UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Dinámica de taludes inestables

Juan Sebastián Reinosa Guzmán
Ingeniero civil

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ingeniería
Maestría en Ingeniería – Geotecnia
Bogotá D.C., Colombia
2025

Dinámica de taludes inestables

Juan Sebastián Reinosa Guzmán
Ingeniero civil

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ingeniería – Geotecnia

Director:
Guillermo Eduardo Ávila Álvarez
Ingeniero civil, Msc en Geotecnia, Phd

Línea de Investigación:
Modelación y análisis en geotecnia

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ingeniería
Maestría en Ingeniería – Geotecnia
Bogotá D.C., Colombia
2025

A mis padres y mis hermanos
En memoria de Félix Hernández Rodríguez

El mundo es mi representación
Arthur Schopenhauer

Agradecimientos

El autor desea expresar su más profundo agradecimiento a la Universidad Nacional de Colombia, por haberle permitido vivir los mejores años de su vida entre sus aulas y por abrirle un universo de posibilidades que marcaron su camino personal y profesional.

Al profesor Félix Hernández Rodríguez (q.e.p.d.), por su valiosa orientación en el desarrollo de este trabajo, su infinita paciencia, su disposición permanente y por ser, siempre, una conversación amable y enriquecedora. Sin su guía, este trabajo simplemente no habría sido posible.

Al profesor Guillermo Eduardo Ávila Álvarez, por su disposición siempre amable, su acompañamiento comprometido durante la recta final de este proceso, y por su genuino interés en fortalecer la investigación dentro de la universidad.

Y a mis padres y hermanos, por su apoyo incondicional, por ser siempre el impulso y la motivación necesarios para seguir adelante, incluso cuando los objetivos se ven lejanos o los caminos se tornan difíciles.

Resumen

Dinámica de taludes inestables

Este trabajo presenta una metodología para el análisis de la dinámica de taludes fallados, orientada a estimar su comportamiento en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración. La propuesta se basa en un enfoque reológico, en el que la masa deslizada se representa como un sistema de tajadas interconectadas mediante modelos viscoelásticos, mientras que su interacción con la superficie de falla se modela mediante un esquema viscoplástico. La formulación empleada se fundamenta en el principio de trabajo y energía, lo que permite evaluar la evolución temporal del sistema ante distintas configuraciones geométricas —alturas de 10 m, 15 m y 20 m; e inclinaciones de 30°, 40° y 45°— así como frente a diferentes propiedades mecánicas del terreno, representadas mediante los parámetros de rigidez (E) y viscosidad (η). Se desarrollaron 60 simulaciones numéricas a partir de las cuales se estimaron la distancia de viaje, las velocidades máximas, las aceleraciones y la presión de impacto de la masa inestable. Los resultados fueron contrastados con relaciones teóricas y empíricas reportadas en la literatura (Yue, 2014; Moncayo & Ávila, 2022), evidenciando discrepancias cuya magnitud depende de la geometría del talud y de los parámetros reológicos adoptados. Además, se identificaron respuestas típicas de sistemas sobreamortiguados en escenarios de alta viscosidad, comportamiento que permite explicar tanto la geometría de las deformadas como la distribución interna de velocidades. El enfoque propuesto constituye una herramienta útil para la caracterización dinámica de masas inestables, con potencial aplicación en estudios de amenaza y riesgo geotécnico.

Palabras clave: taludes inestables, modelos reológicos, dinámica de taludes, trabajo y energía, simulación numérica.

Abstract

Dynamics of failed slopes

This work presents a methodology for analyzing the dynamics of failed slopes, aimed at estimating their behavior in terms of displacement, velocity, and acceleration. The proposed approach is based on a rheological framework, in which the sliding mass is modeled as a system of slices interconnected through viscoelastic components, while the interaction with the failure surface is described using a viscoplastic model. The formulation relies on the principle of work and energy, allowing the temporal evolution of the system to be evaluated under different geometric configurations —heights of 10 m, 15 m, and 20 m; and inclinations of 30°, 40°, and 45°— as well as varying mechanical properties of the soil, represented by the stiffness (E) and viscosity (η) parameters. A total of 60 numerical simulations were conducted to estimate the runout distance, peak velocities, acceleration and impact pressure of the unstable mass. The results were compared with theoretical and empirical relationships reported in the literature (Yue, 2014; Moncayo & Ávila, 2022), revealing discrepancies that vary according to the slope geometry and rheological parameters considered. Moreover, highly viscous scenarios exhibited typical overdamped behavior, which helps explain both the shape of the deformed mass and the internal velocity distribution. The proposed method offers a valuable tool for the dynamic characterization of unstable slopes and has potential applications in landslide hazard and risk assessments.

Keywords: unstable slopes, rheological models, landslide dynamics, work and energy, numerical simulation.

Contenido

Pág.

1. Marco conceptual 5
1.1 Respuesta dinámica de sistemas mecánicos lineales 5
1.1.1 Resortes y amortiguadores viscosos 6
1.1.2 Amortiguador de Coulomb 10
1.2 Análisis del movimiento planar 11
1.2.1 Movimiento sobre la espiral logarítmica 11
1.2.2 Energía cinética 14
1.2.3 Principio de trabajo y energía 17

2. Antecedentes 21
2.1 Modelo de Hungr (1995) 21
2.2 Modelo de Basto (2009) 24
2.3 Modelo de Mora (2011) 25
2.4 Modelo de Moreno (2016) 27

3. Dinámica de taludes inestables 31
3.1 Metodología 32
3.2 Definición del problema 33
3.2.1 Geometría y discretización del talud 34
3.2.2 Nivel freático 36
3.2.3 Características del suelo 39
3.3 Análisis de estabilidad para calcular el factor de seguridad 53
3.4 Modelo matemático 57
3.4.1 Analogías reológicas 57
3.4.2 Formulación del principio de trabajo y energía 66
3.5 Método numérico 68
3.5.1 Ecuación del movimiento para un tiempo t 69
3.5.2 Primer movimiento 73

4. Resultados y análisis de sensibilidad 77
4.1 Casos de estudio 77
4.2 Desplazamiento del talud 79
4.2.1 Distancia de viaje 80
4.2.2 Desplazamiento del frente 98
4.3 Evolución espacio-temporal de taludes inestables 100
4.3.1 Deslizamientos como sistemas sobreamortiguados: Evolución temporal de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. 101
4.3.2 Análisis de la influencia de los parámetros reológicos en la dinámica de taludes inestables. 109

4.3.3 Presión de impacto 114

5. Conclusiones y recomendaciones 117
5.1 Conclusiones 117
5.2 Recomendaciones 119

Lista de figuras

Pág.

Figura 1-1: Representación esquemática de un resorte (izquierda) y un amortiguador viscoso (derecha). 6
Figura 1-2: Sistema combinado de resorte – amortiguador viscoso en paralelo. 7
Figura 1-3: Evolución de los desplazamientos en sistemas de vibraciones libres con diferentes grados de amortiguamiento. 9
Figura 1-4: Representación esquemática del movimiento de una partícula sobre una espiral logarítmica. 13
Figura 1-5: Representación esquemática de la sección transversal de un cilindro que gira sin deslizarse. R: Radio del cilindro, ω: Velocidad angular de giro, V: velocidad tangencial, M: masa del cilindro. 15
Figura 2-1: Malla Lagrangiana en coordenadas curvilíneas de bloques de frontera e internos. 22
Figura 2-2: Perfiles de flujo para diferentes modelos reológicos en el estudio de rotura de una presa. 23
Figura 2-3: Discretización, mecanismo de falla (izquierda) y diagrama de fuerzas (derecha) adoptado en el estudio de Desplazamientos viscoplástico de taludes fallados. 24
Figura 2-4: Modelo analítico adoptado para los análisis en el estudio de Contención de taludes en estado Viscoplástico..... 25
Figura 2-5: Modelo mecánico para representar el movimiento del talud sobre una superficie plana contra un muro de contención..... 26
Figura 2-6: Modelo adoptado para el análisis de estabilidad de taludes en el trabajo de Cinética de taludes en suelos compresibles viscoplásticos. 27
Figura 3-1: Representación esquemática de la geometría y la discretización de los taludes objeto de análisis en la metodología propuesta. 34
Figura 3-2: Representación esquemática del cambio de la geometría de las tajadas de un tiempo t a un tiempo t+1. 35
Figura 3-3: Definición del nivel freático y el gradiente hidráulico según Dupuit (1863)... 37
Figura 3-4: Curva del flujo típico de mezclas de suelo-agua. 40
Figura 3-5: Curva de flujo obtenida con el ensayo del reómetro. 41
Figura 3-6: Variación de la viscosidad en una muestra de suelo en función de la velocidad de desplazamiento. 48
Figura 3-7: Generación de superficies potenciales de falla sobre un talud de análisis... 54
Figura 3-8: Esquema de las fuerzas que actúan sobre la j-ésima tajada del mecanismo de falla. 55

Figura 3-9: Representación esquemática de las analogías reológicas adoptadas para describir el comportamiento dinámico de j-ésima masa que compone un talud inestable. 58
Figura 3-10: Representación esquemática del modelo reológico viscoelástico. 59
Figura 3-11: Representación esquemática del modelo reológico viscoplástico. 61
Figura 3-12: Diagrama de fuerzas (izquierda) y desplazamientos (derecha) de una tajada de un talud infinito que se desliza sobre una superficie de falla plana. 61
Figura 3-13: Diagrama de las fuerzas externas que actúan sobre el modelo reológico de la j-ésima masa. 63
Figura 3-14: Representación esquemática y diagrama de fuerzas del modelo reológico viscoelástico en dirección normal a la superficie de falla. 64
Figura 3-15: Diagrama de flujo con la metodología propuesta para realizar el análisis de la dinámica de taludes inestables 76
Figura 4-1: Variables geométricas para la definición de la distancia de viaje. H: Altura de caída, L: Distancia de viaje, α: Ángulo de viaje, β: Ángulo de sombra, Ψ: Ángulo de fuente, ϒ: Ángulo del substrato y S_1: Distancia de sombra. 80
Figura 4-2: Relación entre la distancia de viaje y el volumen del deslizamiento. 82
Figura 4-3: Relación entre la distancia de viaje y la altura del talud. 84
Figura 4-4: Relación entre la distancia de viaje con la altura e inclinación del talud. 86
Figura 4-5: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud de 10 m de altura. 88
Figura 4-6: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud de 15 m de altura. 90
Figura 4-7: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10 kPa. 91
Figura 4-8: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10^2 kPa. 92
Figura 4-9: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10^3 kPa. 92
Figura 4-10: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10^4 kPa. 93
Figura 4-11: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para todos los escenarios simulados. 94
Figura 4-12: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud con 10 m de altura y diferentes rangos de viscosidad. 95
Figura 4-13: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud con 15 m de altura y diferentes rangos de viscosidad. 95
Figura 4-14: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para todos los escenarios simulados en función de la viscosidad. 96
Figura 4-15: Relación entre el desplazamiento del frente y los parámetros reológicos del material para un talud de 10 m de altura. 98
Figura 4-16: Relación entre el desplazamiento del frente y los parámetros reológicos del material para un talud de 15 m de altura. 99

Figura 4-17: Relación entre el desplazamiento del frente y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados. 100
Figura 4-18: Zonas clave para la caracterización dinámica del movimiento de la masa inestable. A: Frente de la masa movilizada, B: Parte central de la masa movilizada, C: Parte inicial o extremo posterior de la masa movilizada. 101
Figura 4-19: Evolución de los desplazamientos en el tiempo para un talud de H=10m, β=30°, E=10^2 kPa y η=10^4 kPa.s. 102
Figura 4-20: Evolución de las velocidades en el tiempo para un talud de H=10m, β=30°, E=10^2 kPa y η=10^4 kPa.s. 103
Figura 4-21: Evolución de las aceleraciones en el tiempo para un talud de H=10m, β=30°, E=10^2 kPa y η=10^4 kPa.s. 105
Figura 4-22: Evolución de los desplazamientos en el tiempo para un talud de H=10m, β=40°, E=10^3 kPa y η=10^5 kPa.s. 106
Figura 4-23: Evolución de las velocidades en el tiempo para un talud de H=10m, β=40°, E=10^3 kPa y η=10^5 kPa.s.....106
Figura 4-24: Evolución de los desplazamientos en el tiempo para un talud de H=15m, β=40°, E=10^4 kPa y η=10^6 kPa.s. 107
Figura 4-25: Evolución de las velocidades en el tiempo para un talud de H=15m, β=40°, E=10^4 kPa y η=10^6 kPa.s.....107
Figura 4-26: Relación entre la velocidad máxima de la masa inestable y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados – Influencia de la geometría. 110
Figura 4-27: Relación entre la velocidad máxima de la masa inestable y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados – Influencia de la altura y la rigidez. 112
Figura 4-28: Relación entre la velocidad máxima de la masa inestable y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados – Influencia de la altura y la rigidez. 114
Figura 4-29: Relación entre la presión de impacto y la aceleración media del proceso.115

Lista de tablas

Pág.

Tabla 3-1: Comparación entre los valores de la viscosidad característicos de tres deslizamientos ocurridos en diferentes materiales obtenidos del ensayo de corte anular y retroanálisis con información de campo. 43
Tabla 3-2: Resultados de la estimación de la viscosidad mediante retroanálisis e información de campo para los deslizamientos de Orvieto (Italia), Fosso San Martino (Italia) y Vallcebre (España). 46
Tabla 3-3: Clasificación de deslizamientos según su velocidad típica, tipo de movimiento, materiales asociados y rangos de parámetros reológicos estimados en estudios de campo y laboratorio. 52
Tabla 4-1: Selección de parámetros para casos de análisis. 78
Tabla 4-2: Parámetros para definir la magnitud de los movimientos en masa 79

Introducción

La estabilidad de taludes ha sido tradicionalmente abordada desde una perspectiva estática, enfocándose en la estimación del factor de seguridad como indicador principal para prevenir el colapso o la movilización del terreno. Esta aproximación ha permitido avances significativos en el diseño y control de obras civiles, pero presenta limitaciones importantes cuando se requiere caracterizar el comportamiento posterior al fallo. En contextos donde el riesgo geotécnico es alto, tales como zonas de alta pendiente, regiones sísmicamente activas o áreas con precipitaciones extremas, el análisis dinámico del desplazamiento de las masas inestables adquiere una relevancia crítica, en especial cuando se busca estimar el área de afectación, la energía de impacto o el tiempo de llegada del flujo o deslizamiento.

A nivel práctico, la caracterización del movimiento post-falla sigue siendo uno de los aspectos más desafiantes en los estudios de amenaza y riesgo geotécnico. En muchos casos, la evaluación del riesgo queda incompleta debido a la ausencia de modelos que describan el comportamiento dinámico de la masa deslizada, lo cual limita la toma de decisiones para la gestión del territorio, la planificación de obras de mitigación y el diseño de sistemas de alerta temprana. Esta necesidad ha impulsado el desarrollo de metodologías que, más allá del análisis de estabilidad inicial, se centran en comprender el movimiento del material una vez que el proceso de inestabilidad ha comenzado.

En este marco, el presente trabajo desarrolla una metodología que permite describir la evolución dinámica de taludes que ya han entrado en fase de movimiento. El enfoque adoptado propone la modelación del talud mediante un sistema de tajadas discretas que interactúan entre sí a través de modelos viscoelásticos, y cuya interacción con la superficie de falla es representada mediante elementos viscoplásticos. Esta representación permite captar de manera más realista los mecanismos de deformación interna y fricción basal que gobiernan la evolución del movimiento, incorporando además el papel fundamental que

desempeñan las propiedades reológicas del material, como la rigidez (E) y la viscosidad dinámica (η), en la resistencia y disipación del sistema.

La metodología propuesta se sustenta en los principios de trabajo y energía, lo cual ofrece un marco conceptual robusto y consistente con los fundamentos de la mecánica clásica, pero adaptado a la representación dinámica de sistemas geotécnicos complejos. Este trabajo articula formulaciones físicas y numéricas, empleando discretización temporal mediante diferencias finitas y evaluación del balance energético en cada paso de cálculo. Se analizan diferentes configuraciones geométricas y combinaciones reológicas, evaluando la sensibilidad de los resultados ante cambios en las propiedades del sistema.

A diferencia de modelos puramente cinemáticos o enfoques semiempíricos, el modelo desarrollado permite una simulación explícita de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, abriendo la posibilidad de explorar diferentes escenarios y analizar la sensibilidad de los resultados frente a las propiedades de los materiales. Cabe destacar que este enfoque no busca reemplazar los métodos simplificados, los cuales siguen siendo útiles en etapas preliminares de evaluación, sino complementarlos con herramientas que ofrezcan una caracterización más completa del fenómeno una vez se ha producido la inestabilidad.

El estudio se apoya en una revisión bibliográfica que da cuenta del estado del arte en la modelación de deslizamientos post-falla, incluyendo trabajos experimentales, simulaciones numéricas y aproximaciones teóricas, con especial énfasis en la estimación de parámetros reológicos en suelos. Se destacan los estudios que han permitido comprender la relación entre el comportamiento dinámico de la masa deslizada y parámetros como la rigidez, la viscosidad, la energía disponible y la configuración geométrica del talud, aspectos que sustentan el planteamiento adoptado en esta investigación.

A partir de este marco teórico y metodológico, el trabajo plantea como objetivo general proponer una metodología y un algoritmo para evaluar las características de movimiento, desplazamiento, velocidad y aceleración en taludes fallados. Y como objetivos específicos: utilizar principios de trabajo y energía para describir el comportamiento dinámico del sistema de tajadas que conforma el talud y estimar las propiedades de los materiales que componen el talud. Para cumplir estos objetivos se propone un modelo conceptual basado

en los principios de trabajo y energía para describir el comportamiento dinámico del sistema de tajadas mediante el cual se modela el talud, y a través de la consulta bibliográfica se estiman las propiedades de los materiales que componen dicho sistema.

El alcance del estudio se concentra en el análisis de taludes con geometrías controladas, considerando variaciones en altura, pendiente, rigidez y viscosidad, bajo condiciones idealizadas que permitan aislar los efectos reológicos del sistema. Como limitación, se reconoce que el modelo no incorpora el efecto de la heterogeneidad espacial de los materiales ni las condiciones de contorno variables del terreno real, aspectos que podrán ser objeto de futuras investigaciones.

En suma, este trabajo constituye un aporte al estudio dinámico de la inestabilidad de taludes, desde un enfoque mecánico que permite evaluar el comportamiento de la masa una vez ha ocurrido el fallo. Los resultados del modelo permiten no sólo estimar parámetros de interés para el análisis de amenaza y riesgo, sino también comprender los mecanismos internos de deformación y disipación energética que determinan la trayectoria y evolución del deslizamiento, aspectos clave para una gestión del riesgo geotécnico más integral y fundamentada.

1. Marco conceptual

El marco conceptual que se expone en este capítulo considera los principales aspectos relacionados con el estudio de la dinámica de sistemas mecánicos lineales, la cual es la base del modelo matemático que se desarrolla en el Capítulo 3 de este documento para el estudio de la dinámica de taludes inestables.

1.1 Respuesta dinámica de sistemas mecánicos lineales

Los sistemas mecánicos lineales son un tipo de sistema en el que las relaciones entre las fuerzas (o momentos) y las variables dinámicas (desplazamientos, velocidades, aceleraciones) son lineales. Esto implica que el sistema obedece el principio de superposición: la respuesta a una combinación de excitaciones es la suma de las respuestas a cada excitación individual, lo que facilita su análisis.

En estos sistemas, los elementos como resortes y amortiguadores tienen relaciones constitutivas lineales: por ejemplo, en un resorte lineal la fuerza es proporcional al desplazamiento, y en un amortiguador lineal la fuerza es proporcional a la velocidad relativa (Angeles, 2011).

Un sistema mecánico lineal es típicamente representado mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, que describen su dinámica bajo ciertas condiciones iniciales y excitaciones externas. Aunque en la práctica muchos sistemas presentan no linealidades (materiales o geométricas), los modelos lineales son fundamentales porque proporcionan un primer nivel de aproximación y son la base para análisis más complejos.

1.1.1 Resortes y amortiguadores viscosos

Un resorte es un elemento mecánico que almacena energía potencial debido a sus propiedades elásticas. Se dice que es lineal si la Fuerza F requerida para estirarlo o comprimirlo es proporcional al desplazamiento respecto a su longitud natural *l*:

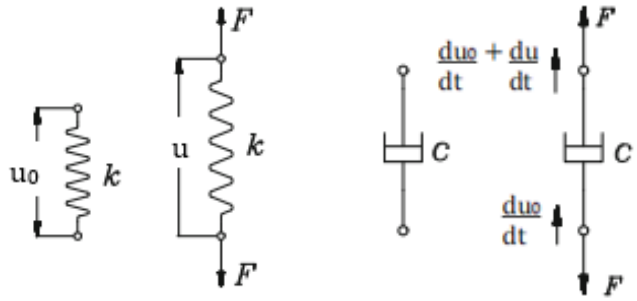
$$F^k = k(u - l) \tag{1-1}$$

Donde *u* es la longitud total y *k* es la rigidez o constante del resorte. Cuando el desplazamiento se mide desde la configuración descargada, la fuerza resultante se puede describir mediante la Ecuación 1-2.

$$F^k = ku \tag{1-2}$$

Este comportamiento corresponde a la Ley de Hooke y es aplicable tanto en tensión como en compresión. La **Figura 1-1** muestra la representación esquemática que se emplea para estos elementos mecánicos lineales, donde u_0 denota las condiciones iniciales.

Figura 1-1: Representación esquemática de un resorte (izquierda) y un amortiguador viscoso (derecha).



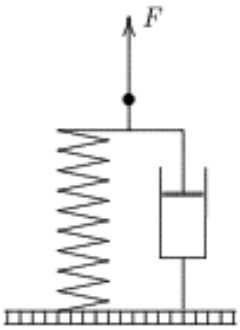
Modificado de: Angeles (2011)

El amortiguador viscoso es un elemento que disipa la energía en lugar de almacenarla. Este elemento se considera lineal si la fuerza F es proporcional a la velocidad relativa a *u*.

$$F^\eta = \eta \frac{du}{dt} \tag{1-3}$$

Donde η es el coeficiente de amortiguamiento y $\frac{du}{dt}$ la velocidad relativa a u. Estos elementos se suelen emplear para modelar efectos de arrastre como fricción viscosa de fluidos.

Figura 1-2: Sistema combinado de resorte – amortiguador viscoso en paralelo.



Tomado de: Verruijt (2009)

Los sistemas combinados resorte - amortiguador viscoso permiten representar sistemas que tienen simultáneamente rigidez y capacidad de disipar energía, típicos en muchas estructuras y mecanismos más complejos (Angeles, 2011) En la **Figura 1-2** se representa un sistema en paralelo, es decir, ambos elementos actúan sobre el mismo desplazamiento y la fuerza total de este tipo de sistemas se puede describir mediante la Ecuación 1-4. Cuando estos sistemas se disponen en serie, la fuerza neta es función de la suma de sus desplazamientos relativos.

$$F^{k||\eta} = ku + \eta\frac{du}{dt} \quad (1\text{-}4)$$

Considerando la información expuesta en la **Figura 1-2** y la Ecuación 1-4, a continuación, se presenta la descripción de la dinámica de un sistema combinado de resorte y amortiguador viscoso. Para ello, se parte de la revisión bibliográfica de los trabajos realizados por Angeles (2011) y Verruijt (2009).

De acuerdo con la Segunda Ley de Newton, la ecuación del movimiento de la masa sobre un sistema combinado resorte – amortiguador viscoso se muestra en la Ecuación 1-5.

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = P(t) \tag{1-5}$$

Donde *P(t)* es la fuerza total que actúa sobre la masa *m* y *u* es el desplazamiento de la masa. La fuerza total *P(t)* se obtiene a partir del equilibrio del sistema como se muestra en la Ecuación 1-6 donde F(t) es la fuerza externa que actúa sobre el sistema.

$$P(t) = F(t) - ku - \eta\frac{du}{dt} \tag{1-6}$$

La ecuación de movimiento del sistema se obtiene reemplazando la Ecuación 1-6 en la Ecuación 1-5.

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + \eta\frac{du}{dt} + ku = F(t) \tag{1-7}$$

La solución homogénea de la Ecuación 1-7 es una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes. Se define la frecuencia natural de sistemas no amortiguados ω_0 con la Ecuación 1-8 y la constante ζ como medida del amortiguamiento del sistema que se presenta en la Ecuación 1-9.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1-8}$$

$$2\zeta = \frac{\eta}{\sqrt{km}} \tag{1-9}$$

Así, la Ecuación 1-7 se puede reescribir como:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \tag{1-10}$$

La solución para este tipo de ecuaciones se puede plantear de la forma:

$$u = Ae^{\lambda t} \tag{1-11}$$

Donde A es una constante que depende de las condiciones iniciales. Realizando la sustitución de la Ecuación 1-11 en la Ecuación 1-10, se obtiene la Ecuación 1-12 que corresponde a la ecuación característica del problema.

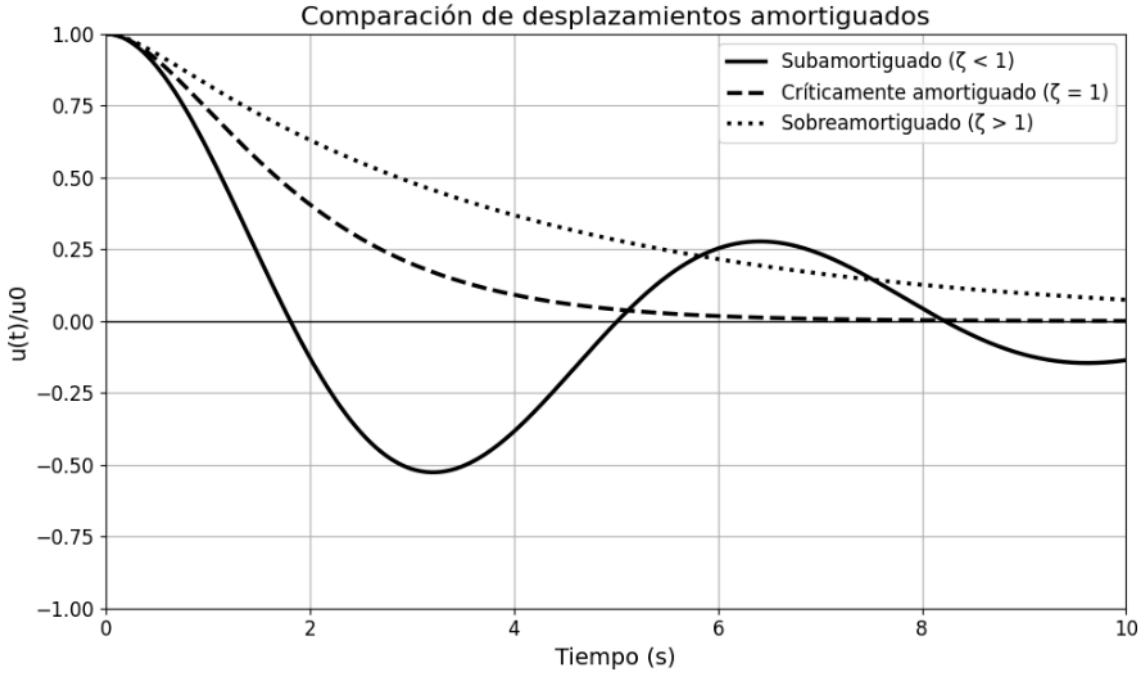
$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{1-12}$$

Nótese que esta es una ecuación cuadrática cuya solución es ampliamente conocida. Las características de la respuesta del sistema dependen del valor de la relación de amortiguamiento ζ.

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{1-13}$$

En la **Figura 1-3** se representa la solución para cada uno de los tres estados posibles: sistemas subamortiguados ($\zeta < 1$), sistemas críticamente amortiguados ($\zeta = 1$) y sistemas sobreamortiguados ($\zeta > 1$).

Figura 1-3: Evolución de los desplazamientos en sistemas de vibraciones libres con diferentes grados de amortiguamiento.



Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que los sistemas subamortiguados tienen soluciones complejas y describen sistemas que vibran debido al bajo o nulo amortiguamiento. Para el estudio de la dinámica de taludes inestables que se desarrolla en este documento, se asume que los materiales que conforman los taludes describen un comportamiento sobreamortiguado, en consecuencia, se debe cumplir la condición que se muestra en la Ecuación 1-14.

$$\eta > 2\sqrt{km} \tag{1-14}$$

Esta suposición se adopta en la medida en que el interés se centra en deslizamientos simples y no en la reproducción de fenómenos altamente energéticos como flujos rápidos, colapsos o avalanchas. Esta elección es consistente con la caracterización conceptual que se hace de los deslizamientos progresivos, en los cuales la deformación ocurre de forma gradual y sin un comportamiento que cambia de forma abrupta. Esta hipótesis también es coherente con las observaciones típicas en deslizamientos simples: una vez la masa desacelera, no vuelve a acelerar por sí sola a menos que exista un cambio geométrico o un estímulo externo que modifique el balance del sistema.

Adicionalmente, asumir un comportamiento sobreamortiguado aporta ventajas prácticas en la solución numérica del problema. Este estudio plantea la resolución de los sistemas mediante métodos iterativos los cuales son altamente eficientes cerca de la solución, pero pueden presentar dificultades de convergencia (incluso divergencia) si la estimación inicial no es adecuada o si el sistema exhibe respuestas complejas. En ese sentido, restringir el modelo a respuestas no oscilatorias reduce la posibilidad de “vibración” numérica y de alternancias erróneas en las variables dinámicas entre pasos de tiempo, favoreciendo una evolución más estable del cálculo y mejorando la robustez de la convergencia requerida por los esquemas iterativos que se emplean más adelante.

1.1.2 Amortiguador de Coulomb

El amortiguador de Coulomb representa la disipación de energía debida a la fricción de contacto directo entre sólidos. A diferencia del amortiguador viscoso, su fuerza de fricción es independiente de la velocidad y depende sólo de la dirección del movimiento relativo. La fuerza de fricción se puede modelar como lo muestra la Ecuación 1-15.

$$F^{\mu} = -\mu N \tag{1-15}$$

Donde μ es el coeficiente de fricción dinámica y *N* es la fuerza normal entre las superficies en contacto. La modelación de este tipo de amortiguador es más compleja que el del amortiguador viscoso, porque introduce no linealidades en la ecuación del movimiento y genera un sistema lineal por tramos. Este hace que el análisis requiera un tratamiento especial para cada fase del movimiento, es decir, cuando hay cambios en el estado del movimiento o su dirección.

1.2 Análisis del movimiento planar

Según Angeles (2011), el movimiento planar hace referencia al movimiento de un sistema mecánico rígido que ocurre en un sólo plano, es decir, en máximo dos dimensiones. De manera que las posiciones de los puntos del cuerpo se describen mediante vectores en R^2 y las rotaciones se dan alrededor de un eje perpendicular al plano de movimiento.

Las ecuaciones del movimiento planar suelen ser una combinación de ecuaciones vectoriales en dos dimensiones para las fuerzas y ecuaciones escalares para los momentos.

El análisis de la dinámica de un talud compuesto por un sistema discreto de *n* partículas, como el que se desarrolla en este documento, se limita al estudio de mecanismos planos que involucran el movimiento de vectores de máximo dos dimensiones. Por lo cual, es preciso que este documento señale y delimite de forma clara las ecuaciones y el espacio dimensional sobre el cual se realizará el análisis dinámico.

1.2.1 Movimiento sobre la espiral logarítmica

El estudio de la dinámica de los taludes inestables que se desarrolla en este documento asume que la superficie de falla tiene forma de espiral logarítmica. Por lo tanto, es necesario establecer las ecuaciones de la dinámica de una partícula que se mueve sobre una curva de estas características.

La expresión matemática que describe una espiral logarítmica para análisis geotécnicos asume que la constante de la espiral es función del ángulo de dilatancia o del ángulo de fricción interna del suelo cuando se asume comportamiento bajo Ley de flujo asociada. La forma de la espiral se describe mediante la Ecuación 1-16.

$$r_f = r_0 e^{\theta tan\varphi} \quad (1\text{-}16)$$

Donde:

r_f: Radio desde el centro de la espiral logarítmica para un ángulo θ;

r_0: Radio desde el centro de la espiral logarítmica hasta la posición inicial de la superficie de falla sobre el talud de análisis;

θ: Ángulo entre el radio inicial y el radio final de la espiral logarítmica;

φ: Ángulo de fricción interna del material que compone el talud y sobre el cual se desarrolla la superficie de falla.

En la

Figura 1-4 se muestra la descomposición vectorial del desplazamiento de una partícula sobre una espiral logarítmica. Esta se mueve desde una posición *s* en un tiempo *t* hasta una posición *s+ds* en un tiempo *t+1*. A partir de esta información, es claro que la velocidad de la partícula se puede expresar mediante la Ecuación 1-17.

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \quad (1\text{-}17)$$

La componente en dirección de θ de la velocidad de una partícula que se desliza sobre una espiral logarítmica se puede determinar con la Ecuación 1-18. El término ε_t corresponde al vector de la deformación en esta misma dirección.

$$\overrightarrow{v_T} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{\varepsilon_t} \quad (1\text{-}18)$$

Derivando la Ecuación 1-18 con respecto al tiempo, se obtiene una expresión para la aceleración en la dirección θ de la partícula. Nótese que se ha empleado la regla de la cadena para obtener la Ecuación 1-19.

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{\varepsilon_t} + \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{\varepsilon_t}}{dt} \quad (1\text{-}19)$$

Por las propiedades geométricas de la curva, la deformación en la dirección de θ $\overrightarrow{\varepsilon_t}$ se puede expresar como se muestra en la Ecuación 1-20.

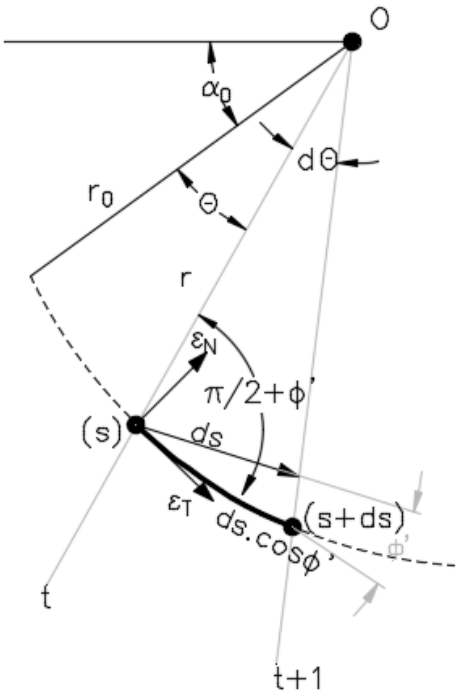
$$\varepsilon_t = \frac{ds}{R}\varepsilon_n \quad (1\text{-}20)$$

De esta manera, la expresión para la aceleración en dirección de θ de la partícula obedece a la ecuación diferencial que se muestra con la Ecuación 1-21.

$$\overrightarrow{a_t} = \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{\varepsilon_t}}_{\text{Aceleración en dirección } \theta} + \underbrace{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\overrightarrow{\varepsilon_n}}{R}}_{\text{Aceleración en dirección r}} \quad (1\text{-}21)$$

Como se indica sobre la Ecuación 1-21, el primer término corresponde a la aceleración en dirección de θ de la partícula y el segundo término a la componente radial de la aceleración.

Figura 1-4: Representación esquemática del movimiento de una partícula sobre una espiral logarítmica.



Fuente: Elaboración propia.

La longitud de la espiral logarítmica S entre dos ángulos o posiciones, se puede determinar mediante la Ecuación 1-22.

$$s = \frac{r_0 e^{\theta tan\varphi}}{cos\varphi} d\theta \qquad 1\text{-}22$$

Integrando se obtiene la Ecuación 1-23 que permite calcular la posición de una partícula sobre la espiral logarítmica en cualquier instante dados r_0 y $\Delta\theta$.

$$s = \frac{r_0}{sen\varphi}\left[e^{\Delta\theta tan\varphi} - 1\right] \qquad 1\text{-}23$$

1.2.2 Energía cinética

Sobre el marco de referencia que fue descrito en el numeral 1.2.1, a continuación, se presenta la definición de la energía cinética de la j-ésima partícula que se desliza sobre la espiral logarítmica. En un cuerpo rígido, la energía cinética se puede calcular aplicando el Teorema de Köning (Angeles, 2011) según el cual el movimiento del cuerpo o partícula, se puede descomponer en dos partes: la traslación pura de todo el cuerpo que coincide con el movimiento de su centro de masa y la rotación pura del cuerpo respecto a su centro de masa.

De acuerdo con lo anterior, la energía cinética de un cuerpo rígido de un sistema mecánico bajo movimiento planar se puede expresar mediante la Ecuación 1-24.

$$E_j^K = \frac{1}{2} m_j \left(\frac{ds_j}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{Cj} \omega_j^2 \qquad (1\text{-}24)$$

Donde:

m_j: es la masa del j-ésimo cuerpo rígido;

$\frac{ds_j}{dt}$: es la magnitud del vector planar de la velocidad del centro de masa del j-ésimo cuerpo rígido con respecto al marco inercial;

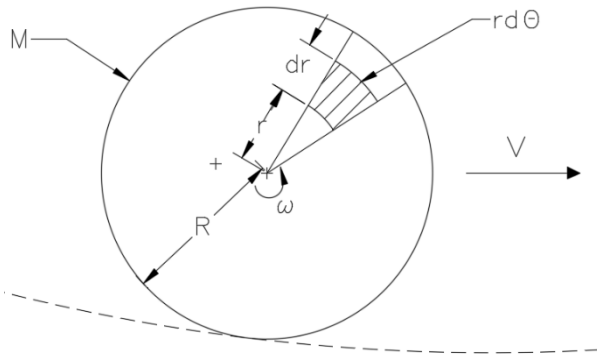
I_{Cj}: es el momento escalar de inercia del j-ésimo cuerpo rígido con respecto a su centro de masa; y

ω_j: es el escalar de la velocidad angular del j-ésimo cuerpo rígido con respecto a su marco inercial.

En el Capítulo 3 se expone la formulación de la metodología para simular la dinámica de taludes inestables. Allí se asume que los taludes están conformados por tajadas rígidas representadas por masas concentradas.

En línea con lo expuesto anteriormente, se incorporan los cambios en la energía cinética durante el proceso de falla debidos a la rotación de cada masa. Este se determina analizando el cambio en la energía cinética de un cilindro que rota sin deslizarse. Considérese una sección plana de un cilindro de radio R y masa M como el que se presenta en la **Figura 1-5**.

Figura 1-5: Representación esquemática de la sección transversal de un cilindro que gira sin deslizarse. R: Radio del cilindro, ω: Velocidad angular de giro, V: velocidad tangencial, M: masa del cilindro.



Fuente: Elaboración propia

La energía cinética del elemento diferencial (*dr*) que se ha señalado sobre el cilindro se puede determinar a partir de la definición de su velocidad angular. Ver la Ecuación 1-25.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1-25}$$

El área de este elemento diferencial se calcula con la Ecuación 1-26 y su masa como lo indica la Ecuación 1-27.

$$dA = r.dr.d\theta \quad (1\text{-}26)$$

$$dm = \rho.r.dr.d\theta \quad (1\text{-}27)$$

Donde ρ es la densidad del cilindro. Esta se puede expresar mediante la Ecuación 1-28 que relaciona su masa con el volumen asumiendo una sección plana.

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2} \quad (1\text{-}28)$$

En consecuencia, la Ecuación 1-27 se puede expresar como la Ecuación 1-29.

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} r.dr.d\theta \quad (1\text{-}29)$$

A su vez, la componente tangencial de la velocidad angular se puede expresar como el producto entre el radio y la velocidad angular como se muestra en la Ecuación 1-30.

$$v = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (1\text{-}30)$$

De acuerdo con el Teorema de Köning que se presentó mediante la Ecuación 1-24, la energía cinética del cilindro que se está analizando corresponde a la suma de la energía cinética del centro de masa más la energía del conjunto de partículas respecto al centro de masa.

$$E_k = E_{kCM} + E_{kRCM} \quad (1\text{-}31)$$

La energía cinética del centro de masa para un objeto con esta geometría circular que gira se calcula mediante la Ecuación 1-32.

$$E_{kCM} = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \quad (1\text{-}32)$$

Para determinar la energía cinética de las partículas respecto al centro de masa, se emplean la Ecuación 1-29 y la Ecuación 1-30 definidas para nuestro elemento diferencial.

$$dE_{kRCM} = \frac{1}{2} dm.v^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{\pi R^2} r.dr.d\theta\ \omega^2 r^2 \quad (1\text{-}33)$$

Es decir que, integrando la Ecuación 1-33, se puede obtener la energía cinética del conjunto de partículas con respecto al centro de masa.

$$E_{kRCM} = \frac{1}{2}\frac{M\omega^2}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 dr d\theta \quad (1\text{-}34)$$

La solución de la Ecuación 1-34 muestra que la energía cinética de las partículas respecto al centro de masa es igual a la Ecuación 1-35.

$$E_{kRCM} = \frac{1}{4} MR^2\omega^2 \quad (1\text{-}35)$$

Este desarrollo matemático permite concluir que la energía cinética del conjunto de *n* partículas que conforman un cuerpo rígido es igual a la Ecuación 1-36.

$$E_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{4} m_j \left(\frac{ds_j}{dt}\right)^2 \quad (1\text{-}36)$$

1.2.3 Principio de trabajo y energía

El concepto de trabajo realizado se define como el producto de un desplazamiento, que puede ser lineal o angular, con la fuerza o el momento en la dirección del respectivo desplazamiento. (Reddy, 2017) El trabajo total realizado es una cantidad escalar, en la descripción que se presenta en este capítulo se generaliza este concepto en función de la posición y el tiempo.

El diferencial de trabajo dW realizado por una fuerza F que mueve una partícula una distancia infinitesimal ds a lo largo de una trayectoria en un intervalo de tiempo dt se puede definir mediante la Ecuación 1-37.

$$dW = F.ds = F_i ds_i \quad (1\text{-}37)$$

El trabajo total realizado, W por la fuerza F que desplaza una partícula desde un punto A hasta un punto B se puede calcular como se muestra en la Ecuación 1-38.

$$W = \int_A^B F.ds \quad (1\text{-}38)$$

Como el trabajo es una cantidad escalar, este será positivo si se realiza en dirección del desplazamiento y negativo si se realiza en dirección opuesta. Además, el trabajo realizado no depende de la trayectoria que se elija para llegar al punto final ya que este depende del marco de referencia adoptado para los desplazamientos.

Si aplicamos la Segunda Ley de Newton, podemos reescribir la Ecuación 1-37 como la Ecuación 1-39 donde v es la velocidad de la partícula en el marco de referencia establecido.

$$dW = F.ds = m\frac{dv}{dt}ds$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$dW = m\frac{dv}{dt}\, v\, dt = dE_k \quad (1\text{-}39)$$

Lo anterior significa que el trabajo hecho por una fuerza es igual al cambio de la energía cinética (E_k) del cuerpo o partícula sobre el que actúa en un intervalo de tiempo determinado.

La definición de trabajo realizado puede extenderse a sistemas más complejos como un talud. En tal caso, estos pueden considerarse como un conjunto de partículas materiales, tajadas o masas concentradas. Si se realiza trabajo sobre todas las partículas del cuerpo, el trabajo total sobre el cuerpo es la suma de todos esos trabajos, tanto los que realizan las fuerzas externas como la respuesta interna que se manifiesta con la disipación o

almacenamiento de la energía en el cuerpo mediante deformaciones o cambios de temperatura.

2. Antecedentes

El estudio de la dinámica de taludes inestables ha evolucionado significativamente en las últimas décadas, pasando de enfoques tradicionales basados exclusivamente en el equilibrio estático a modelos que incorporan formulaciones dinámicas capaces de representar la evolución temporal del movimiento. Este cambio ha sido impulsado por la necesidad de comprender fenómenos como los deslizamientos lentos, en los cuales la deformación del terreno ocurre de forma progresiva, bajo esfuerzos residuales y condiciones hidrológicas cambiantes, sin una falla catastrófica inmediata.

Este capítulo presenta una revisión de los principales enfoques, investigaciones y contribuciones que han sustentado el desarrollo del modelo de análisis dinámico de taludes implementado en este estudio. Se destacan los trabajos relacionados con el desarrollo de metodologías para la implementación y simulación numérica de taludes mediante sistemas discretos y formulaciones basadas en analogías reológicas.

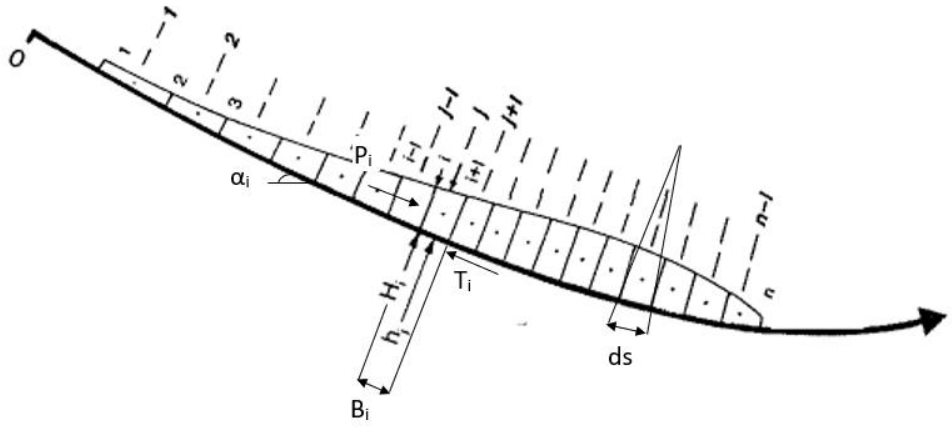
Los antecedentes que se presentan en este documento contemplan referencias clásicas del análisis dinámico de procesos de inestabilidad y se otorgó un énfasis particular a los trabajos desarrollados en el programa de Maestría en Geotecnia de la Universidad Nacional de Colombia, dado que la presente tesis se enmarca como una continuación de la línea investigativa adelantada en el programa sobre la dinámica y modelación de taludes inestables.

2.1 Modelo de Hungr (1995)

Hungr (1995) presenta el análisis dinámico para definir el alcance de deslizamientos rápidos en su trabajo titulado *A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches*. El autor emplea un marco numérico Lagrangiano para simular el movimiento post-falla de deslizamientos rápidos como flujos de detritos, avalanchas de

rocas y fallas por licuación. Su principal aporte radica en su enfoque de masa referenciada, donde la masa en movimiento se discretiza en n bloques de frontera y de masa interna a lo largo de coordenadas curvilíneas que siguen la topografía de la trayectoria como se muestra en la **Figura 2-1**, un concepto similar será empleado en el desarrollo de este trabajo, ya que esto contrasta con los enfoques Eulerianos tradicionales que utilizan una malla fija, ofreciendo mayor eficiencia para flujos altamente transitorios en pendientes pronunciadas.

Figura 2-1: Malla Lagrangiana en coordenadas curvilíneas de bloques de frontera e internos.



Modificado de: Hungr (1995)

La solución dinámica es explícita y por pasos de tiempo. La definición de la fuerza neta impulsora F actuando sobre cada bloque de frontera se muestra en la Ecuación 2-1.

$$F = \gamma H_i B_i ds\ sen\alpha + P - T \tag{2-1}$$

Donde γ es el peso unitario, H_i y B_i son la altura y el ancho del bloque, ds la longitud nominal, α el ángulo de la pendiente, P es la resultante de la presión interna longitudinal, y T es la fuerza de resistencia basal. La velocidad se actualiza integrando la segunda ley de Newton como se muestra con la Ecuación 2-2.

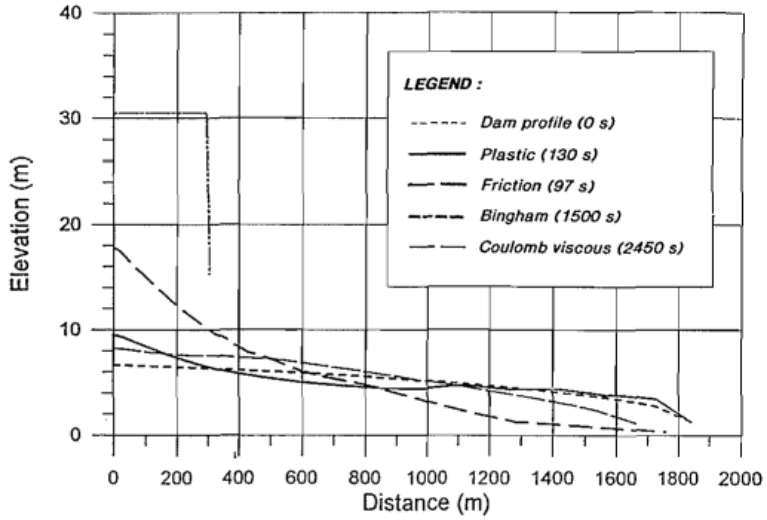
$$v_i = v'_i + \frac{g(F\Delta t - M)}{\gamma H_i B_i ds} \tag{2-2}$$

Donde v'_i es la velocidad anterior, g es la aceleración de la gravedad, Δt el paso de tiempo para la simulación y M es el flujo del momentum por erosión y depósito. Los desplazamientos curvilíneos S_i se calcula luego mediante integración numérica (Ecuación 2-3).

$$S_i = S'_i + \frac{\Delta t}{2}(v_i + v'_i) \tag{2-3}$$

Donde los términos con el apóstrofe corresponden a los datos del paso anterior. Para manejar la geometría 3D de forma simplificada, el estudio introduce el concepto de profundidad hidráulica H_i, definida como el área de la sección transversal del flujo dividida por el ancho superficial. Esto permite aproximar efectos de confinamiento lateral en valles o canales, aunque con limitaciones en secciones muy estrechas o con cambios abruptos. Las profundidades de los bloques de masa y de frontera se actualizan bajo el principio de conservación del volumen de cada bloque.

Figura 2-2: Perfiles de flujo para diferentes modelos reológicos en el estudio de rotura de una presa.



Fuente: Tomado de Hungr (1995)

Un aspecto teórico fundamental es la formulación de la resistencia basal T, donde el estudio plantea siete reologías constitutivas alternativas: Flujo plástico, Flujo friccional, Flujo laminar Newtoniano, Flujo Turbulento, Flujo Bingham, Flujo Viscoso-Coulomb y Fluido de Voellmy. La **Figura 2-2** ilustra cómo diferentes reologías, calibradas para

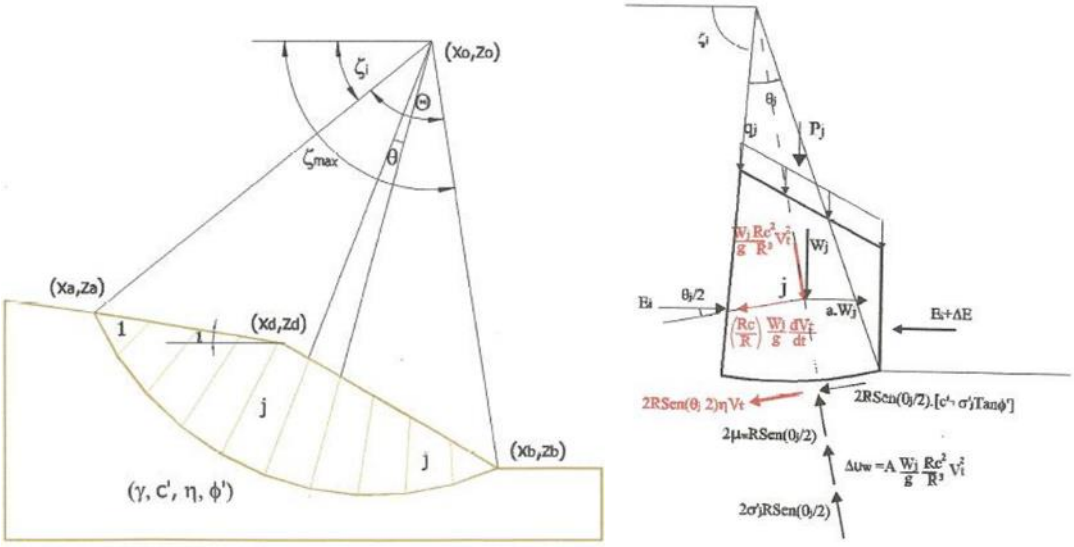
predecir la misma distancia de alcance en un problema de rotura de presa, producen perfiles de depósito y tiempos de viaje marcadamente distintos, subrayando la importancia de seleccionar la reología adecuada.

El autor concluye que el modelo desarrollado en este documento, el cual ha denominado *Dynamic Analysis* (DAN), ofrece una representación más precisa y robusta de los flujos de detritos y deslizamientos de tierra en comparación con modelos anteriores. Se recomienda el uso de DAN para aplicaciones prácticas en la predicción y mitigación de estos fenómenos naturales. Además, se sugiere una mayor validación del modelo con diferentes escenarios y parámetros para confirmar su aplicabilidad y precisión en diversos contextos geotécnicos.

2.2 Modelo de Basto (2009)

Este estudio se titula *Desplazamiento viscoplástico de taludes fallados*, en él se aborda el problema de estabilidad de taludes para calcular la geometría de una cuña de falla que se moviliza sobre una superficie de falla circular. El método que se desarrolla en este documento busca predecir el desplazamiento y la velocidad para incrementos de tiempo hasta la estabilización de la cuña de falla. La geometría empleada para discretizar el talud de falla obedece a cuñas radiales como se muestra en la **Figura 2-3**.

Figura 2-3: Discretización del mecanismo de falla (izquierda) y diagrama de fuerzas (derecha) adoptado en el estudio de Desplazamientos viscoplástico de taludes fallados.



Fuente: Adaptado de Basto (2009)

Basto (2009) aplicó la segunda ley de Newton en el sentido normal y tangencial a la tajada, obtenido la ecuación de movimiento que se muestra con la Ecuación 2-4.

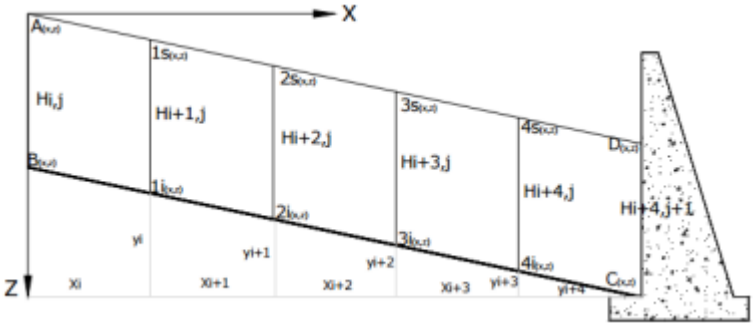
$$\frac{dV_i}{dt} + K_2 V_t^2 + K_1 V_t = K_t \tag{2-4}$$

Donde V_t es la velocidad tangencial de la tajada y las constantes K_1, K_2 y K_t son constantes que dependen de la viscosidad del suelo, los parámetros de resistencia del suelo, las características geométricas de la cuña y las solicitaciones externas. El estudio desarrolla las ecuaciones de equilibrio de empujes que constituye un sistema de ecuaciones no lineales, el cual se resuelve con la aplicación de métodos numéricos.

2.3 Modelo de Mora (2011)

En este documento titulado *Contención de taludes en estado Viscoplástico,* Mora (2011) aborda el problema del movimiento de un talud con comportamiento viscoplástico que se desliza sobre una superficie de falla plana, el cual es contenido por un muro de gravedad. Se investiga cómo el talud, representado por bloques o tajadas en contacto, se comporta bajo estas condiciones, manteniendo un volumen constante y cambiando de forma a lo largo de su trayectoria plana mediante la aplicación de la segunda ley de Newton.

Figura 2-4: Modelo analítico adoptado para los análisis en el estudio de Contención de taludes en estado Viscoplástico.



Fuente: Tomado de Mora (2011)

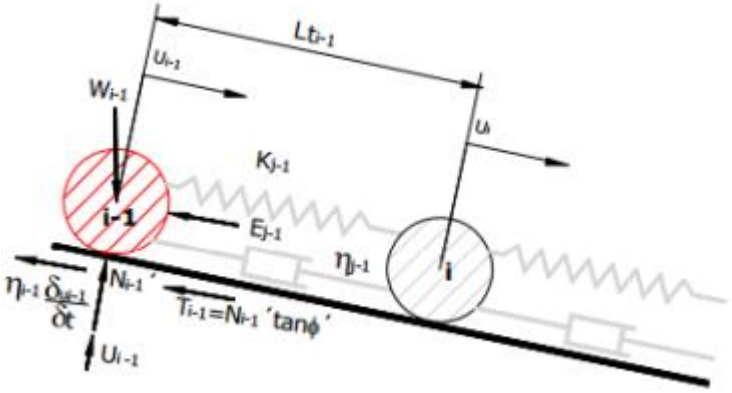
La metodología principal adoptada para abordar este problema es el uso de un modelo mecánico equivalente, representado por una masa concentrada sostenida lateralmente por un modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt como se muestra en la **Figura 2-5**.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema se formulan utilizando la ley de movimiento de Newton (Ecuación 2-5). Además, se resuelven numéricamente las ecuaciones de movimiento mediante el método de diferencias finitas (MDF), utilizando un esquema implícito condicionalmente estable. Se consideran variables como la longitud de las tajadas, la viscosidad y el módulo de rigidez del suelo para garantizar la consistencia, estabilidad y precisión en la solución.

$$\frac{d^2u_{i-1}}{dt^2} + C_{i-1}\frac{du_{i-1}}{dt} - C_{j-1}\frac{du_i}{dt} = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} - \overline{K}_{j-1}u_{i-1} + \overline{K}_{j-1}u_i \qquad (2\text{-}5)$$

Donde u_i es el desplazamiento de la i-ésima tajada, los demás términos son constantes definidas por el autor. Ver Mora (2011). La investigación asume como hipótesis que la frontera común entre bloques es fija, los desplazamientos de la masa del talud se transfieren entre bloques, la masa de cada bloque permanece constante, aunque puede transferirse masa entre bloques debido a procesos de excavación o erosión. El estudio asume que el modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt es adecuado para representar las fuerzas y desplazamientos en el sistema.

Figura 2-5: Modelo mecánico para representar el movimiento del talud sobre una superficie plana contra un muro de contención.



Fuente: Tomado de Mora (2011)

Los resultados obtenidos muestran que la solución del sistema de ecuaciones es altamente dependiente del paso del tiempo utilizado en el MDF. Un paso de tiempo pequeño proporciona una mayor cantidad de puntos que se aproximan a la solución real del

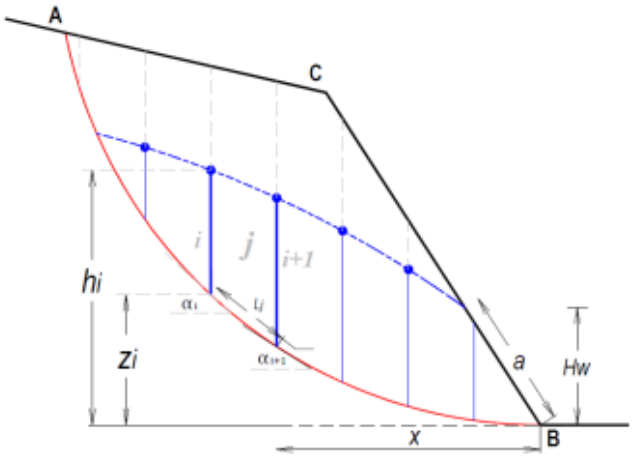
problema, por otra parte, un paso de tiempo grande produce resultados alejados del comportamiento físico del problema. Las ecuaciones obtenidas permiten evaluar el comportamiento del talud y predecir los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y empuje en cualquier instante de tiempo.

El estudio concluye que la precisión y estabilidad de la solución dependen críticamente de la elección del paso del tiempo y de los parámetros mecánicos del suelo. Es esencial utilizar un paso de tiempo adecuado para garantizar que la solución sea consistente con el comportamiento físico del problema. El estudio recomienda una mayor densidad de la malla para obtener resultados más precisos y representativos del comportamiento real del talud. Adicionalmente, se sugiere que futuros estudios consideren variaciones en los parámetros del modelo y el uso de diferentes técnicas numéricas para mejorar aún más la precisión de las soluciones

2.4 Modelo de Moreno (2016)

En esta investigación se aborda el problema de la inestabilidad de taludes con una superficie de falla en forma de espiral logarítmica. En esta investigación se estudia cómo un talud, representado por bloques o tajadas en contacto, se comporta bajo estas condiciones, manteniendo un volumen constante y cambiando de forma a lo largo de su trayectoria sobre la espiral logarítmica (Ver la **Figura 2-6**).

Figura 2-6: Modelo adoptado para el análisis de estabilidad de taludes en el trabajo de Cinética de taludes en suelos compresibles viscoplásticos.



Fuente: Tomado de Moreno (2016)

El problema central se enfoca en analizar el movimiento de una masa deslizada sobre una superficie de falla en forma de espiral logarítmica aplicando la segunda ley de Newton. Los objetivos incluyen evaluar desplazamientos, velocidades, aceleraciones y cambios de forma durante el deslizamiento. La investigación busca un modelo que permita simular de manera precisa estos aspectos del movimiento para mejorar la comprensión y predicción de deslizamientos.

La metodología adoptada incluye la discretización de la masa deslizada en bloques y la formulación de un modelo matemático basado en la solución de la cinética de una masa concentrada que representa la tajada de un talud que se desliza sobre la superficie de falla y que interactúa con las tajadas vecinas. El análisis de la cinética se realiza mediante la solución de un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales utilizando el método de diferencias finitas sobre la Ecuación 2-6.

$$\frac{W_j}{g}\frac{d^2 s_j}{dt^2} + \left(\eta_i + \eta_{i+1} + \eta_j\right)\frac{ds_j}{dt} + (k_{i+1} + k_i)s_j + (1-A)tan\phi' \frac{W_j}{g}\frac{1}{R_j}\left(\frac{ds_j}{dt}\right)^2 - \eta_i \frac{ds_{j-1}}{dt} - k_i\, s_{j-1} - \eta_{i+1}\frac{ds_{j+1}}{dt} - k_{i+1}\, s_{j+1} = W_j\left[\frac{sen(\alpha_j - \phi')}{cos\phi'} - a\frac{cos(\alpha_j - \phi')}{cos\phi'}\right] + U\, tan\phi' \quad (2\text{-}6)$$

Donde la ecuación se soluciona para los desplazamientos s_j y las constantes están en función de los parámetros reológicos, geométricos y de las solicitaciones impuestas al talud. Ver Moreno (2016). Para realizar el planteamiento matemático del movimiento del talud el estudio define variables geométricas, fuerzas actuantes, y parámetros del comportamiento elástico y viscoso.

En primer lugar, se analiza la condición inicial de las tajadas antes del movimiento. Luego se realiza una simulación del deslizamiento empleando el modelo reológico discreto. Cabe mencionar que este estudio toma como antecedentes la investigación desarrollada por Mora (2011) y parte de las mismas hipótesis, sin embargo, adicionalmente considera que la masa deslizada se comporta como un medio homogéneo e isotrópico con propiedades elásticas, friccionales y viscosas constantes.

Los resultados del análisis muestran que el modelo puede simular con precisión el desplazamiento y la velocidad de la masa deslizada, reflejando la dinámica del movimiento bajo los supuestos asumidos para una serie de escenarios particulares. La viscosidad tiene

un impacto significativo en la dinámica del movimiento, donde un aumento en la viscosidad resulta en menores desplazamientos y velocidades. El módulo de rigidez influye en los desplazamientos, pero no afecta considerablemente las velocidades.

El estudio concluye que el método propuesto es efectivo para predecir la cinética de taludes en suelos viscoplásticos. Se recomienda su aplicación en estudios de riesgo y amenaza por movimientos en masa para una mejor planificación y mitigación de desastres. Se sugiere además incorporar en futuras investigaciones el efecto de la rotación y otros factores dinámicos que puedan influir en la estabilidad de los taludes.

3. Dinámica de taludes inestables

El estudio de la dinámica de taludes se ocupa de describir el comportamiento mecánico y cinemático de masas de terreno inestables sometidas a condiciones transitorias o perturbaciones externas. A diferencia de los análisis estáticos tradicionales, que se centran en evaluar la estabilidad mediante el cálculo de la relación entre las fuerzas que inducen el movimiento y las que se oponen a este, el enfoque dinámico permite investigar el proceso completo de movilización, evolución y eventual detención de un talud.

Este tipo de análisis resulta especialmente relevante en contextos donde intervienen efectos inerciales, variaciones rápidas en las presiones intersticiales o condiciones de borde que inducen respuestas no lineales y dependientes del tiempo.

Debido a la complejidad inherente al comportamiento de los suelos y las rocas, caracterizados por propiedades no lineales, heterogeneidad, anisotropía, dependencia del proceso de carga y la velocidad de deformación, se ha recurrido con frecuencia al uso de analogías reológicas como herramienta conceptual y numérica para representar de forma simplificada pero representativa la respuesta del terreno.

Estas analogías consisten en modelar el medio como un sistema compuesto por elementos mecánicos ideales, tales como resortes que simulan la elasticidad del suelo, amortiguadores viscosos que representan los efectos disipativos por deformación dependiente del tiempo y elementos de fricción que modelan la resistencia al deslizamiento entre bloques o superficies.

Al adoptar esta visión, un talud puede concebirse como una serie de masas concentradas interconectadas por elementos reológicos, lo cual permite estudiar de manera explícita los

procesos de disipación de energía, la deformación progresiva, el arrastre viscoso y la evolución de las fuerzas internas y externas a lo largo del tiempo.

En este contexto, uno de los marcos conceptuales que se pueden aplicar para formular el comportamiento dinámico de sistemas masa-resorte-amortiguador es el principio del trabajo y la energía. Como se explicó en el Capítulo 1, este principio establece que el trabajo total realizado por las fuerzas externas e internas que actúan sobre el sistema se emplea en incrementar su energía cinética y en disipar energía a través de mecanismos elásticos, viscosos o friccionales.

3.1 Metodología

La metodología del estudio se desarrolla de manera secuencial, partiendo de la definición del problema y la idealización geométrica del talud en 2D (movimiento planar), donde el mecanismo de falla se asume con una superficie de deslizamiento tipo espiral logarítmica. Con base en esta geometría, el talud se discretiza en tajadas (masas rígidas y concentradas) para representar la cinemática post-falla y sus cambios de forma con el tiempo, incorporando además una condición hidrológica simplificada mediante la definición del nivel freático y el gradiente hidráulico (en el marco de Dupuit) como parte de la caracterización del medio.

Luego, se realiza un análisis de estabilidad con el cálculo del factor de seguridad como insumo para la caracterización del estado de falla y, a partir de allí, se construye el modelo matemático dinámico: la masa deslizada se representa como un sistema de tajadas interconectadas con componentes viscoelásticas, mientras que la interacción con la superficie de falla se modela mediante un esquema viscoplástico, de modo que el movimiento pueda interpretarse también bajo un comportamiento controlado por la rigidez (E) y la viscosidad (η).

La evolución temporal se calcula mediante una formulación basada en el principio de trabajo y energía, aplicando discretización temporal por diferencias finitas y evaluando el balance energético en cada paso de tiempo para estimar desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

El alcance se concentra en un conjunto de escenarios paramétricos (geometrías controladas y combinaciones de E–η), con 60 simulaciones que permiten estimar la distancia de viaje, velocidades máximas, aceleraciones y presión de impacto, y contrastar los resultados con relaciones teóricas y empíricas de la literatura.

En cuanto a la condición sísmica, el documento enmarca la relevancia del análisis dinámico para contextos como regiones sísmicamente activas; sin embargo, el modelo desarrollado se aplica bajo condiciones idealizadas para aislar el efecto reológico, por lo que no incorpora explícitamente una excitación sísmica transitoria (acelerograma), aspecto que queda implícito como una posible extensión del enfoque aquí desarrollado. En su lugar, sólo se aplica un efecto seudo-estático con el coeficiente de aceleración en dirección horizontal.

3.2 Definición del problema

Las metodologías comúnmente utilizadas para el análisis de taludes se enfocan en establecer las condiciones que permiten prevenir su falla. La mayoría de los enfoques se limitan a la estimación del factor de seguridad, con lo cual se analiza el comportamiento del talud únicamente en condiciones previas al movimiento.

Sin embargo, en estudios que involucran análisis de amenaza, vulnerabilidad y riesgo, resulta necesario contar con herramientas que permitan estimar aspectos como el área potencialmente afectada y la magnitud de las fuerzas que podrían actuar sobre los elementos expuestos una vez se ha producido el deslizamiento. Por tanto, es conveniente el desarrollo de metodologías que describan el comportamiento dinámico de la masa movilizada.

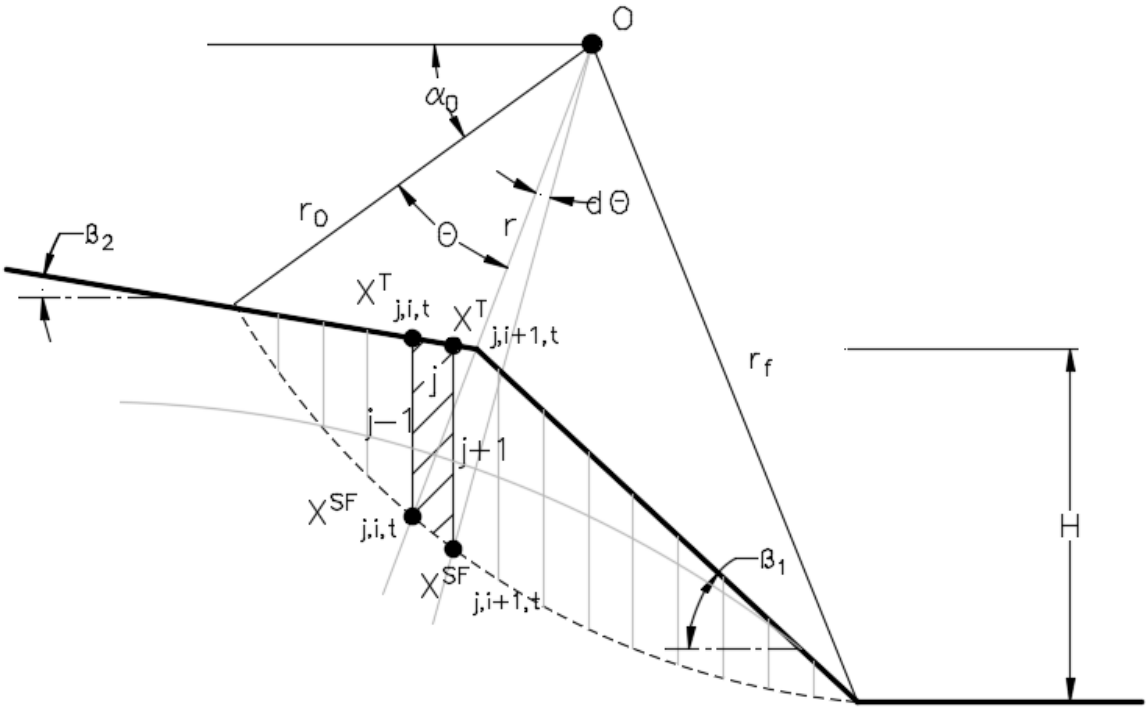
El problema que se plantea en este trabajo consiste en analizar la dinámica de taludes que fallan, mediante un modelo basado en analogías reológicas que permita simular el comportamiento de los materiales involucrados. Para ello, el talud se representará como un conjunto de tajadas o masas discretas, conectadas entre sí mediante elementos viscoelásticos.

Adicionalmente, se adoptará un modelo viscoplástico para representar la interacción entre las tajadas y la superficie de deslizamiento durante el movimiento. Este planteamiento permite calcular los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de la masa en movimiento a lo largo del tiempo, a partir de un conjunto de ecuaciones derivadas del principio de trabajo y energía.

3.2.1 Geometría y discretización del talud

En este trabajo se considera que los taludes se describen por tres variables geométricas principales: la altura del talud H, la inclinación de la cara principal del talud β_1 y la inclinación de la parte superior del talud β_2. Además, como se representa en la **Figura 3-1**, los taludes serán discretizados en n tajadas con la definición de j-ésima tajada por la geometría del talud y la superficie de falla representada por un segmento de arco de la espiral logarítmica.

Figura 3-1: Representación esquemática de la geometría y la discretización de los taludes objeto de análisis en la metodología propuesta.

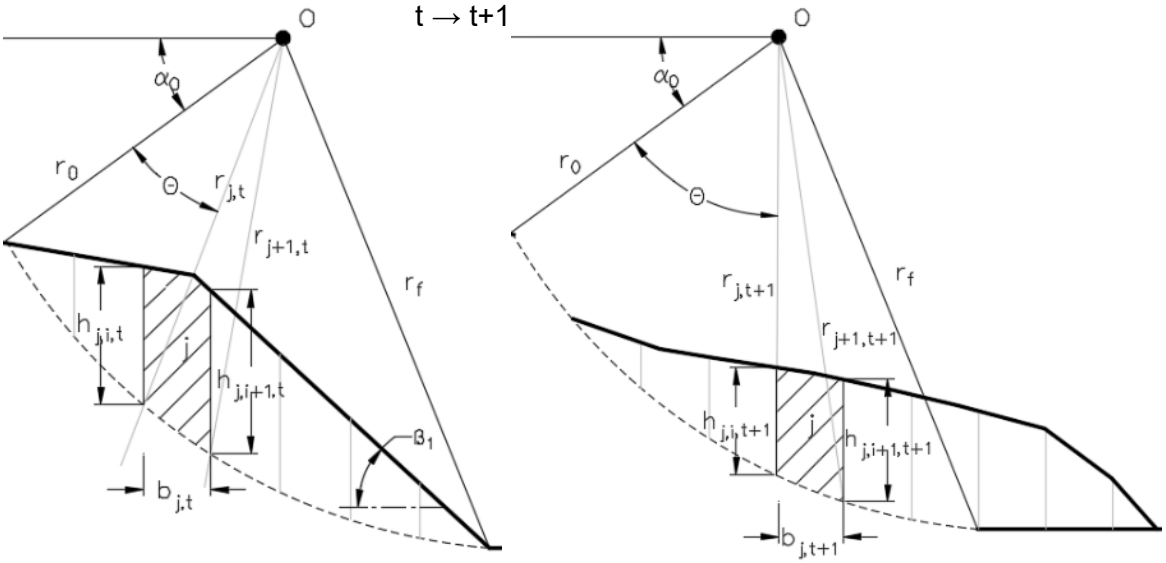


Fuente: Elaboración propia.

Se asume que la parte superior de la superficie de falla inicia con un ángulo $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ con respecto a la horizontal y al final de esta, se asumirá que la superficie de falla toma una geometría horizontal. Esta última zona coincide con la base del talud. A partir de esta definición se podrán calcular las coordenadas para cada punto sobre la superficie de falla y con una geometría definida del talud será posible determinar la geometría de cada una de las tajadas a lo largo de este.

Para actualizar la geometría de las tajadas durante el tiempo en el que ocurre el movimiento del talud que falla, se adopta la metodología propuesta por Hungr (1995) según la cual, se puede suponer que los elementos discretos que componen un mecanismo de falla obedecen el principio de conservación del volumen. Para ello, se supone que las caras laterales de cada tajada se mantienen planas y verticales durante la evolución del proceso. De esta manera, cada tajada podrá cambiar de forma alargándose o acortándose contenida dentro de dos paredes verticales que conservan el mismo volumen.

Figura 3-2: Representación esquemática del cambio de la geometría de las tajadas de un tiempo t a un tiempo t+1.



Fuente: Elaboración propia.

La **Figura 3-2** muestra el cambio de la geometría de una tajada bajo los supuestos descritos en el párrafo anterior entre la condición inicial en un tiempo $t = t_0$ y un tiempo posterior $t = t + 1$. La expresión matemática del sistema de ecuaciones que representa el

volumen de cada tajada y con la cual se puede actualizar la altura de cada una de estas en un tiempo t se muestra con la Ecuación 3-1.

$$V_{j,t} = \frac{h_{i,j,t} + h_{i+1,j,t}}{2} * b_{j,t}$$
$$\frac{1}{2}\left[b_{j,t}, b_{j,t}\right]\left\{\frac{h_{i,j,t}}{h_{i,j,t}}\right\} = V_{j,t} \quad (3\text{-}1)$$

En el numeral 1.2.1 se presenta el desarrollo analítico del movimiento de una partícula sobre la espiral logarítmica con lo cual es posible determinar las coordenadas de las paredes de las tajadas para cualquier instante de tiempo conocidos θ y r, para ello se aplican la Ecuación 3-2 y la Ecuación 3-3 para la coordenada x y la coordenada z, respectivamente.

$$X_{i,j,t}^{SF} = X_0 - r_0 e^{\theta_{j,t} tan\phi} \cos\left(\theta_{j,t} + \alpha_0\right) \quad (3\text{-}2)$$

$$Z_{i,j,t}^{SF} = Z_0 - r_0 e^{\theta_{j,t} tan\phi} \text{sen}\left(\theta_{j,t} + \alpha_0\right) \quad (3\text{-}3)$$

Donde,

$X_{i,j,t}^{SF}$ es la coordenada horizontal sobre la superficie de falla de la pared i de la tajada j en el tiempo t;

$Z_{i,j,t}^{SF}$ es la coordenada vertical sobre la superficie de falla de la pared i+1 de la tajada j en el tiempo t;

X_0 y Z_0 son las coordenadas del punto de origen de la espiral logarítmica asumida como superficie de falla;

r_0 radio inicial de la espiral logarítmica;

$\theta_{j,t}$ ángulo de la partícula j en el tiempo t.

3.2.2 Nivel freático

En la obra clásica escrita por Jules Dupuit (1863) se desarrolla una teoría simplificada para describir el flujo de agua subterránea en medios porosos. En este contexto, introduce de manera explícita el concepto de nivel freático, definido como la superficie superior de la zona saturada, en la que todos los poros del suelo están completamente llenos de agua.

Esta superficie separa la zona saturada de la zona no saturada, y constituye una línea equipotencial donde la presión del agua es igual a la presión atmosférica.

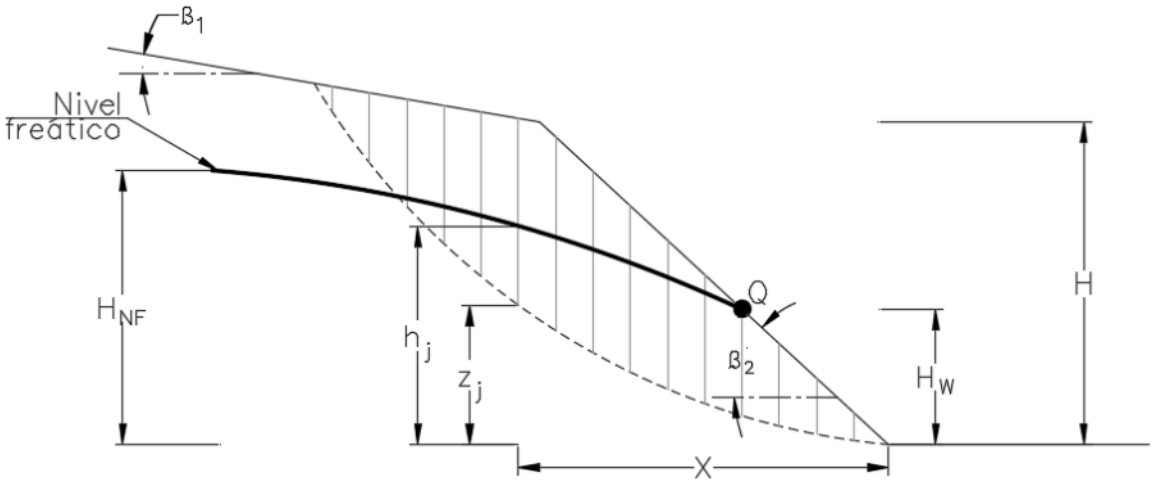
Desde una perspectiva teórica, Dupuit formuló una serie de simplificaciones que facilitan el análisis del flujo en acuíferos libres. La más importante es la denominada hipótesis de Dupuit, que supone que: El flujo es predominantemente horizontal alejado de la cara del talud, el gradiente hidráulico es igual a la pendiente del nivel freático, las líneas de corriente son paralelas a la base del acuífero y la carga hidráulica es constante en la vertical.

Bajo estas suposiciones, el flujo puede analizarse utilizando una forma simplificada de la ley de Darcy para flujo horizontal como se muestra en la Ecuación 3-4.

$$q = -K\, h(x) \frac{dh}{dx} \tag{3-4}$$

Donde;
q: es el caudal por unidad de ancho.
K: es la conductividad hidráulica.
$h(x)$: es la altura del nivel freático sobre una referencia.
$\frac{dh}{dx}$: es el gradiente hidráulico horizontal.

Figura 3-3: Definición del nivel freático y el gradiente hidráulico según Dupuit (1863)



Fuente: Elaboración propia.

En la Ecuación 3-5 se muestran las integrales que se obtiene de la separación de variables de la Ecuación 3-4 para encontrar la solución a la ecuación de flujo de Dupuit (1863). Donde h es la altura del nivel del agua respecto al nivel de referencia, es decir, la base del talud; $a\ sen\beta$ es el equivalente geométrico de la altura H_w; dh es el cambio de altura del nivel freático sobre la parábola analizada, x es la variable de la posición horizontal y $a\ cos\beta$ es la proyección horizontal de la altura H_w presentada en la **Figura 3-3**.

$$\int_{a\ sen\beta}^{h} h\ dh = \frac{q}{K}\int_{a\ cos\beta}^{x} dx \tag{3-5}$$

De la solución de la Ecuación 3-5 y expresando la altura h del nivel freático en cada punto x, se obtiene la Ecuación 3-6.

$$h^2 = a^2\ sen^2\beta + \frac{2q}{K}[x - a\ cos\beta] \tag{3-6}$$

De las condiciones de frontera, el caudal que fluye en el Punto Q que se muestra en la **Figura 3-3** se expresa en la Ecuación 3-8, así, la ecuación de la parábola que se muestra en la Ecuación 3-6 se puede reescribir como se muestra en la Ecuación 3-9.

$$H_w = a\ sen\beta \tag{3-7}$$

$$q = K\ a\ \frac{sen^2\beta}{cos\beta} \tag{3-8}$$

$$h = \sqrt{2a\frac{sen^2\beta}{cos\beta} - a^2 sen^2\beta} \tag{3-9}$$

La raíz solución de la Ecuación 3-9 posible para este tipo de parábolas en un talud con la geometría general que se tiene proyectado modelar se presenta en la Ecuación 3-10.

$$a = \frac{d}{cos\beta} - \sqrt{\left(\frac{d}{cos\beta}\right)^2 - \left(\frac{H_{NF}}{sen\beta}\right)^2} \tag{3-10}$$

La solución que se presenta mediante la Ecuación 3-9 y la Ecuación 3-10 definen la línea del nivel freático a partir de la cual se pueden calcular las fuerzas del agua que actúan

sobre la j-ésima tajada. Las siguientes ecuaciones indican las fuerzas sobre las paredes de las tajadas y la base con la Ecuación 3-11, Ecuación 3-12 y la Ecuación 3-13, respectivamente. Para este caso de estudio, se ha fijado la altura del Punto Q, es decir, la distancia Hw como la mitad de la altura del talud para todos los escenarios evaluados.

$$u_j = \frac{1}{2}\left[\gamma_w \left(h_j - z_j\right) cos^2\alpha_j\right](h_j - z_j) \quad (3\text{-}11)$$

$$u_{j+1} = \frac{1}{2}\left[\gamma_w \left(h_{j+1} - z_{j+1}\right) cos^2\alpha_{j+1}\right](h_{j+1} - z_{j+1}) \quad (3\text{-}12)$$

$$Uw_j = \frac{1}{2}\left\{\left[\gamma_w \left(h_j - z_j\right) cos^2\alpha_j\right] + \left[\gamma_w \left(h_{j+1} - z_{j+1}\right) cos^2\alpha_{j+1}\right]\right\}b_j \quad (3\text{-}13)$$

Donde u_j y u_{j+1} son las presiones del agua sobre las paredes de la tajada j; Uw_j es la presión del agua en la base de la tajada j; γ_w es el peso unitario del agua; h_j es la altura del nivel freático respecto a un nivel de referencia sobre la tajada j; z_j es la altura de la base de la tajada j respecto al mismo nivel de referencia, b_j es el ancho de la tajada j y α_j es la inclinación de la base de la tajada j.

3.2.3 Características del suelo

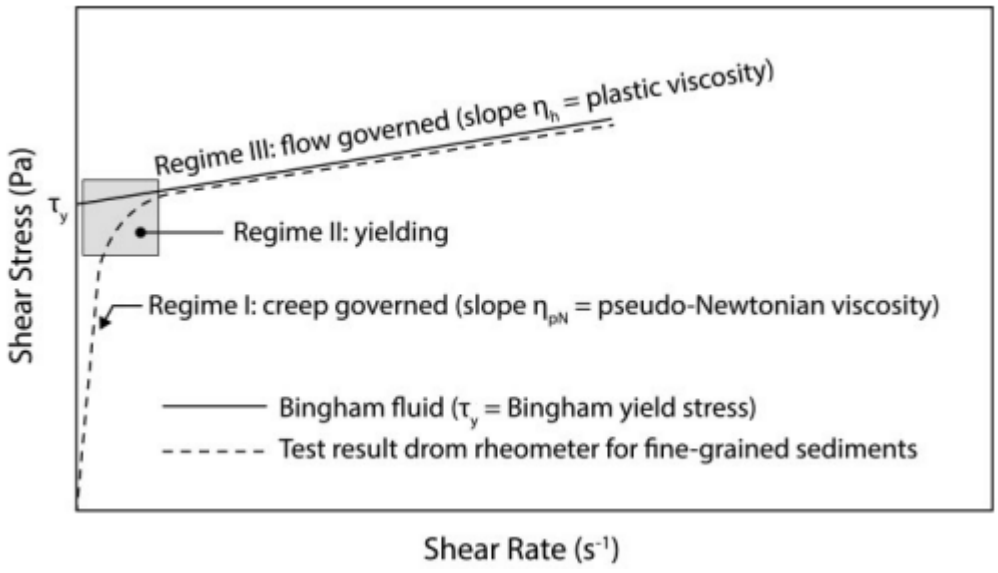
El desarrollo de modelos que simulen la dinámica de taludes inestables requiere la incorporación de parámetros físicos que representen adecuadamente el comportamiento mecánico de los materiales involucrados. Estos parámetros incluyen, entre otros, las propiedades elásticas como el módulo de elasticidad, viscosas como el coeficiente de amortiguamiento o viscosidad dinámica, friccionales como el ángulo de fricción y la cohesión efectiva, así como propiedades geométricas y condiciones de contorno e hidráulicas.

La estimación adecuada de estos parámetros es fundamental para garantizar que el modelo reproduzca de manera coherente los procesos físicos asociados al movimiento de una masa sobre una pendiente. Este capítulo se centra en la estimación de los parámetros reológicos, principalmente aquellos relacionados con la viscosidad, que permitan la simulación de un talud inestable.

A continuación, se exponen los hallazgos identificados en la consulta, recopilación y análisis de trabajos previos que abordan la estimación experimental, teórica o empírica de estos parámetros para la modelación dinámica de taludes. La revisión incluye estudios que han utilizado ensayos de laboratorio (como triaxiales, de consolidación, de corte anular o de reometría), métodos indirectos a partir del análisis retrospectivo de deslizamientos ocurridos, así como aproximaciones numéricas y propuestas analíticas aplicadas en diferentes contextos geológicos y geotécnicos.

Como se podrá observar en el desarrollo de este capítulo, los valores que se estiman para la viscosidad en los suelos tienen un amplio rango de variación, el cual está en función del proceso de inestabilidad que se desee modelar. La **Figura 3-4** adaptada por Besso & Pereira de Campos (2019) a partir de Hungr et al (1984) ilustra el comportamiento de una curva de flujo típica, en esta el autor destaca la transición entre el régimen de *creep* o reptación donde pequeñas tasas de corte generan grandes incrementos en el esfuerzo, es decir, el material aún se comporta como sólido. Y el régimen de flujo donde el comportamiento del material se asemeja más al de un fluido y la viscosidad (pendiente de la curva) disminuye, generando grandes tasas de deformaciones cortantes ante pequeños incrementos en los esfuerzos.

Figura 3-4: Curva del flujo típico de mezclas de suelo-agua.

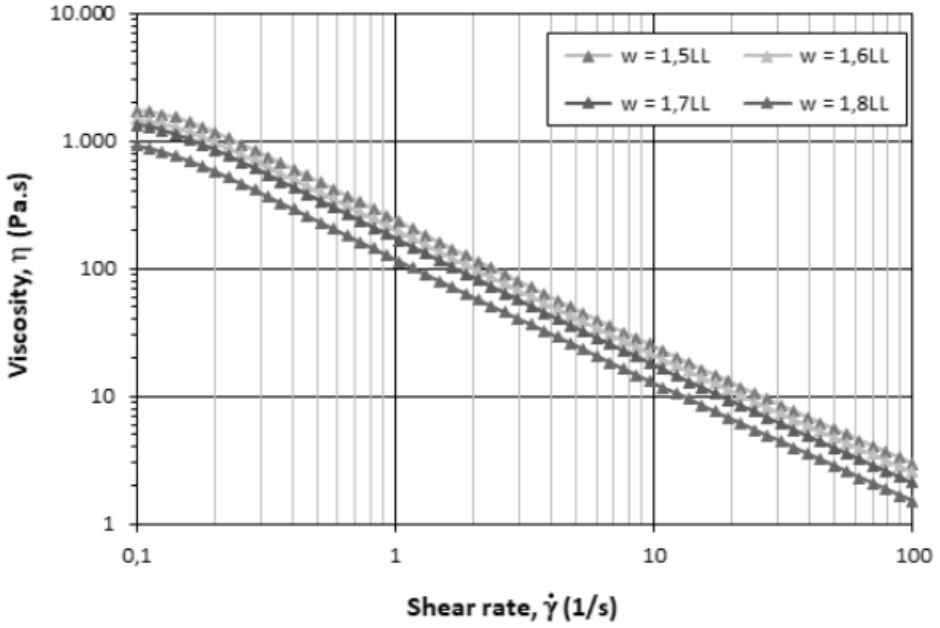


Tomado de: Hungr et al (1984) adaptado en Besso & Pereira de Campos (2019)

La curva de flujo mostrada en esta figura indica que los valores de la viscosidad que se deben emplear en la modelación de procesos de inestabilidad lentos deben ser de mayor magnitud que la viscosidad que se debe emplear para simular los procesos de inestabilidad que alcanzan mayores velocidades. Los autores destacan que materiales arcillosos con alto contenido de agua: con índice de liquidez mayor que 1,5; pueden comportarse como fluidos tipo Bingham, es decir, exhiben una relación lineal entre esfuerzo cortante y la tasa de corte una vez se supera el esfuerzo de cedencia.

En el estudio realizado por Besso & Pereira de Campos (2019) utilizaron un ensayo de asentamiento modificado partiendo del ensayo de asentamiento empleado en concretos, diseñado para simular el movimiento libre por peso propio. El tronco-cónico o cono de Abrams se retira verticalmente mediante un sistema de contrapeso, reduciendo el contacto entre el suelo y las paredes del molde, los autores utilizaron una capa fina de glicerina como lubricante para reducir la fricción lateral. Se registraron los desplazamientos verticales con LVDT y los desplazamientos horizontales con cámara de video.

Figura 3-5: Curva de flujo obtenida con el ensayo del reómetro.



Tomado de: Besso & Pereira de Campos (2019)

Se analizaron las curvas de desplazamiento, velocidad y aceleración para obtener la tasa de corte efectiva, definida como la relación entre la velocidad horizontal y el desplazamiento vertical en la fase de aceleración del flujo. Para validar los resultados se empleó un reómetro rotacional tipo plato-plato con superficie acanalada, ideal para el estudio de materiales blandos y muy viscosos, aplicando rampas de velocidades para rangos típicos de eventos reales de flujos de detritos. En la **Figura 3-5** se muestran las curvas de flujo obtenidas con el reómetro para un depósito coluvial arcilloso de Río de Janeiro, allí se identifica una relación exponencial inversa entre el contenido de agua y la viscosidad, a mayor humedad, menor viscosidad.

Por otra parte, Adinolfi (2008) menciona que el uso del ensayo de corte anular para este tipo de investigaciones no se limita a la obtención de la resistencia residual del suelo, también se puede observar si el material presenta fluencia viscosa bajo esfuerzos constantes. En teoría, si se aplica un esfuerzo cortante constante, que es ligeramente superior a la resistencia residual, y la muestra continúa deformándose lentamente, este comportamiento puede ser interpretado como flujo viscoso.

El ensayo de corte anular es un procedimiento de laboratorio que permite someter una muestra de suelo a deformaciones de corte de gran magnitud, superando las restricciones geométricas de dispositivos convencionales como el triaxial o el corte directo. En un ensayo convencional la muestra se coloca entre anillos concéntricos dentro de una cámara, con confinamiento normal mediante carga vertical controlada. El corte se induce mediante la aplicación de un momento de torsión constante o controlado por deformación angular, lo cual genera esfuerzos cortantes en la muestra.

El diseño del aparato permite mantener condiciones drenadas durante el ensayo y aplicar deformaciones rotacionales progresivas a la muestra hasta alcanzar un estado de corte residual. Se mide el desplazamiento angular acumulado, la velocidad de corte y el esfuerzo cortante movilizado en función del tiempo.

La estimación de la viscosidad dinámica η se puede hacer idealmente si se conoce el esfuerzo cortante aplicado τ y la tasa de la deformación angular $\dot{\gamma}$. A partir de estos valores, bajo el supuesto de un comportamiento newtoniano lineal, la viscosidad se calcula como se muestra en la Ecuación 3-14.

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \tag{3-14}$$

No obstante, Adinolfi (2008) señala que, en la práctica, obtener una medida directa y fiable de la viscosidad a partir de este ensayo presenta dificultades relacionadas con la estabilidad de la velocidad de corte, la incertidumbre del espesor efectivo de la zona de corte requerido para determinar la tasa de deformación, el comportamiento del material puede no ser estrictamente viscoso pudiendo incluir efectos por la fricción y plasticidad; y que los ensayos identifican que el esfuerzo cortante tiende a estabilizarse en un valor constante, lo cual trae inconvenientes en los análisis dinámicos.

Tabla 3-1: Comparación entre los valores de la viscosidad característicos de tres deslizamientos ocurridos en diferentes materiales obtenidos del ensayo de corte anular y retroanálisis con información de campo.

Deslizamientos	**Resultados de ensayo de corte anular**	**Resultados del retroanálisis con información de campo**
	η (kPa)	**η (kPa)**
La Valette[1]	7,1 E+04	1,2 E+07
La Mure[2]	5,1 E+03	1,3 E+07
Hau[3]	9,2 E+03	1,2 E+05

Adaptado de: Van Asch et al. (2007)

[1] El deslizamiento de *La Valette* ocurrió en los Alpes franceses, se clasificó como un deslizamiento traslacional con posterior transformación a flujo. Según la observación de campo el movimiento ocurrió sobre una banda de corte de 20 m de profundidad con pendiente de 18°, fue monitoreado entre 1988 y 1991. El material corresponde a Silto arenoso con fragmentos gruesos con parámetros de resistencia residual de $\phi'_r = 24°$ y $c'_r = 0\ kPa$.

[2] El deslizamiento de *La Mure* ocurrió en los Alpes franceses cerca de Grenoble, ocurrido sobre arcillas altamente sobreconsolidadas. La forma del deslizamiento fue descrita como semicircular con 70 m de largo y 4,1 m de profundidad promedio. El 80% del desplazamiento se concentró en una banda de 15 mm; el resto se asocia a *creep* más lento superficial. Los parámetros de resistencia residual se estimaron en $\phi'_r = 18{,}7°$ y $c'_r = 1{,}6\ kPa$.

[3] El deslizamiento de *Hau* ocurrió en Suiza sobre una alternancia de areniscas y margas; descritas como arcilla arenosa y franco-arcillosa. La geometría del deslizamiento se describe con profundidad de 6 m y pendiente de 14°. Los parámetros de resistencia residual estimados son de $\phi'_r = 21{,}5°$ y $c'_r = 0\ kPa$.

Los resultados en estos ensayos muestran que la viscosidad determinada en laboratorio suele ser mucho menor que la observada en campo, comportamiento que el autor atribuye al incremento en la resistencia residual debido al efecto de las deformaciones en la zona de flujo, las variaciones en las presiones de poros inducidas por irregularidades en la superficie de falla y la no linealidad del comportamiento viscoplástico en campo. Adicionalmente, Van Asch et al (2007) observaron que las velocidades de deslizamiento medidas en campo podrían superar en hasta dos órdenes de magnitud a las obtenidas a partir de parámetros de viscosidad determinados en laboratorio.

En la **Tabla 3-1** se muestra la comparación entre los valores de viscosidad obtenidos mediante ensayos de laboratorio con corte anular y los valores de viscosidad calculados por retroanálisis con la información de velocidades de campo para tres deslizamientos ocurridos cerca a los Alpes que han sido objeto de estudio y monitoreo frecuente.

El procedimiento para estimar la viscosidad seguido por Adinolfi (2008) integra la información de presiones de poros, desplazamientos y velocidades medidos en campo y se analizan adoptando un modelo visco-plástico basado en la ley de Bingham para estimar la viscosidad efectiva.

El modelo se formula bajo la aplicación de la Segunda Ley de Newton para una condición de equilibrio de fuerzas para un talud infinito, cuyo objeto es determinar las condiciones para que se produzca la falla mediante el cálculo de factores de seguridad menores que 1. Ya que, cuando esta condición ocurre, Adinolfi (2008) sugiere que el modelo dinámico incorpora un término de *fricción viscosa* F_v, de manera que la ecuación de movimiento queda de la forma que se muestra en la Ecuación 3-15.

$$\tau - \tau_0 = ma + F_v \tag{3-15}$$

Para determinar esta componente viscosa, se aplica la ley de Bingham, la cual se describe con la siguiente Ecuación 3-16.

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\tau - \tau_0}{\eta}, \tau > \tau_0 \tag{3-16}$$

Asumiendo una variación lineal de la velocidad en la zona o banda de corte, la fuerza viscosa se puede simplificar en términos del espesor z de la zona de corte como se indica con la Ecuación 3-17.

$$F_v = \frac{\eta}{z} v \tag{3-17}$$

Adinolfi (2008) presenta la siguiente Ecuación Visco-plástica producto de la sustitución de los términos de la Ecuación 3-16 y la Ecuación 3-17 en el balance de fuerzas obteniendo la expresión que se indica con la Ecuación 3-18 donde P y Q son parámetros derivados de la geometría del talud y las propiedades del suelo.

$$\frac{\eta}{z} v + ma = P + Q p_w \tag{3-18}$$

La Ecuación 3-18 se modela a partir de los datos de campo medidos para tres casos de estudio. Se registraron las presiones de poros medidas con piezómetros de Casagrande y sistemas automáticos de registro. Los datos fueron interpolados en el tiempo para coincidir con los instantes de medición de desplazamientos y velocidades, los cuales fueron obtenidos mediante la lectura de inclinómetros, puntos de GPS y extensómetros. Los autores aplicaron el esquema de diferencias finitas que se muestra en la Ecuación 3-19 para calcular las velocidades a partir de esta información.

$$v(t_i) = \frac{d_i - d_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \tag{3-19}$$

Donde d_i es el desplazamiento medido en el instante t_i.

Para la calibración de la viscosidad se empleó el parámetro $\frac{\eta}{z}$, para el cual se simularon velocidades con la Ecuación Visco-plástica (Ecuación 3-18), usando un valor inicial estimado de esta relación. Los resultados de estas simulaciones se compararon con las medidas en campo y se realizó el ajuste de la relación $\frac{\eta}{z}$ mediante el método de los mínimos cuadrados para minimizar la diferencia según la Ecuación 3-20 donde E es la raíz de la suma del error al cuadrado.

$$E^2 = \sum(v_{medido} - v_{modelado})^2 \quad (3\text{-}20)$$

Finalmente, el autor evalúa la calidad del ajuste con el cálculo del coeficiente de correlación r^2. Este procedimiento se aplicó a tres deslizamientos: Orvieto (Italia), Fosso San Martino (Italia) y Vallcebre (España) obteniendo los resultados que se resumen en la **Tabla 3-2**. El autor concluye que existe una fuerte relación entre las variaciones de presiones de poros y los picos de velocidad de los deslizamientos. Además, que el índice de viscosidad resultó ser variable en el tiempo, reflejando los cambios que ocurren en la resistencia del material asociados a procesos de ablandamiento por deformación e interacción de diferentes capas en los taludes.

Tabla 3-2: Resultados de la estimación de la viscosidad mediante retroanálisis e información de campo para los deslizamientos de Orvieto (Italia), Fosso San Martino (Italia) y Vallcebre (España).

Deslizamiento	η/z **kPa.s/m**	**Comentario del autor**
Orvieto[4]	2,79 x 10^8	Buena correlación $r^2 = 0{,}983$
Fosso San Martino[5]	3,90 x 10^7	Menor ajuste $r^2 = 0{,}79$ asociado a una geometría más compleja y a que el factor de seguridad que estimaron era superior a 1
Vallcebre[6]	4,79 x 10^7	Con el mejor ajuste del estudio $r^2 = 0{,}993$

Adaptado a partir de: Adinolfi (2008)

[4] Deslizamiento ocurrido en la Ciudad de Orvieto, caracterizada por laderas empinadas de materiales de origen volcánico y arcillas subyacentes. El movimiento fue descrito como lento y continuo, con evidencias de deformaciones diferidas a lo largo del año. Los episodios de reactivación se asocian con épocas de lluvias intensas y fluctuaciones del nivel freático. El deslizamiento fue instrumentado con inclinómetros, extensómetros y piezómetros.

[5] Deslizamiento ocurrido en la región de Umbría, la cual se caracteriza por un entorno de laderas arcillosas con presencia de depósitos coluviales en superficie. El movimiento fue descrito como traslacional con cinemática compleja debido a la interacción de múltiples superficies de falla poco profundas. La instrumentación está compuesta por inclinómetros y piezómetros.

[6] El proceso ocurrió en una zona minera y de carreteras en el Pirineo Catalán donde se encuentran depósitos coluviales y suelos arcillosos muy saturados. El proceso fue descrito como un deslizamiento lento con intensificación de los movimientos durante el deshielo y las temporadas de lluvias. La instrumentación está compuesta por piezómetros automáticos, inclinómetros y estaciones de control topográfico.

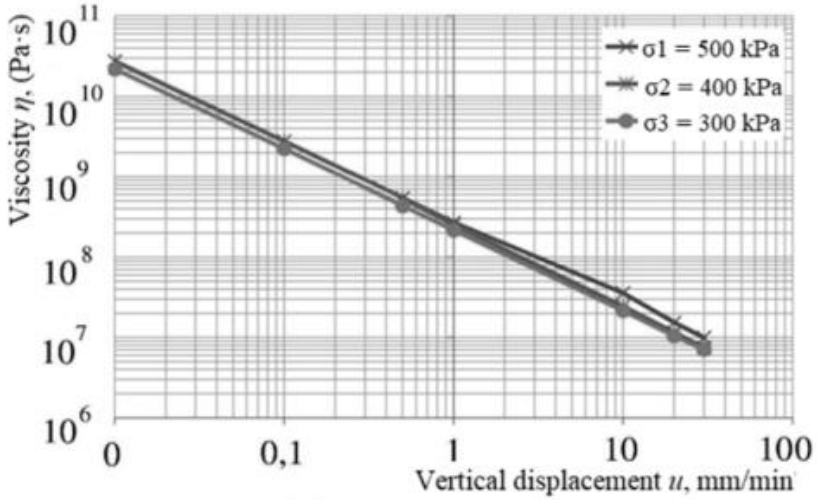
Por otra parte, Ter-Martirosyan et al. (2024) realizaron ensayos para determinar en laboratorio la viscosidad de suelos arcillosos empleando el corte simple en un dispositivo de corte directo especial, operado en modo de carga cinemática, es decir, manteniendo constante la velocidad de desplazamiento horizontal durante la prueba. Este tipo de dispositivo permite mantener un estado de deformación uniforme en la muestra, ya que las capas del suelo dentro del cilindro se desplazan homogéneamente, simulando mejor las condiciones reales de esfuerzo en zonas como interfaces suelo-estructura, deformaciones en taludes o en zonas de contacto bajo cimentaciones.

Los autores evaluaron la influencia de la velocidad del corte y el nivel de carga de confinamiento en los valores de viscosidad obtenidos. El ensayo supone que cada capa de suelo dentro de la muestra se somete al mismo desplazamiento durante el corte, lo que evita errores derivados del cambio de área de contacto, típico en dispositivos de corte directo tradicionales.

El análisis de los resultados comprendió el estudio de las gráficas de esfuerzo de corte contra la tasa de deformación cortante. Estas gráficas presentaron dos tramos diferenciables para los cuales se estimaron dos valores de viscosidad distintos usando la ley de Newton presentada mediante la Ecuación 3-14. El estudio observó que la viscosidad decrece al aumentar la velocidad de corte, lo que indica un comportamiento viscoplástico típico. Por ejemplo, con una carga vertical de 600kPa, los valores de la viscosidad oscilaron desde aproximadamente 610000 kPa.min para una velocidad de corte de 0,005 mm/min hasta 418 kPa.min para una velocidad de corte de 5 mm/min, lo que muestra una caída de más de tres órdenes de magnitud.

En la **Figura 3-6** se muestran los resultados obtenidos por Ter-Martirosyan et al. (2017) al medir la viscosidad de suelos dispersivos en laboratorio mediante un nuevo dispositivo experimental. El ensayo se basa en una adaptación de un estabilómetro con celda, básicamente, estos dispositivos permiten inducir deformaciones de corte alrededor de un cuerpo rígido, en este caso una varilla, de forma cilíndrica que se desplaza verticalmente dentro de una muestra de suelo contenida.

Figura 3-6: Variación de la viscosidad en una muestra de suelo en función de la velocidad de desplazamiento.



Tomado de: Ter-Martirosyan et al. (2017)

Las deformaciones de corte ocurren en el contacto lateral entre la varilla y el suelo. El dispositivo mide el esfuerzo cortante desarrollado en función de la velocidad de desplazamiento vertical de la varilla. Este diseño permite simular de manera simplificada la penetración o hundimiento de elementos rígidos en el suelo y estudiar la resistencia viscosa que el material desarrolla alrededor del cuerpo penetrante.

La viscosidad se puede calcular aplicando equilibrio de fuerzas sobre la superficie lateral de la varilla, de radio r_c y longitud l_{cT}, se deduce la expresión para la fuerza vertical total F necesaria para mantener una velocidad de inmersión constante y que se muestra mediante la Ecuación 3-21.

$$F = 2\pi r_c L_{cT} \tau \tag{3-21}$$

Donde τ se expresa según lo mostrado por la Ecuación 3-14. Al sustituir el gradiente de velocidad y las condiciones de contorno, se obtiene una expresión explícita para estimar la viscosidad según se muestra con la Ecuación 3-22.

$$\eta = \frac{F}{2\pi L_{cT} \dot{u}} \ln\left(\frac{r_3}{r_c}\right) \tag{3-22}$$

Donde $\dot{u}$ es la velocidad de hundimiento de la varilla y r_3 es el radio externo de la muestra de suelo.

La aplicación de este ensayo le permitió a Ter-Martirosyan et al. (2017) observar que la viscosidad del suelo disminuye al aumentar la velocidad de desplazamiento vertical de la varilla, un comportamiento típico de materiales viscoplásticos, esto confirma que la respuesta viscosa del suelo no es necesariamente lineal, es decir, muestra un comportamiento no-newtoniano.

Se determinó que una mayor presión de confinamiento radial incrementa la viscosidad efectiva medida. Este comportamiento se atribuyó al endurecimiento del contacto suelo-varilla, lo que aumenta la resistencia al desplazamiento. El ensayo permite estimar la viscosidad del suelo a diferente velocidad de deformación, lo cual es útil para la calibración de modelos reológicos viscoelásticos o viscoplásticos aplicados en geotecnia. Además, el dispositivo estudiado por estos autores puede utilizarse en la evaluación de suelos bajo cargas dinámicas o situaciones de *creep*.

Finalmente, se describen los aspectos que se consideran para determinar los parámetros reológicos mediante ensayos de consolidación y ensayos triaxiales sobre muestras de suelos. La aplicación de estos ensayos para determinar estos parámetros parte de considerar que los suelos presentan comportamientos dependientes del tiempo atribuibles a fenómenos viscosos intragranulares. En suelos blandos como las arcillas, la viscosidad se debe a la naturaleza viscoelástica de los contactos entre partículas, no al agua entre los poros (Cudmani, 2021)

Para caracterizar la dependencia temporal se usan parámetros como el índice de viscosidad I_v que corresponde a la relación entre el coeficiente de fluencia proveniente de la consolidación secundaria C_α y el índice de compresión primaria C_c como se muestra en la Ecuación 3-23.

$$I_v = \frac{C_\alpha}{C_c} \tag{3-23}$$

En suelos granulares, el comportamiento viscoso está en función del esfuerzo efectivo, la densidad y el porcentaje de finos, en el caso de arenas limpias se suele observar menor comportamiento viscoso, mientras arenas muy limosas exhiben un comportamiento opuesto (Levin et al., 2018). En arcillas, la velocidad de corte influye fuertemente en el coeficiente viscoso y en la resistencia al corte pico (Ter-Martirosyan et al., 2024).

En un ensayo triaxial consolidado drenado se distinguen dos etapas clave: primero la consolidación isotrópica y luego el corte axial drenado con deformación controlada. En la etapa de consolidación se aplica la presión de confinamiento y se espera la disipación total de presión de poros; adicionalmente se observa la fase de consolidación secundaria, responsable de deformaciones a largo plazo del suelo bajo carga constante.

Durante la etapa de corte, se aplica una carga desviadora axial normalmente a una velocidad de deformación controlada, lo cual permite evaluar los efectos viscoelásticos. Al incrementarse la velocidad de deformación axial se observan cambios abruptos en el esfuerzo desviador medido, según AnhDan et al. (2006), son indicativos de comportamiento viscoso. Estos autores emplearon ensayos a velocidad controlada para inferir la viscosidad del suelo, realizan ensayos monotónicos drenados cambiando la velocidad de deformación axial durante la carga. En suelo de tamaño grava observaron que aumentos o reducciones escalonadas en la velocidad de deformación generaban saltos abruptos del esfuerzo desviador que, como se ha mencionado, asociaron con efectos viscoso: a mayor velocidad, el suelo se “endurece” momentáneamente y viceversa.

Las velocidades que típicamente se usan en los ensayos de corte drenados son del orden de 10^{-7} a 10^{-3} s^{-1}. Cambios en la velocidad durante el ensayo permiten evaluar la sensibilidad del suelo a la tasa de corte. Arcillas de alta plasticidad muestran aumentos apreciables en resistencia al incrementarse la tasa de deformación, este comportamiento se conoce como tixotrópico-viscoso.

Los datos del ensayo arrojan curvas esfuerzo-deformación contra el tiempo, la viscosidad se extrae ajustando el comportamiento descrito a modelos reológicos estándar como:

- Kelvin-Voigt (resorte y amortiguador viscoso en paralelo)

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (3\text{-}24)$$

- Maxwell (resorte y amortiguador viscoso en serie)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{3-25}$$

- Burgers (Kelvin + Maxwell)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-\frac{Et}{\eta}}\right) + \frac{\sigma}{\eta}t \tag{3-26}$$

Durante los ensayos de fluencia aplicando un esfuerzo constante, se registra la deformación con el tiempo. Si la relación es lineal en un tramo se asume flujo viscoso newtoniano y se aplica la ecuación 3-14. Por otra parte, si se observa una respuesta no lineal, se puede ajustar una ley empírica de la forma que se muestra en la Ecuación 3-27 referente a un modelo Ostwald-de Waele para fluidos no newtonianos. (Bird et al, 1987)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0}\right)^{n-1} \tag{3-27}$$

Las viscosidades dinámicas o aparentes reportadas en la revisión bibliográfica varían enormemente según el tipo de suelo y la prueba realizada. Maslov & Klimenko (2009) señalan que arcillas muy blandas tienen valores de viscosidad $\eta \approx 10^9 - 10^{11}\ Pa.s$, arcillas plásticas típicas $\eta \approx 10^{10} - 10^{12}\ Pa.s$ y arcillas rígidas hasta $\eta \approx 10^{14} - 10^{16}\ Pa.s$.

La recopilación y revisión de la información bibliográfica para la elaboración de este capítulo permite construir la siguiente **Tabla 3-3** donde se muestra la clasificación de deslizamientos según su velocidad típica basados en el sistema de clasificación propuesto por Cruden & Varnes (1996). Se incorporan rangos representativos de viscosidad en kPa.s y del módulo de elasticidad en kPa, distinguiendo entre tipos de suelo y régimen de flujo. Las referencias bibliográficas específicas se asocian a cada fila de la tabla.

Tabla 3-3: Clasificación de deslizamientos según su velocidad típica, tipo de movimiento, materiales asociados y rangos de parámetros reológicos estimados en estudios de campo y laboratorio.

Clasificación por velocidad[7]	Velocidad típica (m/s)	Tipo de deslizamiento[8]	Material común[9]	η (Pa·s)[10]	E (kPa)	Referencias[11]
Cuasi estable	< 0,00001	Rotacional profundo	Arcillas rígidas, suelos residuales	≥ 10^8 Pa·s	5000–50000	Hungr (1995); Maslov & Klimenko (2009
Muy lento	0,00001–0,0001	Rotacional	Arcillas duras	10^6–10^8 Pa·s	2000–30000	van Asch et al. (2007); Mitchell & Soga (2005)
Lento	0,0001–0,0015	Rotacional / traslacional	Arcillas plásticas	10^5–10^7 Pa·s	1000–10000	Cruden & Varnes (1996); Ter-Martirosyan (2024)
Moderado	0,0015–0,1	Traslacional	Coluviones, limos	10^3–10^5 Pa·s	500–5000	Besso & Pereira de Campos (2019)
Rápido	0,1–1,5	Flujo lento / deslizamiento bloqueado	Arenas limosas, suelos saturados	10^2–10^4 Pa·s	200–1000	Zhou et al. (2021); Hungr et al. (2014)
Muy rápido	1,5–5,0	Flujo de detritos, avalancha	Mezclas saturadas no estructuradas	10^0–10^2 Pa·s	< 500	Besso & Pereira de Campos (2019); van Asch et al. (2007)

[7] Clasificación por velocidad basada en Cruden & Varnes (1996) que describe la velocidad máxima típica del movimiento del talud en m/s.
[8] El tipo de deslizamiento hace referencia a la forma predominante del movimiento según Hungr et al (2014).
[9] El material común corresponde al tipo de suelo o roca característicos de cada régimen de velocidad de acuerdo con los autores citados en este capítulo.
[10] La viscosidad aparente η es la resistencia interna al flujo expresada en Pa.s y el módulo de elasticidad E es una medida de la rigidez del suelo frente a esfuerzos. Los valores típicos se han extraídos de la información consultada que estimó estos parámetros mediante ensayos de laboratorio o retroanálisis.
[11] Esta tabla es el resultado de la revisión de la información y constituye una base fundamental para alcanzar los objetivos de este trabajo. Por lo tanto, esta tiene un carácter orientativo y no debe emplearse como base exclusiva para diseño. Los valores reportados pueden variar ampliamente dependiendo de la mineralogía, humedad, estructura interna del suelo, tamaño de partícula y condiciones locales de los taludes.

Clasificación por velocidad[7]	Velocidad típica (m/s)	Tipo de deslizamiento [8]	Material común[9]	η (Pa·s)[10]	E (kPa)	Referencias [11]
Extremo	> 5,0	Avalanchas, colapsos rápidos	Roca fragmentada con agua	< 10^1 Pa·s	Variable	Hungr et al. (2014)

En síntesis, los parámetros con los cuales se realizarán los análisis en los modelos matemáticos definidos corresponden al peso unitario efectivo del suelo γ', el ángulo de fricción efectiva ϕ', la cohesión efectiva c', el coeficiente de amortiguación $\bar{\eta}$ que será igual al producto de la viscosidad dinámica por la longitud de la tajada (ver Ecuación 3-28) y el módulo de rigidez del suelo que depende del módulo de elasticidad E, que se obtiene en laboratorio como la pendiente de la curva esfuerzo deformación y la geometría de la tajada (Ver Ecuación 3-29).

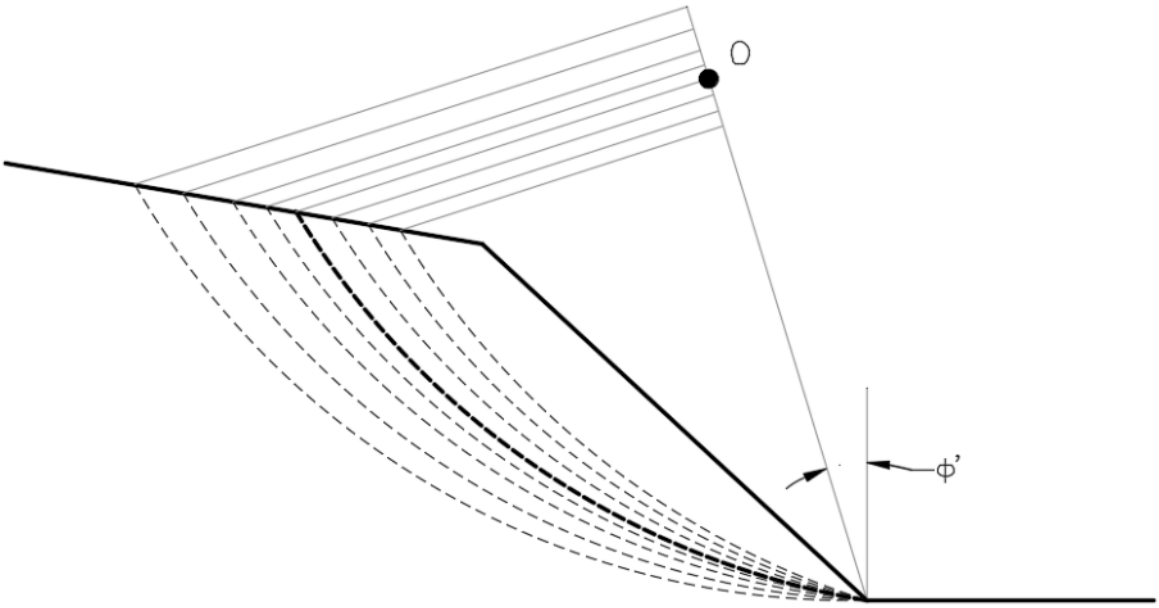
$$\bar{\eta} = \eta * Long.de\ la\ tajada \tag{3-28}$$

$$K = E * \acute{A}rea\ de\ la\ tajada \tag{3-29}$$

3.3 Análisis de estabilidad para calcular el factor de seguridad

Para realizar el análisis de la dinámica de taludes, es necesario partir de una condición inicialmente inestable. En este documento, dicha condición se identifica mediante el cálculo del factor de seguridad correspondiente a cada uno de los taludes analizados. Este cálculo se lleva a cabo evaluando múltiples superficies de falla potenciales dentro de la geometría de interés. Para ello, se varía el origen de una espiral logarítmica a lo largo de una línea imaginaria inclinada un ángulo ϕ' respecto a la vertical, cuyo punto de partida coincide con la base del talud. La superficie de falla crítica se define como aquella que presenta el valor mínimo del factor de seguridad entre las superficies consideradas. Además, para que la condición sea considerada inestable, dicho factor debe ser estrictamente menor que 1.0. La siguiente **Figura 3-7** ilustra el procedimiento empleado para encontrar la superficie de falla crítica.

Figura 3-7: Generación de superficies potenciales de falla sobre un talud de análisis.



Fuente: Creación propia.

Para definir la superficie de falla crítica de cada uno de los taludes analizados se realiza el cálculo del factor de seguridad a través del método de Janbu Simplificado el cual es una técnica de equilibrio límite desarrollada para analizar la estabilidad de taludes a partir de una representación por tajadas verticales (Janbu, 1973), al igual que se ha asumido la discretización de los taludes en este documento.

La formulación general del método de Janbu parte del equilibrio de fuerzas y momentos actuantes sobre cada tajada, pero la versión simplificada que aquí se describe descarta la ecuación de momentos, concentrándose únicamente en el equilibrio horizontal de fuerzas. La superficie de falla se discretiza en tajadas verticales de base inclinada, sobre las cuales actúan las siguientes fuerzas:

W_j: peso de la j-ésima tajada.

N_j: componente normal al segmento de falla.

T_j: fuerza cortante en la base.

E_j, E_{j+1}: fuerzas horizontales en los bordes laterales de la tajada.

u_j: presión de poros en la base.

α_j: ángulo de inclinación de la base de la tajada con respecto a la horizontal.

c_j, ϕ_j: cohesión y ángulo de fricción del suelo.

aW_j: fuerza sísmica horizontal seudo-estática.

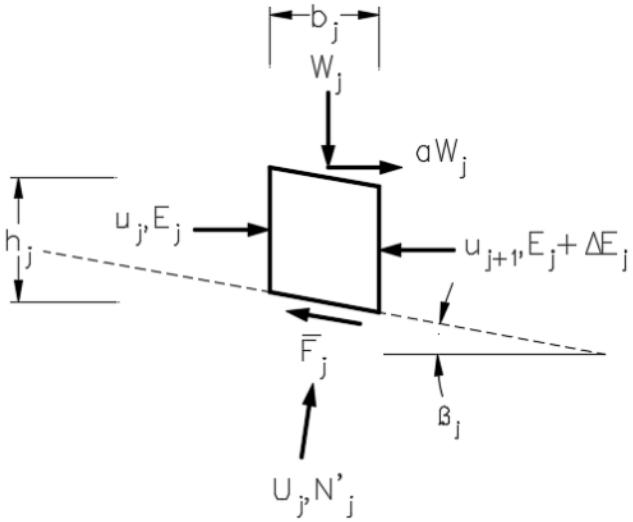
FS: factor de seguridad global buscado.

La **Figura 3-8** muestra las condiciones de análisis que se adoptan para la aplicación del modelo de estabilidad por equilibrio límite. El modelo asume que los planos verticales entre tajadas no transmiten fuerzas de fricción, aunque se consideran las reacciones horizontales E_j. Además, se puede incluir la acción sísmica mediante un coeficiente de aceleración horizontal.

Donde se aplica el factor de seguridad sobre la fuerza cortante basal según se muestra en la Ecuación 3-30.

$$\overline{F_j} = \frac{c_j b_j sec\alpha_j + N\prime tan\phi\prime_j}{FS} \quad (3\text{-}30)$$

Figura 3-8: Esquema de las fuerzas que actúan sobre la j-ésima tajada del mecanismo de falla.



Fuente: Elaboración propia.

Realizando la sumatoria de fuerzas en sentido normal a la superficie de falla asumiendo que la tajada está en equilibrio $\sum F_n = 0$, se obtiene la siguiente Ecuación 3-31 para la componente normal al segmento de falla N'_j.

$$N'_j = W_j\left(cos\alpha_j - a\ sen\alpha_j\right) - \left[\left(u_j - u_{j+1}\right)sen\alpha_j + u_j\right] + \Delta E_j sen\alpha_j \quad (3\text{-}31)$$

Realizando la sumatoria de fuerzas en sentido tangencial a la superficie de falla asumiendo que la tajada está en equilibrio $\sum F_n = 0$, se obtiene la siguiente Ecuación 3-32. Sustituyendo la Ecuación 3-31 en esta última se obtiene la Ecuación 3-33 despejando el cambio en los empujes entre tajadas. Esta expresión se ha dividido entre $cos\alpha_j$.

$$N'_j \frac{tan\phi'_j}{FS} + \Delta E_j\ cos\alpha_j = W_j\left(sen\alpha_j - a\ cos\alpha_j\right) + \left(u_j - u_{j+1}\right)cos\alpha_j - \frac{c_j b_j sec\alpha_j}{FS} \quad (3\text{-}32)$$

$$\Delta E_j = \frac{W_j\left[\left(tan\alpha_j + a\right) - \left(1 - a\ tan\alpha_j\right)\frac{tan\phi'_j}{FS}\right] + \left(u_j - u_{j+1}\right)\left(1 + \frac{tan\alpha_j\ tan\phi'_j}{FS}\right) + \frac{u_j}{cos\alpha_j}\frac{tan\phi'_j}{FS} - \frac{c_j b_j sec\alpha_j^2}{FS}}{1 + \frac{tan\alpha_j\ tan\phi'_j}{FS}} \quad (3\text{-}33)$$

Partiendo de la definición para los incrementos de los empujes que se presenta mediante la Ecuación 3-33, se define la expresión iterativa para el factor de seguridad que se muestra en la Ecuación 3-34.

$$\sum \Delta E_j = E_{n+1} - E_1 \quad (3\text{-}34)$$

$$FS = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\left[W_j\left(1 - a\ tan\alpha_j\right) - \frac{u_j}{cos\alpha_j}\right]tan\phi'_j - c_j b_j sec\alpha_j^2}{\eta_{\phi j}}\right\}}{\left(E_{n+1} - E_1\right) + \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{W_j\left(tan\alpha_j + a\right) + \left(u_j - u_{j+1}\right)\eta_{\phi j}}{\eta_{\phi j}}\right\}} \quad (3\text{-}35)$$

Donde;

$$\eta_{\phi j} = 1 + \frac{tan\alpha_j\ tan\phi'_j}{FS} \quad (3\text{-}36)$$

Nótese que la Ecuación 3-35 es una ecuación implícita, es decir, que es necesario aplicar un procedimiento iterativo que permita calcular el factor de seguridad.

3.4 Modelo matemático

El análisis dinámico de taludes mediante modelos mecánicos basados en analogías reológicas conduce, al aplicar el principio de trabajo y energía, a la formulación de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el movimiento de cada una de las masas discretizadas.

Estos sistemas incluyen términos que representan las interacciones entre tajadas adyacentes, las fuerzas internas debidas a elasticidad y viscosidad, y las fuerzas externas, como el peso propio o la resistencia al deslizamiento en la base. Dado que estas ecuaciones rara vez admiten soluciones analíticas cerradas, especialmente cuando se consideran geometrías variables o condiciones no lineales, se hace necesario recurrir a métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas que permitan evaluar la evolución temporal del sistema.

A continuación, se presenta la formulación del modelo matemático para simular el talud mediante la formulación del principio de trabajo y energía sobre los sistemas mecánicos lineales de las analogías reológicas adoptadas. Además, se presenta la descripción del método numérico empleado para aproximar la solución al sistema no lineal de ecuaciones diferenciales que se obtiene.

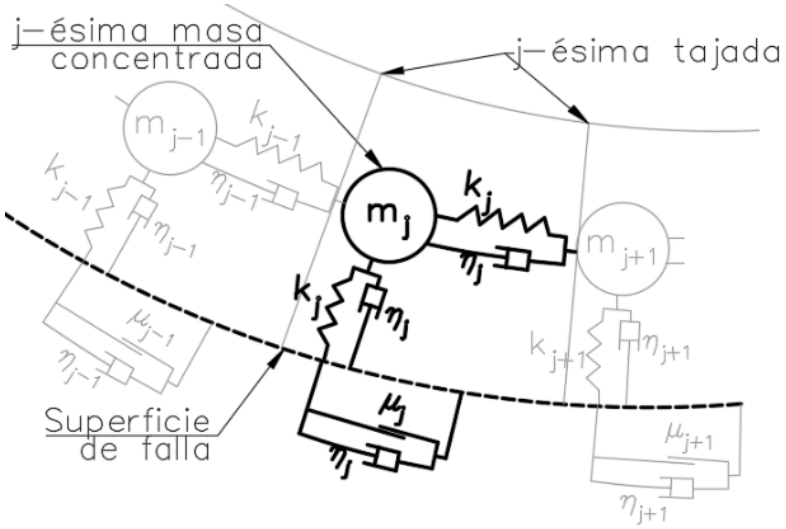
3.4.1 Analogías reológicas

La metodología para el análisis de la dinámica de taludes inestables que se desarrolla en este documento parte de asumir que la interacción entre los elementos discretos que conforman el talud: tajadas o masas discretas, se pueden modelar mediante los elementos reológicos que fueron descritos en el numeral 1.1.

La interacción entre las tajadas adyacentes se representa por elementos viscoelásticos en contacto: masa – resorte – amortiguador viscoso. En la superficie de falla se considera, de forma independiente, un sistema paralelo de un elemento friccional y un elemento viscoso para simular la interacción de las tajadas sobre la superficie de falla: masa – bloque deslizante – amortiguador viscoso. Finalmente, en sentido normal a la superficie de falla

se adopta un elemento viscoelástico mediante el cual se modela la evolución de las presiones hidrostáticas en el tiempo.

Figura 3-9: Representación esquemática de las analogías reológicas adoptadas para describir el comportamiento dinámico de j-ésima masa que compone un talud inestable.



Fuente: Elaboración propia.

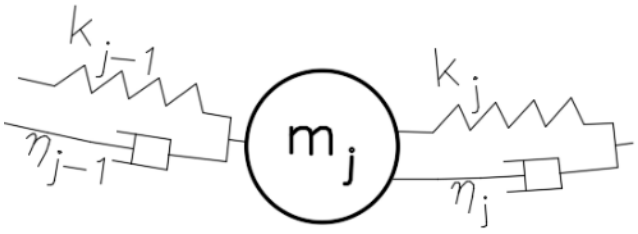
En la **Figura 3-9** se presenta el esquema de los modelos reológicos aplicados sobre la j-ésima tajada. La metodología de análisis que se desarrolla en este documento discrimina el análisis en sentido tangencial al movimiento para el cual se aplican los principios de trabajo y energía. En el sentido normal al movimiento, donde no ocurre trabajo, se aplica la Segunda Ley de Newton sobre el elemento reológico viscoelástico.

A continuación, se describe cada uno de los elementos reológicos que componen el modelo con el que se realiza el análisis de la dinámica de taludes inestables.

En la **Figura 3-10** se representa el modelo reológico viscoelástico con el cual se simula la interacción entre las tajadas adyacentes. Como se presentó en la Ecuación 1-4, en este modelo la fuerza resistente es función de la elasticidad y la viscosidad dinámica, a continuación, se reescribe esta expresión en términos del desplazamiento s_j de la j-ésima masa concentrada.

$$F^{k||\eta} = ks + \eta \frac{ds}{dt} \tag{3-37}$$

Figura 3-10: Representación esquemática del modelo reológico viscoelástico.



Fuente: Elaboración propia.

Debido a que esto elementos se asumen tangentes al movimiento del talud, estos realizarán trabajo para movimientos sobre la superficie de falla. Este trabajo $W_j^{k||\eta}$ que realiza el modelo reológico viscoelástico sobre la j-ésima masa concentrada debido a un desplazamiento ds se puede calcular como la suma de los trabajos realizados por el resorte más el trabajo realizado por el amortiguador viscoso. Esta cantidad se puede expresar mediante la Ecuación 3-38.

$$W_j^{k||\eta} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} K_j s_j ds + \int_{s_{j-1}}^{s_j} \eta_j \frac{ds_j}{dt}\, ds \tag{3-38}$$

Es conveniente expresar la segunda integral, que corresponde al trabajo que realiza el amortiguador viscoso, en términos de una sola variable, en este caso se busca comprender la evolución en el tiempo de los procesos asociados al movimiento de las masas. En consecuencia, se expresa el trabajo realizado por el amortiguador viscoso como se muestra en la Ecuación 3-39.

$$ds = \frac{ds}{dt} dt$$

$$W_{vis}^{t\to t+1} = \int_t^{t+1} \eta_j \frac{ds_{j,t}}{dt}^2\, dt \tag{3-39}$$

Nótese que la Ecuación 3-39 requiere una expresión explícita para la velocidad. Para encontrar una solución a esta integral se aplica la aproximación mediante la aplicación de la regla del trapecio con punto medio. Según esta regla, una función $f(t)$ se puede aproximar utilizando la expresión que se presenta en la Ecuación 3-40.

$$\int_t^{t+1} f(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{2}[f(t)+f(t+1)] \tag{3-40}$$

Donde; $\Delta t = (t+1) - t$. Expresando la Ecuación 3-39 de la forma propuesta por la regla de trapecio según la Ecuación 3-40 donde $f(t) = \eta_j \frac{ds_{j,t}}{dt}^2$, el trabajo realizado por un amortiguador viscoso se puede aproximar mediante la Ecuación 3-41.

$$W_{vis}^{t\to t+1} \approx \frac{\Delta t}{2}\left[\eta_j \frac{ds_{j,t}}{dt}^2 + \eta_j \frac{ds_{j,t+1}}{dt}^2\right] \tag{3-41}$$

Por lo cual, el desarrollo y la aproximación de las integrales que se presentan en la Ecuación 3-38 y que hacen referencia al trabajo realizado por el elemento reológico viscoelástico sobre la j-ésima masa concentrada, se pueden expresar según la Ecuación 3-42.

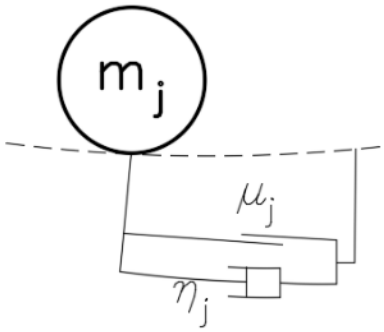
$$W_j^{k||\eta} = \frac{1}{2}K_j s^2|_{s_{j-1}}^{s_j} + \frac{\Delta t}{2}\left[\eta_j \frac{ds_{j,t}}{dt}^2 + \eta_j \frac{ds_{j,t+1}}{dt}^2\right]|_{\dot{s}_{j-1}}^{\dot{s}_j} \tag{3-42}$$

En la siguiente **Figura 3-11** se muestra el modelo reológico mediante el cual se simula la interacción de la j-ésima tajada con la superficie de falla. En particular, se emplea un modelo viscoplástico el cual es función del esfuerzo de fluencia o falla del material y el aporte del arrastre viscoso en la disipación de energía. Solucionando el equilibrio de este modelo se obtiene como resultado que la fuerza que realiza se puede expresar mediante la Ecuación 3-43.

$$F_j^{\mu||\eta} = \tau_y + \eta_j \frac{ds_j}{dt} \tag{3-43}$$

Donde; τ_y representa el umbral de la fluencia del material.

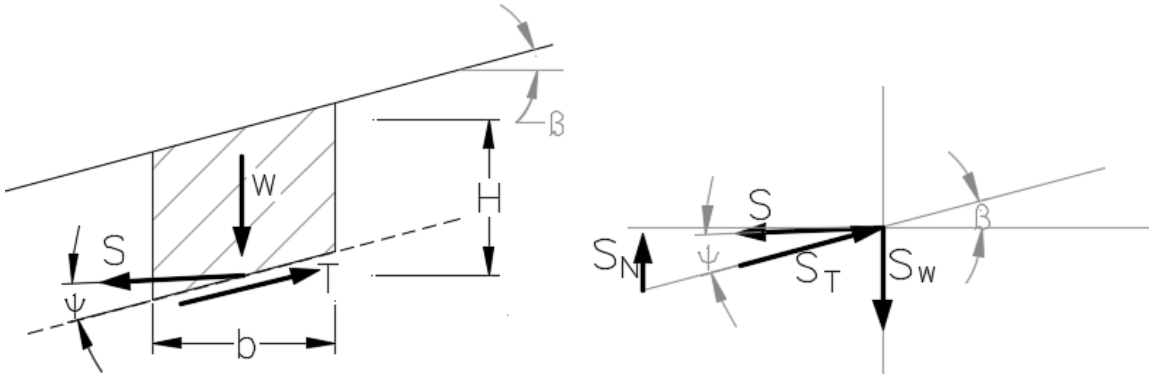
Figura 3-11: Representación esquemática del modelo reológico viscoplástico.



Fuente: Elaboración propia.

Para calcular el trabajo que realiza este modelo reológico debido al desplazamiento de la masa concentrada sobre la superficie de falla se adoptan los siguientes criterios: El elemento friccional que simula el comportamiento plástico se modela bajo el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb y, se asume que el material dilata en el primer movimiento posterior a la falla, posteriormente, este comportamiento deja de ocurrir.

Figura 3-12: Diagrama de fuerzas (izquierda) y desplazamientos (derecha) de una tajada de un talud infinito que se desliza sobre una superficie de falla plana.



Fuente: Elaboración propia.

Para el primer movimiento se asume que $\psi = \phi'$ el cual corresponde al comportamiento del material en la falla asumiendo una solución del mecanismo por límite superior, en los movimientos siguientes la masa concentrada se desliza sin dilatar sobre la superficie de falla. Por lo tanto, el trabajo que se realiza por el elemento friccional sobre la superficie de falla W_j^{τ} se puede calcular según la Ecuación 3-44.

$$W_j^{\tau} = \begin{Bmatrix} c'_j b_j s_{T\,j} \\ \left(c'_j b_j + N'_j \left(tan\varphi'_j\right)\right) s_{T\,j} \end{Bmatrix} \begin{matrix} t = t_0 \\ t > t_0 \end{matrix} \quad (3\text{-}44)$$

Donde N': es la Fuerza normal efectiva sobre la masa concentrada;
s_T: desplazamiento tangencial de la masa concentrada sobre la superficie de falla;
b_j: ancho de la j-ésima tajada.

De acuerdo con la Ecuación 3-43 el trabajo realizado por el modelo reológico viscoplástico en paralelo será igual a la suma del trabajo realizado por cada uno de los elementos mecánicos que lo componen y se puede expresar con la Ecuación 3-45.

$$W_j^{\mu||\eta} = [l_j c_j s_{Tj} + N'_j \left(tan\varphi'_j\right) s_{Tj}] \; + \frac{\Delta t}{2}\left[\eta_j \frac{ds_{j,t}}{dt}^2 + \eta_j \frac{ds_{j,t+1}}{dt}^2\right]\Big|_{\dot{s}_{j-1}}^{\dot{s}_j} \quad (3\text{-}45)$$

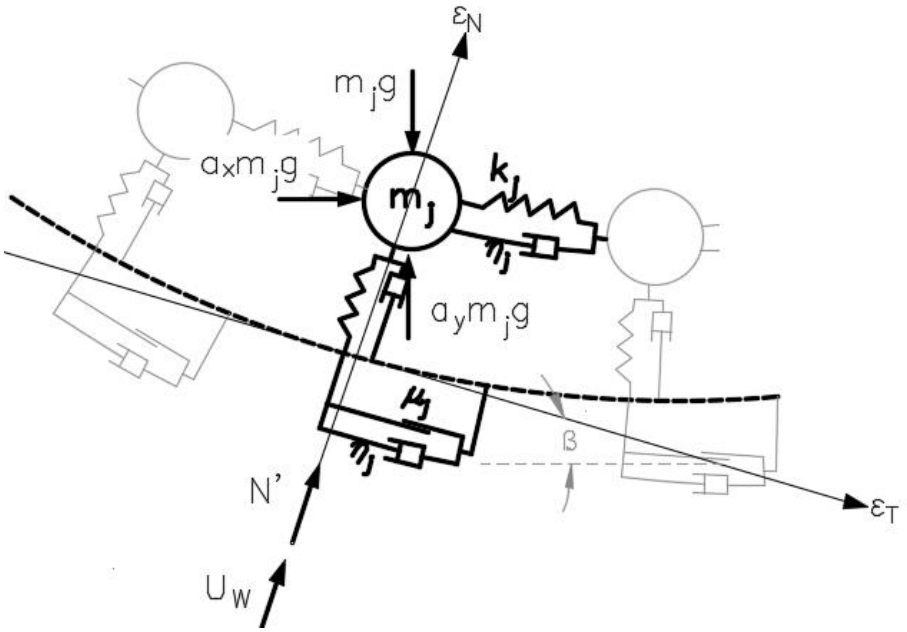
Nótese que el trabajo realizado por el elemento viscoplástico es función de la fuerza normal efectiva N'_j de la j-ésima masa concentrada. En la **Figura 3-13** se muestra el diagrama de cuerpo libre sobre esta masa. Aplicando la Segunda Ley de Newton en el sentido normal ε_N se obtiene la Ecuación 3-46 con la cual es posible calcular la fuerza normal efectiva de la masa j en un tiempo t.

$$N'_{j,t} = \frac{m_j}{R_{j,t}}\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2 + m_j g \left(cos\beta_{j,t} - a_x sen\beta_{j,t} - a_y cos\beta_{j,t}\right) - Uw_{j,t} \quad (3\text{-}46)$$

La expresión que se obtiene para calcular la fuerza normal efectiva en un momento t es función de la presión del agua en dicho momento. Debido a que la fuerza normal total que actúa sobre el elemento corresponde a la suma entre una componente proporcionada por la rigidez del suelo más una componente proporcionada por un arrastre viscoso, se puede decir que este comportamiento se asemeja al que se desarrollaría en un elemento reológico con las características del presentado en la **Figura 3-14**.

$$N_{j,t} = N'_{j,t} + Uw_{j,t} \quad (3\text{-}47)$$

Figura 3-13: Diagrama de las fuerzas externas que actúan sobre el modelo reológico de la j-ésima masa.



Fuente: Elaboración propia.

En el numeral 1.1.1 se presentó el marco conceptual de la respuesta de sistemas libres amortiguados compuestos por masa – resorte – amortiguador viscoso. Se concluyó que la respuesta del sistema presenta un comportamiento oscilatorio si el amortiguamiento es bajo, en caso contrario, la magnitud de los desplazamientos disminuye con el tiempo producto del amortiguamiento del sistema.

Si se aplica la Segunda Ley de Newton en el sistema que se presenta en la **Figura 3-14**, se obtiene la expresión que se muestra en la Ecuación 3-48.

$$m_j \frac{d^2 z}{dt^2} = P(t) \tag{3-48}$$

Donde z es el eje del sistema de referencia que se muestra en la **Figura 3-14**. La fuerza total actuante sobre la masa $P(t)$ se puede estimar resolviendo el equilibrio presentado sobre esta misma figura y las fuerzas actuantes que se presentaron en la **Figura 3-13**.

$$P(t) = F - Q_k - Q_\eta$$

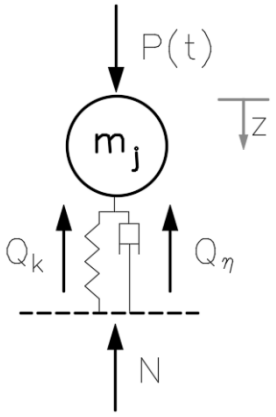
$$P(t) = m_j g\left(cos\beta_{j,t} - a_x sen\beta_{j,t} - a_y cos\beta_{j,t}\right) - kz - \eta\frac{dz}{dt} \quad (3\text{-}49)$$

Sustituyendo la Ecuación 3-49 en la Ecuación 3-48 se obtiene la Ecuación Diferencial Lineal de segundo orden con coeficientes constantes que se muestra en la Ecuación 3-50, la cual tiene una solución homogénea (presentada en la Ecuación 1-10) más una solución particular presentada en la Ecuación 3-51 para una condición que parte del reposo, es decir, velocidad y aceleración iniciales iguales a cero.

$$m_j\frac{d^2z}{dt^2} + \eta\frac{dz}{dt} + kz = m_j g\left(cos\beta_{j,t} - a_x sen\beta_{j,t} - a_y cos\beta_{j,t}\right) = F \quad (3\text{-}50)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad (1\text{-}10)$$

Figura 3-14: Representación esquemática y diagrama de fuerzas del modelo reológico viscoelástico en dirección normal a la superficie de falla.



Fuente: Elaboración propia.

$$z_p = \frac{F}{k} \quad (3\text{-}51)$$

$$z(t) = z_h(t) + z_p \quad (3\text{-}52)$$

A continuación, se presenta el desarrollo analítico para sistemas sobreamortiguados, retomando la solución encontrada en la Ecuación 1-13, la cual tiene raíces reales ya que por definición $\zeta > 1$, así la solución de la ecuación homogénea y su derivada se presentan en la Ecuación 3-53 y la Ecuación 3-54, respectivamente.

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{1-13}$$

$$z_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3-53}$$

$$\frac{dz_h}{dt}(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3-54}$$

Aplicando las condiciones iniciales, es decir, para $t = 0$, se obtiene el sistema de ecuaciones que se presenta en la Ecuación 3-55, su solución permite calcular el valor de las constantes C_1 y C_2.

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= z(0) - \frac{F}{k} \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 &= \frac{dz}{dt}(0) \end{aligned} \tag{3-55}$$

La solución del sistema de ecuaciones da como resultado los siguientes valores para las constantes que se presentan en la Ecuación 3-56.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\frac{dz}{dt}(0) - \lambda_2\left(z(0) - \frac{F}{k}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ C_2 &= \frac{\lambda_1\left(z(0) - \frac{F}{k}\right) - \frac{dz}{dt}(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned} \tag{3-56}$$

A partir del planteamiento anterior, se define la variación de las presiones del agua en el tiempo como la variación de la componente viscosa del elemento reológico, lo que se puede expresar según la Ecuación 3-57.

$$Uw_{j,t} = Uw_{j,t0} + \Delta U_{j,t} = Uw_{j,t0} + \bar{\eta}\frac{dz}{dt} \tag{3-57}$$

El signo de esta variación en las presiones dependerá del tipo de proceso de carga que se modele, es decir, si es drenado el incremento de las presiones será negativos. En un caso de carga no drenado será positivo. Esto será función del caso particular de análisis.

3.4.2 Formulación del principio de trabajo y energía

Aplicando el principio de trabajo y energía para la j-ésima masa del talud que falla entre un tiempo t y $t+1$ se obtiene la Ecuación 3-58.

$$\Delta E_{K\,j}^{t\to t+1} = W_{neto\,j}^{t\to t+1} = W_{ext\,j}^{t\to t+1} - W_{int\,j}^{t\to t+1} \tag{3-58}$$

Donde $\Delta E_{K\,j}^{t\to t+1}$ es el cambio en la energía cinética de la j-ésima masa concentrada entre un intervalo de tiempo; $W_{neto\,j}^{t\to t+1}$ el trabajo neto realizado en la j-ésima masa concentrada entre el mismo intervalo de tiempo. Este trabajo neto se asume como la diferencia entre el trabajo que realizan las fuerzas externas o solicitaciones: peso propio, efecto inercial de las fuerzas sísmicas, presiones de aguas y sobrecargas, y el trabajo que realizan las fuerzas internas: fuerzas elásticas, viscosas y friccionantes. La variación de la energía cinética entre dos tiempos consecutivos se calcula de acuerdo con la Ecuación 3-59, allí se considera el aporte en el cambio de la energía cinética debido a la rotación de las partículas.

$$\Delta E_{K\,j}^{t\to t+1} = E_{j,t+1}^{K} - E_{j,t}^{K}$$
$$\Delta E_{K\,j}^{t\to t+1} = \frac{3}{4} m_j \left(\frac{ds_{j,t+1}}{dt}\right)^2 - \frac{3}{4} m_j \left(\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2 \tag{3-59}$$

A continuación, se presentan los términos asociados al trabajo realizado que se presenta en la Ecuación 3-60.

$$W_{ext\,j}^{t\to t+1} = m_j g \left(sen\alpha_{j,t} + a_x cos\alpha_{j,t} + a_y sen\alpha_{j,t}\right) s_{j,t} \tag{3-60}$$

El trabajo interno se compone por el trabajo de las fuerzas internas realizado entre la masa j y la masa $j+1$ ($W_{int}^{j\to j+1}$), más el trabajo de las fuerzas internas realizado entre la masa

$j-1$ y la masa j ($W_{int}^{j-1\to j}$), más el trabajo que realiza la masa j al deslizarse sobre la superficie de falla (W_{int}^{SFj}). Ver las Ecuaciones 3-61, 3-62 y 3-63, respectivamente.

$$W_{int}^{j-1\to j}=\frac{1}{2}k_j\left(s_{j-1,t}-s_{j,t}\right)^2+\frac{\Delta t}{2}\eta_j\left[\left(\frac{ds_{j-1,t}}{dt}-\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds_{j-1,t+1}}{dt}-\frac{ds_{j,t+1}}{dt}\right)^2\right] \tag{3-61}$$

$$W_{int}^{j\to j+1}=\frac{1}{2}k_j\left(s_{j,t}-s_{j+1,t}\right)^2+\frac{\Delta t}{2}\eta_j\left[\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}-\frac{ds_{j+1,t}}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds_{j,t+1}}{dt}-\frac{ds_{j+1,t+1}}{dt}\right)^2\right] \tag{3-62}$$

$$W_{int}^{SF\ j}=\frac{c_jb_j}{cos\alpha_{j,t}}s_{j,t}+N'_{j,t}tan\phi_js_{j,t}+\frac{\Delta t}{2}\eta_j\left[\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds_{j,t+1}}{dt}\right)^2\right] \tag{3-63}$$

Con base en el planteamiento anterior, se puede definir la Ecuación general de trabajo y energía entre un tiempo t y un tiempo $t+1$ para la j-ésima masa del talud inestable mediante la Ecuación 3-64. La solución de esta ecuación permite calcular el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de las masas concentradas que conforman el talud en movimiento, es decir, describe la dinámica de los taludes inestables bajo las hipótesis adoptadas por este documento.

$$\frac{3}{4}m_j\left[\left(\frac{ds_{j,t+1}}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2\right]=\left\{A_{j,t}m_jgs_{j,t}\right\}-\left\{\frac{1}{2}k_j\left(s_{j-1,t}-s_{j,t}\right)^2+\frac{\Delta t}{2}\eta_j\left[\left(\frac{ds_{j-1,t}}{dt}-\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds_{j-1,t+1}}{dt}-\frac{ds_{j,t+1}}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}k_j\left(s_{j,t}-s_{j+1,t}\right)^2+\frac{\Delta t}{2}\eta_j\left[\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}-\frac{ds_{j+1,t}}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds_{j,t+1}}{dt}-\frac{ds_{j+1,t+1}}{dt}\right)^2\right]+C_js_{j,t}+\frac{m_j}{R_{j,t}}tan\phi'_j\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2s_{j,t}+m_jgB_{j,t}tan\phi'_js_{j,t}-Uw_{j,t}tan\phi'_js_{j,t}+\frac{\Delta t}{2}\eta_j\left[\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds_{j,t+1}}{dt}\right)^2\right]\right\} \tag{3-64}$$

Donde;

$$A_{j,t}=sen\alpha_{j,t}+a_xcos\alpha_{j,t}+a_ysen\alpha_{j,t} \tag{3-65}$$

$$B_{j,t}=cos\beta_{j,t}-a_xsen\beta_{j,t}-a_ycos\beta_{j,t} \tag{3-66}$$

$$C_{j,t}=\frac{c_jb_j}{cos\alpha_{j,t}} \tag{3-67}$$

Nótese que al aplicar la Ecuación 3-64 sobre las n masas concentradas en las que se discretizan los taludes de análisis se obtiene un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, su solución requiere la aplicación de un método numérico. Este será descrito en la siguiente sección de este estudio.

3.5 Método numérico

En este trabajo se adopta el método de las diferencias finitas, el cual permite aproximar derivadas mediante expresiones algebraicas que relacionan los valores de una variable en diferentes puntos del dominio o del tiempo. Según Burden y Faires (2011), la derivada de una función $f(t)$ respecto al tiempo puede aproximarse, por ejemplo, mediante un esquema hacia adelante como se muestra en la Ecuación 3-68.

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{3-68}$$

O mediante un esquema hacia atrás como se muestra en la Ecuación 3-69.

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t)-f(t-\Delta t)}{\Delta t} \tag{3-69}$$

Y, de forma más precisa, con un esquema centrado como se muestra en la Ecuación 3-70.

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t)-f(t-\Delta t)}{2\Delta t} \tag{3-70}$$

El uso de estos esquemas puede clasificarse según la forma en que se resuelve el sistema de ecuaciones resultante. Los esquemas hacia adelante y centrados se consideran explícitos si la variable desconocida en el tiempo futuro se puede expresar directamente en función de valores conocidos del paso anterior. Por otra parte, un esquema es implícito cuando la variable en el nuevo paso de tiempo aparece en ambos lados de la ecuación, lo que requiere resolver un sistema algebraico por iteraciones. (Chapra y Canale, 2010; Smith, 1985)

3.5.1 Ecuación del movimiento para un tiempo t

En el presente modelo se utiliza un esquema implícito con aproximación hacia adelante, dado que este enfoque proporciona estabilidad numérica frente a grandes variaciones repentinas del sistema y permite integrar de manera eficiente las ecuaciones diferenciales resultantes de la formulación energética. La implementación de diferencias finitas permite así estimar la evolución de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en función del tiempo, así como evaluar la energía disipada en el sistema.

Esta metodología también facilita la incorporación de distintas condiciones iniciales y de frontera, lo cual es necesario para el análisis de escenarios de inestabilidad bajo distintos parámetros físicos y geométricos. La Ecuación 3-71 y la Ecuación 3-72 muestran la expresión para la velocidad y la velocidad a la segunda potencia que se emplearán para expresar la Ecuación 3-64 en términos de los desplazamientos.

$$\frac{ds_{j,t}}{dt} = \frac{s_{j,t+1} - s_{j,t}}{\Delta t} \tag{3-71}$$

$$\left(\frac{ds_{j,t}}{dt}\right)^2 = \frac{\left(s_{j,t+1}\right)^2 - 2s_{j,t+1}s_{j,t} + \left(s_{j,t}\right)^2}{\Delta t^2} \tag{3-72}$$

Sustituyendo la Ecuación 3-71 y la Ecuación 3-72 en la Ecuación 3-64 se obtiene la siguiente Ecuación 3-73 que describe la dinámica de la j-ésima masa del talud bajo la formulación del principio de trabajo y energía mediante las analogías reológicas empleadas y que se expresa con un esquema de diferencias finitas.

$$-\frac{\eta_j}{2\Delta t}s_{j-1,t+1}^2 + \frac{\eta_j}{\Delta t}\left(s_{j-1,t} - s_{j,t}\right)s_{j-1,t+1} + \left(-\frac{3}{4}\frac{m_j}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)s_{j,t+1}^2 + \left[\left(-\frac{3}{2}\frac{m_j}{\Delta t^2} - 3\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)s_{j,t} - \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j-1,t} - \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j+1,t}\right]s_{j,t+1} - \frac{\eta_j}{2\Delta t}s_{j+1,t+1}^2 + \frac{\eta_j}{\Delta t}\left[s_{j+1,t} - s_{j,t}\right]s_{j+1,t+1} + \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j-1,t+1}s_{j,t+1} + \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j,t+1}s_{j+1,t+1} + D_{j,t} = 0 \tag{3-73}$$

Donde;

$$D_{j,t} = \left(-\frac{3}{2}\frac{m_j}{\Delta t^2} + 3\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)s_{j,t-1}s_{j,t} + \left(\frac{3}{4}\frac{m_j}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)s_{j,t-1}^2 + \left(A_{j,t}m_j g - C_{j,t} - m_j g B_{j,t}tan\phi'_j - Uw_{j,t}tan\phi'_j\right)s_{j,t} + \left(-\frac{1}{2}k_j - \frac{\eta_j}{\Delta t}\right)\left(s_{j-1,t}^2 + s_{j+1,t}^2\right) + \left(k_j + 2\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)\left(s_{j-1,t}s_{j,t} - s_{j,t}^2 + s_{j+1,t}s_{j,t}\right) + \left(\frac{-\eta_j}{2\Delta t}\right)\left(s_{j-1,t-1}^2 + s_{j+1,t-1}^2\right) + \frac{\eta_j}{\Delta t}\left(s_{j-1,t}s_{j-1,t-1} - s_{j-1,t}s_{j,t-1} - s_{j-1,t-1}s_{j,t} + s_{j-1,t-1}s_{j,t-1} -\right.$$

$$s_{j+1,t-1}s_{j,t} - s_{j+1,t}s_{j,t-1} + s_{j+1,t-1}s_{j,t-1} + s_{j+1,t-1}s_{j+1,t}\big) + \frac{m_j tan\phi'_j}{R_{j,t}\Delta t^2} s_{j,t}\big(-s_{j,t}^2 + 2s_{j,t}s_{j,t-1} - s_{j,t-1}^2\big) \quad (3\text{-}74)$$

Para expresar matricialmente este sistema, se definen las variables X, Y y Z; y se muestra en la Ecuación 3-75.

$$X = \frac{\eta_j}{\Delta t}\big(s_{j-1,t} - s_{j,t}\big)$$

$$Y = \left[\left(-\frac{3}{2}\frac{m_j}{\Delta t^2} - 3\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)s_{j,t} - \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j-1,t} - \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j+1,t}\right] + \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j-1,t+1} + \frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j+1,t+1}$$

$$Z = \frac{\eta_j}{\Delta t}\left[s_{j+1,t} - s_{j,t}\right]$$

$$\left[X - \frac{\eta_j}{2\Delta t}s_{j-1,t+1} \quad Y + \left(-\frac{3}{4}\frac{m_j}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)s_{j,t+1} \quad Z - \frac{\eta_j}{2\Delta t}s_{j+1,t+1}\right]\begin{Bmatrix} s_{j-1,t+1} \\ s_{j,t+1} \\ s_{j+1,t+1} \end{Bmatrix} + D_{j,t} = 0 \quad (3\text{-}75)$$

Nótese que la Ecuación 3-75 es un sistema no lineal de ecuaciones, por lo tanto, se requiere aplicar un método numérico para aproximar su solución. En este trabajo se empleará el Método de Newton – Raphson el cual es una técnica numérica iterativa ampliamente utilizada para encontrar soluciones aproximadas de sistemas de ecuaciones no lineales.

Su aplicación es especialmente relevante en problemas de ingeniería en los que la formulación matemática, como en este caso, da lugar a expresiones no lineales en las variables desconocidas. El objetivo del método es encontrar el valor del vector $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisface un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbb{F}(x) = 0$, donde $\mathbb{F}$ es una función vectorial no lineal de n componentes (Burden y Faires, 2011)

Este método parte de una suposición inicial de la solución $\mathbb{x}^0$ que genera una secuencia de aproximaciones $\mathbb{x}^k$ mediante la Ecuación 3-76.

$$\mathbb{x}^{k+1} = \mathbb{x}^k - \left[\mathcal{J}\left(\mathbb{x}^k\right)\right]^{-1}\mathbb{F}\left(\mathbb{x}^k\right) \quad (3\text{-}76)$$

Donde $\mathcal{J}(\mathbb{x}^k)$ es la matriz jacobiana de $\mathbb{F}$, es decir, la matriz de derivadas parciales de cada componente de $\mathbb{F}$ respecto a cada variable. Esta matriz representa la mejor aproximación lineal local de $\mathbb{F}$ en el entorno de $\mathbb{x}^k$. En cada iteración, el método linealiza el sistema alrededor de la solución actual y resuelve el sistema lineal resultante para actualizar el valor de las incógnitas. El proceso se repite hasta que se cumple un criterio de convergencia basado en la norma del residuo $||\ \mathbb{F}(\mathbb{x}^k)||$ o en la magnitud del incremento $||\ \mathbb{x}^{k+1} - \mathbb{x}^k||$.

El método de Newton – Raphson posee convergencia cuadrática cerca de la solución, lo que significa que el error se reduce significativamente en cada paso si la estimación inicial está suficientemente cerca del valor real (Chapra y Canale, 2010). No obstante, su implementación requiere el cálculo de la matriz jacobiana y su inversión o resolución del sistema lineal asociado en cada iteración, lo cual puede ser costoso en términos computacionales para sistemas grandes. Además, si el punto inicial no está bien elegido, el método puede divergir o converger a una solución no deseada.

Por las razones expuestas anteriormente, en la práctica es común emplear variantes como el método de Newton – Raphson modificado, el uso de esquemas de amortiguamiento o el acoplamiento con estrategias de homotopía (Smith, 1985).
En el contexto de la solución de los sistemas que se desarrollan en este trabajo, a continuación, se definen los términos aplicados al método de Newton – Raphson que se emplean en la aproximación del cálculo de los desplazamientos en cada tiempo t mediante la Ecuación 3-77, la Ecuación 3-78 y la Ecuación 3-79.

$$\mathbb{F}(s^t) = \left[X - \frac{\eta_j}{2\Delta t} s_{j-1,t+1} \quad Y + \left(-\frac{3}{4}\frac{m_j}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\Delta t}\right) s_{j,t+1} \quad Z - \frac{\eta_j}{2\Delta t} s_{j+1,t+1}\right] \tag{3-77}$$

$$\mathcal{J}(s^t) = \left[-\frac{\eta_j}{2\Delta t} \quad \left(-\frac{3}{4}\frac{m_j}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\Delta t}\right) \quad -\frac{\eta_j}{2\Delta t}\right] \tag{3-78}$$

$$s^{t+1} = s^t - [\mathcal{J}(s^t)]^{-1}\left[\mathbb{F}(s^t) + D_{j,t}(s^t)\right] \tag{3-79}$$

Las condiciones de frontera en el dominio se aplican sobre la primera y la última masa concentrada, para este caso se asume la existencia de una masa virtual en las posiciones $j = -1$ y $j = n + 1$. Para el cual, se adopta la hipótesis de que la velocidad relativa entre la masa $j = -1$ y $j = 1$ y la masa en las posiciones $j = n - 1$ y $j = n + 1$ es igual a cero. Por lo tanto, sobre las fronteras se cumple que $s_{j-1} = s_{j+1}$ con $j = 0$ y $j = n$. Esta condición particulariza el sistema de ecuaciones para la primera y la última masa concentrada, a continuación, se muestra el sistema a resolver en estas posiciones para un tiempo t cualquiera.

Masa concentrada en la posición $j = 0$:

$$\left[Y^0 + \left(-\frac{3}{4}\frac{m_0}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)s_{0,t+1} \quad Z^0 - \frac{\eta_0}{\Delta t}s_{1,t+1}\right]\begin{Bmatrix} s_{0,t+1} \\ s_{1,t+1} \end{Bmatrix} + D_{0,t} = 0 \tag{3-80}$$

Donde;

$$Y^0 = \left(\frac{3}{2}\frac{m_0}{\Delta t^2} + 3\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)s_{0,t} - 2\frac{\eta_0}{\Delta t}s_{1,t} \tag{3-81}$$

$$Z^0 = 2\frac{\eta_0}{\Delta t}\left[\left(s_{1,t} - s_{0,t}\right) + s_{0,t+1}\right] \tag{3-82}$$

$$D_{0,t} = \left(-\frac{3}{2}\frac{m_0}{\Delta t^2} + 3\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)s_{0,t-1}s_{0,t} + \left(\frac{3}{4}\frac{m_0}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)s_{0,t-1}^2 + \left(A_{0,t}m_0 g - C_{0,t} - m_0 g B_{0,t} tan\phi'_0 + Uw_{0,t} tan\phi'_0\right)s_{0,t} + \left(-k_0 - 2\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)s_{1,t}^2 + \left(k_0 + 2\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)\left(2s_{1,t}s_{0,t} - s_{0,t}^2\right) + \left(-\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)s_{1,t-1}^2 + \left(\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)\left(2s_{1,t-1}s_{1,t} - 2s_{1,t}s_{0,t-1} - 2s_{1,t-1}s_{0,t} + 2s_{1,t-1}s_{0,t-1}\right) + \frac{m_0 tan\phi'_0}{R_{0,t}\Delta t^2}s_{0,t}\left(-s_{0,t}^2 + 2s_{0,t}s_{0,t-1} - s_{0,t-1}^2\right) - \frac{\eta_0}{\Delta t}s_{0,t}^2 \tag{3-83}$$

Masa concentrada en la posición $j = n$:

$$\left[X^n - \frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n-1,t+1} \quad Y^n + \left(-\frac{3}{4}\frac{m_n}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n,t+1}\right]\begin{Bmatrix} s_{n-1,t+1} \\ s_{n,t+1} \end{Bmatrix} + D_{n,t} = 0 \tag{3-84}$$

Donde;

$$X^n = 2\frac{\eta_0}{\Delta t}\left(s_{n-1,t} - s_{n,t}\right) \tag{3-85}$$

$$Y^n = \left(\frac{3}{2}\frac{m_n}{\Delta t^2} + 3\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n,t} - 2\frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n-1,t} + 2\frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n-1,t+1} \quad (3\text{-}86)$$

$$D_{n,t} = \left(-\frac{3}{2}\frac{m_n}{\Delta t^2} + 3\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n,t-1}s_{n,t} + \left(\frac{3}{4}\frac{m_n}{\Delta t^2} - \frac{3}{2}\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n,t-1}^2 + \left(A_{n,t}m_n g - C_{n,t} - m_n g B_{n,t} tan\phi'_n + Uw_{n,t} tan\phi'_n\right)s_{n,t} + \left(-k_n - 2\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n-1,t}^2 + \left(k_n + 2\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)\left(2s_{n-1,t}s_{n,t} - s_{n,t}^2\right) + \left(-\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n-1,t-1}^2 + \left(\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)\left(2s_{n-1,t-1}s_{n-1,t} - 2s_{n-1,t}s_{n,t-1} - 2s_{n-1,t-1}s_{n,t} + 2s_{n-1,t-1}s_{n,t-1}\right) + \frac{m_n tan\phi'_n}{R_{n,t}\Delta t^2}s_{n,t}\left(-s_{n,t}^2 + 2s_{n,t}s_{n,t-1} - s_{n,t-1}^2\right) - \frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n,t}^2 \quad (3\text{-}87)$$

3.5.2 Primer movimiento

Dado que el planteamiento de la Ecuación 3-75, que describe la dinámica del talud inestable, depende de los desplazamientos en un tiempo $t-1$ es necesario particularizar el sistema de ecuaciones para el primer movimiento donde $t = t^1$. Este movimiento corresponde al cambio de la posición de reposo a una condición activa de desplazamientos. En tal caso, las posiciones (s^0) corresponden a la posición de las masas concentradas sobre la superficie de falla al momento inicial, es decir, antes de que el talud se mueva. Además, la condición de frontera más relevante en este tiempo es la partida del reposo, es decir, la velocidad en este tiempo es nula. De manera que las condiciones de frontera iniciales se pueden resumir con la Ecuación 3-88.

$$\frac{ds_{j,t}}{dt} = \frac{s_{j,t+1} - s_{j,t}}{\Delta t} = \frac{ds_{j,t-1}}{dt} = \frac{s_{j,t} - s_{j,t-1}}{\Delta t} = 0 \rightarrow s_{j,t+1} = s_{j,t-1} \quad (3\text{-}88)$$

De esta manera, la Ecuación 3-75 para el primer movimiento $t = t^0$ bajo la condición de frontera expuesta mediante la Ecuación 3-88 queda de la forma que se presenta en la Ecuación 3-89 con la definición de las variables X, Y y Z.

$$X = 2\frac{\eta_j}{\Delta t}\left(s_{j-1,t} - s_{j,t}\right)$$

$$Y = \left[2\frac{m_j tan\phi'_j}{R_{j,t}\Delta t^2}s_{j,t}^2 + 6\frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j,t} - 2\frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j-1,t} - 2\frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j+1,t}\right] + 2\frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j-1,t+1} + 2\frac{\eta_j}{\Delta t}s_{j+1,t+1}$$

$$Z = 2\frac{\eta_j}{\Delta t}\left[s_{j+1,t} - s_{j,t}\right]$$

$$\left[X - \frac{\eta_j}{\Delta t} s_{j-1,t+1} \quad Y + \left(-3\frac{\eta_j}{\Delta t} - \frac{m_j\, tan\phi'_j}{R_{j,t}\Delta t^2} s_{j,t}\right) s_{j,t+1} \quad Z - \frac{\eta_j}{\Delta t} s_{j+1,t+1}\right] \begin{Bmatrix} s_{j-1,t+1} \\ s_{j,t+1} \\ s_{j+1,t+1} \end{Bmatrix} + D^0_{j,t} = 0 \quad (3\text{-}89)$$

Donde;

$$D^0_{j,t} = \left(A_{j,t} m_j g - C_{j,t} - m_j g B_{j,t} tan\phi'_j + Uw_{j,t} tan\phi'_j\right) s_{j,t} + \left(-\frac{1}{2}k_j - \frac{\eta_j}{\Delta t}\right)\left(s^2_{j-1,t} + s^2_{j+1,t}\right) + \left(k_j + 2\frac{\eta_j}{\Delta t}\right)\left(s_{j-1,t} s_{j,t} - s^2_{j,t} + s_{j+1,t} s_{j,t}\right) - \left(\frac{-\eta_j}{\Delta t}\right) s^2_{j,t} - \frac{m_j tan\phi'_j}{R_{j,t}\Delta t^2} s^3_{j,t} \quad (3\text{-}90)$$

De acuerdo con este planteamiento, el jacobiano del sistema de ecuaciones presentado anteriormente corresponde al presentado mediante la Ecuación 3-91.

$$\mathcal{J}(s^0) = \left[-\frac{\eta_j}{\Delta t} \quad \left(-\frac{m_j tan\phi'_j}{R_{j,t}\Delta t^2} s_{j,t} - \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\Delta t}\right) \quad -\frac{\eta_j}{\Delta t}\right] \quad (3\text{-}91)$$

Las condiciones de frontera en el dominio, en la primera y la última masa concentrada, obedece al mismo planteamiento adoptado para un tiempo t cualquiera. A continuación, se presenta el planteamiento matemático para las condiciones de borde en el primer movimiento.

<u>Masa concentrada en la posición $j = 0$:</u>

$$\left[Y^0 + \left(-\frac{m_0 tan\phi'_0}{R_{0,t}\Delta t^2} s_{0,t} - 3\frac{\eta_0}{\Delta t}\right) s_{0,t+1} \quad Z^0 - 2\frac{\eta_0}{\Delta t} s_{1,t+1}\right] \begin{Bmatrix} s_{0,t+1} \\ s_{1,t+1} \end{Bmatrix} + D_{0,t} = 0 \quad (3\text{-}92)$$

Donde;

$$Y^0 = 2\frac{m_0 tan\phi'_0}{R_{0,t}\Delta t^2} s^2_{0,t} - 4\frac{\eta_0}{\Delta t} s_{1,t} + 6\frac{\eta_0}{\Delta t} s_{0,t} \quad (3\text{-}93)$$

$$Z^0 = 4\frac{\eta_0}{\Delta t}\left[\left(s_{1,t} - s_{0,t}\right) + s_{0,t+1}\right] \quad (3\text{-}94)$$

$$D_{0,t} = \left(A_{0,t} m_0 g - C_{0,t} - m_0 g B_{0,t} tan\phi'_0 + Uw_{0,t} tan\phi'_0\right) s_{0,t} + \left(-k_0 - 2\frac{\eta_0}{\Delta t}\right) s^2_{1,t} + \left(k_0 + 2\frac{\eta_0}{\Delta t}\right)\left(2 s_{1,t} s_{0,t} - s^2_{0,t}\right) - \frac{m_0 tan\phi'_0}{R_{0,t}\Delta t^2} s^3_{0,t} - \frac{\eta_0}{\Delta t} s^2_{0,t} \quad (3\text{-}95)$$

Masa concentrada en la posición $j = n$:

$$\left[X^n - 2\frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n-1,t+1} \quad Y^n + \left(-\frac{m_n tan\phi'_n}{R_{n,t}\Delta t^2}s_{n,t} - 3\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n,t+1}\right]\begin{Bmatrix} s_{n-1,t+1} \\ s_{n,t+1} \end{Bmatrix} + D_{n,t} = 0 \tag{3-96}$$

Donde;

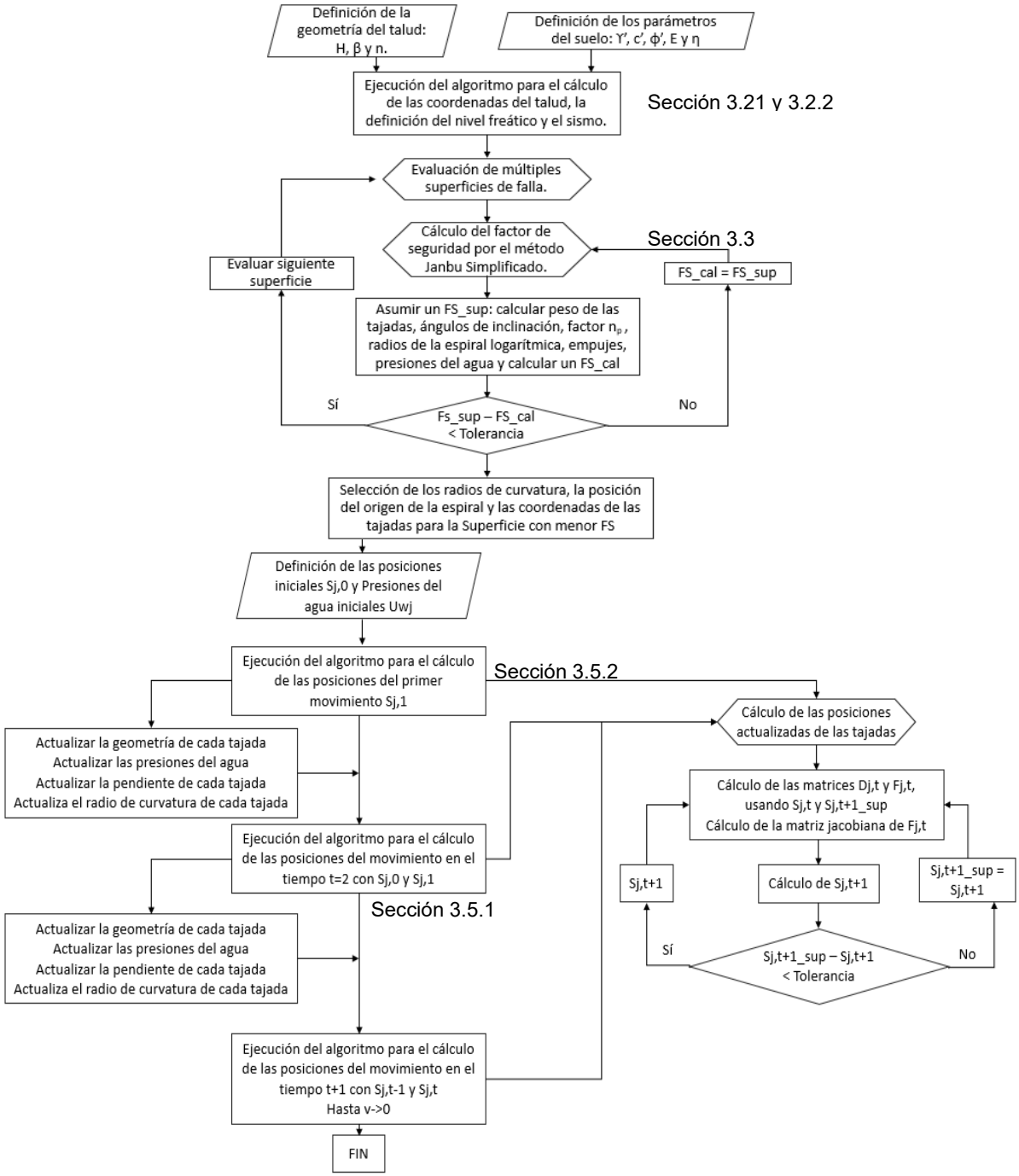
$$X^n = 4\frac{\eta_n}{\Delta t}\left(s_{n-1,t} - s_{n,t}\right) \tag{3-97}$$

$$Y^n = 2\frac{m_n tan\phi'_n}{R_{n,t}\Delta t^2}s_{n,t}^2 - 4\frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n-1,t} + 6\frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n,t} + 4\frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n-1,t+1} \tag{3-98}$$

$$D_{n,t} = \left(A_{n,t}m_n g - C_{n,t} - m_n g B_{n,t} tan\phi'_n + Uw_{n,t} tan\phi'_n\right)s_{n,t} + \left(-k_n - 2\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)s_{n-1,t}^2 + \left(k_n + 2\frac{\eta_n}{\Delta t}\right)\left(2s_{n-1,t}s_{n,t} - s_{n,t}^2\right) - \frac{m_n tan\phi'_n}{R_{n,t}\Delta t^2}s_{n,t}^3 - \frac{\eta_n}{\Delta t}s_{n,t}^2 \tag{3-99}$$

Con la formulación matemática que se ha descrito anteriormente, se aplica la metodología que se resume con el flujo-diagrama que se presenta en la **Figura 3-15**.

Figura 3-15: Diagrama de flujo con la metodología propuesta para realizar el análisis de la dinámica de taludes inestables.



Fuente: Elaboración propia.

4. Resultados y análisis de sensibilidad

4.1 Casos de estudio

En el contexto del análisis de la dinámica de taludes mediante modelos reológicos, la selección de escenarios representativos constituye una fase crucial para evaluar la respuesta del sistema ante variaciones en los parámetros que controlan su comportamiento mecánico. Los escenarios evaluados en este documento recogen un conjunto estructurado de configuraciones geométricas y propiedades físico-mecánicas que fueron utilizadas como base para el desarrollo de un análisis paramétrico orientado a entender la influencia de la rigidez y la viscosidad del medio en la evolución temporal de la inestabilidad. Esta estrategia permite examinar el efecto combinado de dichos parámetros sobre variables clave como la velocidad, la aceleración y el desplazamiento del frente de ruptura, aspectos que serán discutidos más adelante.

Desde un punto de vista geométrico, se plantearon dos alturas representativas del talud: 10 m y 15 m, seleccionadas para representar masas inestables de baja a media magnitud, las cuales son frecuentes en contextos urbanos y de infraestructura lineal en general. La inclinación principal del talud (β1) varía entre 30°, 40° y 45°, mientras que se considera una inclinación superior (β2) constante de 10°, que corresponde a una terraza superior. Estas combinaciones de geometría permiten analizar no sólo el efecto de la altura, sino también cómo la pendiente influye en la magnitud de las fuerzas desestabilizadoras y, por tanto, en la respuesta dinámica del sistema.

En cuanto a los parámetros físicos, se adoptaron valores característicos tanto de resistencia al corte como de propiedades reológicas. Los parámetros de resistencia incluyen un ángulo de fricción efectivo $\phi' = 35°$, una cohesión efectiva $c' = 10$ kPa y una densidad total $\rho = 1800$ kg/m^3 los cuales se pueden considerar parámetros típicos de los suelos en el contexto local. Además, se adoptó un coeficiente de aceleración seudo

estática a=0,10g, la cual representa un nivel moderado de solicitación sísmica. Estos valores permiten situar el sistema en una condición de estabilidad inicial comprometida, adecuada para la posterior aplicación del principio de trabajo y energía en el análisis de su evolución dinámica bajo condiciones reológicas definidas.

Los parámetros reológicos, que constituyen el eje central del análisis, incluyen la rigidez representada con el módulo de elasticidad E y la viscosidad dinámica η, los cuales fueron sistemáticamente variados en un rango amplio para abarcar distintos regímenes de deformación. La rigidez se varió entre 10 kPa y 10^4 kPa, mientras que la viscosidad abarcó desde 10^4 kPa·s hasta 10^6 kPa·s. Esta selección cubre desde comportamientos viscoelásticos blandos y altamente deformables hasta condiciones cercanas al régimen cuasi-estable.

Tabla 4-1: Selección de parámetros para casos de análisis.

Variable	**Valores**				
H(m)	10			15	
β_1**(°)**	30		40		45*
β_2**(°)**	10				
E (kPa)	10	100	500	1000	1000
η **(kPa.s)**	10^4	5x10^4*	10^5	5x10^5*	10^6
ϕ**' (°)**	35				
C' (kPa)	10				
a	0,10g				

* Condiciones simuladas para el talud de H=10m
Fuente: Elaboración propia.

En la **Tabla 4-1** se muestran las variables que dominan el comportamiento global del sistema y la variación simulada en este estudio, orientado a evaluar el impacto aislado y combinado de las propiedades geométricas y reológicas. Esto se enmarca dentro de la metodología general de análisis de sensibilidad, la cual permite identificar cuáles son los parámetros dominantes en el comportamiento dinámico del sistema y cómo varían los resultados esperados en función de su modificación. En particular, se pretende observar cómo las relaciones entre la energía disponible y la resistencia interna del sistema, asociadas a los parámetros E y η, determinan la velocidad máxima alcanzada por la masa inestable, el desplazamiento final y la atenuación o amplificación de la aceleración del sistema.

Este tipo de análisis resulta particularmente relevante cuando se busca establecer rangos de comportamiento para diferentes tipos de movimientos en masa. En el numeral 3.2.3, se presenta la **Tabla 3-3** que clasifica los deslizamientos en función de la velocidad, esto permitió relacionar rangos típicos de parámetros viscoelásticos con tipos de movimiento. La presente selección de escenarios toma como referencia dichos rangos, con el objetivo de validar si los modelos reológicos empleados son capaces de reproducir comportamientos consistentes con esta clasificación teórica. La marcha en el tiempo de cada uno de los casos de estudio se realizó hasta que se cumpla alguna de las dos condiciones siguientes: velocidad del frente nula o con tendencia a cero o la aceleración del frente es nula o con tendencia a cero. Esta última condición no implica la detención completa de la masa inestable.

4.2 Desplazamiento del talud

Una componente fundamental en la evaluación del riesgo por movimientos en masa está asociada con la caracterización de la amenaza que, según Hungr et al. (2005), debe predecir el mecanismo de falla y la cuantificación del desplazamiento de la masa inestable: distancia de viaje y velocidad. Estos parámetros, que permiten estimar la magnitud de los procesos, no son fijos; varían en función del tipo de proceso que se estudia. En la **Tabla 4-2** se muestran los parámetros definidos por la *Australian Geomechanics Society* (2007) y que son adoptados por la *Guía metodológica para estudios de amenaza, vulnerabilidad y riesgo por movimientos en masa* elaborada por el Servicio Geológico Colombiano, SGC (2015).

Tabla 4-2: Parámetros para definir la magnitud de los movimientos en masa

Tipo de proceso	**Parámetros que definen la magnitud**
Deslizamientos	Velocidad y volumen movilizado
Caídas	Energía cinética
Deslizamientos, movimientos lentos	Desplazamientos totales
Movimientos lentos	Desplazamientos diferenciales
Flujos	Caudal pico por ancho ($m^3/m/s$)

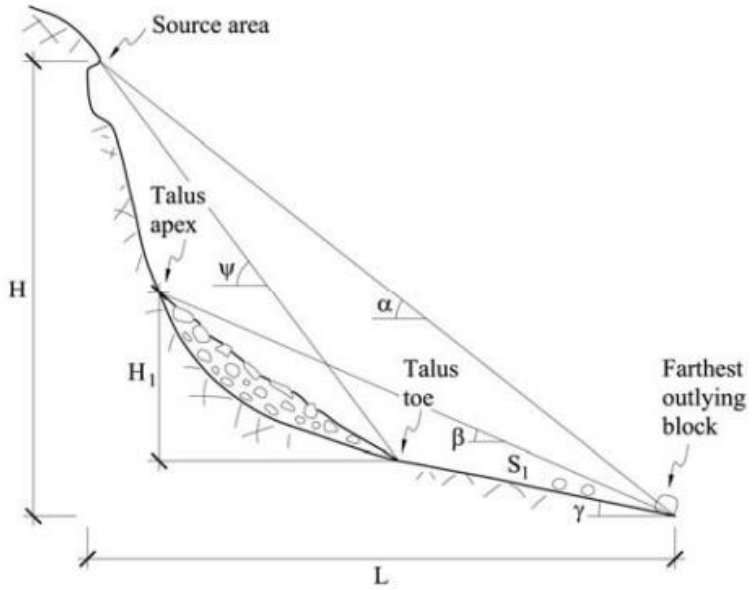
Fuente: Tomado de AGS (2007) en SGC (2015)

De acuerdo con esta tabla, los casos que se estudian en este documento pueden ser caracterizados bajo el análisis de la velocidad, el volumen movilizado y los desplazamientos totales y diferenciales. Por lo tanto, en esta sección se muestran los resultados asociados al cálculo de la distancia de viaje de los escenarios simulados y al desplazamiento del frente de la masa inestable, además, se estima el volumen de la masa movilizada para ampliar la caracterización de los procesos modelados.

4.2.1 Distancia de viaje

La distancia de viaje de un deslizamiento se define como la proyección horizontal de la trayectoria recorrida por el material desde el escarpe principal hasta el extremo distal de la zona donde se depositan los materiales movilizados. La **Figura 4-1** presenta la definición de las variables geométricas para definir la distancia de viaje L. Autores como Hungr et al. (2005) y Wong y Ho (1996) destacan la importancia de esta distancia y su uso en el análisis del riesgo por deslizamientos, ya que se considera un parámetro fundamental para evaluar la movilidad de deslizamientos y definir áreas potencialmente afectadas.

Figura 4-1: Variables geométricas para la definición de la distancia de viaje. H: Altura de caída, L: Distancia de viaje, α: Ángulo de viaje, β: Ángulo de sombra, Ψ: Ángulo de fuente, Ɣ: Ángulo del substrato y S_1: Distancia de sombra.



Fuente: Hungr et al. (2005)

En este trabajo, la distancia de viaje se evaluará comparando los resultados del modelo dinámico reológico con la metodología del bloque rígido deslizado desarrollada por Yue

(2014) que presenta el SGC (2015) y con los registros presentados por Moncayo y Ávila (2022) en el estudio *Landslide travel distances in Colombia from national landslide database analysis*. Dicho estudio utilizó datos de campo (H, L, volumen y pendiente) de 123 deslizamientos en Colombia, aplicando modelos estadísticos de regresión para estimar la distancia de viaje y analizar su variación con parámetros geométricos. Esta comparación permitirá validar si las distancias obtenidas con el modelo que se desarrolla en este trabajo reproducen tendencias coherentes con los datos empíricos recopilados a nivel nacional.

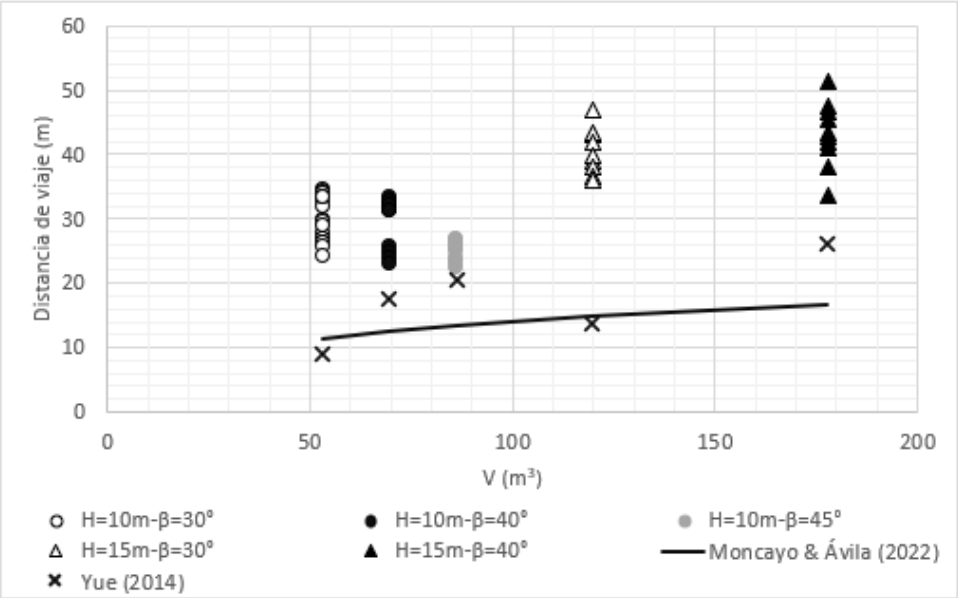
Análisis de la relación entre el volumen del deslizamiento y la distancia de viaje:

En primer lugar, se analizará la relación entre las distancias de viaje y el volumen del material deslizado. Este último se puede estimar a partir de los modelos ya que se conoce la magnitud de las masas concentradas que conforman los taludes de análisis y la densidad del material simulado. Los resultados se muestran mediante la **Figura 4-2**, que presenta la gráfica de la relación entre el volumen de la masa inestable V y la distancia de viaje para diferentes escenarios de modelación: combinaciones de altura H e inclinación del talud β.

En total se realizaron 60 simulaciones combinando los parámetros reológicos y las geometrías de los taludes. Sus resultados, obtenidos a partir del modelo dinámico basado en analogías reológicas, se comparan con dos referencias relevantes: las estimaciones de Yue (2014), derivadas del método energético del bloque deslizante, y la curva empírica de Moncayo y Ávila (2022), ajustada a datos reales de deslizamientos en Colombia.

Las simulaciones muestran una tendencia general hacia distancias de viajes mayores en comparación con ambas referencias. Para el caso de H=10 m y β=30°, la distancia promedio simulada es cercana a 30 m, lo que representa una diferencia cercana al 231% con respecto a Yue (2014) y del 171% con Moncayo y Ávila (2022). Este patrón se mantiene para otras combinaciones de altura e inclinación, aunque con variaciones en la magnitud del exceso. Por ejemplo, para H=10 m y β=40°, las diferencias se reducen al 32% y 103%, respectivamente. Mientras que para H=15 m y β=30° las diferencias vuelven a aumentar a 202% y 180%, respectivamente. Y para H=15 m y β=40°los valores alcanzan el 76% y 175% diferencia.

Figura 4-2: Relación entre la distancia de viaje y el volumen del deslizamiento.



Fuente: Elaboración propia.

Una explicación para este comportamiento está asociada a la interacción entre componentes elásticos y viscosos en los modelos reológicos, los cuales retienen una mayor cantidad de energía cinética durante el deslizamiento. Esto contrasta con el método de Yue (2014), basado en una aproximación energética simplificada donde se supone que una fracción significativa de la energía potencial se disipa inmediatamente en forma de fricción. En consecuencia, este método tiende a subestimar las distancias de viaje cuando se comparan con modelos que permiten una representación explícita de la evolución temporal del movimiento.

El modelo de Yue (2014) asume que el bloque deslizante alcanza rápidamente un estado de equilibrio dinámico entre la fuerza motriz: componente del peso, y las fuerzas resistentes. En este enfoque, la distancia de viaje se estima a partir del balance entre la energía potencial inicial y la energía disipada por fricción a lo largo de la trayectoria. Esta metodología es útil para obtener aproximaciones rápidas, pero no considera aspectos como la deformación interna del material, la redistribución de esfuerzos entre las distintas partes de la masa en movimiento o el almacenamiento temporal de energía elástica.

Las simulaciones reológicas, en cambio, permiten que parte de la energía potencial se almacene en los resortes del modelo que representan la componente elástica y se libere

de forma progresiva, contribuyendo a una mayor persistencia del movimiento. Este efecto se refleja en las diferencias porcentuales observadas, que son especialmente notorias para pendiente más suaves y para alturas mayores. En estos casos, la masa requiere más tiempo para disipar la energía disponible, por lo que esto puede explicar que el desplazamiento horizontal acumulado sea mayor.

Por otra parte, la curva propuesta por Moncayo y Ávila (2022) proviene de un ajuste estadístico realizado sobre un conjunto de deslizamientos reales en Colombia. Este ajuste refleja una relación promedio entre volumen y la distancia de viaje, con una dispersión usual en ese tipo de estudios. Esta se debe a la heterogeneidad de las condiciones de los deslizamientos reales como la variabilidad de las litologías, la rugosidad de las superficies de falla, el tipo de deslizamiento, el grado de saturación, la geometría del terreno, las obstrucciones naturales, cambios de la fricción y macro-fricción del terreno y al interior de la masa deslizada, la medición de los parámetros reológicos y su permanencia en el tiempo. Estos y otros factores adicionales introducen incertidumbres que no se representan en la geometría simplificada de las simulaciones. Por esta razón, las distancias simuladas pueden ser interpretadas como un límite superior, en comparación con la distribución real de eventos.

Un comportamiento que es importante describir es lo que ocurre con el talud de mayor inclinación simulado, donde las distancias de viaje tienden a disminuir. En taludes con pendientes muy pronunciadas, como el de 45°, la distancia de viaje tiende a disminuir debido a una combinación de factores dinámicos y geométricos. Aunque la componente tangencial del peso es mayor, lo que genera una aceleración inicial más intensa, la trayectoria del material es más corta porque el ángulo elevado implica un recorrido más vertical que horizontal. Esto reduce la proyección horizontal que por definición es la distancia de viaje, especialmente si el talud es relativamente bajo en comparación con su inclinación.

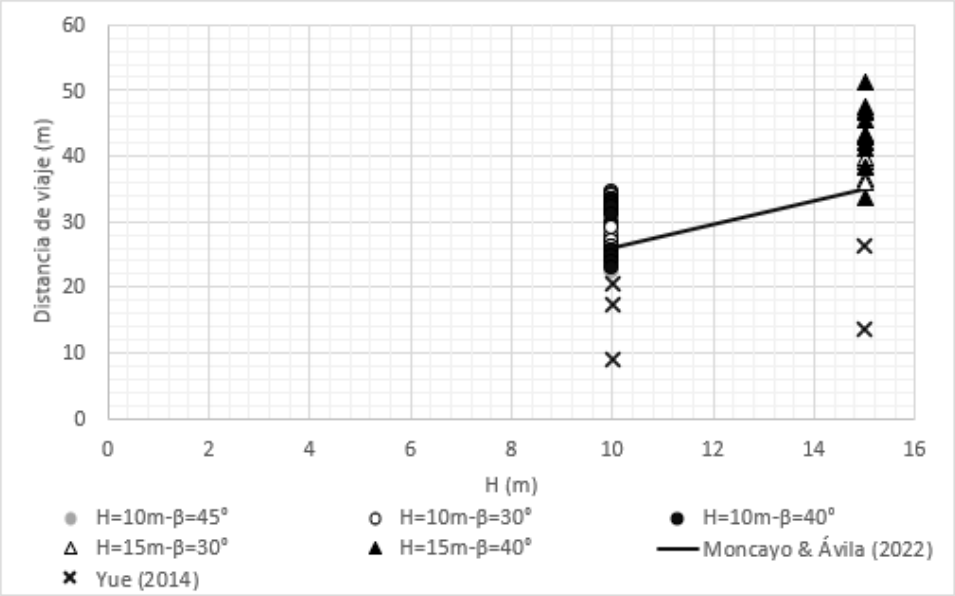
Además, el material alcanza rápidamente velocidades altas, pero también entra en contacto con la base del deslizamiento en un tramo más corto, esto incrementa la disipación de energía por fricción basal en menos tiempo. Este mecanismo podría limitar el desplazamiento horizontal acumulado, en contraste con taludes de menor inclinación

donde el recorrido es más largo y la energía potencial se transforma gradualmente en energía cinética.

Análisis de la relación entre la altura del talud y la distancia de viaje:

La gráfica que se presenta en la **Figura 4-3** muestra la variación de la distancia de viaje en función de la altura del talud H para distintos escenarios caracterizados por diferentes ángulos de inclinación: 30°, 40° y 45°, y la gama de parámetros reológicos: módulo elasticidad y viscosidad dinámica mencionados al principio de este capítulo. A diferencia de las metodologías de referencia, los resultados de las simulaciones consideran explícitamente la influencia de la rigidez y la viscosidad, lo cual genera una dispersión significativa en las distancias calculadas para una misma altura (diferencias porcentuales entre los valores mínimos y máximos del 62% aproximadamente).

Figura 4-3: Relación entre la distancia de viaje y la altura del talud.



Fuente: Elaboración propia.

En el caso de H=10 m, las simulaciones con β=30° presentan distancias de viaje promedio cercanas a 27 m, mientras que Yue (2014) predice una distancia de 9 m, lo que equivale a diferencias porcentuales del 200%. Para β=40°, con la misma altura del talud, la distancia

promedio simulada es de 30 m, resultados con una diferencia del 67% con respecto a los valores estimados (17,5m) con la metodología de Yue (2014).

Para alturas de H=15 m, las distancias medias simuladas con β=30° y β=40° se encuentran entre 38 y 42 m, en comparación con los valores estimados bajo la metodología de Yue (2014) de 14 y 26 m, respectivamente, lo que representa una diferencia del 171% y 61,5% en cada caso. Esta reducción relativa en la diferencia puede ser explicada porque el incremento en altura aumenta proporcionalmente la energía potencial disponible, mejorando el ajuste con la aproximación del bloque deslizante.

El análisis de las diferencias de los valores medios obtenidos con respecto a la curva de Moncayo y Ávila (2022), predice para taludes con alturas de H=10 m una distancia de viaje cercana a los 26 m. Esto implica que los valores medios de distancia de viaje para las simulaciones con β=30° muestren una diferencia relativamente baja, inferior al 4%, mientras que para β=40° las diferencias son cercanas al 15%. En el caso de los taludes con alturas de H=15 m, la curva propuesta por Moncayo y Ávila (2022) en función de la altura del talud estima la distancia de viaje aproximadamente en 35 m, lo que representa una diferencia porcentual aproximada del 9% para β=30° y del 20% para β=40°. Los resultados que se presentan en la **Figura 4-3** indican que, para ciertas combinaciones de rigidez y viscosidad, las simulaciones se alinean parcialmente con la curva promedio del ajuste.

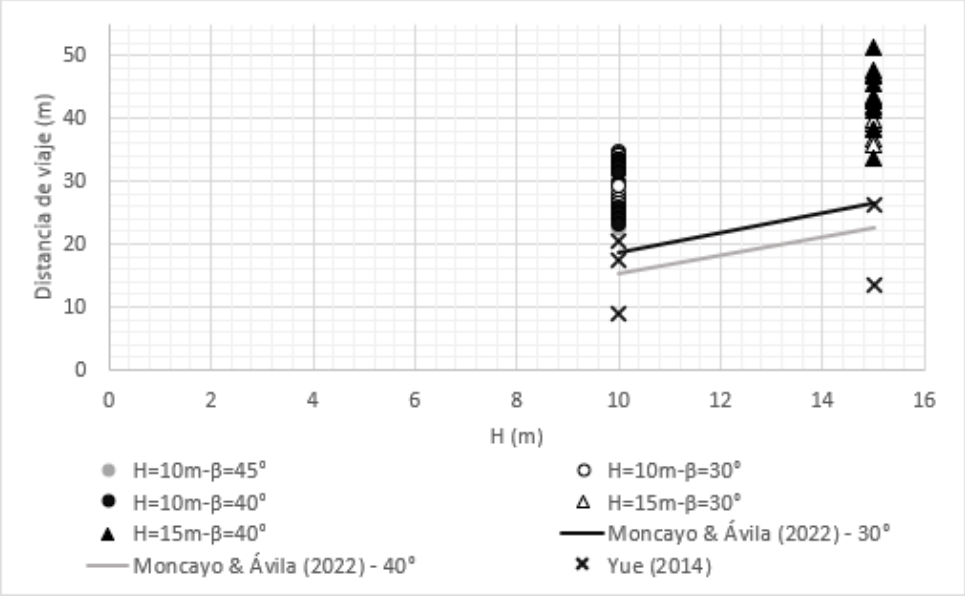
Análisis de la relación entre la altura e inclinación del talud y la distancia de viaje:

La gráfica que se muestra en la **Figura 4-4** incluye las relaciones establecidas por Moncayo y Ávila (2022) que incorporan la influencia de la inclinación y la altura del talud simultáneamente. Por lo cual, la figura muestra curvas de estos autores diferenciadas por el ángulo de inclinación. Para H=10 m y β=30°, la distancia promedio simulada (27 m) excede la estimación de Moncayo y Ávila, de 20 m aproximadamente, en un 35%. Para β=40° las simulaciones superan los valores de referencia entre un 40% y 50%.

Para H=15 m y β=30°, la regresión estadística predice valores de distancia de viaje cercanos a los 27 m, representando una diferencia cercana al 40% respecto al valor medio calculado con las simulaciones. En el caso de β = 40°, las diferencias nuevamente superan

el 50%, mostrando que el desfase entre los métodos tiende a amplificarse con el ángulo de inclinación.

Figura 4-4: Relación entre la distancia de viaje con la altura e inclinación del talud.



Fuente: Elaboración propia.

Análisis de la influencia de los parámetros reológicos en la magnitud de la distancia de viaje:

En el apartado anterior se presentaron los análisis de resultados para las distancias de viaje sin considerar el efecto de la reología del modelo. Se encontró que los valores que predice la metodología que se desarrolla en este documento son superiores a los valores que predicen los modelos más simplificados y a los ajustes estadísticos. En esta sección del capítulo se profundiza en los análisis de los resultados de las distancias de viaje en función de la rigidez y la viscosidad de los materiales que conforman los taludes simulados.

Para integrar la influencia de los parámetros reológicos en los análisis de resultados se ha definido el parámetro E/η, que define el cociente entre el módulo de elasticidad y la viscosidad dinámica del material. Este constituye un indicador clave de la respuesta viscoelástica de un sistema sometido a solicitaciones externas. En términos físicos, E mide la capacidad del material para almacenar energía, mientras que η representa la resistencia interna al flujo o deformación dependiente del tiempo, asociada con la disipación de la

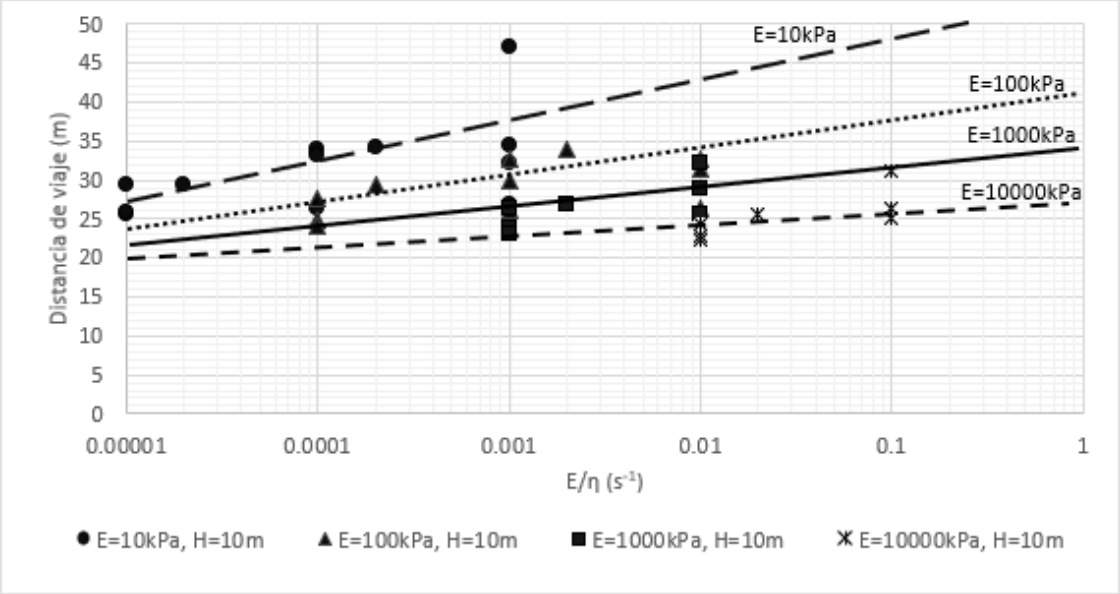
energía. Por lo tanto, este cociente se puede interpretar como una frecuencia característica del sistema tanto por su definición como por las unidades de s^{-1}, que relaciona la velocidad a la que el sistema puede liberar o disipar energía bajo una carga dada.
Desde el punto de vista de los modelos reológico, este parámetro es especialmente útil porque sintetiza, en una única variable, la interacción entre la rigidez y la amortiguación. En modelos viscoelásticos lineales como los de Kelvin-Voigt, Maxwell o Burger, las respuestas de deformación y esfuerzo están controladas por el balance entre estos dos parámetros. Cuando E/η es pequeño, la respuesta del sistema está dominada por la viscosidad, generando movimientos lentos, atenuados y con alta disipación de energía. Por el contrario, un E/η grande indica un régimen dominado por la elasticidad, en el cual el sistema puede experimentar deformaciones rápidas con menor pérdida de energía.

Desde el punto de vista del principio de trabajo y energía, el parámetro E/η permite incorporar en los análisis la transformación de la energía potencial en energía cinética y su disipación a través de los mecanismos viscosos y friccionales. Un aumento de este cociente significa que la energía mecánica se conserva más eficientemente en forma de movimiento, favoreciendo mayores velocidades, desplazamientos y distancias de viaje antes de alcanzar el equilibrio dinámico. Por el contrario, valores bajos indican que la energía se pierde rápidamente por deformación interna, limitando la movilidad del deslizamiento. La profundidad de los análisis de estos mecanismos de disipación escapa al alcance de este trabajo.

En este trabajo se considera conveniente utilizar el parámetro E/η en las gráficas y descripciones de los resultados ya que ofrece una forma normalizada y comparativa de evaluar el comportamiento dinámico de distintos taludes, independientemente de los valores absolutos de E y η. Por ejemplo, dos sistemas con valores distintos de E y η pero con el mismo cociente E/η pueden mostrar respuestas dinámicas análogas, ya que esta relación captura la esencia del equilibrio entre la rigidez y la disipación. Además, facilita la interpretación de tendencias en parámetros clave como la velocidad máxima, la aceleración y la distancia de viaje, ya que estos dependen de la capacidad del sistema para transformar la energía con un nivel determinado de disipación viscosa.

El uso de este cociente permite explorar de forma más clara cómo los cambios combinados de rigidez y viscosidad afectan la dinámica del talud. Al representar los resultados en función de este, se obtiene una visión unificada del comportamiento del sistema, esto facilita la identificación de regímenes dominados por la viscosidad (flujo lento y estable) frente a regímenes elásticos (movimientos rápidos y más inestables). Esto es particularmente útil en el diseño de escenarios numéricos, ya que permite reducir la complejidad al condensar dos parámetros en una sola variable.

Figura 4-5: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud de 10 m de altura.



Fuente: Elaboración propia.

En la **Figura 4-5**, los puntos representan los resultados de simulaciones para un talud de H=10 m de altura con diferentes módulos de elasticidad que varían entre 10 y 10^4 kPa; y viscosidades que varían entre 10^4 y 10^6 kPa.s. La combinación de estos escenarios determina distintos valores de E/η. Las líneas interpoladas sobre la gráfica tienen el propósito de ilustrar las tendencias promedio para cada nivel de rigidez, lo que permite observar el efecto combinado de la variación de la rigidez y la viscosidad sobre la distancia de viaje. De acuerdo con el comportamiento de estas curvas de ajuste, se puede concluir que las distancias de viaje tienden a incrementar en un 25% en promedio por cada orden de magnitud que disminuye la rigidez del material.

Adicionalmente, se observa un patrón general en el que la distancia de viaje tiende a aumentar con la relación E/η mostrando pendientes ligeramente mayores cuando la rigidez es baja pero la viscosidad es moderada, esto sucede porque el sistema disipa menos energía por deformación interna y permite que la masa mantenga mayores desplazamientos antes de detenerse. A medida que la rigidez aumenta, la pendiente de la curva disminuye ligeramente, mostrando que la variación de E/η tiene un efecto más limitado. Lo cual puede estar relacionado con la capacidad del material de absorber energía en deformaciones elásticas con muy poca disipación viscosa. En general se calculan incrementos del orden 4 m en la distancia de viaje por cada orden de magnitud en que se incrementa E/η.

De la gráfica es claro que a medida que la rigidez o la viscosidad se incrementan, la distancia de viaje disminuye. Este comportamiento puede interpretarse bajo el principio de trabajo y energía mediante la transformación de la energía potencial en energía cinética que se disipa progresivamente mediante la acción viscosa y la fricción basal. Para materiales con baja rigidez y alta viscosidad – deslizamientos lentos según la clasificación propuesta por este documento – la disipación domina y la energía cinética alcanza valores menores, lo que limita la distancia de viaje.

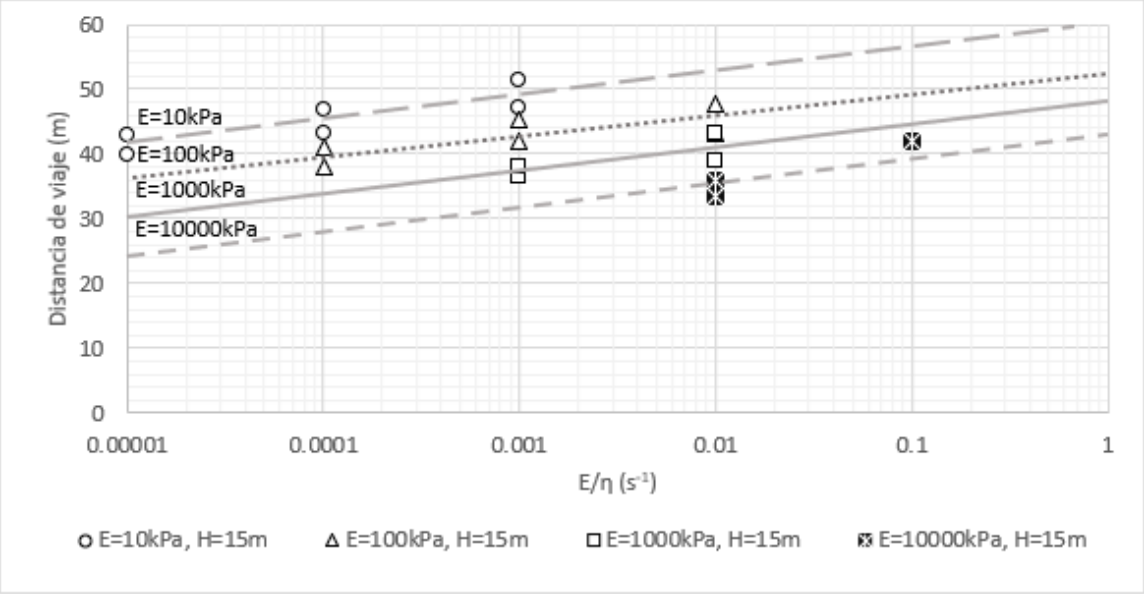
En contraste, cuando el material tiene mayor rigidez y menor viscosidad, la energía se mantiene más tiempo en forma cinética, permitiendo recorridos más largos. Sin embargo, cuando la rigidez es excesiva, la deformación interna de los elementos reológicos puede ser muy pequeña y las unidades reológicas masa-resorte-amortiguador se comportan casi como un bloque rígido, lo que hace que la respuesta no dependa tanto de la relación E/η y se limite principalmente por las condiciones geométricas y de fricción.

En síntesis, la **Figura 4-5** muestra que la distancia de viaje de un talud no depende únicamente de su geometría, también depende del equilibrio entre los parámetros reológicos. Los escenarios de baja rigidez tienden a producir mayores distancias de viajes cuando la viscosidad no es demasiado alta, mientras que, en sistemas rígidos, la viscosidad desempeña un papel menor. Esto resalta la necesidad de caracterizar adecuadamente E y η para cada tipo de deslizamiento, ya que la combinación de estos

parámetros condiciona de forma directa la capacidad de la masa para mantener movimiento tras la falla inicial.

La gráfica que se presenta con la **Figura 4-6** ilustra la relación entre la distancia de viaje del talud y el cociente E/η para el caso de taludes con una altura de H=15 m, considerando distintos valores de rigidez E.

Figura 4-6: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud de 15 m de altura.



Fuente: Elaboración propia.

Comparando estos resultados con los obtenidos para los taludes de 10 m de altura, se observa que la mayor altura del talud se traduce en distancias de viaje más largas en todos los escenarios, lo cual es coherente con el incremento de la energía potencial inicial. Esta mayor energía disponible permite que las masas alcance trayectorias de deslizamiento más extensas, incluso cuando la rigidez y la viscosidad actúan para disipar parte de esta energía.

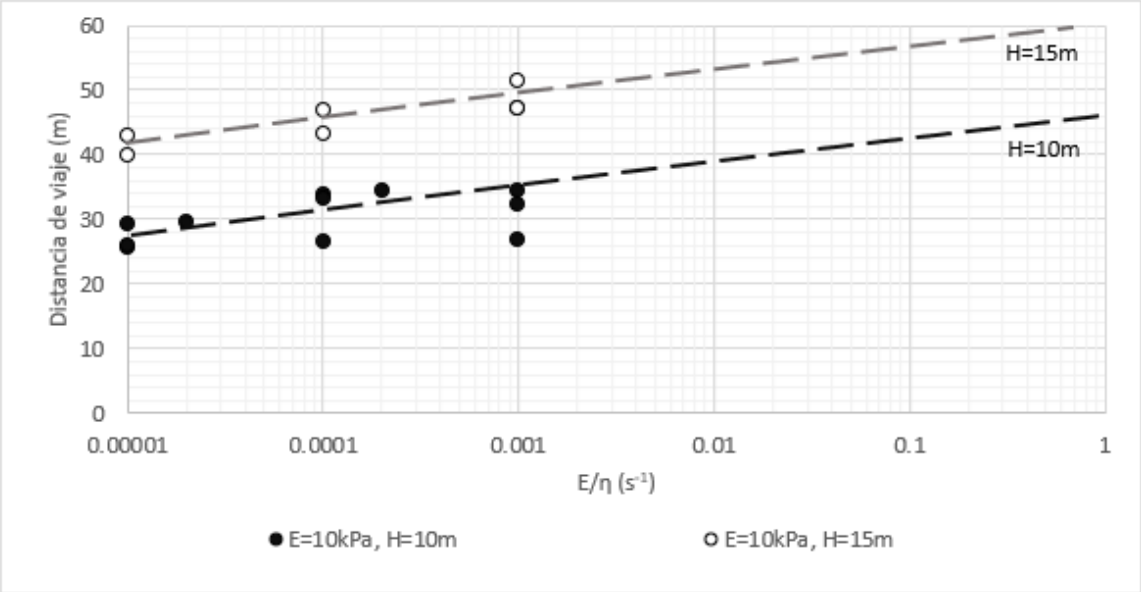
En cuanto al efecto de la rigidez, se mantiene el mismo patrón observado en la **Figura 4-5**: los materiales con menor rigidez muestran las distancias de viaje más altas, mientras que las mayores rigideces limitan significativamente el alcance. Este comportamiento está vinculado a la menor capacidad de deformación y redistribución de energía en materiales

más rígidos, lo que reduce la movilidad del sistema. Asimismo, se aprecia que, para cada valor de E, la distancia de viaje aumenta de forma moderada con el incremento de la relación E/η, sugiriendo que el aumento en la rigidez relativa frente a la viscosidad favorece una disipación más lenta de la energía inicial.

Al comparar ambos escenarios de altura, se puede concluir que el efecto de E/η se ve amplificado en taludes más altos. En otras palabras, para una misma combinación de parámetros reológicos, la respuesta del sistema es más sensible en términos de distancia de viaje cuando se incrementa la altura, debido a la mayor energía disponible para transformar en energía cinética y trabajo de deformación.

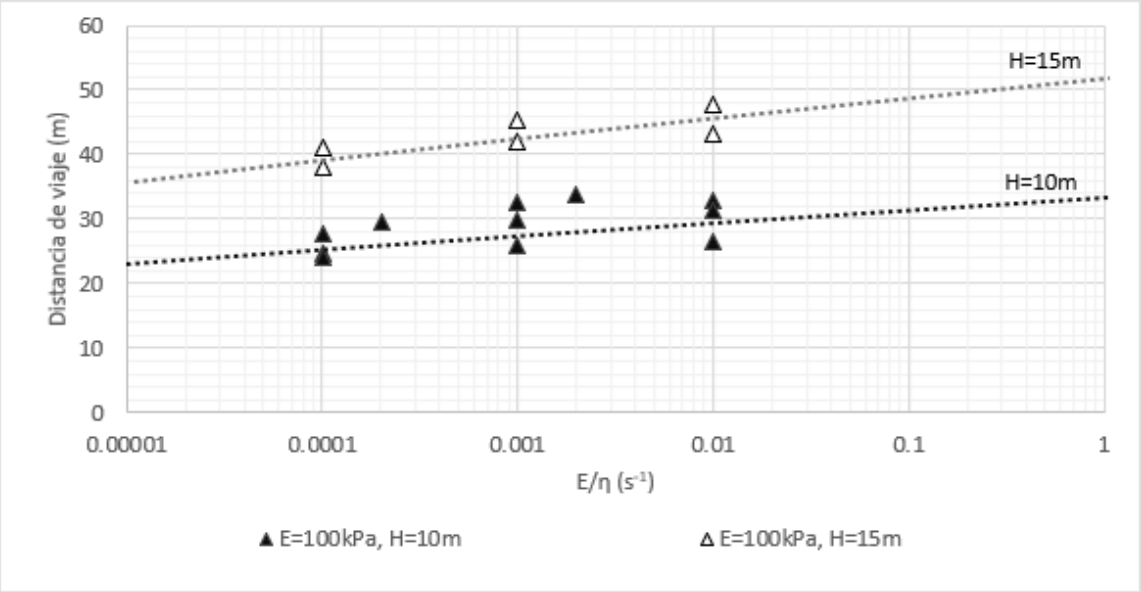
En resumen, esta gráfica conduce a las mismas conclusiones previas: la altura del talud es un factor determinante en el alcance del deslizamiento, pero su efecto se ve modulado por la interacción entre la rigidez E y la viscosidad η. Los resultados sugieren que, para taludes altos, la elección de estos parámetros cobra mayor relevancia, pues pequeñas variaciones en E/η pueden generar diferencias notables en la distancia de viajes, a diferencia de lo que se puede observar en el talud de menor altura.

Figura 4-7: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10 kPa.



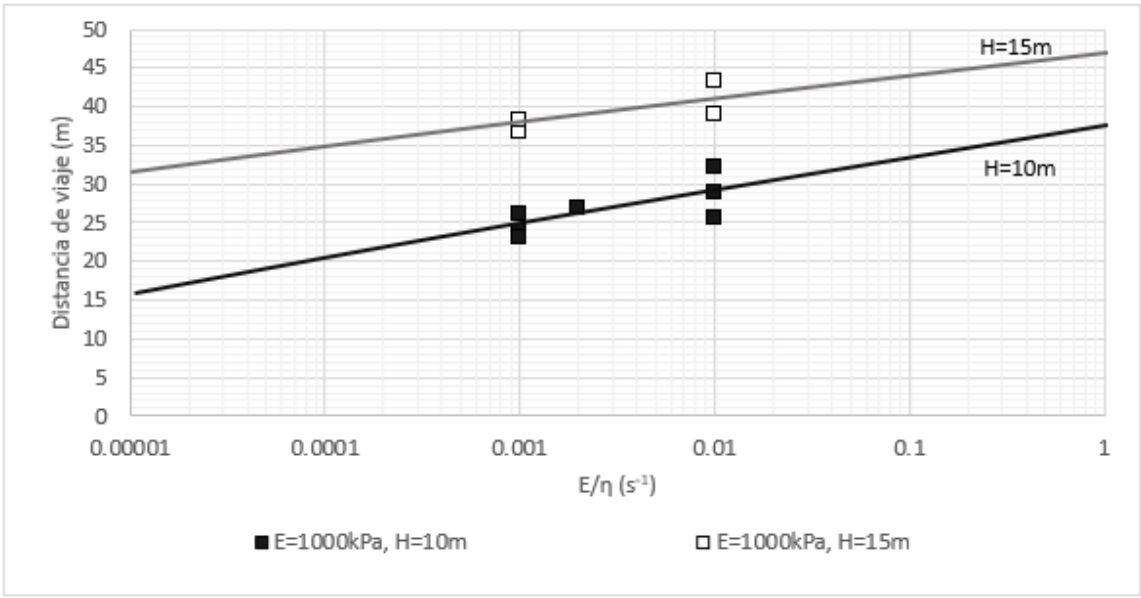
Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-8: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10^2 kPa.



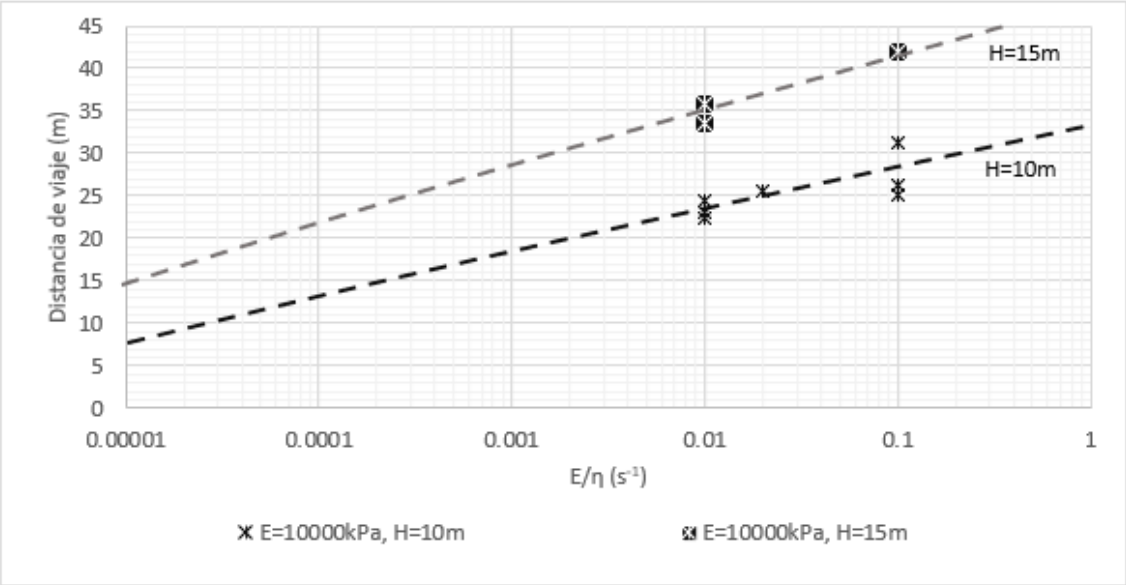
Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-9: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10^3 kPa.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-10: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un módulo de elasticidad E = 10^4 kPa.

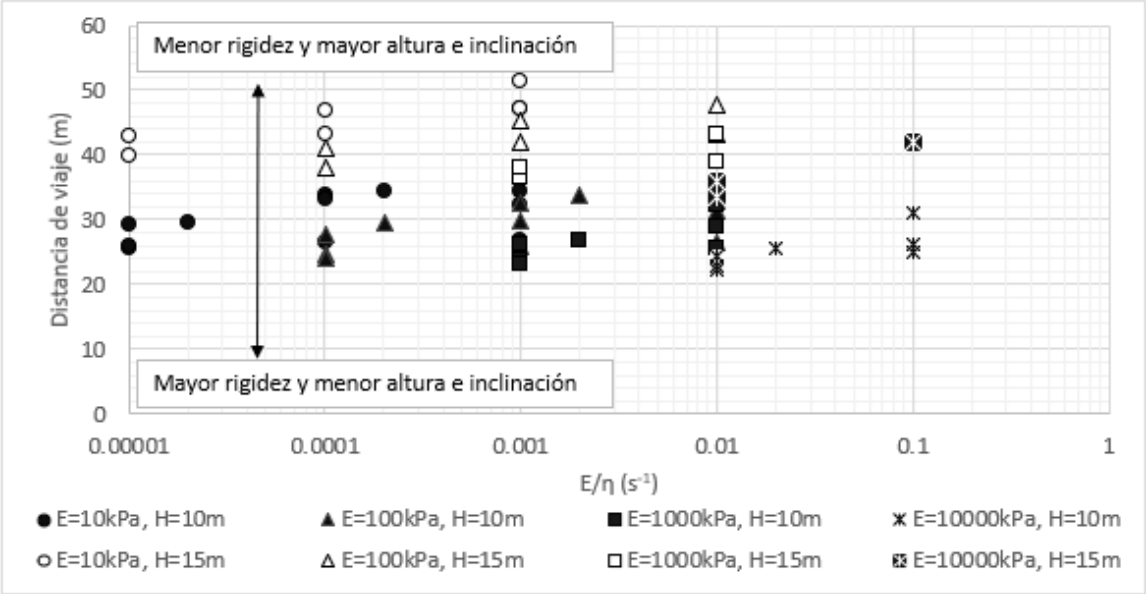


Fuente: Elaboración propia.

Con el propósito de cuantificar las diferencias de las distancias de viaje debidas a cambios en la altura de los taludes simulados, se realizó el análisis particular de los resultados obtenidos para cada uno de los valores de rigidez adoptado en los modelos. Estos se presentan de la **Figura 4-7** a la **Figura 4-10**, allí se puede observar que las distancias de viaje para el talud de 15 m de altura en general son entre un 45% y 50% mayores que las calculadas para los taludes de 10 m de altura. No se identificó una relación de estas diferencias con el parámetro E/η.

La **Figura 4-11** recopila los resultados del cálculo de la distancia de viaje para los 60 casos simulados. En esta se indican en color negro los resultados para el talud de H=10 m y en color blanco los resultados para el talud de H=15 m con el propósito de destacar la diferencia de los resultados influenciada por la altura del talud. Además, a partir de las condiciones que se han descrito a lo largo de este capítulo, se ha señalado sobre la figura las tendencias identificadas en el análisis de resultados: el incremento de la distancia de viaje con la disminución de la rigidez y el aumento de la altura e inclinación de los taludes.

Figura 4-11: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para todos los escenarios simulados.

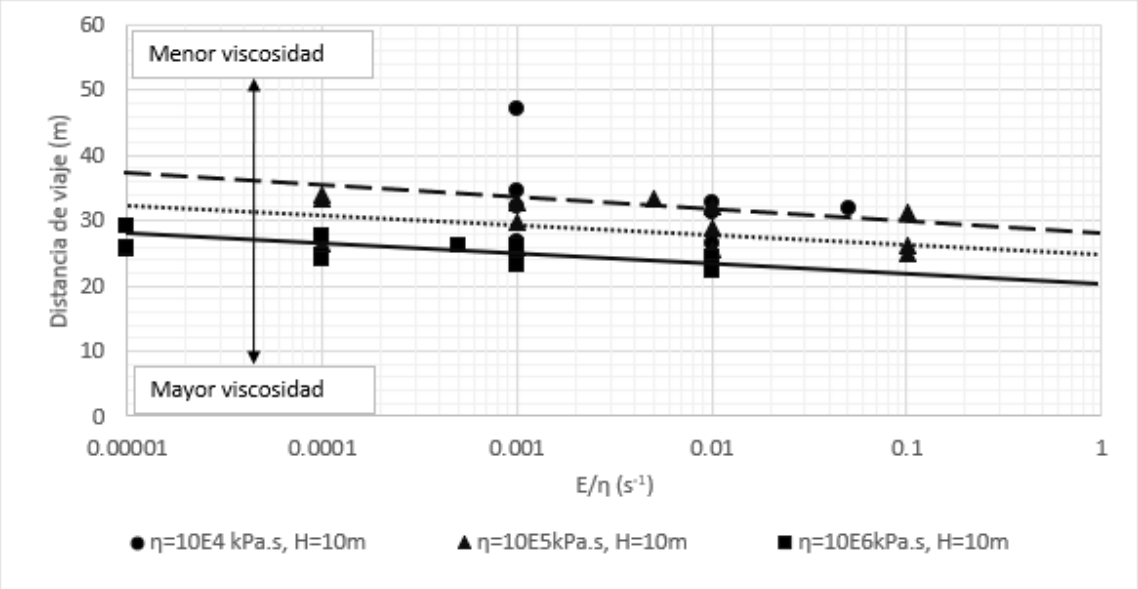


Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con los análisis realizados de la sección anterior, es evidente que la viscosidad también desempeña un rol significativo en el comportamiento de los desplazamientos del talud. Por lo cual, a través de la información que se presenta con la **Figura 4-12** y la **Figura 4-13** se presentan los resultados para la distancia de viaje para taludes de 10 m y 15 m de altura para diferentes combinaciones de rigidez y viscosidad, respectivamente.

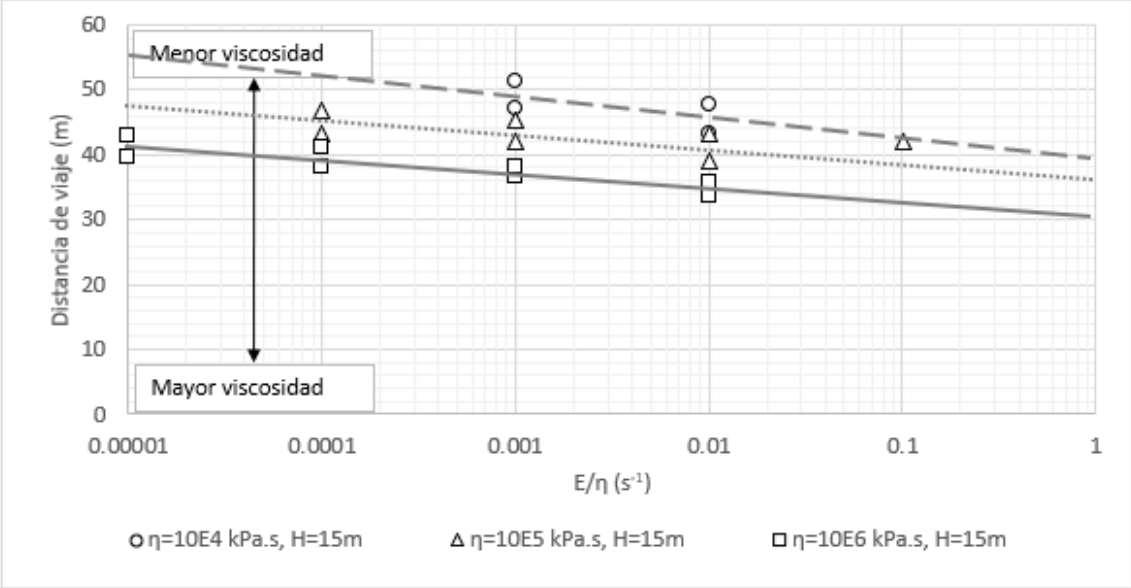
Estas figuras permiten examinar con mayor profundidad la influencia de la viscosidad dinámica del material en la distancia de viaje de los taludes inestables modelados, considerando diferentes combinaciones de altura y resistencia viscosa. A diferencia de los análisis previos, en estas gráficas se integran los resultados obtenidos para las distintas inclinaciones de taludes, aunque esta variable no se discrimina explícitamente en la representación gráfica. Esta condición permite sintetizar los efectos dominantes de los parámetros reológicos en una sola tendencia por rango de viscosidad, pero introduce cierta dispersión en los datos debido a las variaciones de inclinación.

Figura 4-12: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud con 10 m de altura y diferentes rangos de viscosidad.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-13: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para un talud con 15 m de altura y diferentes rangos de viscosidad.



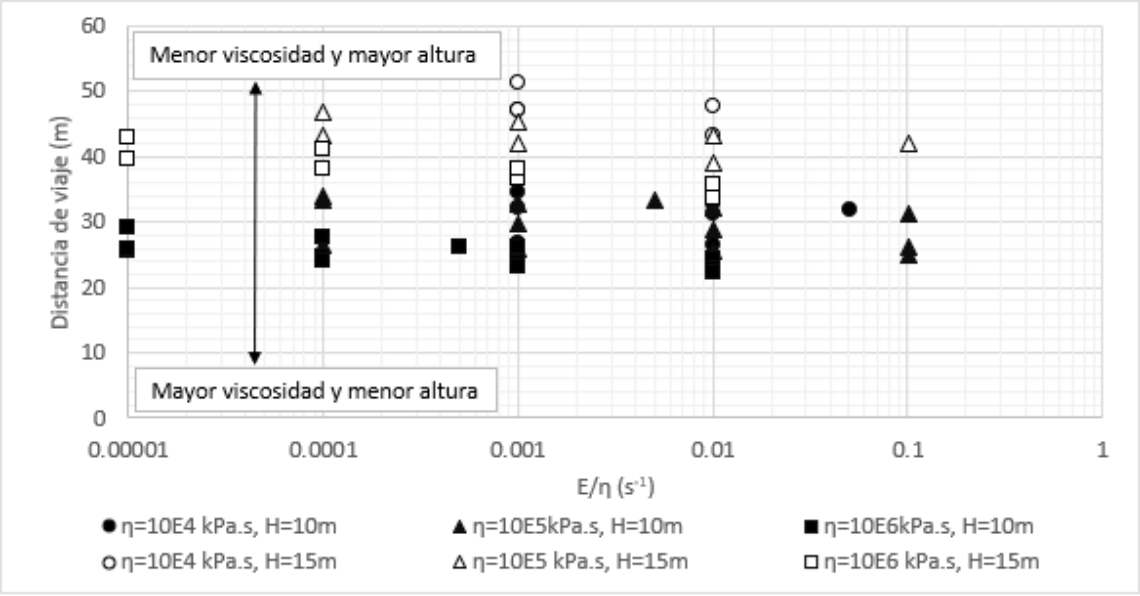
Fuente: Elaboración propia.

En la **Figura 4-12**, correspondiente a taludes de 10 m de altura, se observa que la distancia de viaje disminuye con el incremento de la viscosidad. Para un mismo valor de E/η, los materiales menos viscosos (η=10^4 kPa.s) alcanzan distancias significativamente mayores

que aquellos con viscosidades intermedias (η=10^5 kPa.s) o altas (η=10^6 kPa.s). Por ejemplo, en torno a E/η = 0,001 s^{-1}, la distancia de viaje decrece aproximadamente de 36 m a 25 m al pasar del material menos viscoso al más viscoso, lo que representa una reducción cercana al 30%. Esta tendencia pone en evidencia el papel disipativo de la viscosidad en el comportamiento dinámico del deslizamiento, al limitar la transformación de energía empleada para el desplazamiento de la masa inestable.

La **Figura 4-13**, que representa los resultados para taludes inestables de 15 m de altura, conserva esta tendencia descendente con el aumento de la viscosidad, pero presenta valores de distancia de viaje mayores en todos los casos respecto a la figura anterior. Para viscosidades de 10^5 kPa.s y valores de E/η = 0,001 s^{-1}, la distancia de viaje alcanza aproximadamente 45 m en el talud de 15 m frente a los 32 m en el talud de 10 m, lo que implica un incremento porcentual cercano al 40%. Esto responde al mayor contenido energético disponible en estructuras más altas, lo cual intensifica el efecto de las solicitaciones inerciales y permite compensar, en parte, la disipación impuesta por la viscosidad.

Figura 4-14: Relación entre la distancia de viaje y los parámetros reológicos del material para todos los escenarios simulados en función de la viscosidad.



Fuente: Elaboración propia.

El hecho de que en ambas gráficas se integren diferentes inclinaciones genera una dispersión adicional en los datos. Los resultados anteriores mostraron que las pendientes

más pronunciadas tienden a incrementar la distancia de viaje debido a que facilitan una mayor conversión de energía potencial en movimiento. Sin embargo, al no discriminar esta variable, las curvas promedio reflejan tendencias generalizadas que permiten identificar la respuesta global del sistema frente a la variación de la viscosidad, aunque con cierto grado de incertidumbre asociado con la pendiente de los taludes.

En la **Figura 4-14** se integran los resultados para ambos escenarios, allí se puede observar que el efecto de la viscosidad es más notorio en los regímenes de bajo E/η, donde el comportamiento es dominado por la disipación viscosa. A medida que E/η se incremente, las diferencias entre los distintos grados de viscosidad tienden a reducirse, indicando un régimen transicional hacia respuestas más elásticas. Las líneas de regresión descendentes en cada caso reafirman que la distancia de viaje disminuye sistemáticamente al aumentar la viscosidad, en coherencia con el principio de trabajo y energía, según el cual la energía se distribuye entre el trabajo de desplazamiento y la energía disipada, principalmente por los mecanismos viscosos y friccionantes.

En términos generales, se observa que los incrementos porcentuales en la distancia de viaje entre los taludes más altos respecto a los más bajos oscilan entre el 28% y el 62%, dependiendo de la viscosidad dinámica η y de la relación E/η. A viscosidades más bajas los incrementos tienden a ser mayores, alcanzando valores cercanos al 60%, mientras que para las viscosidades más grandes, los incrementos por la altura del talud se reducen, pero siguen siendo significativos, entre un 28% y 39%.

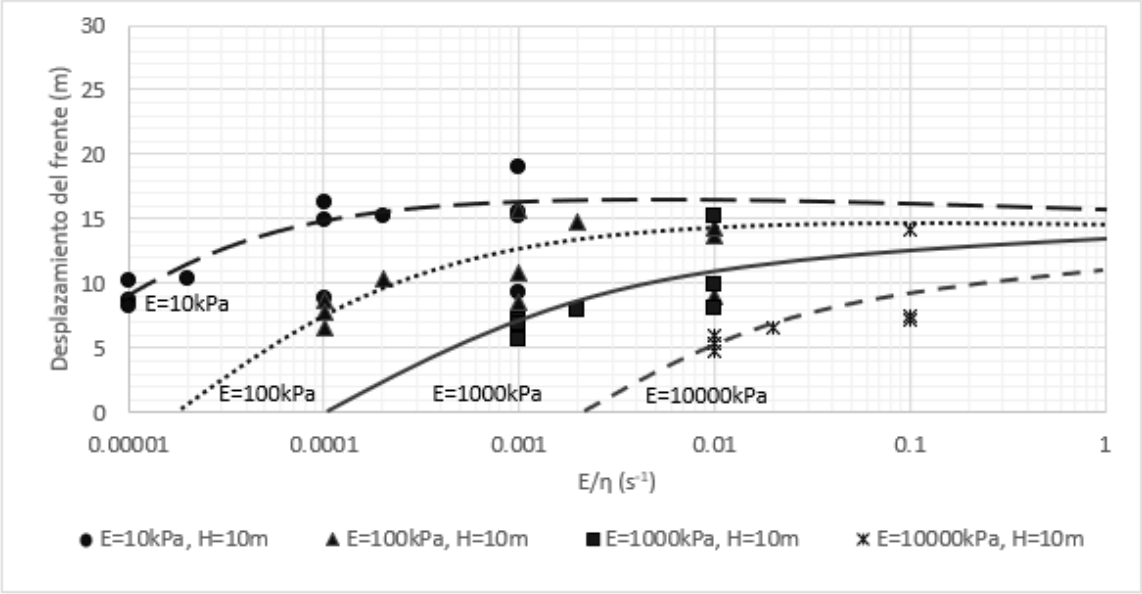
En conclusión, el análisis conjunto de estas gráficas refuerza el papel determinante de la viscosidad en la dinámica de deslizamientos y sugiere que, incluso ante diferentes geometrías e inclinaciones, los materiales más viscosos tienden a limitar significativamente el alcance del movimiento. Asimismo, se destaca que el aumento de la altura del talud incrementa sustancialmente la distancia de viaje, aunque dicho efecto puede atenuarse en materiales altamente viscosos. La integración de diferentes inclinaciones en este análisis permite identificar tendencias globales robustas, útiles para la parametrización general del problema, pero también sugiere la necesidad de estudios adicionales que discriminen con mayor precisión la influencia individual de la pendiente en combinación con los parámetros reológicos.

4.2.2 Desplazamiento del frente

En esta sección se analiza brevemente el desplazamiento del frente de ruptura de la masa inestable (Escenario A de la **Figura 4-18**, correspondiente únicamente al cambio de posición de esta zona), con el propósito de ilustrar el comportamiento de los desplazamientos sobre la superficie horizontal e identificar la diferencia del comportamiento con respecto a la distancia de viaje, la cual contempla la distancia que se mueve la masa inestable en su totalidad: medida desde el escarpe principal. Para ello se muestran la **Figura 4-15** y la **Figura 4-16** para taludes con alturas de 10 m y 15 m, respectivamente. Y en la **Figura 4-17** se muestran los resultados conjuntos para ambos escenarios.

Estas gráficas evidencian que, a diferencia de las curvas previamente analizadas sobre la distancia de viaje total, estas curvas reflejan únicamente el desplazamiento horizontal del frente, es decir, el punto más adelantado del deslizamiento.

Figura 4-15: Relación entre el desplazamiento del frente y los parámetros reológicos del material para un talud de 10 m de altura.

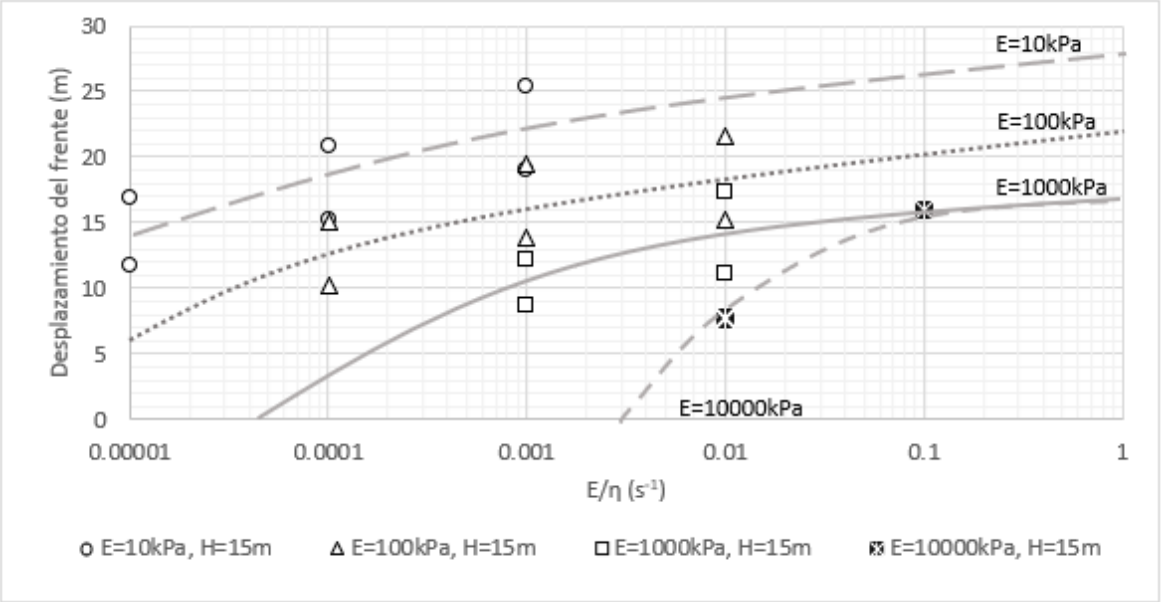


Fuente: Elaboración propia.

En términos generales, puede observarse que el desplazamiento del frente aumenta con valores más bajos de viscosidad y con alturas mayores. En la **Figura 4-15** que muestra los resultados del talud de 10 m, el desplazamiento del frente varía desde aproximadamente

8 m para E=10^4 kPa hasta 18 m para E = 10kPa, lo cual representa una diferencia de cerca del 125%. Para el talud de 15 m, los desplazamientos se sitúan entre los 12 y 25 m para un mismo valor de rigidez, indicando un incremento porcentual del orden del 108%. Este comportamiento sugiere que la influencia del módulo de rigidez es más pronunciada en taludes de menor altura, donde las deformaciones internas y las disipaciones tienen mayor participación relativa respecto a la energía potencial inicial.

Figura 4-16: Relación entre el desplazamiento del frente y los parámetros reológicos del material para un talud de 15 m de altura.



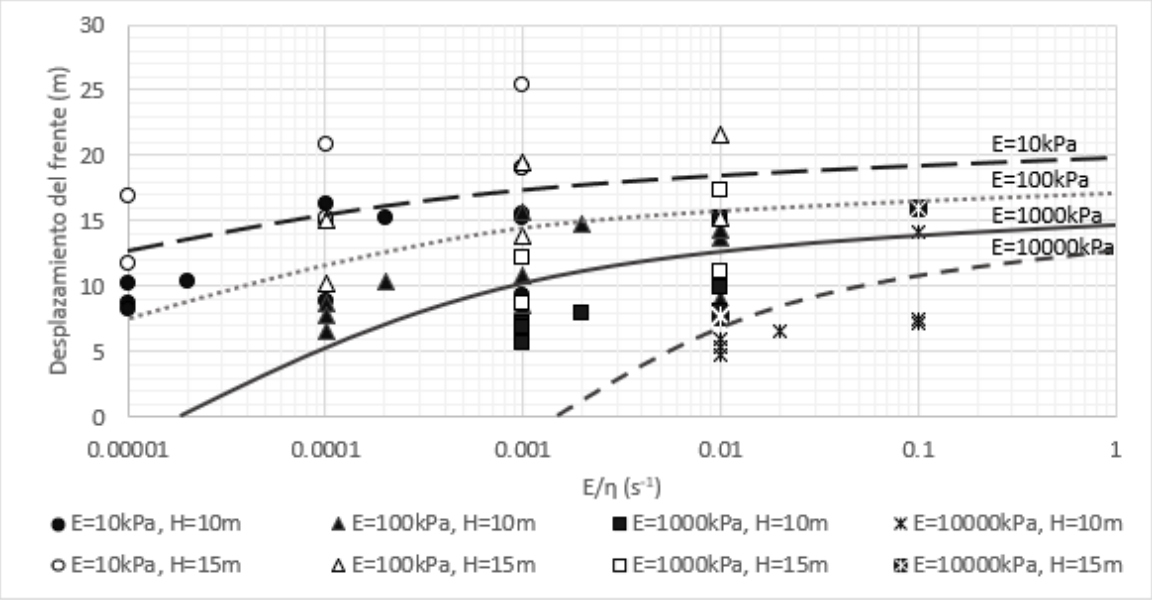
Fuente: Elaboración propia.

Al comparar los desplazamientos del frente entre los taludes de 15 m y 10 m de altura para un mismo valor de E, se observa un incremento porcentual promedio que varía con el nivel de rigidez. Para E = 10 kPa, el incremento es cercano al 40%, mientras que para E = 10^4 kPa se reduce a un rango de entre el 25% y 30%, evidenciando una mayor sensibilidad de los materiales más blandos a las variaciones en la altura del talud. Esta sensibilidad se puede asociar con una mayor proporción de energía potencial transformada en energía cinética y deformaciones en materiales con menor rigidez.

Finalmente, las curvas muestran un comportamiento claramente asintótico a medida que E/η se incrementa. Este comportamiento indica que, en materiales con elevada rigidez o

baja viscosidad, el desplazamiento del frente tiende a estabilizarse en un valor máximo, sugiriendo que la energía disponible para el movimiento se disipa rápidamente, alcanzando una condición de equilibrio dinámico sin que se logren incrementos significativos adicionales en el desplazamiento. Este hallazgo respalda el uso del parámetro E/η como una variable clave para caracterizar la dinámica de deslizamiento viscoelásticos, ya que encapsula la relación entre la energía almacenada elásticamente y su tasa de disipación.

Figura 4-17: Relación entre el desplazamiento del frente y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados.



Fuente: Elaboración propia.

4.3 Evolución espacio-temporal de taludes inestables

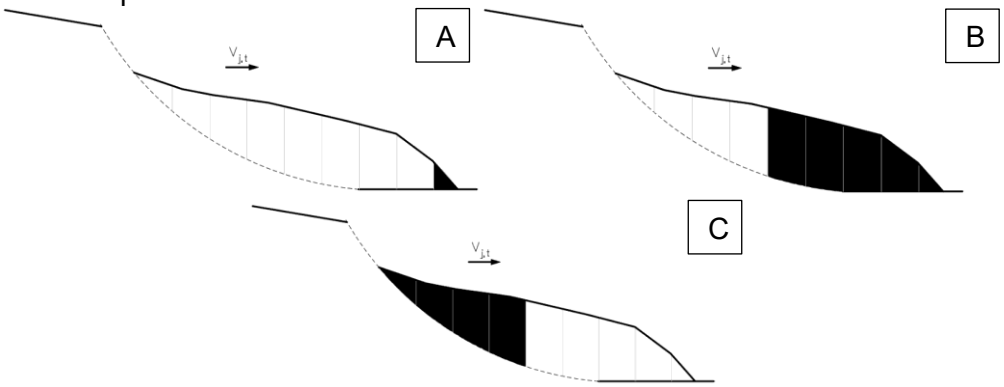
En esta sección del capítulo se presentan los resultados derivados del análisis de la evolución temporal y espacial de los parámetros que describen la dinámica de los taludes fallados para distintos escenarios de deslizamiento, haciendo énfasis en la evolución geométrica de la masa movilizada y en la evolución espacio-temporal de la velocidad y aceleración de distintos segmentos representativos del cuerpo del deslizamiento.

Se sigue la estrategia metodológica empleada por Roshan y Yerro (2025), quienes proponen realizar la caracterización dinámica mediante el seguimiento de tres zonas clave (ver la **Figura 4-18**): el frente de la masa movilizada, que define la interacción con el terreno

estable aguas abajo; la parte central superior, donde se acumula una porción sustancial del volumen y se concentra gran parte de las deformaciones; y el extremo posterior o inicial de la masa inestable, ubicado en la zona más alejada del frente de ruptura, cuya evolución puede mostrar fases de inercia o retardo con respecto al resto del cuerpo.

Esta aproximación permite capturar la heterogeneidad espacial del movimiento y sus transiciones entre fases aceleradas, estacionarias y de frenado, proporcionando una visión integral del comportamiento dinámico del talud. Además, posibilita la evaluación de la sincronía o asincronía en el desplazamiento entre diferentes zonas, lo cual es crucial para una correcta interpretación de la distribución de esfuerzos, la disipación de energía y la propagación de la deformación dentro del sistema.

Figura 4-18: Zonas clave para la caracterización dinámica del movimiento de la masa inestable. A: Frente de la masa movilizada, B: Parte central de la masa movilizada, C: Parte inicial o extremo posterior de la masa movilizada.



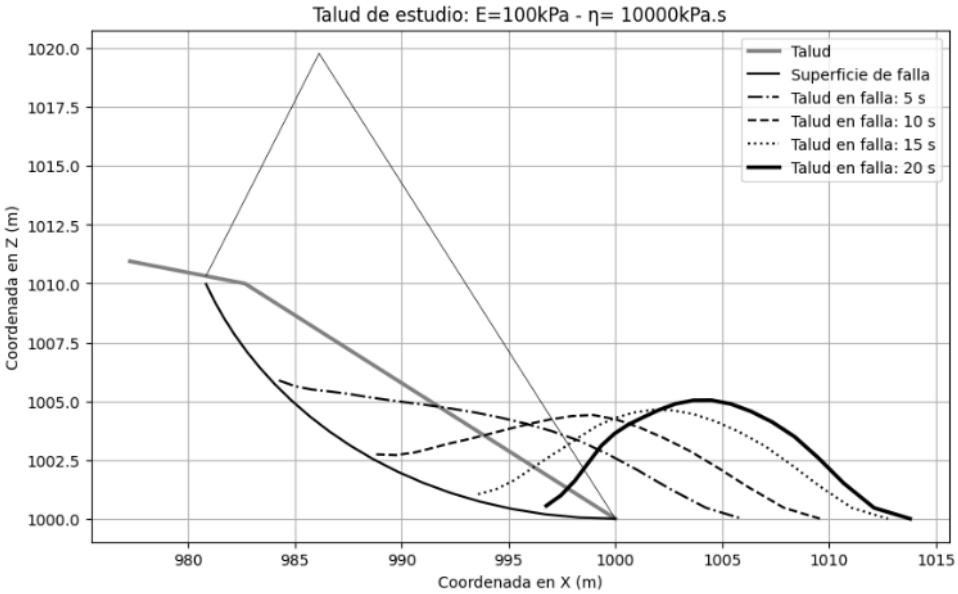
Fuente: Elaboración propia.

4.3.1 Deslizamientos como sistemas sobreamortiguados: Evolución temporal de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

A continuación, se muestra la evolución de la geometría de las masas deslizadas para algunos de los casos analizados con el propósito de ilustrar los resultados obtenidos mediante la aplicación de la metodología y el algoritmo que se desarrolla en este documento. En general, las figuras tienen la siguiente estructura: el contorno original del talud se muestra con una línea gris gruesa, este se apoya sobre la superficie de falla (línea continua negra), y sucesivas posiciones de la interfase “masa inestable – terreno firme”

dibujadas en distintos instantes con líneas de puntos y guiones. Sin embargo, cada gráfica describe un régimen dinámico muy distinto, fruto de la combinación de rigidez (E) y viscosidad (η) empleada en el modelo.

Figura 4-19: Evolución de los desplazamientos en el tiempo para un talud de H=10m, β=30°, E=10^2 kPa y η=10^4 kPa.s.



Fuente: Elaboración propia.

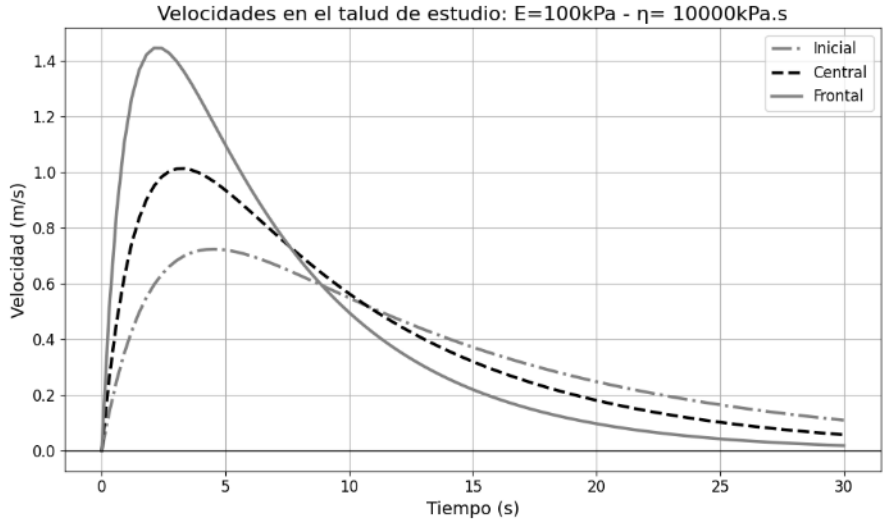
La evolución mostrada en la **Figura 4-19** muestra cómo, tras el inicio de la falla, la masa inestable se desplaza progresivamente sobre la espiral logarítmica que define la superficie de falla. En t=0 (curva gruesa gris), la configuración inicial del talud permanece íntegra. El contorno en negro continuo representa la interfase entre la masa inestable y el terreno firme justo al comienzo del movimiento. A partir de ahí, cada trazo (línea segmentada 5 s, 10 s, 15 s y curva gruesa continua 20 s) indica la posición de esa interfase a lo largo del tiempo.

En los primeros cinco segundos, la zona situada en la parte alta del talud cede rápidamente: la curva negra punteada y la línea de puntos y rayas muestran un desplazamiento pronunciado hacia la derecha y abajo (en coordenadas X–Z), como cabría esperar ante la mayor energía potencial inicial de las tajadas próximas al escarpe. Este primer tramo coincide con la fase de mayor aceleración, donde la rigidez (E=100 kPa) y la viscosidad (η=10 000 kPa·s) relativamente bajas aún permiten que la masa desarrolle velocidad antes de que las deformaciones internas empiecen a disipar la energía.

Hacia t=10 s y t=15 s las curvas se superponen en su extremo inferior, indicando que la porción central de la ladera –más cercana al punto de máxima curvatura de la espiral– asume ahora el alojamiento principal. Aquí, la velocidad decae en comparación con el arranque: las líneas guionadas se vuelven más planas, señal de que la disipación viscosa (proporcional a η) detiene gradualmente la aceleración. Esta fase corresponde a un régimen en el que la masa ha convertido ya gran parte de su energía potencial en energía cinética, y la continua deformación de la espiral obliga a un balance cada vez más limitado entre fuerza gravitatoria y resistencia viscosa.

Al cabo de 20 s (curva gruesa negra) el frente de la masa inestable ha alcanzado su máximo desplazamiento, un recorrido menor que lo que cabría predecir para una falla circular ideal. La forma suavizada de la curva indica que las porciones posteriores de la ladera (retaguardia) siguen desplazándose, pero con velocidades muy reducidas. El perfil final presenta una suave ondulación adaptada a la geometría logarítmica de la superficie, mostrando que el avance horizontal del frente ha sido limitado por la rigidez del medio y la gran viscosidad que impide inversiones bruscas de energía.

Figura 4-20: Evolución de las velocidades en el tiempo para un talud de H=10m, β=30°, E=10^2 kPa y η=10^4 kPa.s.



Fuente: Elaboración propia.

El comportamiento morfológico que se muestra en la **Figura 4-19** se puede explicar directamente a partir del análisis de las velocidades de los distintos sectores del talud, presentadas en la **Figura 4-20**.

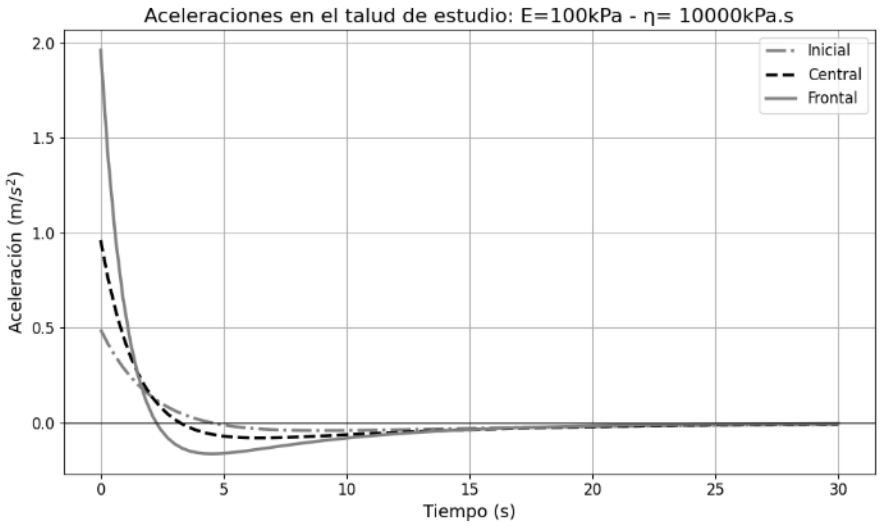
Las curvas de velocidad revelan que, aunque inicialmente toda la masa se acelera de forma coherente, alcanzando un máximo cercano a los 4 segundos, a partir de este punto se produce una diferenciación clara entre las velocidades de los tres sectores analizados. En particular, la velocidad del frente del talud (curva gris continua) comienza a experimentar desaceleración más rápida que la parte central (línea negra segmentada) e inicial (línea gris segmentada), cuyas velocidades son mayores durante un período considerable de tiempo posterior al pico.

Esta diferencia en la magnitud de las velocidades implica que las porciones posteriores de la masa inestable se desplazan más rápidamente que el frente, generando una acumulación de material que induce una compresión y levantamiento en la zona delantera. Este comportamiento es indicativo de un comportamiento dinámico no uniforme en el cuerpo del deslizamiento, donde las variaciones espaciales de velocidad y aceleración promueven deformaciones internas diferenciales. Tal comportamiento puede ser interpretado como una manifestación de la transferencia de energía cinética dentro de la masa en movimiento, influenciada por la resistencia basal y la evolución reológica del sistema.

A medida que el frente del deslizamiento pierde energía debido a la fricción y la resistencia del medio, su capacidad de avanzar disminuye, mientras que las partes posteriores, aún con mayor energía cinética, continúa avanzando y presionando contra el frente, generando las deformaciones acumulativas que se evidencian como un abultamiento o ascenso local del perfil topográfico.

En síntesis, el levantamiento del frente del deslizamiento observado en la evolución geométrica del talud es el resultado directo de una redistribución interna de velocidades y deformaciones, controlada por la interacción entre la inercia del movimiento y la resistencia del sistema. Este enfoque integrado, que combina la evolución morfológica y el análisis cinemático, permite comprender de manera más completa la dinámica de los taludes inestables y resalta la importancia de considerar perfiles de velocidad espacialmente diferencias en el estudio de movimiento complejos. En la **Figura 4-21** se muestra la evolución de las aceleraciones para las tres zonas analizadas del talud.

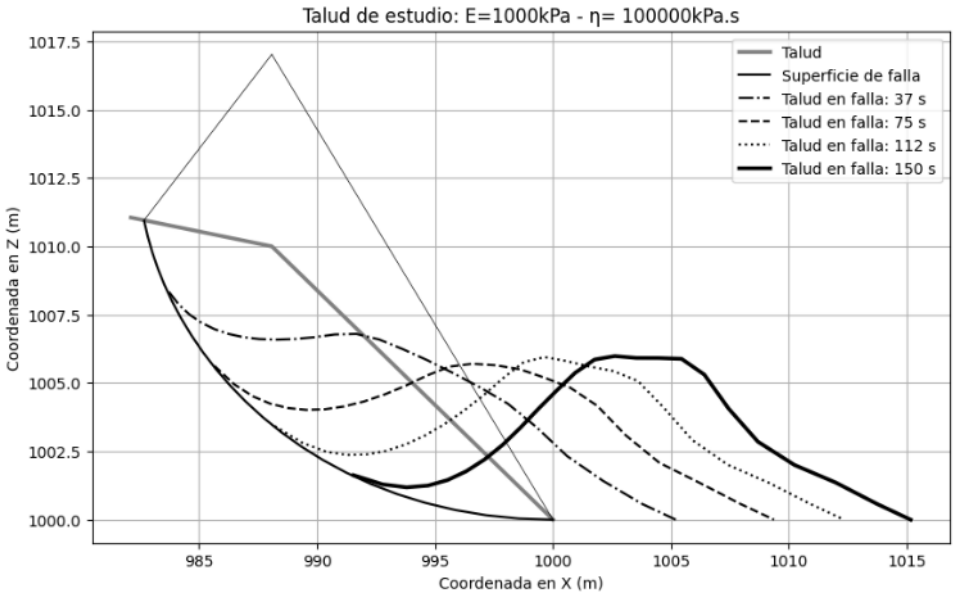
Figura 4-21: Evolución de las aceleraciones en el tiempo para un talud de H=10m, β=30°, E=10^2 kPa y η=10^4 kPa.s.



Fuente: Elaboración propia.

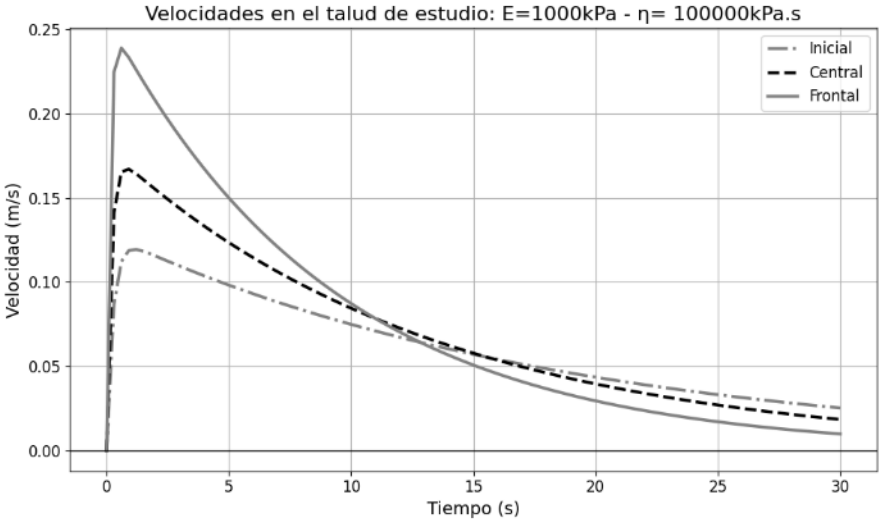
En la **Figura 4-22** y la **Figura 4-23**, se muestra la evolución temporal de las deformaciones y las velocidades para un talud con la misma geometría con incremento de la rigidez y la viscosidad. En la **Figura 4-24** y la **Figura 4-25** se presentan los resultados obtenidos para el caso de un talud de 15 m de altura con un mayor nivel de rigidez y viscosidad. El propósito es ilustrar cómo las variaciones de los parámetros reológicos condicionan la evolución de las formas que puede adoptar la masa inestable. Este comportamiento está condicionado por la evolución de las velocidades a lo largo de la masa inestable, nótese cómo en los taludes con grandes valores de viscosidad las velocidades exhiben un comportamiento asintótico a constante, es decir, sostiene un valor bajo de velocidad con el tiempo. En este tipo de procesos las deformadas tienden a ser casi paralelas en cada intervalo adicional simulado.

Figura 4-22: Evolución de los desplazamientos en el tiempo para un talud de H=10m, β=40°, E=10^3 kPa y η=10^5 kPa.s.



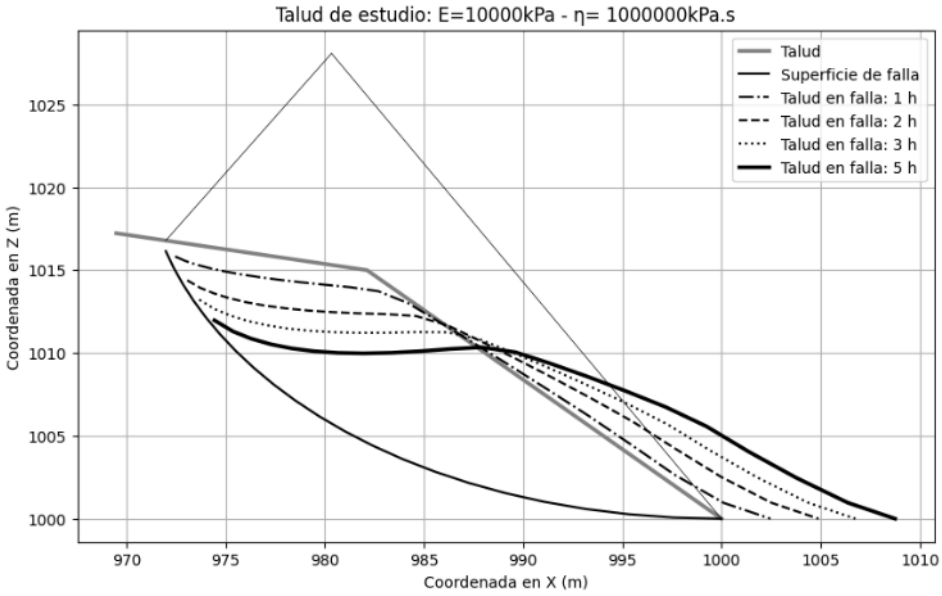
Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-23: Evolución de las velocidades en el tiempo para un talud de H=10m, β=40°, E=10^3 kPa y η=10^5 kPa.s.



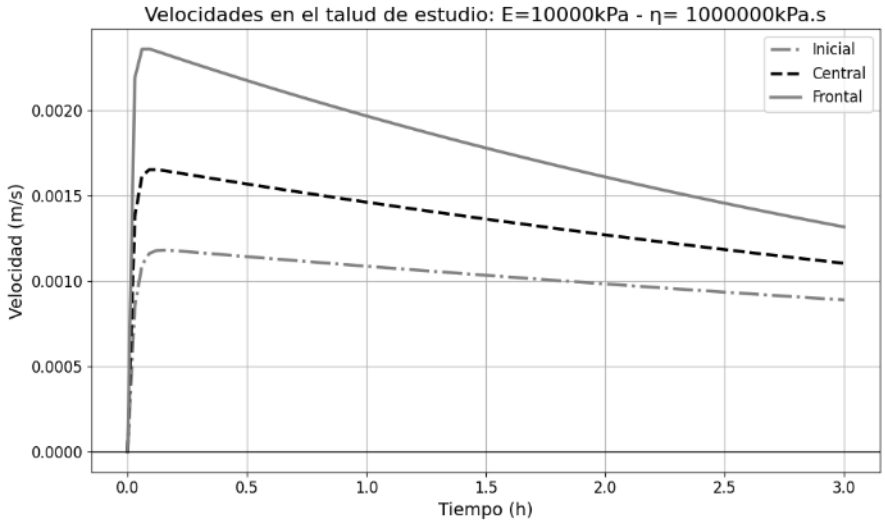
Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-24: Evolución de los desplazamientos en el tiempo para un talud de H=15m, β=40°, E=10^4 kPa y η=10^6 kPa.s.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4-25: Evolución de las velocidades en el tiempo para un talud de H=15m, β=40°, E=10^4 kPa y η=10^6 kPa.s.



Fuente: Elaboración propia.

A partir de la información reportada por las tres gráficas que muestran la evolución temporal de la velocidad, en todos los casos, se observan comportamientos característicos de sistemas sobreamortiguados, lo cual es coherente con la definición del modelo matemático desarrollado, donde la respuesta dinámica carece de oscilaciones y exhibe una tendencia monótona decreciente o estacionaria, dependiendo de la combinación de

los parámetros reológicos. Este tipo de comportamiento es típico de sistemas en los cuales la disipación viscosa domina sobre la inercia, dando lugar a movimientos lentos y atenuados, condición coherente con la naturaleza del problema abordado.

En el caso de menor viscosidad y rigidez ($E=10^2$ kPa y $\eta=10^4$ kPa.s) se observa un pico de velocidad pronunciado seguido por una desaceleración progresiva, con el frente del deslizamiento desacelerándose más rápidamente que las zonas central e inicial. Esta diferencia genera un comportamiento no uniforme que se traduce en una geometría deformada con abultamientos o levantamientos, debido a la acumulación de masa en las zonas frontales. Este caso representa un sistema sobreamortiguado con baja rigidez y viscosidad moderada, donde la masa puede alcanzar velocidades relativamente altas antes de estabilizarse.

En el caso de rigidez y viscosidad intermedias ($E=10^4$ kPa y $\eta=10^5$ kPa.s) las velocidades alcanzan valores menores y la desaceleración es menor. Aunque el frente sigue siendo el primero en desacelerar, las diferencias entre las tres curvas de velocidad son menos marcadas. Esto refleja una mayor resistencia interna al flujo y un efecto amortiguador más pronunciado, que reduce el gradiente de velocidad entre las distintas zonas del talud. Este comportamiento se traduce en deformadas menos abruptas, con geometrías transitoriamente más estables.

Por último, en el caso de mayor rigidez y viscosidad ($E=10^4$ kPa y $\eta=10^6$ kPa.s) se calculan velocidades muy bajas y prácticamente constantes en el tiempo. Las curvas son casi paralelas entre sí, lo cual indica que todas las partes del talud se desplazan a tasas similares. Esta condición genera deformadas que conservan la geometría inicial del talud, es decir, se presentan desplazamientos casi paralelos sin acumulación ni abultamientos significativos. El sistema, sobreamortiguado en extremo, exhibe una dinámica cuasi-estática o de reptación, dominada por la resistencia viscosa y con una respuesta inercial casi nula. En estos casos la representación de las aceleraciones tiende tan rápido a cero que no se consideró mostrar los gráficos ya que es poco lo que se puede ilustrar con estos.

En conjunto, los resultados evidencian que la relación entre rigidez y viscosidad condiciona fuertemente la respuesta dinámica del talud. A medida que el sistema se vuelve más sobreamortiguado, se minimizan los diferenciales de velocidad entre zonas, lo que conlleva

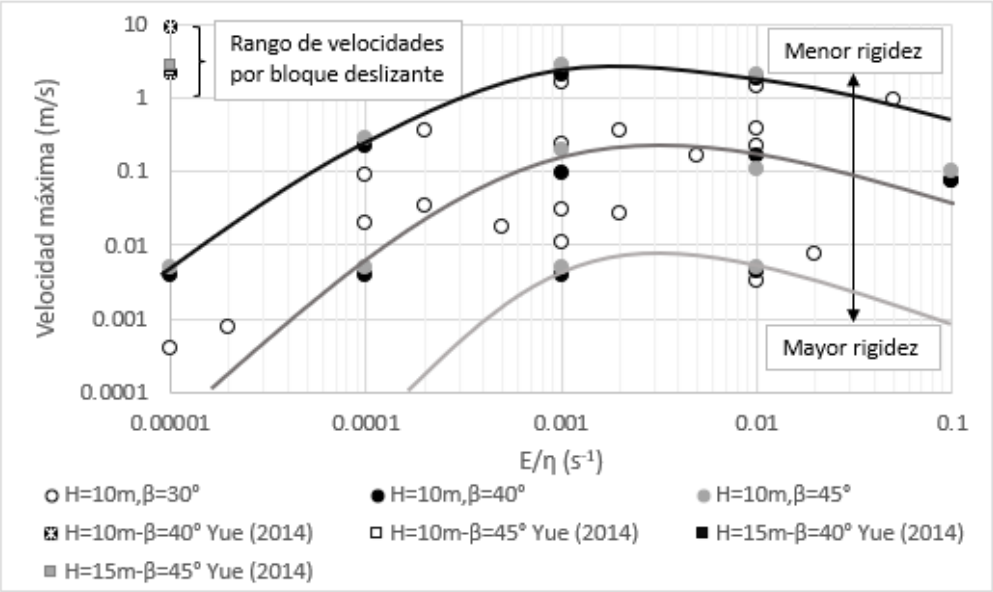
deformadas más paralelas y desplazamientos menos diferenciados a lo largo del perfil. Por tanto, las gráficas de velocidad constituyen una herramienta clave para anticipar la geometría final del deslizamiento, especialmente en sistemas donde la disipación viscosa gobierna la evolución temporal del proceso.

Las formas finales de los deslizamientos simulados pueden considerarse cualitativamente compatibles con configuraciones de depósito reportadas en algunos movimientos en masa, en tanto reflejan una acumulación central y un adelgazamiento hacia el frente y la cola bajo un régimen dominado por disipación. No obstante, en el contexto de este documento dichas geometrías deben interpretarse principalmente como el resultado del esquema de discretización por tajadas rígidas y de la reología adoptada, y no como una reproducción morfológica exacta de un evento real, dado que el modelo no incorpora procesos como segregación granulométrica, confinamiento lateral, erosión ni variaciones topográficas locales detalladas.

4.3.2 Análisis de la influencia de los parámetros reológicos en la dinámica de taludes inestables.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis de las velocidades características del movimiento de los taludes, específicamente la velocidad máxima, la cual se estudia en función de los parámetros reológicos del suelo. Esta variable permite comprender la intensidad del proceso de desplazamiento, así como las condiciones bajo las cuales se alcanza la mayor movilidad de la masa inestable. El análisis se realiza a partir de diferentes combinaciones de rigidez y viscosidad, permitiendo evaluar los efectos acoplados de estos parámetros sobre la dinámica del movimiento. Además, se comparan los resultados con antecedentes documentados en la literatura para validar el rango de velocidades obtenido. Este enfoque complementa los análisis previos centrados en la distancia de viaje y desplazamiento final, proporcionando una visión integral de la evolución dinámica del deslizamiento.

Figura 4-26: Relación entre la velocidad máxima de la masa inestable y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados – Influencia de la geometría.



Fuente: Elaboración propia.

La gráfica recoge la velocidad máxima alcanzada en cada una de las 60 simulaciones realizadas, en función del mismo parámetro E/η (módulo de elasticidad dividido por viscosidad), para las alturas de 10 m y 15 m y pendientes β = 30°,40° y 45°. A diferencia del desplazamiento (analizado en las secciones previas), aquí se observa que la velocidad máxima describe una campana invertida: partiendo de valores muy bajos de E/η, la velocidad crece con la rigidez relativa hasta alcanzar un óptimo en torno a $E/\eta \approx 10^{-3}\,s^{-1}$, para luego decrecer a rigideces aún mayores. Nótese cómo esta es la única relación en la cual los órdenes de magnitud de las velocidades se asemejan con los estimados aplicando la metodología de Yue (2014) cuya diferencia supera hasta 3 órdenes de magnitud respecto a las demás simulaciones.

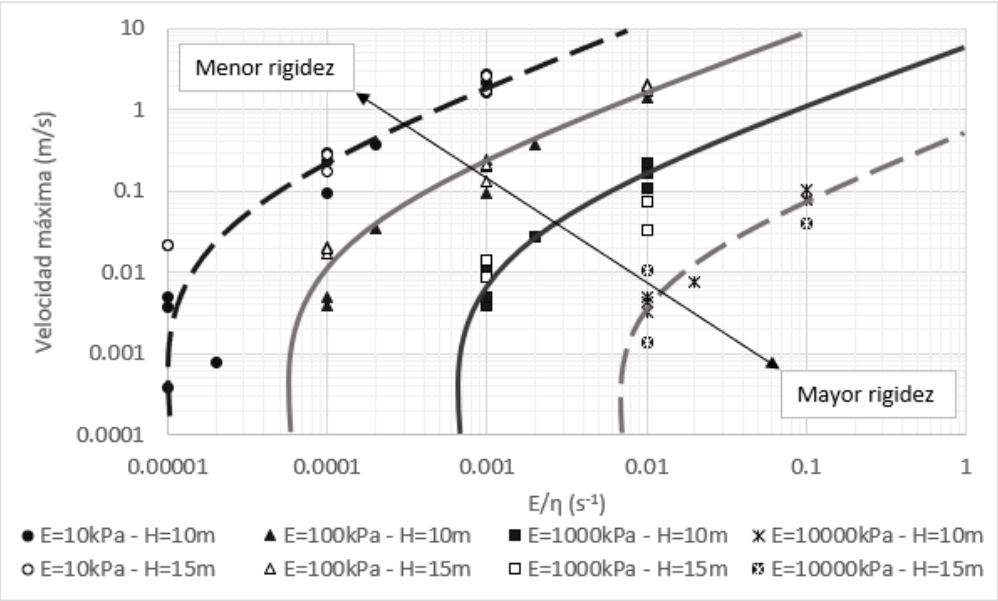
Una explicación para este comportamiento es que en sistemas extremadamente viscosos (valores bajos de E/η), la disipación frena el desarrollo de velocidades significativas; en sistemas extremadamente rígidos (valores altos de E/η), la masa queda “atrapada” por la alta rigidez, de modo que tampoco se alcanzan picos de velocidad elevados. Sólo en un punto intermedio el balance trabajo–energía genera la condición más favorable para acelerar la masa deslizada.

Al comparar las dos alturas, se aprecia que los taludes de 15 m (marcados con triángulos) tienden sistemáticamente a velocidades máximas mayores que sus homólogos de 10 m (círculos), especialmente en el rango donde E/η está cerca del óptimo. Ello refleja nuevamente que una mayor energía potencial inicial (por altura) se traduce en mayor capacidad de aceleración, siempre que ni la viscosidad ni la rigidez sean excesivas.

En relación a los gráficos de desplazamiento presentado en el numeral 4.2, vemos aquí que el óptimo de velocidad no coincide exactamente con el óptimo de desplazamiento: ambos ocurren en la misma vecindad de $E/\eta \approx 10^{-3}$, pero las curvas de velocidad caen más rápidamente al aumentar E/η. Esto sugiere que, aunque desplazamientos totales puedan mantenerse elevados para rigideces muy altas, hasta cierto punto, la velocidad punta se ve disminuida más drásticamente por la rigidez extrema.

En conjunto, esta gráfica reafirma la complejidad de la dinámica de taludes bajo analogías reológicas: ni la velocidad punta ni el desplazamiento total se maximizan al mismo tiempo, y el parámetro E/η controla una respuesta no lineal con un único punto de máxima energía cinética transferida. La comparación entre alturas y pendientes confirma además que la geometría del talud —altura y ángulo— modula tanto el nivel al que ascienden las velocidades máximas como la posición de ese pico en el eje de rigidez-viscosidad. Esta condición es fundamental para el diseño de modelos predictivos de movilidad de taludes, pues indica que optimizar la predicción de desplazamientos no garantiza al mismo tiempo el acierto en la predicción de las velocidades extremas.

Figura 4-27: Relación entre la velocidad máxima de la masa inestable y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados – Influencia de la altura y la rigidez.



Fuente: Elaboración propia.

En esta última curva se aprecia con claridad cómo la rigidez del talud (E) y su altura (H) interactúan para controlar la velocidad máxima alcanzada por la masa deslizante. En el eje horizontal se ha graficado el parámetro E / η, mientras que en el vertical está la velocidad pico o velocidad máxima que se alcanza cuando ocurre el proceso de inestabilidad, en escala logarítmica. Cada familia de puntos corresponde a un valor fijo de altura (marcado con relleno negro para H=10 m y con relleno blanco para H=15 m), y dentro de cada familia se distinguen cuatro rigideces diferentes (E=10 kPa, 10^2 kPa, 10^3 kPa y 10^4 kPa, en orden creciente).

Podemos observar primero que, conforme aumenta E / η —es decir, cuando el material es más rígido o menos viscoso— las velocidades máximas crecen, pero lo hacen siguiendo curvas de forma convexo-cóncava que se aplanan hacia la derecha. Para E / η muy bajo (el trazo más a la izquierda) las velocidades son pequeñas (<10^{-3} m/s), prácticamente independientes de la altura. Según la analogía reológica, cuando la rigidez es tan baja el talud se “dobla” casi sin desarrollar energía cinética, de modo que la altura adicional (H=15 m contra H=10 m) apenas impulsa el flujo.

Por el contrario, para rigideces intermedias (E alrededor de 10^2–10^3 kPa) aparece un efecto de acoplamiento con la altura: las curvas correspondientes a H=15 m (puntos blancos) están desplazadas hacia velocidades mayores que sus homólogas de H=10 m (rellenos oscuros). En este régimen, el trabajo potencial liberado al descender esos metros extra se transforma en energía cinética de manera más eficiente, y la masa alcanza velocidades pico sensiblemente más altas.

Finalmente, cuando E / η es muy grande (a la derecha de la gráfica), las curvas vuelven a converger y las velocidades máximas incluso pueden disminuir ligeramente con la altura. Este fenómeno ocurre porque un talud excesivamente rígido no consigue disipar energía por viscosidad; en lugar de acelerar libremente, las fuerzas elásticas internas retornan parte de la energía, frenando el sistema. El ascenso de velocidad con H se ve entonces compensado por el almacenamiento de energía elástica del material.

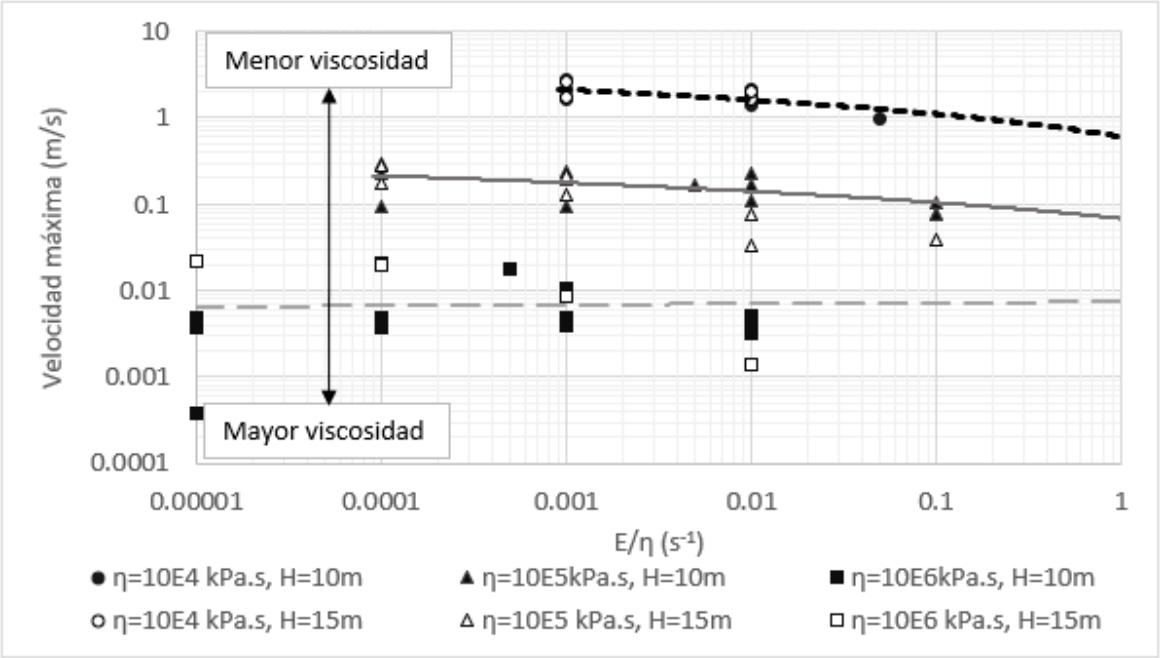
En resumen, bajo analogías reológicas y trabajo-energía, las gráficas que analizan las velocidades máximas en función de la geometría y los parámetros reológicos muestran tres dominios de respuesta: para rigideces muy bajas, la altura apenas importa; para rigideces moderadas, la altura tiene mayor influencia y dispara las velocidades pico; y para rigideces muy altas, el exceso de rigidez inhibe la aceleración, canalizando la energía hacia la deformación elástica y reduciendo el efecto de la altura. Este comportamiento subraya la importancia de calibrar simultáneamente E y η para predecir con exactitud las velocidades máximas de deslizamientos en función de la geometría del talud.

La gráfica presentada en la **Figura 4-28** muestra la relación entre la velocidad máxima alcanzada por la masa inestable y el parámetro E / η, para distintos escenarios de viscosidad y altura del talud. Como se ha discutido a lo largo del análisis, este tipo de representación permite identificar de manera clara el impacto de la resistencia viscosa en la dinámica del deslizamiento y cómo esta se ve modulada por las condiciones geométricas del sistema, particularmente la altura del talud.

El comportamiento de las curvas confirma tendencias discutidas anteriormente: a menor viscosidad, se favorecen mayores velocidades máximas, mientras que a mayor viscosidad,

el movimiento se amortigua significativamente, reduciendo la magnitud de la velocidad alcanzada por el frente.

Figura 4-28: Relación entre la velocidad máxima de la masa inestable y los parámetros reológicos del material para todos los análisis realizados – Influencia de la altura y la rigidez.



Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al efecto de la viscosidad, los resultados muestran diferencias marcadas. Para el caso de taludes de 10 m de altura, al comparar la velocidad máxima para η=10^4 kPa.s y η=10^5 kPa.s se observa una disminución de aproximadamente el 73%, diferencia que aumenta cuando se analizan los valores de velocidad máxima entre η=10^5 kPa.s y η=10^6 kPa.s, alcanzando diferencias porcentuales de hasta el 98%. En el caso de los taludes de 15 m de altura, estas diferencias de velocidad entre distintos niveles de viscosidad o amortiguamiento viscoso son sensiblemente menores, con diferencias del 36% para el primer caso y entre el 88% y el 93% para el segundo.

4.3.3 Presión de impacto

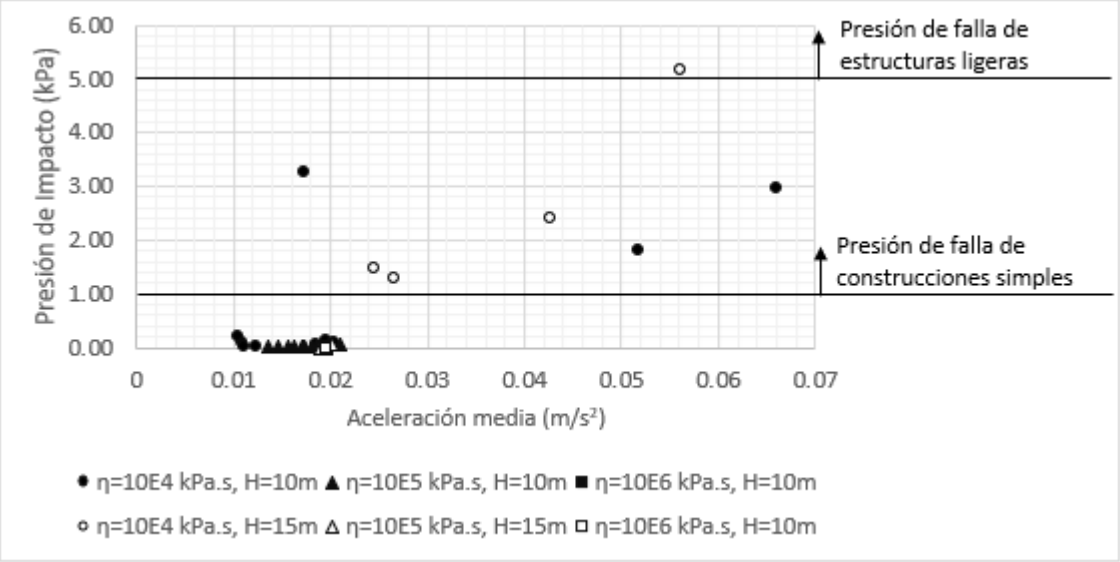
La gráfica que se presenta en la **Figura 4-29** tiene como propósito establecer un paralelismo conceptual y cuantitativo entre la presión de impacto generada por una masa inestable y su aceleración media alcanzada durante el proceso de deslizamiento. Para ello,

se adopta la metodología de estimación de presión de impacto propuesta por la Guía Metodológica para la Evaluación de Amenaza por Movimientos en Masa del Servicio Geológico Colombiano (SGC, 2016), la cual incorpora consideraciones empíricas y conservadoras basadas en la energía cinética del movimiento. La presión de impacto se calcula con la Ecuación 4-1, donde ρ es la densidad del material que compone el deslizamiento y v es la velocidad de impacto.

$$P_{imp} = \rho v^2 \tag{4-1}$$

En este marco, se buscó relacionar dicha estimación con la aceleración registrada en los modelos numéricos, con el fin de explorar la validez de un enfoque análogo al principio fundamental de la dinámica, donde la presión de impacto podría concebirse como una manifestación del producto entre masa y aceleración. Este análisis permite discutir la coherencia física entre ambas metodologías y evaluar si las aceleraciones derivadas de los modelos pueden constituirse en un insumo directo para aproximar los efectos dinámicos sobre estructuras o elementos expuestos a este tipo de amenazas.

Figura 4-29: Relación entre la presión de impacto y la aceleración media del proceso.



Fuente: Elaboración propia.

La gráfica presentada muestra la relación entre la presión de impacto estimada y la aceleración media alcanzada por una masa inestable durante el deslizamiento, con base

en diferentes configuraciones de altura del talud (10 m y 15 m) y viscosidades dinámicas ($\eta = 10^4$, 10^5 y 10^6 kPa·s). La estimación de la presión de impacto se ha realizado siguiendo la metodología propuesta por la Guía Metodológica del Servicio Geológico Colombiano (SGC, 2016), la cual también define umbrales críticos de presión asociados al fallo de construcciones simples (≈ 1 kPa) y estructuras ligeras (≈ 5 kPa), representados en la gráfica mediante líneas horizontales de referencia.

La guía define explícitamente las tipologías de Estructuras ligeras como edificaciones construidas con materiales tradicionales o de baja calidad, con sistema de muros cargueros; incluye adobe, bahareque, madera bruta, tapia pisada y prefabricadas. Y las Construcciones simples como edificaciones sin estructura definida, de carácter improvisado, construidas con materiales precarios o de recuperación; incluye construcciones en proceso y edificaciones en materiales de recuperación, pórticos y paneles de madera.

El análisis de los datos revela que sólo algunos casos con viscosidad baja ($\eta = 10^4$ kPa·s) superan el umbral de 1 kPa, lo cual indica un mayor potencial destructivo bajo estas condiciones. En particular, uno de estos casos asociado al talud de 15 m, supera incluso los 5 kPa, lo que sugiere la posibilidad de comprometer estructuras más livianas en zonas expuestas. Esta tendencia confirma el rol fundamental que desempeñan tanto la altura del talud como la viscosidad del material en la generación de presiones dinámicas relevantes. A medida que la aceleración media aumenta —fenómeno más notorio en materiales menos viscosos y con mayor altura— la presión de impacto también se incrementa, evidenciando una correlación física entre ambas magnitudes pese a haber sido analizada de manera independiente. Este comportamiento respalda la utilidad del parámetro de aceleración como un insumo representativo para estimar de forma indirecta la presión de impacto y, por ende, la amenaza estructural asociada a deslizamientos. Por el contrario, para taludes con materiales de alta viscosidad ($\eta = 10^6$ kPa·s), incluso los casos de mayor altura no superan el umbral de daño para construcciones simples, ratificando que las condiciones reológicas limitan de forma significativa el potencial dinámico de la masa inestable.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Las conclusiones del trabajo reflejan de manera estructurada los principales hallazgos derivados del desarrollo y aplicación de un modelo dinámico para taludes inestables, formulado bajo el principio de trabajo y energía y utilizando analogías reológicas para simular el comportamiento mecánico de la masa deslizada. A partir del análisis presentado en el capítulo 4, se identificaron patrones claros de respuesta dinámica que permiten comprender, con mayor profundidad, los mecanismos involucrados en la movilización de taludes fallados.

En primer lugar, se logró demostrar que el enfoque basado en principios de trabajo y energía es una herramienta robusta para describir el comportamiento dinámico de taludes mediante la representación del sistema como un conjunto de tajadas conectadas por elementos viscoelásticos y viscoplásticos. Esta formulación permitió capturar adecuadamente la interacción entre la masa inestable y la superficie de falla, incluyendo los efectos de amortiguamiento interno y disipación de energía por fricción, así como las transiciones entre distintos regímenes de movimiento.

Uno de los hallazgos más relevantes corresponde al análisis de la relación entre los parámetros reológicos (módulo de rigidez E y viscosidad dinámica η) y la respuesta dinámica del sistema. Se evidenció que el cociente E/η, adoptado como parámetro adimensional para evaluar el comportamiento energético del sistema, constituye una métrica efectiva para describir la evolución de las velocidades, aceleraciones y desplazamientos a lo largo del tiempo. En particular, se observó que sistemas con baja viscosidad (es decir, altos valores de E/η) exhiben movimientos más rápidos y con menores tiempos de detención, lo que se traduce en mayores distancias de viaje. Este

comportamiento es coherente con las características de deslizamientos rápidos como flujos o colapsos.

Además, el modelo permitió identificar cómo la distribución espacial de la velocidad influye directamente en la deformación interna del cuerpo del deslizamiento. En escenarios donde se evidenció un desacoplamiento en la velocidad entre el frente del deslizamiento y su parte posterior, se generaron acumulaciones de material que se manifiestan como abombamientos o levantamientos, lo cual fue claramente observado en las deformadas obtenidas para distintos escenarios. Estos resultados refuerzan la importancia de analizar la evolución temporal del movimiento a lo largo de toda la masa inestable y no sólo en términos globales como la distancia de viaje.

Desde el punto de vista de la sensibilidad de los parámetros geométricos, se verificó que la altura del talud es un factor determinante en la energía disponible para el movimiento. Las simulaciones mostraron un aumento porcentual consistente de la distancia de viaje y de las velocidades máximas a medida que se incrementa la altura, lo cual está en concordancia con la energía potencial inicial mayor disponible para sistemas de mayor volumen. Sin embargo, se evidenció que este incremento no es lineal, y su efecto está fuertemente modulado por los parámetros reológicos, lo cual valida la necesidad de realizar análisis paramétricos que integren ambas dimensiones.

Se realizó una caracterización indirecta de la rigidez y la viscosidad mediante el análisis paramétrico de las respuestas dinámicas simuladas. El estudio permitió identificar rangos de viscosidad y rigidez que reproducen respuestas dinámicas coherentes con desplazamientos y velocidades observadas en eventos reales reportados en la literatura. Adicionalmente, los resultados del modelo fueron contrastados con metodologías empíricas de estimación de distancias de viaje, particularmente las propuestas por Yue (2014) y Moncayo & Ávila (2022); y de las velocidades según el primer autor. Aunque las diferencias porcentuales entre los valores obtenidos y las curvas de referencia fueron variables según el ángulo de inclinación y altura del talud, se observó una tendencia general de sobreestimación de las distancias por parte del modelo desarrollado por este trabajo, razón por la cual, los resultados de este tipo de modelos pueden tomarse como un límite superior de las distancias de viaje, además, resaltan la necesidad de una adecuada caracterización de los materiales involucrados en los procesos de inestabilidad. Con

respecto a las velocidades, las metodologías empíricas tienden a sobreestimar los valores en comparación con los resultados del modelo, especialmente para escenarios sobreamortiguados. Estos hallazgos sugieren que el modelo propuesto aporta una visión más conservadora y físicamente fundamentada del desplazamiento esperado, lo que puede ser particularmente útil en contextos de evaluación de amenazas o diseño de obras de mitigación.

Finalmente, el trabajo deja abiertas diversas perspectivas de investigación. Entre ellas, la posibilidad de incorporar de forma explícita la acción de fuerzas externas como sobrecargas, espectros de aceleraciones sísmicas o procesos de infiltración de agua en la formulación del modelo; el ajuste de los parámetros reológicos a partir de ensayos de laboratorio o retroanálisis de eventos reales; y la extensión del modelo a representaciones tridimensionales o con geometrías complejas de falla. El marco teórico y numérico planteado constituye una base sólida para futuros desarrollos en modelación dinámica de procesos de remoción en masa, con aplicaciones tanto en investigación como en ingeniería aplicada.

Es importante precisar que los análisis y conclusiones presentados en este documento se formulan únicamente en relación con el modelo desarrollado y con los modelos seleccionados para la comparación, es decir, se circunscriben al comportamiento relativo que cada formulación describe dentro del marco conceptual adoptado. En consecuencia, estos resultados no deben interpretarse como una validación del grado de correspondencia del modelo con eventos reales específicos, ni como una demostración de que las respuestas obtenidas reproduzcan de manera fiel el comportamiento que experimentarían taludes con las características analizadas. El propósito es evaluar tendencias, coherencia y sensibilidad de las respuestas entre modelos, sin afirmar ni descartar su ajuste cuantitativo frente a casos instrumentados o medidos.

5.2 Recomendaciones

Las formulaciones en las que se basó esta investigación están sustentadas en la aplicación directa del principio de trabajo y energía y la Segunda Ley de Newton. No obstante, estos enfoques energéticos tienen diferentes frentes de aplicación, por lo cual, este tema también puede ser abordado con la aplicación de teorías como: Formulación de impulso-cantidad

de movimiento, Conservación del momento angular y con la Aplicación de las Funciones de Energía de Lagrange.

Además, los resultados obtenidos indican que la aplicación de esta metodología ofrece buena estabilidad numérica, por lo tanto, se podrían incluir aspectos que simulen la heterogeneidad de los taludes, procesos de ablandamiento o endurecimiento por deformación, efectos de sobrecargas transitorias en la magnitud de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Aunque el enfoque adoptado en este trabajo considera una representación unidimensional en dirección del deslizamiento, se sugiere evaluar la extensión del modelo a configuraciones 2D o 3D. Esto permitiría incorporar efectos de geometría transversal, distribución espacial de propiedades mecánicas, y fricción interna variable, ampliando así el espectro de aplicación.

Es recomendable complementar los hallazgos obtenidos en este trabajo con estudios de caso donde se disponga de información detallada sobre deslizamientos documentados, que incluya mediciones de desplazamiento, tiempo de ocurrencia y condiciones geométricas y geotécnicas. Esto permitirá calibrar el modelo propuesto, contrastar los resultados numéricos con registros empíricos y fortalecer su aplicabilidad en escenarios reales de amenaza y riesgo.

Dado que el comportamiento del sistema depende sensiblemente del cociente E/η, se sugiere fomentar la realización de ensayos de laboratorio e interpretación de back-analysis que permitan estimar con mayor precisión estos parámetros para diferentes tipos de suelos, particularmente aquellos susceptibles a deformaciones viscosas.

Se recomienda que los trabajos posteriores, basados en este método o en enfoques similares, repliquen eventos específicos con el fin de evaluar el grado de ajuste del modelo frente a casos reales que cuenten con mediciones e instrumentación (registros de desplazamiento, velocidad, aceleración y/o presión de poros).

Finalmente, se recomienda vincular los resultados del modelo dinámico con metodologías de estimación del riesgo, particularmente aquellas orientadas a la evaluación de presión de impacto y distancia de afectación. Esto contribuirá a mejorar la caracterización del

escenario de amenaza y a fundamentar criterios de diseño de obras de mitigación y planificación territorial.

A. Anexo: Código de programación que implementa la metodología.

```
#Programa Tesis de maestría en Geotecnia
#Código elaborado por Juan Sebastián Reinosa Guzmán - Ingeniero Civil - Universidad Nacional de Colombia
#Dinámica de taludes fallados
#Variables
#s0: Posición inicial de las masas concentradas que representan las tajadas del talud en falla
#n: Número de tajadas o masas concentradas que definen el talud, este definirá el tamaño de las matrices y sistemas de ecuaciones
#m: Vector de 1xn que contiene el valor de las masas concentradas
#delta_t: paso del tiempo para usar en la solución del sistema de EDNL (Ecuaciones diferenciales no lineales) bajo un esquema de diferencias finitas (DF)
#RC: Radio de curvatura de la espiral logarítmica
#alpha_t0: vector de 1xn que contiene la pendiente de la espiral logarítmica de las n masas concentradas al tiempo inicial
#alpha_t: vector de 1xn que contiene la pendiente de la espiral logarítmica de las n masas concentradas en un tiempo t cualquiera
#c: vector de 1xn que contiene el intercepto de cohesión entre las masas y la superficie de falla
#phi: vector de 1xn que contiene el ángulo de resistencia al corte entre las masas y la superficie de falla
#k: vector de 1xn que contiene el módulo de elasticidad o rigidez entre las masas adyacentes
#mu: vector de 1xn que contiene la constante de viscosidad entre las masas adyacentes y entre masas y la superficie de falla
#l_t0: vector de 1xn que contiene el ancho de las tajadas para el tiempo inicial
#l: vector de 1xn que contiene el ancho de las tajadas para un tiempo t
#u_t0: Vector de 1xn que contienen la presión de poros en la base de las tajadas en el tiempo inicial
#u: Vector de 1xn que contienen la presión de poros en la base de las tajadas en un tiempo t
#up_t0: Vector de 1xn que contienen la presión de poros promedio a lo alto de las tajadas en el tiempo inicial
#up: Vector de 1xn que contienen la presión de poros promedio a lo alto de las tajadas en un tiempo t
#h_t0: Altura promedio de las tajadas en el tiempo inicial
#h: Altura promedio de las tajadas en un tiempo t

#Librerías
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
np.set_printoptions(precision=4)

#Funciones
def Jacobian (U_, T, n):
```

```
  #Función para calcular la matriz jacobiana del sistema dinámico
  #Llenando la diagonal principal
  jacob = np.zeros((n,n))
  for i in range(len(jacob)):
    jacob[i,i] = U_[i]
  #Llenando la diagonal superior
  #for i in range(len(jacob)-1):
  for i in range(0,len(jacob)-1):
    if i == 0: jacob[i,i+1] = 2*T[i+1]
    else: jacob[i,i+1] = T[i+1]

  #Llenando la diagonal inferior
  #for i in range(len(jacob)-1):
  for i in range(len(jacob)-1):
    if i == len(jacob)-2: jacob[i+1,i] = 2*T[i+1]
    else: jacob[i+1,i] = T[i]
  return jacob

def Inv_Mat(A):
  # Calcular la matriz inversa
  try:
    A_inv = np.linalg.inv(A)
    return A_inv
  except np.linalg.LinAlgError:
    print("La matriz no es invertible.")

def log_spiral(r1, theta1, r2, theta2, n_points, phi):

  r1 = r2 / np.exp(theta2 * np.tan(phi))
  theta_values = np.linspace(theta1, theta2, n_points)
  r_values = r1 * np.exp(theta_values*np.tan(phi))
  s_values = (r1/np.sin(phi)) * (np.exp(theta_values*np.tan(phi)) - 1)
  RC_values = r_values / np.cos(phi)
  x_coords = r_values * np.cos(theta_values)
  y_coords = r_values * np.sin(theta_values)

  return x_coords, y_coords, s_values, RC_values, theta_values


def Nivel_freatico (H_slope, betha, x, f_nf):
  HW = f_nf *  H_slope #Altura del nivel freático en la cara del talud medido respecto a la pata del
talud
  HNF = f_nf * H_slope #Altura inicial de la parábola que define el nivel freático
  a = HW / np.sin(betha) #Parámetro de la parábola de Dupuit

  if x == 0:
    h_nf = f_nf*H_slope
  elif x < a*np.cos(betha):
    h_nf = 0
  else:
    h_nf = np.sqrt(2*a*(np.power(np.sin(betha),2)/np.cos(betha))*x - np.power(a*np.sin(betha),2))
  return h_nf

def geometry_update (s_cal, r1, r2, theta2, phi, x_0, z_0, initial_angle, n):
  theta_update = np.zeros(n)
  r1 = r2 / np.exp(theta2*np.tan(phi[0]))
```

```
  for i in range(n):
    theta_update[i] = (1/np.tan(phi[i])) * np.log(((np.sin(phi[i])*s_cal[i])/(r1))+1)

  r_update = r1*np.exp(theta_update*np.tan(phi))
  x_update = x_0 - r_update*np.cos(theta_update)
  z_update = z_0 - r_update*np.sin(theta_update)

  return x_update, z_update, r_update

def geometry_update_2 (s_cal, r1, r2, theta2, phi, x_0, z_0, initial_angle, n, z_b=1000):
  theta_update = np.zeros(n)
  r1 = r2 / np.exp(theta2*np.tan(phi[0]))
  for i in range(n):
    theta_update[i] = (1/np.tan(phi[i])) * np.log(((np.sin(phi[i])*s_cal[i])/(r1))+1)

  r_update = r1*np.exp(theta_update*np.tan(phi))
  x_update = x_0 - r_update*np.cos(theta_update)
  z_update = z_0 - r_update*np.sin(theta_update)
  for i in range(n):
    if theta_update[i] >= theta2: z_update [i] = z_b

  return x_update, z_update, r_update

def slope_mov (X_N, Z_N, x_update, z_update, n):
  #Esta función actualiza las posiciones de las tajadas producto de la inestabilidad
  X_N_update = X_N.copy()
  X_N_update[:n] = x_update
  dif_x = X_N_update - X_N
  X_N_update[n] += dif_x[-2]

  Z_N_update = Z_N.copy()
  Z_N_update[:n] = z_update
  dif_z = Z_N_update - Z_N
  Z_N_update[n] += dif_z[-2]
  for i in range(len(Z_N_update)):
    if Z_N_update[i] < 1000:
      Z_N_update[i] = 1000
  b_taj_update = np.zeros(n)

  for i in range (n): b_taj_update[i] = (X_N_update[i+1] - X_N_update[i])

  h_taj_update = vol_taj / b_taj_update

  dif_h = h_taj_update - h_taj

  Z_T_update = Z_N_update.copy()
  Z_T_update[:n] += h_taj_update

  return X_N_update, Z_N_update, Z_T_update, b_taj_update, h_taj_update

def sismo_update (kh_max, t, lam=0.5):
  lam = 0.5
  kh_t = kh*np.exp(-lam*t)
  return kh_t

def pore_pressure_inc (n, m, k, eta, v0, B_j, t):
```

```
 #Esta función calcula los cambios en las presiones de poros mediante una analogía
 #reológica de un amortiguador viscoso en dirección normal
 v0 = np.ones(n)*v0
 z0 = np.ones(n)*(m*9.81*B_j/k)
 try:
   wn = np.sqrt(k/m)
   zeta = eta /(2*np.sqrt(k*m))
   sqrt_term = np.sqrt(np.power(zeta,2)-1)
   lambda1 = -wn*(zeta + sqrt_term)
   lambda2 = -wn*(zeta - sqrt_term)
   c1 = z0 - (v0-lambda1*z0)/(lambda2 - lambda1)
   c2 = (v0-lambda1*z0)/(lambda2 - lambda1)
   Vz = c1*lambda1*np.exp(lambda1*t) + c2*lambda2*np.exp(lambda2*t)
   return Vz
 except ValueError:
   # Handle the case where the square root is of a negative number
   print("Warning: Cannot calculate square root of a negative number. Returning zero for pore
pressure increment.")
   return np.zeros(n)

def failure_surface_point (n, phi, betha, betha_2, H_slope, initial_angle, final_angle, x_b, z_b,
density, kh_seudo, cohesion, f_x0_min, f_x0_max):
 #Esta función determina la superficie de falla más crítica
 f_x0_list = np.linspace (f_x0_min, f_x0_max, 10)
 FS_def = np.zeros(len(f_x0_list))

 for ff in range(len(f_x0_list)):

   x_0 = x_b - f_x0_list[ff]*H_slope/np.tan(betha) # Este punto puede ser arbitrario, siempre que sea
menor que x_b y fx_0 sea mayor que 0.55
   z_0 =  z_b + (x_b - x_0)/np.tan(phi)  # Punto de inicio de la espiral
   x_c = x_b - H_slope/np.tan(betha) #Punto de cambio de la pendiente del talud
   z_c = z_b + H_slope #Altura a la cual cambia la inclinación del talud
   x_a = (z_c - z_0 + x_0*np.tan(initial_angle) + x_c*np.tan(betha_2)) / (np.tan(initial_angle) +
np.tan(betha_2)) #Punto más alto del talud
   z_a = z_c + (x_c - x_a)*np.tan(betha_2) #Punto más alto del talud
   # Plotear el talud
   slope_gx = [x_a, x_c, x_b]
   slope_gz = [ z_a, z_c, z_b]

   # Generación de la superficie de falla
   r_t0 = np.sqrt(np.power(x_a - x_0,2) + np.power(z_a - z_0,2)) #Radio inicial de la espiral
logarítmica
   r_tf = np.sqrt(np.power(x_b - x_0,2) + np.power(z_b - z_0,2)) #Radio final de la espiral logarítmica
   r1 = r_t0
   theta1 = np.pi/4
   r2 = r_tf
   theta2 = np.pi/2 + phi

   x_coords, z_coords, s_values, RC_values, theta_values = log_spiral(r1, theta1, r2, theta2, n, phi)

   X_N, Z_N = x_0 - x_coords, z_0 -z_coords

   #Definición de las tajadas
   Z_T = np.zeros (n)
   for x in range(len(X_N)):
```

```
  if X_N[x] >= x_a and X_N[x] < x_c:
    Z_T[x] = z_c + (x_c - X_N[x])*np.tan(betha_2)
  elif X_N[x] >= x_c and X_N[x] <= x_b:
    Z_T[x] = z_b + (x_b - X_N[x])*np.tan(betha)

#Limpiar tajadas que no están al interior del talud
jump = 0
for j in range(len(Z_N)):
  if Z_T[j] < Z_N[j]:
    #print(j)
    #print(X_N[j])
    jump = j +1
Z_N = Z_N[jump:]
X_N = X_N[jump:]
Z_T = Z_T[jump:]
s_values = s_values[jump:]
RC_values = RC_values[jump:]

n = n-jump

n = n-1

#Definición de las tajadas
h_face = np.zeros (n+1) #Altura de las caras de las tajadas
h_taj = np.zeros (n) #Altura media de las tajadas
b_taj = np.zeros (n) #Ancho de las tajadas
vol_taj = np.zeros (n) #Volumen de las tajadas por unidad de profundidad

for i in range (len(Z_T)):
  h_face[i] = Z_T[i] - Z_N[i]
for i in range (n):
  h_taj[i] = (h_face[i] + h_face[i+1])/2
  b_taj[i] = (X_N[i+1] - X_N[i])
  vol_taj[i] = h_taj[i]*b_taj[i]

#Definición del Nivel Freático
h_nf, z_nf = np.zeros(n), np.zeros(n) #curva de dupuit y elevación del nivel del agua
u, up = np.zeros(n), np.zeros(n) #Presión de poros en la base y las paredes de la tajada
alpha_t0 = np.zeros(n) #Pendiente en la base de cada tajada

for j in range(n): alpha_t0[j] = np.arctan(abs(Z_N[j]-Z_N[j+1])/abs(X_N[j]-X_N[j+1]))

for j in range(len(h_nf)):
  h_nf[j] = Nivel_freatico(H_slope, betha, (x_b - X_N[j]), f_nf = 0.3)
  if h_nf[j] == 0:
    z_nf[j] = Z_T[j]
  else:
    z_nf[j] = z_b + h_nf[j]

#-----------------------------------#
h_nf_taj = z_nf[:n] - Z_N[:n] #Altura del nivel freático respecto a la base de cada tajada
h_nf_taj[h_nf_taj < 0] = 0
#h_nf_taj[-1] = 0
h_nf_taj = np.nan_to_num(h_nf_taj, nan=0)

for j in range(len(u)-1):
```

```
    up[j] = 0.5*(9.81*h_nf_taj[j]*np.power(np.cos(alpha_t0[j]),2))*h_nf_taj[j]
    u[j] = 0.5*(9.81*h_nf_taj[j]*np.power(np.cos(alpha_t0[j]),2) +
0.5*(9.81*h_nf_taj[j+1]*np.power(np.cos(alpha_t0[j+1]),2)))*b_taj[j]
    #u[n-1] = u[n-2]

  #--------Cálculo del factor de seguridad por equilibrio límite----------
  #Empleando el método de Janbu Simplificado
  FSsup = 2.0 #Factor de seguridad supuesto
  delta_E_sup = 0 # Diferencial de empujes supuesto
  density = density #Densidad del material que conforma el talud
  w_j = vol_taj*density*9.81 #Peso de cada tajada
  a = kh_seudo
  phi_j = np.ones(n)*phi
  c_j = np.ones(n)*cohesion

  tolerance_FS = 1e-3  # Define la tolerancia para la convergencia
  max_iterations = 100 # Define el número máximo de iteraciones
  iteration, error_FS = 0, 1

  while error_FS > tolerance_FS and iteration < max_iterations:

    eta_phi_j = np.ones(n) + (np.tan(alpha_t0)*np.tan(phi_j))/FSsup
    numerador = np.sum(((w_j*(np.ones(n) - a*np.tan(alpha_t0)) - u/np.cos(alpha_t0))*np.tan(phi_j)
- c_j*b_taj*np.power(1/np.cos(alpha_t0),2)) / eta_phi_j)
    denominador = 0
    for i in range(n-1):
      denominador += -delta_E_sup + (w_j[i]*(np.tan(alpha_t0[i] + a) + (up[i] - up[i+1])*eta_phi_j[i])) /
eta_phi_j[i]

    FS_cal = numerador / denominador

    delta_E_cal = np.zeros(n)
    for i in range(n-1):
      delta_E_cal[i] = (w_j[i]*(np.tan(alpha_t0[i])+a) + (up[i] - up[i+1])*eta_phi_j[i]) / eta_phi_j[i] -
1/FS_cal * (w_j[i]*(1-a*np.tan(alpha_t0[i]))*np.tan(phi_j[i]) - u[j]*np.tan(phi_j[i])/np.cos(alpha_t0[i]) -
c_j[i]*b_taj[i]*np.power(1/np.cos(alpha_t0[i]),2)) / eta_phi_j[i]

    delta_E_sup = delta_E_cal[-1] - delta_E_cal[0]

    error_FS = np.abs(FSsup - FS_cal)
    FSsup = FS_cal

    iteration += 1

  FS_def[ff] = FS_cal

 min_index = np.argmin(FS_def)

 return f_x0_list[min_index], FS_def[min_index]

#Discretización --- Esto irá en la parte inicial del código
n = 25 # Cantidad de masas o tajadas
# Discretización de la espiral logarítmica
#--Parámetros geométricos
phi = np.radians(35)  # Ángulo de la espiral
betha = np.radians(40) #Inclinación del talud
```

```
betha_2 = np.radians(10)#Inclinación de la corona del talud
H_slope = 15 #Altura del talud
initial_angle = np.pi / 4  # Ángulo inicial de la espiral
final_angle = np.pi / 2 + phi  # Ángulo final de la espiral

x_b, z_b = 1000, 1000 #Coordenadas del punto B, base del talud
f_x0 = 1.1
x_0 = x_b - f_x0*H_slope/np.tan(betha) # Este punto puede ser arbitrario, siempre que sea menor que x_b y fx_0 sea mayor que 0.55
z_0 =  z_b + (x_b - x_0)/np.tan(phi)  # Punto de inicio de la espiral
x_c = x_b - H_slope/np.tan(betha) #Punto de cambio de la pendiente del talud
z_c = z_b + H_slope #Altura a la cual cambia la inclinación del talud
x_a = (z_c - z_0 + x_0*np.tan(initial_angle) + x_c*np.tan(betha_2)) / (np.tan(initial_angle) + np.tan(betha_2)) #Punto más alto del talud
z_a = z_c + (x_c - x_a)*np.tan(betha_2) #Punto más alto del talud
# Plotear el talud
slope_gx = [x_a, x_c, x_b]
slope_gz = [ z_a, z_c, z_b]

# Generación de la superficie de falla
r_t0 = np.sqrt(np.power(x_a - x_0,2) + np.power(z_a - z_0,2)) #Radio inicial de la espiral logarítmica
r_tf = np.sqrt(np.power(x_b - x_0,2) + np.power(z_b - z_0,2)) #Radio final de la espiral logarítmica
r1 = r_t0
theta1 = np.pi/4
r2 = r_tf
theta2 = np.pi/2 + phi
x_coords, z_coords, s_values, RC_values, theta_values = log_spiral(r1, theta1, r2, theta2, n, phi)
X_N, Z_N = x_0 - x_coords, z_0 -z_coords

#Definición de las tajadas
Z_T = np.zeros (n)
for x in range(len(X_N)):
  if X_N[x] >= x_a and X_N[x] < x_c:
    Z_T[x] = z_c + (x_c - X_N[x])*np.tan(betha_2)
  elif X_N[x] >= x_c and X_N[x] <= x_b:
    Z_T[x] = z_b + (x_b - X_N[x])*np.tan(betha)

#Limpiar tajadas que no están al interior del talud
jump = 0
for j in range(len(Z_N)):
  if Z_T[j] < Z_N[j]:
    jump = j +1
Z_N = Z_N[jump:]
X_N = X_N[jump:]
Z_T = Z_T[jump:]
s_values = s_values[jump:]
RC_values = RC_values[jump:]
theta_values = theta_values[jump:]

n = n-jump

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(slope_gx, slope_gz, label='Talud', color = 'green')
plt.plot([x_0, X_N[0]], [z_0, Z_T[0]], color = 'black')
plt.plot([x_0, x_b], [z_0, z_b], color = 'black')
plt.scatter(X_N, Z_N, color='red', marker='o')
```

```
plt.scatter(X_N, Z_T, color='red', marker='o')
plt.plot(X_N, Z_N)
for x in range(len(X_N)):
  plt.plot([X_N[x], X_N[x]], [Z_N[x], Z_T[x]], color = 'red', linestyle = '--' )

plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Z')
plt.title('Talud de estudio')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

n = n-1

#Definición de las tajadas
h_face = np.zeros (n+1) #Altura de las caras de las tajadas
h_taj = np.zeros (n) #Altura media de las tajadas
b_taj = np.zeros (n) #Ancho de las tajadas
vol_taj = np.zeros (n) #Volumen de las tajadas por unidad de profundidad

for i in range (len(Z_T)):
  h_face[i] = Z_T[i] - Z_N[i]
for i in range (n):
  h_taj[i] = (h_face[i] + h_face[i+1])/2
  b_taj[i] = (X_N[i+1] - X_N[i])
  vol_taj[i] = h_taj[i]*b_taj[i]

#Definición del Nivel Freático
h_nf, z_nf = np.zeros(n), np.zeros(n) #curva de dupuit y elevación del nivel del agua
u, up = np.zeros(n), np.zeros(n) #Presión de poros en la base y las paredes de la tajada
alpha_t0 = np.zeros(n) #Pendiente en la base de cada tajada

for j in range(n): alpha_t0[j] = np.arctan(abs(Z_N[j]-Z_N[j+1])/abs(X_N[j]-X_N[j+1]))

for j in range(len(h_nf)):
  h_nf[j] = Nivel_freatico(H_slope, betha, (x_b - X_N[j]), f_nf = 0.5)
  if h_nf[j] == 0:
    z_nf[j] = Z_T[j]
  else:
    z_nf[j] = z_b + h_nf[j]

for j in range(len(z_nf)):
  if z_nf[j] > Z_T[j] : z_nf[j] = Z_T[j]
#-----------------------------------#
h_nf_taj = z_nf[:n] - Z_N[:n] #Altura del nivel freático respecto a la base de cada tajada
h_nf_taj[h_nf_taj < 0] = 0
h_nf_taj = np.nan_to_num(h_nf_taj, nan=0)

for j in range(len(u)-1):
  up[j] = 0.5*(9.81*h_nf_taj[j]*np.power(np.cos(alpha_t0[j]),2))*h_nf_taj[j]
  u[j]                =                0.5*(9.81*h_nf_taj[j]*np.power(np.cos(alpha_t0[j]),2)                +
0.5*(9.81*h_nf_taj[j+1]*np.power(np.cos(alpha_t0[j+1]),2)))*b_taj[j]

area_base_taj = np.zeros(n)
for i in range(len(theta_values)-1):
```

```
  area_base_taj[i] = r1/np.sin(phi)*(np.exp(theta_values[i+1]*np.tan(phi)) -
np.exp(theta_values[i]*np.tan(phi)))
u = u*area_base_taj

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(slope_gx, slope_gz, label='Talud', color = 'green')
plt.plot([x_0, X_N[0]], [z_0, Z_T[0]], color = 'black')
plt.plot([x_0, x_b], [z_0, z_b], color = 'black')
plt.scatter(X_N, Z_N, color='red', marker='o')
plt.scatter(X_N, Z_T, color='red', marker='o')
plt.plot(X_N, Z_N, color = 'gray', label = 'Superficie de falla')
for x in range(len(X_N)):
  plt.plot([X_N[x], X_N[x]], [Z_N[x], Z_T[x]], color = 'red', linestyle = '--' )
plt.plot(X_N[:n], z_nf, color = 'blue', label = 'Nivel freático')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Z')
plt.title('Talud de estudio')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

#-----------------------------Solución de la dinámica del movimiento-----------------------------#
#------------------------Primer movimiento por el método de Newton-Raphson------------------------#
#-------------------------------Definición de variables globales-------------------------------#
alpha_t0 = alpha_t0 #Pendiente en la base de cada tajada en el tiempo inicial
kh = np.ones(n)*0.1 # Coeficiente de aceleración seudoestática
density = 1800 #densidad del material que conforma el talud
phi, c = np.ones(n)*phi, np.ones(n)*10 #Parámetros de resistencia
E, mu = np.ones(n)*10000, np.ones(n)*1000000 #Parámetros reológicos
m = density*vol_taj # masas concentradas
delta_t = np.ones(n)*0.01 # Paso de tiempo en el tiempo
Rj = RC_values[:n] # Radio de curvatura de las masas
Qj = np.zeros(n) #sobrecarga sobre cada masa

#-------------------------------Definición de variables locales-------------------------------#
s = s_values[:n] #Valores iniciales de la longitud de arco de las masas concentradas
s_sup = s_values[:n]*1.01 #Valores supuestos para iniciar la iteración, el 1% mayores que las
posiciones iniciales de las masas
A_j = np.sin(alpha_t0-phi) + kh*np.cos(alpha_t0 - phi) + 0.1*kh*np.sin(alpha_t0 - phi) #Verificar el
ángulo, en este caso de la falla es válido asumir dilatancia.
B_j = np.cos(alpha_t0-phi) - kh*np.sin(alpha_t0 - phi) - 0.1*kh*np.cos(alpha_t0 - phi)
C_j = c*b_taj*(1/np.cos(alpha_t0-phi))
k = (E/b_taj)*h_taj
eta = mu*b_taj
D = np.zeros(n) #Vector independiente evaluado
K_eval = np.zeros(n) #Matriz de rigidez evaluada en los valores supuestos

tolerance = 2e-5  # Define la tolerancia para la convergencia
max_iterations = 10000 # Define el número máximo de iteraciones
iteration, error = 0, 1

while error > tolerance and iteration < max_iterations:

  for j in range(n):
    if j == 0:
```

```
    D[j] = (A_j[j]*m[j]*9.81 - C_j[j] - m[j]*9.81*B_j[j]*np.tan(phi[j]) + u[j]*np.tan(phi[j]))*s[j] + (-k[j] - 2*eta[j]/delta_t[j])*(np.power(s[j+1],2)) + (k[j] + 2*eta[j]/delta_t[j])*(2*s[j+1]*s[j] - np.power(s[j],2)) - ((m[j]*np.tan(phi[j]))/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2)))*np.power(s[j],3)

    K_eval[j] = D[j] + (-2*eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j+1],2) + (4*eta[j]/delta_t[j])*(s[j+1]-s[j])*s_sup[j+1] + (-2*eta[j]/delta_t[j]-(m[j]*np.tan(phi[j])*s[j])/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2)))*np.power(s_sup[j],2) + ((4*eta[j]/delta_t[j])*s[j] - (4*eta[j]/delta_t[j])*s[j+1] + ((2*m[j]*np.tan(phi[j])*np.power(s[j],2))/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2))))*s_sup[j] + (4*eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j+1]*s_sup[j]

  elif j == n-1:
    D[j] = (A_j[j]*m[j]*9.81 - C_j[j] - m[j]*9.81*B_j[j]*np.tan(phi[j]) + u[j]*np.tan(phi[j]))*s[j] + (-k[j] - 2*eta[j]/delta_t[j])*(np.power(s[j-1],2)) + (k[j] + 2*eta[j]/delta_t[j])*(2*s[j-1]*s[j] - np.power(s[j],2)) - ((m[j]*np.tan(phi[j]))/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2)))*np.power(s[j],3)

    K_eval[j] = D[j] + (-2*eta[j]/delta_t[j]-(m[j]*np.tan(phi[j])*s[j])/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2)))*np.power(s_sup[j],2) + ((4*eta[j]/delta_t[j])*s[j] - (4*eta[j]/delta_t[j])*s[j-1] + ((2*m[j]*np.tan(phi[j])*np.power(s[j],2))/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2))))*s_sup[j] + (4*eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j-1]*s_sup[j] + (-2*eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j-1],2) + (4*eta[j]/delta_t[j])*(s[j-1]-s[j])*s_sup[j-1]

  else:
    D[j] = (A_j[j]*m[j]*9.81 - C_j[j] - m[j]*9.81*B_j[j]*np.tan(phi[j]) + u[j]*np.tan(phi[j]))*s[j] + (-0.5*k[j] - eta[j]/delta_t[j])*(np.power(s[j-1],2) + np.power(s[j+1],2)) + (k[j] + 2*eta[j]/delta_t[j])*(s[j-1]*s[j] - np.power(s[j],2) + s[j+1]*s[j]) - (m[j]*np.tan(phi[j])/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2)))*np.power(s[j],3)

    K_eval[j] = D[j] + (-eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j-1],2) + (2*eta[j]/delta_t[j])*(s[j-1]-s[j])*s_sup[j-1] + (-2*eta[j]/delta_t[j]-(m[j]*np.tan(phi[j])*s[j])/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2)))*np.power(s_sup[j],2) + ((4*eta[j]/delta_t[j])*s[j] - (2*eta[j]/delta_t[j])*s[j-1] - (2*eta[j]/delta_t[j])*s[j+1] + ((2*m[j]*np.tan(phi[j])*np.power(s[j],2))/(Rj[j]*np.power(delta_t[j],2))))*s_sup[j] - (eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j+1],2) + (2*eta[j]/delta_t[j])*(s[j+1]-s[j])*s_sup[j+1] + (2*eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j-1]*s_sup[j] + (2*eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j]*s_sup[j+1]
 #------------------Definiendo el jacobiano de la matriz----------------------------#
 U_ = -2*eta/delta_t - (m*np.tan(phi)/(Rj*np.power(delta_t,2)))*s
 T = -eta/delta_t
 jacob = Jacobian (U_, T, n)
 #-------------------Calculando los desplazamientos---------------------------------#

 s_cal = s_sup - np.dot(Inv_Mat(jacob), K_eval)
 print('-------------------------')

 print(s_cal)
 error_cal = np.linalg.norm(s_cal - s_sup)

 iteration += 1

 if error_cal <= error:
  s_sup = s_cal.copy()
  error = error_cal
 else:
  s_sup = s_sup - 0.01*(s_cal-s_sup)
  error = error_cal
 print('Error',error)
```

```
print("Iterations:", iteration)
print("Final error:", error)
print("Final displacement:", s_cal)

#-----------------------------Solución de la dinámica del movimiento-----------------------------#
#-----------------------Segundo movimiento por el método de Newton-Raphson-----------------------#
#-------------------------------Definición de variables globales--------------------------------#
t_n = 3000 #Define el número de pasos de tiempo a simular
s_tiempos, r_update = np.zeros((n, t_n+1)), np.zeros((n, t_n+1))
s_tiempos [:,0] = s
s_tiempos [:,1] = s_cal
X_N_update, Z_N_update, Z_T_update = np.zeros((n+1, t_n+2)), np.zeros((n+1, t_n+2)), np.zeros((n+1, t_n+2))
X_N_update[:,0], Z_N_update[:,0], Z_T_update[:,0] = X_N, Z_N, Z_T
x_update, z_update = np.zeros((n, t_n+1)), np.zeros((n, t_n+1))
water_pressure = np.zeros((n,t_n))
water_pressure[:,0] = u
x_update[:,0], z_update[:,0] = X_N[:n], Z_N[:n]
alpha_t = np.zeros(n)
kh_max = kh
tiempos = np.zeros(t_n+1)
tiempos[0], tiempos[1] = 0, delta_t[0]

#-----------------------------------Marcha en el tiempo de la inestabilidad-----------------------------------#

for t in range(1,t_n): #el límite debe ser hasta t_n-1. El tiempo total de simulación es igual a delta_t*t_n
  #-----------------------------Actualización de variables-----------------------------------------------#
  tiempos[t+1] = (t+1)*delta_t[0]
  x_update[:,t], z_update[:,t], r_update[:,t] = geometry_update_2 (s_tiempos[:,t], r1, r2, theta2, phi, x_0, z_0, initial_angle, n)
  X_N_update[:,t], Z_N_update[:,t], Z_T_update[:,t], b_taj_update, h_taj_update = slope_mov (X_N_update[:,t-1], Z_N_update[:,t-1], x_update[:,t], z_update[:,t], n)
  Rj_update = r_update[:,t] / np.cos(phi)

  Vz = pore_pressure_inc(n, m, k, eta, 0, B_j, tiempos[t])
  ff = 0.1
  delta_sigma = ff*eta*Vz
  u_update = u + delta_sigma
  u_update[u_update<0] = 0
  water_pressure[:,t] = u_update
  kh = sismo_update (kh_max, tiempos[t])
  plt.plot(X_N[:n], u_update)
  for j in range(n): alpha_t[j] = np.arctan(abs(Z_N_update[j,t]-Z_N_update[j+1,t])/abs(X_N_update[j,t]-X_N_update[j+1,t]))
  A_j = np.sin(alpha_t) + kh*np.cos(alpha_t) + 0.1*kh*np.sin(alpha_t)
  B_j = np.cos(alpha_t) - kh*np.sin(alpha_t) - 0.1*kh*np.cos(alpha_t)
  C_j = c*b_taj_update*(1/np.cos(alpha_t))
  k = (E/b_taj_update)*h_taj_update
  eta = mu*b_taj_update

  #-------------------------------------------------------------------------------------------------------------#
  #---------------------Definiendo las variables a usar en la marcha en el tiempo de la inestabilidad----------#
  D = np.zeros(n) #Vector independiente evaluado
```

```
K_eval = np.zeros(n) #Matriz de rigidez evaluada en los valores supuestos

tolerance = 2e-5  # Define la tolerancia para la convergencia
max_iterations = 1000  # Define el número máximo de iteraciones
iteration, error = 0, 1
s_sup = s_tiempos[:,t]*1.01

while error > tolerance and iteration < max_iterations:


  for j in range(n):
    if j == 0:
      D[j] = (-1.5*m[j]/np.power(delta_t[j],2) + 2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j,t-1]*s_tiempos[j,t] +
(0.75*m[j]/np.power(delta_t[j],2) - eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_tiempos[j,t-1],2) + (A_j[j]*m[j]*9.81 -
C_j[j] - m[j]*9.81*B_j[j]*np.tan(phi[j]) + u_update[j]*np.tan(phi[j]))*s_tiempos[j,t] + (-k[j]-
2*eta[j]/delta_t[j])*(np.power(s_tiempos[j+1,t],2)) +
(k[j]+2*eta[j]/delta_t[j])*(2*s_tiempos[j+1,t]*s_tiempos[j,t] - np.power(s_tiempos[j,t],2)) + (-
eta[j]/(delta_t[j]))*(np.power(s_tiempos[j+1,t-1],2)) + (eta[j]/delta_t[j])*(2*s_tiempos[j+1,t-
1]*s_tiempos[j+1,t] - 2*s_tiempos[j+1,t]*s_tiempos[j,t-1] - 2*s_tiempos[j+1,t-1]*s_tiempos[j,t] +
2*s_tiempos[j+1,t-1]*s_tiempos[j,t-1]) +
((m[j]*np.tan(phi[j]))/(Rj_update[j]*np.power(delta_t[j],2)))*s_tiempos[j,t]*(-np.power(s_tiempos[j,t],2)
+ 2*s_tiempos[j,t]*s_tiempos[j,t-1] - np.power(s_tiempos[j,t-1],2))

      K_eval[j] = D[j] + (-0.75*m[j]/np.power(delta_t[j],2) - eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j],2) +
((1.5*m[j]/np.power(delta_t[j],2) + 2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j,t] -
(2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j+1,t])*s_sup[j] - (eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j+1],2) +
(2*eta[j]/delta_t[j])*(-s_tiempos[j,t] + s_tiempos[j+1,t])*s_sup[j+1] +
(2*eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j+1]*s_sup[j]

    elif j == n-1:
      D[j] = (-1.5*m[j]/np.power(delta_t[j],2) + 2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j,t-1]*s_tiempos[j,t] +
(0.75*m[j]/np.power(delta_t[j],2) - eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_tiempos[j,t-1],2) + (A_j[j]*m[j]*9.81 -
C_j[j] - m[j]*9.81*B_j[j]*np.tan(phi[j]) + u_update[j]*np.tan(phi[j]))*s_tiempos[j,t] + (-k[j]-
2*eta[j]/delta_t[j])*(np.power(s_tiempos[j-1,t],2)) + (k[j]+2*eta[j]/delta_t[j])*(2*s_tiempos[j-
1,t]*s_tiempos[j,t] - np.power(s_tiempos[j,t],2)) + (-eta[j]/(delta_t[j]))*(np.power(s_tiempos[j-1,t-1],2))
+ (eta[j]/delta_t[j])*(2*s_tiempos[j-1,t-1]*s_tiempos[j-1,t] - 2*s_tiempos[j-1,t]*s_tiempos[j,t-1] -
2*s_tiempos[j-1,t-1]*s_tiempos[j,t] + 2*s_tiempos[j-1,t-1]*s_tiempos[j,t-1]) +
((m[j]*np.tan(phi[j]))/(Rj_update[j]*np.power(delta_t[j],2)))*s_tiempos[j,t]*(-np.power(s_tiempos[j,t],2)
+ 2*s_tiempos[j,t]*s_tiempos[j,t-1] - np.power(s_tiempos[j,t-1],2))

      K_eval[j] = D[j] - (eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j-1],2) + (2*eta[j]/delta_t[j])*(-s_tiempos[j,t] +
s_tiempos[j-1,t])*s_sup[j-1] + (-0.75*m[j]/np.power(delta_t[j],2) -
eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j],2) + ((1.5*m[j]/np.power(delta_t[j],2) +
2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j,t] - (2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j-1,t])*s_sup[j] +
(2*eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j-1]*s_sup[j]

    else:
      D[j] = (-1.5*m[j]/np.power(delta_t[j],2) + 2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j,t-1]*s_tiempos[j,t] +
(0.75*m[j]/np.power(delta_t[j],2) - eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_tiempos[j,t-1],2) + (A_j[j]*m[j]*9.81 -
C_j[j] - m[j]*9.81*B_j[j]*np.tan(phi[j]) + u_update[j]*np.tan(phi[j]))*s_tiempos[j,t] + (-0.5*k[j]-
eta[j]/delta_t[j])*(np.power(s_tiempos[j-1,t],2)+np.power(s_tiempos[j+1,t],2)) +
(k[j]+2*eta[j]/delta_t[j])*(s_tiempos[j-1,t]*s_tiempos[j,t] - np.power(s_tiempos[j,t],2) +
s_tiempos[j+1,t]*s_tiempos[j,t]) + (-eta[j]/(2*delta_t[j]))*(np.power(s_tiempos[j-1,t-
1],2)+np.power(s_tiempos[j+1,t-1],2)) + (eta[j]/delta_t[j])*(s_tiempos[j-1,t]*s_tiempos[j-1,t-1] -
s_tiempos[j-1,t]*s_tiempos[j,t-1] - s_tiempos[j-1,t-1]*s_tiempos[j,t] + s_tiempos[j-1,t-1]*s_tiempos[j,t-
1] - s_tiempos[j+1,t-1]*s_tiempos[j,t] - s_tiempos[j+1,t]*s_tiempos[j,t-1] + s_tiempos[j+1,t-
```

```
1]*s_tiempos[j,t-1] + s_tiempos[j+1,t-1]*s_tiempos[j+1,t]) + ((m[j]*np.tan(phi[j]))/(Rj_update[j]*np.power(delta_t[j],2)))*s_tiempos[j,t]*(-np.power(s_tiempos[j,t],2) + 2*s_tiempos[j,t]*s_tiempos[j,t-1] - np.power(s_tiempos[j,t-1],2))

      K_eval[j] = D[j] + (-0.5*eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j-1],2) + (eta[j]/delta_t[j])*(s_tiempos[j-1,t] - s_tiempos[j,t])*s_sup[j-1] + (-0.75*m[j]/np.power(delta_t[j],2) - eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j],2) + ((1.5*m[j]/np.power(delta_t[j],2) + 2*eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j,t] - (eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j-1,t] - (eta[j]/delta_t[j])*s_tiempos[j+1,t])*s_sup[j] - (0.5*eta[j]/delta_t[j])*np.power(s_sup[j+1],2) + (eta[j]/delta_t[j])*(-s_tiempos[j,t] + s_tiempos[j+1,t])*s_sup[j+1] + (eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j-1]*s_sup[j] + (eta[j]/delta_t[j])*s_sup[j+1]*s_sup[j]

   #------------------Definiendo el jacobiano de la matriz-----------------------------#
   U_ = -0.75*m/np.power(delta_t,2) - eta/delta_t
   T = eta/(2*delta_t)
   jacob = Jacobian (U_, T, n)
   #-------------------Calculando los desplazamientos----------------------------------#

   s_cal = s_sup - np.dot(Inv_Mat(jacob), K_eval)
   error_cal = np.linalg.norm(s_cal - s_sup)
   iteration += 1
   if error_cal <= error:
     s_sup = s_cal.copy()
     error = error_cal
   else:
     s_sup = s_sup - 0.01*(s_cal-s_sup)
     error = error_cal
   print('Error',error)

   s_tiempos[:,t+1] = s_cal.copy()


  if np.isnan(error) or error > 1.5: break

  print('-------------------------')
  print("Time (s)[]:", 10*(t+1)*delta_t[0])
  print("Iterations:", iteration)
  print("Final error:", error)
  print("Final displacement:", s_cal)
  print('-------------------------')


#Actualización del último cálculo
x_update[:,t+1], z_update[:,t+1], r_update[:,t+1] = geometry_update_2 (s_tiempos[:,t+1], r1, r2, theta2, phi, x_0, z_0, initial_angle, n)
X_N_update[:,t+1], Z_N_update[:,t+1], Z_T_update[:,t+1], b_taj_update, h_taj_update = slope_mov (X_N, Z_N, x_update[:,t+1], z_update[:,t+1], n)

#GRÁFICA CON LOS DESPLAZAMIENTOS
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(slope_gx, slope_gz, label='Talud', color = 'gray', linewidth=2.5)
plt.plot([x_0, X_N[0]], [z_0, Z_T[0]], color = 'black', linewidth=0.5)
plt.plot([x_0, x_b], [z_0, z_b], color = 'black', linewidth=0.5)
plt.scatter(X_N, Z_N, color='black', marker='.')
plt.scatter(X_N, Z_T, color='black', marker='.')
plt.plot(X_N, Z_N, color='black', linestyle='--')
```

```
for x in range(len(X_N)):
  plt.plot([X_N[x], X_N[x]], [Z_N[x], Z_T[x]], color = 'black', linestyle = 'dashed', linewidth=0.5 )
plt.plot(X_N[:n], z_nf, color = 'gray', label='N.F.')

#plt.plot(X_N, Z_N)
t_result = t_n
plt.plot(x_update[:,t_result], z_update[:,t_result], label='Superficie de falla', color = 'black', linestyle =
'--')
plt.scatter(X_N_update[:,t_result], Z_T_update[:,t_result], color='black', marker='x')
plt.plot(X_N_update[:,t_result], Z_T_update[:,t_result], label='Talud fallado',color='black',
linewidth=3.0)

plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Z')
plt.title('Talud de estudio: E=' + str(int(E[0])) + ' kPa - \u03B7= ' + str(int(mu[0])) + ' kPa.s')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

#GRÁFICA CON LOS DESPLAZAMIENTOS
import random

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(slope_gx, slope_gz, label='Talud', color = 'gray', linewidth=2.5)
plt.plot([x_0, X_N[0]], [z_0, Z_T[0]], color = 'black', linewidth=0.5)
plt.plot([x_0, x_b], [z_0, z_b], color = 'black', linewidth=0.5)
plt.plot(X_N, Z_N, label='Superficie de falla', color = 'black', linestyle = 'solid')

t_result = np.linspace(0, t_result, 5)
lines = ['dashdot','dashed', 'dotted', 'solid']
width = [1.5,1.5,1.5,2.5]
for i in range(len(t_result)): t_result[i] = int(t_result[i])
for i in range(1,len(t_result)):
  plt.plot(X_N_update[:,int(t_result[i])], Z_T_update[:,int(t_result[i])], label='Talud en falla:
'+str(int(1/delta_t*10*t_result[i]*(delta_t[0]))) + ' s', color = 'black', linestyle = lines[i-1],
linewidth=width[i-1])

plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Z')
plt.title('Talud de estudio: E=' + str(int(E[0])) + 'kPa - \u03B7= ' + str(int(mu[0])) + 'kPa.s')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

def velocity (desp, delta_t):
  vel = np.zeros(desp.shape[0])
  for i in range(1,len(desp)-1):
    vel[i] = (desp[i+1] - desp[i-1])/(2*delta_t)
    #vel[i] = (desp[i+1] - desp[i])/(delta_t)
  return vel

pos = list(range(0, n))
t_res = 140
sj = []
for p in pos: sj.append(s_tiempos[p,:t_res])
```

```
vel = []

for sj_ in sj: vel.append(velocity (sj_, delta_t))
i=0
for v in vel:
    plt.plot(1/delta_t[0]*tiempos[:t_res], v, label=i)
    plt.legend()
    i+=1

def aceleration (desp, delta_t):
  acel = np.zeros(desp.shape[0])
  for i in range(1,len(desp)-1):
    acel[i] = (desp[i+1] - 2*desp[i] + desp[i-1])/(np.power(delta_t,2))
    #vel[i] = (desp[i+1] - desp[i])/(delta_t)
  return acel

pos = list(range(0, n))
t_res = 120
sj = []
for p in pos: sj.append(s_tiempos[p,:t_res])
acel = []
for sj_ in sj: acel.append(aceleration (sj_, 0.1))
for a in acel: plt.plot(1/*delta_t[0]*tiempos[:t_res], a)
```

Bibliografía

Adinolfi, M. (2008). Displacements scenarios for active landslides by using creep phenomenological model [Minor thesis, Universitat Politècnica de Catalunya]. UPCommons.

Angeles, J. (2011). Dynamic response of linear mechanical systems: Modeling, analysis and simulation. Springer.

AnhDan, L., Tatsuoka, F., & Koseki, J. (2006). Viscous effects on the stress-strain behavior of gravelly soil in drained triaxial compression. Geotechnical Testing Journal, 29(4), 330–340.

Asch et al. (2007). Problems in predicting the mobility of slow-moving landslides. Engineering geology.

Australian Geomechanics Society. (2007). Commentary on guideline for landslide susceptibility, hazard and risk zoning for land use planning. Australian Geomechanics, 42(1), 37–62.

Basto González, C. X. (2009). Desplazamiento viscoplástico de taludes fallados [Tesis de maestría, Facultad de ingeniería, Universidad Nacional de Colombia].

Besso, C., & Pereira de Campos, T. M. (2019). Laboratory determination of the viscosity of soils for debris flow analysis. In N. P. López-Acosta, E. Martínez Hernández, & A. L. Espinosa Santiago (Eds.), Geotechnical engineering in the XXI century: Lessons learned and future challenges (pp. 47–55). IOS Press.

Bird, R. B., Armstrong, R. C., & Hassager, O. (1987). Dynamics of Polymeric Liquids (Vol. 1). John Wiley & Sons.

Boulon, M., et al. (1996). Viscoplastic response of natural clays in triaxial creep tests. Soils and Foundations.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis (9th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). Numerical methods for engineers (6th ed.). McGraw-Hill.

Cruden, D., & Varnes, D.J. (1996). Landslides types and processes. Landslides–Investigation and Mitigation, Editado por A.K. Turner and R.L. Schuster. Transportation Research Board, Special Report, National Academy Press, Washington

Cudmani, R. (2021, May). Aspectos fundamentales del comportamiento de suelos desde una perspectiva histórica y su modelación a través de relaciones constitutivas hipoplásticas [Conferencia magistral]. 10th Congreso Colombiano de Mecánica de Suelos, Paipa, Colombia.

Dai, K. W. (1996) Equivalent slump. International Rilem conference: Production methods and workability of concrete, Paisley/Scotland. In: Proceedings... London: E & FN Spon, p 357-364.

Dysli M., Recordon E.(1989). Landslides analyzed as Viscous flow. Canadian Geotechnical Society. Toronto - 1989

Dupuit, J. (1863). Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables: Avec des considérations relatives au régime des grandes eaux, au débouché à leur donner, et à la marche des alluvions dans les rivières à fond mobile (2e éd., rev. et considérablement augmentée). Dunod.

Bear, J. (1972). Dynamics of Fluids in Porous Media. Dover Publications.

Galindo, M. S. V. (2013). Development of a methodology for the experimental determination of soil viscosity. M.Sc. dissertation, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brazil.

Hungr, O. (1995). A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches. Canadian Geotechnical Journal, 32(4), 610–623.

Hungr, O., Morgan, G. & Kellerhals, L. (1984). Quantitative analysis of debris hazards for designo f remedial measures. Can. Geotech. J. 21, No. 4, 633-677.

Hungr, O., Corominas, J., & Eberhardt, E. (2005). Estimating landslide motion mechanism, travel distance and velocity. In O. Hungr, R. Fell, R. Couture, & E. Eberhardt (Eds.), Landslide risk management (pp. 109–138). CRC Press.

Janbu, N. (1973). Slope Stability Computations. In Hirschfeld, R.C. & Poulos, S.J. (Eds.), Embankment Dam Engineering - Casagrande Volume, Wiley, pp. 47–86.

Kang, H. S. & Kim, Y. T. (2013). Rheological characteristics of fine-grained soil with sand content. J. Korean Soc. Civ. Engrs 33, No. 5, 1897–1905

Kang, Z. & Zhang, S. (1980). A preliminary analysis of the characteristics of debris flow. Proceedings of the 1st international symposium on river sedimentation, Beijing, China, pp. 213–220.

Levin, F., Vogt, S., & Cudmani, R. (2019). Time-dependent behaviour of sand with different fine contents under oedometric loading. Canadian Geotechnical Journal, 56(1), 102–115.

Maslov, N. N., & Klimenko, I. V. (2009). Viscosity of Soils and Its Engineering Applications. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 46(6), 227–233.

Mitchell, J. K., & Soga, K. (2005). Fundamentals of Soil Behavior. 3rd Ed.

Moncayo, S., & Ávila, G. (2022). Landslide travel distances in Colombia from national landslide database analysis. In K. Sassa, K. Konagai, B. Tiwari, Ž. Arbanas, & S. Sassa (Eds.), Progress in Landslide Research and Technology, Volume 1 Issue 1, 2022 (pp. 315–325). Springer, Cham.

Mora, C. (2011) Contención de taludes en estado viscoplástico. [Tesis de maestría, Facultad de ingeniería, Universidad Nacional de Colombia]

Moreno, R. (2016) Cinética de taludes en suelos compresibles viscoplásticos. [Tesis de maestría, Facultad de ingeniería, Universidad Nacional de Colombia]

O'Brien, J. S. & Julien, P. Y. (1988). Laboratory analysis of mudflow properties. J. Hydraulic Engng 114, No. 8, 877–887.

Reddy, J. N. (2017). Energy principles and variational methods in applied mechanics (3rd ed.). John Wiley & Sons.

Ren, J., et al. (2022). Time-dependent deformation characteristics of rock–soil aggregates based on a modified Burgers model. Geotechnical and Geological Engineering, 40.

Roshan, A. R., & Yerro, A. (2025). Connecting landslide basal sliding surface characteristics with post-failure kinematics and impact on rigid structures: An MPM numerical study. Computers and Geotechnics, 182, 107158.

Servicio Geológico Colombiano. (2015). Guía metodológica para estudios de amenaza, vulnerabilidad y riesgo por movimientos en masa (Escala detallada) [Guía técnica]. Unidad Nacional para la Gestión del Riesgo de Desastres.

Smith, G. D. (1985). Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods (3rd ed.). Oxford University Press.

Ter-Martirosyan, Z. G., Ter-Martirosyan, A. Z., & Sobolev, E. S. (2017). Laboratory tests for dispersive soil viscosity determining. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 262, 012101.

Ter-Martirosyan, A. Z., Ermoshina, L. Y., & Anzhelo, G. O. (2024). Viscosity of clayey soils: experimental studies. Applied Sciences, 14(14), 5974.

Van Asch, T. W. J., Van Beek, L. P. H., & Bogaard, T. A. (2007). Problems in predicting the mobility of slow-moving landslides. Engineering Geology, 91(1), 46–55.

Verruijt, A. (2009). An introduction to soil dynamics (Theory and Applications of Transport in Porous Media, Vol. 24). Springer.

Wang, G., Zhang, F., & Wang, Y. (2014). Creep behavior of saturated soft clay under consolidation and shear stress. Marine Georesources & Geotechnology, 32(5), 457–463.

Wong, H. N., & Ho, K. K. S. (1996). Travel distance of landslide debris. In K. Senneset (Ed.), Landslides: Proceedings of the Seventh International Symposium on Landslides, Trondheim, Norway, 17–21 June 1996 (Vol. 1, pp. 417–422). A. A. Balkema.

Yue, Z.-Q. Q. (2014). Dynamics of large and rapid landslides with long travel distances under dense gas expanding power. In K. Sassa, P. Canuti, & Y. Yin (Eds.), Landslide science for a safer geoenvironment: Volume 3: Targeted landslides (pp. 233–240). Springer.

Zhou, C., Yin, Y., et al. (2021). Apparent Viscosity of Debris Flows: Experimental and Field Approaches. Landslides, 18, 891–905.