PROBABILIDAD Y VARIABLE ALEATORIA. NOCIONES Y APLICACIONES.

Francisco Javier Díaz Serna

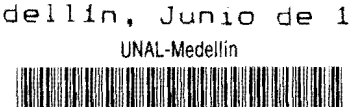
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Seccional Medellín.

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS.

Medellín, Junio de 1991

UNAL-Medellín



I 514.5
D 41p

PROBABILIDAD Y VARIABLE ALEATORIA. NOCIONES Y APLICACIONES.

Francisco Javier Díaz Serna.

114527

TABLA DE CONTENIDO

Página

LISTA DE FIGURAS.....iv

INTRODUCCION.....v

1. EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD.....1

1.1 EL AZAR ESTADISTICO.....1

1.1.1 El concepto de azar.....1
1.1.2 Multiplicidad en la ocurrencia.....1
1.1.3 Regularidad Estadística o Estabilidad de Frecuencias..1

1.2 LA ALEATORIEDAD.....2

1.3 EJEMPLOS DE FENOMENOS ALEATORIOS.....2

1.4 ALGUNAS DEFINICIONES.....3

1.4.1 Escoger al azar uno o más objetos de 1 colección dada.3
1.4.2 Espacio muestral.....3
1.4.3 Suceso o evento.....4

1.5 PROBABILIDAD CLASICA.....4

1.5.1 Definición Clásica de Probabilidad.....4
1.5.2 Supuestos en la Definición Clásica de Probabilidad....5
1.5.3 Ejemplos: Aplicación de la probabilidad Clásica.....6
1.5.4 Crítica a la definición de Probabilidad Clásica.....7

1.6 PROBABILIDAD FRECUENTISTA O EMPIRICA.....8

1.6.1 La frecuencia relativa.....8
1.6.2 Propiedades de la frecuencia relativa.....8
1.6.3 Comentarios acerca de la probabilidad frecuentista....9

1.7 VISION SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD.....9

2. LA TEORIA DE PROBABILIDADES.....11

2.1 PROBABILIDAD AXIOMATICA.....11

2.2 OBSERVACIONES.....11

2.3 TEOREMAS.....12

2.4 EJEMPLOS.....14

2.5 PROBABILIDAD CONDICIONAL.....16

2.5.1 Definicion.....16
2.5.2 Ejemplos.....17
2.5.3 Comparacion de las Magnitudes de P(A/B) y P(A).....18
2.5.4 Ley Multiplicativa o Ley de Probabilidad conjunta....18

2.6 INDEPENDENCIA ESTADISTICA.....19

2.6.1 Definición Intuitiva.....19
2.6.2 Definición Formal.....19
2.6.3 Reconsideración de la Ley Aditiva.....20
2.6.4 Ejemplos.....20

2.7 TEOREMA DE MULTIPLICACION DE PROBABILIDADES O LEY DE PROBABILIDAD CONJUNTA.....23

2.8 TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL O DE LA ELIMINACION....24

2.8.1 Partición de un espacio muestral.....24
2.8.2 El teorema de la probabilidad total.....24

2.9 TEOREMA DE BAYES.....27

2.10 CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO.....30

2.10.1 Procedimiento por puntos muestrales.....30
2.10.2 Procedimiento de Composición.....30

3. VARIABLE ALEATORIA Y DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES...,32

3.1 INTRODUCCION.....,32

3.2 DEFINICION DE VARIABLE ALEATORIA.....34

3.3 VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y FUNCION DE PROBABILIDAD.36

3.4 FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA.....37

3.5 EJEMPLOS DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.....38

3.6 VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.....,45

3.6.1 Definicion.....45
3.6.2 Observaciones.....46
3.6.3 Ejemplos de variable aleatoria continua.....46

3.7 ESPERANZA MATEMATICA O VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA.....48

3.7.1 Definición de la esperanza Matemática E(X).....48
3.7.2 Significado de la esperanza Matemática E(X).....48

3.7.3 Aplicaciones del concepto de esperanza Matemática.. 49
3.7.4 Ejemplos de Esperanza Matematica..... 51
3.7.5 Ejercicios..... 53

3.8 VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA..... 55

3.9 PROPIEDADES DE LA ESPERANZA Y DE LA VARIANZA..... 58

3.9.1 Propiedades de la esperanza..... 58
3.9.2 Propiedades de la varianza..... 58

3.10 EJERCICIOS..... 58

3.11 TEOREMA DE CHEBYSHEV..... 61

A MANERA DE CONCLUSIONES..... 63

BIBLIOGRAFIA..... 65

LISTA DE FIGURAS.

Página

FIGURA 1. Diagrama de Venn para dos sucesos mutuamente excluyentes, A y B.....12

FIGURA 2. Diagrama de Venn de dos sucesos, A y B, en general.....13

FIGURA 3. Probabilidad Condicional P(B/A).....16

FIGURA 4. Partición del espacio muestral S, en Bi, i = 1, 2, ... 7.....25

FIGURA 5. La variable aleatoria como una función.....34

FIGURA 6. Cálculo de la probabilidad para un intervalo, usando la función de distribución acumulativa....38

FIGURA 7. Diagrama de puntos (Ejemplo 3.1).....39

FIGURA 8. Diagrama de líneas (Ejemplo 3.1).....39

FIGURA 9. Diagrama de barras (Ejemplo 3.1).....39

FIGURA 10. Función de distribución de Probabilidades. (Ejemplo 3.1).....40

FIGURA 11. Diagrama de barras (Ejemplo 3.2).....41

FIGURA 12. Función de distribución de probabilidades. (Ejemplo 3.2).....41

FIGURA 13. Diagrama de líneas (Ejemplo 3.6).....43

FIGURA 14. Función de distribución de Probabilidades. (Ejemplo 3.6).....43

FIGURA 15. Diagrama de líneas (Ejemplo 3.7).....44

INTRODUCCION

La Estadistica y la Teoria de Probabilidades, presentan unos principios generales de aplicacion en diversos campos de la ciencia y la tecnologia, y en diversos procedimientos administrativos y de produccion, entre otros. Los conceptos de la estadistica pueden ser utilizados con excelentes resultados en la Investigacion Cientifica y en la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre y riesgo.

El objetivo de la Estadistica, es la Inferencia acerca de la naturaleza de la poblacion con base en la evidencia empirica, la cual puede ser conocida a partir de la informacion muestral. Esta Inferencia es entendida como una generalizacion para toda la población, de las conclusiones obtenidas a partir de la información contenida en una muestra, y por lo tanto incorpora la incertidumbre y la necesidad de cuantificar la confiabilidad en las conclusiones y los riesgos inherentes de tomar la decision errónea.

La Inferencia Estadistica puede consistir en la prueba de hipótesis o en la estimacion de los parametros de una poblacion. Los procedimientos estadisticos para efectuar la inferencia estan basados en el concepto de una muestra aleatoria extraida a partir de la población de interes, mediante un procedimiento explicito que garantice tal comportamiento aleatorio.

La Teoría de Probabilidades suministra el lenguaje y la cuantificacion de la incertidumbre y de los riesgos asociados con ella. Esta teoria es utilizada como una herramienta necesaria para construir, manipular y analizar el modelo matemático del fenomeno aleatorio y para manipular la incertidumbre inherente en el.

El propósito de este trabajo, es presentar algunos conceptos basicos de la teoria de probabilidades desde el punto de vista de las nociones y principios fundamentales, de tal manera que permitan su utilizacion en el trabajo aplicado en diferentes campos de la ciencia, la tecnología y los procedimientos administrativos y productivos.

El enfoque utilizado en esta elaboracion, está orientado hacia la asimilacion de los conceptos de una manera intuitiva, para facilitar su adecuada utilización y la correcta interpretacion de los resultados en cada caso. Se enfatiza la profundidad conceptual mas que el rigor matemático, ya que, el principal interes radica en la asimilacion de los conceptos y sus aplicaciones practicas. El rigor matematico es muy bien referenciado en otros contextos,

aqui no es profundizado, no se realiza la demostracion de los teoremas ni de las propiedades matemáticas.

En el primer capítulo se presenta el concepto de probabilidad y sus principales interpretaciones, tales como la clasica, la frecuentista y la subjetiva. El segundo capítulo presenta el modelo matemático de la teoría de probabilidades, sus principios generales y las leyes utilizadas en el cálculo de estas probabilidades para sucesos complejos.

El tercer capítulo presenta los conceptos de variable aleatoria y distribución de probabilidades, y además, sus parámetros pertinentes más utilizados, los cuales son la Esperanza Matemática y la Varianza. Este tercer capítulo termina con una presentación del teorema de Chebyshev, el cual muestra una relacion interesante entre los conceptos de esperanza y desviación estandar de una variable aleatoria y la probabilidad de que dicha variable tome un valor dentro de cierto intervalo.

Muchos de los ejemplos referenciados están mas cercanos a la Economia que a otros campos, sin embargo, los conceptos y principios son elaborados en forma general, de tal manera que sea posible su aplicación en otras áreas de investigación, según el buen criterio del analista y segun sean las circunstancias en una situación dada.

1. EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD.

1.1 EL AZAR ESTADISTICO.

1.1.1 EL CONCEPTO DE AZAR.

El "azar" aparece en la base de los fundamentos de la Estadística. Sin embargo, no se tienen definiciones claras y precisas de él, sólo se tiene una idea vaga, inicialmente extraída a partir de los juegos de azar. Esta idea intuitiva es aplicable a fenómenos imprevisibles. Para tales fenómenos no puede predecirse un resultado particular antes de observarlos o de realizar el experimento, aunque se conozcan sus posibles resultados, no puede afirmarse un resultado a priori de su comportamiento, ya que al realizar el experimento bajo condiciones similares pueden obtenerse resultados diferentes.

Buscando codificar razones por las cuales se presenta el azar, Perez Gutierrez dice que: El azar es ignorancia, es complejidad de causas, es asunto de errores inevitables, es no considerar causas que se creen independientes de otros hechos, es un asunto relativo y variable en el tiempo y en el espacio. No se debe descartar que el azar tenga otras explicaciones (1).

1.1.2 MULTIPLICIDAD EN LA OCURRENCIA.

Es posible someter a leyes éstos fenómenos imprevisibles?

Para la definición de azar estadístico, la imprevisión es condición necesaria pero no suficiente. El azar estadístico requiere una característica más. Esta característica, conocida como multiplicidad en la ocurrencia, es la posibilidad de repetir el experimento, o la observación del fenómeno, una infinidad de veces "bajo un sistema de causas constantes", esto es, en condiciones iguales o muy semejantes, sin que varíen significativamente las condiciones bajo las cuales se realiza y sin agotar los eventos a probar.

1.1.3 LA REGULARIDAD ESTADISTICA O ESTABILIDAD DE FRECUENCIAS.

La regularidad estadística es una abstracción a partir de fenómenos empíricos frecuentemente observados, cuyos resultados individuales son imprevisibles y aparecen caprichosamente si se observan en forma aislada, pero cuando se observa un número suficientemente grande de repeticiones de ellos, adquieren una sorprendente regularidad, la cual se manifiesta en la estabilidad de las frecuencias relativas, o proporciones estables, en que aparecen las modalidades del fenómeno.

La citada "Estabilidad de frecuencias" es la que conduce a la "Teoría de probabilidades" y es la que proporciona el nombre a los "Fenómenos aleatorios", los cuales son los susceptibles del trabajo estadístico.

1.2 LA ALEATORIEDAD.

El concepto de aleatoriedad es un término más específico para hacer referencia al "azar estadístico" y conviene diferenciarlo del azar, entendido simplemente como la característica fundamental de los fenómenos imprevisibles, tal como se vió en el apartado 1.1.1 de este capítulo. En el contexto de este trabajo, como es de uso corriente en la bibliografía estadística, cuando se habla de azar se está haciendo referencia al "azar estadístico" o aleatoriedad.

De dónde proviene la aleatoriedad?

De la variabilidad en las condiciones bajo las cuales se produce el fenómeno, ya que no hay posibilidad en la práctica de fijar o controlar todos los factores que intervienen. Si fuera posible fijar todas las fuentes de variación en un experimento, éste no sería aleatorio sino determinístico, por tanto sería posible conocer a priori su resultado y para él no sería necesaria la Estadística.

La Variabilidad está presente en la mayoría de los fenómenos, pero, a veces, bajo circunstancias esencialmente estables, se apega a cierto patrón o modelo y puede ser factible percibir la regularidad existente en estas situaciones de variabilidad e incertidumbre. Esta regularidad es la que permite el trabajo estadístico.

1.3 EJEMPLOS DE FENOMENOS ALEATORIOS.

Los ejemplos más populares de fenómenos aleatorios, donde interviene el azar estadístico, son los juegos de azar. Dentro de éstos, los más ampliamente conocidos son, entre otros, los lanzamientos de monedas, los lanzamientos de dados, la ruleta, la baraja y la extracción de fichas numeradas de una urna o de bolillas de diferentes colores.

Algunos otros ejemplos, un poco más interesantes desde el punto de vista del trabajo aplicado, podrían ser:

- Registrar el ingreso anual de un trabajador, tomado al azar, en una planta.

- Entrevistar un consumidor para determinar la marca preferida de un producto determinado.

- Registrar el valor de una acción de la bolsa de valores en un momento tomado al azar.

- Inspeccionar una línea de ensamblaje para determinar si el número de artículos defectuosos excede a los especificados.

- Registrar el tipo y el monto de una póliza vendida por un agente de seguros.

1.4 ALGUNAS DEFINICIONES.

1.4.1 ESCOGER AL AZAR UNO O MAS OBJETOS DE UNA COLECCION DADA.

Parece conveniente aquí, citar en forma textual la definición dada por Meyer:

"..Supongamos que tenemos N objetos, digamos a_1, a_2, ... ,a_N.

(a) Escoger al azar un objeto de los N, significa que cada uno de los objetos tiene la misma probabilidad de ser escogido. Esto es,

$$Prob(\text{elegir } a_i) = 1/N, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

(b) Escoger al azar dos objetos entre N objetos significa que cada uno de los pares de objetos (sin considerar el orden) tiene la misma probabilidad de ser escogido que cualquier otro par. ...

(c) Escoger al azar n objetos ($n \leq N$) entre N objetos significa que cada n-tuplo, a_{i1}, a_{i2}, ... , a_{iN} tiene tantas probabilidades de ser escogido como cualquier otro n-tuplo" (2).

1.4.2 ESPACIO MUESTRAL.

Un espacio muestral S, es definido como el conjunto de todos los resultados posibles que pueden obtenerse al efectuar un experimento aleatorio ϵ, en un momento determinado de tiempo. El espacio muestral, desde el punto de vista de la "Teoría de

2 Meyer, Paul, Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas, p. 23.

conjuntos", es el conjunto Universal o conjunto de referencia formado por la totalidad de los puntos muestrales, eventos elementales o eventos atómicos.

El espacio muestral puede ser discreto, si presenta una cantidad finita o infinita numerable de puntos. Y continuo, si presenta una cantidad infinita no numerable de puntos. (En el capítulo 3, se trata más detalladamente este aspecto)

Los resultados de un experimento aleatorio pueden escribirse de varias maneras distintas, por lo tanto el experimento puede tener varios espacios muestrales.

1.4.3 SUCESO O EVENTO.

Un suceso o evento se define como una colección específica de algunos de los resultados o puntos muestrales que son de interés en un caso particular, el cual puede ser seleccionado en forma arbitraria. Es un subconjunto del espacio muestral S. Para su notación se utilizan las primeras letras mayúsculas del alfabeto así: A, B, C, D, etc.

Un evento simple o elemental es considerado como aquel evento que no puede descomponerse en otros. Un experimento resulta en uno y sólo uno de sus eventos simples, pués no es posible que dos eventos simples ocurran al mismo tiempo.

Un evento compuesto es considerado como la combinación de dos o más eventos simples; generalmente se describe mediante las operaciones sobre conjuntos. Las operaciones más utilizadas son: Unión, Intersección, Complemento y algunas combinaciones de éstas.

Algunas de las relaciones más comunes entre eventos son: eventos mutuamente excluyentes, complementarios, condicionales, indepedientes, colectivamente exhaustivos.

1.5 PROBABILIDAD CLASICA.

1.5.1 DEFINICION CLASICA DE LA PROBABILIDAD.

La probabilidad de ocurrencia del suceso A se define como:

$P(A) = CF/CP$ Donde: P(A): Probabilidad del suceso A.
CF: Casos favorables.
CP: Casos posibles o totales.

La probabilidad de éxito, o probabilidad de ocurrencia, del suceso A suele denotarse como p. La probabilidad de fracaso -de no ocurrencia- del suceso, A queda definida como la relación:

Casos Desfavorables / Casos Posibles, la cual puede escribirse como q = 1-p, luego p + q = 1.

El espacio muestral no necesariamente debe ser finito. Esta definición puede aplicarse para hallar la probabilidad de obtener un número par al seleccionar aleatoriamente un numero entre todos los Naturales. En este caso el espacio muestral S es infinito y tanto los casos favorables como los casos desfavorables -obtener numero par e impar respectivamente- son también infinitos, pero puede saberse que la probabilidad deseada es 1/2. (La mitad de todos los números naturales son pares).

1.5.2 SUPUESTOS EN LA DEFINICION CLASICA DE LA PROBABILIDAD.

Todos los resultados del experimento son mutuamente excluyentes e igualmente posibles. Esta suposición a veces se hace para simplificar los cálculos pero de ninguana manera debe considerarse como un hecho, sino que debe justificarse cuidadosamente. Para algunos experimentos tal suposición puede garantizarse, pero también existen situaciones en las que conduciria a grandes errores. Por ejemplo, seria poco realista suponer igualmente probable el hecho de no recibir llamadas telefónicas en una central entre la 1 y las 2 A.M. y entre las 5 y las 6 P.M.

Otro ejemplo de la inconveniencia de tal suposición sería: Sea el experimento aleatorio ε: Lanzar dos monedas al aire y observar el número de caras resultante. Sea X = {0, 1, 2}. Estos valores para X no son igualmente posibles: sus probabilidades son 1/4, 1/2 y 1/4 respectivamente.

Esta suposición de equiprobabilidad está basada en el Principio de simetría o indiferencia y en el Principio de la razón suficiente, los cuales fueron los iniciadores de la Estadística. En forma simple y breve estos principios dicen que si se conocen todos los posibles resultados, y por la forma de realizar el experimento se cree que ninguno de ellos está favorecido con respecto a otro, puede suponerse simetría si no hay razones que justifiquen lo contrario.

Si hay n resultados igualmente posibles, a cada uno se le asigna una probabilidad $p_i = 1/n$, entonces P(A) = CF/CP es una consecuencia de la suposición de equiprobabilidad; la definición clásica de la probabilidad no sirve como una definición general.

1.5.3 EJEMPLOS: APLICACION DE LA PROBABILIDAD CLASICA.

Ejemplo 1.1 Sea el experimento aleatorio ϵ: lanzar al aire una moneda normal y observar el resultado: cara o sello. El espacio muestral S, sería estonces S = {cara, sello}.

Sean los sucesos A: {Obtener cara}, B:{obtener sello}. A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes e igualmente posibles. Sus probabilidades serán:

P(A) = CF/CP = 1/2.
P(B) = CF/CP = 1/2.

Ejemplo 1.2. Sea el experimento aleatorio ϵ: Lanzar al aire un dado normal y observar el número de puntos en la cara superior. El espacio muestral consta de seis resultados igualmente posibles, los cuales son, S: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Sean los sucesos:

A: {Obtener un número par}, luego A:{2,4,6}, P(A) = 3/6 = 1/2
B: {Obtener un número mayor de 4}, B:{5,6}, P(B) = 2/6 = 1/3
C: {Obtener un número impar}, C:{1,3,5}, y P(C) = 3/6 = 1/2

Ejemplo 1.3 (Adaptado del ejemplo 2.4 de Meyer, pp. 24.29). Un lote de 100 artículos contiene 20 defectuosos y 80 no defectuosos. Se eligen diez artículos al azar, sin substituir un artículo antes que sea elegido el próximo. Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los artículos escogidos sean defectuosos?

Solución:

$$P(A) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{20}{5}\binom{80}{5}}{\binom{100}{10}} = \ldots = 0.021$$

Para simplificar los cálculos, este resultado puede obtenerse mediante logaritmos de factoriales que se encuentran en las tablas de la distribucion Hipergeométrica. (Generalización del caso anterior y el cual puede consultarse en cualquier libro de Estadistica).

Ejemplo 1.4 Suponga que un experimento consiste en extraer cinco cartas sin reposición de un mazo de 52 naipes. Cuál es la probabilidad de sacar 4 ases en una sola extracción.

Solución:

$$P(A) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{4!}{(4-4)!4!}\,\frac{48!}{(48-1)!1!}}{\frac{52!}{(52-5)!5!}} = \ldots = \frac{1}{54145}$$

Ejemplo 1.5 (Problema 2.2 de Meyer, p. 31).

En una habitación 10 personas tienen insignias numeradas del 1 al 10. Se eligen tres personas al azar y se les pide que dejen la habitación inmediatamente y se anotan los números de las insignias.

a) Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insiginias sea 5?

b) Cuál es la probabilidad de que el número mayor de las insignias sea 5?

Solución:

a) A: {Salir un 5 y salir dos números mayores que 5}. Los dos números mayores que 5 pueden ser: 6, 7, 8, 9, o 10.

$$P(A) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{10!}{7!3!}} = \frac{\frac{3\cdot4\cdot5}{3\cdot2}}{\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{7\cdot3\cdot2}} = \frac{10}{4\cdot3\cdot10} = \frac{1}{12}$$

b) B: {Salir un 5 y salir dos números menores que cinco}. Los dos números menores que cinco pueden ser 1, 2, 3, o 4.

$$P(B) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{7!3!}} = \frac{\frac{2\cdot3\cdot4}{2\cdot2!}}{\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{7\cdot2\cdot3}} = \frac{6}{720} = \frac{36}{720} = \frac{1}{20}$$

1.5.4 CRITICA A LA DEFINICION DE PROBABILIDAD CLASICA.

El cálculo de la probabilidad depende de un análisis a priori. Los resultados se suponen simétricos y pueden ser deducidos por lógica. Implica un razonamiento abstracto más que basado en la experiencia: supone una moneda bién balanceada, un dado no sesgado, una rueda de ruleta honesta.

Cuando un razonamiento a priori falla debido a la falta de simetría, puede recurrirse a la teoría probabilistica relativa.

1.6 PROBABILIDAD FRECUENTISTA O EMPIRICA.

1.6.1 LA FRECUENCIA RELATIVA.

Supóngase que se repite n veces el experimento ϵ; sean A y B dos sucesos asociados con ϵ; y sean n_A y n_B el número respectivo de veces que ocurren A y B en las n repeticiones.

La frecuencia relativa del suceso A es definida como:

$$f_A = n_A / n.$$

Donde: f_A: Frecuencia relativa del suceso A.
n_A: Número de veces que ocurre el suceso A.
n: Número de repeticiones del experimento.

1.6.2 PROPIEDADES DE LA FRECUENCIA RELATIVA.

1. $0 \leq f_A \leq 1$.

   Si $f_A = 0$, A nunca ocurre en las n repeticiones y en este caso se considera que A es un suceso falso.

   Si $f_A = 1$, A ocurre todas las veces en las n repeticiones y en tal caso se dice que A es un suceso cierto.

   En ambos extremos, se tendrá un experimento determinístico. En el intervalo, se tendrá un fenómeno probabilístico propiamente dicho.

2. $f_{A \cup B} = f_A + f_B$, si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes, es decir que no pueden ocurrir juntos, $A \cap B = \emptyset$.

3. f_A "Converge" en cierto sentido probabilístico a la probabilidad, P(A), cuando el número de experimentos crece indefinidamente. Por lo tanto, usando el resultado de la regularidad estadística o estabilidad de frecuencias, se acostumbra escribir:

   $$\lim_{n \to \infty} f_A = P(A).$$

1.6.3 COMENTARIOS ACERCA DE LA PROBABILIDAD FRECUENTISTA.

Este enfoque experimental puede ayudar a verificar la suposición de eventos equiprobables. Puede ser útil para estimar las probabilidades de un evento por medio de experimentos repetidos. Por ejemplo, para una moneda no balanceada, cuál es la probabilidad de caer cara? La realización de experimentos consistirá en arrojar la moneda y observar los resultados. Si se lanza n = 100 veces en las mismas circunstancias y se anota la proporción de veces que sale cara, y si esta frecuencia relativa es 45/100, ésta sería una estimación de la probabilidad p. Aún con una moneda perfecta, esta frecuencia relativa no necesariamente sería exactamente 50/100. Esto indica que no puede obtenerse la probabilidad verdadera a partir de experimentos repetidos. La estimación se aproximará a la relación verdadera -la probabilidad- a medida que n aumenta.

Cuando se arroja un dado equilibrado 6 veces, es poco probable que cada número de los 6 aparezca exactamente 1 vez. Con n grande puede esperarse que a la larga, o en promedio, cada una de las 6 caras del dado aparezca aproximadamente 1/6 de las veces. La probabilidad de obtener cualquiera de los números de un dado en una tirada aleatoria es 1/6.

En realidad nunca podría obtenerse la probabilidad de un evento por este límite. Esta probabilidad supone un concepto a largo plazo. En la práctica solo puede tratarse de obtener una estimación cercana a P(A) basado en un n grande. La desventaja de este enfoque es la gran cantidad de tiempo y costos necesarios para realizar los experimentos y las dificultades para planearlos y controlarlos.

1.7 VISION SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD.

Los anteriores conceptos son interpretaciones objetivas de la probabilidad, donde su magnitud se obtiene únicamente a partir del fenómeno de interés, bién sea mediante un análisis lógico o mediante el empleo de pruebas repetidas, y sin que intervenga el juicio personal.

La probabilidad comúnmente aparece disfrazada como posibilidad o incertidumbre de que algo ocurra. Por ejemplo, el cielo nublado puede dar alguna idea de la posibilidad de lluvia.

La probabilidad puede ser tomada como una medida de confianza personal sobre la verdad de una proposición particular o como el grado de creencia sobre la ocurrencia de cierto evento. Por ejemplo, si se tiene el doble de confianza en la aparición de un

La probabilidad intuitiva es muy utilizada en la investigación científica para la verificación de hipótesis, permitiendo cuantificar el riesgo involucrado en la toma de decisiones y la confianza que puede depositarse respecto de las hipótesis establecidas. Ha habido intentos de definirla y formalizarla matemáticamente, para algunos eventos únicos que ocurren sólo una vez y no pueden estar sujetos a experimentos repetidos por su naturaleza o por su costo.

La interpretación subjetiva de la probabilidad presenta la desventaja de que dos individuos, por diferencias individuales razonables, pueden diferir en sus grados de confianza incluso cuando se les ofrezca la misma evidencia. Sin embargo, es un concepto muy flexible que tiene aplicaciones en una amplia gama de situaciones; puede asignarse a hechos con los que la probabilidad clásica no se asocia, puede dar soluciones más realistas ya que la experimentación es a menudo inadecuada por razones de costos en tiempo y dinero, además de resultar a veces imposible de realizar en la práctica.

"El Subjetivista puede aplicar las probabilidades a todos los problemas de un clasicista, a los de un frecuentista y a muchos otros. Cuando se presenta simetría reconocerá un razonamiento apriori y cuando la cantidad de datos es grande obtendrá las mismas probabilidades que un frecuentista" (3).

3. Díaz. Algunas consideraciones acerca de los conceptos de

2. LA TEORIA DE PROBABILIDADES.

La probabilidad axiomática no requiere definir los elementos que satisfacen los axiomas. Con una abstracción de este tipo, fué innecesario que los Matemáticos abordaran el problema de definir la probabilidad. La Teoría de Probabilidades postula la existencia de la probabilidad como un número real, en forma independiente del concepto que se tenga de ella. Esta teoría centra su atención en la deducción de los principios y leyes generales que ayudan a calcular las probabilidades de eventos compuestos a partir de las probabilidades de sus eventos elementales, las cuales se suponen conocidas. Para el cálculo de tales probabilidades, esta teoría utiliza como apoyo fundamental la Teoría de Conjuntos.

2.1 PROBABILIDAD AXIOMATICA.

Sean los siguientes elementos:

ϵ: Un experimento aleatorio.
S: El espacio muestral asociado con ϵ.
A y B: Los sucesos de interés.
P(A): Probabilidad de A.
P(B): Probabilidad de B.

P(A) es un número real, asociado al suceso A, que satisface las siguientes condiciones o axiomas.

AXIOMAS:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.

2. $P(S) = 1$.

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son mutuamente excluyentes.

2.2 OBSERVACIONES.

0. P(B) es un número real, asocoado al suceso B, que satisface las mismas condiciones o axiomas definidas para P(A).

1. Es práctica común, en algunos contextos, multiplicar este número por 100 y expresar la probabilidad como un porcentaje.

P(A) = 0 representa un suceso A que es imposible: nunca sucede.

P(A) = 1 representa un suceso A que es cierto. Existe una certeza total (del 100%) de que el suceso A ocurre.

2. La suma de las probabilidades de todos los eventos simples es 1 (el 100 %).

3. Los sucesos A, B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir juntos, esto es $A \cap B = \emptyset$. La ocurrencia del uno automaticamente imposibilita la ocurrencia del otro.

Graficamente puede visualizarse en un Diagrama de Venn, asi:

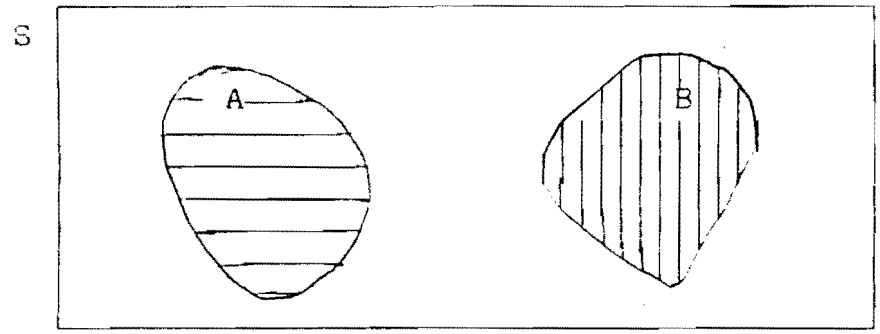


Figura 1. Diagrama de Venn
para dos sucesos mutuamente exclutentes, A y B.

Esta definición puede generalizarse para K sucesos mutuamente excluyentes de par en par, así:

$$P[\bigcup_{i=1}^{k} Ai] = \sum_{i=1}^{k} P(Ai)$$

Y para el caso de infinito número de sucesos, se tiene:

$$P[\bigcup_{i=1}^{\infty} Ai] = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ai) = P(A1) + P(A2) + \ldots + P(An) + \ldots$$

2.3. TEOREMAS.

Los siguientes teoremas, como debe ser obvio para el lector, tienen su demostración matemática rigurosa y pueden consultarse

1. $P(\emptyset) = 0$. La probabilidad del conjunto vacío es cero (0).

2. $P(A') = 1 - P(A)$. Donde A' es el Complemento de A. $A' = S - A$

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Este teorema es conocido como "Ley Aditiva" y se usa para el cálculo de la probabilidad de la Unión de dos sucesos, en forma general. (Ver figura 2)

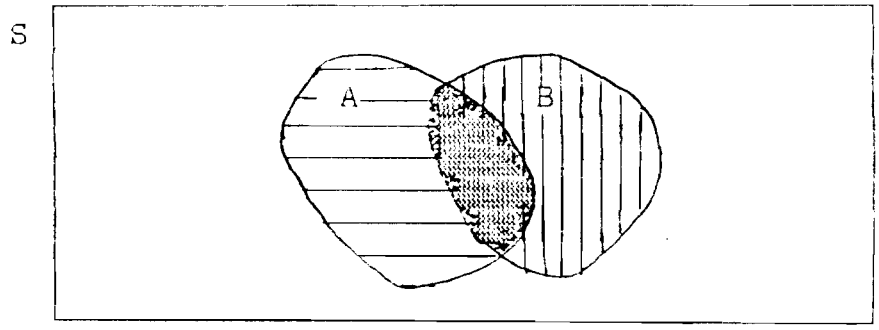


Figura 2. Diagrama de Venn
de dos sucesos, A y B, en general.

Para el caso particular de dos sucesos mutuamente excluyentes, donde $A \cap B = \emptyset$, se tendría:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset) = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)$, tal como se postuló en el axioma 3.

Esta ley aditiva puede generalizarse. Para 3 sucesos, quedaría así:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

4. Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

En muchos contextos, la unión de conjuntos se entiende de una manera análoga a la suma de eventos y la intersección al producto. Además para la solución de problemas, es importante utilizar los resultados de la Teoría de Conjuntos. Algunos de ellos son las Leyes de De Morgan, cuya notación es:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad y \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Estas leye pueden generalizarse. Para 3 sucesos, quedaría como:

$$(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C', \quad y \quad (A \cap B \cap)' = A' \cup B' \cup C'.$$

2.4 EJEMPLOS.

Ejemplo 2.1 (Ejemplo 2.1 de Meyer, p.21).
Supongamos que sólo son posibles tres resultados en un experimento, digamos a_1, a_2, a_3. Además, supongamos que la ocurrencia de a_1 es dos veces más probable que la de a_2, la cual, a su vez, es dos veces más probable que a_3. Entonces:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2p_2 + \\ p_2 &= 2p_3 \\ p_3 &= p_3 \\ \hline p_1 + p_2 + p_3 &= 7p_3 \\ 1 &= 7p_3 \end{aligned}$$

(La suma de las tres probabilidades es 1)

De donde $p_3 = 1/7$, luego $p_2 = 2/7$ y $p_1 = 4/7$.

Ejemplo 2.2 (Problema 1.15 de Meyer, P. p. 20)
Cierto tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los cojinetes, por combustión del embobinado o por desgaste de las escobillas. Supóngase que la probabilidad de la obstrucción es el doble de la de combustión, la cual es cuatro veces más probable que la inutilización de las escobillas. ?Cuál es la probabilidad de que el fallo sea por cada uno de esos tres mecanismos?

Solución. Sean los sucesos y las respectivas probabilidades:

F1: Obstrucción de los cojinetes --- $p_1 = 2p_2$, $\quad p_1 = 8p_3$
F2: Combustión del embobinado ------ $p_2 = 4p_3 \equiv p_2 = 4p_3$
F3: Desgaste de las escobillas ----- $p_3 = p_3 \equiv p_3 = p_3$

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 13p_3 \\ 1 &= 13p_3 \end{aligned}$$

De donde $p_3 = 1/13$, luego $p_1 = 8/13$ y $p_2 = 4/13$

Ejemplo 2.3 (Problema 1.17 de Meyer, p. 20).
Supóngase que A, B, y C son sucesos tales que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$ y $P(A \cap C) = 1/8$. Calcular la probabilidad de que al menos uno de los sucesos A, B o C ocurra.

Solución:

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$
$P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$
$P(A \cap C) = 1/8$.

Ejemplo 2.4 (Problema 2.1 de Meyer, p. 31).
En una habitación se encuentra el siguiente grupo de personas: 5 hombres mayores de 21, 4 hombres menores de 21, 6 mujeres mayores de 21 y 3 mujeres menores de 21. Se elige una persona al azar. Se definen los sucesos siguientes:
A: {la persona es mayor de 21}; B: {la persona es menor de 21}; C: {a persona es hombre}; D: {La persona es mujer}. Evaluar las siguientes probabilidades:

a) P(BUD)
b) P(A´UC´)

Solución:

	↓A Mayores de 21.	↓B = A´ Menores de 21.	Total
C -----> Hombres	5	4	9
D = C´--> Mujeres	6	3	9
Total	11	7	18

P(A) = 11/18
P(B) = 7/18
P(C) = 9/18 = 1/2
P(D) = 9/18 = 1/2

a) P(BUD) = P(B) + P(D) - P(B∩D) = 7/18 + 9/18 - 3/18 = 13/18

b) P(A´UC´)=P(A∩C)´= 1 - P(A∩C) = 1 - 5/18 = 3/18, o también:

b) P(A´UC´) = P(A´) + P(C´) - P(A´∩ C´)
= 7/18 + 9/18 - 3/18
= 13/18

Ejemplo 2.5 Se arrojan juntos una moneda y un dado. Sea A: la moneda sale sello y B: El dado cae en 3 o en 4. Cuál es la probabilidad de que A o B aparezcan?

Solución. Aparecen 2 puntos en la intercesión: {(S,3),(S,4)}

P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = 1/2 + 2/6 - 2/12
= 1/2 + 1/3 - 1/6 = (3+2-1)/6 = 4/6
= 2/3.

Ejemplo 2.6 En un grupo de 1200 pelotas de golf, 40 tienen cubiertas imperfectas, 32 no rebotan y 12 presentan los 2 defectos. Si se selecciona una pelota aleatoriamente del

conjunto, cual es la probabilidad de que la pelota sea defectuosa?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 40/1200 + 32/1200 - 12/1200$$
$$= 0.05$$

2.5 PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Se habla de probabilidad condicional cuando la ocurrencia o no ocurrencia de un suceso, depende de la ocurrencia o no ocurrencia de otro suceso. La probabilidad de ocurrencia del uno depende de si el otro ha ocurrido o no.

2.5.1 DEFINICION.

Sean A y B dos sucesos asociados con un experimento ϵ. Sea P(B/A): la probabilidad condicional del suceso B dado que el suceso A ha ocurrido.

$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A)$, Donde: $P(A) \neq 0$, o sea $P(A) > 0$, y

$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$, Donde: $P(B) \neq 0$, o sea $P(B) > 0$

Gráficamente puede visualizarse el sentido de esta definición, así:

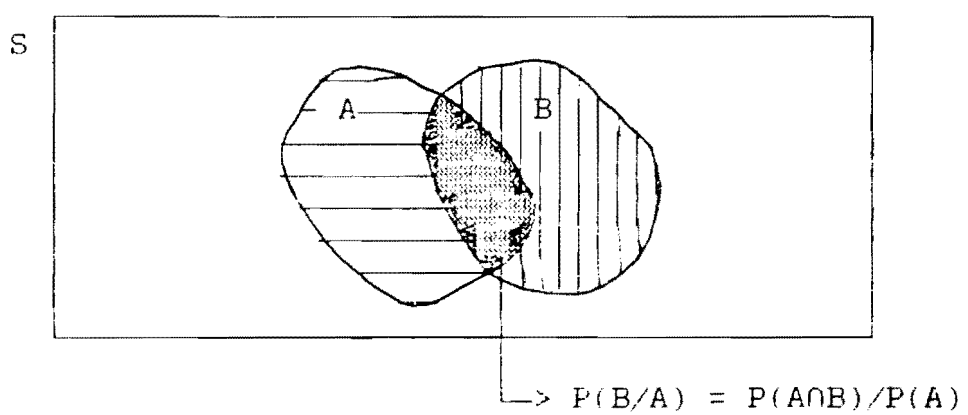


Figura 3. Probabilidad Condicional P(B/A).

Para calcular la probabilidad condicional P(B/A) puede hacerse uso de la definición clásica de probabilidad, Casos favorables/Casos posibles, donde los casos posibles están representados por el área P(A). Dado que el suceso A ha ocurrido, puede considerarse el espacio muestral reducido S´ (Un

subconjunto del espacio muestral original S) como el área encerrada por el suceso A, y los casos favorables como los casos en que B ocurre sin salirse del espacio muestral reducido, donde A ha ocurrido; esto es representado en la gráfica como el área P(B/A).

Se tienen dos maneras de calcular la probabilidad condicional P(B/A), así:

a) Directamente, como en la anterior ilustración, considerando la probabilidad de B con respecto al espacio muestral reducido S´ = P(A). La probabilidad del espacio muestral reducido debe ser mayor que 0, de lo contrario la probabilidad condicional no estaría definida.

b) Usando la definición de probabilidad condicional, P(B/A) = P(A∩B)/P(A), donde P(A∩B) y P(A) se calculan con respecto al espacio muestral original S.

En general P(A/B) ≠ P(A∩B). Como un caso particular podría considerarse: P(A/B) = P(A∩B) sólo cuando B = S. Ya que, como se sabe por el axioma 2, P(S) = 1 y en éste caso se tendría: P(A/B) = P(A∩B)/P(B) = P(A∩B)/P(S) = P(A∩B)/1 = P(A∩B) = P(A∩S) = P(A).

Es conveniente insistir en la diferencia existente entre los conceptos de probabilidad libre -no condicional- P(A), y el de probabilidad condicional P(A/B). En este último caso se tiene información adicional para calcular la probabilidad de ocurrencia del suceso A: su notación no será P(A) sino P(A/B). Se sabe que un suceso B ha ocurrido y por lo tanto el espacio muestral ha sido reducido; los casos posibles para el cálculo de P(A/B) están circunscritos a los casos observados en P(A). La información adicional es valiosa, sirve para corregir las probabilidades.

2.5.2 EJEMPLOS.

Ejemplo 2.7 La probabilidad de que una persona seleccionada al azar entre toda la población viva hasta los 65 años, será diferente a la probabilidad de que una persona seleccionada al azar entre un grupo de individuos de 20 años de edad viva hasta los 65 años. Si se definen los sucesos, A: {Una persona vive hasta los 65 años} y B: {Una persona tiene 20 años de edad}, y usando la notación adecuada de probabilidad condicional, se observa claramente P(A) ≠ P(A/B) para los casos de este ejemplo.

Ejemplo 2.8 Sean los sucesos, A: {Observar lluvia un día dado} y B: {Observar cielo nublado}.

Si 60% de todos los días son nublados, entonces P(B) = 0.6. Si el 30% de los días son lluviosos y nublados, P(A∩B) = 0.3; P(A/B) = P(A∩B)/P(B) = 0.3/0.6 = 1/2 = 0.5 = 50%. Y se tiene: P(A/B) = Porcentaje de días lluviosos en la subpoblación de días nublados. P(A) sería el porcentaje de días lluviosos en la población de todos los días, pero cabe esperar lluvia con mayor probabilidad si el cielo está nublado.

2.5.3 COMPARACION DE LAS MAGNITUDES DE P(A/B) Y P(A).

Meyer, Paul para analizar la posibilidad de hacer una afirmación general acerca de la magnitud relativa de P(A/B) y P(A), considera 4 casos así:

(a) Para dos sucesos mutuamente excluyentes A y B, aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente, ésto es A∩B = ø, entonces P(A/B) = 0 ≤ P(A), puesto que A no puede ocurrir si B ha ocurrido.

(b) Si A ⊆ B, luego P(A/B) = P(A∩B)/P(B) = P(A)/P(B) ≥ P(A), puesto que 0 ≤ P(B) ≤ 1.

(c) B ⊆ A, luego P(A/B) = P(A∩B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1 ≥ P(A)

(d) Ninguno de los casos anteriores, ésto es cuando A y B son intersecantes, en general, no puede hacerse ninguna afirmación acerca de la magnitud relativa de P(A/B) y P(A).

Meyer observa, además, que P(A) ≥ P(A/B) en el caso (a), P(A) ≤ P(A/B) en los casos (b) y (c), y no puede hacerse ninguna comparación en el caso (d). (4).

2.5.4 LEY MULTIPLICATIVA O LEY DE PROBABILIDAD CONJUNTA.

Aplicando la anterior definición de probabilidad condicional, P(B/A) = P(A∩B)/P(A), para hallar P(A∩B), se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A), \text{ o también}$$
$$P(B \cap A) = P(B) * P(A/B).$$

Este resultado es conocido como "Teorema de Multiplicación de probabilidades" o "Ley de Probabilidad Conjunta" para la ocurrencia simultánea de los dos sucesos A y B.

---

4 Meyer, Paul, Op. cit, p. 38.

2.6 INDEPENDENCIA ESTADISTICA.

Existen casos donde sabiendo que el suceso B ha ocurrido, se da una información valiosa referente a la probabilidad de ocurrencia de A. Sinembargo existen muchos casos en los cuales se sabe que si un suceso B ocurre no tiene influencia alguna respecto a la ocurrencia o no ocurrencia de A, y viceversa. De tal manera, los sucesos A y B serán considerados sucesos independientes entre sí.

2.6.1 DEFINICION INTUITIVA.

Si se considera que el resultado de un suceso no afecta ni es afectado por el resultado de otro, intuitivamente puede pensarse que la probabilidad libre es igual a la probabilidad condicional, para ambos sucesos en relación mutua, la cual puede expresarse así:

$$P(A/B) = P(A), \text{ con } P(A) > 0, \quad y$$
$$P(B/A) = P(B), \text{ con } P(B) > 0$$

2.6.2 DEFINICION FORMAL.

Si las probabilidades condicionales son iguales a las probabilidades no condicionales correspondientes, como se dijo en el párrafo anterior, y usando el teorema de multiplicación de probabilidades se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = P(A) * P(B), \text{ y también,}$$
$$P(B \cap A) = P(B) * P(A/B) = P(B) * P(A)$$

La siguiente definición formal será válida aún si P(A) o P(B) son iguales a 0, O sea, será válida para $P(A) \geq 0$ y $P(B) \geq 0$

A y B son sucesos independientes sí y sólo sí:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B).$$

Puede hacerse la extensión del concepto de independencia a 3 sucesos asociados con un experimento, mediante la siguiente Definición:

Se dice que tres sucesos A, B y C son mutuamente independientes sí y sólo sí, todas las condiciones siguientes se cumplen:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) * P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) * P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$

En la mayor parte de las aplicaciones no necesita verificarse todas las condiciones: generalmente se supone la indepedencia con base en lo que se sabe acerca del experimento, y entonces se usa esta suposición para calcular las probabilidades conjuntas.

2.6.3 RECONSIDERACION DE LA LEY ADITIVA.

Recordando la Ley Aditiva para la Unión de dos sucesos A y B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, puede observarse algunos casos de interés:

1. Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes, $P(A \cap B) = 0$ y entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (Como fué mencionado antes).

2. Si A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$, y entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B)$.

3. Si A y B no son independientes (son dependientes), luego $P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = P(B) * P(A/B)$, por lo tanto se tiene $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B/A)$. también puede hallarse $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B) * P(A/B)$.

2.6.4 EJEMPLOS.

Ejemplo 2.9 (Adaptado del Ejemplo 3.6 de Meyer, p. 43).
Supongamos que se lanza un dado normal dos veces. Definimos los sucesos A y B como sigue:

A = {el primer dado muestra un número par},
B = {el segundo dado muestra un 5 o un 6},

Por intuición se sabe que los sucesos A y B no están relacionados: la ocurrencia (o no ocurrencia) de uno, no proporciona información acerca de la ocurrencia del otro. Para corroborar el resultado intuitivo pueden efectuarse los cálculos. Considerando el espacio muestral con 36 resultados igualmente posibles S, se tiene:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), \ldots (2,6)$$
$$\ldots$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), \ldots (6,6)\}.$$

$P(A) = 3/6 = 1/2$
$P(B) = 2/6 = 1/3$

$A \cap B$: $\{(2,5), (2,6), (4,5), (4,6), (6,5), (6,6)\}$, entonces.
$P(A \cap B) = 6/36 = 1/6$

$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = (1/6)/(1/3) = 1/2 = P(A)$
$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = (1/6)/(1/2) = 2/6 = 1/3 = P(B)$

A y B son independientes ya que se cumple la definición:
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$: de los resultados anteriores, se tiene:
$1/6 = 1/2 * 1/3$.

A y B son independientes, entonces se sabe que no son mutuamente excluyentes. Para hallar P(AUB) puede procederse así:

$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, según el teorema 3, entonces:
$P(AUB) = 1/2 + 1/3 - 1/6 = (3 + 2 - 1)/6 = 4/6 = 2/3$.

Nota. Debe observarse que si A y B son dos eventos independientes con probabilidades distintas de 0, entonces debe haber por lo menos un evento elemental común en el conjunto de la intersección.

Ejemplo 2.10 (Adaptado del Ejemplo 3.2 de Meyer, p. 37).
Supóngase que una oficina tiene 100 máquinas calculadoras. Algunas de esas máquinas son eléctricas (E), mientras que otras son manuales (M). Además, algunas son nuevas (N), mientras las otras son usadas (U). La tabla dá el número de máquinas de cada categoría. Una persona entra en la oficina, escoge una máquina al azar, y descubre que es nueva. Cuál es la probabilidad de que sea eléctrica?.

TABLA

	E	M	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Solución: Se desea calcular P(E/N)

a) Sólo considerando el espacio muestral reducido, N, las 70 máquinas nuevas, se tiene $P(E/N) = 40/70 = 4/7$.

b) Usando la definición de probabilidad condicional, se tiene:
$P(E/N) = P(E \cap N)/P(N) = (40/100)/(70/100) = 40/70 = 4/7$

Otros cálculos adicionales de interés, en este ejemplo, pueden ser los que se presentan a continuación.

Probabilidades Marginales:

$P(N) = 70/100 = 7/10$
$P(U) = 30/100 = 3/10$

$P(E) = 60/100 = 3/5$
$P(N) = 40/100 = 2/5$

Probabilidades Conjuntas:

$P(N \cap E) = 40/100 = 2/5$
$P(N \cap M) = 30/100 = 3/10$
$P(U \cap E) = 20/100 = 1/5$
$P(U \cap M) = 10/100 = 1/10$

Probabilidades Cndicionales:

$P(N/E) = 40/60 = 2/3$
$P(E/N) = 40/70 = 4/7$

Ejemplo 2.11 (Adaptado del Ejemplo 3.1 de Meyer, p. 35).
Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1,x_2) en donde x_1 es el resultado del i-ésimo dado i = 1,2. El espacio muestral S puede representarse por 36 resultados igualmente probables, así:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), \ldots (2,6)$$
$$\ldots$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), \ldots (6,6)\}.$$

Sean los sucesos siguientes:

A: $\{(X_1,X_2)/\ X_1 + X_2 = 10\}$
B: $\{(X_1,\ X_2)/\ X_1 > X_2\}$
C: $\{(X_1,X_2)/\ X_1 + X_2 \leq 4\}$
D: $\{(X_1,X_2)/\ X_1 + X_2 \leq 3\}$
E: $\{(X_1,X_2)/\ X_2 = 2\}$

Estos sucesos y sus respectivas probabilidades pueden escribirse como:

A:{(4,6),(5,5),(6,4)}, luego $P(A) = 3/36$

B:{(6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1), (5,4), (5,3), (5,2), (5,1), (4,3), (4,2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1)}, lugo: $P(B) = 15/36$

C: {(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2), (3,1)}, $P(C) = 6/36 = 1/6$

D: {(1,1),(1,2),(2,1)}, entonces $P(D) = 3/36 = 1/12$.

E: {(2,1),(2,2),(2,3),(2,4), (2,5), (2,6)}, $P(E) = 6/36 = 1/6$

$P(A \cap B) = 1/36$

Para el cálculo de las probabilidades Condicionales, puede procederse así:

a) Utilizando la definición de Probabilidaad Condicional:

$P(A/B = P(A \cap B)/P(B) = (1/36)/(15/36) = 1/15$
$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = (1/36)/(3/36) = 1/3$

b) Utilizando el espacio muestral reducido:

$$P(A/B) = \frac{CF}{CP} = 1/15 \quad y \quad P(B/A) = \frac{CF}{CP} = 1/3$$

c) De la definición de Probabilidad Condïcional, pude observarse: $P(C \cap D) = 3/36 = 1/12$.

d) Por el espacio muestral reducido, se tiene:
$P(C \cap D) = P(C) * P(D/C) = 1/6 * 3/6 = 3/36 = 1/12$,
o también, $P(C \cap D) = P(D) * P(C/D) = 3/36 * 1 = 3/36 = 1/12$

2.7 TEOREMA DE MULTIPLICACION DE PROBABILIDADES O LEY DE PROBABILIDAD CONJUNTA

Esta ley de probabilidad conjunta, vista en el apartado 2.5.4 es utlizada para Eventos Dependientes, donde la probabilidad de uno de los eventos se condiciona o depende de la ocurrencia o no ocurrencia de otros eventos. Por ejemplo, al sacar dos cartas aleatoriamente sin reemplazo de una baraja, la probabilidad en la segunda carta depende del resultado obtenido en la primera.

Otro ejemplo que puede citarse e ilustrarse con cálculos es el siguiente: El gerente de una firma estima que si pone un aviso en cierta revista, éste será leído por la mitad de los suscriptores y el 1% de los que leen el aviso comprarán el producto ofrecido. P(Lectura del aviso y compra del producto) = P(Lectura del aviso) x P(compra del producto / Lectura del aviso) = (0.5) (0.01) = 0.005.

Generalizando este teorema para n sucesos dependientes, quedaría de la siguuiente manera:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2/A_1) * P(A_3/A_1,A_2) * \ldots * P(A_n/A_1,A_2, \ldots A_{n-1})$$

Ejemplo 2.12 (Adaptado del Ejemplo 3.8 de Meyer, p. 45).
Consideremos un lote grande de artículos, digamos 10.000. Supongamos que el 10% de estos artículos es defectuoso y el 90% no. Se escogen dos artículos al azar. Cuál es la probabilidad de que ambos no sean defectuosos?

Pueden definirse los sucesos A y B así:

A = {el primer artículo no es defectuoso},
B = {el segundo artículo no es defectuoso}.

a) Con sustitución, A y B son independientes, por lo tanto:
$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$

b) Sin substitución, A y B son dependientes, por lo tanto:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = 0.9 \times \frac{8999}{9999} \approx 0.81$$

Suponer los sucesos A y B independientes causa un error despreciable, en este caso ya que n es grande. En el caso en que n sea pequeño, tal suposición conducirá a grandes errores.

2.8 TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL O DE LA ELIMINACION.

Antes de estudiar este teorema es necesario considerar la definición de una Partición del espacio muestral.

2.8.1 PARTICION DEL ESPACIO MUESTRAL.

Existe una partición del espacio muestral S en los sucesos B_i con i = 1, 2, ... K, si al efectuar el experimento ϵ, ocurre uno y sólo uno de los sucesos B_i.

Los sucesos B_1, B_2, ... ,B_k representan una partición del espacio muestral S, si satisfacen las siguientes condiciones: son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos y no vacíos. O, escrito más formalmente, si:

a) $Bi \cap Bj = \emptyset$ Para todo $i \neq j$.

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

c) $P(B_i) > 0$ Para todo i.

2.8.2 EL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

Sea A algún suceso con respecto a S y sea B_1, B_2, ... B_k, una partición de S. En el diagrama de Venn de la figura se ilustra ésto para K = 7.

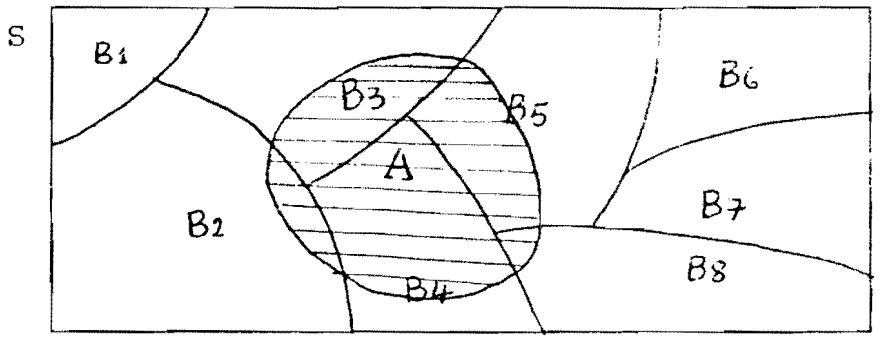


Figura 4. Partición del espacio muestral S, en Bi, i=1,2,...,7

Algunas de las intersecciones, $A \cap B_i$, pueden ser vacías y aún así sigue siendo válida la anterior descomposición del suceso A, el cual puede escribirse como:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_k),$$

donde todos los sucesos $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, ..., $(A \cap B_k)$ son mutuamente excluyentes.

Puede aplicarse la propiedad aditiva para sucesos mutuamente exluyentes, axioma 3, y escribir:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicional, cada término $P(A \cap Bi)$ puede ser expresado como $P(A) * P(B_1/A)$, o como $P(B_1) * P(A/B_1)$, y por lo tanto:

$$P(A) = P(B_1)*P(A/B_1) + P(B_2)*P(A/B_2) + \ldots + P(B_k)*P(A/B_k).$$

El resultado anterior también puede escribirse como:

$$P(A) = \sum_{J=1}^{k} P(B_J) * P(A/B_J)$$

Este teorema de la probabilidad total, es de gran utilidad en algunas aplicaciones, ya que, frecuentemente, puede ser difícil calcular directamente la probabilidad P(A), pero puede ser factible disponer de información adicional acerca de las $P(B_J)$ y de las $P(A/B_J)$, las cuales mediante la fórmula anterior permitirían hallar P(A).

Ejemplo 2.13 (Adaptado de los ejemplos 3.3 y 3.4 de Meyer, p.p. 37, 39). De un lote de 80 artículos buenos y 20 defectuosos, escogemos al azar dos artículos. Sean los sucesos A: {el primer artículo es defectuoso}, B: {el segundo artículo es defectuoso}. El cálculo de las probabilidades sería:

a) Con sustitución. $P(A) = P(B) = 20/100 = 1/5$.

b) Sin Sustitución. $P(A) = 20/100 = 1/5$.

c) Probabilidad de que los dos artículos sean defectuosos: $P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = 1/5 * 19/99 = 19/495$.

d) Cuál es la probabilidad de que el segundo artículo sea defectuoso? $P(B) = ?$

Depende de lo que halla ocurrido con el primero. Si el primer artículo resultó defectuoso, ocurrió A, luego $P(B/A) = 19/99$. Pero si el primer artículo fué no defectuoso, entonces se tiene $P(B/A') = 20/99$. ? Será $P(B) = P(B/A) + P(B/A')$?

No. La probabilidad total del suceso B -el segundo artículo es defectuoso- no es la suma ni el promedio simple de las probabilidades condicionales de los casos resultantes del primer artículo A y A'. La probabilidad total es un promedio ponderado de $P(B/A)$ y $P(B/A')$, donde las ponderaciones son las respectivas probabilidades $P(A)$ y $P(A')$, como lo ilustra el teorema de la probabilidad total. Para este caso, los cálculos serán:

$$P(B) = P(A) * P(B/A) + P(A') * P(B/A') =$$
$$19/99 \times 1/5 + 20/99 \times 4/5 =$$
$$(19+80)/(99 \times 5) = 99/(99 \times 5) = 1/5$$

NOTA: Este resultado puede ser un poco sorprendente. En el caso a) con sustitución, se tenía $P(B) = 1/5$!

Ejemplo 2.14 (Adaptado del ejemplo 3.13 de Meyer, p. 40). Suponga que entre seis pernos, dos son más cortos que una longitud específica. Si se escogen dos pernos al azar,

a) Cuál es la probabilidad de que los dos más cortos sean los escogidos?

b) Cuál es la probabilidad de que el segundo perno escogido sea corto?

Solución:

a) Sea el suceso Ai: {el perno i escogido es corto}, $i = 1,2$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) = 2/6 \times 1/5 = 1/3 \times 1/5 = 1/15$. O, de otra manera:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{61/(2!4!} = \frac{1}{4!x5x6/4!x2} = 1/15$$

b) $P(A_2) = P(A_2/A_1) * P(A_1) + P(A_2/A_1') * P(A_1')$
$= 1/5 \times 2/6 + 2/5 \times 4/6 = (2+8)/30$
$= 10/30 = 1/3.$

En la solución de este problema, Meyer, dice:

"La solución común pero *incorrecta* es escribir:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1) = 1/5 \cdot 2/6 = 1/15.$$

Lo importante, en realidad, es que aunque la respuesta es correcta, la identificación de 1/5 como $P(A_2)$ es incorrecta; 1/5 representa $P(A_2/A_1)$" (5).

2.9 TEOREMA DE BAYES

Sea $B_1, B_2, \ldots, B_k$, una partición de S, y sea A un suceso asociado a S; por definición de probabilidad condicional, se tiene:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} \qquad i = 1,2, \ldots ,k$$

El numerador de esta expresión, puede desarrollarse haciendo uso de la probabilidad conjunta para eventos dependientes; y el denominador, utilizando el teorema de la probabilidad total para P(A) -visto en la sección anterior- por lo tanto el teorema de Bayes puede ser expresado como:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) * P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B^j) * P(A/B^j)} \qquad i = 1,2, \ldots ,k$$

Este resultado se conoce como una fórmula para la probabilidad de las "causas" que conducen al suceso A. Los B_i son una partición del espacio muestral S, y por lo tanto uno y sólo uno de los B_i ocurre, es decir, uno y sólo uno de los B_i es el causante de A.

---

5 Meyer, Paul, Op. cit, p. 48.

El teorema permite calcular P(Bi/A), la probabilidad de un B_i cualquiera -una "causa"- dado que el suceso A ha ocurrido. Para su aplicación deben conocerse las probabilidades de las causas, estas probabilidades son representadas por los valores de $P(B_i)$; la única restricción es que todas las hipótesis pueden ser aceptables en una situación dada y que no se le asigne a ninguna una probabilidad a priori de 0 o 1. Este teorema en sentido matemático es perfectamente correcto; es por la elección impropia de $P(B_i)$ que puede prestarse a controversias y hacer el resultado objetable.

El teorema de Bayes parece implicar algún tipo de razonamiento inverso o hacia el origen, pero apunta hacia una forma natural de formular las preguntas. La probabilidad posterior o aposteriori se determina después de que son conocidos los resultados del experimento aleatorio.

Esta Regla Bayesiana es de gran aplicación en la toma de decisiones. El sujeto que toma la decisión a menudo se enfrenta con un conjunto de hipótesis mutuamente excluyentes y exhaustivas en relación con el fenómeno de interés y, antes de efectuar el experimento, le puede ser difícil asociar probabilidades previas, o ponderaciones, al conjunto de hipótesis, y por lo tanto puede verse forzado a asignarlas en forma subjetiva de tal modo que sean proporcionales al "grado de creencia" que tenga sobre ellas.

Diferentes sujetos que toman la decisión pueden asignar diferentes probabilidades previas al mismo conjunto de hipótesis. Por ejemplo, para juzgar si una moneda no está cargada, al comienzo, un individuo puede asignar iguales probabilidades a cara y sello; pero otra persona creyendo que está cargada puede asignar probabilidades así: P(Cara) = 2/3 y P(Sello) = 1/3. Estas dificultades iniciales no obstaculizan la utilización del teorema de Bayes, ya que justamente su meta es la modificación de las probabilidades previas $P(H_1)$ mediante experimentos. Después de realizar el experimento se reemplaza $P(H_1)$ por $P(H_1/E)$.

Pueden realizarse nuevos experimentos usando las probabilidades posteriores del ejemplo anterior como probabilidades previas. A medida que se prosigue con experimentos repetidos, se acumula evidencia y se modifican las probabilidades a priori iniciales y la intensidad de la creencia en las diversas hipótesis. Las estimaciones repetidas pronto producirán probabilidades posteriores tan bajas para algunas hipótesis que pueden dejar de ser consideradas más. Cuanto mayor es la evidencia acumulada, menor es la importancia de las probabilidades a priori.

Ejemplo 2.15 (Adaptado del ejemplo 3.5 de Meyer, p. 39-41).
Cierto artículo es manufacturado por tres fábricas, sean 1, 2 y 3. Se sabe que la primera produce el doble de artículos que la segunda y que ésta y la tercera producen el

mismo número de artículos (durante un período de producción especificado). Se sabe también que el 2% de los artículos producidos por las dos primeras fábricas es defectuoso mientras que el 4% de los manufacturados por la tercera es defectuoso. Se colocan juntos todos los artículos producidos en una fila y se escoge uno al azar. Cuál es la probabilidad de que éste artículo sea defectuoso?

Solución: $P(A) = ?$

Sean los siguientes sucesos:

A: {el Artículo es defectuoso}
B_1: {el artículo proviene de la fábrica 1}
B_2: {el artículo proviene de la fábrica 2}
B_3: {el artículo proviene de la fábrica 3}

$$P(A) = P(A/B_1) * P(B_1) + P(A/B_2) * P(B_2) + P(A/B_3) * P(B_3)$$
$$= 2/100 * 1/2 + 2/100 * 1/4 + 4/100 * 1/4$$
$$= 0.025$$

Supóngase que del depósito se escoge un artículo y se encuentra que es defectuoso. Cuál es la probabilidad de que se produjese en la primera fábrica?

Solución: $P(B_1/A) = ?$

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1) * P(B_1)}{P(A/B_1) * P(B_1) + P(A/B_2) * P(B_2) + P(A/B_3) * P(B_3)}$$

$$= \frac{(0.02) * (1/2)}{(0.02) * (1/2) + (0.02) * (1/4) + (0.04) * (1/4)}$$

$$= 0.4$$

De la misma manera, puede hallarse la probabilidad de las fábricas 2 y 3 así:

$P(B_2/A) = 0.005 / 0.025 = 0.2$

$P(B_3/A) = 0.01 / 0.025 = 0.4$

Y verificando, la suma de estas tres probabilidades debe resultar en 1, así: $0.4 + 0.2 + 0.4 = 1.0$

Para mayor facilidad de cálculo y claridad en sus significados, los anteriores resultados pueden presentarse en una tabla como la siguiente:

i	$P(B_i)$	$P(A/B_i)$	$P(B_i)*P(A/B_i)$	$P(B_i/A)$
1	1/2	2/100	1/100	2/5
2	1/4	2/100	1/200	1/5
3	1/4	4/100	1/100	2/5
			P(A)=5/200=0.025	5/5=1

2.10 CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO.

Mendenhall/Reinmuth hacen un esbozo de los siguientes dos procedimientos para el cálculo de la probabilidad de un evento. En lo que resta de este capítulo se hacen unas pequeñas adaptaciones al texto original de los autores.

2.10.1 PROCEDIMIENTO POR PUNTOS MUESTRALES

1. Defina el experimento.

2. Haga una lista de los eventos simples asociados al experimento y verifique que ya no puedan descomponerse. Esto define el espacio muestral S.

3. Asigne probabilidades (racionalmente) a los puntos muestrales de S, verificando que $\sum_{S} P(Ei) = 1$.

4. Defina con precisión el evento de interés A, como una colección especifica de puntos muestrales. (Un punto muestral está en A, si A ocurre cuando ese punto muestral ocurra. Verifique para cada punto muestral de S si está o no está en A).

5. Encuentre P(A) simplemente sumando las probabilidades de los puntos muestrales de A.

2.10.2 PROCEDIMIENTO DE COMPOSICION.

1. Defina el experimento.

2. Visualice la naturaleza de los puntos muestrales de manera clara. Identifique algunos puntos muestrales para cerciorarse.

3. Escriba una ecuación que exprese el evento de interés A, como una composición de dos o más eventos usando alguna o las dos formas de la composicion (uniones e intersecciones). Note que ésto es una igualdad entre conjuntos de puntos muestrales, así que verifique que el evento así definido, en efecto representa a los mismos puntos muestrales que A representa.

4. Aplique las leyes probabilísticas Aditiva y Multiplicativa a la ecuación obtenida en el paso 3 y encuentre así P(A).

La Evaluacion de la probabilidad de un evento por el procedimiento 2.10.1 -por puntos muestrales- es sistemática y proporciona la solución correcta si se aplica correctamente. Las fuentes más comunes de errores son: no definir claramente el experimento, no especificar correctamente los eventos simples y no asignar probabilidades válidas a los puntos muestrales.

Este modelo probabilístico para la poblacion tiene cierta elegancia y es de gran utilidad. Proporciona un método directo, simple y lógico de calcular la probabilidad de un evento. Su desventaja aparece si el número de puntos muestrales es muy grande, ya que el procedimiento se vuelve tedioso e inmanejable; la excepción a lo anterior se presenta cuando los puntos muestrales son equiprobables, en este caso, las sumas se hallan por conteo, basta listarlos y verificar que ninguno se haya omitido.

El procedimiento 2.10.2 -Composición de eventos- usualmente es más poderoso. No requiere del listado físico de todos los puntos muestrales de S y por ello puede usarse cuando este número de puntos muestrales es muy grande. Este procedimiento usa las relaciones entre eventos, y dos leyes de probabilidad que pueden simplemente darse y aceptarse, ya que, son consistentes con el modelo hasta ahora descrito y con la realidad. El método no es tan directo y requiere de experiencia. Requiere expresar el evento como unión o intersección (o una combinación) de dos o más eventos cuyas probabilidades sean, desde luego, más fáciles de calcular. Esto puede hacerse de muchas maneras, pero puede requerirse de bastante creatividad para expresar los eventos compuestos de la manera que resulte más sencilla.

El paso 3 es el más difícil, se pueden encontrar muchas combinaciones que sean equivalentes a A. El "truco" es tomar aquella composición en la cual todas las probabilidades que se requieran en el paso 4 sean conocidas (tener en la mente éstas).

La utilidad de las relaciones entre eventos se torna evidente: Para la Unión de eventos mutuamente excluyentes, no se requieren las probabilidades de las intersecciones. Si los eventos son independientes no se requieren las probabilidades condicionales para obtener las intersecciones. (6)

6 Mendenhall/Reinmuth, Estadística para administración y economía, pp. 71, 83

3. VARIABLE ALEATORIA Y DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES

3.1 INTRODUCCION

Una población estadística, es la totalidad de las observaciones o datos que pueden reunirse u observarse, de acuerdo con la formulación o definición de un problema en términos estadísticos, y que, mediante su análisis, llevarían al logro de los objetivos planteados en la investigación. La muestra está conformada por las observaciones realmente reunidas u observadas.

Una población estadística puede presuponer la existencia de un experimento aleatorio, por lo tanto puede considerarse que "es engendrada" o generada al repetir el experimento aleatorio un número grande de veces y considerando el conjunto de mediciones asociadas a las características de interés. El experimento aleatorio necesita la existencia de un mecanismo por medio del cual el "azar" se manifieste.

La característica de interés en dicho experimento es llamada "variable aleatoria": variable porque puede asumir distintos valores; aleatoria porque estos valores ocurren según el azar estadístico.

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de efectuar el experimento y puede ser cualitativo o cuantitativo, lo mismo que la variable aleatoria. El espacio muestral debe representar eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

En los casos de variable aleatoria cualitativa, cuando sus diversas modalidades son categorías no medibles, se habla de estadística de atributos y se supone que al efectuar el experimento aleatorio, todos los posibles resultados pueden ser identificados. Como algunos ejemplos de variable aleatoria cualitativa, pueden mencionarse entre otros: obtener caras o sellos en el lanzamiento de una moneda normal; observar hombre o mujer en la detrminación del sexo de una persona, o anotar su profesión o estado civil; detectar artículos buenos, regulares o malos, en la producción de artículos en un cierto proceso; o degustar café suave, amargo o muy amargo, en la determinación de la calidad de éste.

Las variables cualitativas se toman generalmente en las escalas nominal u ordinal, en las cuales los números tienen significado sólo si se conocen las reglas de equivalencia entre éstos y los atributos de interés. Datos confidenciales pueden codificarse por una así tan extraña regla y sólo si esta regla o fórmula se conoce, el número tabulado tiene algún sentido.

El espacio muestral puede ser numérico, si sus diversas modalidades son medibles o numerables, es decir, si a cada una de las modalidades se les asigna un número, y en estos casos se habla de variable aleatoria cuantitativa la cual puede ser discreta o continua.

Una variable aleatoria es DISCRETA cuando sus posibles resultados son CONTABLES, o sea que pueden contarse (ponerse en relación uno a uno con los números naturales), por ejemplo: el número de artículos defectuosos en un lote de producción; el número de pólizas vendidas en una semana por un agente de seguros; el número de robos ocurridos en un almacén en un determinado período de tiempo; el número de autos vendidos en un mes; el número de accidentes en una planta durante cierta semana; el número de clientes esperando servicio en una caja resgistradora; el número de tubos de televisión producidos en una hora.

Una variable aleatoria es CONTINUA cuando es el resultado de MEDIR, lo cual corresponde a asignar un número real (racional) a una magintud continua como tiempo, peso, longitud, etc. Por ejemplo: el tiempo requerido por un empleado para terminar una tarea determinada cuando es observado en un estudio de "tiempos y movimientos"; la cantidad de gasolina consumida por un vehículo en una prueba de 100 km.; la duración de una bombilla eléctrica en un experimento; el punto de fatiga, en kg. por cm^2., de un cable de acero de dos centímetros de diámetro; la demanda diaria de energía eléctrica en una determinada ciudad; la distancia entre el centro de abastecimiento y un posible consumidor. En general todas las magnitudes relacionadas con el espacio tales como longitud, superficie o volúmen; con el tiempo como edad y duración de vida; o con las combinaciones de estos elementos como velocidad, consumo de fluído eléctrico, densidad, etc.

Una variable aleatoria es discreta cuando pueden ocurrir sólamente valores separados en una escala. Es continua cuando puede tomar cualquier valor en un intervalo, teóricamente puede asumir un número infinito de valores dentro de un rango específico y supone un instrumento de medición exacto. La altura de un individuo con la precisión de dm., cm., mm., es concebible teóricamente, pero una medida continua es imposible de obtener en la práctica, debido a las imprecisiones en los instrumentos de medición. Para simplificar los cálculos, en algunos experimentos aleatorios se trabajan variables aleatorias continuas como discretas, por ejemplo la edad en años cumplidos, la altura en cm., etc.

Una distribución de probabilidades es un modelo matemático. Es una distribución teórica referida a una variable aleatoria. Incluye todos los valores posibles que puede tomar dicha variable (se supone que es posible conocerlos todos), junto con sus respectivas probabilidades; por lo tanto se refiere a toda la población. Se interesa no sólo por la probabilidad de un

suceso o evento particular sino por la distribución de las probabilidades en el espectro total de los posibles resultados del experimento aleatorio. Puede no referirse a una población real sino a un modelo probabilístico que represente una población ideal.

La distribución de probabilidades puede analizarse mediante medidas descriptivas de sus propiedades llamdas parámetros de la distribución o de la población.

Una distribución de frecuencias es una distribución empírica, generada en el "mundo real": se refiere a datos reales obtenidos mediante un censo o un muestreo y es elaborada según las técnicas proporcionadas por la Estadística Descriptiva. Describe un conjunto de valores asumidos por una variable estadística que son medidos u observados. La distribucion de frecuencias es uno de los métodos que se puede emplear para estimar o inferir una distribución de probabilidades.

3.2 DEFINICION DE VARIABLE ALEATORIA

Dado un experimento aleatorio ϵ, con un espacio muestral asociado S, una variable aleatoria X es una función que asigna un número (real), x_i a cada suceso, s_i.

Gráficamente se tiene:

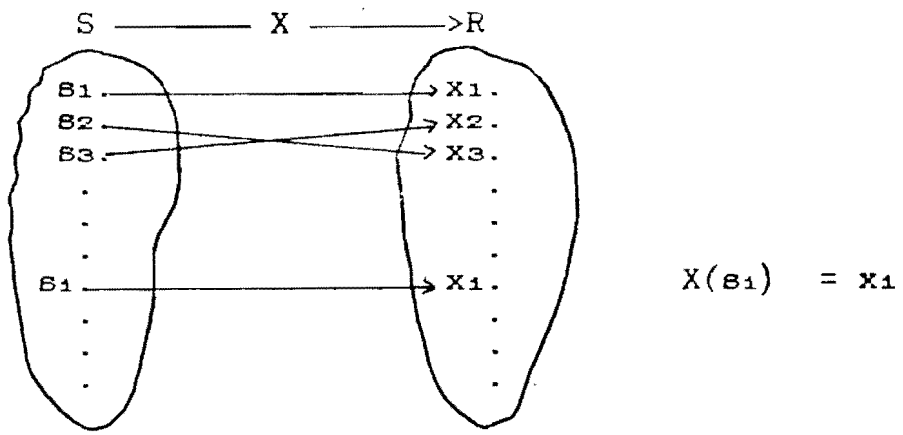


Figura 5. La variable aleatoria como una función

Una variable aleatoria es una FUNCION de S en R, esto es, es un mecanismo bién especificado para asignar un número a todos y cada uno de los resultados o eventos elementales del espacio muestral S; por ejemplo si el interés está centrado en el número de caras obtenidas en el lanzamiento de una moneda normal, la

variable aleatoria puede tomar los valores x = 1 o x = 0, al obtener cara o sello respectivamente.

Para establecer una función bién definida, deben satisfacerse adecuadamente las siguientes condiciones:

1. A todos los resultados del espacio muestral S (Dominio de la función) debe ser posible asignarles un valor real, xi; o sea, todos los elementos del dominio deben tener imagen.

2. A ningún resultado del espacio muestral, S, se le puede asignar más de un valor de X, esto es, ningún elemento del dominio puede tener más de una imagen; aunque un valor de X puede representar más de uno de los posibles resultados de S.

Cualquier valor de una variable aleatoria es un suceso o evento, ya que dicho valor expresa un resultado del experimento aleatorio y siempre hay algún evento elemental, o conjunto de éstos, al que se le puede asignar este valor.

Al resolver problemas, en la práctica es necesario definir claramente:

1) Qué valores puede tomar la variable aleatoria X.

2) La regla que indica para cada suceso simple si, el correspondiente valor xi.

Si el espacio muestral consta de infinitos puntos muestrales o eventos simples, es imposible listarlos o enumerarlos todos. En la práctica, si el espacio muestral es finito pero grande puede ser dificil y/o muy tedioso construir toda la lista; esta lista podría ser analizada conceptualmente, descomponiéndose el espacio muestral en conjuntos mutuamente excluyentes y a estos conjuntos asociarles valores numéricos, ya que los números son más adaptables a descripción y análisis matemático.

A veces puede ocurrir que los resultados a observar sean, directamente, valores numéricos tales como la cotización al final del día de una acción industrial, el número de defectos en determinado artículo de manufactura, la calificación promedio de un estudiante, o la anotación de edades, entre otros; en estos casos el espacio muestral original S es numérico, la variable aleatoria es cuantitativa, y ésta sería ya la variable aleatoria X de interés; la función asociada sería la función idéntica, la cual transforma cada valor del espacio muestral original, S en el mismo valor numérico, X(s).

Esta técnica de la variable aleatoria permite trasladar la solución de un problema en el mundo real, que es mas difícil usando el espacio muestral original S, a otro equivalente en un mundo teórico llamado "modelo matemático", usando la variable aleatoria X. Esto consiste en reemplazar la población real por un modelo probabilístico, el cual representa una población

ideal.

Generalmente, para el trabajo estadístico posterior, se centra la atención en los valores de la variable aleatoria y no se hace referencia a la "variable independiente", que representa los resultados del espacio muestral original S, a menos que los resultados sean, por casualidad, los valores de la variable aleatoria misma.

3.3 VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y FUNCION DE PROBABILIDAD

Si los valores posibles de la variable aleatoria X son finitos o infinito numerables, el espacio muestral numérico, X(s), consta de números x_1, x_2,...x_n...; a cada uno de estos números se le asocia como probabilidad de x_i, un número $p(x_i) = P(X = x_i)$.

LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD PUNTUAL, o simplemente la FUNCIÓN DE PROBABILIDAD O FUNCIÓN DE CUANTÍA, queda conformada por todas las parejas (xi, p(xi)), o sea todos y cada uno de los valores que puede tomar la variable aleatoria X con su respectiva probabilidad.

Para que la función de probabilidad de una variable aleatoria X quede bién definida, los números p(xi) deben satisfaccer los axiomas de la probabilidad, los cuales son:

1. $0 \leq p(xi) \leq 1$ para todo xi.
2. $\Sigma\ p(xi) = 1$ para todo xi.

Esta función de probabilidad puede representarse de varias maneras, así:

- Por una tabla o cuadro: una lista de todos los valores que puede tomar la variable aleatoria con sus respectivas probabilidades.

- Por una gráfica o diagrama: En este caso, el eje de las abcisas contiene los diferentes valores de la variable aleatoria X y el eje de las ordenadas, sus respectivas probabilidades, p(xi). Esta gráfica puede tomar la forma de un diagrama de puntos, un diagrama de líneas o un diagrama de barras según se muestra en el ejemplo 1. En el diagrama de barras, para una variable aleatoria discreta, el ancho de las barras no tiene significado, sólo sirve para ayudar a visualizar la distribución

- A veces es fácil hallar la ley general de composición para expresar la función de probabilidad mediante una ecuación funcional, la cual muestra la relación entre cada resultado y su probabilidad de aparición asociada. Puede ser más conveniente y de mayor interés analizar e investigar esta relación, antes que

probabilidades.

Cuando los resultados de interés son numéricos, como en el caso del número de caras obtenidas en el lanzamiento de monedas, se puede utilizar el espacio muestral original S como una ayuda para obtener los valores de la variable aleatoria X y para calcular sus respectivas probabilidades, aunque ésto no siempre es necesario.

Bajo este concepto de función de probabilidades yacen los fundamentos matemáticos de la Estadística.

3.4 FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULATIVA.

La función de distribución acumulativa (o simplemente función de distribución o función de rapartición) de la variable aleatoria X se define como:

$$F(x) = P(X \leq x),$$

donde x es uno cualquiera de los posibles valores que puede asumir la variable aleatoria de interés, X.

Si X es una variable aleatoria discreta, entonces se tiene:

$$F(x) = \Sigma\, p(xi) \quad \text{con i tales que } xi \leq x.$$

Esta función de distribución representa la probabilidad asociada, acumulada hasta cualquier valor x de la variable aleatoria X, o sea la probabilidad de que la variable aleatoria tome todos los valores inferiores o iguales a x, o en otras palabras la probabilidad a la izquierda de x. (Gráficas de F(x) son mostradas en la figura 5. y en la sección 3.5)

OBSERVACIONES:

1. F(x) está definida para todos los números reales. Los valores de la variable aleatoria que no son posibles reciben una probabilidad cero (0), la cual puede irse acumulando sobre F(x). Así, p(xi) también puede considerarse definida para todos los números reales.

2. $0 \leq F(x) \leq 1$. F(x) es una probabilidad (acumulada) y por la definición de probabilidad debe permanecer en el intervalo [0,1].

3. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$. De esta forma puede hallarse la probabilidad a la derecha de x (sin incluir el valor x). El signo "=" podría pasarse al otro lado de la ecuación, la cual quedaría así: $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$. Esto puede hacerse, recordando que la suma de todas las probabilidades debe ser

ser igual a 1, y en tal caso se tiene:

$P(X \leq x) + P(X > x) = 1$, o, $P(X < x) + P(X \geq x) = 1$.

4. $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$. De esta manera podría hallarse la probabilidad para un intervalo (a,b]. Gráficamente, puede observarse:

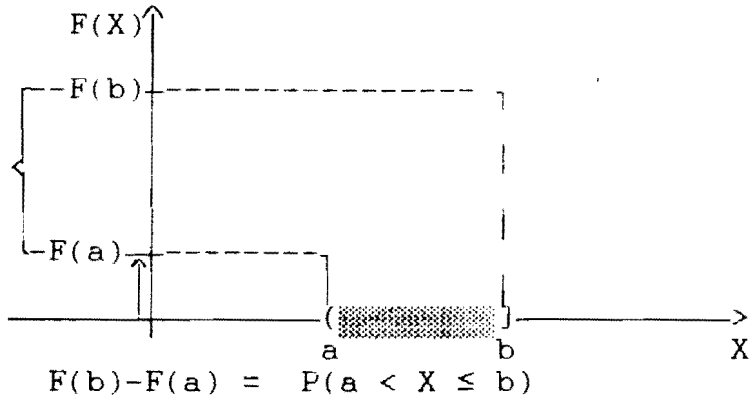


Figura 6. Cálculo de la probabilidad para un intervalo, usando la Función de distribución acumulativa.

3.5 EJEMPLOS DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Ejemplo 3.1 Sea la variable aleatoria X: el número de caras obtenidas en el lanzamiento de 2 monedas normales juntas. Hallar:

a. p(xi): función de probabilidad puntual y su gráfica.
b. F(xi): función de distribución (acumulativa) y su gráfica.
c. P(x > 2).
d. P(X ≥ 2).
e. P(X ≤ 1).

Solución:

a) y b)

xi	p(xi)	F(xi)
0	1/4	1/4
1	1/2	3/4
2	1/4	4/4 = 1

c) $P(X > 2) = 0$
$P(X \geq 2) = P(X = 2) = 1/4$
$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$
$= 1/4 + 1/2 = 3/4,$

o también $P(X \leq 1) = F(1) = 3/4$

Ecuaciones: $p(x) = CF/CP = \binom{2}{x} / 2^2 = \binom{2}{x}/4$ con $x = 0, 1, 2.$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{x} \binom{2}{x} / 4 \text{ con } x = 0, 1, 2.$$

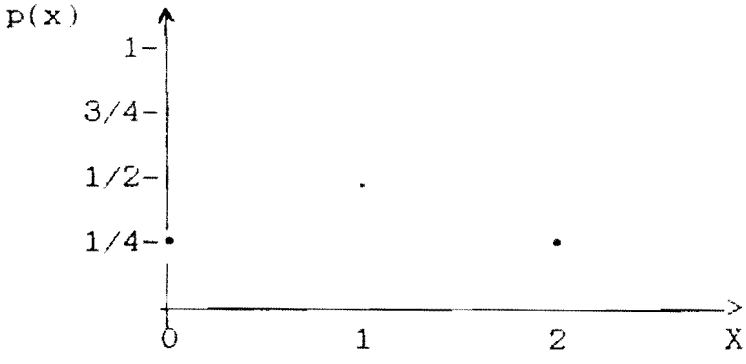


Figura 7. Diagrama de puntos (Ejmemplo 3.1).

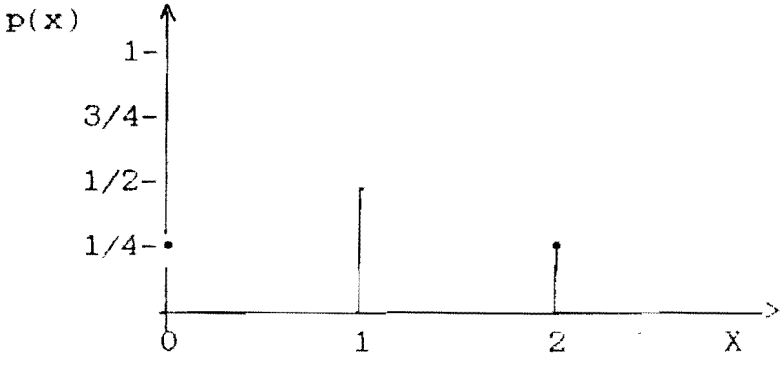


Figura 8. Diagrama de líneas (Ejmemplo 3.1).

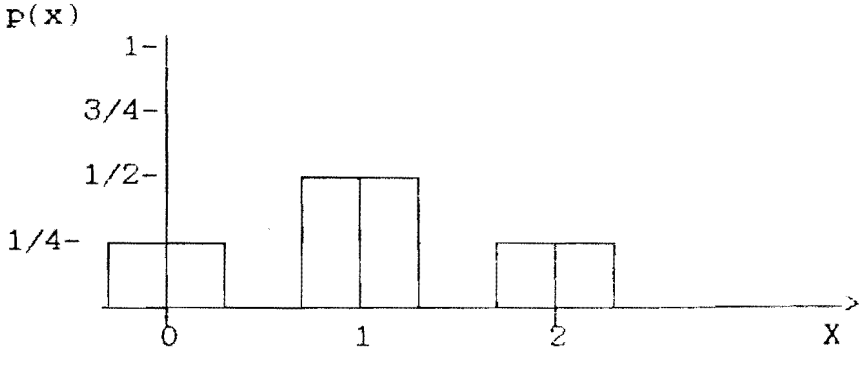


Figura 9. Diagrama de barras (Ejmemplo 3.1)

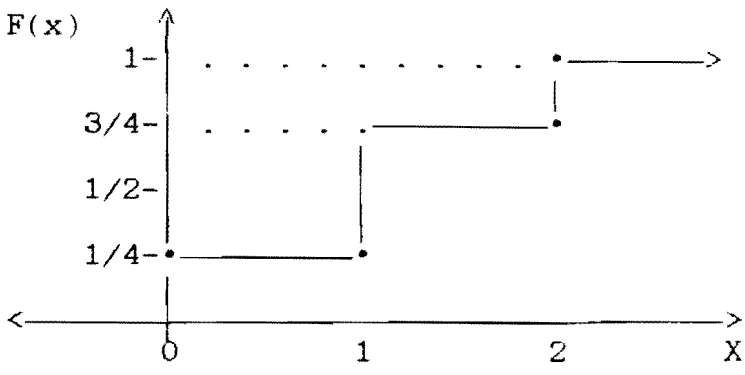


Figura 10. Función de distribución de probabilidades (Ejem. 3.1).

Ejemplo 3.2 Lo mismo que en 1. en el lanzamiento de cuatro monedas normales juntas.

Solución:

a) y b)

xi	p(xi)	F(xi)
0	1/16	1/16
1	4/16	5/16
2	6/16	11/16
3	4/16	15/16
4	1/16	16/16 = 1

c) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 4/16 + 1/16 = 5/16$

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
$= 6/16 + 4/16 + 1/16 = 11/16$
o, $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$
$= 1 - F(1) = 1 - 5/16 = 11/16$

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$
$= 1/16 + 5/16 = 5/16,$
o también $P(X \leq 1) = F(1) = 5/16$

Ecuaciones: $p(x) = CF/CP = \binom{4}{x} / 42 = \binom{4}{x}/16$ con $x = 0, 1, 2, 3, 4.$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{x} \binom{4}{x}/16 \quad \text{con } x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

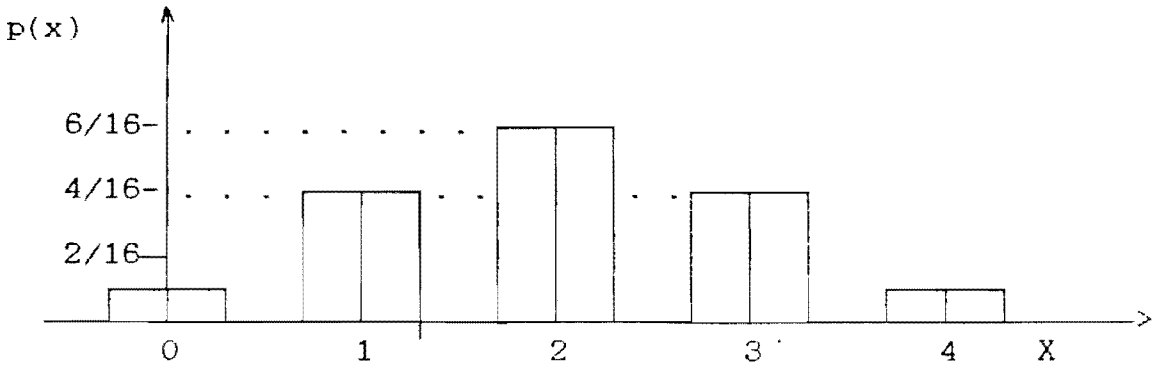


Figura 11. Diagrama de barras (Ejmemplo 3.2)

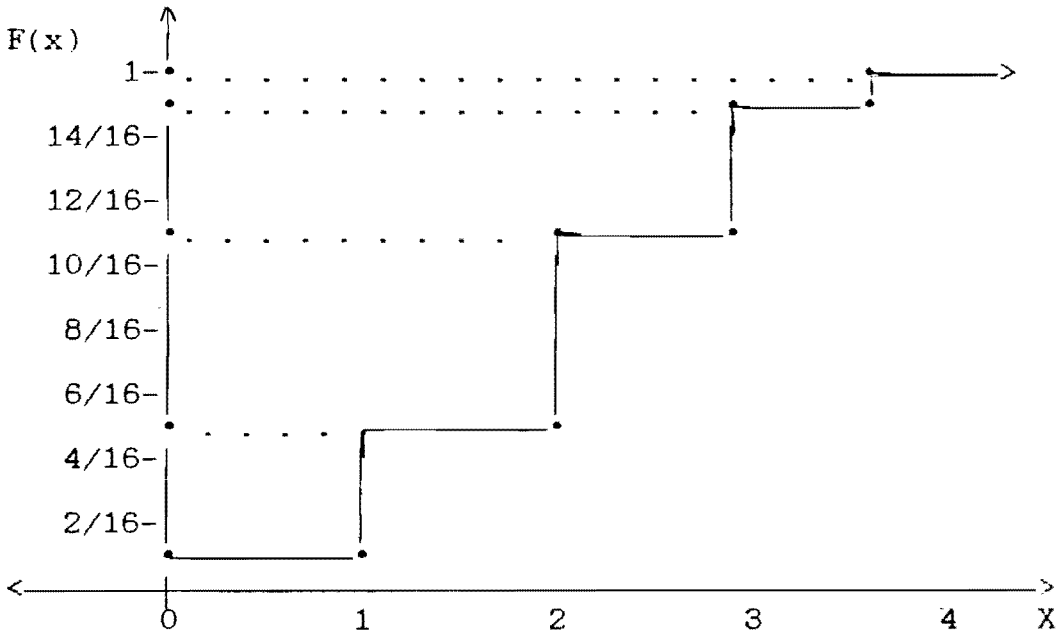


Figura 12. Función de distribución de probabilidades (Ejem. 3.2)

Ejemplo 3.3 De una baraja de 40 cartas, se sacan dos al azar; definimos como xi el número de ases que se obtengan, y con pi la probabilidad respectiva.
Hallar p(xi) y F(xi). Se deja como ejercicio la realización de las respectivas gráficas.

Solución:

xi	p(xi)	F(xi)
0	21/26	21/26
1	12/65	129/30
2	1/130	130/130 = 1

$$p(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{36}{2-x}}{\binom{40}{2}} \quad x = 0,1,2. \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{x} \frac{\binom{4}{x}\binom{36}{2-x}}{\binom{40}{2}} \quad x = 0,\ 1,\ 2.$$

Ejemplo 3.4 Encontrar la función de probabilidades de la variable aleatoria X: el número de veces que se arroja un dado legal hasta que aparece el 6 (incluyendo la prueba en que aparece 6).

Solución:

x	p(x)
1	1/6
2	5/6*1/6
3	5/6*5/6*1/6
4	5/6*5/6*5/6*1/6
5	5/6*5/6*5/6*5/6*1/6
6	5/6*5/6*5/6*5/6*5/6*1/6
.	
.	
.	
x	$(5/6)^{(x-1)}*(1/6)$.

Ejemplo 3.5 (Se deja como ejercicio al lector).
Se arroja una moneda legal y se representa con X el número de pruebas realizadas hasta que aparece por primera vez una cara (incluyendo el ensayo en que apareció la cara). Hallar p(x) y su gráfica.

Ejemplo 3.6 Establecer la ley de probabilidades de la variable X, definida por la suma de puntos, obtenida al tirar dos dados homogéneos simetricos.

Solución:

xi	p(xi)	F(xi)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36 = 1

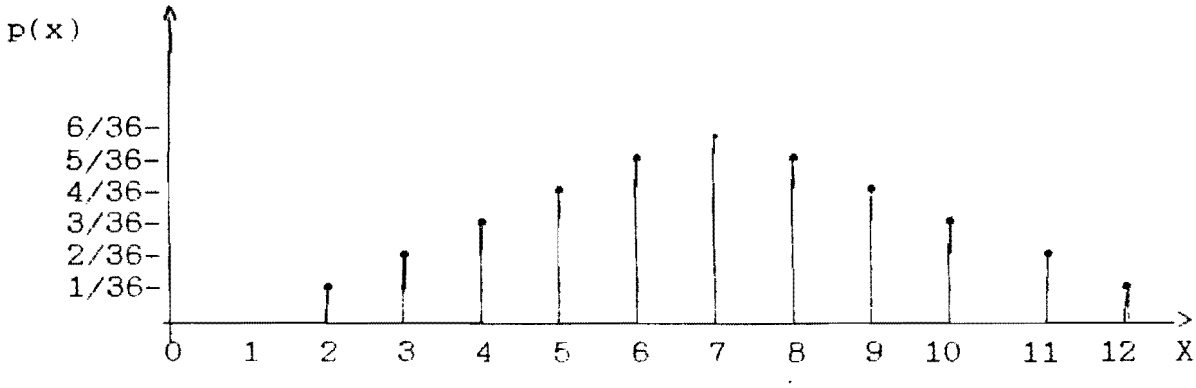


Figura 13. Diagrama de lineas (Ejmemplo 3.6).

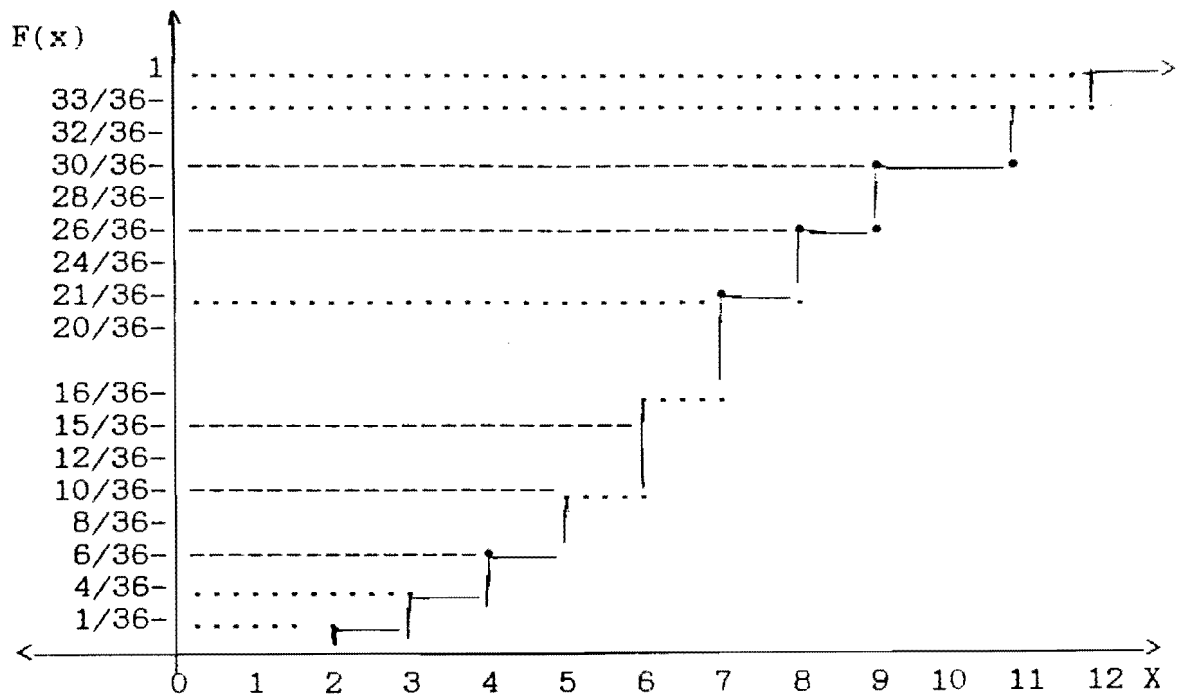


Figura 14. Función de distribución de probabilidades (Ejem. 3.6)

$p(x) = (1/36) * (6 - |x - 7|)$

Ejemplo 3.7 Se tiran dos dados, queda definida la variable aleatoria X como el mayor de los números que aparece en un dado. Definir la ley de probabilidades: p(x), F(x) y sus gráficas.

Solución:

xi	p(xi)	F(xi)
1	1/36	1/36
2	3/36	4/36
3	5/36	9/36
4	7/36	16/36
5	9/36	25/36
6	11/36	36/36

$p(x) = (1/36) * (2x - 1)$

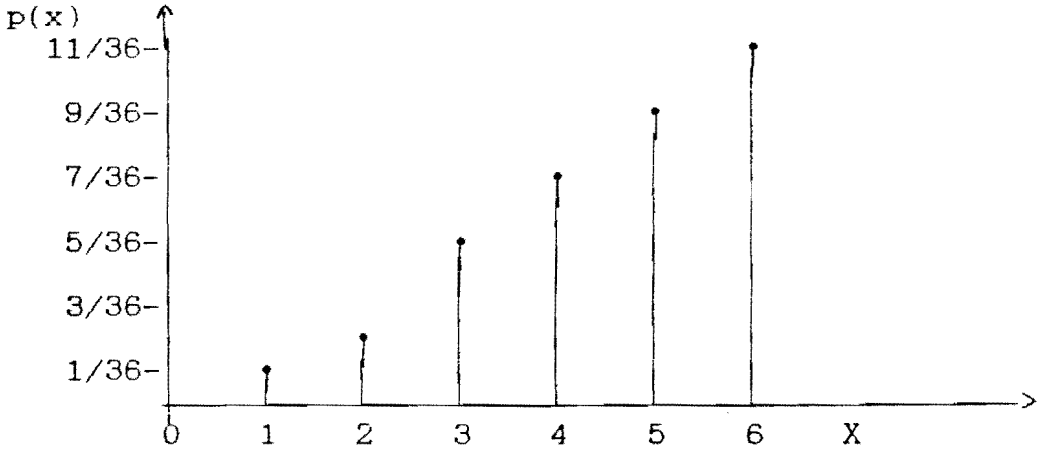


Figura 15. Diagrama de lineas (Ejmemplo 3.7).

Ejemplo 3.8 Sea X el número de químicos en un comité de 3 personas seleccionadas al azar entre un grupo de 4 químicos y 3 biólogos. Hallar p(xi), F(x) y sus gráficas.

Solución:

Sea X: El número de químicos en el comité.

$$p(x)= \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}} = 0,1,2,3. \text{ ,o sea } p(x)= \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{35}$$

, ya que, el denominador puede desarrollarse como:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{4! * 5*6*7}{4!*3*2} = \frac{35}{1} = 35$$

$$p(0)= \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3-0}}{35} = 1/35 \qquad p(1)= \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{3-1}}{35} = 12/35$$

$$p(2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{3-2}}{35}=18/35 \qquad p(3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{3-3}}{35}=4/35$$

3.6 VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

3.6.1 DEFINICION.

Si la variable aleatoria puede tomar valores infinto no numerables dentro de un intervalo finito, no puede asignarse probabilidades a un punto, ya que los casos posibles serian infinitos, el cociente casos favorables sobre casos posibles tenderia a cero (0) y se tendria $p(xi) = P(X = xi) = 0$ para todo i; asi todos los puntos dentro el intervalo tendrian probabilidad cero (0). La asignación de probabilidades de esta manera no tendría mucho sentido práctico y por lo tanto se pasa a la siguiente definición.

Se dice que X es una variablea aleatoria continua si existe una función f, llamada FUNCIóN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD (f.d.p.) de x que satisface las siguientes condiciones:

1. $f(x) \geq 0$ para todo x.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Esta función f no mide la probabilidad, sino la DENSIDAD O CONCENTRACIóN de probabilidad dentro de un intervalo.

La probabilidad para un intervalo queda definida como sigue:

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ para cualesquiera a y b reales.

Esta integral definida entre a y b repreaenta el área bajo la curva de densidad f(x), entre los límites del intervalo [a,b] y sobre el eje X. La probabilidad está representada por el área.

La función de distribución (acumulativa) queda definida como sigue:

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds.$

Donde s: es una variable muda que reemplaza a x, el límite superior de integración, para evitar ambigüedades.

3.6.2 OBSERVACIONES.

La gráfica de F(x) es "una curva que, en general, tiene la forma de una S deformada o 'curva ojival', llamada así por su semejanza con la curva arquitectónica de este nombre." (7)

Conocer la función f(x), o mejor F(x), significa describir totalmente la variable aleatoria, es decir su distribución. La curva de densidad de probabilidad f(x), puede interprestarse como la velocidad de cambio de F(x), la función de distribución acumulativa, F(x). f(x) puede interpretarse como la derivada de F(x).

"Cualquier funcion f(x) que cumple las propiedades.... puede utilizarse como una función de densidad y las áreas encerradas por f(x) dentro de los intervalos pueden considerarse como probabilidades. Es fácil construir funciones de densidad. Cualquier función f(x) no negativa puede emplearse si el área encerrada por la curva es finita. Si el área es c en lugar de 1, construimos una nueva f(x) dividiendo la antigua por c. Construir funciones de probabilidad que dan probabilidades reales para problemas reales no es tan fácil y es una tarea que normalmente requiere un esfuerzo conjunto por parte del estadístico matemático y el científico experimental. El cálculo del área encerrada por las funciones de densidad más importantes es un problema difícil. Afortunadamente, se dispone de tablas que hacen el cálculo fácil en los casos que estudiamos" (8).

3.6.3 EJEMPLOS DE VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

Ejemplo 3.9 Siendo X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidades definida como sigue:

$$f(x) = 1/(b-a), \text{ para } a < x < b.$$
$$= 0, \quad \text{en otro caso.}$$

La función de distribución acumulativa queda definida asi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{a}^{x} 1 / (b-a)\, ds = 1/(b-a)[s]_{a}^{x}$$

$$= x/(b-a)-a/(b-a) = x-a/(b-a). \quad \text{Entonces } F(x) \text{ queda:}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leq a. \\ (x-a)/(b-a), & \text{para } a < x < b. \\ 1, & \text{para } x \geq b. \end{cases}$$

Por lo tanto si x = a, entonces F(x) = 0.
si x = b, entonces F(x) = 1.

---

7 Toranzos, Estadística, p. 29.
8 Guenther, Introducción a la inferencia estadística, p.40,41

En este caso se dice que la variable aleatoria X está distribuida uniformemente, o que tiene una distribución rectangular, en el intervalo $a < x < b$.

Ejemplo 3.10 Sea la variable aleatoria X con f.d.p. dada por:

$$f(x) = x^2/3, \text{ para } -1 < x < 2.$$
$$= 0, \quad \text{en otro caso.}$$

a. Verificar que f(x) es una f.d.p. legítima.
b. Hallar $P(0 < x \leq 1)$, a partir de la definición.
c. Hallar F(x).
d. Hallar $P(0 < x \leq 1)$, utilizando F(X)

Solución:

a. i). $x^2/3 \geq 0$, para todo x en el intervalo de definición.

ii). $\int_{-1}^{2} x^2/3 \, dx = [x^3/9]_{-1}^{2} = 8/9 + 1/9 = 1.$

b. $P(0 < x \leq 1) = \int_{0}^{1} x^2/3 \, dx = [x^3/9]_{0}^{1} = 1/9.$

c. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = [t^3/9]_{-1}^{x} = (x^3+1)/9.$

d. $P(0 < x \leq 1) = F(1) - F(0) = 2/9 - 1/9 = 1/9$

Ejemplo 3.11 Una variable continua X que toma sólamente valores entre 0 y 4 tiene una f.d.p. dada por $f(x) = 1/2-ax$ donde a es una constante. Hallar:

a. el valor de la costante a.
b. La probabilidad, $P(1 < x < 2)$.

Solución:

a. Para que f(x) sea una f.d.p. legítima, debe acumular una probabilidad de 1 en todo el intervalo de definición, ésto es:

$\int_{0}^{4} (1/2 - ax)dx = 1$. Al desarrollar esta integral, se obtiene:

$\int_{0}^{4} (1/2)dx + \int_{0}^{4} (-ax)dx = 1$, luego, $[x/2]_{0}^{4} \; [-ax^2/2]_{0}^{4} = 1$, y

$[2-0] - a[8-0] = 1, \quad 2 - 8a = 1, \quad 2-1 = 8a, \quad 1 = 8a, \quad a = 1/8.$

Ejemplo 3.12 La variable aleatoria continua X tiene la f.d.p. $f(X) = 3x2$ para $-1 \leq x \leq 0$. Si b es un número que satisface $-1 < b < 0$, calcular $P[(x>b)/(x<b/2)]$.

Solución:

$$P[(x>b)/(x<b/2)] = \frac{P(b<x<b/2)}{P(x<b/2)} = \frac{\int_b^{b/2} 3x^2dx}{\int_{-1}^{b/2} 3x^2dx} = \frac{[3x^3/3]_b^{b/2}}{[3x^3/3]_{-1}^{b/2}}$$

$$= \frac{b^3/8 - b^3}{b^3/8 - (-1)} = \frac{(b^3-8b^3)/8}{(b^3+8)/8} = \frac{-7b^3}{b^3+8}$$

3.7 ESPERANZA MATEMATICA O VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA.

3.7.1 DEFINICION DE LA ESPERANZA MATEMATICA E(X).

La Esperanza Matemática o Valor Esperado de una variable aleatoria X se denota por E(X), o simplemente μ, o μx para especificar que se trata de la variable aleatoria X, y se define como:

a) Si X es una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ y si $p(x_1) = P(X = x_1)$, con i = 1, 2, 3, ... n, ... Entonces:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i).$$

b) Si X es una variable aleatoria continua con f.d.p. f(x), entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Puede suceder que esta integral, impropia, no converja; por lo tanto se dice que E(X) existe sí y solo sí $\int |x| f(x)dx$ es finita.

3.7.2 SIGNIFICADO DE LA ESPERANZA MATEMATICA E(X).

La Esperanza Matemática es un parámetro de la distribución de probabilidad teórica o de la población, puesto que, la variable aleatoria constituye toda la población. No implica que este valor esperado aparezca con frecuencia o que tenga una

elevada probabilidad. En muchos casos ni siquiera es posible que la variable aleatoria tome un valor igual a su valor esperado. (Ver ejemplo 1).

La Esperanza Matemática puede interpretarse como un promedio a largo plazo si el experimento aleatorio se realiza un numero suficientemene grande de veces. Es un promedio probabilístico: el promedio de todos los valores que puede asumir la variable aleatoria ponderados por sus respectivas probabilidades.

Dados los números x_1', x_2', ... x_k' donde x_i ocurre n_i veces, con $\Sigma n_i = n$ para todo i. Tomando $f_i = n_i/n$, $\Sigma f_i = 1$, el promedio ponderado de los numeros x1',...xk' se define como $(1/n) * \Sigma n_i x_i = \Sigma f_i x_i$, para i = 1,2,...k.

Así, la media aritmética ponderada, $\bar{X}$ se transforma en la Esperanza Matemática, μ, cuando la frecuencia relativa f_i se reemplaza por la probabilidad $p(x_i)$.

En este sentido, la Esperanza Matemática es una medida de tendencia central: Representa el centro de masa de la distribución y viene expresada en las mismas unidades de la variable aleatoria X.

"Si X toma sólo un número finito de valores, la expresión anterior llega a ser $E(X) = \Sigma_{i=1}^{n} p(x_i)x_i$. Esta se puede considerar como un 'promedio ponderado' de los valores posibles x_1, ... x_n. Si todos los valores posibles son igualmente probables, $E(X) = (1/n)\Sigma_{i=1}^{n} x_i$, lo que representa el promedio aritmético ordinario de los n valores posibles." (9)

3.7.3 APLICACIONES DEL CONCEPTO DE ESPERANZA MATEMATICA.

Si p es la probabilidad de que una persona reciba una suma de dinero S, la esperanza matemática se define como E(X) = pS. Generalizando este resultado para varios sucesos quedaría $E(X) = \Sigma\, p_i S_i$. Para los i resultados adecuados.

La Esperanza Matemática representa el producto o ganancia potencial de un jugador consuetudinario o pérdida que teóricamente alcanzaría, apostando en las mismas condiciones, durante un período muy largo de las repeticiones del juego.

Algunas definiciones que muestran aplicaciones interesantes de la Esperanza Matemática, son dadas a continuación:

"Todo juego donde las ganacias esperadas sean cero es llamado juego normal. En un salón de juegos no podría operar un juego en el cual las ganancias esperadas fueran positivas ya que los

---

9. [illegible] cit. 122

jugadores se darían cuenta de ésto rápidamente, y con el tiempo quebraría la casa. En situaciones normales el salón operara juegos en los cuales las ganancias esperadas son ligeramente negativas para los apostadores, es decir, a largo plazo éstos pierden dinero. De esta manera el salón gana lo suficiente para cubrir gastos y obtener ganancias." (10)

"En un juego de azar, E(x) tiene un significado interesante: expresa el promedio de la suma que se espera ganar por cada jugada, siempre que se realice un gran número de jugadas. Entendemos por juego equitativo entre dos personas, aquel en que las esperenzas matemáticas de los dos contendientes sean iguales, lo cual significa que las posibles ganancias son, apriori, iguales para ambos. Si el juego no fuera equitativo, el jugador deberá pagar como derecho a participar un valor igual a su esperanza matemática; entonces, el juego se convierte en equitativo" (11)

"JUEGO DE SUMA CERO. Es el jugado por un número determinado de personas, en el cual el vencedor toma todas las apuestas realizadas por los perdedores, de tal modo que la suma algebráica de las ganancias en cualquier etapa es cero.

Se ha argumentado que muchos problemas de decisión podían ser vistos como juegos de suma cero entre dos personas." (12)

"RUINA DEL JUGADOR. Expresión dada a uno de los temas clásicos en la teoría de la probabilidad. Un juego de azar puede ser relacionado con una serie de pruebas de Bernoulli, en las cuales un jugador gana una cierta suma prefijada de dinero por cada "éxito" y pierde una segunda suma de dinero por cada "fracaso". El juego puede durar hasta que su capital inicial se agote y, por tanto, se arruine. Los problemas estadísticos que ello implica están relacionados con la probabilidad de ruina de un jugador, dadas las apuestas, capital inicial y oportunidades de éxito, y con temas tales como la distribución de la longitud del juego.

Existen muchas variaciones a este problema clásico, el cual está íntimamente asociado con los del recorrido aleatorio, en particular, del muestreo secuencial." (13)

"SOBRE LA TEORIA DE LA RUINA DE LOS JUGADORES.

La noción de esperanza matemática permite resolver fácilmente el clásico problema de la ruina de los jugadores.

Dos jugadores, A y B, cuyos capitales son, respectivamente, a y b. Qué probabilidad tiene A de arruinar a B; es decir, de ganarle todo su dinero, y reciprocamente?

---

10 Hadley, Probabilidad y estadística. Una introducción a la teoría de la decisión, p. 54.
11 Toranzos, op. cit. p.33
12 Kendall, Diccionario de Estadística, p. 207.
13 Kendall, Diccionario de Estadística, p. 319.

...NACIONAL DE COLEGIOS
DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS
Arquitectura y Ciencias Humanas

Suponemos un juego equitativo, en que las esperanzas matemáticas de ambos resultan iguales. Sea P la probabilidad que tiene A de arruinar a B, y Q = 1-P la de que B arruine a su adversario A.

La ganancia posible de A es b, con probabilidad P; luego, su esperanza matemática es

$$E(A) = b.P,$$

y análogamente $E(B) = a(1-P)$,

y por la equidad del juego, $b.P = a(1-P)$;

luego $P = a/(b+a)$.

y en consecuencia $Q = 1-P = b/(a+b)$.

Es decir, la probabilidad de que A arruine a B es directamente proporcional a su capital e inversamente proporcional a la suma de los capitales de ambos.

De lo dicho resulta que un jugador A, poseedor de un capital limitado a, y que persiste en jugar con juego equitativo contra una banca de capital prácticamente ilimitado, o contra un conjunto de adversarios sucesivos, que suman también capitales prácticamente ilimitados, tiene una probabilidad que se acerca a la certeza de arruinarse." (14)

"JUEGO EQUITATIVO. En la teoría de los juegos, un juego que consta de una sucesión de pruebas es considerado como un juego equitativo si el coste de cada prueba es igual al valor esperado de la ganancia de cada una de esas pruebas. Un juego equitativo en este sentido puede no ser justo en el caso de dos adversarios con recursos desiguales: es bien sabido que en un juego equitativo el jugador con mayor cantidad para apostar tiene una excelente oportunidad para arruinar a su oponente" (15).

"MARTINGALA. Originalmente, es un proceso conocido por los jugadores bajo el cual el perdedor en un juego equitativo doblaba sus apuestas en la siguiente jugada, y así sucesivamente en cada pérdida, con la paradoja de que a largo plazo aparecía como seguro ganador más tarde o más temprano, de tal modo que en algún momento tendría una ganancia neta.

Recientemente, al término le ha sido dada una significación precisa en la teoría de los procesos estocásticos." (16)

3.7.4 EJEMPLOS DE ESPERANZA MATEMATICA.

Ejemplo 3.13 (En los juegos de azar).

Un jugador tira un dado; la banca pagara tantos pesos como puntos obtenga el jugador. Cuánto debe pagar el jugador a la banca para que el juego resulte equitativo?

---

14 Toranzos, Estadistica, pag. 35.

15 Kendall, Diccionario de Estadistica, p. 206.

16 Ibid, p. 216

Ganancia	X	p(x)	xp(x)
	1	1/6	1/6
	2	1/6	2/6
	3	1/6	3/6
	4	1/6	4/6
	5	1/6	5/6
	6	1/6	6/6
			21/6 = 7/2 = 3.5

Este razonamiento puede generalizarse para todos los juegos de azar, tomando como xi los valores de las ganancias esperadas en cada uno de los posibles resultados: E(X) resulta ser una valuación de la posible ganancia: en otras palabras es lo que vale su derecho a participar en el juego.

Ejemplo 3.14 (En la lotería)

Un billete de lotería, que sortea con 25 millares tiene los siguientes premios: un premio de US $25.000.00, cinco premios de US $1000.00, 10 premios de US $250.00, 50 premios de US $100.00 y dos mil quinientos premios $5.00 (para la terminación). Cuál deberá ser el valor del billete?

Ganancia	X	p(x)	xp(x)
	25000	1/25000	25000/25000
	1000	5/25000	5000/25000
	250	10/25000	2500/25000
	100	50/25000	5000/25000
	5	2500/25000	12500/25000
			50000/25000 = 2

Estrictamente el valor debería ser $2.00. En la práctica el valor comercial es algo mayor; lo que excede es un recargo en favor del que emite los billetes.

Ejemplo 3.15 (En el juego del chance)

Por cada peso apostado para tres cifras paga $400.00

Ganancia	X	p(x)	xp(x)
	399	0.001	0.399
	-1	0.999	-0.999
			-0.600

Por cada peso apostado, el apostador pierde 60 centavos. Estos 60 centavos posiblemente son repartidos entre la Beneficencia, la casa de chance y el vendedor.

Ejemplo 3.16 (En los seguros).

La probabilidad de que una casa de cierto tipo sea destruida por incendio en un período de doce meses (cualquiera) es de 0.005. Una compañía de seguros ofrece en venta al dueño de esa casa una poliza de seguro contra incendio por el término de un año de US 20.000 con una prima de US150. Cual es la ganancia esperada de la compañía?

Ganancia	X	p(x)	xp(x)
	150	0.995	149.5
	-19850	0.005	-99.25
			50.00

Ejemplo 3.17 (En producción)

Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% son defectuosos y el 90% no lo son. Si se produce un artículo defectuoso, el fabricante pierde $ 1; mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de $ 5.

La utilidad neta por artículo será:

X	p(x)	xp(x)
-1	0.1	-0.1
5	0.9	4.5
		4.4

El productor espera ganar $4.40 por artículo a la larga, independientemente del número de artículos producidos.

3.7.5 EJERCICIOS.

Ejercicio 3.1 (Adaptado de Ya Lun Chou p. 142).

Un proceso es ajustado para llenar una libra de café instantánea en cada frasco. Debido a la variabilidad, el peso del café vertido en cada frasco varia realmente de 0.97 a 1.03 libras. Las frecuencias relativas de varios pesos sugieren que la curva de densidad para la variable W, peso, puede ser aproximada muy bien por un triángulo isóceles. Para simplificar los cálculos hagamos que W = 0 corresponda a una libra, el punto medio de la amplitud de W; que W = -3 corresponda al valor mínimo 0.97, de la amplitud de W; y que W = 3 corresponda al valor máximo, 1.03, de la amplitud de W. Es decir, la curva de

densidad de W sería ahora un triángulo isóceles con base de -3 a 3.

a). Hallar la altura del triangulo (h).
b). Hallar f(x), F(x) y sus gráficos.

Supongamos que un frasco es escogido al azar de la producción de un día y que se halla el peso del café instantáneo contenido en él. Hallar la probabilidad de que el peso neto del frasco:

c). Sea menor o igual a 0.99 libras.
d). Sea menor o igual a 1.015 libras.
e). Esté en el intervalo de 0.985 a 1.015 libras.
f). Esté fuera del intervalo $-1.5 < W < 1.5$ o fuera del intervalo de 0.985 a 1.105 libras.

Ejercicio 3.2 (Adaptado de Merrill pag. 151-154)

Una estación de servicio recibe gasolina semanalmente. Las estadísticas anteriores sugieren que la distribución de probabilidades de las ventas semanales X, medidas en miles de galones se aproxima mucho a un triangulo isóceles cuya base se extiende de mil a tresmil galones semanales, en tanto que el vértice se halla en los 2000 galones.

a). Hallar la altura del triángulo, h.
b). Hallar f(x) y su gráfica.
c). Hallar f(1.5) y f(2.8).
d). Hallar la probabilidad de que X sea menor que un número c para $1 < c < 2$.
e). Si c = 1.5, hallar la probabilidad anterior.
f). La probabilidad de que X se encuentre entre dos números dados c y d, donde $c < d$, $1 \leq c \leq 2$ y $1 \leq d \leq 2$.
g). si c = 1.5 y d = 1.8, cuál es la probabilidad anterior?
h). Hallar $P(1.2 < x < 1.6)$.
i). $P(x > 2)$.
j). Hallar $P(2.8 < x < 3.0)$.
k). En caso de que la distribución de probabilidad de X deba utilizarse con frecuencia, sería conveniente disponer de una tabla de la función de distribución F(m) donde:
$F(m) = P(x < m)$, para $1 < m < 3$.
l). $P(1.3 < x < 1.9)$.
m). $P(1.6 < x < 2.3)$.
n). $P(2.2 < x < 2.7)$.
o). $P(x > 2.4)$.
p). Hallar E(X.)
q). Supongamos que el propietario de la estación de servicio no desea que ésta se quede sin combustible más del 8% del tiempo cuando el camión tanque semanal viene a llenar sus depósitos. Cuál es la capacidad mínima de almacenamiento de gasolina que debe tener?

3.8 VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA.

Cual es la importancia de la Esperanza Matemática E(X) ?

Según se mostró en la sección anterior, la Esperanza Matemática puede interpretarse como una de las medidas de tendencia central de una variable aleatoria. Una medida de tendencia central es conocida comúnmente como un promedio, es un número "representativo" de la serie, pero no puede dar cuenta de los datos originales. El promedio oculta las variaciones individuales.

La Varianza es la caracteristica más importante de una variable aleatoria, puesto que es una medida cuantitativa de la variabilidad o la dispersión de los datos con respecto a su media, la esperanza. Esta variabilidad puede ser tanto o más importante que el promedio. La variabilidad es la escencia de la estadistica

Una magnitud pequeña en la variabilidad de los datos, indica que éstos presentan concentración alrededor del promedio, y por lo tanto este promedio es una buena medida representativa de ellos, y en tal caso suele decirse que los datos son homogéneos o estables. Una magnitud grande en su variabilidad, indica gran dispersión de los datos, entonces el promedio no es una buena medida representativa y suele decirse que éstos son inestables o no representativos de un grupo homogéneo.

La varianza de una variable aleatoria, cuya notación corriente es V(X), o $\sigma^2(X)$, σ^2_x, se define como:

$V(X) = E(X - \mu)^2$, o también $V(X) = E[X - E(X)]^2$

Esta fórmula calcula la ESPERANZA MATEMATICA de las desviaciones cuadráticas de los valores de la varible aleatoria X con respecto a su esperanza E(X). La varianza puede interpretarse entonces como la desviación cuadrática promedio (no máxima), donde cada desviación cuadrática es ponderada por su probabilidad. (La Esperanza por fuera del paréntesis en la definición lleva implícita la ponderación por las respectivas probabilidades).

Para facilitar el cálculo de la varianza de una variable aleatoria, puede hacerse uso del siguiente teorema.

TEOREMA: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

La raiz cuadrada positiva de la varianza se llama Desviación Estandar o Desviación Tipica de X y está denotada por $\sigma(x)$, o σ_x.

La varianza de X, V(X), es un número que viene expresado en unidades cuadradas de las unidades en que aparece la variable

original X. Si esta última viene expresada en pesos, litros, o dólares, entonces la varianza, V(X), viene expresada en pesos cuadrados, litros cuadrados, o dólares cuadrados, respectivamente; estas unidades pueden no tener mucho sentido práctico, como en estos casos. Por tal razón es frecuentemente considerada más bien la Desviación Estandar, la cual simpre tendrá las mismas unidades de los datos originales y de la Esperanza Matemática.

Refiriéndose a la varianza, Toranzos dice:

"En la técnica experimental suele usarse el concepto de precisión de una medida indicándola con h. Es éste un valor tal, que aumenta a medida que disminuye la dispersión, y está relacionado con h por la formula $h = K/\sigma$, siendo k una constante que suele tomarse en algunos casos igual a 1 y en otros $1 / \sqrt{2}$. ... R.A. Fischer afirma que todos los estudios referentes a la variabilidad o dispersión de los fenómenos constituyen el núcleo central de todos los estudios de la Estadística moderna" (17)

En cuanto a la interpretación de la Esperanza y la Varianza, Mills comenta:

"Debe ser comprensible por que un ejecutivo de empresa, en la consideración de un proyecto de inversión de capital, utiliza la varianza como una medida rústica del riesgo asociado con esa inversión. Esto es, si nuestra variable aleatoria X es la ganancia neta en un año particular de un proyecto de inversión, entonces el ejecutivo asigna probabilidades (subjetivas) a varias ganancias netas posibles de ocurrir ese año. El puede desear maximizar la ganancia esperada, E(x), y minimizar el riesgo, var(x)." (18)

Ejemplo 3.18 (Adaptado de Neter y otros pp. 202-204)
Considérese la distribución de probabilidad dada por $f(x) = 1 - 1/2(x)$, para $0 \leq x \leq 2$.

a. Encontrar la probabilidad de que la variable aleatoria x tome un valor comprendido entre 0 y 1.
b. Hallar la Esperanza E(X).
c. Hallar la Varianza V(X) y la Desviación estandar σ_x.

Solución:

a. $P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 [1 - 1/2(x)]dx = [x - x^2/4]_0^1 = 0.75.$

17 Toranzos, op. cit., p. 38.

18 Mills, Estadística para Economía y Administración, p. 68.

b. $E(X) = \int_0^2 x\,[1 - 1/2(x)]dx = [x^2/2 - x^3/6]_0^2 = [2 - 8/6] = 4/6$

$= 2/3 = 0.66$

c. $\sigma^2(x) = \int_0^2 [x - 2/3]^2[1 - 1/2(x)]dx$

$= [-x^4/8 + 5x^3/9 - 7x^2/9 + 4x/9]_0^2 = 2/9 = 0.22.$

c'. O, también puede hallarse así:

$$E(x^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2[1 - 1/2(x)]dx$$

$$= \int_0^2 [x^2 - 1/2(x^3]dx = [x^3/3 - x^4/8]_0^2$$

$$= [8/3 - 16/8] - [0] = 8/3 - 2 = 2/3.$$

$\sigma^2(x) = 2/3 - (2/3)^2 = 2/3 - 4/9 = (6-4)/9 = 2/9 = 0.22$

La Desviación estandar será: $\sigma_x = \sqrt{0.22} = 0.47.$

3.9 PROPIEDADES DE LA ESPERANZA Y DE LA VARIANZA.

Las siguientes propiedades pueden ser demostradas a partir de las definiciones anteriores y se encuentran en la bibliografía estadística corriente. En este trabajo sólo se enuncian, y se supone que el lector puede interpretar su significado y los símbolos utilizados.

Dados a, b, c, constantes reales, y siendo X, Y variables aleatorias, se tiene:

3.9.1 PROPIEDADES DE LA ESPERANZA.

1). $E(c) = c$

2). $E(cX) = c * E(X)$

3). $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
3a). $E(X + c) = E(X) + c$
3b). $E(X1 + X2 + \ldots + Xm) = E(X1) + E(X2) + \ldots + E(Xm)$
3c). $E(\Sigma\ aiXi) = \Sigma\ aiE(Xi)$, Para $i = 1,2,\ldots,n$
3d). $E(aX + b) = a * E(X) + b$ Propiedad de Linealidad

4). $E(X * Y) = E(X) * E(Y)$ si X,Y son independientes
4a). $E(X1 * X2 * \ldots * Xm) = E(X1) * E(X2) * \ldots * E(Xm)$, si las variables Xi son mutuamente independientes.

3.9.2 PROPIEDADES DE LA VARIANZA.

1). $V(c) = 0$

2). $V(cX) = c * V(X)$
2a). si $c = -1$, Entonces $V(-X) = V(X)$

3). $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X,Y son independientes
3a). $V(X + c) = V(X)$
3b). $V(X1 + X2 + \ldots + Xm) = V(X1) + V(X2) + \ldots + V(Xm)$, si las variables Xi son mutuamente independientes.
3c). $V(aX + b) = a * V(X)$. la varianza no cumple con la propiedad de linealidad

3.10 EJERCICIOS.

Ejercicio 3.3 (Adaptado de Mills pp. 64, 65).
Un vendedor de automóviles usados tiene la oportunidad de trabajar con el comerciante A o con el comerciante B. El vendedor evalúa los prospectos de venta de cada comerciante como sigue:

Número de Automóviles / Semana que puede venderse

Comerciante A		Comerciante B	
A	P(A)	B	P(B)
0	0.4	0	0.2
1	0.3	1	0.6
2	0.2	2	0.2
3	0.1	3	0.0
	1.0		1.0

a. Graficar ambas distribuciones de probabilidad.
b. Hallar E(A) y V(A).
c. Hallar E(B) y V(B).
d. A la larga, esperaría el vendedor vender más automóviles con el comerciante A o con el comerciante B?
e. Sería más estable el "informe de ventas semanales" con el comerciante A o con B?
f. El comerciante A le ofrece al vendedor prospectivo una comisión de $100 por automóvil vendido. Cuál es el valor esperado de los ingresos semanales del vendedor con esta oferta? Y cuál su varianza? (sugerencia: tomar X = 100A).
g. El comerciante B está muy interesado en adquirir los servicios de este vendedor y le ofrece $200 por automóvil como comisión. Si se toma y = 200B, hallar E(B) y V(B).
h. Cuál de los dos comerciantes ofrece los ingresos esperados más altos? Cuál oferta dá la mayor variabilidad en ingresos semanales?
i. El comerciante A llega con una contraoferta; el vendedor recibirá $100 por semana, más $100 por automóvil vendido. Tómese W = 100 + X (O sea, W = 100 + 100A). Qué son E(W) y V(W)?
j. Cómo comparar ahora los ingresos esperados? De cuál comerciante esperaría el vendedor menos variabilidad en los ingresos semanales? Es V(W) diferente de V(X) en f.?

Ejercicio 3.4 (Adaptado de Mills p. 84).

Usted es el único economista en la isla de Sow Fee. La unidad monetaria en esta isla es la "libra cobre" o ₡. Su predicción del Ingreso Nacional neto (y) para el año siguiente está dado por (Millones de ₡):

Yi:	3	4	5	6
p(Yi):	0.3	0.5	0.1	0.1

a. Hallar E(y) y V(y).

b. Se descubre petróleo en el mar cerca de la isla de Sow Fee. La compañía extranjera que hizo el descubrimiento ofrece al Gobierno un millón de ₡ al año por los derechos de perforación. (hay regalías estipuladas pero no se recibirán

durante varios años). Cómo afecta esto su predicción? (la cuota es exógena para la economia de Sow Fee: sea X = Y + 1).

c. Hallar E(X) y V(X). Cuál es la relación entre V(X) y V(Y)?

d. Suponga que la tasa de cambio con respecto al dólar americano es $2 por €. (tomar W = 2X). Cómo informaría usted al embajador de EE.UU sobre el Ingreso Nacional Neto estimado?

e. Hallar E(W) y V(W).

f. Suponga que la función de consumo para la isla de Soe Fee. es C = 2 + (0.8)X. Cuál es la distribución de probabilidad para € (en millones de €)?

g. Hallar E(C) y V(C).

3.11 TEOREMA DE CHEBYSHEV (TCHEBYSHEFF O TCHEBICHEV)

Si se conoce la distribución de probabilidades de una variable aleatoria, puede calcularse E(X) y V(X), si existen. Sin embargo, lo recíproco no es verdadero. Esto es, conociendo E(X) y V(X) no puede reconstruirse la distribución de probabilidades de X y por lo tanto no puede calcularse cantidades tales como $P(|X-\mu| \leq c)$. Sin embargo, es posible hallar una cota superior (o inferior) muy útil para tales probabilidades.

El Matemático Ruso Chebyshev descubrió que hay una relación entre la Desviación estándar y la probabilidad que se encuentra entre dos valores cualesquiera, simétricos con respecto a la media. En términos sencillos, este teorema establece que SIN IMPORTAR LA FORMA QUE ASUMA LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES, se cumple:

a). $P(|X-\mu| \geq K) \leq 1 / K^2$

b). $P(|X-\mu| < K) > 1 - 1 / K^2$

El significado de este teorema para cada una de las dos formas de expresarlo es la siguiente:

a). La probabilidad de que una variable aleatoria se desvie absolutamente de su media en $K\sigma$ (caiga por fuera del intervalo) es siempre menor o igual que $1/K^2$.

b). Por lo menos $1 - 1/K^2$ de la probabilidad asociada con cualquier variable aleatoria estara dentro de K desviaciones estándar de la media.

Por ejemplo, la probabilidad de que una variable aleatoria asuma

partir de su media es por lo menos $1 - 1/4^2 = 1 - 1/16 = 15/16 = 0.9375 = 93.75\%$.

Dentro de un intervalo a dos desviaciones estandar a partir de la media, la probabilidad es por lo menos $1 - 1/2^2 = 1-1/4 = 3/4 = 0.75 = 75\%$.

Este teorema establece una relación entre la Esperanza, la Desviación estandar y la probabilidad asociada a un intervalo. Emplea la desviación estandar para proporcionar información acerca de la forma en que la probabilidad se acumula en intervalos centrados alrededor de la media. Sus resultados son generalmente debiles ya que proporciona una estimación conservadora de la probabilidad; el valor dado por dicho teorema es únicamente un límite, inferior o superior, pero no se conocerán las probabilidades exactas a menos que se conozca la distribución de probabilidades.

Ejemplo 3.19 Sea la distribución de probabilidades dada por la tabla siguiente:

x	p(x)
1	0.1
2	0.1
3	0.2
4	0.3
5	0.3

$E(X) = 3.6$
$\sigma(x) = 1.28$

Dentro de un intervalo a dos desviaciones estandar a partir de la media, el teorema dice que se encuentra por lo menos el 75% de la probabilidad. En realidad el cálculo exacto sería el siguiente:

$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = P(-2\sigma \leq X - 3.6 \leq 2\sigma) =$
$P(-2(1.28) \leq X - 3.6 \leq 2(1.28)) =$
$P(-2.56 + 3.6 \leq X \leq 2.56 + 3.6) = P(1.04 \leq X \leq 6.16) =$
$P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 0.9$

Dentro de un intervalo a tres desviaciones estandar a partir de la media, el teorema dice que se encuentra por lo menos $1 - 1/9 = 8/9$ de la probabilidad. En realidad se encuentra: $P(|X-\mu| \leq 3) = P(-0.24 \leq X \leq 7.44) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$, el 100% de de la probabilidad.

A MANERA DE CONCLUSIONES.

El mecanismo natural de la intuición humana es insuficiente para hacer inferencias válidas, ya que, es incapaz de utilizar grandes volúmenes de datos y evaluarlos mentalmente, con exactitud y precisión, para efectuar buenas inferencias y proyecciones sobre algunas variables de interés y para realizar una toma de decisiones acertada y útil.

Para una adecuada toma de decisiones son necesarios un buen marco teórico y un enfoque con sentido común. El análisis de decisiones debe combinar los criterios formales brindados por la teoría de probabilidades tales como los conceptos de variable aleatoria, esperanza y varianza, y además debe incorporar la información subjetiva, la intuición y los conocimientos previos del problema al marco del proceso de decisión.

Este trabajo recoge algunas experiencias del autor en su labor docente en el área de estadística para la carrera de Economía Agrícola. Trata de llenar algunos vacíos existentes en la bibliografía estadística corriente, tales como la falta de una presentación detallada de los conceptos que se presten a una fácil asimilación por parte de los estudiantes, y la difícil adecuación de ejemplos que a la vez sean ilustrativos de los conceptos elementales y de fácil aplicación y operatividad en sus cálculos.

Con la presentación de este trabajo se espera hacer una contribución en la clarificación de los conceptos de probabilidad y variable aleatoria, así como de otros conceptos fundamentales de la estadística, que yacen en sus bases y cuya asimilación es de vital importancia para el trabajo aplicado utilizando estas herramientas, y para que los resultados tengan algún sentido práctico.

Se espera, además, dejar sentadas las bases para facilitar a los lectores interesados su continación en la profundización de otros temas relacionados con la estadística aplicada, tales como los modelos probabilísticos, la teoría de decisiones y la inferencia estadística, entre las múltiples opciones que se presentan en el área.

Si este trabajo logra que sus lectores asimilen los conceptos presentados y puedan resolver adecuadamente los ejercicios que se han dejado planteados, valió la pena el ezfuerzo y su objetivo ha sido cumplido. Si los lectores han quedado motivados a seguir profundizando en tales conceptos y/o continuar estudiando otros temas relacionados, el objetivo ha sido superado.

BIBLIOGRAFIA.

CHOU, Ya-Lun. "Análisis Estadístico". Editorial Interamericana, 2a Edición en Español, 1977. 808p.

CRAMER, Harold. "Elementos de la teoría de Probabilidades". Editorial Aguilar, 1977. 322p.

DIAZ SERNA, Francisco Javier. "Algunas consideraciones acerca de los conceptos de Estadística, Probabilidad y Modelos Matemáticos". Trabajo de Promoción a Profesor Asistente en la Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Humanas, Medellín, 1986. 83p.

FELLER, William. "Introducción a la teoría de Probabilidades y sus aplicaciones". Volumen I Editorial Limusa, 1980. 540p.

HADLEY, G. "Probabilidad y Estadística. Una introducción a la teoría de la decisión". Fondo de Cultura Económica, México, 1981. 648p.

HOEL, Paul. "Introducción a la Estadística Matemática". Ediciones Ariel, Barcelona, 1968. 452p.

KENDALL, M. G. y BUCKLAND, W. R. "Diccionario de Estadística". Ediciones Pirámide, S. A., Madrid, 1976. 384 p.

KREYSZIG, Erwin. "Introducción a la Estadística Matemática. Principios y Métodos". Editorial Limusa, Mexico, 1978. 505p.

MENDENHALL / Reinmuth. "Estadística para Administración y Economía". Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS). Universidad Nacional Autónoma de México, 1981. 708p.

MERRILL, William C. y FOX, Karl A. "Introducción a la Estadística Económica". Amorrortu Editores, Buenos Aires. 1977. 736p.

MEYER, Paul L. "Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas". Fondo Educativo Interamericano S.A., 1973. 372p.

MILLS, Richard L. "Estadística para Economía y Administración". Editorial McGraw-Hill, 1981. 598p.

NETER, John y otros. "Fundamentos de Estadística para Negocios y Economía". Compañía Editorial Continental, 1980. 886p.

OBREGON SANIN, Iván. "Teoría de la Probabilidad". Editorial Limusa, 1980. 448p.

OSTLE, Bernard. "Estadística Aplicada". Editorial Limusa, 1983. 632p.

PEREZ GUTIERREZ, Luis. "Variaciones en el Concepto de Probabilidad". Revista Integración, Departamento de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Vol. 3 Nº 1, 1985. 54p.

SHAO, Stephen. "Estadística para Economistas y Adninistradores de Empresas". Editorial Herrero Hnos. 1a Edición en Español. 1960. 788p.

TORANZOS, Fausto. "Estadística". Editorial Kapelusz, 1968. 378p.

WONNACOTT, Thomas y WONNACOTT, Ronald. "Introducción a la Estadística". Editorial Limusa, 1981. 516 p.