UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch para K-teoría

Santiago Hernández Torres

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2018

La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch para K-teoría

Santiago Hernández Torres

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemáticas

Director:
Ph.D. José Manuel Gómez Guerra

Línea de Investigación:
Topología Algebraica
Grupo de Investigación:
Grupo Interinstitucional de Investigación en Geometría y Topología

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciecias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2018

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty — a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as poetry.

Bertrand Russell.

Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de dos años de trabajo que no hubieran sido llevaderos de no contar con el apoyo y compañía de muchas personas que estuvieron conmigo durante este camino. Esta es la oportunidad para manifestar mi más profundo agradecimiento con todas aquellas personas que contribuyeron a la realización y culminación exitosa de la tesis de maestría que aquí se presenta.

A José Manuel por su constante preocupación con mis avances y contratiempos tanto académicos como personales, y sobre todo, por siempre estar dispuesto a resolver mis inquietudes con infinita paciencia.

A Maritza por su apoyo incodicional durante mis estudios de pregrado y posgrado, es admirable como aunque su área de trabajo sea diametralmente opuesta, me motiva y da ideas brillantes para mejorar mi trabajo y me acompaña a crecer como persona.

A mis padres por siempre haber apoyado mis decisiones y proyectos durante todos mis años de estudio, aún cuando dejaba la ingeniería y me iba hacia el largo camino de las ciencias puras.

A Colciencias y la Universidad Nacional de Colombia por el soporte financiero durante estos dos años a través del proyecto *Espacios clasificantes para conmutatividad, K-teoría conmutativa y K-teoría equivariante torcida* con número de contrato FP44842-617-2014 y las monitorías de posgrado, que además me hicieron crecer como docente. Es razonable agradecer también a la Universidad Nacional de Colombia, en particular a la escuela de Matemáticas de la sede Medellín, no sólo por la formación que recibí allí sino también por haber sido un espacio donde conocí grandes amigos y maestros, a ellos, muchísimas gracias.

A mis compañeros de matemáticas que con los largos días de estudio, café y procrastinación aportaron a mi crecimiento como matemático y con los momentos de dispersión me ayudaron a sobreponerme a los momentos de estrés y cansancio.

Finalmente, pero no menos importante, a mis compañeros y amigos de la banda sinfónica UN, y la banda sinfónica de Copacabana, que con la música y la buena energía aportaron para una formación íntegra.

A los aquí mencionados y a todos los que aquí no menciono explicitamente, gracias.

Resumen

Si bien la definición de la K-teoría de un espacio topológico parece relativamente sencilla, el cálculo explícito de las clases de isomorfimos de fibrados vectoriales sobre dicho espacio topológico suele ser una tarea compleja.

En este sentido, esta tesis se concentra en exponer la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch (SEAH), como una de las herramientas fundamentales para el cálculo de la K-teoría en espacios que estén dotados de una filtración.

Aunque en su versión más general la SEAH es usada para el cálculo de cualquier teoría de cohomología generalizada, este trabajo se enfoca en estudiar el caso de la K-teoría para espacios topológicos con la estructura de CW-complejo, donde la filtración usada es la filtración esqueletal.

Incluso en este contexto, una de las dificultades de los cómputos realizados con la SEAH, es el desconocimiento de una fórmula explícita para los diferenciales en grados altos. En este documento se muestra que para grado tres, el diferencial debe ser una operación cohomológica estable, y así, con un ejemplo explícito y el teorema de clasificación para operaciones cohomológicas, se concluye que el diferencial en grado tres es una operación llamada el tercer cuadrado de Steenrod $Sq^3_{\mathbb{Z}}$.

Palabras clave: Sucesión espectral, Atiyah-Hirzebruch, K-teoría, Cuadrados de Steenrod, Operaciones cohomológicas .

Contenido

Agradecimientos vi

Resumen ix

1 Introducción 2

2 Sucesiones espectrales 5

2.1 Introducción a las sucesiones espectrales 5

2.2 Sucesión espectral de Serre 16

2.2.1 Cohomología de espacios de Eilenberg-Mac Lane 17

2.3 Sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch 23

3 Operaciones cohomológicas 32

3.1 Teorema de clasificación 32

3.2 El tercer diferencial en la SEAH 36

4 Cuadrados de Steenrod 39

4.1 Axiomas de los cuadrados de Steenrod 39

4.2 Construcción de los cuadrados 41

5 Determinación del tercer diferencial 52

5.1 Determinación del tercer diferencial 52

Bibliografía 55

1 Introducción

La K-teoría tiene sus orígenes en los años cincuenta con el trabajo de Alexander Gröthendieck en el estudio de sheaves coherentes sobre una variedad algebraica X. Gröthendieck, con la intención generalizar el teorema de Riemann-Roch [1], definió el grupo $K(X)$ como el grupo generado por las clases de isomorfismo de sheaves donde se identificaba la extensión de dos sheaves con su suma.

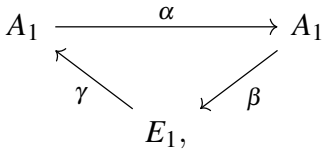
Poco tiempo después, Michael Atiyah y Friedrich Hirzebruch notaron que las ideas de Gröthendieck podían traducirse a la topología algebraica en el estudio de fibrados vectoriales sobre espacios topológicos compactos. En este contexto, como la suma en $K(X)$ correspondía a la suma de Whitney, se pudo definir la estructura de anillo utilizando el producto tensorial fibra a fibra. Esto, y el teorema de periodicidad de Bott, permitieron definir $K^n(X)$, y así demostrar que esta construcción satisfacía los axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de cohomología generalizada, con excepción del axioma de dimensión [2].

El desarrollo del álgebra homológica, y en particular el trabajo de Leray, Cartan y Koszul en la teoría de sucesiones espectrales [3], permitió desarrollar una herramienta fundamental en el cómputo de una teoría de cohomología generalizada sobre un espacio topológico X conociendo una filtración del mismo, esta herramienta es la sucesión espectral de *Atiyah-Hirzebruch*.

Este trabajo se enfonca en el estudio de dicha sucesión espectral para el caso de la K-teoría de un espacio con el tipo de homotopía de un CW-complejo, y en particular en demostrar que los diferenciales están relacionados con la cohomología de espacios de *Eilenberg-Mac Lane* [4]. Más explícitamente, si X es un CW-complejo con filtración esqueletal dada por

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots \subset X,$$

definimos la pareja exacta



donde $A_1^{p,q} = K^{p+q}(X/X_{p-1})$ y $E_1^{p,q} = K^{p+q}(X_p/X_{p-1})$ con $deg(\alpha) = (-1,+1)$, $deg(\beta) = (0,0)$ y $deg(\gamma) = (-1,0)$. Y a partir de esta pareja exacta podemos construir una sucesión espectral $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$.

Al considerar que el espacio X es un CW-complejo, se tiene $X_p/X_{p-1} = \bigvee_{m(p)} \mathbb{S}^p$. Usando esto, y la propiedad de suspensión de una teoría de cohomología, es posible demostrar que

$$E_2^{p,q} = H^p(X; K^q(*)) \Longrightarrow K^{p+q}(X).$$

De esta manera, resulta fundamental estudiar los diferenciales para poder calcular explícitamente $K^*(X)$. Puesto que los diferenciales que definen la sucesión espectral son homomorfismos de la forma $d_r : H^p(X;\mathbb{Z}) \to H^{p+r}(X;\mathbb{Z})$, estos se pueden ver como operaciones cohomológicas de tipo $(\mathbb{Z}, p; \mathbb{Z}, p+r)$.

Al desarrollar la teoría de operaciones cohomológicas de tipo (π, n, G, m) en general se hace evidente su relación con los espacios de *Eilenberg-Mac Lane* [5]. De hecho, se probó que existe una correspondencia uno a uno

$$\mathscr{O}(\pi, n; G, m) \leftrightarrow H^m(K(\pi, n); G).$$

Mediante un cómputo explícito de la cohomología de $K(\mathbb{Z}/2, 3)$ se muestra que el tercer diferencial de la sucesión espectral de *Atiyah-Hirzebruch* corresponde a una operación cohomológica bien conocida, el cuadrado de *Steenrod* $Sq^3_{\mathbb{Z}}$.

Los teoremas en este documento corresponden a resultados clásicos cuyos detalles han sido completados y refinados, y en algunos casos los espacios utilizados en las pruebas han sido simplificados. El documento está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se da una exposición sobre las sucesiones espectrales en general haciendo énfasis en la construcción con parejas exactas y en la convergencia, seguido del estudio de dos sucesiones espectrales importantes: la sucesión espectral de Serre, y la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch.

En el Capítulo 3, se muestran los axiomas que deben satisfacer las operaciones cohomológicas y se prueba el teorema de clasificación de las mismas. En particular, se estudia cómo el tercer diferencial d_3 de la SEAH es una operación cohomológica.

En el Capítulo 4, se construye explícitamente una operación cohomológica no trivial que al extenderse a los enteros tiene la misma graduación que el diferencial d_3.

Y finalmente, en el Capítulo 5, mediante cómputos directos, se demuestra que d_3 no puede ser la operación cohomológica trivial, y que por los resultados de los capítulos anteriores, la única opción que queda es que $d_3 = Sq^3_{\mathbb{Z}}$.

2 Sucesiones espectrales

En este capítulo se estudiarán las sucesiones espectrales de tipo cohomológico como una herramienta fundamental en topología algebraica, dando detalladamente su definición y el concepto de convergencia.

A continuación se estudiarán dos sucesiones espectrales bien conocidas: la sucesión espectral de Serre y la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. La primera, será usada como una herramienta para calcular la cohomología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane, dichos espacios juegan un rol importante en la teoría de homotopía. Y la segunda, será estudiada a mayor profundidad al ser el objetivo de la tesis y se utilizará como una herramienta importante para calcular la K-teoría de espacios topológicos con el tipo de homotopía de un CW-complejo [6], [7], [8].

2.1. Introducción a las sucesiones espectrales

Para el estudio de sucesiones espectrales de tipo cohomológico, trabajaremos sobre módulos bigraduados de manera similar a las sucesiones de tipo homológico, con la diferencia de que la graduación se escribirá en los superíndices para ser consistente con la notación de cohomología.

Definición 1: Un módulo diferencial bigraduado sobre un anillo R es una colección de R-módulos $\{E^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$, junto con un mapeo R-lineal $d : E^{*,*} \to E^{*,*}$ de bigrado $(s, 1-s)$, para algún $s \in \mathbb{Z}$, que satisface que $d \circ d = 0$.

Adicionalmente, definimos la homología del módulo diferencial bigraduado $(E^{*,*}, d)$ por:

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\text{Ker } \left(d : E^{p,q} \to E^{p+s,q-s+1}\right)}{\text{Im } \left(d : E^{p-s,q+s-1} \to E^{p,q}\right)}.$$

Definición 2: Una sucesión espectral de tipo cohomológico es una colección de módulos diferenciales bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, que está indexada por los números naturales y donde cada diferencial tiene bigrado $(r, 1-r)$, donde además se cumple que $E_{r+1}^{p,q}$ es isomorfo a $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$ para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{N}$.

Por convención al término $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ lo llamaremos la r-ésima página de la sucesión espectral. Con esta convención, una sucesión espectral es una secuencia de páginas indexadas por los números naturales de tal manera que la página $r+1$ se obtiene como la homología de la página r.

Nota 1. Una página $(E_r^{*,*}, d_r)$ de una sucesión espectral determina los módulos en la siguiente $E_{r+1}^{*,*} = H^{*,*}(E_r^{*,*}, d_r)$ pero no especifica cómo calcular el diferenciald_{r+1}. Por lo que es necesario más información de la secuencia para encontrarlos.

Presentaremos ahora una forma alternativa de pensar las sucesiones espectrales que facilitará comprender el concepto de convergencia de una sucesión espectral.

Para esto, usemos el hecho de que $E_2^{*,*} = H(E_1^{*,*}, d_1)$, más explícitamente:

$$E_2^{p,q} = H^{p,q}(E_1^{p,q}, d_1) = \frac{\text{Ker}\left(d_1 : E^{p,q} \to E_1^{p+1,q}\right)}{\text{Im}\left(d_1 : E_1^{p-1,q} \to E_1^{p,q}\right)}.$$

Denotemos por $Z_1^{p,q} = \text{Ker}\left(d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}\right)$ y por $B_1^{p,q} = \text{Im}\left(d_1 : E_1^{p-1,q} \to E_1^{p,q}\right)$, de esta manera, como $\{E^{*,*}, d_1\}$ es un álgebra diferencial graduada, entonces $d_1 \circ d_1 = 0$ y obtenemos que $B_1^{p,q} \subseteq Z_1^{p,q} \subseteq E_1^{p,q}$. Por simplicidad en la notación no usaremos los índices p, q en esta discusión. Tenemos que $E_2 \simeq Z_1/B_1$, por el teorema de correspondencia, podemos tomar $Z_2 \subseteq Z_1$ y $B_1 \subseteq B_2$ submódulos de E^1 tales que $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq E_1$. Razonando de manera inductiva, podemos ver la sucesión espectral como una torre de submódulos de la siguiente forma:

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots B_n \subseteq \cdots \subseteq Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq E_1,$$

con la propiedad de que $E_r \simeq Z_r/B_r$ y los diferenciales los podemos tomar como funciones $d_{n+1} : Z_n/B_n \to Z_n/B_n$ tales que

$$\text{Ker}d_{n+1} = Z_{n+1}/B_n, \qquad \text{Im}d_{n+1} = B_{n+1}/B_n,$$

con lo que la secuencia

$$0 \longrightarrow Z_{n+1}/B_n \longrightarrow Z_n/B_n \xrightarrow{d_{n+1}} B_{n+1}/B_n \longrightarrow 0,$$

es exacta corta.

En la práctica estaremos interesados en encontrar los elementos que están en todos los núcleos y los que eventualmente son imágenes de los diferenciales.

Definición 3: Sea $E_*^{*,*}$ una sucesión espectral de tipo cohomológico vista como una torre de submódulos. Diremos que un elemento en Z_r *sobrevive* el r-ésimo paso y un elemento en B_r es una frontera en el r-ésimo paso. Definimos:

$$B_\infty^{*,*} = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r^{*,*} \qquad \text{los elementos que eventualmente son fronteras,}$$

$$Z_\infty^{*,*} = \bigcap_{r=1}^{\infty} Z_r^{*,*} \qquad \text{los elementos que sobreviven por siempre,}$$

y definimos la página infinito como el cociente $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$.

Definición 4: Decimos que una sucesión espectral $\{E^{*,*},*\}$ colapsa en el N-ésimo término si $d_r = 0$ para todo $r \geq N$.

Note que en el caso de una sucesión espectral que colapsa en el N-ésimo término, entonces $d_{N+1} = 0$ y tenemos una secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow Z_{N+1}/B_N \xrightarrow{i} Z_N/B_N \xrightarrow{d_{N+1}} B_{N+1}/B_n \longrightarrow 0.$$

De la exactitud de la secuencia corta se tiene que

$$\mathrm{Im}i = \mathrm{Ker}d = Z_N/B_N,$$

luego $Z_{N+1} = Z_{N+1}$. Además,

$$0 = \mathrm{Im}d = \mathrm{Ker}0 = B_{N+1}/B_N,$$

y por tanto $B_{N+1} = B_N$. Así la sucesión espectral se estabiliza y

$$B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots \subseteq B_N = B_{N+1} = \cdots = B_\infty \subseteq Z_\infty = \cdots = Z_N \subseteq Z_{N-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_2.$$

Dada una sucesión espectral que colapsa en el N-ésimo término, es de interés estudiar el objeto donde ella se estabiliza. Existe un gran número de aplicaciones donde dicha condición se satisface naturalmente, por ejemplo, en una sucesión espectral acotada.

Definición 5: Decimos que una sucesión espectral $\{E_r^{p,q}\}$ de tipo cohomológico es acotada si para cada grado total $n = p+q$ hay finitos módulos no triviales.

Sin embargo, en nuestro caso de interés, por la periodicidad de la K-teoría, en la mayoría de casos nuestras sucesiones no serán acotadas, por lo que es necesario introducir condiciones más fuertes para definir una noción buena de convergencia. Para ello introduciremos la noción de filtración.

Definición 6: Una filtración (decreciente) F^* en un R-módulo A es una familia de submódulos $\{F^P A\}_{p\in\mathbb{Z}}$ tal que:

$$\cdots \subseteq F^{p+1}A \subseteq F^pA \subseteq \cdots \subseteq F^1A \subseteq A.$$

En dicho caso, podemos encontrar el módulo asociado $E_0^*(A)$ dado por $E_0^p(A) = F^pA/F^{p+1}A$.

En particular, si A es graduado, podemos definir $F^pA^n = F^pA \cap A^n$, y por tanto el módulo asociado será bigraduado y estará definido por:

$$E_0^{p,q}(A,F) = F^pA^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q}.$$

Naturalmente, cuando existe tanto la estructura de filtración como de graduación es necesario agregar cierta condición de compatibilidad.

Definición 7: Un R-módulo diferencial graduado y filtrado satisface:

1. $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n$.
2. Existe un mapeo R-lineal $d : A^n \to A^{n+1}$ tal que $d \circ d = 0$.
3. A tiene una filtración y d la respeta, es decir, $d : F^pA \to F^pA$.

Como el mapeo d respeta la filtración, $H(A,d) = \mathrm{Ker}d/\mathrm{Im}d$ hereda la filtración

$$F^pH(A,d) = \mathrm{Im}(H(F^pA,d)) \hookrightarrow H(A,d).$$

Con esta información podemos definir la noción es convergencia.

Definición 8: Una sucesión espectral converge a un R-módulo graduado H^* si existe una filtración F en H^* tal que $E_\infty^{p,q} = E_0^{p,q}(H^*, F)$. Y en este caso decimos que $E_\infty^{*,*}$ es el límite de la sucesión espectral.

Más explícitamente, podemos escribir la página infinito como

$$E_\infty^{p,q} = E_0^{p,q}(H, F) = F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}.$$

Note que incluso al conocer la página infinito de una sucesión espectral, aún queda trabajo para recuperar H a partir de la filtración.

Para garantizar que no existan problemas de unicidad en el límite, y que las sucesiones espectrales sí calculen lo que deseamos, es necesario poner algunas restricciones a las filtraciones.

Definición 9: Sea A un módulo diferencial graduado y filtrado. Decimos que:

1. F se dice exhaustiva si $A = \bigcup_s F^s A$.
2. F es débilmente convergente si para todos (p,q) se tiene que

$$F^p A^{p+q} \cap \operatorname{Ker} d = \bigcap_r (F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})).$$

3. F es Hausdorff si es débilmente convergente y además

$$\bigcap_p F^p H(A, d) = \{0\}.$$

4. F se dice fuertemente convergente o completa si es débilmente convergente y el morfismo inducido $u : H(A) \to \lim_{\leftarrow p} H(A)/F^p H(A)$ es un isomorfismo.

Nota 2. Introduzcamos la siguiente notación:

- $Z_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1})$ y $Z_\infty^{p,q} = \operatorname{Ker} d \cap F^p A^{p+q}$.
- $B_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1})$ y $B_\infty^{p,q} = \operatorname{Im} d \cap F^p A^{p+q}$.
- $E_\infty^{p,q} = \bigcap_r Z_r^{p,q} / \bigcup_r B_r^{p,q}$.

Y consideremos una sucesión espectral vista como la torre de submódulos

$$B_0^{p,q} \subseteq B_1^{p,q} \subseteq \cdots \subseteq \underbrace{\bigcup_r B_r^{p,q} \subseteq B_\infty^{p,q}}_{(a)} \subseteq \overbrace{Z_\infty^{p,q} \subseteq \bigcap_r Z_r^{p,q}}^{(b)} \subseteq \cdots \subseteq Z_1^{p,q} \subseteq Z_0^{p,q}.$$

Así, la condición de que F^* sea exhaustiva garantiza que en (a) se de la igualdad, mientras que la convergencia débil es por definición que en (b) se cumpla la igualdad. Tal y como es de esperarse, la propiedad de ser Hausdorff es precisamente la unicidad del límite.

Nos centraremos ahora en una manera explícita de construir sucesiones espectrales: las parejas exactas.

Definición 10: Sean D y E R-módulos, y sean $i : D \to D$, $j : D \to E$, $k : E \to D$ morfismos de R-módulos. Decimos que (E,D) es una pareja exacta con morfismos estructurales i, j, k si ocurre que

$$\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(j), \quad \mathrm{Im}(j) = \mathrm{Ker}(k), \quad \mathrm{Im}(k) = \mathrm{Ker}(i).$$

Es decir, en el siguiente diagrama cada esquina es exacta:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad i \quad} & D \\ & {\scriptstyle k}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j} & \\ & E. & \end{array}$$

Cuando necesitemos hablar de más de una pareja exacta, o queramos hacer explícitos los morfismos estructurales, escribiremos (E,D,i,j,k) en lugar de (E,D).

Una idea central que permitirá definir una sucesión espectral con una pareja exacta, es que siempre podemos construir una nueva pareja exacta a partir de la original, llamada la pareja derivada, de la siguiente forma.

Sea $d : E \to E$ el homomorfismo de módulos dado por $d = j \circ k$. Con este homomorfismo, E se convierte en un módulo diferencial graduado pues $d \circ d = (j \circ k) \circ (j \circ k) = j \circ (k \circ j) \circ k = 0$.

Definamos los R-módulos

$$E' = H(E,d) = \mathrm{Ker}(d)/\mathrm{Im}(d), \quad D' = \mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(j),$$

y homomorfismos estructurales

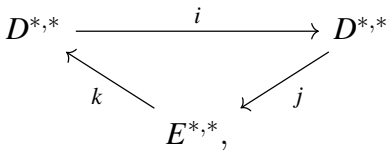
- $i' = i|_{\mathrm{Im}(i)} : D' \to D'$ la restricción de i.
- $j' : D' \to E'$ por $j'(i(x)) = [j(x)] = j(x) + dE$.
- $k' : E' \to D'$ por $k([e]) = k(e + dE) = k(e)$.

La buena definición y exactitud de la pareja derivada es idéntica al caso de sucesiones espectrales de tipo homológico, por esta razón sólo lo enunciaremos como un teorema sin prueba.

Teorema 1: Sea (E, D) una pareja exacta con morfismos estructurales i, j, k. Entonces, la pareja derivada (E', D') con morfismos estructurales i', j', k' es también una pareja exacta [6].

Usando inductivamente el teorema anterior podemos construir la n-ésima pareja derivada. Note que si realizaramos el mismo procedimiento con módulos bigraduados, dado que la relación entre E y E' es sacar homología, podemos usar este método para construir una sucesión espectral a partir de una pareja exacta.

Teorema 2: Sean $D^{*,*} = \{D^{p,q}\}$ y $E^{*,*} = \{E^{p,q}\}$ R-módulos bigraduados con homomorfismos estructurales i con bigrado $(-1, 1)$, j con bigrado $(1, 0)$ y k con bigrado $(0, 0)$. De tal manera que el siguiente diagrama es exacto en cada esquina.



entonces, $\{E_r, d_r\}$ es una secuencia espectral donde E_r es el módulo derivado de E_{r-1} con la construcción anterior y $d_r = j^{(r)} \circ k^{(r)}$.

Demostración. Note que de la definición de la pareja derivada ya se tiene la condición de que una página se obtienen sacando homología de a la página anterior. Así, es suficiente verificar que los diferenciales d_r tienen bigrado $(r, 1-r)$. Para esto, razonemos por inducción.

En el caso de $d_1 = j \circ k$, el bigrado está dado por $(1, 0) + (0, 0) = (1, 0)$ como se desea. Razonemos por inducción, y supongamos que d_{r-1} tiene bigrado $(r-1, 2-r)$. Note que como $k^{(r-1)}([e]) =$

$k^{(r-2)}(e)$, entonces la graduación de $k^{(r-1)}$ es la misma graduación de k. Como $d_{r-1} = j^{(r-1)} \circ k^{(r-1)}$, y el bigrado de k es $(0,0)$, para que se cumpla la hioótesis inductiva es necesario que la graduación de $j^{(r-1)}$ sea la misma que la de d_{r-1}, es decir $(r-1, 2-r)$.

Calculemos ahora los bigrados de $k^{(r)}$ y $j^{(r)}$. Para $k^{(r)}$ se sigue del mismo argumento de antes que tiene bigrado $(0,0)$. Por otro lado, para $j^{(r)}$ tenemos que $j^{(r)}(i^{(r-1)}(x)) = j^{(r-1)}(x) + d_{r-1}E^{(r-1)}$ y además como $i^{(r-1)} : D^{r-1} \to D^{r-1}$ es aplicar i restringinda a la imagen de $i^{(r-2)}$, entonces aplicarla sólo sube el grado en $(-1,1)$, de esta manera,

$$deg(j^{(r)}) = deg(j^{(r-1)}) - deg(i) = (r-1, 2-r) - (-1,1) = (r, 1-r).$$

Así, d_r tiene bigrado $(r, 1-r)$. □

Una forma útil de presentar una pareja exacta es como un diagrama donde se suprime uno de los bigrados

$$\cdots \longrightarrow D^{p+1,*} \xrightarrow{\ i\ } D^{p,*} \xrightarrow{\ i\ } D^{p-1,*} \longrightarrow \cdots$$

$$k \swarrow \quad \searrow j \qquad k \swarrow \quad \searrow j$$

$$E^{p,*} \qquad\qquad E^{p-1,*}.$$

Proposición 1: Sea $Z^{p,*} = k^{-1}(\operatorname{Im} i^r : D^{p+r,*} \to D^{p+1}, *)$ y sea $B_r^{p,*} = j(\operatorname{Ker} i^{r-1} : D^{p,*} \to D^{p-r+1})$ submódulos de $E^{p,*}$. Entonces estos submódulos determinan la sucesión espectral asociada a la pareja exacta:

$$E_r^{p,*} \simeq Z_r^{p,*} / B_r^{p,*}.$$

Además, $E_\infty^{p,*} = \bigcap_r Z_r^{p,*} / \bigcup_r B_r^{p,*}$.

Tenemos entonces una forma de construir sucesiones espectrales a partir de parejas exactas. Una vez más, para evitar problemas de convergencia nos limitaremos a cierto tipo de pareja exacta.

Definición 11: Decimos que la pareja exacta (E_1, D_1) es acotada si para cada grado total $n \in \mathbb{Z}$ existen enteros $s(n)$ y $t(n)$ tales que

1. Si $p \leq s(n)$ entonces $D_1^{p,n-p} = 0$.
2. Si $p \geq t(n)$ entonces $i_1 : D_1^{p,n-p} \to D_1^{p-1,n-p+1}$ es un isomorfismo.

Como es de esperarse, las sucesiones espectrales de tipo cohomológico que provienen de una pareja exacta convergen a cierto límite inverso.

Teorema 3: Sea (E_1, D_1) una pareja exacta acotada con morfismos estructurales i_1, j_1, k_1 con bigrados $(-1,1)$, $(1,0)$ y $(0,0)$ respectivamente. Entonces, la sucesión espectral inducida por la pareja exacta converge al límite inverso H^* dado por:

$$H^* = \varprojlim \Big(\cdots \longrightarrow D^{s,*-s} \xrightarrow{\ i\ } D^{s-1,*-s+1} \xrightarrow{\ i\ } \cdots \Big),$$

donde H^* está filtrado por $F^pH^* = \mathrm{Ker}(H^* \to D^{p-1,*-p+1})$.

Demostración. Para demostrar que $E_1^{p,q}$ converge a H^{p+q} necesitamos ver que para todo grado total $n = p+q$ se tiene que $E_\infty^{p,n-p} \simeq F^pH^n/F^{p+1}H^n$.

En primer lugar, note que d_r se puede escribir como $d_r = j^{(r)} \circ k^{(r)} = j \circ i^{(-r+1)} \circ k$. Por la exactitud de la pareja exacta $\mathrm{Ker}(d_{r-1}) = \mathrm{Ker}(j \circ i^{(-r+2)} \circ k)$, y los elementos en dicho kernel son los x tales que $i^{-r+2}(k(x)) = i(y)$ para algún y, de esta manera

$$\mathrm{Ker}(d_{r-1}) = k^{-1}(i^{r-1}(D^{s+r-1,t-r+1})).$$

Tomemos $R = \max\{s(n), t(n)\}$, entonces para $r \geq R$ el $\mathrm{Ker}(d_{r-1})$ es independiente de r pues i se convierte en isomorfismo.

Por otro lado, $\mathrm{Im}(d_r)$ son los elementos en la imagen de j para los cuales $i^{r-2}(x)$ están en la imagen de k, por exactitud $i^{r-2}(x)$ es el kernel de i y por tanto x está en el kernel de $i^{(r-1)}$. Para $r \geq R$ como $i^{(r-1)} = 0$ entonces $\mathrm{Im}(d_{r-1} = \mathrm{Im}(j))$.

Usando lo anterior, el segundo teorema de isomorfismos y la exactitud de la pareja obtenemos

$$\begin{aligned} E_\infty^{p,n-p} &= \mathrm{Ker}(d_R)/\mathrm{Im}(d_R) \\ &\cong \mathrm{Im}(i^{(R)}) \cap \mathrm{Im}(k) \\ &\cong \mathrm{Im}(i^{(R)}) \cap \mathrm{Ker}(i). \end{aligned}$$

De la definición de la filtración, y por la última línea, en $E_\infty^{p,n-p}$ están los elementos de F^pH^n y que se identifican cuando coinciden en la imagen de $i^{(R)}$. De esta manera,

$$E_\infty^{p,n-p} \cong F^pH^n/F^{p+1}H^n.$$

□

En muchos casos, en topología algebraica es útil considerar ciertas construcciones functoriales de categorías algebraicas o topológicas que a cada objeto le asignan una sucesión espectral. De esta manera, es conveniente definir los morfismos para hacer de las sucesiones espectrales una categoría que denotaremos por **SpecSeq**.

Definición 12: Dadas dos sucesiones espectrales $(E_r^{*,*}, d_r)_r$ y $(\bar{E}_r^{*,*}, \bar{d}_r)_r$. Definimos un morfismo de sucesiones espectrales como una familia de homomorfismos de módulos bigraduados $f_r : (E_r^{*,*}, d_r) \to (\bar{E}_r^{*,*}, \bar{d}_r)$ de grado $(0,0)$ para todo r tal que f_r conmuta con los diferenciales, es decir, $f \circ d_r = \bar{d}_r \circ f_r$ tal que para cada r se tiene que f_{r+1} es el homomorfismo inducido en homología por f_r, es decir,

$$f_{r+1} : E_r^{*,*} \cong H(E^{*,*}, d_r) \xrightarrow{H(f_r)} H(\bar{E}^{*,*}, \bar{d}_r) \cong \bar{E}_{r+1}^{*,*}.$$

Si consideramos a las sucesiones espectrales como torres de submódulos de la segunda página, podemos considerar $f : E_2 \to \bar{E}_2$. Y en este caso, la condición de conmutar con los diferenciales permite identificar f_{r+1} con la función inducida por f_2,

$$f_{r+1} : E_r \cong Z_r/B_r \to \bar{Z}_r/\bar{B}_r \cong \bar{E}_{r+1}.$$

Más aún, tenemos $f_\infty : E_\infty \to \bar{E}_\infty$. Además, la condición de que f_{r+1} sea la inducida en homología se puede escribir como la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_r & \longrightarrow & \operatorname{Im} d_r & \longrightarrow & E_{r+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_r} & & \downarrow{\scriptstyle f_r} & & \downarrow{\scriptstyle f_{r+1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_r & \longrightarrow & \operatorname{Im} d_r & \longrightarrow & E_{r+1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Del lema de los cinco se sigue el siguiente resultado.

Teorema 4: Si $f_r : (E_r^{*,*}, d_r) \to (\bar{E}_r^{*,*}, \bar{d}_r)$ es un morfismo de sucesiones espectrales, y para algún n, $f_n : E_n \to \bar{E}_n$ es un isomorfismo de módulos bigraduados, entonces para todo r tal que $n \leq r \leq \infty$, se tiene que $f_r : E_r \to \bar{E}_r$.

Con estas ideas, podemos enunciar un teorema de comparación que suele ser útil.

Teorema 5: Suponga que $\phi : (A, d, F) \to (\bar{A}, \bar{d}, \bar{F})$ es un morfismo de módulos diferenciales graduados, tal que $\phi_n : E_n^{*,*} \to \bar{E}_n^{*,*}$ es un isomorfismo para algún n. Si las filtraciones son exhaus-

tivas y débilmente convergentes, entonces ϕ induce un isomorfismo en los módulos asociados $E_0^{*,*}(H(A,d),F)$ y $E_0^{*,*}(H(\bar{A},\bar{d}),\bar{F})$. Más aún, si las filtraciones son completas, entonces ϕ induce un isomorfismo en homología $H(\phi) : H(A,d) \to H(\bar{A},\bar{d})$ (ver [6]).

Como la sucesión espectral de mayor importancia en esta tesis se construye a partir de parejas exactas, es preciso conocer cómo morfismos entre parejas exactas inducen morfismos entre las respectivas sucesiones espectrales. Para esto, formalicemos primero la idea de morfismo de parejas exactas. Aunque para nuestro objetivo necesitamos que los módulos tengan una graduación, haremos la discusión sin considerarla pues el argumento es exactamente el mismo, y el no hacerlo fácilita la notación.

Definición 13: Sean (E,D,i,j,k) y (E_0,D_0,i_0,j_0,k_0) dos parejas exactas. Un morfismo de parejas exactas

$$(\phi,\psi) : (E,D,i,j,k) \to (E_0,D_0,i_0,j_0,k_0),$$

consiste de una pareja de homomorfismos de R-módulos

$$\phi : E \to E_0,$$
$$\psi : D \to D_0,$$

que satisfacen las siguientes tres condiciones de conmutatividad

$$\psi \circ i = i_0 \circ \psi,$$
$$\phi \circ j = j_0 \circ \psi,$$
$$\psi \circ k = k_0 \circ \phi.$$

Si denotamos por $d = j \circ k : E \to E$ y $d_0 : j_0 \circ k_0 : E_0 \to E_0$, a los diferenciales de E y E_0 respectivamente, entonces tenemos que nuestras definiciones implican la relación de conmutatividad

$$\phi \circ d = \phi \circ (j \circ k) = (j_0 \circ \psi) \circ k = j_0 \circ (k_0 \circ \phi) = d_0 \circ \phi.$$

Con esto, tenemos que ϕ induce un homomorfismo $\phi' : E' \to E'_0$, y como $\psi(A') \subset A'_0$, entonces también tenemos un homomorfismo $\psi' : D' \to D'_0$. Es rutinario verificar que la pareja de homomorfismos (ϕ,ψ) es también un morfismo de parejas exactas en las primeras parejas derivadas,

diremos que (ϕ', ψ') es el morfismo de parejas exactas inducido por (ϕ, ψ). Iterando el procedimiento tenemos una familia de morfismos de parejas exactas $(\phi^{(n)}, \psi^{(n)})$.

Note que del argumento anterior, $\{\phi^{(n)}\}$ es precisamente un morfismo de sucesiones espectrales.

2.2. Sucesión espectral de Serre

Recordemos que una fibración, con fibra F, es una función continua de espacios topológicos $\pi : E \to B$ que satisface la propiedad de levantamiento de homotopía, esto es, si K es un espacio topológico y tenemos una función $g : K \to E$ y una homotopía $H : K \times I \to B$ tal que $\pi \circ g(x) = H(x,0)$, entonces H se puede levantar a una homotopía $\bar{H} : K \times I \to E$ tal que $\pi \circ \bar{H} = H$.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle (\_,0)}\downarrow & \overset{\bar{H}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ K \times I & \xrightarrow[h]{} & B. \end{array}$$

Denotaremos las fibraciones por $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$, donde $F = \pi^{-1}(b)$ para un punto básico $b \in B$.

Nos restringiremos a espacios del tipo de homotopía de CW-complejos. De esta manera, todos nuestros espacios serán sustituidos por CW-complejos equivalentes que están dotados de una filtración esqueletal.

Teorema 6: Sea R un anillo conmutativo con unidad. Suponga que $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ es una fibración donde B es arco-conexa y F es conexa. Entonces existe una sucesión espectral de álgebras (en el primer cuadrante) $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, que converge a $H(E;R)$ como álgebra con $E_2^{p,q} = H^p(B;H^q(F;R))$, con la cohomología del espacio B con coeficientes locales en la cohomología de la fibra de π. Esta sucesión espectral es natural respecto a los morfismos que preservan fibras [6].

En muchos casos, el término E_2 de la sucesión espectral se simplifica y deja ser necesario utilizar cohomología con coeficientes locales.

Proposición 2: Suponga que el sistema de coeficientes locales en B determinado por la fibra es

simple, es decir F es conexo, F y B son de tipo finito, entonces para un campo k, tenemos

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B;k) \otimes_k H^q(F;k).$$

Bajo ciertas hipótesis, no sólo podemos describir la segunda página de la sucesión espectral como un producto tensorial, sino también el módulo al que converge. A este teorema se le conoce como el teorema de Leray-Hirsch.

Definición 14: Sea $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ una fibración. Diremos que F es totalmente no homologo a cero en E respecto al anillo R si $\imath^*(E;k) \to H^*(F;R)$ es sobreyectiva.

Teorema 7 (Leray-Hirsch)**:** Dada $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ una fibración con F conexo, B de tipo finito para el cual el sistema de coeficientes locales es simple; entonces si F es totalmente no homologo a cero en E con respecto al campo k, entonces tenemos que

$$H^*(E;k) \cong H^*(B;k) \otimes_k H^*(F;k),$$

como espacios vectoriales. De hecho, bajo estas condiciones la sucesión espectral colapsa en la página E_2 [6].

2.2.1. Cohomología de espacios de Eilenberg-Mac Lane

Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Consideremos el espacio de caminos

$$PX = \{\gamma : [0,1] \to X \quad | \quad \gamma(0) = x_0 \text{ donde } \gamma \text{ es continua}\}$$

con la topología compacta abierta, entonces PX es contráctil y $\pi : PX \to X$ definido por $\pi(\gamma) = \gamma(1)$ es una fibración, y la fibra sobre x_0 es precisamente el espacio de lazos en X:

$$\pi^{-1}(x_0) = \{\gamma : [0,1] \to X | \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_0 \text{ donde } \gamma \text{ es continua}\} = \Omega X.$$

Escribimos la fibración por $\Omega X \hookrightarrow PX \to X$.

Recordemos que un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $K(G,n)$ es un CW-complejo tal que $\pi_n(K(G,n)) = G$ y el resto de grupos de homotopía son triviales.

Tomemos ahora como caso particular $X = K(\mathbb{Z},n)$, y consideremos la fibración anterior

$$\Omega K(\mathbb{Z},n) \hookrightarrow P(K(\mathbb{Z},n)) \to K(\mathbb{Z},n).$$

Como $\Omega K(\mathbb{Z},n)$ tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo, y además por la adjunción de los grupos de homotopía y el espacio de lazos, tenemos que $\pi_i(\Omega K(\mathbb{Z},n)) = \pi_{i+1}(K(\mathbb{Z},n))$, entonces

$$\pi_i(\Omega K(\mathbb{Z},n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n-1, \\ 0 & i \neq n-1. \end{cases}$$

Es decir, $\Omega K(\mathbb{Z},n)$ es un $K(\mathbb{Z},n-1)$. Como los espacios de Eilenberg-Mac Lane son únicos salvo equivalencia homotópica, entonces la fibración toma la forma de

$$K(\mathbb{Z},n-1) \hookrightarrow P(K(\mathbb{Z},n)) \to K(\mathbb{Z},n).$$

Usaremos la sucesión espectral de Serre para calcular la cohomología de estos espacios en ciertos grados que serán de interés más adelante.

Teorema 8: Para $n > 2$, $H^p(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) = 0$ si $n < p < n+3$ y $H^{n+3}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$.

Demostración. Razonemos por inducción sobre n.

- Caso base n=3.

  Consideremos la fibración $K(\mathbb{Z},2) \hookrightarrow P(K(\mathbb{Z},3)) \to K(\mathbb{Z},3)$. Y calculemos $H^p(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z})$.

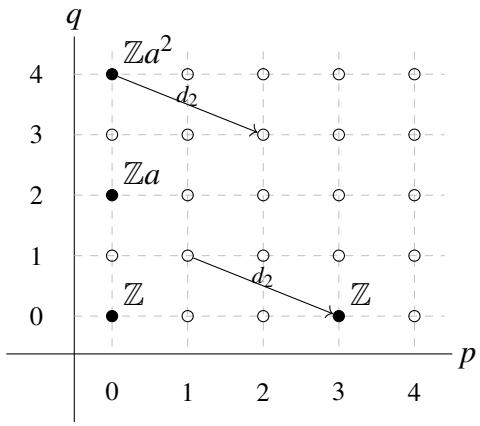
  Note que $K(\mathbb{Z},2) = \mathbb{C}P^\infty$, P contráctil, y todos los espacios son simplemente conexos. Entonces, la sucesión espectral de Serre es en la segunda página:

  $$E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z},3);H^q(K(\mathbb{Z},2);\mathbb{Z})).$$

  Inicialmente sabemos que la cohomología del espacio proyectivo complejo de dimensión infinita es un álgebra polinomial con un generador a de grado dos y además, por el teorema de Hurewicz

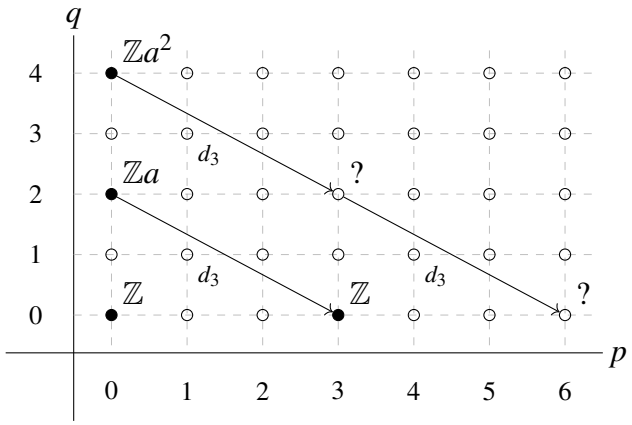
  $$H^p(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0,3, \\ 0 & p = 1,2. \end{cases}$$

  Con lo que, de la estructura multiplicativa de la sucesión espectral, podemos deducir que la segunda página tiene la forma



Como $K(\mathbb{Z},2)$ sólo tiene cohomología en grados pares, entonces todos los diferenciales d_2 salen o entran de una entrada cero en la sucesión espectral. Luego $E_3 = E_2$. En está página empiezan a aparecer diferenciales posiblemente no triviales.

Sabiendo que P es contráctil, toda su cohomología excepto en grado cero se anula. Usaremos este hecho para garantizar que en grado total distinto de cero, en la página infinito no pueden sobrevivir términos no nulos.



Note que cualquier diferencial d_r, $r > 3$ que salga de $E_r^{0,2}$ cae en el cuarto cuadrante, y cualquier diferencial que llegue sale del segundo cuadrante, esto fuerza a que $E_r^{0,2} = \mathbb{Z}[a]$ tenga que desaparecer en la página 4, es decir

$$E_4^{0,2} = 0 = \frac{\mathrm{Ker}(d_3 : E_3^{0,2} \longrightarrow E_3^{3,0})}{\mathrm{Im}(d_3 : E_3^{-3,4} \longrightarrow E_3^{0,2})},$$

luego $d_3 : E_3^{0,2} \longrightarrow E_3^{3,0}$ debe ser inyectiva. Análogamente, como $d_3 : E_3^{0,2} \longrightarrow E_3^{3,0}$ es el

único diferencial no trivial que llega a $E_3^{3,0}$, entonces éste debe desaparecer en la página 4, es decir

$$E_4^{0,2} = 0 = \frac{\mathrm{Ker}(d_3 : E_3^{3,0} \longrightarrow E_3^{6,-2})}{\mathrm{Im}(d_3 : E_3^{2,0} \longrightarrow E_3^{3,0})},$$

pero $E_3^{6,-2} = 0$, luego $d_3 : E_3^{2,0} \longrightarrow E_3^{3,0}$ debe ser sobreyectivo y por tanto, isomorfismo. Denotemos por $x = d_3(a)$ el generador de $E_3^{3,0}$. De la estructura multiplicativa de la sucesión espectral de Serre, $d(a^2) = 2ada = 2ax$ y $E_3^{3,2} = \mathbb{Z}ax$. Esto implica que $d_3 : \mathbb{Z}a^2 \to \mathbb{Z}ax$ es una función inyectiva, de donde $H(E_3^{4,0}, d_3) = E_4^{4,0} = 0$.

También sabemos que $E_3^{0,4}$ también debe ser cero, puesto que todos los diferenciales que salen de allí son triviales, y llegan allí son triviales. Ahora bien, a $E_3^{5,0}$ los diferenciales d_3 y d_4 salen de grupos triviales, y el diferencial $d_5 : E_5^{4,0} \to E_5^{5,0}$ sería el último diferencial posiblemente no trivial, pero $E^{4,0}$ se anula desde el paso 4. Luego $E_3^{5,0}$ también debe ser cero.

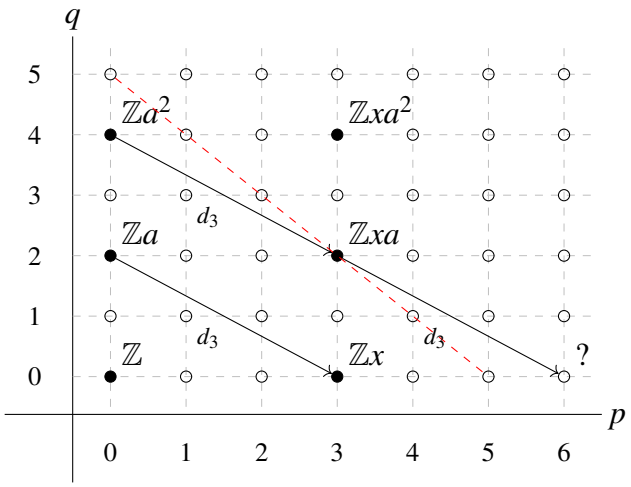
Tenemos hasta el momento que

$$H^p(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0,3, \\ 0 & p = 1,2,4,5. \end{cases}$$

Note que en grado total 5, el único grupo posiblemente no trivial es $E^{3,2} = \mathbb{Z}ax$, y como el único diferencial no trivial que llega a él es d_3, para que se desvanezca tiene que ocurrir que

$$E_4^{0,2} = 0 = \frac{\mathrm{Ker}(d_3 : E_3^{3,2} \longrightarrow E_3^{6,0})}{\mathrm{Im}(d_3 : E_3^{0,4} \longrightarrow E_3^{3,2})},$$

con lo que $\mathrm{Ker}(d_3 : E_3^{3,2} \longrightarrow E_3^{6,0}) = \mathrm{Im}(d_3 : E_3^{0,4} \longrightarrow E_3^{3,2})$.



Además, el único diferencial no trivial que llega a $E_3^{6,0}$ es $d_3 : E_3^{3,2} \to E_3^{6,0}$, con lo que también debe desaparecer en la página 4, esto es

$$E_4^{6,0} = 0 = \frac{\operatorname{Ker}(d_3 : E_3^{6,0} \longrightarrow E_3^{9,-2})}{\operatorname{Im}(d_3 : E_3^{3,2} \longrightarrow E_3^{6,0}))},$$

y como el diferencial que sale es trivial, el kernel es todo el grupo, y por tanto $d_3 : E_3^{3,2} \to E_3^{6,0}$ tiene que ser sobreyectiva. Teniendo en cuenta que $\operatorname{Im}(d_3 : E_3^{0,4} \longrightarrow E_3^{3,2}) = 2\mathbb{Z}ax$ de las cuentas anteriores se sigue que

$$\begin{aligned} E_3^{6,0} &\cong E_3^{3,2} / \operatorname{Ker}(d_3 : E_3^{3,2} \longrightarrow E_3^{6,0}) \\ &\cong E_3^{3,2} / \operatorname{Im}(d_3 : E_3^{0,4} \longrightarrow E_3^{3,2}) \\ &\cong \mathbb{Z}ax/2\mathbb{Z}ax \\ &\cong \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

Con esto hemos probado el caso base, es decir:

$$H^p(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0,3, \\ 0 & p = 1,2,4,5, \\ \mathbb{Z}/2 & p = 6. \end{cases}$$

- Veamos ahora el paso inductivo.

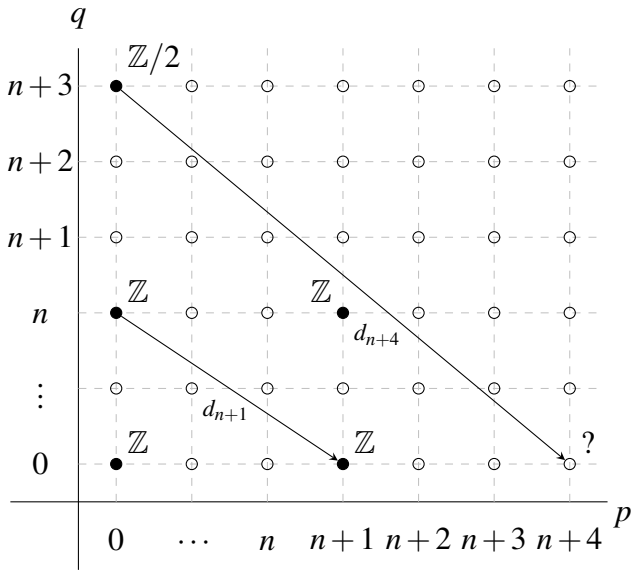
Supongamos que

$$H^p(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n, \\ 0 & 0 < p < n, \\ 0 & n < p < n+3, \\ \mathbb{Z}/2 & p = n+3. \end{cases}$$

y calculemos la cohomología de $K(\mathbb{Z},n+1)$ hasta grado $n+4$. Por ser un espacio de Eilenberg-Mac Lane, el teorema de Hurewicz nos garantiza que

$$H^p(K(\mathbb{Z},n+1);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n+1, \\ 0 & 0 < p < n+1. \end{cases}$$

Entonces la sucesión espectral de Serre en la segunda página toma la forma



Note que a $E^{n+2,0}$ sólo llegan diferenciales triviales, pues si $d_r : E_r^{n+2-r,r-1} \to E_r^{n+2,0}$, el único grado posiblemente no trivial es cuando $p = 0$, esto es $n+2-r = 0$ luego $r = n+2$, pero $E_2^{0,n+2-1} = 0$ con lo que concluimos que $E_2^{n+2,0} = 0$ desde el inicio de lo contrario sobreviviría hasta la página infinito y por tanto el espacio de caminos tendría cohomología no trivial en grado $n+2$. Análogamente, $E_2^{n+3,0} = 0$.

El primer diferencial interesante es $d_{n+1} : E_{n+1}^{0,n} \longrightarrow E_{n+1}^{n+1,0}$, de hecho, es el único diferencial no trivial que sale de $E_{n+1}^{0,n}$ y el único diferencial no trivial que llega a $E_{n+1}^{n+1,0}$, esto hace que la única forma de que ambos se desvanezcan en la página $n+2$ es que d_{n+1} se un isomorfismo.

Tenemos hasta el momento

$$H^p(K(\mathbb{Z},n+1);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n+1, \\ 0 & 0 < p < n+1, \\ 0 & n+1 < p < n+4. \end{cases}$$

Queda restando saber qué ocurre con $E_2^{n+4,0}$. El único diferencial posiblemente no trivial $d_r : E_r^{n+4-r,r-1} \longrightarrow E_r^{n+4,0}$ ocurriría cuando $n+4-r = 0$, es decir, cuando $r = n+4$ y $q = n+3$. Note que el diferencial $d_{n+4} : E_{n+4}^{n+3,0} \longrightarrow E_{n+4}^{0,n+4}$ es el único diferencial posiblemente no trivial que llega a $E_{n+4}^{0,n+4}$ por lo que tiene que ser inyectivo, y similarmente, es el único diferencial no trivial que sale de $E_{n+4}^{n+3,0}$ por lo que también está condicionado a ser sobreyectivo. Concluimos que $d_{n+4} : E_{n+4}^{n+3,0} \longrightarrow E_{n+4}^{0,n+4}$ es un isomorfismo, y por tanto que $E_{n+4}^{n+4,0} \cong \mathbb{Z}/2$. Así, como esta entrada no se ve alterada desde la página dos, entonces $H^{n+4}(K(\mathbb{Z},n+1);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$.

Hemos probado que

$$H^p(K(\mathbb{Z},n+1);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n+1, \\ 0 & 0 < p < n+1, \\ 0 & n+1 < p < n+4, \\ \mathbb{Z}/2 & p = n+4. \end{cases}$$

y con esto concluimos el paso inductivo.

□

2.3. Sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch

Sea X un espacio topológico y sea

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \cdots \subseteq X,$$

una filtración de X. Aunque la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch está definida para cualquier teoría de cohomología generalizada, sólo se estudiará el caso de K-teoría.

Recordemos que para un espacio topológico X, denotamos por $Vect(X)$ al conjunto de clases de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre X. Como este conjunto tiene la estructura de semigrupo abeliano bajo la suma de Whitney podemos utilizar la construcción de Gröthendieck para completarlo a un grupo abeliano, denotado $K(X)$ y llamado la K-teoría de X. De hecho, $K(X)$ también tiene estructura como anillo con el producto tensorial.

Además, para toda función continua de espacios topológicos $f : X \to Y$ se tiene una función inducida en K-teoría dada por el pull-back de fibrados vectoriales. Con esto, podemos pensar a la K-teoría como un functor contravariante de la categoría de espacios topológicos a los anillos conmutativos.

Adicionalmente, si $x \in X$ y consideramos la función constante $c_x : * \to X$, obtenemos un morfismo inducido en K-teoría $c_x^* : K(X) \to K(*)$, definimos entonces la K-teoría reducida como el kernel de dicho morfismo, y la denotamos por $\tilde{K}(X) = \ker c_x^*$. Con esto, si (X,Y) es una pareja de espacios compactos, definimos la K teoría relativa por $K(X,Y) = \tilde{K}(X/Y)$, donde X/Y tiene como punto base Y/Y.

Motivados por el *teorema de periodicidad de Bott*, las definiciones anteriores se pueden extender a grados superiores. Si $n \geq 0$

- $\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}(\Sigma^n X)$.
- $K^{-n}(X,Y) = \tilde{K}^{-n}(X/Y)$.
- $K^{-n}(X) = K^{-n}(X,\emptyset)$.

De esta forma, los functores de K-teoría forman una teoría de cohomología generalizada puesto que cumplen todos los axiomas de Eilenberg-Steenrod salvo el axioma de dimensión.

Apliquemos el functor K-teoría a la tripleta de espacios $X_{p-1} \subseteq X_p \subseteq X$ y a los espacios cocientes $X_p/X_{p+1} \to X/X_{p+1} \to X/X_p$ con las inclusiones naturales inducidas por los cocientes.

Definición 15: La filtración $F^p(K^*X)$ para la K-teoría de X está definida por

$$F^p(K^m X) = \mathrm{Im}(K^m(X/X_{p-1}) \to K^m(X)).$$

Note que la filtración anterior es decreciente puesto que la secuencia

$$X \to X/X_{p-1} \to X/X_p,$$

induce en K-teoría la secuencia

$$K^*(X,X_p) \to K^*(X,X_{p-1}) \to K^*(X).$$

Luego, $F^{p+1}K^m(X) \subseteq F^pK^m(X)$. Por otro lado, tenemos también la secuencia

$$* \to X_p/X_{p-1} \to X/X_{p-1} \to X/X_p \to *,$$

de la cual obtenemos el diagrama para los K-grupos dado por

$$\begin{array}{ccc} K^{p+q}(X,X_p) & \xrightarrow{\ i\ } & K^{p+q}(X,X_{p-1}) \\ {\scriptstyle k}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ K^{p+q-1}(X_p,X_{p-1}) & & K^{p+q}(X_p,X_{p-1}), \end{array}$$

donde los morfismos son los inducidos la secuencia inicial. Note que hay un desplazamiento en los grupos del lado izquierdo. Esto permite definir una pareja exacta de la siguiente manera:

Definición 16: La pareja exacta para K-teoría es

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\ i\ } & D_1 \\ & {\scriptstyle k}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j} & \\ & E_1, & \end{array}$$

donde $D_1^{p,q} = K^{p+q}(X,X_p)$ y $E_1^{p,q} = K^{p+q}(X_p,X_{p-1})$.

Con esta notación, tenemos que el diagrama para los K-grupos se reescribe como:

$$\begin{array}{ccc} D_1^{p,q} & \xrightarrow{\ i\ } & D_1^{p-1,q+1} \\ {\scriptstyle k}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ E_1^{p,q} & & E_1^{p,q+1}. \end{array}$$

Así, j tiene bigrado $(1,0)$, k tiene bigrado $(0,0)$, e i tiene bigrado $(-1,1)$.

De la discusión sobre parejas exactas que se tuvo en 2.1 la pareja exacta anterior induce una sucesión espectral $\{E_r,d_r\}$ con $d_r = j^{(r)} \circ k^{(r)}$.

Al igual que con la sucesión espectral de Serre, no estamos interesados en cualquier espacio que tenga una filtración, sino en aquellos que son CW-complejos dotados de una filtración esqueletal.

En este caso, como la primera página está dada por $E_1^{p,q} = K^{p+q}(X_p, X_{p-1})$, la escritura se vuelve más sencilla ya que los cocientes sucesivos son cuñas de esferas, esto es, si $m(p)$ denota el conjunto de p-celdas, entonces

$$X_p/X_{p-1} \cong \bigvee_{\alpha \in m(p)} \mathbb{S}^p_\alpha.$$

Con esto, y teniendo en cuenta que la K-teoría es una teoría de cohomología generalizada, podemos calcular explícitamente la primera página de la sucesión. Si denotamos por $C^n_K = K(X^n, X^{n-1})$ entonces:

$$\begin{aligned} C^n_K = K^n(X^n, X^{n-1}) \cong & \tilde{K}^n(X^n/X^{n-1}) \cong \tilde{K}^n\left(\bigvee_{\alpha \in m(n)} \mathbb{S}^n_\alpha\right) \\ & \cong \prod_{\alpha \in m(n)} \tilde{K}^n(\mathbb{S}^n_\alpha) = \prod_{\alpha \in m(n)} K^0(*_\alpha) \\ & = \prod_{\alpha \in m(n)} \mathbb{Z}a^n_\alpha. \end{aligned}$$

Lo que obtenemos es un complejo de cocadenas que tiene un generador por cada celda de dimensión n, donde el diferencial $d^n_K : C^n_K \to C^{n+1}_K$ está dado por:

$$\begin{tikzcd} K^n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "d^n_K"] \arrow[dr, "j^n"'] & & K^{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\ & K^n(X^n). \arrow[ur, "\delta^n"'] & \end{tikzcd}$$

Sin embargo, como sabemos que $d^n_K : \prod_{\alpha \in m(n)} \mathbb{Z}a^n_\alpha \longrightarrow \prod_{\beta \in m(n+1)} \mathbb{Z}a^{n+1}_\beta$, podemos escribir directamente el diferencial en términos de las funciones de pegado para las celdas;

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[rr, bend right, "h_{\alpha\beta}"'] & X^n \arrow[r, "\pi"] & X^n/X^n - Int(e^n_\alpha) \cong \mathbb{S}^n_\alpha \end{tikzcd}$$

Así, $h^*_{\alpha\beta} : K^n(\mathbb{S}^n_\alpha) \longrightarrow K^n(\mathbb{S}^n_\beta)$, y como sabemos que estos son grupos son copias de $\mathbb{Z}$, tenemos que necesariamente $h_{\alpha\beta}(x) = d_{\alpha\beta}x$, donde $d_{\alpha\beta}$ es el justamente el grado de $h_{\alpha\beta}$.

De esta forma, como $E_1^{p,q} = K^{p+q}(X_p, X_{p-1})$, por la discusión anterior tenemos que la página E_1 no es más que el complejo de cocadenas celulares $C^p(X; K^q(*))$ con el diferencial

$$d_1 : E_1^{p,q} = K^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to K^{p+q+1}(X_{p+1}, X_p) = E_1^{p+1,q}.$$

como el operador frontera usual de cohomología celular.

Usando los resultados de 2.1, y lo que acabamos de describir, tenemos:

Teorema 9: Para un CW-complejo X, existe una sucesión espectral E_r que satisface:

- $E_1^{p,q} = C^p(X, K^q(*))$, donde d_1 es el operador frontera usual en cohomología,
- $E_2^{p,q} = H^p(X, K^q(*))$ y,
- existe una filtración $F^pK^*(X)$ tal que,

$$E_\infty^{p,q} = F^pK^{p+q}(X)/F^{p+1}K^{p+q}(X).$$

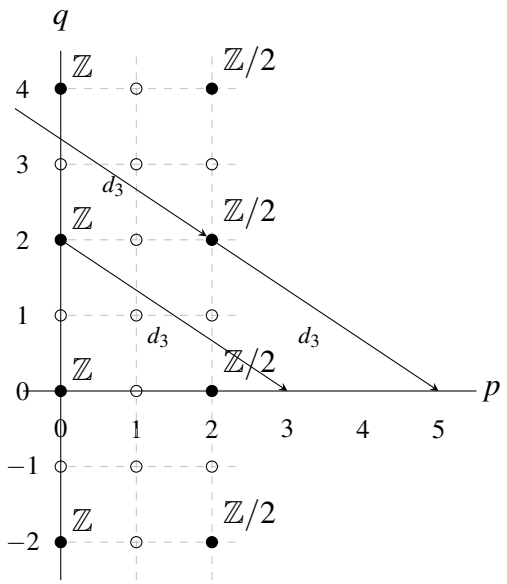
Ejemplo 1: Sea $X = \mathbb{RP}^2$, calculemos $K^*(X)$ usando la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. Del teorema anterior tenemos que $E_2^{p,q} = H^p(X, K^q(*))$, y además

$$K^q(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{Si } q \text{ es par,} \\ 0 & \text{Si } q \text{ es impar.} \end{cases}$$

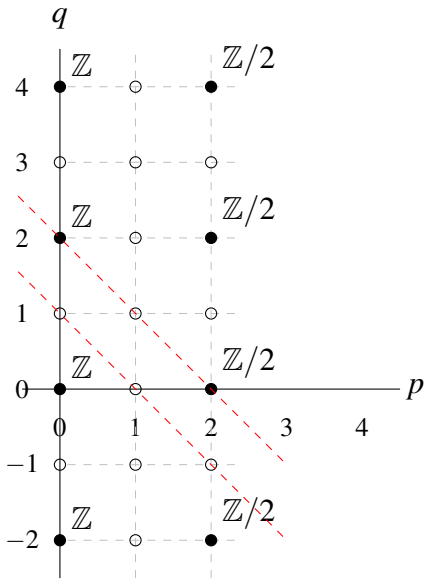
Así, como

$$H^p(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{Si } p = 0, \\ 0 & \text{Si } p = 1 \text{ ó } n > 2, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{Si } p = 2. \end{cases}$$

Luego la segunda página se tiene la forma



Note que como $K^q(*)$ es trivial para q impar, las filas con numeración impar en la segunda página también lo serán. Esto causa que el diferencial d_2 siempre salga o llegue a una un grupo trivial. Así, el diferencial es cero y la tercera página es idéntica a la segunda. Al tener todos los grupos no triviales condensados en las columnas cero y dos, el tercer diferencial también es trivial. De hecho, lo anterior ocurre para todos los diferenciales d_n para $n > 3$. Esto implica que la sucesión espectral colapsa en la segunda página, es decir $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$. Del teorema anterior sabemos que $E_\infty^{p,q} = F^pK^{p+q}(X)/F^{p+1}K^{p+q}(X)$. Por el teorema de periodicidad de Bott, es suficiente ver qué ocurre en grado total uno y dos.



Para grado total 1, todos los grupos que aparecen son triviales, de donde $K^1(X) = 0$. En grado total 2, tenemos varios grupos no triviales:

- $E^{0,2} = \mathbb{Z} = F^0K^2(X)/F^1K^2(X)$.
- $E^{1,1} = 0 = F^1K^2(X)/F^2K^2(X)$.
- $E^{2,0} = \mathbb{Z}/2 = F^2K^2(X)/F^3K^2(X)$.

Dicha información se traduce a las siguientes secuencias exactas cortas:

$$0 \longrightarrow F^1K^2(X) \longrightarrow F^0K^2(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F^2K^2(X) \longrightarrow F^1K^2(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F^3K^2(X) \longrightarrow F^2K^2(X) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

De lo anterior, tenemos que como $F^3K^2(X) = 0$, tenemos que $F^2K^2(X) = \mathbb{Z}/2$ y que existe un isomorfismo entre $F^2K^2(X)$ y $F^1K^2(X)$, de donde obtenemos la secuencia exacta corta

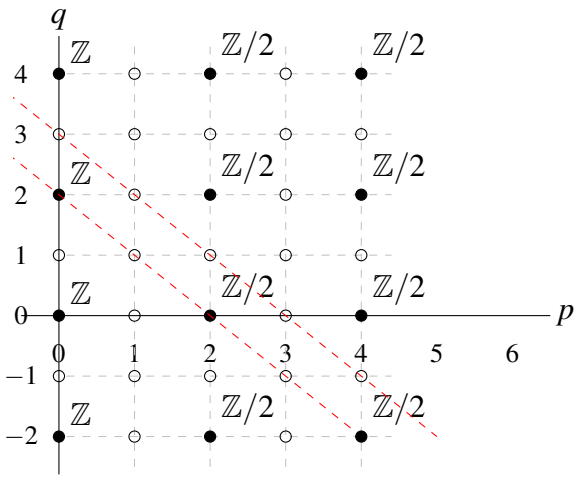
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow F^0K^2(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Y como esta secuencia se parte, tenemos que $F^0K^2(X) = K^2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$.

En el ejemplo anterior, pudimos recuperar completamente la información de la K-teoría a partir de lo obtenido en la página infinito de la sucesión espectral de forma directa. Sin embargo, las secuencias exactas cortas que se obtienen al final no necesariamente se parten, y aparecen los llamados problemas de extensión. En estos casos, se requieren herramientas externas para poder determinar la K-teoría completamente.

Ejemplo 2: Sea $X = \mathbb{RP}^4$ y calculemos su K-teoría usando la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch.

Al igual que en el primer ejemplo, la sucesión colapsa en la segunda página y esta tiene la forma



En este caso también ocurre que $K^1(X) = 0$ trivialmente, y en el caso de grado total par tenemos

la siguiente información:

- $E^{0,2} = \mathbb{Z} = F^0K^2(X)/F^1K^2(X)$.
- $E^{1,1} = 0 = F^1K^2(X)/F^2K^2(X)$.
- $E^{2,0} = \mathbb{Z}/2 = F^2K^2(X)/F^3K^2(X)$.
- $E^{3,-1} = 0 = F^3K^2(X)/F^4K^2(X)$.
- $E^{4,-2} = \mathbb{Z}/2 = F^4K^2(X)/F^5K^2(X)$.
- $E^{5,-3} = 0 = F^5K^2(X)/F^6K^2(X)$.

Tenemos entonces que $F^5K^2(X) = F^6K^2(X) = \cdots = 0$, $F^1K^2(X) = F^2K^2(X)$, $F^3K^2(X) = F^4K^2(X)$, y además $F^3K^2(X) = \mathbb{Z}/2$. Así, de manera análoga al ejemplo anterior obtenemos las secuencias exactas cortas:

$$0 \longrightarrow F^1K^2(X) \longrightarrow F^0K^2(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow F^1K^2(X) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

Aunque la primera secuencia exacta se parte, no podemos determinar directamente de la sucesión espectral a $F^1K^2(X)$, sólo podemos afirmar que necesariamente $F^0K^2(X) = F^1K^2(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Sin embargo, de la segunda secuencia exacta corta $F^1K^2(X)$ es un grupo abeliano finitamente generado, y sólo puede ser $\mathbb{Z}/4$ ó $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Así, $\tilde{K}^0(X) = \mathbb{Z}/4$ ó $\tilde{K}^0(X) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Para distinguir cuál grupo es en realidad, tendremos que usar herramientas de K-teoría. Note que la diferencia fundamental de ambos grupos es que uno tiene elementos de orden mayor a dos, por este motivo, basta mostrar que existe fibrado vectorial complejo que al hacer la suma de Whitney dos veces con sigo mismo no se convierte en un fibrado establemente trivializable.

Consideremos el fibrado tautológico $\gamma_4^1 \to \mathbb{RP}^4$, aunque este fibrado vectorial es real, mostraremos que su complexificación satisface lo deseado, y para verificarlo usaremos que la clase de Stiefel-Whitney de γ_4^1 es no trivial.

Más explícitamente, se sabe que $H^*(\mathbb{RP}^4; \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2[\alpha])/\alpha^5$, y además, la clase de Stiefel-Whitney de dicho fibrado es $w(\gamma_4^1) = 1 + \alpha$.

Sea $H = \gamma_4^1 \oplus \gamma_4^1 \oplus \gamma_4^1 \oplus \gamma_4^1$. Utilizando la fórmula del producto de Whitney, tenemos que

$$w(H) = 1 + \alpha^4.$$

Esto indica que este fibrado no es trivializable como fibrado real, pues de lo contrario tendría clase total igual a uno.

Definamos E como la complexificación del fibrado tautológico, es decir, $E = \gamma_4^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Como fibrado real E es isomorfo a $\gamma_4^1 \otimes \gamma_4^1$, aunque como fibrado complejo es un fibrado de rango uno.

Si consideramos $E \oplus E$, obtenemos un fibrado complejo de rango 2, que como fibrado real es isomorfo a H, y por lo tanto, visto como fibrado real tiene clase de Stiefel-Whitney $w(E \oplus E) = 1 + \alpha^4$.

De lo anterior, si $E \oplus E$ fuera establemente trivializable como fibrado complejo, entonces sería establemente trivializable como fibrado real, pero esto no es posible pues su clase de Stiefel-Whitney es distinta de cero.

Esto muestra que existe un fibrado complejo tal que $E \oplus E$ no es establemente trivializable, y por lo tanto $\tilde{K}^0(\mathbb{RP}^4)$ no puede ser $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ya que existe un elemento de orden mayor que dos.

Concluimos que

$$K^q(\mathbb{RP}^4) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4 & \text{Si } q \text{ es par,} \\ 0 & \text{Si } q \text{ es impar.} \end{cases}$$

3 Operaciones cohomológicas

En este capitúlo se presentará el concepto en general de una operación cohomológica con el objetivo de entender los diferenciales en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. En particular, se estudiará cómo su clasificación está dada por la cohomología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane, y finalmente se estudiará cómo el primer diferencial no trivial de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch es una operación cohomológica estable [5], [9].

3.1. Teorema de clasificación

En el capítulo anterior vimos que las sucesiones espectrales eran colecciones de módulos diferenciales bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, donde los diferenciales tenían bigrado $(r, 1-r)$, y que cumplían que $E_r^{p,q} \cong H^{p,q}(E_{r-1}^{*,*}, d_{r-1})$. Note que explícitamente los diferenciales son morfismos entre grupos de cohomología

$$d_r : E_r^{p-r,q-1+r} \longrightarrow E_r^{p,q},$$

$$d_r : H^{p-r,q-1+r}(E_{r-1}^{p-r,q-1+r}, d_{r-1}) \longrightarrow H^{p,q}(E_{r-1}^{p,q}, d_{r-1}).$$

Más aún, si nos fijamos en las sucesiones de Serre y Atiyah-Hirzebruch, tenemos que los diferenciales deben cumpler las mismas propiedades para cualquier espacio topológico al que se le apliquen. La importancia que tienen los diferenciales para determinar los límites en las sucesiones espectrales motiva el estudio de este tipo de operaciones en general.

Definición 17: Sean G y π grupos abelianos. Una operación cohomológica θ de tipo $(\pi, n; G, m)$ es una transformación natural entre los functores $H^n(-;\pi)$ y $H^m(-;G)$, esto es, para cada espacio

X y cada función $f : X \to Y$, tenemos que $\theta_X : H^n(X;\pi) \to H^m(X;G)$ es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;\pi) & \xrightarrow{\theta_Y} & H^m(Y;G) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^n(X;\pi) & \xrightarrow{\theta_X} & H^m(X;G). \end{array}$$

Al conjunto de operaciones cohomológicas lo denotaremos por $\mathscr{O}(\pi,n;G,m)$.

La ventaja que tiene estudiar las operaciones cohomológicas en general, en lugar de los diferenciales directamente, radica en que las operaciones cohomológicas están clasificadas en términos de la cohomología de ciertos espacios de Eilenberg-Mac Lane.

Recordaremos algunas definiciones y teoremás clásicos sin demostración, para usarlos en la prueba del teorema que da dicha clasificación.

Definición 18: El homomorfismo de Hurewicz $h : \pi_i(X) \to H_i(X;\mathbb{Z})$, es tal que dado un generador $u \in H_i(\mathbb{S}^i;\mathbb{Z})$, y $[f] \in \pi_i(X)$, entonces $h([f]) = f_*(u)$.

Teorema 10 (Hurewicz)**:** Si X es un espacio topológico $(n-1)$ conexo, el mapeo de Hurewicz es un isomorfismo para $i \leq n$ (ver [9]).

Del teorema de coeficientes universales para cohomología tenemos que la secuencia

$$0 \longrightarrow Ext^1(H_{n-1}(X;\pi)) \longrightarrow H^n(X;\pi) \longrightarrow Hom(H_n(X;\pi),\pi) \longrightarrow 0,$$

es exacta corta. En particular si X es $(n-1)$ conexo, $Ext^1(H_{n-1})(0,\pi) = 0$, luego $H^n(X;\pi) \simeq Hom(H_n(X),\pi)$. Si hacemos $\pi = \pi_n(X)$ entonces

$$H^n(X,\pi_n(X)) \simeq Hom(H_n(X),\pi_n(X)).$$

Identificando $H_n(X) \cong \pi_n(X)$, entonces h^{-1} corresponde a la identidad de $\pi_n(X) \to \pi_n(x)$.

Definición 19: Sea X un espacio topológico n-conexo. Decimos que ι_X es la clase fundamental de X, si ι es la imagen de h^{-1} bajo el isomorfismo anterior en $H^n(X;\pi_n(X))$.

En particular, si $X = K(G,n)$ denotaremos a la clase fundamental por ι_n. En caso que haya más de un espacio de Eilenberg-Mac Lane en el argumento, usaremos $\iota_{G,n}$ para distinguir el grupo de

coeficientes.

Teorema 11: La cohomología de un espacio X está clasificada por las clases de homotopía del espacio a un espacio de Eilenberg-Mac Lane, explícitamente, existe una correspondencia uno a uno dada por

$$[X, K(\pi, n)] \leftrightarrow H^n(X, \pi),$$

donde para cada clase de homotopía $[f] \in [X, K(\pi, n)]$, se le asigna el elemento de cohomología $[f] \mapsto f^*(\iota_n)$ (ver [5]).

Nos referifemos a este teorema como la representación homotópica de la cohomología. En el caso particular de que el espacio X también es un espacio de Eilenberg-Mac Lane podemos concluir dos hechos interesantes.

Corolario 12: Si $X = K(\pi, n)$, existe una correspondencia uno a uno entre $[K(\pi, n), K(\pi', n)]$ y $Hom(\pi, \pi')$.

Demostración. De la representación homotópica de la cohomología, el teorema de coeficientes universales, y del teorema de Hurewicz tenemos que

$$\begin{aligned} [K(\pi, n), K(\pi', n)] &\cong H^n(K(\pi, n), \pi') \\ &\cong Hom(H_n(K(\pi, n), \pi')) \\ &\cong Hom(\pi, \pi') \end{aligned}$$

□

Corolario 13: El tipo de homotopía de $K(\pi, n)$ está completamente caracterizado por n y π .

Demostración. Sea n fijo, y consideremos dos grupos abelianos π y π' tal que $\pi \cong \pi'$. Veamos que existe una equivalencia homotópica entre $K(\pi, n)$ y $K(\pi', n)$. Del corolario anterior todo homomorfismo entre π y π' se puede realizar por una función continua entre $f : K(\pi, n) \to K(\pi', n)$. Como todos los grupos de homotopía salvo el n-ésimo son triviales y la función f es la que representa el isomorfismo entre π y π' entonces f induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía. Como en este contexto le pedimos a los espacios de Eilenberg-Mac Lane ser CW-complejos estamos en las condiciones para aplicar el teorema de J. H. C. Whitehead y decir que f es una equivalencia homotópica. □

Teorema 14 (Clasificación)**:** Existe una correspondencia uno a uno entre las operaciones cohomológicas de tipo $(\pi,n;G,m)$ y $H^m(K(\pi,n);G)$ dada por

$$\theta(\pi,n;G,m) \cong H^m(K(\pi,n);G)$$
$$\theta \mapsto \theta(\iota_n)$$

Demostración. Mostraremos que la asignación $\theta \mapsto \theta(\iota_n)$ tiene inversa a ambos lados.

Sea $\varphi \in H^m(K(\pi,n);G)$ queremos construir una operación cohomológica de tipo $(\pi,n;G,m)$ que denotaremos por $\bar{\varphi}$. Para esto fijemos un espacio topológico X y definamos la operación $\bar{\varphi}_X$ de la siguiente manera. Sea $u \in H^n(X;\pi)$, tomemos $f : X \to K(\pi,n)$ tal que $[f]$ representa a u en el teorema de la representación homotópica de la cohomología, es decir, $u = f^*(\iota_{\pi,n})$, entonces definimos $\bar{\varphi}_X(u) = f^*(\varphi) \in H^m(X;G)$.

Veamos que $\bar{\varphi}$ sí es una operación cohomológica de tipo $(\pi,n;G,m)$, para esto tenemos que probar que $\bar{\varphi}$ es una transformación natural. Fijemos un espacio topológico X, y sea $g : X \to Y$ una función continua, debemos probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;\pi) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_Y} & H^m(Y;G) \\ \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ H^n(X;\pi) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_X} & H^m(X;G). \end{array}$$

Es decir, necesitamos verificar que $g^* \circ \bar{\varphi}_Y = \bar{\varphi}_X \circ g^*$.

Sea $w \in H^n(Y,\pi)$, y sea $h : Y \to K(\pi,n)$ tal que $w = h^*(\iota_{\pi,n})$. Por definición

$$g^*(w) = g^*(h^*(\iota_{\pi,n})) = (h \circ g)^*(\iota_{\pi,n}),$$

así, $\bar{\varphi}_X(g^*(w)) = (h \circ g)^*(\varphi)$. Por otro lado $\bar{\varphi}_Y(w) = h^*(\varphi)$, luego

$$g^*(\bar{\varphi}_Y(w)) = g^*(h^*(\varphi)) = (h \circ g)^*(\varphi),$$

de donde $\bar{\varphi}$ es una transformación natural.

Finalmente, veamos que las asignaciones $\theta \mapsto \theta(\iota_n)$ y $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ son inversas a ambos lados.

Por un lado sea $\theta \in \mathscr{O}(\pi,n;G,m)$. Si fijamos un espacio topológico X, necesitamos verificar que $\overline{\theta(\iota_{\pi,n})}_X = \theta_X$. En efecto, como $\theta_X : H^n(X;\pi) \to H^m(X;G)$, consideremos $u \in H^n(X;\pi)$ y sea f como antes, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\theta(\iota_{\pi,n})}_X(u) &= f^*(\theta(\iota_{\pi,n})) \\ &= \theta(f^*(\iota_{\pi,n})) \\ &= \theta_X(u).\end{aligned}$$

Por otro lado, $\varphi \in H^m(K(\pi,n),G)$. Si $X = K(\pi,n)$, necesitamos calcular $\bar{\varphi}_X(\iota_{\pi,n})$. Note que la función que representa a a $\iota_{\pi,n}$ es precisamente $id : K\pi,n) \to K(\pi,n)$, así

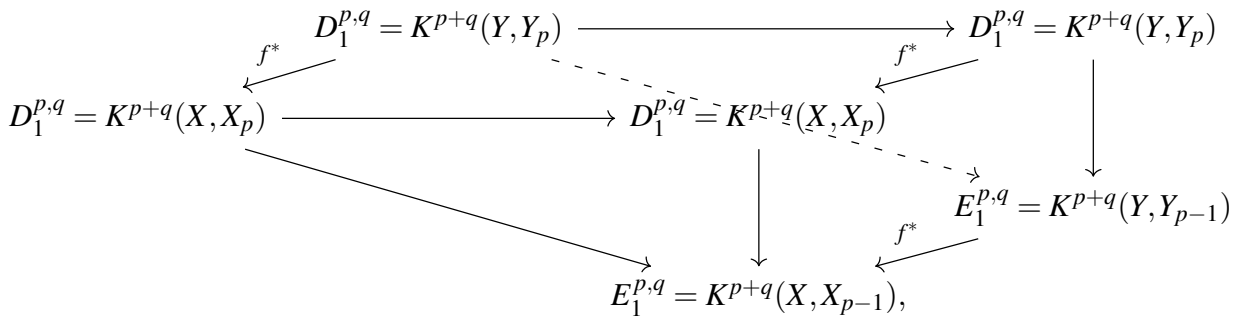
$$\bar{\varphi}(\iota_{\pi,n}) = id^*(\varphi) = \varphi.$$

Así, como la asignación $\theta \mapsto \theta(\iota_n)$ tiene inversas a ambos lados, tenemos que es una correspondencia uno a uno. □

3.2. El tercer diferencial en la SEAH

Para la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch partimos de un espacio topológico filtrado X. En particular, se estará interesado en un espacio del tipo de homotopía de un CW-complejo, por este motivo, al contar con el teorema de aproximación celular podemos considerar que todas las funciones que consideraremos son funciones celulares.

Si $f : X \to Y$ es una función celular, entonces ésta induce morfismos en K-teoría tales que



es un diagrama conmutativo. Esto dice que en f induce un morfismo (f^*, f^*) entre las parejas exactas que definen la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch para $K^*(X)$ y $K^*(Y)$ y como vimos en el capítulo 2, un morfismo de parejas exactas induce un morfismo entre las correspondientes sucesiones espectrales que conmuta con los diferenciales en cada grado. Dicha conmutatividad corresponde a la naturalidad de los diferenciales, más explícitamente, como $E_2^{p,q} = H^p(X; K^q(*)) = E_3^{p,q}$ si denotamos por $f^{(n)}$ al morfismo inducido en la n-ésima pareja exacta, tenemos que

$$f^{(n)} \circ d_Y = d_X \circ f^{(n)},$$

Note que, como la segunda y tercera página son iguales, y el segundo diferencial siempre es trivial, tenemos que para el caso $n = 3$ la igualdad anterior es precisamente

$$f^* \circ d_3 = d_3 \circ f^*,$$

donde f^* es la función inducida en cohomología, y los diferenciales corresponden a los espacios X y Y respectivamente. Esto es, d_3 es una transformación natural. De hecho, en general tenemos que para cualquier teoría de cohomología generalizada el primer diferencial no trivial de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch es una transformación natural. Adicionalmente, la conmutatividad de los diferenciales de orden superior con las funciones inducidas no corresponde a la naturalidad usual, pero da espacio al estudio de lo que se conoce como operaciones cohomológicas de orden superior.

Aparte de la naturalidad, el diferencial d_3 satisface otra propiedad que nos será útil, esta es, que conmuta con el isomorfismos suspensión inducido por el producto cruz relativo. Para ver esto, usaremos un caso particular de la naturalidad. Sea (Y, A) una pareja de espacios topológicos $A \hookrightarrow Y$, entonces de la secuencia exacta larga en cohomología, y del argumento anterior, tenemos que en la tercera página $E_3^{p,q}$, con q impar, el diferencial d_3 es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^k(Y;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(A;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(Y,A;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_3} & & \downarrow{\scriptstyle d_3} & & \downarrow{\scriptstyle d_3} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{k+3}(Y;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^{k+3}(A;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+4}(Y,A;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Consideremos ahora $A = X$ y $Y = CX$ el cono de X, entonces la secuencia anterior se convierte en

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^k(CX;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(CX,X;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_3} & & \downarrow{\scriptstyle d_3} & & \downarrow{\scriptstyle d_3} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{k+3}(CX;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^{k+3}(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+4}(CX,X;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Adicionalmente, por el isomorfismo inducido por el producto cruz reducido, sabemos que

$$\tilde{H}^{k+1}(CX,X;\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{k+1}(CX/X;\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{k+1}(\Sigma X;\mathbb{Z}),$$

con lo que finalmente, si denotamos por σ a la compuesta del homomorfismo conexión δ y los isomorfimos de la ecuación anterior, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
H^k(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma} & H^{k+1}(\Sigma X;\mathbb{Z}) \\
\downarrow{\scriptstyle d_3} & & \downarrow{\scriptstyle d_3} \\
H^{k+3}(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sigma} & H^{k+4}(\Sigma X;\mathbb{Z}).
\end{array}$$

Diremos entonces que d_3 es estable bajo suspensión.

4 Cuadrados de Steenrod

Como se mostró en el capítulo anterior, el tercer diferencial de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch es una operación cohomológica estable, y con los cómputos de la cohomología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane podemos concluir que sólo existen dos operaciones cohomológicas que incrementan el grado en tres. Puesto que la operación trivial siempre existe, es conveniente estudiar la operación cohomológica no trivial en estas dimensiones, el cuadrado de Steenrod Sq^3 y su extensión entera $Sq^3_{\mathbb{Z}}$.

En este capítulo se estudiará una familia de operaciones cohomológicas que resulta ser fundamental en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch, los cuadrados de Steenrod. Se estudiará la definición de estas operaciones y se hará una construcción explícita que garantiza la existencia de dichas transformaciones naturales. El lector puede consultar las referencias [10], [4], [11], [12],[13].

4.1. Axiomas de los cuadrados de Steenrod

Para iniciar, mostraremos un conjunto de axiomas que determinan de manera única los cuadrados de Steenrod. Esta presentación corresponde a la caracterización axiomática que dieron Steenrod y Epstein en 1962 y vienen motivados por el comportamiento que tiene el producto copa en cohomología con la adición de volverse estable bajo suspensión.

Definición 20: Decimos que Sq^i es un cuadrado de Steenrod si satisface las siguientes propiedades para todo espacio topológico X:

1. Es una operación cohomológica de tipo $(\mathbb{Z}/2, n; \mathbb{Z}/2, n+i)$, es decir, si para toda función continua $f : X \to Y$, se tiene que siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{Sq^i_Y} & H^{n+i}(Y;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^n(X;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{Sq^i_X} & H^{n+i}(X;\mathbb{Z}/2). \end{array}$$

2. El cuadrado de Steenrod en grado cero coincide con la identidad

$$\begin{aligned} Sq^0_X : H^n(X;\mathbb{Z}/2) &\to H^n(X;\mathbb{Z}/2) \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

3. Si $deg(x) = i$, entonces $Sq^i(x) = x^2$, es decir, $x \in H^i(X;\mathbb{Z}_2)$, sucede que

$$\begin{aligned} Sq^i_X : H^i(X;\mathbb{Z}/2) &\to H^{2i}(X;\mathbb{Z}/2) \\ x &\mapsto x^2 = x \smile x. \end{aligned}$$

4. Si $i > deg(x)$, $Sq^i_X(x) = 0$.

5. $Sq^i(\alpha+\beta) = Sq^i(\alpha) + Sq^i(\beta)$.

6. $Sq^i(\alpha \smile \beta) = \sum_i Sq^i(\alpha) \smile Sq^{i-j}(\beta)$.

7. $Sq^i(\sigma(\alpha)) = \sigma(Sq^i(\alpha))$, donde $\sigma : H^n(X;\mathbb{Z}/2) \to H^{n+1}(\Sigma X;\mathbb{Z}/2)$ es el isomorfismo inducido por el producto cruz reducido.

8. Sq^1 es el homomorfismo de Bockstein para la secuencia de coeficientes.

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2 \to 0,$$

esto es, en la secuencia larga en cohomología dada por el lema de la serpiente el homomorfismo conexión coincide con el cuadrado de Steenrod Sq^1, explícitamente

$$\cdots \longrightarrow H^n(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^n(X;\mathbb{Z}_4) \longrightarrow H^n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{Sq^1} H^{n+1}(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

Aunque las propiedades 7 y 8 no son necesarias para que los cuadrados queden determinados de manera única, y no estaban explícitas en la formulación de Steenrod y Epstein, son propiedades útiles que se pueden deducir de las anteriores.

4.2. Construcción de los cuadrados

A priori no es claro que existan operaciones cohomológicas no triviales que satisfagan todos los axiomas mencionados antes. Por esta razón haremos una construcción explícita de los cuadrados de Steenrod.

Sea X un espacio topológico con punto base $x_0 \in X$ y consideremos a $X^{\wedge 2} = X \wedge X = X \times X / X \vee X$ con punto base $(x_0, y) \sim (y, x_0)$ para cualquier $y \in X$. Definamos

$$\begin{aligned} T : X \times X &\longrightarrow X \times X \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (x_2, x_1), \end{aligned}$$

Esta función induce una acción de $\mathbb{Z}/2$ en $X^{\wedge 2}$, explícitamente, si escribimos $\mathbb{Z}/2 = \{1, \tau\}$ con notación multiplicativa, entonces $\tau^2 = 1$ y

$$\begin{aligned} 1 \cdot \overline{(x_1, x_2)} &= \overline{(x_1, x_2)}, \\ \tau \cdot \overline{(x_1, x_2)} &= \overline{T(x_1, x_2)} = \overline{(x_2, x_1)}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, la función T también permite definir una acción de $\mathbb{Z}/2$ en la esfera infinita $\mathbb{S}^\infty = \varinjlim \mathbb{S}^n$ como la acción antipodal, es decir multiplicación por menos en cada componente. Así, podemos definir la acción diagonal en el producto $\mathbb{S}^\infty \times X^{\wedge 2}$ por

$$\begin{aligned} \tau \cdot (s, x) &= (\tau \cdot s, \tau \cdot x) \\ &= (-s, T(x)). \end{aligned}$$

Denotemos por $\Gamma X = (\mathbb{S}^\infty \times X^{\wedge 2})/\mathbb{Z}/2$ al espacio de órbitas. Note que esta construcción corresponde a la construcción de Borel $X^{\wedge 2} \times_{\mathbb{Z}/2} E\mathbb{Z}/2$ puesto que $E\mathbb{Z}/2 \to B\mathbb{Z}/2$ es precisamente $\mathbb{S}^\infty \to \mathbb{RP}^\infty$. De aquí, se obtiene la fibración

$$X^{\wedge 2} \longrightarrow \Gamma X \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^\infty.$$

Denotemos por $\{x_0\}$ al punto base de $X^{\wedge 2}$, entonces la inclusión $\mathbb{S}^\infty \times \{x_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^\infty \times X^{\wedge 2}$ induce una sección $s : \mathbb{RP}^\infty \to \Gamma X$ es decir, s es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Gamma X & \xrightarrow{Id} & \Gamma X \\ & \nwarrow^{s} & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{RP}^\infty. \end{array}$$

Explícitamente podemos definir $s([x]) = [x, x_0]$. Note que la buena definición se tiene pues $s([\tau \cdot x]) = [\tau \cdot x, x_0]$ pero

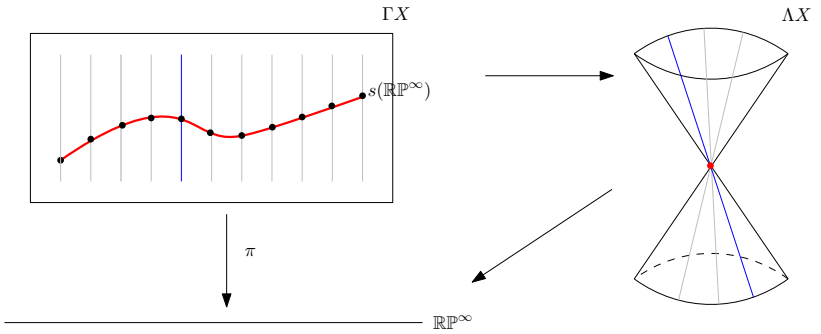
$$(\tau \cdot x, x_0) \sim \tau \cdot (\tau \cdot x, x_0) = (\tau^2 \cdot x, \tau \cdot x_0) = (x, \tau \cdot x_0),$$

de donde $s([\tau \cdot x]) = [x, \tau \cdot x_0] = [x, x_0]$. Si identificamos a $\mathbb{RP}^\infty$ con su imagen bajo s, podemos definir

$$\Lambda X = \Gamma X / \mathbb{RP}^\infty$$

Como s es una sección, $s(\mathbb{RP}^\infty)$ toca en un único punto a la fibra $X^{\wedge 2}$ de donde se sigue que cuando pasamos al cociente ΛX, ésta todavía contiene como fibras a $X^{\wedge 2}$.

Geométricamente nos podemos imaginar a ΛX como en la siguiente figura



Note que podemos realizar la misma contrucción de ΓX y ΛX reemplazando $\mathbb{S}^\infty$ por $\mathbb{S}^n$ para cualquier entero positivo n. Así, encontramos espacios $\Gamma^n X \subseteq \Gamma X$ y $\Lambda^n X \subseteq \Lambda X$. La ventaja de realizar esta construcción para cada entero, es que permite dar una estrutura de CW-complejo de manera natural a ΓX y ΛX.

Por notación, veremos a $\alpha \in H^n(X; \mathbb{Z}/2)$ como una función $\alpha : X \to K(\mathbb{Z}/2, n)$ tal que $\alpha^*(\iota_n) = \alpha$, con ι_n la clase fundamental. Si denotamos a el n-esqueleto de $K(\mathbb{Z}/2, n)$ por K_n entonces $\iota_n \in H^n(K_n; \mathbb{Z}/2)$.

Recordemos que la fórmula de Künneth nos dice que la función

$$H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \longrightarrow H^*(X \times Y; R)$$

es un isomorfismo si X y Y son CW-complejos y $H^*(Y; R)$ es un R-módulo libre finitamente generado. Además, lo anterior también es cierto para el caso reducido.

En nuestro caso, usaremos como coeficientes para la cohomología al campo $\mathbb{Z}/2$, y espacios topológicos del tipo de homotopía de un CW-complejo, por lo que se satisfacen las hipótesis de la fórmula de Künneth y obtenemos $\tilde{H}(X^{\wedge 2};\mathbb{Z}/2) \cong \tilde{H}^*(X;\mathbb{Z}/2) \otimes_{\mathbb{Z}/2} \tilde{H}^*(X;\mathbb{Z}/2)$. Denotamos los elementos de $\tilde{H}(X^{\wedge 2})$ por $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ y $\alpha^{\otimes 2}$.

El objetivo es construir $\lambda(\alpha) \in H^{2n}(\Lambda;\mathbb{Z}/2)$ tal que al restringir a las fibras se obtiene $\alpha^{\otimes 2}$.

Para construir operaciones cohomológicas necesitamos que dichas transformaciones sean naturales, es decir, si $\alpha : X \to K_n$ entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H^n(K_n;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^n(X;\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ H^{2n}(\Lambda K_n;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^{2n}(\Lambda X;\mathbb{Z}/2), \end{array}$$

donde $\lambda(\alpha(\iota_n)) = \alpha^*(\lambda(\iota_n)) = \lambda(\alpha)$. Por la naturalidad es suficiente construir $\lambda(\iota_n) \in H^{2n}(\Lambda K_n;\mathbb{Z}/2)$.

Ahora, como $T^*(\iota^{\otimes 2}) = \iota^{\otimes 2}$, se tiene que si $\iota^{\otimes 2} \in H^{2n}(K_n^{\wedge 2};\mathbb{Z}/2)$ entonces

$$\left.\begin{array}{ll} \iota^{\otimes 2} & : K_n^{\wedge 2} \to K_{2n} \\ T^*(\iota^{\otimes 2}) & : K_n^{\wedge 2} \to K_{2n} \end{array}\right\} \text{ son funciones homotópicas como funciones que preserva el punto base}$$

Tenemos entonces una homotopía $H : I \times K_n^{\wedge 2} \to K_{2n}$ tal que

$$\begin{aligned} H(0,-) &= \iota^{\otimes 2}; \\ H(1,-) &= T^*(\iota^{\otimes 2}); \end{aligned}$$

que se puede completar a una función $\mathbb{S}^1 \times K_n^{\wedge 2} \to K_{2n}$ y por tanto obtenemos una función $\Gamma^1 K_n \to K_{2n}$ que desciende al cociente $\lambda_1 : \Lambda^1 K_n \to K_{2n}$.

Como K_n se obtiene de $\mathbb{S}^n$ pegando celdas de dimensión mayor a n, entonces ΛK_n se obtiene de $\Lambda^1 K_n$ pegando celdas de dimensión $2n+1$.

Puesto que $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^n)^{\wedge 2}$ tiene celdas de dimensión $dim(Celdas(\mathbb{S}^n)^{\wedge 2}) + dim(Celdas(\mathbb{S}^1)) = 2n+1$.

Ahora

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^{k-1} & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda^1 K_n & \xrightarrow{\lambda_1} & K_{2n} \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow_{\lambda} & \\ \mathbb{D}^k & \longrightarrow & \Lambda^1 K_n \sqcup \mathbb{D}^k / \sim . & & \end{array}$$

Dicho λ existe sí y sólo sí $[\varphi \circ \lambda_1] \in \pi_{k-1}(K_{2n})$ es trivial. Como estamos pegando celdas de dimensión mayor a $2n+1$, tenemos que dicho representante es trivial puesto que $\pi_i(K_{2n}) = 0$ si $i > 2n$.

De esta manera tenemos que $\lambda : \Lambda K_n \to K_{2n}$ es una función que restringida a K_n^2 es homotópica a $\iota^{\otimes 2}$. Además λ es única salvo homotopía pues el $2n-$esqueleto de ΛK_n está contenido en $K_n^{\wedge 2}$ de donde

$$H^{2n}(\Lambda K_n; \mathbb{Z}/2) \to H^{2n}(K_n^{\wedge 2}; \mathbb{Z}/2)$$

es inyectiva, a este le conoce como el argumento de unicidad. Definimos entonces para $\alpha \in H^n(X; \mathbb{Z}/2)$, a$\lambda(\alpha)$ por $\lambda(\alpha) = \alpha^*(\lambda(\iota_n))$.

Estamos ahora en condiciones para definir las operaciones cohomológicas. Note que hay una inclusión $\mathbb{RP}^\infty \times X \hookrightarrow \Gamma X$, dada por

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^\infty \times X & \xrightarrow{j} & \mathbb{S}^\infty \times X^{\wedge 2} & \xrightarrow{q} & \Gamma X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathbb{RP}^\infty \times X. & & \end{array}$$

Como $\mathbb{Z}/2$ actúa en $\mathbb{S}^\infty \times X^{\wedge 2}$, entonces esto define una acción en la imagen bajo j. Explícitamente, $\tau \cdot (j(s,x)) = \tau(s,(x,x)) = (-s,(x,x))$. Pasando al cociente, se tiene una función $\mathbb{RP}^\infty \times X \to \Gamma X$. Y componiendo con el cociente $\Gamma X \to \Lambda X$, obtenemos $\nabla : \mathbb{RP}^\infty \times X \to \Lambda$, que al pasar a cohomología

$$\nabla^* : H^*(\Lambda X; \mathbb{Z}/2) \to H^*(\mathbb{RP}^\infty \times X; \mathbb{Z}/2) \simeq H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2) \otimes H^*(X; \mathbb{Z}/2).$$

Así, para cada $\alpha \in H^n(X; \mathbb{Z}/2)$, $\lambda(\alpha) \in H^{2n}(\Lambda X; \mathbb{Z}/2)$, podemos calcular $\nabla^*(\lambda(\alpha)) \in H^{2n}(\mathbb{RP}^\infty \times X; \mathbb{Z}/2)$, y escribirlo como

$$\nabla^*(\lambda(\alpha)) = \sum_{i=-n}^{n} \omega_{n-i} \otimes \theta^{n+i}(\alpha).$$

donde ω_j es el generador de $H^j(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2)$ definimos $Sq^i(\alpha) = \theta^{n+i}(\alpha)$.

Veamos que la construcción anterior satisface las propiedades mencionadas

Primero que $Sq^i(\alpha+\beta) = Sq^i(\alpha) + Sq^i(\beta)$. Para esto veamos primero que $\lambda(\alpha+\beta) = \lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$

Analizando la estructura de CW-complejos de ΛX y $K_n^{\wedge 2}$, se verifica que el $2n$-esqueleto de $K_n^{\wedge 2}$ contiene el $2n$-esqueleto de ΛX y por lo tanto $\imath^* : H^{2n}(\Lambda K_n; \mathbb{Z}/2) \to H^{2n}(K_n^{\wedge 2}; \mathbb{Z}/2)$ es inyectiva, es decir, es suficiente ver que pasa en las fibras.

Por un lado,

$$\imath^*(\lambda(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta)^{\otimes 2}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\imath^*(\lambda(\alpha)+\lambda(\beta) &= \imath^*(\lambda(\alpha)) + \imath^*(\lambda(\beta)) \\ &= \alpha^{\otimes 2} + \beta^{\otimes 2}.\end{aligned}$$

Pero en $\mathbb{Z}/2$, $\alpha^{\otimes 2} + \beta^{\otimes 2} = (\alpha+\beta)^{\otimes 2}$.

Así, para $\alpha, \beta \in H^n(X; \mathbb{Z}/2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \omega^{n-i} \otimes Sq^i(\alpha+\beta) &= \nabla^*(\lambda(\alpha+\beta)) = \nabla^*(\lambda(\alpha)) + \nabla^*(\lambda(\beta)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \omega^{n-i} \otimes Sq^i(\alpha) + \sum_{i=0}^{n} \omega^{n-i} \otimes Sq^i(\beta) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \omega^{n-i} \otimes (Sq^i(\alpha) + Sq^i(\beta)).\end{aligned}$$

Luego $Sq^i(\alpha+\beta) = Sq^i(\alpha) + Sq^i(\beta)$.

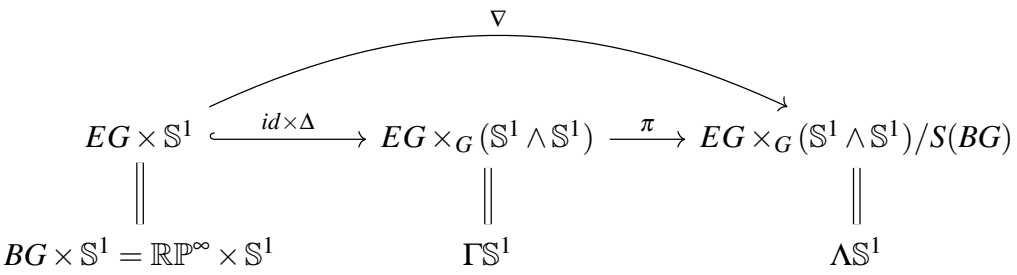
A continuación ,veamos que $Sq^0 = Id$ para todo espacio X.

Por definición $Sq^0 : H^n(X; \mathbb{Z}/2) \to H^n(X; \mathbb{Z}/2)$ es una transformación natural. Dichas transformaciones están clasificadas por la cohomología $H^n(K((\mathbb{Z}/2, n); \mathbb{Z}/2)) \cong \mathbb{Z}/2$. Por lo tanto es suficiente mostrar que Sq^0 no es la transformación trivial.

Como Sq^0 conmuta con la suspensión, es suficiente demostrar que $Sq^0 : H^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}/2) \to H^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}/2)$ no es trivial.

Por lo tanto, es suficiente calcular Sq^0 para $X = \mathbb{S}^1$ y $n = 1$.

Sea $G = \mathbb{Z}/2 = 1, \tau$. La construcción anterior se puede ver como



Lema 1: $\nabla^* : H^2(EG \times_G (\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1); \mathbb{Z}/2)/S(BG) \to H^2(EG \times_G \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}/2)$ es inyectiva.

Demostración. Realizaremos la prueba en dos pasos 1. Sea $\mathbb{S}^1 \xhookrightarrow{\Delta} (\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1)$ via el mapeo diagonal. Notemos que $Y = \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2$ tiene una acción de $G = \mathbb{Z}/2$ tal que

$$Y^G = \{y \in Y / \tau \cdot y = y\} \cong \mathbb{S}^1.$$

Si denotamos $Y^G = F$, entonces

$$\sum_{i=0}^{\infty} rk(H^i(F; \mathbb{Z}/2)) = 2 = \sum_{i=0}^{\infty} rk(H^i(Y; \mathbb{Z}/2))$$

Como nuestro espacio es un CW-complejo con finitas celdas en cada dimensión, lo anterior implica que la pareja (X, A) es totalmente no homóloga a cero mod p en (X_G, A_G).

Luego, por los teoremas de VII.1.5 y VII.1.6 de [10], tenemos que

$$j^* = (id \times_G i)^* : H^2(EG \times_G (\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1); \mathbb{Z}/2) \to H^2(BG \times \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}/2),$$

es inyectivo.

2. Veamos que

$$\pi^* : H^2(EG \times_G (\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1))/S(BG); \mathbb{Z}/2) \to H^2(EG \times_G \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}/2),$$

es inyectiva.

Notemos que $H^2(EG \times_G (\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1)/S(BG); \mathbb{Z}/2) = H^2(EG \times_G (\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1), EG \times_G *; \mathbb{Z}/2)$.

Para estudiar π^*, podemos utilizar la sucesión exacta larga en cohomología. Si

$$A \to X \to (X, A)$$

es una secuencia de parejas de espacios topológicos, entonces la secuencia larga en cohomología para parejas es

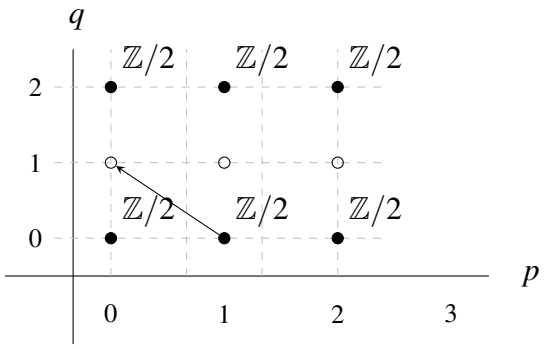
$$\begin{array}{ccc} H^1(EG\times_G(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1);\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H^1(EG\times_G *;\mathbb{Z}/2) \\ & & \downarrow \\ H^2(EG\times_G(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1);\mathbb{Z}/2) & \xleftarrow[\pi^*]{} & H^2(EG\times_G(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1), EG\times_G *;\mathbb{Z}/2). \end{array}$$

Por la exactitud es suficiente probar que

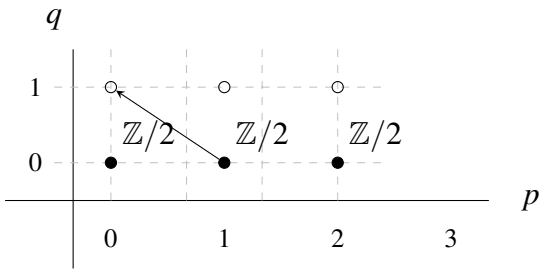
$$H^1(EG\times_G(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1);\mathbb{Z}/2)\to H^1(EG\times_G *;\mathbb{Z}/2),$$

es sobreyectiva. Para esto compararemos dos sucesiones espectrales.

Primero, $E_2^{p,q}=H^p(\mathbb{Z}/2;H^q(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1))$ es



Por otro lado, tenemos la sucesión espectral cuya segunda página $E_2^{p,q}=H^p(\mathbb{Z}/2;H^q(*))$ es



Del teorema de comparación de sucesiones espectrales se sigue que

$$\begin{array}{ccc} H^1(EG\times_G(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1);\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H^1(EG\times_G *;\mathbb{Z}/2) \\ \| & & \| \\ \mathbb{S}^\infty\times_{\mathbb{Z}/2}\mathbb{S}^2 & & \mathbb{RP}^\infty \end{array}$$

es un isomorfismo. Adicionalmente, consideremos la fibración

$$\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^\infty\times_{\mathbb{Z}/2}\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty. \quad (s)$$

Entonces en la secuencia larga de los grupos de homotopía obtenemos

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{0} \pi_1(\mathbb{S}^\infty\times_{\mathbb{Z}/2}\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{RP}^\infty) \xrightarrow{\mathbb{Z}/2} 1$$

Lo anterior demuestra que $\nabla^* : H^2(EG\times_G(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1)/S(BG);\mathbb{Z}/2)\to H^2(EG\times_G\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}/2)$ es inyectiva. □

Sea $\alpha\in H^1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}/2)$ no trivial. Entonces $\lambda(\alpha)\in H^2(EG\times_G(\mathbb{S}^1\wedge\mathbb{S}^1)/S(BG);\mathbb{Z}/2)$ es no trivial ya que su restricción a la fibra $\alpha\otimes\alpha\neq 0$ y por lo tanto

$$\nabla^*(\lambda(\alpha)) = \omega\otimes Sq^0(\alpha)\neq 0 \Longrightarrow Sq^0(\alpha)\neq 0.$$

Como sólo existían dos transformaciones naturales, dadas por la identidad y la trivial, se tiene que $Sq^0 = Id$.

Ahora probaremos que $Sq^i(\alpha\smile\beta) = \sum_j Sq^i(\alpha)\smile Sq^{i-j}(\beta)$. Al igual que con la suma, veremos que el resultado es cierto para λ salvo posiblemente un signo, sin embargo, como estamos trabajando con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ dicho signo desaparece.

$$\begin{aligned} \iota^*(\lambda(\alpha\smile\beta)) &= (\alpha\smile\beta)^{\otimes 2} = (\alpha\smile\beta)\otimes(\alpha\smile\beta) = \rho_1^*(\alpha\smile\beta)\smile\rho_2^*(\alpha\smile\beta) \\ &= \rho_1^*(\alpha)\smile\rho_1^*(\beta)\smile\rho_2^*(\alpha)\smile\rho_2^*(\beta) = (\rho_1^*(\alpha)\smile\rho_2^*(\alpha))\smile(\rho_1^*(\beta)\smile\rho_2^*(\beta)) \\ &= \alpha^{\otimes 2}\smile\beta^{\otimes 2} = \iota^*(\lambda(\alpha))\smile\iota^*(\lambda(\beta)). \end{aligned}$$

Ahora bien, calculemos la compuesta con ∇^*, si $|\alpha| = k$ y $|\beta| = l$, entonces $k+l = n$ y

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \omega^{n-i} \otimes Sq^i(\alpha \smile \beta) &= \nabla^*(\lambda(\alpha \smile \beta)) = \nabla^*(\lambda(\alpha) \smile \lambda(\beta)) = \nabla^*(\lambda(\alpha)) \smile \nabla^*(\lambda(\alpha)) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k} \omega^{k-j} \otimes Sq^j(\alpha)\right) \smile \left(\sum_{r=0}^{l} \omega^{l-r} \otimes Sq^r(\beta)\right) \\ &= \sum_{i}^{n} \left(\sum_{j+k=i} \omega^{n-i} \otimes Sq^j(\alpha) \smile Sq^r(\beta\right).\end{aligned}$$

A continuación consideremos

$$\lambda : H^n(X;\mathbb{Z}/2) \to H^{2n}(\Lambda X;\mathbb{Z}/2).$$

y sea $\iota : X^{\wedge 2} \to \Lambda X$ el mapeo dado por

$$\begin{aligned} X^{\wedge 2} &\longrightarrow \mathbb{S}^\infty \times_{\mathbb{Z}/2} X^{\wedge 2} \longrightarrow \Lambda X \\ a &\longrightarrow \overline{z_0, a} \longrightarrow (1, a). \end{aligned}$$

Si tenemos que $|a| = n$, entonces

$$\iota^*(\lambda(\alpha)) = \alpha \otimes \alpha \in \tilde{H}^n(X;\mathbb{Z}/2) \otimes \tilde{H}^n(X;\mathbb{Z}/2) \hookrightarrow \tilde{H}^{2n}(X^{\wedge 2};\mathbb{Z}/2).$$

Veamos que $Sq^n(\alpha) = \alpha \smile \alpha = \alpha^2$. Sea

$$\begin{aligned} j : X &\to \mathbb{RP}^\infty \times X \\ x &\mapsto (\bar{z}_0, x), \end{aligned}$$

donde $\bar{z}_0$ es un punto fijo en $\mathbb{RP}^\infty$. Por definición de $\theta_n(\alpha)$ se sigue que

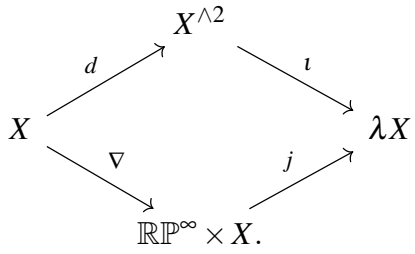
$$\theta_n(\alpha) = (\nabla \circ j)^*(\lambda(\alpha)),$$

lo anterior pues

$$j^* : H^n(\mathbb{RP}^\infty \times X;\mathbb{Z}/2) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} H^k(\mathbb{RP}^\infty;\mathbb{Z}/2) \otimes H^{n-k}(X;\mathbb{Z}/2) \to H^n(X;\mathbb{Z}/2)$$

es el mapeo proyección.

Notemos que el siguiente diagrama conmuta



Por lo tanto

$$Sq^n(\alpha) = \theta_n(\alpha) = (\nabla \circ j)^*(\lambda(\alpha)) = (\iota \circ d)^*(\lambda(\alpha)) = d^*(\iota^*(\lambda(\alpha))) = d^*(\alpha \otimes \alpha) = \alpha \smile \alpha.$$

Esto demuestra que la construcción presentada satisface los axiomas de los cuadrados de Steenrod.

Note que en todo el capítulo se han considerado coeficientes en $\mathbb{Z}/2$, sin embargo, los diferenciales que usamos en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch son con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Para poder determinar la relación del tercer diferencial con los cuadrados de Steenrod, es necesario primero extender la construcción presentada a los coeficientes adecuados.

Sea X es un espacio topológico, y consideramos la secuencia exacta corta de coeficientes dada por

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

entonces con un argumento similar al del lema de la serpiente, tenemos un homomorfismo conexión en cohomología que sube el grado en uno, y que denotaremos por

$$\beta : H^k(X;\mathbb{Z}/2) \to H^{k+1}(X;\mathbb{Z}),$$

a este homomorfimos se le conoce como el homomorfismo de Bockstein de la secuencia de coeficientes. Para los números enteros impares $2n+1$ definimos la el cuadrado de Steenrod Sq^{2n+1}_* con valores enteros, por la composición de Sq^{2n} con el homomorfismo de Bockstein β de la secuencia anterior, explícitamente

$$Sq^{2n+1}_* = \beta \circ Sq^{2n} : H^i(X;\mathbb{Z}/2) \to H^{i+2n+1}(X;\mathbb{Z}).$$

Y finalmente, si denotamos por $\rho : H^k(X;\mathbb{Z}) \to H^k(X;\mathbb{Z}/2)$ el homomorfimos inducido por la reducción módulo 2, definimos la extensión entera del cuadrado de Steenrod $Sq^{2n+1}_\mathbb{Z}$ como:

$$Sq^{2n+1}_\mathbb{Z} = Sq^{2n+1}_* \circ \rho = \beta \circ Sq^{2n} \circ \rho : H^i(X;\mathbb{Z}) \to H^{i+2n+1}(X;\mathbb{Z}).$$

Será de nuestro interés estudiar el caso particular cuando $n = 1$, es decir $Sq^3_{\mathbb{Z}}$. Esta operación cohomológica es de tipo $(\mathbb{Z}, n, \mathbb{Z}, n+3)$ y por el teorema de clasificación de las operaciones cohomológicas, tenemos que hay una correspondencia biyectiva entre

$$\mathscr{O}(\mathbb{Z}, n, \mathbb{Z}, n+3) \cong H^{n+3}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}).$$

los cálculo de la cohomología de los espacios de Eilenberg-Mac Lane hechos con la sucesión espectral de Serre, tenemos que $H^{n+3}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$. Esto muestra que sólo pueden existir dos operaciones de este tipo, y se puede verificar fácilmente de las propiedades que $Sq^3_{\mathbb{Z}}$ no es la operación cohomológica trivial.

5 Determinación del tercer diferencial

Como vimos antes, sólo existen dos operaciones cohomológicas estables que pueden jugar el papel del tercer diferencial, la operación trivial y $Sq^3_{\mathbb{Z}}$. En este capítulo demostrará que el tercer diferencial de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch es el tercer cuadrado de steenrod $Sq^3_{\mathbb{Z}}$.

Para esto calcularemos la K-teoría de un espacio conocido directamente, y luego mostrar que si el tercer diferencial fuera la operación trivial tendríamos un resultado distinto [4].

5.1. Determinación del tercer diferencial

Sea $X = \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^4$. En el capítulo de sucesiones espectrales calculamos que

$$K^*(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{Si } * = 0, \\ 0 & \text{Si } * = 1. \end{cases}$$

y

$$K^*(\mathbb{RP}^4) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4 & \text{Si } * = 0, \\ 0 & \text{Si } * = 1. \end{cases}$$

Para K-teoría también tenemos una fórmula de Künneth para el producto, de donde se obtiene

$$K^*(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^4) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 & \text{Si } * = 0, \\ 0 & \text{Si } * = 1. \end{cases}$$

Calcularemos ahora, la K-teoría del mismo espacio usando la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch.

En primero lugar necesitamos conocer la cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}$ de los espacios proyectivos, por un lado sabemos que

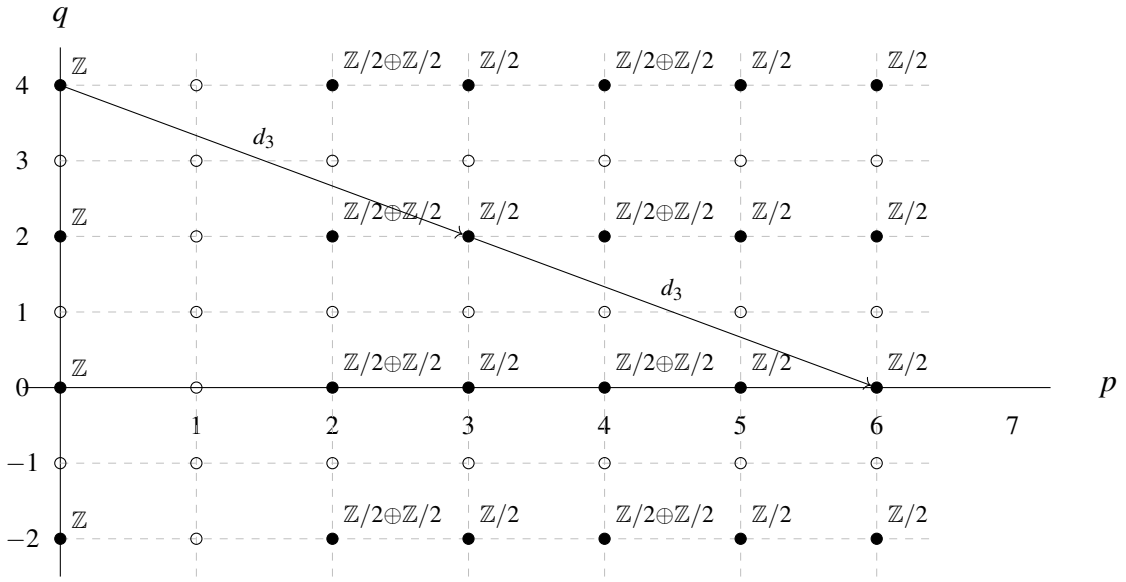
$$H^p(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{Si } p = 0, \\ 0 & \text{Si } p = 1 \text{ ó } p > 2, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{Si } p = 2. \end{cases} \qquad H^p(\mathbb{RP}^4;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{Si } p = 0, \\ 0 & \text{Si } p = 1,3, \text{ ó } p > 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{Si } p = 2,4. \end{cases}$$

Así, de la fórmula de Künneth para cohomología obtenemos

$$H^n(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^4;\mathbb{Z}) = \left(\bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}) \otimes H^q(\mathbb{RP}^4;\mathbb{Z}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n+1} \operatorname{Tor}(H^p(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}), H^q(\mathbb{RP}^4;\mathbb{Z}) \right)$$

$$H^n(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^4;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{Si } p = 0, \text{ ó } p > 6 \\ 0 & \text{Si } p = 1, \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{Si } p = 2,4 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{Si } p = 3,5,6. \end{cases}$$

Ahora, usemos la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch para calcular la K-teoría de $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^4$. Recordemos que la segunda página de la sucesión espectral es $E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^4; K^q(*))$, así, la segunda página es de la forma



Como siempre es el caso en la SEAH para K-teoría, el segundo diferencial debe ser trivial, por lo que la tercera página es igual a la segunda. Sin embargo, note que $E_3^{3,2} = \mathbb{Z}/2$, el problema aquí es

que si $d_3 = 0$, entonces sucedería que este término sobreviviría hasta la página infinito, puesto que d_3 es el último diferencial posiblemente no trivial que llega a él. Así, si esto ocurriera se tendría que en grado total impar la K-teoría de $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^4$ sería no trivial, contradiciendo los cómputos anteriores.

Esto demuestra el siguiente teorema

Teorema 15 (Teorema Fundamental)**:** Sea X un CW-complejo compacto. Entonces la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch converge a la K-teoría de X y es tal que la tercera página tiene la forma:

$$E_3^{p,q} = E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(X;\mathbb{Z}) & \text{si } q = 2k, \\ 0 & \text{si } q = 2k+1, \end{cases}$$

donde si q es impar, el primer diferencial posiblemente no trivial es:

$$d_3 = Sq^3_{\mathbb{Z}} : H^p(X;\mathbb{Z}) = E_3^{p,q} \longrightarrow E_3^{p+3,q-2} = H^{p+3}(X;\mathbb{Z}).$$

Demostración. Como se demostró en e teorema 8, $H^{n+3}(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$. Podemos concluir del teorema de clasificación es las operaciones cohomológicas que sólo existen dos operaciones cohomológicas, una trivial y una no trivial. Así, como tanto d_3 y $Sq^3_{\mathbb{Z}}$ son no triviales, concluimos que estas deben ser iguales. □

Bibliografía

[1] M. Atiyah, "K-Theory past and present," *eprint arXiv:math/0012213*, pp. 1–6, 2000.

[2] A. Hatcher, "Vector bundles and K-theory. Version 2.2." 2017.

[3] J. McCleary, *A history of Spectral Sequences*. 2013.

[4] D. Dugger, "A geometric introduction to K-theory," in *Lecture notes*, p. 293.

[5] R. E. Mosher and M. C. Tangora, *Cohomology operations and applications in homotopy theory*. New York: Harper & Row Publishers, 1968.

[6] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*. No. 2, Cambridge: Cambridge University Press, 2 ed., 2001.

[7] A. Hatcher, "Spectral sequences in algebraic topology." 2004.

[8] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*. No. 38, New York: Cambridge University Press, 1994.

[9] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.

[10] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, vol. 46. Academic press, 1972.

[11] M. J. Hopkins, "Steenrod operations," in *Lecture notes*, p. 19, 2015.

[12] R. R. Bruner, "An Adams spectral sequence primer," in *Lecture notes*, pp. 1–78, Detroit: Wayne State University, 2009.

[13] H. Miller, "Vector Fields on Spheres, etc.," in *Lecture notes*, p. 101, 2010.