbf{t}) = \mathbf{A}e^{\left(\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\right)(\mathbf{Pr}-\omega\mathbf{t})} \qquad (2)$$

Siendo A, la amplitud de la onda, K la constante de propagación y ω la frecuencia angular.

## 13.3 ECUACION DE SCHRÖDINGER EN ESTADO ESTACIONARIO

El físico austríaco Erwin Schrödinger propuso una ecuación mecano cuántica que satisfaga la función de onda asociada a la materia.

$$\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{2\mathbf{m}(\mathbf{E}-\mathbf{U})}{\hbar^2}\Psi(\mathbf{r}) = 0 \qquad (3)$$

Siendo m, la masa de la partícula y U, la energía potencial.

## 13.4 ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER DEPENDIENTE DEL TIEMPO

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial \Psi(\mathbf{r},\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = -\frac{\hbar^2}{2\mathbf{m}}\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r},\mathbf{t})}{\partial \mathbf{r}^2} + \mathbf{U}\,\Psi(\mathbf{r}) \qquad (4)$$

## 13.5 OPERADORES MECANOCUÁNTICOS

Un operador es en general cualquier expresión que al actuar sobre una función cambia su valor. Por ejemplo, la multiplicación, derivada, integración, etc, son ejemplos de operadores pues al actuar sobre una función, cambian su valor.

En mecánica cuántica el operador debe satisfacer la ***Ecuación de valores propios***, o sea:

$$\hat{O}\mathbf{f} = \alpha\mathbf{f} \tag{5}$$

donde,

$\hat{O}$ : Operador

f : Función propia del operador

$\alpha$ : Valores propios del operador, son reales y constantes.

Aunque en mecánica cuántica la función de onda puede ser compleja, el valor propio del operador mecanocuántico, es siempre real.

## 13.6 PRIMER POSTULADO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Cualquier variable dinámica que describe el movimiento de una partícula puede ser representada por un operador mecanocuántico. Es decir, a cada variable de la dinámica clásica le corresponde un operador en mecánica cuántica que debe satisfacer la ecuación de valores propios. Algunos de estos operadores son los siguientes:

a- Operador de la posición: $\hat{r} = r$

b- Operador de la cantidad de movimiento: $\hat{p} = -i\hbar\nabla$

c- Operador de la energía cinética: $\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$

d- Operador de la energía total: $\hat{E} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$

## 13.7 VALOR ESPERADO

Es el valor más probable de una cantidad física tal como la posición, cantidad de movimiento, energía de una partícula que está descrita por una función de onda $\psi(r,t)$.

Aplicando conceptos estadísticos y teniendo en cuenta la normalización de la función de onda se tiene la expresión para encontrar el valor esperado o probable de alguna cantidad física,

$$\langle O \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(r,t)\hat{O}\,\psi(r,t)dv \qquad (6)$$

Donde, $\psi(r,t)$ es la función de onda y $\psi^*(r,t)$ es su conjugada.

## 13.8 SEGUNDO POSTULADO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

El valor de una medición de una variable dinámica es uno de los valores propios del operador mecanocuántico correspondiente a la variable dinámica.

## 13.9 NÚMEROS CUÁNTICOS

Los números enteros n, l, $m_l$, que aparecen al determinar las soluciones de las ecuaciones para el átomo de hidrógeno se les llama ***"Números cuánticos"***.

**Número cuántico principal (n) :** Determina los posibles estados energéticos del átomo. Los valores que puede tomar son: n = 0, 1, 2, 3, ...

**Número cuántico orbital (l):** Determina la magnitud del momento angular del electrón. Los valores que puede tomar son: l = 0, 1, 2, 3 ... n-1.

$l = 0 \rightarrow s$
$l = 1 \rightarrow p$
$l = 2 \rightarrow d$

**Número cuántico magnético ($m_l$):** Determina los valores posibles de la dirección del momento angular. Los valores que puede tomar son: $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$.

**Número cuántico de spin ($m_s$):** Determina el momento angular intrínseco del electrón. Puede tomar los valores posibles: ↑↓

De lo anterior se puede concluir que:

Para cada valor de n hay n valores posibles de l.
Para cada valor de l hay 2l + 1 valores posibles de $m_l$.
Para cada valor de n hay $n^2$ funciones de onda con el mismo valor de la energía total. Llamados ***Estados degenerados.***

## PROBLEMAS RESUELTOS

13.1 Una partícula libre se mueve en dirección +X entre los puntos x = 0 y x = a. Cuáles son los valores esperados de su posición y cantidad de movimiento.

La función de onda para una partícula libre es:

$$\psi(x) = A e^{iKx}$$

Luego se normaliza la función de onda,

$$\int_0^a \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_0^a \left(A e^{-iKx} A e^{iKx}\right)dx = A^2 \int_0^a dx = 1$$

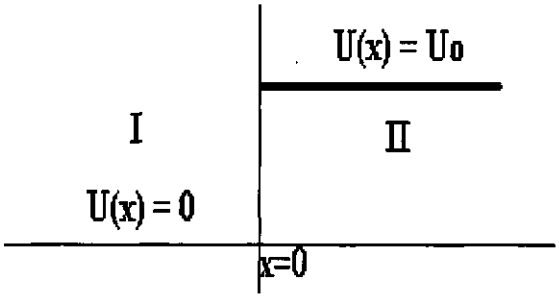
$$A = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

$$\langle x \rangle = \int_0^a \psi^*(x) x\, \psi(x)dx = \frac{1}{a}\int_0^a \left(A e^{-iKx}\, x\, A e^{iKx}\right)dx = \frac{1}{2}a$$

$$\langle p \rangle = \int_0^a \psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x)dx = \frac{1}{a}\int_0^a e^{-iKx}\left(-i^2\hbar K\right)e^{iKx} = \hbar K$$

13.2 ***Escalón de potencial.*** Una partícula de masa m y energía total E (E < Uo) se mueve en dirección +X hacia una región del espacio donde la energía potencial U(x) cambia bruscamente de un valor cero a un valor constante Uo. Determinar la función de onda asociada a la partícula.




Aplicando la ecuación de Schrödinger para la región I,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi(x) = 0 \qquad \text{pero, } U(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E]\psi(x) = 0 \qquad (x \leq 0)$$

Haciendo,

$$\alpha_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \alpha_1^2\,\psi(x) = 0$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$\psi(x) = A\,e^{i\alpha_1 x} + B\,e^{-i\alpha_1 x}$$

utilizando las propiedades de la función de onda se tiene las siguientes relaciónes,

$$\psi(0) = A + B \tag{1}$$

$$\frac{d\psi(0)}{dx} = i\,\alpha_1\,(A - B) \tag{2}$$

Aplicando la ecuación de Schrödinger para la región II,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi(x) = 0 \qquad \text{pero, } U(x) = U_o$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}[U(x) - E]\psi(x) = 0 \qquad (x > 0)$$

Haciendo,

$$\alpha_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[U(x) - E]$$

La solución de la ecuación diferencial es,

$$\psi(x) = Ce^{\alpha_2 x} + De^{-\alpha_2 x}$$

Utilizando las propiedades de la función de onda,

$$C = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\psi(0)}{dx} = -\alpha_2 De^{-\alpha_2 x} \tag{4}$$

Igualando (1) con (3) y (2) con (4),

$$A + B = D \tag{5}$$

$$A - B = i\frac{\alpha_2}{\alpha_1} D \tag{6}$$

Sumando (5) y (6),

$$A = \frac{D}{2}\left(1 + i\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

Restando (5) - (6),

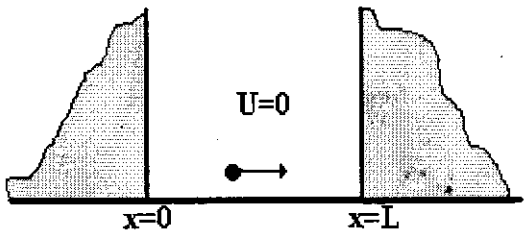
$$B = \frac{D}{2}\left(1 - i\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

Reemplazando las constantes en las funciones de onda, se tiene

$$\psi(x) = \frac{D}{2}\left[1 + i\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]e^{i\alpha_1 x} + \frac{D}{2}\left[1 - i\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]e^{-i\alpha_1 x} \qquad (x \le 0)$$

$$\psi(x) = De^{-\alpha_2 x} \qquad (x > 0)$$

13.3 ***Pozo de potencial.*** Determinar la función de onda asociada a una partícula de masa m y energía total E atrapada en un pozo de potencial con paredes de potencial infinito.




Aplicando la ecuación de Schrödinger en el interior del pozo:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E]\psi(x) = 0$$

Haciendo,

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \alpha^2\,\psi(x) = 0$$

La solución de la ecuación diferencial es,

$$\psi(x) = A\,e^{i\alpha x} + B\,e^{-i\alpha x}$$

Para $x = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(0) = 0$

$0 = A + B \quad \Rightarrow \quad A = -B$

Para $x = L \quad \Rightarrow \quad \psi(L) = 0$

$$0 = A\,e^{i\alpha L} + B\,e^{-i\alpha L} \quad \Rightarrow \quad 0 = A\left[e^{i\alpha L} - e^{-i\alpha L}\right] \quad \Rightarrow \quad 0 = 2Ai\,\mathrm{sen}\,\alpha L$$

$$\alpha L = n\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

La función de onda quedaría así,

$$\psi(x) = 2iA\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Utilizando la condición de normalización,

$$\int_0^L \psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^L \left(-2Ai\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)\left(2Ai\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)dx = 1$$

Resolviendo la integral, se obtiene,

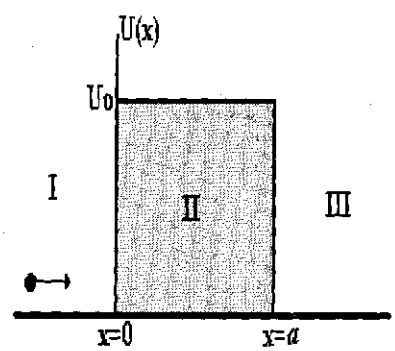
$$A = \sqrt{\frac{1}{2L}}$$

La función de onda normalizada es,

$$\psi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

13.4 ***Efecto túnel.*** Una partícula de masa m y energía total E se mueve hacia una barrera de potencial de valor $U_o$ y anchura *a*; como se muestra en la figura. Determine las funciones de onda que describen el movimiento de la partícula para cada región.

*Para la región I:*




Aplicando la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E]\psi(x) = 0$$

Haciendo,

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \alpha^2\,\psi(x) = 0$$

La solución de la ecuación diferencial es,

$$\psi(x) = A\,e^{i\alpha x} + B\,e^{-i\alpha x} \qquad (x \le 0)$$

*Para la región II,*

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - U_o\right]\psi(x) = 0$$

Haciendo,

$$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(U_o - E\right)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \beta^2\,\psi(x) = 0$$

La solución de la ecuación diferencial es,

$$\psi(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} \qquad (0 \le x \le a)$$

Para la región III,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E]\psi(x) = 0$$

Haciendo,

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \alpha^2\,\psi(x) = 0$$

La solución de la ecuación diferencial es,

$$\psi(x) = Ee^{i\alpha x} + Fe^{-i\alpha x} \qquad (x > a)$$

13.5 ***Oscilador armónico cuántico.*** Para una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza recuperadora de la forma F = -Kx. Determinar la función de onda asociada a la partícula.

Aplicando la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi(x) = 0$$

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \frac{1}{2}Kx^2\right]\psi(x) = 0 \qquad (1)$$

Haciendo el cambio de variable,

$$\psi'(x) = \alpha\,\psi'(\xi) \qquad \text{donde,} \quad \xi = \alpha x$$

$$\psi''(x) = \alpha^2\,\psi''(\xi)$$

Reemplazando en la ecuación (1),

$$\alpha^2\psi''(\xi) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}K\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\psi(\xi) = 0$$

$$\psi''(\xi)+\left(\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{Km}{\hbar^2\alpha^4}\xi^2\right)\psi(\xi)=0$$

Haciendo,

$$\lambda=\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} \tag{2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

$$\alpha^4=\frac{Km}{\hbar^2} \tag{3}$$

$$\psi''(\xi)+\left[\lambda-\xi^2\right]\psi(\xi)=0 \qquad \text{para } \lambda=2n+1 \quad \therefore n=0,1,2,3,\ldots$$

La solución de la ecuación diferencial,

$$\psi(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}H(\xi)$$

siendo,

$$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{\xi^2}\right)$$

$H_n(\xi)$ : Polinomios de Hermite, siendo n el grado del polinomio.

La función de onda normalizada es,

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2^n\,n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}H_n(\alpha x)$$

13.6 Encuentre la energía del oscilador cuántico.

De la ecuación (3) del problema 13.5,

$$\alpha^4=\frac{Km}{\hbar^2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha^2=\sqrt{\frac{Km}{\hbar^2}}=\sqrt{\frac{\omega^2m^2}{\hbar^2}}=\frac{\omega m}{\hbar}$$

Reemplazando en la ecuación (2) del problema 13.5,

$$\lambda = \frac{2mE_n}{\hbar^2 \frac{\omega m}{\hbar}} = \frac{2E_n}{\omega \hbar} \qquad \Rightarrow \qquad E_n = \frac{1}{2}\omega \hbar \lambda$$

pero, $\lambda = 2n + 1$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \hbar$$

13.7 ***Átomo de hidrógeno.*** Determine las funciones de onda de un electrón que gira alrededor de un núcleo compuesto por un protón.

Aplicando la ecuación de Schrödinger,

$$\nabla^2 \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(x)$$

Utilizando el Laplaciano en coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \psi(r)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial \varphi^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \psi(r)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(r) = 0$$

La función de onda puede escribirse como el producto de tres funciones,

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{\partial \psi(r,\theta,\varphi)}{\partial r} = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)\frac{\partial R(r)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \psi(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} = R(r)\Phi(\varphi)\frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} = R(r)\Theta(\theta)\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \Theta\Phi\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta R\Phi\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} R\Theta\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)R\Theta\Phi = 0$$

Dividiendo por: $R\theta\phi$

$$\frac{1}{r^2 R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Theta r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \Phi \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U) = 0$$

Multiplicando por: $r^2 \operatorname{sen}^2\theta$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \operatorname{sen}^2\theta(E-U) = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \operatorname{sen}^2\theta(E-U) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

La expresión anterior se separa en dos ecuaciones:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \operatorname{sen}^2\theta(E-U) = m_l^2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m_l^2 \qquad (2)$$

Dividiendo la ecuación (1) por $\operatorname{sen}^2\theta$:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Theta \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 (E-U) = \frac{m_l^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}r^2(E-U)=\frac{m_l^2}{\operatorname{sen}^2\theta}-\frac{1}{\Theta\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)$$

Separando nuevamente en dos ecuaciones,

Por lo tanto,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}r^2(E-U)=l(l+1) \tag{3}$$

$$\frac{m_l^2}{\operatorname{sen}^2\theta}-\frac{1}{\Theta\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=l(l+1) \tag{4}$$

De la ecuación (2), se tiene,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+m_l^2\Phi=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}r^2(E-U)R=l(l+1)R$$

Multiplicando por R, la ecuación (3),

Dividiendo por $r^2$,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)R-\frac{R}{r^2}l(l+1) \tag{6}$$

De la ecuación (4),

$$\frac{m_l^2}{\operatorname{sen}^2\theta}-\frac{1}{\Theta\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=l(l+1)$$

$$\frac{m_l^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\Theta - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = l(l+1)\Theta$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m_l^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right]\Theta = 0 \qquad (7)$$

La soluciones de las ecuaciones (5), (6) y (7) son,

$$\Phi_{m_l}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\varphi} \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$$

$$\Theta_{l,m_l}(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m_l|)!}{2(l+|m_l|)!}}\,P_l^{m_l}(\cos\theta) \quad \therefore \quad l = 0, 1, 2, \cdots n-1$$

donde,

$P_l^{m_l}$ (COS θ): Polinomios asociados de Legendre

$$P_k^j(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{j}{2}}\frac{d^j}{dx^j}P_k(x)$$

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k\,k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^k \qquad \text{Polinomios de Legendre}$$

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{n\,a_o}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}}\,e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^l L_{n+l}^{2l+1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\rho = \beta_n r \quad , \qquad \beta_n = \frac{2mZe^2}{4\pi\varepsilon_o\hbar^2 n} \qquad a_o = \text{Radio de Bohr}$$

$L_{n+1}^{2l+1}(\rho)$: Polinomios asociados de Laguerre

$$L_k^j(x) = (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} L_k(x)$$

$$L_k(x) = e^x \frac{d^k}{dx^k}\left(x^k e^{-x}\right)$$ Polinomios de Laguerre

13.8 La función de onda para una partícula en un pozo de potencial unidimensional de longitud L, tiene la forma $\psi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{Sen}\frac{n\pi}{L}x$ . Encuentre el valor esperado para la energía total de la partícula en su estado base.

$$\langle E\rangle = \int_0^L \psi^*(x)\hat{O}\psi(x)dx$$

$$\langle E\rangle = \int_0^L -i\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{Sen}\frac{n\pi}{L}x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)i\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{Sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\langle E\rangle = \int_0^L -\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{Sen}\frac{n\pi}{L}x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{Sen}\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\langle E\rangle = \frac{2}{L}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\int_0^L \mathrm{Sen}^2\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar^2}{m}\frac{n^2\pi^2}{L^3}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad ; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\langle E\rangle = \frac{h^2}{8m}\frac{n^2}{L^2}$$

En el estado base, n =1

$$\langle E \rangle = \frac{h^2}{8mL^2}$$

13.9 Hallar la energía más baja de un neutrón que está confinado en un pozo de potencial de $10^{-14}$ m de ancho.

$$E = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63x10^{-34})^2}{(8)(1.67x10^{-27})(10^{-14})^2} = 3.28x10^{-13} \text{ Joules} = 2.1 \text{ MeV}$$

13.10 Determine el conjunto de funciones de onda, la distribución de los niveles de energía y la configuración electrónica del oxígeno (Z=8).

$$n = 1 \rightarrow l = 0 \quad m_l = 0 \rightarrow \psi_{100} \quad \uparrow\downarrow$$

$$n = 2 \rightarrow \begin{cases} l = 0 \rightarrow m_l = 0 \rightarrow \psi_{200} \quad \uparrow\downarrow \\ l = 1 \rightarrow \begin{cases} m_l = 0 \rightarrow \psi_{210} \quad \uparrow\downarrow \\ m_l = 1 \rightarrow \psi_{211} \quad \uparrow\downarrow \\ m_l = -1 \rightarrow \psi_{21-1} \end{cases} \end{cases}$$

$1S^2\, 2S^2\, 2P^4$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

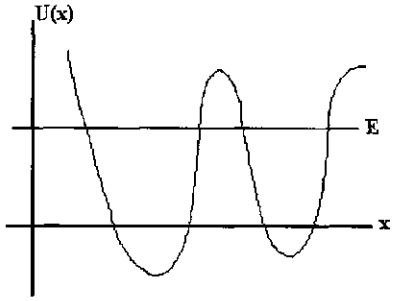
1- Encuentre los valores esperados para la posición y la cantidad de movimiento de una partícula que se halla dentro de un pozo de potencial de longitud L, si la función de onda, es:

$$\psi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{Sen}\frac{n\pi}{L}x$$

**R/ta:** $< x > = \frac{1}{2} L$

$< P > = P$

2- Una partícula con energía total E se mueve dentro del potencial mostrado en la figura. Represente gráficamente la forma de la función de onda asociada a la partícula.




3- Si la partícula en el pozo de potencial tiene una masa de $1 \times 10^{-7}$ kg y el pozo una anchura L = 1 mm. Determínese: a) La energía más pequeña de la partícula en eV, b) La diferencia de energía $\Delta E = E_2 - E_1$.

**R/ta:** a) $3.42 \times 10^{-29}$ eV

b) 10.3 eV

4- Utilizando la función de onda normalizada que describe el comportamiento de la partícula que realiza un MAS, encuentre las funciones de onda para el oscilador armónico con n = 0, 1, 2, y 3.

$$\psi_0(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \qquad \psi_1(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}(2\alpha x)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

**R/ta :**

$$\psi_2(x) = \frac{\alpha^{1}}{8^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}\left(4\alpha^2 x^2 - 2\right)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \qquad \psi_3(x) = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{48^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}}\left(8\alpha^3 x^3 - 12\alpha x\right)e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

5- Calcule el valor esperado $< x^2 >$ del oscilador armónico con n = 0.

**R/ta:** $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega m}$

6- Normalice la función:

$$\psi(x,t) = A e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} e^{-\frac{i\beta x}{2}} \qquad -\infty \le x \le \infty$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{km}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \beta = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

**R/ta:** $A = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$

7- Calcule la energía para n = 0 (punto cero de la energía) y el espaciamiento entre los niveles de energía de un oscilador cuántico cuya frecuencia es de 400 Hz.

**R/ta:** $8.28 \times 10^{-13}$ eV
$1.65 \times 10^{-12}$ eV

8- Calcule los valores esperados $< x^2 >$, $< P^2 >$ y $< E >$ del oscilador armónico cuántico con n = 0 y n = 1.

**R/ta:**

$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega m}$ n = 0 $\qquad \langle x^2 \rangle = \frac{3\hbar}{2\omega m}$ n = 1

$\langle P^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega m$ n = 0 $\qquad \langle P^2 \rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega m$ n = 1

$\langle E \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega$ n = 0 $\qquad \langle E \rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega$ n = 1

9- Normalice la función de onda acimutal del átomo de hidrógeno:

**R/ta:** $\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{i m_l \varphi}$

10- La probabilidad de encontrar un electrón atómico, cuya función de onda radial es $R_{n,l}(r)$, fuera de una esfera de radio $r_o$ centrada en el núcleo es:

$$\int_{r_o}^{\infty} r^2 \left|R_{n,l}\right|^2 dr$$

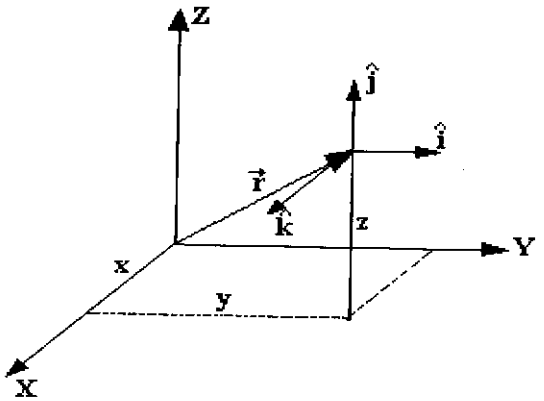
Calcule la probabilidad de encontrar el electrón del átomo de hidrógeno en su estado base, a una distancia mayor $a_o$ del núcleo.

**R/ta:** 68 %

# APÉNDICE

# SISTEMAS DE COORDENADAS

## COORDENADAS CARTESIANAS




Coordenadas:

$$x, y, z$$

Vectores unitarios:

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

Vector de posición:

$$r = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

Elemento de longitud:

$$d\vec{r} = dx\ \hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\ \hat{k}$$

Elemento de superficie:

$$dx\,dy \qquad z = cte$$
$$dx\,dz \qquad y = cte$$
$$dy\,dz \qquad x = cte$$

Elemento de volumen:

$$dv = dx\,dy\,dz$$

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

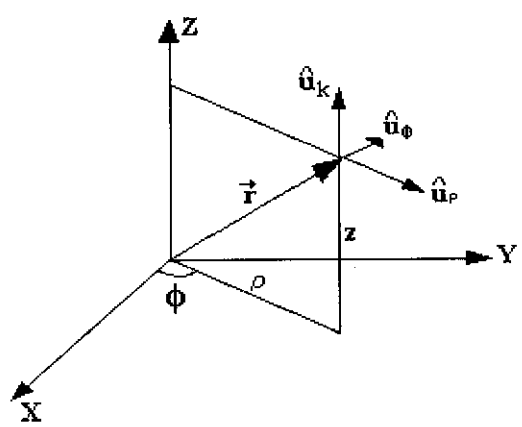
Rotacional:

$$\nabla X \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## COORDENADAS CILÍNDRICAS



Coordenadas:

$$\rho, \varphi, z$$

Transformaciones:

$$x = \rho \operatorname{Cos} \varphi$$
$$y = \rho \operatorname{Sen} \varphi$$
$$z = z$$

Vectores unitarios:

$$\hat{u}_\rho = \operatorname{Cos} \varphi \hat{i} + \operatorname{Sen} \varphi \hat{j}$$
$$\hat{u}_\varphi = -\operatorname{Sen} \varphi \hat{i} + \operatorname{Cos} \varphi \hat{j}$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

Vector de posición:

$$\bar{r} = \rho \hat{u}_\rho + z \hat{k}$$

Elemento de longitud:

$$d\bar{r} = d\rho \hat{u}_\rho + \rho d\varphi \hat{u}_\varphi + dz \hat{k}$$

Elemento de superficie:

$$\rho d\varphi dz \qquad \rho = cte$$
$$d\rho dz \qquad \varphi = cte$$
$$\rho d\rho d\varphi \qquad z = cte$$

Elemento de volumen:

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho F_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

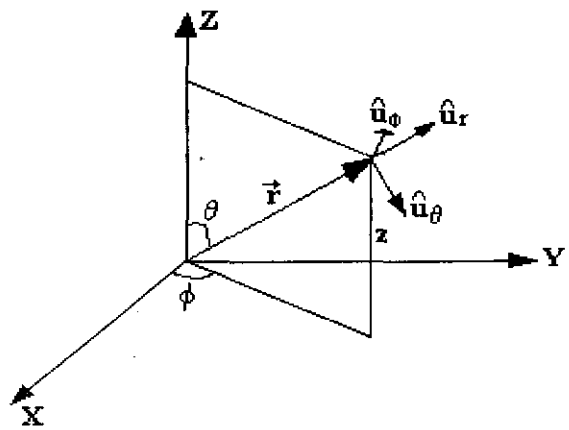
Rotacional:

$$\vec{\nabla} X \vec{F} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \hat{u}_\rho + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho F_\varphi \right) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{k}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## COORDENADAS ESFÉRICAS




Coordenadas:

$$r, \theta, \phi$$

Transformaciones:

$$x = r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \phi$$
$$y = \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \phi$$
$$z = r \operatorname{Cos} \theta$$

Vectores unitarios:

$$\hat{u}_r = \operatorname{Sen}\theta \left( \operatorname{Cos}\varphi \hat{i} + \operatorname{Sen}\varphi \hat{j} \right) + \operatorname{Cos}\theta \hat{k}$$

$$\hat{u}_\theta = \operatorname{Cos}\theta \left( \operatorname{Cos}\varphi \hat{i} + \operatorname{Sen}\varphi \hat{j} \right) - \operatorname{Sen}\theta \hat{k}$$

$$\hat{u}_\varphi = -\operatorname{Sen}\varphi \hat{i} + \operatorname{Cos}\varphi \hat{j}$$

Vector de posición:

$$\vec{r} = r\,\hat{u}_r$$

Elemento de longitud:

$$d\hat{r} = dr\,\hat{u}_r + r\,d\theta\,\hat{u}_\theta + r\,\mathrm{Sen}\,\theta\,d\varphi\,\hat{u}_\varphi$$

Elemento de superficie:

| | |
|---|---|
| $r^2\,\mathrm{Sen}\theta\,d\theta\,d\varphi$ | $r = cte$ |
| $r\,dr\,\mathrm{Sen}\theta\,d\varphi$ | $\theta = cte$ |
| $r\,dr\,d\theta$ | $\varphi = cte$ |

Elemento de volumen:

$$dv = r^2\,\mathrm{Sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{Sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{u}_\varphi$$

Divergencia:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{Sen}\theta\,F_\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{Sen}\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional:

$$\nabla X\vec{F} = \frac{1}{r\,\mathrm{Sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{Sen}\theta\,F_\varphi\right) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{Sen}\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,F_\varphi\right)\right)\hat{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,F_\theta\right) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{u}_\varphi$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{Sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

## ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS

| CONSTANTE | VALOR |
|---|---|
| Gravedad en la superficie terrestre | 9.80665 m/seg$^2$ |
| Radio de la Tierra | 6.374 x $10^6$ m |
| Masa de la Tierra | 5.976 x $10^{24}$ kg |
| Masa de la Luna | 7.350 x $10^{22}$ kg |
| Distancia media entre Tierra y Luna | 3.844 x $10^8$ m |
| Masa del Sol | 1.989 x $10^{30}$ kg |
| Radio del Sol | 6.96 x $10^8$ m |
| Distancia media entre Tierra y Sol | 1.496 x $10^{11}$ m |
| Período de la órbita terrestre alrededor del Sol | 3.156 x $10^7$ seg |
| Velocidad de la luz en el vacío | 2.99792458 x $10^8$ m/seg |
| Constante gravitacional | 6.67259 x $10^{-11}$ nw.m$^2$/kg$^2$ |
| Número de Avogadro | 6.02214 x $10^{23}$ mol$^{-1}$ |
| Constante universal de los gases | 8.31451 joules/mol.°K |
| Constante de Boltzman | 1.38066 x $10^{-23}$ joules/°K |
| Constante de Stefan-Boltzman | 5.67 x $10^{-8}$ W/m$^2$. °K$^4$ |
| Carga del electrón y protón | 1.60218 x $10^{-19}$ coul |
| Carga de la partícula $\alpha$ | 3.2 x $10^{-19}$ coul |
| Carga del deuterón | 1.6 x $10^{-19}$ coul |
| Permitividad eléctrica en el vacío | 8.85418 x $10^{-12}$ coul$^2$/nw.m$^2$ |
| Permeabilidad magnética en el vacío | $4\pi$ x $10^{-7}$ Tesla.m/amp |
| Magnetón de Bohr | 9.27 x $10^{-24}$ A.m$^2$ |
| Masa del electrón | 9.10939 x $10^{-31}$ kg |
| Masa del protón | 1.67262 x $10^{-27}$ kg |
| Masa del neutrón | 1.67493 x $10^{-27}$ kg |
| Masa del deuterón | 3.34755 x $10^{-27}$ kg |
| Masa de la partícula $\alpha$ | 6.6951 x $10^{-27}$ kg |
| Unidad de masa atómica (uma) | 1.661 x $10^{-27}$ kg |
| Constante de Planck | 6.62608 x $10^{-34}$ joules.seg |
| Constante de Rydberg | 1.09737 x $10^7$ m$^{-1}$ |
| Constante electrostática en el vacío | 9 x $10^9$ nw.m$^2$/coul$^2$ |
| Presión atmosférica | 1.01 x $10^5$ nw/m$^2$ |
| Punto de congelación del agua | 273.15 °K |

## ALFABETO GRIEGO

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Alfa | A | α | Eta | H | η |
| Beta | B | β | Theta | Θ | θ |
| Gamma | Γ | γ | Iota | I | ι |
| Delta | Δ | δ | Kappa | K | κ |
| Epsilon | E | ε | Lambda | Λ | λ |
| Zeta | Z | ζ | Mu | M | μ |
| Nu | N | ν | Tau | T | τ |
| Xi | Ξ | ξ | Upsilon | Υ | υ |
| Omicron | O | o | Phi | Φ | ϕ |
| Pi | Π | π | Chi | X | χ |
| Rho | P | ρ | Psi | Ψ | ψ |
| Sigma | Σ | σ | Omega | Ω | ω |

## PREFIJOS PARA MÚLTIPLOS DE UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL

| FACTOR DE MULTIPLICACIÓN | PREFIJO | SÍMBOLO |
|---|---|---|
| $10^{12}$ | Tera | T |
| $10^{9}$ | Giga | G |
| $10^{6}$ | Mega | M |
| $10^{3}$ | Kilo | K |
| $10^{2}$ | Hecto | H |
| 10 | Deca | Da |
| $10^{-1}$ | Deci | d |
| $10^{-2}$ | Centi | c |
| $10^{-3}$ | Mili | m |
| $10^{-6}$ | Micro | μ |
| $10^{-9}$ | Nano | n |
| $10^{-12}$ | Pico | p |
| $10^{-15}$ | Femto | f |
| $10^{-18}$ | Ato | a |

## FACTORES DE CONVERSIÓN

| LONGITUD | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **m** | **cm** | **km** | **pulg** | **pie** |
| **1 m** | 1 | 100 | 0.001 | 39.37 | 3.281 |
| **1 cm** | 0.01 | 1 | 0.00001 | 0.3937 | 0.03281 |
| **1 km** | 1000 | 100000 | 1 | 39370 | 3281 |
| **1 pulg** | 0.0254 | 2.54 | 0.0000254 | 1 | 0.08333 |
| **1 pie** | 0.3048 | 30.48 | 0.0003048 | 12 | 1 |
| **1 milla** | 1609 | 160900 | 1.609 | 63360 | 5280 |

| MASA | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **kg** | **g** | **slug** | **uma** |
| **1 kg** | 1 | 1000 | 0.06852 | $6.024 \times 10^{26}$ |
| **1 g** | 0.001 | 1 | 0.0000685 | $6.024 \times 10^{23}$ |
| **1 slug** | 14.59 | 14590 | 1 | $8.789 \times 10^{27}$ |
| **1 uma** | $1.66 \times 10^{-27}$ | $1.66 \times 10^{-24}$ | $1.137 \times 10^{-28}$ | 1 |

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

| TIEMPO | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **s** | **min** | **h** | **día** | **año** |
| **1 s** | 1 | 0.01667 | 0.0002778 | 0.00001157 | $3.169 \times 10^{-8}$ |
| **1 min** | 60 | 1 | 0.01667 | 0.0006994 | $1.9 \times 10^{-6}$ |
| **1 h** | 3600 | 60 | 1 | 0.04167 | 0.0001141 |
| **1 día** | 86400 | 1440 | 24 | 1 | 0.002738 |
| **1 año** | 31560000 | 525900 | 8766 | 365.2 | 1 |

| VELOCIDAD | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **m/s** | **cm/s** | **pie/s** | **Km/h** | **milla/h** |
| **1 m/s** | 1 | 100 | 3.281 | 3.61 | 2.237 |
| **1 cm/s** | 0.01 | 1 | 0.03281 | 0.036 | 0.02237 |
| **1 pie/s** | 0.3048 | 30.48 | 1 | 1.09728 | 0.6818 |
| **1 km/h** | 0.2777 | 27.77 | 0.9111 | 1 | 0.621 |
| **1 milla/h** | 0.4470 | 44.70 | 1.467 | 1.609 | 1 |

| FUERZA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **dina** | **nw** | **libra** | **poundal** | **gm-f** | **Kg-f** |
| **1 dina** | 1 | $10^{-5}$ | $2.248 \times 10^{-6}$ | $7.233 \times 10^{-5}$ | 0.00102 | $1.020 \times 10^{-6}$ |
| **1 nw** | $10^{5}$ | 1 | 0.2248 | 7.233 | 102 | 0.1020 |
| **1 libra** | $4.448 \times 10^{5}$ | 4.448 | 1 | 32.17 | 453.6 | 0.4536 |
| **1 poundal** | $1.3830 \times 10^{4}$ | 0.1383 | $3.108 \times 10^{-2}$ | 1 | 14.1 | 0.0141 |
| **1 gm-f** | 980.7 | $8.807 \times 10^{-3}$ | $2.205 \times 10^{-3}$ | 0.07093 | 1 | 0.001 |
| **1 kg-f** | $9.80700 \times 10^{5}$ | 9.807 | 2.205 | 70.93 | 1000 | 1 |

| TRABAJO - ENERGÍA - CALOR | | | |
|---|---|---|---|
| | **joule** | **ergio** | **libra.pie** |
| **1 joule** | 1 | 10000000 | 0.7376 |
| **1 ergio** | 0.0000001 | 1 | 0.00000007376 |
| **1 libra.pie** | 1.356 | 13560000 | 1 |
| **1 eV** | $1.602 \times 10^{-19}$ | $1.602 \times 10^{-12}$ | $1.182 \times 10^{-19}$ |
| **1 caloría** | 4.186 | 41860000 | 3.087 |
| **1 BTU** | 1055 | $1.055 \times 10^{10}$ | 777.9 |
| **1 kW.h** | 3600000 | $3.6 \times 10^{13}$ | 2655000 |

| TRABAJO - ENERGÍA - CALOR | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **eV** | **caloría** | **BTU** | **KW-h** |
| **1 joule** | $6.242 \times 10^{18}$ | 0.2389 | 0.0009481 | $2.778 \times 10^{-7}$ |
| **1 ergio** | $6.242 \times 10^{11}$ | $2.389 \times 10^{-8}$ | $9.481 \times 10^{-11}$ | $2.778 \times 10^{-14}$ |
| **1 libra.pie** | $8.464 \times 10^{18}$ | 0.3239 | 0.001285 | $3.766 \times 10^{-7}$ |
| **1 eV** | 1 | $3.827 \times 10^{-20}$ | $1.519 \times 10^{-22}$ | $4.450 \times 10^{-26}$ |
| **1 caloría** | $2.613 \times 10^{19}$ | 1 | 0.003968 | $1.163 \times 10^{-6}$ |
| **1 BTU** | $6.585 \times 10^{21}$ | 252 | 1 | $2.930 \times 10^{-4}$ |
| **1 kW-h** | $2.247 \times 10^{25}$ | 860100 | 341.3 | 1 |

| PRESIÓN | | | |
|---|---|---|---|
| | **Pascal (nw/m$^2$)** | **dina/cm$^2$** | **atmósfera** |
| **1 Pascal (nw/m$^2$)** | 1 | 10 | $9.869 \times 10^{-6}$ |
| **1 dina/cm$^2$** | 0.1 | 1 | $9.869 \times 10^{-7}$ |
| **1 atmósfera** | $1.013 \times 10^{5}$ | $1.013 \times 10^{6}$ | 1 |
| **1 cm Hg** | $1.333 \times 10^{3}$ | $1.333 \times 10^{4}$ | $1.316 \times 10^{-2}$ |
| **1 libra/pul$^2$** | $6.895 \times 10^{3}$ | $6.895 \times 10^{4}$ | $6.805 \times 10^{-2}$ |
| **1 libra/pie$^2$** | 47.88 | $4.788 \times 10^{2}$ | $4.725 \times 10^{-4}$ |

| PRESIÓN | | | |
|---|---|---|---|
| | **Cm Hg** | **libra/pul$^2$** | **libra/pie$^2$** |
| **1 Pascal (nw/m$^2$)** | $7.501 \times 10^{-4}$ | $1.450 \times 10^{-4}$ | $2.089 \times 10^{-2}$ |
| **1 dina/cm$^2$** | $7.501 \times 10^{-5}$ | $1.450 \times 10^{-5}$ | $2.089 \times 10^{-3}$ |
| **1 atmósfera** | 76 | 14.70 | $2.116 \times 10^{3}$ |
| **1 cm Hg** | 1 | 0.1943 | 27.85 |
| **1 libra/pul$^2$** | 5.171 | 1 | 144 |
| **1 libra/pie$^2$** | $3.591 \times 10^{-2}$ | $6.944 \times 10^{-3}$ | 1 |

## UNIDADES BÁSICAS DEL SISTEMA INTERNACIONAL

| CANTIDAD BÁSICA | NOMBRE | SÍMBOLO |
|---|---|---|
| Longitud | Metro | m |
| Masa | Kilogramo | kg |
| Tiempo | Segundo | s |
| Corriente eléctrica | Ampere | A |
| Temperatura | Kelvin | K |
| Cantidad de masa | Mol | mol |
| Intensidad luminosa | Candela | cd |

## PREMIOS NOBEL DE FÍSICA

| Año | Nombre | Trabajo |
|---|---|---|
| 1901 | Wilhelm Konrad Röentgen | Descubrimiento de los rayos X |
| 1902 | Hendrick Antón Lorentz | Influencia del magnetismo en los fenómenos de la radiación. |
| 1903 | Antoine Henri Becquerel<br>Pierre Curie<br>Marie Curie | Descubrimiento de la radiactividad espontánea y fenómenos de la radiación. |
| 1904 | John William Strutt<br>(Lord Rayleigh) | Densidades de los gases más importantes y descubrimiento del argón. |
| 1905 | Philipp Eduard Antón L. | Rayos catódicos |
| 1906 | Joseph John Thompson | Conducción de la electricidad en los gases. |
| 1907 | Alberty Abraham Michelson | Instrumentos ópticos de precisión. |
| 1908 | Gabriel Lipman | Reproducción de colores fotográficamente basado en los fenómenos de interferencia. |
| 1909 | Guglielmo Marconi<br>Carl Ferdinand Braun | Telegrafía inalámbrica. |
| 1910 | Johannes Diderik Van der Waals | Ecuación de estado para los gases y los líquidos. |
| 1911 | Wilhelm Wien | Descubrimiento de las leyes que gobiernan la radiación del calor. |
| 1912 | Nils Gustaf Dalén | Invento de los reguladores automáticos para usarse junto con los acumuladores de gas para iluminar los faros y la boyas. |
| 1913 | Heike Kamerlingh Onnes | Investigación sobre las propiedades de la materia a bajas temperaturas. |
| 1914 | Max Von Laue | Descubrimiento de la difracción de los rayos X en los cristales. |
| 1915 | William Henry Bragg<br>William Lawrence Bragg | Análisis de la estructura cristalina por medio de los rayos X. |
| 1917 | Charles Glover Barkla | Descubrimiento de los rayos X característicos de los elementos. |
| 1918 | Max Planck | Descubrimiento de los cuántos de energía. |
| 1919 | Johannes Stark | Descubrimiento del efecto Doppler en los rayos canal y la separación de las líneas espectrales en los campos eléctricos. |
| 1920 | Charles Eduard Guillaume | Servicio a las mediciones de precisión en física a través de su descubrimiento de las anomalías en las aleaciones de acero-níquel. |
| 1921 | Albert Einstein | Descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico. |
| 1922 | Niels Bohr | Investigación del modelo del átomo y su radiación. |
| 1923 | Robert Andrews Millikan | Medición de la carga del electrón y el estudio experimental del efecto fotoeléctrico. |
| 1924 | Karl Manne Georg Siegbahn | Investigación y descubrimiento en la espectroscopía de los rayos X. |
| 1925 | James Franck Gustav Hertz | Descubrimiento del efecto Franck-hertz en el choque electrón-átomo. |
| 1926 | Jeanm Baptiste Perrin | Investigación del movimiento browniano para validar la estructura discontinua de la materia. |
| 1927 | Arthur Holly Compton | Descubrimiento del efecto Compton |

| | | |
|---|---|---|
| 1928 | Owen Willians Richardson | Investigación sobre fenómenos termoiónicos y los electrones emitidos por metales calientes. |
| 1929 | Prince Louis Victor de Broglie | Descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de los electrones. |
| 1930 | Chandrashekara Venkata Raman | Investigación sobre la dispersión de la luz. |
| 1932 | Werner Heisenberg | Creación de la mecánica cuántica |
| 1933 | Erwin Schrödinger<br>Paul Adrien Maurice Dirac | Desarrollo de la mecánica ondulatoria y la mecánica cuántica relativista. |
| 1935 | James Chadwick | Descubrimiento del neutrón. |
| 1936 | Victor Franz Hess<br>Carl David Anderson | Descubrimiento de la radiación cósmica y el descubrimiento del positrón. |
| 1937 | Clinton Joseph Davisson<br>George Paget Thomson | Investigación sobre difracción de electrones por cristales. |
| 1938 | Enrico Fermi | Producción de elementos radiactivos mediante irradiación con neutrones. |
| 1939 | Ernest Orlando Lawrence | Invento y desarrollo del ciclotrón. |
| 1943 | Otto Stern | Contribución y desarrollo del método de los rayos moleculares y su descubrimiento del momento magnético del protón. |
| 1944 | Isidor Isaac Rabi | Descubrimiento de la resonancia magnética nuclear en haces atómicos y moleculares. |
| 1945 | Wolfgang Pauli | Descubrimiento del principio de exclusión. |
| 1946 | Percy Williams Bridgman | Invento del aparato para producir presiones extremadamente altas. |
| 1947 | Edward Victor Appleton | Investigación de la ionosfera. |
| 1948 | Patrick MaynardStuart Blackett | Investigación de la física nuclear con fotografías con la cámara de niebla y radiación cósmica. |
| 1949 | Hideki Yukawa | Predicción de la existencia de los mesones. |
| 1950 | Cecil Frank Powell | Método para estudiar los rayos cósmicos con emulsiones fotografías. |
| 1951 | John Douglas Cockcroft<br>Ernest Tomas Sinton Walton | Transmutación de núcleos en un acelerador. |
| 1952 | Felix Bloch<br>Edward Mills Purcell | Descubrimiento de la resonancia magnética nuclear en líquidos y gases. |
| 1953 | Frits Zernike | Invento del microscopio de contraste de fases. |
| 1954 | Max Born<br>Walther Bothe | Interpretación de la función de onda como una probabilidad en el desarrollo de la mecánica cuántica.<br>Método para estudiar partículas subatómicas. |
| 1955 | Willis Eugene Lamb<br>Polykarp Kusch | Descubrimiento de la estructura fina del átomo de hidrógeno. Determinación de precisión del momento magnético del electrón. |
| 1956 | William Shokley<br>John Bardeen<br>Walter Houser Brttain | Investigación sobre semiconductores y por el efecto del transistor. |
| 1957 | Chen Ning Yang<br>Tsung Dao Lee | Predicción de que la paridad no se conserva en el decaimiento beta. |
| 1958 | Pavel Alecksejecic Cerenkov<br>Illja Michajlovik Frank<br>Igor Evgen´evic Tamm | Descubrimiento e interpretación del efecto Cerenkov. |
| 1959 | Emilio Gino Segré<br>Owen Chamberlain | Descubrimiento del antiprotón. |

| | | |
|---|---|---|
| 1960 | Donald Arthur Glaser | Invento de la cámara de burbujas. |
| 1961 | Robert Hofstadter<br>Rudolf Ludwig Mössbauer | Descubrimiento de la estructura interna de protones y neutrones. Descubrimiento del efecto Mössbauer. |
| 1962 | Lev Davidovic Landau | Estudio de la materia condensada. |
| 1963 | Eugene P Wigner<br>Maria Goeppert Mayer<br>J. Hans D. Jensen | Contribución a la teoría del núcleo atómico y las partículas elementales. Descubrimiento de la estructura de capas del núcleo. |
| 1964 | Charles H Townes<br>Nikolai G Basov<br>Alexander M Prochorov | Investigación en el campo de la electrónica cuántica y desarrollo de máseres |
| 1965 | Si Itiro Tomonaga<br>Julian Schwinger<br>Richard P Feynman | Investigación en la electrodinámica cuántica. |
| 1966 | Alfred Kastler | Descubrimiento y desarrollo de métodos ópticos para el estudio de la resonancia Hertziana en los átomos. |
| 1967 | Hans Albrecht Bethe | Contribución a la teoría de las reacciones nucleares. |
| 1968 | Luis W Alvarez | Descubrimiento de estados de resonancia de las partículas elementales. |
| 1969 | Murria Dell-Mann | Clasificación de las partículas elementales. |
| 1970 | Hannes Alvén<br>Louis Néel | Desarrollo de la teoría magnetohidrodinámica.<br>Descubrimiento del antiferromagnetismo y ferromagnetismo. |
| 1971 | Dennis Gabor | Descubrimiento de los principios de holografía. |
| 1972 | John Bardeen<br>León N Cooper<br>J. Robert Schrieffer | Desarrollo de la teoría de la superconductividad. |
| 1973 | Leo Esaki<br>Ivar Giaever<br>Brian D Josephson | Descubrimiento del efecto túnel en semiconductores.<br>Descubrimiento del efecto túnel en superconductores.<br>Predicción teórica de las propiedades de una supercorriente a través de una barrera de túnel. |
| 1974 | Anthony Hewish<br>Martín Ryle | Descubrimiento de los púlsares. Investigación en radioastronomía. |
| 1975 | Aage Bohr<br>Ben Mottelson<br>James Rainwater | Descubrimiento de que algunos núcleos toman formas asimétricas. |
| 1976 | Burton Richter<br>Samuel Chao Chung Ting | Descubrimiento de la partícula J. |
| 1977 | Philip Warren Anderson<br>Nevill Francis Mott<br>John Hasbrouck Van Vleck | Investigación de los sólidos con la mecánica cuántica. |
| 1978 | Peter L Kapitza<br>Arno A Penzias<br>Robert Woodrow Wilson | <br>Descubrimiento de la radiación de fondo cósmica.<br>Investigación del helio líquido. |
| 1979 | Sheldon Lee Lashow<br>Vaduz Salam<br>Steven Weinberg | Desarrollo de la teoría de unificación de las fuerzas débiles y electromagnéticas. |
| 1980 | James W Cronin<br>Val L Fitch | Descubrimiento de la violación de la paridad de carga. |
| 1981 | Nicilaas Bloembergen<br>Arthur Leonard Schawlow<br>Kai M Siegbahn | Contribución al desarrollo de la espectroscopía láser.<br>Contribución a la espectroscopía electrónica de alta resolución. |
| 1982 | Kenneth Geddes Wilson | Desarrollo de métodos con que se construyen teorías de transiciones de fase. |

| | | |
|---|---|---|
| 1983 | Subrehmanyan Chandrasekhar<br>William A Fowler | Estudio de la estructura y evolución de las estrellas.<br>Estudios de la formación de los elementos químicos del universo. |
| 1984 | Carlo Rubia<br>Simón Van der Meer | Descubrimiento de las partículas de campo W y Z. |
| 1985 | Klaus Von Klitzing | Descubrimiento de la resistencia Hall cuantizada. |
| 1986 | Ernest Ruska<br>Gerd Binnig<br>Heinrich Rohrer | Invento del microscopio electrónico. Invento del microscopio electrónico de barrido por efecto túnel. |
| 1987 | Karl Alex Muller<br>J. Georg Bednorz | Descubrimiento de una nueva clase de superconductores. |
| 1988 | León M Lederman<br>Melvin Schwartz<br>Jack Steinberger | Experimentos con haces de neutrinos y el descubrimiento del neutrino del muón. |
| 1989 | Hans G Dehmelt<br>Wolfgang Paul<br>Norman F Ramsey | Desarrollo de técnicas para atrapar átomos individuales. |
| 1990 | Richard E Taylor<br>Jerome I Friedman<br>Henry W Kendall | Experimentos sobre dispersión de electrones por núcleos y desarrollo del modelo del quark. |
| 1991 | Pierre-Gilles de Gennes | Descubrimiento respecto al ordenamiento de las moléculas en sustancias como los cristales líquidos, polímeros y superconductores. |
| 1992 | George Charpak | Desarrollo de detectores que siguen las trayectorias de partículas subatómicas. |
| 1993 | Russel Hulse<br>Joseph Taylor | Descubrimiento de evidencias de ondas gravitacionales. |
| 1994 | Bertram N Brockhouse<br>Clifford G Schull | Investigación de la dispersión de neutrones. |
| 1995 | Martín Perl<br>Frederick Reiner | Descubrimiento del leptón tau. Detección del neutrino. |
| 1996 | David M Lee<br>Douglas D Osheroff<br>Robert C Richardson | Descubrimiento del fenómeno de la superfluidez en el isótopo de helio-3. |
| 1997 | Steven Chu<br>Claude Cohen-Tannoudji<br>William D Phillips | Desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos con luz láser. |
| 1998 | Robert B Laughlin<br>Horst L Storner<br>Daniel C Tsui | Descubrimiento de una nueva forma de fluido cuántico con excitaciones fraccionalmente cargadas. |
| 1999 | Hooft Gerardus<br>Veltman Martinus | Dilucidar la estructura cuántica de interacciones electrodébiles en física. |
| 2000 | Zhores Alferov<br>Herbert Kroemer<br>Jack Kilby | Desarrollo de microcomponentes electrónicos. Invención del chip |

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA
MANIZALES

# BIBLIOGRAFÍA


ACOSTA Virgilio, COPWAN Clyde, GRAHAM B.J. Curso de física moderna. Editorial Harla, México, 1975.

ALONSO Marcelo, FINN Edward J. Física. Editorial Addison-Wesley Ibneroamericana, USA, 1995

ALVARENGA Beatriz, MÁXIMO Antonio. Física general. Tomo II, Tercera edición. Editorial Harla, México, 1983.

BEISER Arthur. Conceptos de física moderna. Segunda edición, Editorial Mc Graw-Hill, México, 1981.

EDMINISTER Joseph. Electromagnetismo. Editorial Mc Graw-Hill, Colombia, 1981.

EISBERG Robert, RESNICK Robert. Física cuántica. Editorial Limusa, México, 1983.

FISHBANE Paul M, GASIOROWICS Stephen, THORNTON Stephen T. Física para ciencias e ingeniería. Vol 2. Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1993.

GARCIA C. Mauricio, Ewert De-Geus Jeanine. Introducción a la física moderna. Editorial Universidad Nacional. Colombia, 1987.

HALLIDAY David, RESNICK Robert, KENNETH S Krane. Física, Vol 2. Tercera edición, Compañía editorial Continental, México, 1994.

HALLIDAY David, RESNICK Lawrence. Física, Parte II, Compañía editorial continental, México, 1976.

HAYT William H. Teoría electromagnética. Editorial Mc Graw-Hill, México, 1989.

HECHT Eugene. Física en perspectiva. Editorial Addison-Wesley iberoamericana, USA, 1987.

JOHNK Carl T. Teoría electromagnética. Editorial Limusa, México, 1981.

KRANE Kenneth. Física moderna. Editorial Limusa, México, 1991.

MC KELVEY John, GROTCH Howard. Física para ciencias e ingeniería, Tomo II. Primera edición. Editorial Harla, México, 1980.

SADIKU Mathew. Elementos electromagnéticos. Segunda edición. Compañía editorial continental, México, 1998.

SERWAY Raymond A. Física. Tomo II, Cuarta edición. Editorial Mc Graw-Hill, México, 1990.

TIPLER Paul A. Física. Vol 2, Tercera edición,.Editorial Reverté, España, 1996.

WANGSNESS Ronald K. Campos electromagnéticos. Editorial Limusa, México, 1989.

# ÍNDICES

## A

Amper ..... 33, 35, 36, 67, 78, 91, 92
Apantallamiento ..... 152
Autoinducción ..... 61
Avogadro ..... 170

## B

Balmer ..... 163, 175
Biot-savart ..... 34
Bobina ..... 53, 61, 62, 63, 64, 65, 81
Bohr ..... 166, 167
Bremsstrahlung ..... 150
Broglie ..... 179, 180, 189

## C

Campo magnético ..... 15, 16, 19, 20
Ciclotrón ..... 21
Coercitivo ..... 82
Compton ..... 133, 134, 135, 152
Contravoltaje ..... 123, 124
Corpuscular ..... 133, 152, 179, 182, 189
Correspondencia ..... 167
Corrimiento ..... 133, 134, 145
Cósmico ..... 98
Cuantización ..... 113
Curie ..... 80, 81

## D

Davisson ..... 180
Degenerados ..... 192

Densidad ..... 15, 65, 96, 109, 111, 113, 152, 170, 189
Desplazamiento..... 35, 110, 113
Diamagnético ..... 81
Dipolo..... 19, 20, 78, 80, 81
Dispersión ..... 134, 165, 168, 169

## E

Einstein ..... 121, 124
Electromagnetismo..... 33
Energía, potencial ..... 20
Espectrales, líneas ..... 163
Espectrales, series ..... 163
Espectro ..... 26, 97, 150, 151, 162, 163, 164
Espectrógrafo ..... 161
Espectroscopía ..... 161
Espira ..... 19, 20
Estados ..... 166, 167, 174, 192

## F

Faraday ..... 49, 50, 61, 91, 92
Fase ..... 181
Ferromagnético ..... 80, 81, 87
Flujo..... 15, 17, 18
Fotoeléctrico..... 121, 133, 152
Fotón ..... 121, 134, 135, 168, 179
Frenado ..... 123, 150
Función de onda ..... 189, 190, 191, 192

## G

Gamma ..... 98
Gauss ..... 17, 18, 35, 91, 92
Germer ..... 180
Grupo ..... 181

## H

Heisenberg ..... 182
Hemirreductora ..... 153
Henry ..... 161, 162
Histéresis ..... 81, 82

## I

Incertidumbre ..... 182
Inducción ..... 15, 16, 17, 18, 49
Inductancia ..... 61, 62, 63
Inductor ..... 61
Infrarroja ..... 98, 164

## L

Lenz ..... 49
Lineales, materiales magnéticos ..... 79
Lorentz ..... 16

## M

Magnesia ..... 15
Magnetita ..... 15
Magnetización ..... 77, 78, 79
Maxwell ..... 18, 36, 91, 92, 112
Microondas ..... 98
Momento ..... 19, 20, 78, 166, 192
Moseley ..... 152

## N

Negro ..... 109, 110, 113
Normalizada ..... 190
Número cuántico ..... 103, 166, 192

## O


Oersted ..... 33
Onda electromagnética ..... 92, 94, 95, 96
Operadores ..... 191
Orbital ..... 166


## P


Paramagnético ..... 80, 81
Partículas α ..... 168
Permeabilidad ..... 34, 37, 80, 81
Planck ..... 109, 113, 124, 166, 179
Postulado ..... 191, 192
Poyting ..... 95
Presión ..... 96
Probabilidad ..... 189


## R


Rayleigh-Jeans ..... 112, 113
Rayos X ..... 98, 133, 149, 150, 151, 152
RL, circuito ..... 63
Röentgen ..... 149
Rutherford ..... 165, 166, 168
Rydberg ..... 164


## S


Schrödinger ..... 179, 189, 190
Solenoide ..... 37
Spin ..... 192
Stefan-Boltzman ..... 110, 113
Susceptibilidad ..... 79, 80, 81

## T

Tesla ..... 15
Thomson ..... 164, 180
Torque ..... 19
Transformador ..... 66, 82

## U

Ultravioleta ..... 98, 112, 121, 164
Umbral ..... 122, 125

## V

Valores esperados ..... 191
Valores propios ..... 191

## W

Weber ..... 18
Wien ..... 110, 111, 113