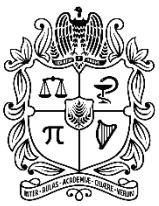


UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

El aprendizaje de la ecuación cuadrática a través del enfoque de resolución de problemas

Diana Carolina Castillo Vargas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2021

El aprendizaje de la ecuación cuadrática a través del enfoque de resolución de problemas

Diana Carolina Castillo Vargas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Martha Cecilia Moreno Penagos (Msc. Matemáticas)

Línea de trabajo:

Discurso y Argumentación en Educación Matemática

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2021

A Dios, por cada bendición y oportunidad que me ha regalado.
A mi esposo Andrés, por ser ese apoyo y amor incondicional.
A mis hijos Martín y Mariana, por ser mi razón de ser y ese impulso a seguir.
A mi papá, que siempre confío en mí y quién desde el cielo me sigue acompañando.
A mi mamá, a mi hermana y a mi Oli, por sus oraciones y sus palabras de ánimo.

Declaración de obra original

Yo declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional. «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.

Diana C. Castillo V.

Nombre: DIANA CAROLINA CASTILLO VARGAS

Fecha: 16/11/2021

Fecha: 16 de Noviembre del 2021

Agradecimientos

A Dios por escuchar nuestras oraciones y permitir que pudiera entregar el trabajo a tiempo.

A mi familia, quienes me apoyaron de manera incondicional desde el primer día que inicie la maestría; en especial a mis hijos Martín y Mariana por toda su paciencia.

A la profesora Martha Cecilia Moreno Penagos por toda su disposición, su dedicación y todas las sugerencias que hizo a lo largo de cada una de las etapas del desarrollo del trabajo.

A los otros docentes de la maestría que me acompañaron en estos cuatro semestres. Gracias por todas sus enseñanzas y por todas las estrategias que usaron en estas circunstancias tan complejas.

A las directivas del Colegio José Francisco Socarrás IED por permitirme aplicar la propuesta y a los estudiantes de grado décimo por todo su compromiso en el desarrollo de cada una de las sesiones.

Resumen

El aprendizaje de la ecuación cuadrática a través del enfoque de resolución de problemas

En este trabajo se presenta una secuencia didáctica que se diseñó e implementó con un grupo de estudiantes de grado décimo del Colegio José Francisco Socarrás IED, con relación a la enseñanza de la ecuación cuadrática y sus diferentes métodos de solución a través del enfoque de resolución de problemas, buscando generar en los estudiantes una mayor comprensión y apropiación de estas. Con el propósito de lograr una mayor motivación en los estudiantes, se decidió incluir, en las actividades, situaciones contextualizadas en entornos cercanos al estudiante, situaciones relacionadas con otras ciencias y algunas cuyo contexto es netamente matemático. Debido a la situación generada por la pandemia del Covid-19, la aplicación de la secuencia se realizó de forma remota y no de manera presencial como se pretendía de manera inicial, pese a esta situación, se obtuvieron resultados satisfactorios en el desarrollo de las tres sesiones propuestas, evidenciando que en algunos casos, los errores se relacionaban con la aplicación incorrecta de algunos conceptos o procesos, previos a la enseñanza de la ecuación cuadrática.

Palabras clave: Ecuación cuadrática, Resolución de problemas, Método de los cuatro pasos de Pólya**,** Métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas, Relaciones de Vieta.

Abstract

Learning the equation quadratic through the approach problem resolution

In this work, a didactic sequence that was designed and implemented with a group of tenth grade students of the José Francisco Socarrás IED School is presented, in relation to the teaching of the quadratic equation and its different solution methods through the approach of solving problems, seeking to generate in students a greater understanding and appropriation of these. In order to achieve greater motivation in the students, it was decided to include in the activities contextualized situations in environments close to the student, situations related to other sciences and some whose context is purely mathematical. Due to the situation generated by the Covid19 pandemic, the application of the sequence was carried out remotely and not in person as was initially intended, despite this situation, satisfactory results were obtained in the development of the three proposed sessions, evidencing that in some cases the errors were related to the incorrect application of some concepts or processes prior to the teaching of the quadratic equation.

Keywords: Quadratic equation, Problem solving, Pólya's four step method, Methods of solving quadratic equations, Vieta's relations.

Contenido

Pág.

Resumen ..... **IX**

Lista de figuras ..... **XIII**

Lista de tablas ..... **XIV**

Introducción **1**

1. Capítulo 1: Planteamiento del problema **3**
1.1. Planteamiento del problema 3
1.2. Objetivos 6
1.2.1. Objetivo general 6
1.2.2. Objetivos específicos 6

2. Capítulo 2: Marco Epistemológico - Histórico **7**
2.1 Babilonia 9
2.2 Egipto 10
2.3 Grecia 11
2.3.1 Escuela Pitagórica 12
2.3.2 Euclides 12
2.3.3 Diofanto 14
2.4 Hindúes y Árabes 16
2.4.1 Brahmagupta 16
2.4.2 Al Khwarizmi 18
2.5 Siglo XVI y XVII 22
2.5.1 François Vieta 22
2.5.2 René Descartes 24

3. Capítulo 3: Marco Disciplinar **27**
3.1 Números Reales 27
3.1.1 Relación de orden y Axioma de Completez 29
3.2 Igualdad y Ecuación 29
3.2.1 Igualdad 29
3.2.2 Ecuación 30
3.3 Polinomios 31
3.3.1 Raíces de un polinomio 32
3.4 Ecuaciones polinómicas 32
3.4.1 Teorema fundamental del Álgebra 32
3.4.2 Relaciones de Vieta 33
3.4.3 Ecuación lineal 35

3.4.4 Ecuación cuadrática ... 36
3.5 Métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas ... 37
3.5.1 Método de factorización ... 37
3.5.2 Método de completar el cuadrado ... 39
3.5.3 Método de factorización apoyado en lo geométrico ... 40
3.5.4 Método utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática ... 42
3.5.5 Otros métodos ... 45
3.6 Función cuadrática y características ... 46
3.6.1 Método gráfico para aproximar las soluciones ... 48
3.6.2 Círculo de Carlyle ... 50

4. Capítulo 4: Marco Didáctico ... 57
4.1 ¿Qué es un problema? ¿Qué caracteriza un problema? ... 57
4.1.1 Método de los cuatro pasos de Pólya ... 62
4.1.2 Estrategias para la resolución de problemas ... 64
4.2 Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ... 70

5. Estructuración y análisis de la secuencia ... 73
5.1 Caracterización de la población ... 73
5.2 Metodología de aplicación ... 73
5.3 Prueba de entrada ... 74
5.3.1 Estructura de la prueba de entrada ... 75
5.3.2 Análisis de la prueba de entrada ... 76
5.4 Sesión 1 ... 79
5.4.1 Estructura de la sesión 1 ... 79
5.4.2 Análisis de la sesión 1 ... 81
5.5 Sesión 2 ... 84
5.5.1 Estructura de la sesión 1 ... 84
5.5.3 Análisis de la sesión 2 ... 85
5.6 Sesión 3 ... 89
5.6.1 Estructura de la sesión 3 ... 90
5.6.2 Análisis de la sesión 3 ... 91

6. Conclusiones y recomendaciones ... 95
6.1 Conclusiones ... 95
6.2 Recomendaciones ... 98

A. Anexo: Prueba de entrada ... 101

B. Anexo: Sesión 1 ... 105

C. Anexo: Sesión 2 ... 113

D. Anexo: Sesión 3 ... 119

Bibliografía ... 125

Lista de figuras

Pág.

Imagen 2-1: Breve recorrido histórico de las ecuaciones cuadráticas. ... 8
Imagen 2-2: Método de solución de Euclides. ... 13
Imagen 2-3: Ejemplo 1 del método de Al-Khwarizmi. ... 20
Imagen 2-4: Ejemplo 2 del método de Al-Khwarizmi. ... 21
Imagen 2-5: Método de Descartes. ... 25
Imagen 3-1: Factorización del trinomio a través del método geométrico ... 41
Imagen 3-2: Gráfica de la parábola cuando $a > 0$. ... 47
Imagen 3-3: Gráfica de la parábola cuando $a < 0$. ... 48
Imagen 3-4: Ejemplo del método gráfico habitual ... 50
Imagen 3-5: Círculo de Carlyle. ... 52
Imagen 3-6: Ejemplo del método del círculo de Carlyle (circunferencia). ... 54
Imagen 3-7: Ejemplo del método del círculo de Carlyle (circunferencia y parábola) ... 55
Imagen 4-1: Ejemplo de estrategia de elaboración de tablas o diagramas. ... 64
Imagen 4-2: Ejemplo de estrategia de elaboración de un bosquejo o dibujo. ... 66
Imagen 5-1: Errores relacionados con el valor numérico de exp. algebraicas. ... 77
Imagen 5-2: Errores en el ejercicio de las balanzas. ... 77
Imagen 5-3: Errores en situación problémica de la prueba de entrada. ... 78
Imagen 5-4: Errores en la sesión 1: Factorización y completación de cuadrados ... 82
Imagen 5-5: Soluciones sesión 1: Establecimiento de patrones. ... 83
Imagen 5-6: Soluciones sesión 1: Factorización geométrico. ... 83
Imagen 5-7: Errores sesión 1: Situación relacionada con el producto de edades. ... 83
Imagen 5-8: Errores sesión 2: Cálculo del discriminante. ... 86
Imagen 5-9: Soluciones sesión 2: Relaciones de Vieta. ... 87
Imagen 5-10: Errores sesión 2: Ejercicios 4 y 5. ... 88
Imagen 5-11: Soluciones sesión 2: Ejercicio del parámetro k. ... 89
Imagen 5-12: Soluciones sesión 2: Establecimiento de patrones. ... 89
Imagen 5-13: Errores sesión 3: Método del círculo de Carlyle ... 92
Imagen 5-14: Errores sesión 3:. ... 93

Lista de tablas

Pág.

Tabla 3-1: Ejemplo de Relaciones de Vieta..... 35
Tabla 4-1: Ejemplo de estrategia de búsqueda de patrones. 65
Tabla 4-2: Ejemplo de estrategia de usar ensayo y error. 69
Tabla 5-1: Resultados de la prueba de entrada: Conceptos o procedimientos. 76
Tabla 5-2: Resultados en la prueba de entrada. Cuatro pasos del método de Pólya. . 77
Tabla 5-3: Resultados de la sesión 1: Conceptos o procedimientos. 81
Tabla 5-4: Resultados de la sesión 1: Resolución de problemas. 82
Tabla 5-5: Resultados de la sesión 2: Conceptos o procedimientos. 86
Tabla 5-6: Resultados de la sesión 2: Resolución de problemas (4 pasos de Pólya).. 87
Tabla 5-7: Resultados de la sesión 2: Resolución de problemas. 88
Tabla 5-8: Resultados de la sesión 3: Conceptos o procedimientos. 91
Tabla 5-9: Resultados de la sesión 3: Resolución de problemas (4 pasos de Pólya).. 92

Introducción

En los estándares básicos de competencias de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, se presenta una organización del pensamiento matemático, inspirada al parecer, en algunas reformas realizadas a lo largo de la historia. Uno de estos pensamientos es el variacional, que contempla entre otros aspectos, la comprensión, solución y aplicación de las ecuaciones en contextos variados.

Con relación a las ecuaciones, en el Colegio José Francisco Socarrás IED se han evidenciado a través de los resultados de las diferentes pruebas externas e internas, algunas dificultades relacionadas con los métodos de solución de ecuaciones y su aplicación en la resolución de problemas; dichas dificultades son más notorias cuando las ecuaciones no son lineales. El argumento anterior justifica la necesidad del diseño e implementación de una secuencia didáctica, orientada en este caso a la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, con la finalidad de obtener aprendizajes significativos y duraderos en los estudiantes.

La secuencia que se diseñó fue aplicada en el primer semestre del año 2021 a un grupo de estudiantes de grado décimo del Colegio José Francisco Socarrás IED, institución de carácter público, ubicada en la localidad séptima de Bosa. Es importante aclarar que aunque en los estándares del MEN[1], la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas se contempla para grado noveno, debido a los diferentes cambios en las dinámicas institucionales como consecuencia de la pandemia del COVID-19, algunas de las competencias propuestas en el plan de área no se alcanzaron a abordar en el año 2020 y quedaron pospuestas para el 2021, entre estas competencias se encontraba la solución de ecuaciones cuadráticas y sus diferentes aplicaciones.

[1] Ministerio de Educación Nacional

El presente trabajo contiene seis capítulos; en el primero se hace una descripción de la problemática que llevó al diseño y a la implementación de la secuencia didáctica y además se presenta el objetivo general y los objetivos específicos de este.

En el segundo capítulo se hace un breve recorrido histórico, destacando las culturas que mostraron algunos aportes relacionados con las ecuaciones cuadráticas y sus diferentes métodos de solución, mostrando en algunos casos ejemplos de la aplicación de éstos. En el tercer capítulo se presentan las definiciones, axiomas y procedimientos necesarios para la comprensión, solución y aplicación de las ecuaciones cuadráticas; algunos de ellos son: los números reales y sus axiomas de cuerpo, la definición y tipos de ecuaciones, la ecuación cuadrática y algunos métodos para su solución (método de factorización, de completación de cuadrados, método geométrico, fórmula de la ecuación cuadrática, método gráfico habitual y método gráfico de Carlyle), además de las relaciones de Vieta y el discriminante de una ecuación cuadrática. Vale la pena resaltar que aparte de la explicación de cada uno de los métodos, también se presentan algunos ejemplos de la aplicación de éstos para ecuaciones cuadráticas específicas. En el cuarto capítulo se encuentran los principales aspectos didácticos que se tomaron como referencia en el trabajo, tales como: la definición de problema, el método de los cuatro pasos de Pólya para resolver problemas, las diferentes estrategias de solución y el impacto del uso de algunas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas.

En el quinto capítulo se detalla la estructura de la prueba de entrada y de las tres sesiones que hacen parte de la secuencia y también se muestran los resultados más relevantes para cada una de estas sesiones. Finalmente, en el capítulo seis, se encontrarán las conclusiones que se obtuvieron después del diseño y la implementación de la secuencia didáctica y se dan algunas recomendaciones que se pueden contemplar en un futuro.

1. Capítulo 1: Planteamiento del problema

1.1 Planteamiento del problema

En los estándares básicos de competencias en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006, p. 66), respecto del componente de pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos se resalta que:

> *"... este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación, y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, el cálculo diferencial e integral"*

Esta premisa reafirma la importancia del trabajo en este pensamiento que se debe iniciar desde los primeros niveles de básica primaria, por ejemplo, para los grados primero, segundo y tercero se plantea el estándar *"Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)*" (MEN, 2006, p. 81), continua con los grados cuarto y quinto en los que se encuentran los estándares: *"Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales"* y *"Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos"* (MEN, 2006, p. 83). El trabajo progresivo continúa con la educación básica y media para la que se plantean los estándares *"Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas*

y tablas)" y "*Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones"* (MEN, 2006, p. 85). Específicamente para el grado octavo y noveno se encuentran: "*Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas"* y "*Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas"* (MEN, 2006, p. 87).

Pese a que para cada grado de la educación básica y media, algunos de los contenidos estipulados, en los planes de área de las diferentes instituciones distritales, están orientados al desarrollo del pensamiento variacional, los resultados en las pruebas internas y externas evidencian varias dificultades con respecto a la apropiación de los contenidos relativos a este pensamiento, lo que lleva a pensar que las estrategias de enseñanza – aprendizaje que se están llevando a cabo en el aula, no están arrojando los resultados esperados.

Tal como se mencionó antes, uno de los contenidos importantes del pensamiento variacional en estos grados, está relacionado con la solución de ecuaciones, por lo que esta propuesta se centrará en las ecuaciones cuadráticas, donde se evidencian también, desde los diferentes tipos de evaluación, dificultades en su interpretación y solución. En el Colegio José Francisco Socarrás IED, se han analizado algunos de los factores que están incidiendo para que los estudiantes presenten dificultades en relación con la comprensión, solución y modelación de situaciones que involucren la ecuación cuadrática, y para que los resultados en evaluaciones externas e internas no hayan sido satisfactorios; algunos de dichos factores se resaltan a continuación:

- Errores en la aplicación de los diversos métodos, relacionados con conceptos o habilidades previas, esperadas en el estudiante, tales como: factorización de polinomios de segundo grado, solución de ecuaciones lineales y operaciones con números reales.
- Actividades propuestas con ejercicios repetitivos y descontextualizados que están orientados a la repetición de un algoritmo y no a la comprensión del concepto.
- Escasez de ejercicios orientados a la resolución de problemas que requieran del planteamiento y solución de la ecuación cuadrática.
- Poca profundidad en el trabajo relacionado con las ecuaciones cuadráticas.

- Trabajo superficial del método gráfico para resolver ecuaciones en general y particularmente de las cuadráticas.
- No usar diferentes herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.

Teniendo en cuenta los aspectos mencionados, surge la necesidad de dar una respuesta a la siguiente pregunta: **¿Cuáles situaciones problema se pueden proponer dentro de una secuencia didáctica, para favorecer la comprensión y solución de ecuaciones cuadráticas y así fortalecer algunos componentes del pensamiento variacional?**

Para dar respuesta a esta pregunta se diseñó una secuencia didáctica a través del enfoque de resolución de problemas, incluyendo una serie de ejercicios que le permitan al estudiante realizar una interpretación de éstos; escoger una alternativa, estrategia o método de solución; y aplicar dicha alternativa e interpretar los resultados obtenidos. Esto con el fin, que los estudiantes logren una mayor comprensión de las ecuaciones cuadráticas y sus diferentes métodos de solución. El enfoque de resolución de problemas se escogió, ya que está en concordancia con uno de los cinco procesos generales de la actividad matemática, estipulados en los estándares básicos de competencias del MEN: Formular y resolver problemas. Es así como la formulación y solución de problemas permite al estudiante dar un mayor significado a los conceptos abordados, explorar diversas estrategias de solución, encontrar y validar soluciones, además de proponer más adelante otras situaciones problema, propiciando así el fortalecimiento del pensamiento variacional.

Con respecto a los trabajos que se relacionan con las ecuaciones cuadráticas y el enfoque de resolución de problemas, se destaca el de Solano (2016), quien diseñó una secuencia didáctica para la enseñanza de las ecuaciones lineales a través del método de resolución de problemas y el método de los cuatro pasos de Pólya. También, Elizarras (2017), quien consolidó los resultados de una investigación relacionada con la resolución de algunas situaciones problemas, que se podían encontrar en un libro para los docentes de México, y que se podían plantear a través de sistemas de ecuaciones lineales que también podían conducir a una ecuación cuadrática. Es importante resaltar que dentro de la revisión de los antecedentes de trabajos finales de la maestría, se puede encontrar que hay un número significativo de trabajos orientados a la solución de ecuaciones lineales a través de

diferentes enfoques, pero con relación a las ecuaciones cuadráticas el número es menor, situación que me motivó a diseñar, aplicar y evaluar una secuencia didáctica orientada a la enseñanza de estas ecuaciones.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Generar una secuencia didáctica para el aprendizaje de la solución de ecuaciones cuadráticas, para estudiantes de ciclo V, basada en el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar los aspectos disciplinares, epistemológicos y didácticos en relación con el enfoque de resolución de problemas para la solución de ecuaciones cuadráticas.
- Determinar el nivel de desempeño que tienen los estudiantes con respecto a algunos conceptos y procedimientos del pensamiento numérico y variacional, tales como: operaciones con números reales, factorización y ecuaciones lineales.
- Aplicar la secuencia didáctica a un grupo de estudiantes de ciclo V del Colegio José Francisco Socarrás IED y evaluar el impacto de ésta, teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

2. Capítulo 2: Marco Epistemológico - Histórico

Los diferentes tipos de ecuaciones que se abordan en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica, media y secundaria, han sido abordados desde las civilizaciones más antiguas como la babilónica, egipcia, griega, hindú y árabe; en algunas de ellas de una manera más formal y en otras se han enfocado en la aplicabilidad de estas en la solución de situaciones de la cotidianidad. Los métodos usados son variados: de tipo geométrico: en contextos de áreas, longitudes y volúmenes, otros basados en el tanteo y algunos más generales, en los cuáles se enuncian una serie de pasos a seguir como si se tratara de una receta, estos últimos métodos fueron comunes en la etapa del álgebra denominada *retórica*.

El estudio y abordaje realizado a las ecuaciones cuadráticas a lo largo de la historia, muestra también el uso de diferentes métodos, sin embargo, es importante resaltar que algunas culturas lograron avances más significativos que otras. Este es el caso de los babilónicos, quienes resolvían algunas ecuaciones cuadráticas con gran facilidad, mientras que los egipcios se dedicaron más a las situaciones que se modelaban, haciendo uso de ecuaciones lineales y solo abordaron las ecuaciones cuadráticas más básicas.

En este capítulo se hace un breve recorrido histórico en el cual se destacan aquellas civilizaciones o culturas que mostraron algunos aportes en relación con las ecuaciones cuadráticas y sus diferentes métodos de solución; también se destacarán los matemáticos más representativos en cada una de las épocas. En la siguiente imagen, se presenta una infografía con la información más relevante y posteriormente se encuentra una descripción más detallada de los avances de cada una de las culturas.

Imagen 2-1: Breve recorrido histórico de las ecuaciones cuadráticas.

Im1. Tablilla BM 13901. Tomada de: https://www.jica.go.jp/project/elsalvador/004/materials/ku57pq00003uf5za-att/text_JS3_03.pdf
Im 2. Papiro de Rhind. Tomada de: http://revistasacitametam.blogspot.com/2010/12/papiro-de-ahmes-o-de-rhind.html
Im 3. La escuela pitagórica. Tomada de: http://anforadigital.blogspot.com/2010/06/la-escuela-pitagorica.html
Im 4. Francois Vieta. Tomado de: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/v/vieta.htm

2.1 Babilonia

La civilización babilónica (1900 a.C. – 500 a.C.) realizó importantes avances en el área de las matemáticas, los cuales quedaron plasmados en las, aproximadamente, 300 tablillas que se han encontrado hasta la actualidad (Ortiz, 2005, p. 11). Además, se puede decir que es la primera civilización de la cual se tiene evidencia concreta de que abordó diferentes problemas que se podían modelar y solucionar usando ecuaciones cuadráticas. Un ejemplo puntual se encontró en la tablilla BM 13901 en la cual se encuentra la siguiente situación:

"He sumado siete veces el lado de mi cuadrado y once veces el área, obteniendo 6;15". 6;15 en notación sexagesimal de los babilónicos equivale a $6\frac{1}{4}$. (Stewart, 2005, p. 63).

Además del planteamiento del problema, en la tablilla se encuentran una serie de pasos que describen los procesos que se deben efectuar para determinar la solución de la situación, estos pasos están descritos en un lenguaje netamente verbal. Si se hace una traducción al lenguaje matemático de estos pasos, con sorpresa se puede evidenciar que coinciden con una transformación de la fórmula de la ecuación cuadrática que se conoce hoy, aunque no se muestra la forma en la que llegaron a este resultado.

La situación anterior se puede modelar en la actualidad cómo: $7x + 11x^2 = 6\frac{1}{4}$, siendo x el lado del cuadrado que se va a determinar, por lo tanto se tiene una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = c$. Stewart (2007), afirma que en términos de a, b y c, los pasos descritos en la tablilla para resolver la situación son los siguientes:

- Obtener el producto entre a y c → ac
- Dividir b entre 2 → $\frac{b}{2}$
- Elevar $\frac{b}{2}$ al cuadrado → $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$
- Sumar el resultado anterior con ac → $ac + \frac{b^2}{4}$
- Sacar la raíz cuadrada a la suma anterior → $\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}$

- Restar de la raíz anterior el término $\frac{b}{2}$ → $\sqrt{ac+\frac{b^2}{4}}-\frac{b}{2}$
- Dividir el resultado anterior entre a → $\frac{\sqrt{ac+\frac{b^2}{4}}-\frac{b}{2}}{a}$

Con lo cual se tiene una expresión que es equivalente a la fórmula de la ecuación cuadrática.

En otras tablillas se encontraron algunos problemas que se modelan con un sistema de ecuaciones, en el que la primera ecuación es lineal y la segunda es cuadrática, como el que se muestra a continuación:

“He sumado el área de mis dos cuadrados, lo que me da 21,15 y el lado de uno es más pequeño que el lado del otro” (Ortiz, 2005, p. 17).

En Boyer (1987) también se afirma que hay evidencia de varios problemas que conducen a sistemas de ecuaciones, en donde la primera ecuación representa la suma o resta de dos números dados y en la segunda ecuación el producto de éstos. Los babilónicos partían del sistema de ecuaciones y lo reducían a una ecuación cuadrática para encontrar posteriormente la solución al problema dado.

En general, se puede decir que los problemas encontrados en las diferentes tablillas babilónicas se pueden resolver a través de ecuaciones de la forma $x^2+bx=c$, $x^2=bx+c$ y $x^2+c=bx$, siendo $a=1$, b y c números positivos. También es importante resaltar que las soluciones presentadas por los Babilonios eran las raíces positivas de las ecuaciones cuadráticas, puesto que no aceptaban los números negativos (Boyer, 1987, p. 56).

2.2 Egipto

El conocimiento matemático de la civilización egipcia (3200 a.C. – 31 a.C.) se destacó principalmente por tener un carácter práctico y de aplicabilidad en situaciones de su

contexto. Dicho conocimiento ha quedado plasmado para la historia a través de los diferentes papiros que se han encontrado, especialmente se puede ver evidencia de los problemas abordados y avances logrados en el papiro de Rhind y el papiro de Moscú. (Ortiz, 2005, p. 25).

En los papiros de Rhind, Moscú y otros, están enunciados algunos problemas de tipo aritmético, algebraico y geométrico, muchos de ellos relacionados con contextos de la vida cotidiana: arquitectura o agrimensura. Con respecto a la solución de ecuaciones, se encuentran algunos problemas resueltos con argumentos de tipo aritmético y otros en los que se hace uso de las ecuaciones lineales, en donde a las incógnitas se les denominaban “aha” o “h” (Ortiz, 2005, p. 36). Con respecto a las ecuaciones cuadráticas se tiene evidencia de que sólo consideraban ecuaciones de la forma $ax^2 = c$, por lo que no avanzaron tanto en relación con la civilización babilónica.

2.3 Grecia

Las matemáticas de la civilización griega tienen algunos elementos de la matemática desarrollada por los babilonios y los egipcios, pero muestran una mayor necesidad de sustentar de forma geométrica algunos resultados obtenidos en el campo del álgebra y la aritmética. La diferencia más sustancial por la cual se puede destacar la matemática griega es la estructura lógica desarrollada a través de definiciones, axiomas y postulados; y por otra parte, un mayor carácter teórico dado a cada uno de los procesos o conocimientos consolidados.

Con respecto a la solución de ecuaciones, muchos matemáticos se dedicaron a su análisis; a continuación, se destacan los que hicieron un estudio más profundo relacionado con las ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas.

2.3.1 Escuela Pitagórica

La escuela pitagórica fue una escuela filosófica de mediados del siglo VI a. C., que estuvo conformada por algunos matemáticos notables que se dedicaban al análisis y desarrollo de conocimientos matemáticos y a conseguir la *purificación del alma* a través del estudio de esta ciencia.

Entre los tantos aportes efectuados por la escuela pitagórica, Ortiz (2005) destaca el abordaje realizado a las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = c$, $x^2 = bx + c$ y $bx = x^2 + c$. Es importante mencionar que las soluciones presentadas por los pitagóricos eran de tipo geométrico y se basaban en la construcción de cuadrados o rectángulos con áreas específicas, completación de cuadrados; además de otros artificios bastante ingeniosos.

2.3.2 Euclides

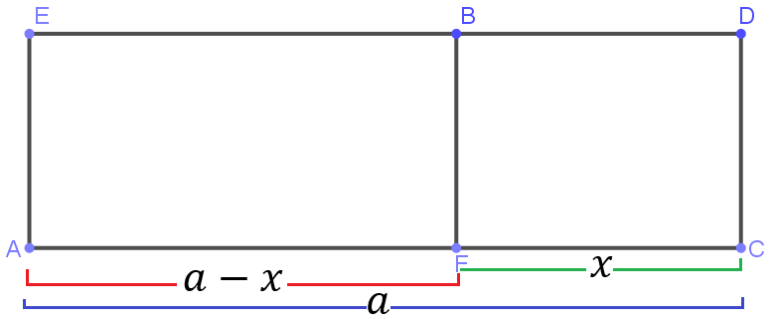
Euclides de Alejandría (325 a.C. – 265 a.C.) fue un notable matemático griego y uno de los matemáticos más importantes de la antigüedad. Su obra maestra es los "*Elementos*"; un conjunto de 13 libros y dos apéndices, que son producto de la recopilación de la mayoría de los conocimientos matemáticos desarrollados hasta su época. Aunque en los "*Elementos",* Euclides recopiló los escritos de varios autores anteriores a él y otros contemporáneos, la importancia de estos textos radica en la estructura, la rigurosidad, el orden y la completitud que se presenta (Ortiz, 2005, p.121).

De los 13 libros de los "*Elementos",* el libro II aborda lo que se denomina *álgebra geométrica*. Allí se encuentran justificados algunos productos notables, la factorización de ciertas expresiones algebraicas y las soluciones de algunas ecuaciones lineales y cuadráticas. Con respecto a estas últimas se encuentran las soluciones de las ecuaciones de la forma $ax - x^2 = b^2$, $ax + x^2 = b^2$ y $ax + x^2 = a^2$.

En Boyer (1987) se mencionan algunas proposiciones que pueden ser resueltas usando una ecuación cuadrática, tal como la siguiente:

"Si se aplica un área rectangular dada AB sobre un segmento de longitud dada AC y si nos dan además el área BC que le falta al área AB para agotar el rectángulo completo AD construido sobre AC, entonces también son conocidas las dimensiones del rectángulo BC" La situación anterior se puede representar de forma gráfica como se muestra en la imagen 2-2.

Imagen 2-2: Método de solución de Euclides



Las áreas rectangulares AB y BC a las que hace referencia el enunciado son:

Área rectangular $AB = A\,\square AFBE$ y Área rectangular $BC = A\,\square FCDB$

Sea $a = AC$, $A\,\square AFBE = b^2$ y $\frac{c}{d}$ es la razón de FC a CD. Se toma $FC = x$ y $CD = y$. Como A, F y C son colineales, se tiene que:

$$AC = AF + FC \quad \rightarrow \quad a = AF + x \quad \rightarrow \quad AF = a - x$$

Por otra parte, también se tiene que: $\frac{x}{y} = \frac{c}{d} \quad \rightarrow \quad \frac{xd}{c} = y.$

A continuación se toma el área del rectángulo $AFBE$ y se realizan algunas sustituciones.

$$A\,\square AFBE = AF.FB = AF.CD = (a - x)y = (a - x)\left(\frac{xd}{c}\right)$$

Como $A\square AFBE = b^2$, entonces $(a-x)\left(\frac{xd}{c}\right) = b^2$. Esta última expresión se puede convertir en una ecuación cuadrática a través de diferentes procedimientos algebraicos, así.

$$(a-x)(xd) = b^2c \quad \rightarrow \quad adx - dx^2 = b^2c \quad \rightarrow \quad dx^2 - adx + b^2c = 0$$

Si se resuelve esta última ecuación cuadrática haciendo uso de la fórmula tradicional se tiene que:

$$x = \frac{-(-ad) \pm \sqrt{(-ad)^2 - 4(d)(b^2c)}}{2d} = \frac{ad \pm \sqrt{a^2d^2 - 4b^2cd}}{2d} = \frac{ad}{2d} \pm \sqrt{\frac{a^2d^2 - 4b^2cd}{4d^2}}$$

Por lo tanto el resultado de la situación inicial es $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2c}{d}}$.

Así como la proposición anterior, en algunos de los libros de los "*Elementos"* u otras de las obras de Euclides se encuentran proposiciones similares que se pueden modelar con ecuaciones cuadráticas y que fueron abordadas a través de argumentos de tipo geométrico, sin embargo, es importante mencionar que las soluciones presentadas en dichas proposiciones únicamente eran las raíces positivas, puesto que las negativas no eran aceptadas por los griegos.

2.3.3 Diofanto

Diofanto de Alejandría fue un matemático griego que vivió en el siglo III y fue de los primeros matemáticos que utilizó algunos símbolos para el planteamiento y solución de sus problemas, aunque éstos son notablemente diferentes a los que se usan en la actualidad. Se diferencia de otros matemáticos griegos puesto que los procesos matemáticos mostrados en sus obras eran de tipo numérico y algebraico y no geométricos como predominaba en esa época.

Su principal obra fue la "*Arithmetica"*, la cual es una colección de aproximadamente 150 problemas que en la actualidad se pueden resolver haciendo uso de diferentes procedimientos de tipo algebraico; de forma puntual, un gran número de estos problemas se pueden modelar con ecuaciones con números enteros o racionales. Los métodos de solución empleados por Diofanto fueron esencialmente numéricos y algebraicos.

Con respecto a los problemas que pueden ser resueltos a través de una ecuación cuadrática, en la "*Arithmetica"* Diofanto solo presentaba una solución para cada situación, incluso en el caso en que las dos raíces fueran positivas, para estos casos solo se consideraba la mayor de las raíces y cuando se obtenían soluciones negativas, estas no se tenían en cuenta (Boyer, 1987, p. 240).

Ortiz (2005) muestra algunos de los problemas enunciados en la "*Arithmetica"* que pueden ser modelados haciendo uso de ecuaciones cuadráticas, algunos de éstos se presentan a continuación:

"**Problema 20:** Encontrar dos números de manera que el cuadrado de uno sumado al otro dé un cuadrado". En este caso, según la forma de proceder de Diofanto, el primer número era x y el segundo $2x+1$, ya que cumplían la primera condición (x^2+2x+1 es un cuadrado) y con esta información realizaba diferentes procedimientos algebraicos hasta determinar el valor de la incógnita x, así:

$$x+(2x+1)^2 = x+4x^2+4x+1 = 4x^2+5x+1$$

$$4x^2+5x+1 = cuadrado = (2x-2)^2$$

$$4x^2+5x+1 = 4x^2-8x+4 \quad \rightarrow \quad 5x+8x = 4-1$$

$$13x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{13}$$

Por lo tanto el otro número es $\frac{19}{13}$

“Problema 27: “Encontrar dos números tal que su suma y su producto sean números dados”.

Boyer (1987) afirma que en aquellas situaciones en la que se daban dos condiciones para poder determinar la incógnita, Diofanto no proponía un sistema de ecuaciones 2 x 2 como se haría en la actualidad, sino que trabajaba con las dos condiciones de forma simultánea, expresando todas las cantidades en términos de una misma variable, de forma que se obtuviera una expresión con una única incógnita y así poderla resolver con los métodos que ya conocía.

Por ejemplo, para el problema de encontrar dos números tal que su suma sea 20 y su producto sea 96, Diofanto llamaba $10 + x$ al primer número y $10 - x$ al segundo, de forma que se garantizara la primera condición en la cual la suma debía ser 20. Luego para la segunda condición hacía uso de ciertas herramientas algebraicas así:

$$(10 + x)(10 - x) = 96 \quad \rightarrow \quad 100 - x^2 = 96 \quad \rightarrow \quad x^2 = 100 - 96$$

$$x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Por lo tanto los números que cumplen las dos condiciones son: $10 + x = 10 + 2 = 12$ y $10 - x = 10 - 2 = 8$. (Ortiz, 2005, p. 336).

2.4 Hindúes y árabes

2.4.1 Brahmagupta

Brahmagupta (598 – 670) fue un matemático y astrónomo hindú quién es considerado el primer matemático que hizo uso del número cero y de los primeros en introducir los números negativos en sus escritos. Su principal obra es el “*Brahmasphutasiddhanta”* en la

que se encuentran algunos procesos de tipo aritmético y algebraico, como la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas.

Haciendo referencia a las ecuaciones cuadráticas, la diferencia más notable en el trabajo de Brahmagupta es que no excluyó las raíces negativas como sus predecesores, además de que también trabajó con raíces irracionales. Es importante resaltar, que el álgebra presentada por Brahmagupta era sincopada, por lo que hacía uso de algunos símbolos y abreviaturas.

En Meavilla (2001) se ejemplifica la forma de proceder de Brahmagupta. A continuación se presenta dicho método de forma general para una ecuación de la forma $ax^2 + bx = c$.

1. Multiplicar por el coeficiente de x^2

$$a^2x^2 + bax = ac$$

2. Sumar al resultado anterior el cuadrado de la mitad del coeficiente del término medio

$$a^2x^2 + bax + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

3. Sacar la raíz cuadrada del resultado anterior y restar la mitad del coeficiente del término medio.

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ax = -\frac{b}{2} + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

4. Dividir el resultado anterior por el coeficiente de x^2

$$x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$$

Por lo tanto la solución para una ecuación de la forma $ax^2 + bx = c$ es $x = \frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$.

A continuación se presenta la aplicación del método de Brahmagupta para resolver la ecuación $x^2 - 8x = -15$.

1. $(-15)(1) = -15$

2. $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15 = (-4)^2 - 15 = 16 - 15 = 1$

3. $\sqrt{1} - \left(\frac{-8}{2}\right) = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$

4. $5 \div 1 = 5$; por lo tanto la solución de la ecuación $x^2 - 8x = -15$ es $x = 5$

2.4.2 Al – Khwarizmi

Muhammad ibn Musa al – Khwarizmi (780 – 850 aproximadamente) fue un matemático árabe y es reconocido como el padre del álgebra por todos los aportes que realizó en este campo de las matemáticas. Aunque el nivel mostrado en los textos de Al – Khwarizmi es más básico que el que se presentó en los textos de Diofanto, él muestra la solución de diferentes tipos de ecuaciones incluyendo un análisis profundo de la ecuación cuadrática. (Boyer, 1987, p. 297).

Su obra maestra se denominó "*Al-Kitab al-jbr w' al – mugabala"*; el término *Aljabr* probablemente hacía referencia a la transposición de términos y de allí se deriva la palabra álgebra y el término *Muqabalah* al parecer se relaciona con la cancelación de términos iguales en los dos miembros de una ecuación dada, lo cual indica el enfoque principal de este texto.

El "*Al-Kitab al-jbr w' al – mugabala"* contiene seis capítulos en los cuales se presentan de manera rigurosa los métodos, reglas y ejemplos de solución para cada uno de los tipos de ecuaciones cuadráticas que se consideraron en esta época, tales como: $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ y $x^2 + q = px$ (Stewart, 2007, p. 66). Es importante mencionar que Al-Khwarizmi no tenía en cuenta las soluciones negativas de la ecuación, puesto que

carecían de sentido para las situaciones resueltas. Los métodos y reglas usados por Al-Khwarizmi están descritos de forma verbal, similar al proceder de los babilonios; después de la explicación verbal se mostraba una justificación geométrica para darle mayor validez a las reglas descritas, probablemente inspirado en algunos aspectos de la matemática griega (Boyer, 1987, p. 300).

En cada uno de los capítulos Al Khwarizmi explica las reglas para la solución de diferentes ecuaciones que tuvieran, como él los denominó, cuadrados, raíces y números, que en lenguaje simbólico se pueden representar como x^2, x y números reales (Boyer, 1987, p. 298). En el capítulo I aborda el caso de los cuadrados igual a las raíces, es decir aquellas ecuaciones de la forma $ax^2 = bx$, en el capítulo II trata el caso de los cuadrados igual a números, es decir las ecuaciones de la forma $ax^2 = c$, en el capítulo III se aborda el caso de las raíces igual a números, es decir las ecuaciones de la forma $bx = c$. Los capítulos IV, V y VI analizan los casos de cuadrados y raíces igual a números ($ax^2 + bx = c$), cuadrados y números igual a raíces ($ax^2 + c = bx$), y finalmente raíces y números igual a cuadrados ($bx + c = ax^2$).

En Suárez (s.f.) se ejemplifica la forma de proceder de Al – Khwarizmi, tanto de manera analítica como geométrica. Primero se presentará el método analítico de forma general para una ecuación de la forma $x^2 + bx = c$.

1. Tomar la mitad del coeficiente de x. $\frac{b}{2}$

2. Multiplicar el resultado anterior por sí mismo. $\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

3. Sumar el resultado anterior con c $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$

4. Sacar la raíz cuadrada del resultado anterior $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$

5. Restar al resultado anterior la mitad del número de las raíces. $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

El resultado anterior se puede obtener a partir de la ecuación inicial al aplicar el método de completación de cuadrados, de esta manera:

$$x^2 + bx = c \quad \rightarrow \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

A continuación se presenta la aplicación del método de Al - Khwarizmi para resolver la ecuación $x^2 + 8x = 33$.

1. $\frac{8}{2} = 4$

2. $(4)(4) = 16$

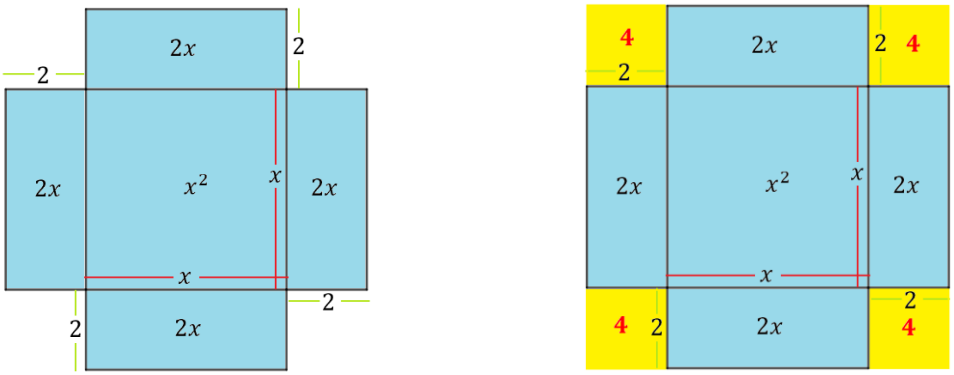
3. $16 + 33 = 49$

4. $\sqrt{49} = 7$

5. $7 - \frac{8}{2} = 7 - 4 = 3$; por lo tanto la solución de la ecuación $x^2 + 8x = 33$ es $x = 3$

Ahora se presentará la justificación geométrica mostrada por Al – Khwarizmi. Inicialmente se traza un cuadrado de área x^2 y sobre cada uno de los lados se traza un rectángulo de área $2x$, por lo tanto el área total es $x^2 + 2x + 2x + 2x + 2x = x^2 + 8x$, como se presenta en la parte izquierda de la imagen 2-3.

Imagen 2-3. Ejemplo 1 del método de Al - Khwarizmi



Teniendo en cuenta la ecuación cuadrática inicial, el área de la imagen 2-3 de la izquierda es de 33 unidades cuadradas. Luego se completa el cuadrado aumentando en cada una

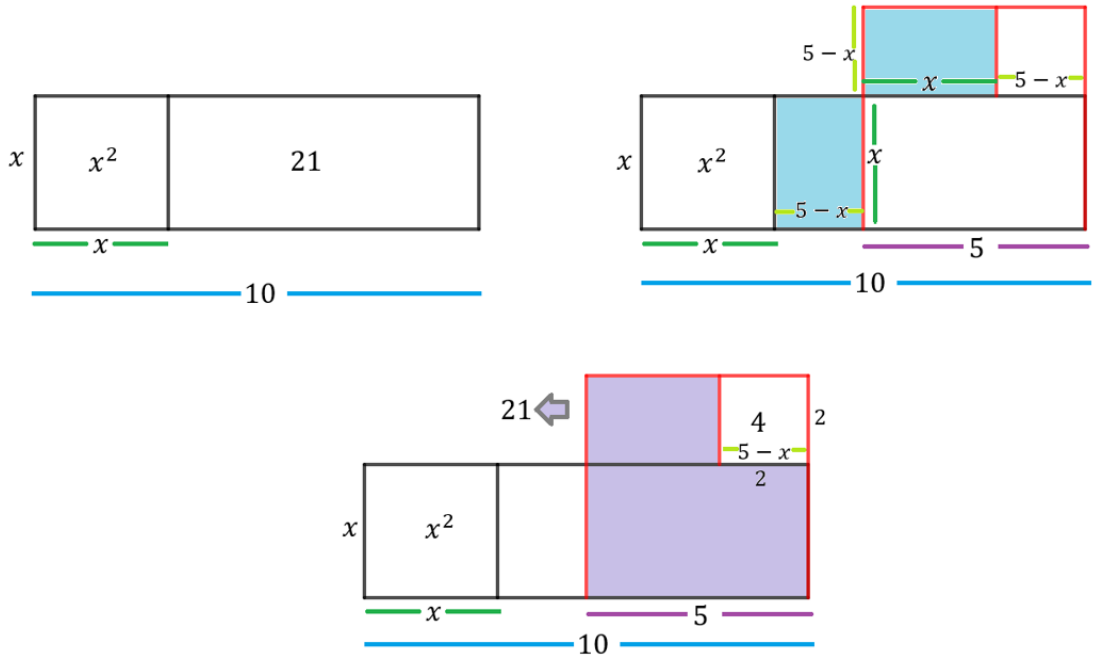
de las esquinas un cuadrado de lado 2, es decir, cuadrados cuya área es de 4 unidades cuadradas, tal como se muestra en la parte derecha de la imagen 2-3.

Se tiene entonces un cuadrado con un área total de $33 + 4(4) = 33 + 16 = 49$ unidades cuadradas, es decir, un cuadrado de lado 7. Sin embargo, el lado del cuadrado de la parte derecha de la imagen 2-3 también es $(x + 4)$, por lo tanto el valor de x debe ser 3.

A continuación se presentará la solución geométrica para la ecuación $x^2 + 21 = 10x$. Se traza un cuadrado de lado x y se ubica de forma adyacente un rectángulo de 21 unidades cuadradas; el rectángulo resultante tiene un área igual a $10x$, esto implica que la base sea 10 y la altura x como lo muestra la primera parte de la imagen 2-4.

Se divide la base del rectángulo obtenido en dos partes iguales y sobre una de las dos partes se traza un cuadrado cuyo lado será de 5 unidades. En la parte superior del cuadrado de lado 5, se quita un cuadrado de lado $5 - x$ como lo muestra la segunda parte de la imagen 2-4. Se puede observar que los dos rectángulos azules sombreados son congruentes, por lo tanto se puede concluir que la región sombreada de color morado en la tercera parte de la imagen 2-4 tiene un área de 21 unidades cuadradas.

Imagen 2-4. Ejemplo 2 del método de Al - Khwarizmi



Para completar este último cuadrado se debe añadir un cuadrado de área $4u^2$, puesto que este cuadrado tiene lado 5 y por ende un área de 25 u^2. Entonces el lado del cuadrado con el cuál se completó el cuadrado grande debe ser de 2 unidades, y como este lado a su vez tiene una longitud de $5 - x$, se puede concluir que el valor de x debe ser de $x = 3$.

2.5 Siglos XVI y XVII

2.5.1 François Vieta

François Vieta (1540 - 1603) fue un matemático francés qué es reconocido por ser pionero en el uso de letras, tanto para generalizar, cómo para simbolizar las incógnitas de una ecuación; el álgebra de Vieta fue más sincopada que simbólica, predominando el uso de palabras y abreviaturas, por lo que la notación empleada por él difiere de la notación usada en la actualidad.

El método de Vieta para resolver ecuaciones cuadráticas consistía en la introducción de dos variables auxiliares mediante un cambio de variable y efectuar diversos procesos algebraicos hasta obtener una expresión que se pudiera "despejar" con mayor facilidad. A continuación se expone el método de Vieta de forma general para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (Do Amaral, s.f.).

Se hace $x = u + v$ y se sustituye en la ecuación cuadrática:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0 \quad \rightarrow \quad a(u^2 + 2uv + v^2) + bu + bv + c = 0$$

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

Se organiza la ecuación anterior de forma que la incógnita sea la v, así:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

Se hace la sustitución $u = \frac{-b}{2a}$ de forma que se cancele el segundo término así:

$$av^2 + \left(2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b\right)v + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

Se realizan todos los procedimientos algebraicos necesarios para despejar v

$$av^2 + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \quad \rightarrow \quad av^2 = -\frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} - c \quad \rightarrow \quad av^2 = \frac{-b^2 + 2b^2 - 4ac}{4a}$$

$$av^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \rightarrow \quad v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego se reemplazan los valores de u y v en $x = u + v$.

$$x = u + v = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y estas serían las soluciones de la ecuación cuadrática dada.

A continuación se ejemplifica el método de Vieta para la ecuación $x^2 + x - 20 = 0$

Se hace $x = u + v$ y se sustituye en la ecuación original, así:

$$(u + v)^2 + (u + v) - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad u^2 + 2uv + v^2 + u + v - 20 = 0$$

$$v^2 + (2u + 1)v + u^2 + u - 20 = 0$$

Reemplazamos ahora $u = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(1)} = \frac{-1}{2}$ para cancelar el segundo término.

$$v^2 + \left(2\left(\frac{-1}{2}\right) + 1\right)v + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) - 20 = 0$$

$$v^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad v^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 20 \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{-1 + 2 + 80}{4}$$

$$v^2 = \frac{81}{4} \quad \rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} \quad \rightarrow \quad v = \pm\frac{9}{2}$$

Se sustituyen los valores de u y v en $x = u + v$.

$$x = u + v = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{-1 + 9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{-1 - 9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Por lo tanto las soluciones de la ecuación son $x = 4$ y $x = -5$.

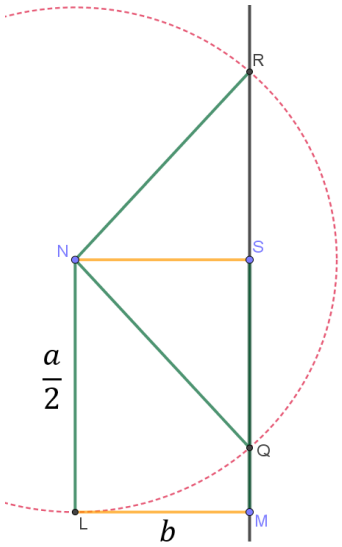
2.5.2 René Descartes

René Descartes (1596 – 1650) fue un matemático y filósofo francés y es considerado el padre de la geometría analítica. Una de sus principales obras en el ámbito de las matemáticas es "*La Géométrie*", que es el primer texto antiguo que tiene la notación actual, a excepción del símbolo que se usaba para el igual (Boyer, 1987, p. 427).

En "*La Géométrie"* se encuentran de forma sistematizada las instrucciones para resolver una ecuación cuadrática de forma geométrica. Las ecuaciones abordadas por Descartes son de la forma: $x^2 = bx + d^2$, $x^2 = bx - d^2$ y $x^2 + bx = d^2$. A continuación se presenta el método usado por Descartes para una de estas ecuaciones, que se encuentra en Torres (2002).

Dada la ecuación cuadrática $x^2 - ax + b^2 = 0$, donde $a, b > 0$. Se traza un segmento $\overline{NL}$ de longitud $\frac{a}{2}$ y un segmento $\overline{LM}$ de longitud b tal que $\overline{LM} \perp \overline{NL}$, tal como se muestra en la imagen 2-5 de la página 25.

Imagen 2-5. Método de Descartes



Luego se trazamos una recta paralela a $\overline{NL}$ que pase por M. Después se traza un arco de circunferencia con centro en N y radio $\frac{a}{2}$ que corte a la recta paralela en los puntos R y Q. Se ubica el punto S en la recta $\overleftrightarrow{MR}$ tal que $\overline{NS} \perp \overline{MR}$. Las soluciones de la ecuación cuadrática serán los segmentos $\overline{MQ}$ y $\overline{MR}$; ahora se presentará la justificación:

Por construcción $NL = NQ = NR = \frac{a}{2}$, ya que son radios de una misma circunferencia. También se tiene que $NL = SM = \frac{a}{2}$, puesto que son lados opuestos de un rectángulo, de la misma manera que $\overline{NS}$ y $\overline{LM}$, por lo tanto $NS = LM = b$.

Se aplica el Teorema de Pitágoras en el ΔNSR, así:

$$NR^2 = RS^2 + NS^2 \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = RS^2 + b^2 \qquad \frac{a^2}{4} - b^2 = RS^2$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = RS = SQ$$

Por lo tanto se tiene que:

$$MR = MS + SR = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$MQ = MS - QS = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

Y estas soluciones son equivalentes a la fórmula de la ecuación cuadrática que conocemos en la actualidad.

3. Capítulo 3: Marco disciplinar

El conocimiento disciplinar del docente influye notablemente en la enseñanza. Algunas investigaciones han mostrado evidencia de que un conocimiento más profundo de la materia resulta en un mayor énfasis sobre las explicaciones conceptuales (Ball, 1988; Wilson, 1988; Lampert, 1985, Steinberg y otros, 1985). Los profesores que comprenden el mapa más amplio de su asignatura, que entienden la relación de tópicos o habilidades individuales con tópicos más generales en su campo, también pueden ser más efectivos en la enseñanza de sus asignaturas; particularmente es clave en Matemáticas el conocimiento de "los conceptos, operaciones algorítmicas, las conexiones entre los diferentes procedimientos algorítmicos, el sistema de números sobre el que trabaja, la comprensión de la clase de errores del estudiante y la presentación del curriculum" (Leinhardt y Smith, 1985, p. 247).

Para la propuesta se hizo un compendio de los temas básicos y necesarios para la comprensión, solución y aplicación de las ecuaciones cuadráticas, a saber: los números reales y sus axiomas de cuerpo, la definición de ecuación y ecuación cuadrática y algunos métodos para su solución: por factorización, por completación de cuadrados, método geométrico, fórmula de la ecuación cuadrática, método gráfico habitual y método de Carlyle.

3.1 Números reales

De manera muy informal a nivel básico se presenta el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como la unión de los números racionales y los números irracionales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, es decir, está conformado por los decimales periódicos y los no periódicos. Sobre este conjunto se definen dos operaciones: la suma y el producto las cuales son cerradas, lo que significa

que para todo par de números reales a y b, existe un número real $a + b$ llamado suma y un número real $a \cdot b$ llamado producto.

Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, con respecto a la suma, se cumplen los siguientes axiomas:

i. **Conmutatividad:** $a + b = b + a$
ii. **Asociatividad:** $a + (b + c) = (a + b) + c$
iii. **Existencia de módulo:** Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$
iv. **Existencia de inverso aditivo:** Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$, que se denomina inverso aditivo, y que satisface que: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Y, si a, b y $c \in \mathbb{R}$ para el producto se satisfacen:

v. **Conmutatividad:** $a \cdot b = b \cdot a$
vi. **Asociatividad:** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
vii. **Existencia de elemento neutro:** Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
viii. **Existencia de inverso multiplicativo:** Para todo $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$, que se denomina inverso multiplicativo, y que cumple que: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

También existe un axioma que relaciona la suma y el producto así:

ix. **Distributividad:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

La existencia del inverso aditivo y multiplicativo permite definir la diferencia y el cociente entre números reales, así:

- **Def. 1. Diferencia:** Para a y b números reales se tiene que $a - b$ es la diferencia entre a y b y se define así: $a - b = a + (-b)$

- **Def. 2. Cociente:** Para a y b con $b \neq 0$, el cociente entre a y b se denota $\frac{a}{b}$ y se define así: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Los once axiomas presentados anteriormente se denominan axiomas de cuerpo.

3.1.1 Relación de orden y Axioma de completez

En los números reales se define una relación de orden que se denota así ($\leq$). Esta relación es de orden total, puesto que para cualquier par de números reales a y b, siempre es posible establecer una comparación entre estos dos números, es decir, se puede establecer si $a \leq b$ o $b \leq a$.

Esta relación es además compatible con la suma puesto que para todos a, b y c, números reales, si $a \leq b$ también se tiene que $a + c \leq b + c$. Además es compatible con la multiplicación puesto que para todos a, b y c, números reales, si $a \leq b$ y $c \geq 0$ también se tiene que $ac \leq bc$. Por lo tanto se puede decir que los números reales son un cuerpo ordenado.

Finalmente se tiene el Axioma de completez o axioma del supremo:

- **Axioma de completez:** Todo subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$, acotado superiormente, posee extremo superior, esto es, existe un número real $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sup(S)$.

3.2 Igualdad y ecuación

En matemáticas de forma regular se mencionan los términos de igualdad y ecuación. A continuación se encuentran sus definiciones y algunos aspectos importantes relacionados con estos dos conceptos.

3.2.1 Igualdad

Una igualdad es una expresión de equivalencia de dos cantidades numéricas o literales.

Si a, b y c son números reales y se tiene que $a = b$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

I. $a + c = b + c$

II. $a \cdot c = b \cdot c$

La igualdad es una relación de equivalencia, es decir, es: reflexiva, simétrica y transitiva, esto quiere decir que para a, b y c números reales:

i. **Propiedad reflexiva de la igualdad:** $a = a$

ii. **Propiedad simétrica de la igualdad:** Si $a = b$ entonces $b = a$

iii. **Propiedad transitiva de la igualdad:** Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$

Con respecto a las igualdades, se destaca el Teorema del factor cero, el cual indica lo siguiente:

Teorema del factor cero: Sean p, q números reales. Se tiene que $p \cdot q = 0$ si y solo si $p = 0$ o bien $q = 0$.

Dicho teorema se usa con frecuencia en la solución de algunas ecuaciones cuadráticas como se verá más adelante.

3.2.2 Ecuación

Una ecuación es una igualdad que tiene uno o más valores desconocidos que se denominan incógnitas. El lado derecho e izquierdo de la ecuación se denominan miembros de ésta.

Algunos tipos comunes de ecuaciones son:

Una ***ecuación identidad***, es una igualdad en la cual ambos miembros son iguales para todos los valores de las variables para los cuales estén definidos los miembros, como por ejemplo: $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

Una ***ecuación condicional***, o simplemente ecuación, es una igualdad en la cual ambos miembros son iguales solamente para ciertos valores de las variables, como por ejemplo: $3x-4=11$ o $x^2-9=0$.

Una ***contradicción*** es una ecuación que no tiene solución, como por ejemplo: $2x-4=8+2x$.

Resolver una ecuación implica determinar todos los valores que puede tomar la incógnita de forma que se satisfaga la igualdad, es decir, aquellos valores que cuando se reemplacen en la ecuación inicial conduzcan a valores iguales en los dos miembros de ésta; dichos valores se denominan soluciones o raíces de la ecuación.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones, por ejemplo:

$3x-8=4$ y $-2x=-8$ cuya solución es $x=4$

3.3 Polinomios

Un polinomio es una expresión de la forma:

$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se denominan ***coeficientes*** y a_0 se denomina ***coeficiente constante.***

3.3.1 Raíces de un polinomio

r es una raíz del polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si y solo si $p(r) = 0$.

3.4 Ecuaciones polinómicas

Las ecuaciones se pueden clasificar en polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y racionales.

Las ecuaciones polinómicas en una variable son aquellas en las que sus dos miembros son polinomios. Una ecuación polinómica de grado n es de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. a_n se denomina coeficiente principal.

3.4.1 Teorema fundamental del Álgebra

Toda ecuación polinómica con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en los complejos.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

Es decir que, una ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n raíces en los complejos, algunas de ellas pueden estar repetidas por ejemplo m veces ($m \leq n$), lo que implica que su multiplicidad algebraica es m.

La factorización

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

combinada con la propiedad antes mencionada (el producto es cero si alguno de sus factores es cero), sugiere un método para resolver ecuaciones polinómicas, por lo tanto si:

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$, entonces $x = x_1$ o $x = x_2$ o … $x = x_n$.

3.4.2 Relaciones de Vieta

Las relaciones de Vieta permiten expresar los coeficientes de un polinomio de cualquier grado en función de sus raíces y en forma inversa establecen una relación entre las raíces y los coeficientes, lo que en algunos casos puede constituir un método alterno para resolver ecuaciones polinómicas o algunos sistemas de ecuaciones.

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las raíces de la ecuación polinómica:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

entonces:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Para aclarar la afirmación de la utilidad de las relaciones de Vieta, se puede pensar en los siguientes problemas:

1. Encontrar dos números cuya suma sea 7 y cuyo producto sea 12, lo que equivale a resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} m+n=7 \\ mn=12 \end{cases}$, siendo m y n las incógnitas.

Teniendo en cuenta las relaciones de Vieta, esto equivale a plantear una ecuación cuadrática, para mayor sencillez, una ecuación de la forma $x^2+bx+c=0$. Si las raíces de esta ecuación son m y n, se tiene entonces:

$$m+n=\frac{-b}{1} \quad \rightarrow \quad 7(1)=-b \quad \rightarrow \quad -7=b$$

$$mn=\frac{c}{1} \quad \rightarrow \quad 12(1)=c \quad \rightarrow \quad 12=c$$

Esto quiere decir, que la solución del problema se puede encontrar determinando las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2-7x+12=0$.

2. Resolver la ecuación cuadrática $x^2+3x-10=0$.

De acuerdo con las relaciones de Vieta, el problema es equivalente a encontrar dos números m y n cuya suma sea $-\frac{b}{a}=-\frac{3}{1}=-3$, es decir que $m+n=-3$ y por otra parte, cuyo producto sea $\frac{c}{a}=\frac{-10}{1}=-10$, es decir que $mn=-10$. En resumen, la solución de la ecuación cuadrática se puede transformar en resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m+n=-3 \\ mn=-10 \end{cases}$$

Adicionalmente, para algunos sistemas (con soluciones enteras) el uso de tanteo o ensayo y error permite encontrarlas en forma sencilla. Para el problema propuesto las posibles soluciones se presentan en la tabla 3-1:

Tabla 3-1: Ejemplo de las relaciones de Vieta

m	n	$mn = -10$	$m + n = -3$
1	- 10	- 10	- 9
10	- 1	- 10	9
5	- 2	- 10	3
- 5	2	- 10	- 3

Por lo tanto, se puede concluir que las raíces de dicha ecuación son $x = -5$ y $x = 2$.

3.4.3 Ecuación lineal

Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de grado 1 que se puede escribir de la forma:

$$ax + b = 0, \text{ donde } a \neq 0$$

- **Solución de una ecuación lineal**

Para resolver una ecuación lineal de la forma $ax + b = 0$ se usan algunos axiomas y algunas propiedades de los números reales y de las igualdades.

$ax + b = 0$	
$ax + b - b = 0 - b$	Propiedad I de la igualdad y existencia del inverso aditivo
$ax + 0 = -b$	Asociatividad de la suma
$ax = -b$	Modulativa de la suma
$ax\left(\frac{1}{a}\right) = -b\left(\frac{1}{a}\right)$	Propiedad II de la igualdad y existencia del inverso multiplicativo
$\left(a.\frac{1}{a}\right)x = -b\left(\frac{1}{a}\right)$	Asociatividad y conmutatividad del producto
$(1)x = \frac{-b}{a}$	Modulativa del producto

$x = \frac{-b}{a}$

Por lo tanto la solución de la ecuación lineal $ax + b = 0$ es única y su valor es $x = \frac{-b}{a}$.

Ejemplo: Determinar la solución de la siguiente ecuación lineal $5x - 2x + 13 = x - 11$.

$5x - 2x + 13 = x - 11$	
$3x + 13 = x - 11$	
$3x + 13 - 13 = x - 11 - 13$	Propiedad I de la igualdad y existencia del inverso aditivo
$3x + 0 = x - 24$	Asociatividad de la suma
$3x = x - 24$	Modulativa de la suma
$3x - x = x - 24 - x$	Propiedad I de la igualdad
$2x = 0 - 24$	Asociatividad de la suma y existencia del inverso aditivo.
$2x = -24$	Modulativa de la suma
$(2x)\left(\frac{1}{2}\right) = (-24)\left(\frac{1}{2}\right)$	Propiedad II de la igualdad y existencia del inverso multiplicativo
$\left(2.\frac{1}{2}\right)x = \frac{-24}{2}$	Asociatividad y conmutatividad del producto.
$(1)x = -12$	Modulativa del producto
$x = -12$	

3.4.4 Ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es una ecuación polinómica de grado 2 que se puede escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ donde } a \neq 0$$

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación cuadrática, se cumplen las relaciones de Vieta, así:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

De acuerdo con el Teorema fundamental del Álgebra, las ecuaciones cuadráticas tienen exactamente dos raíces (es decir una raíz real de multiplicidad 2 o dos raíces diferentes reales o complejas).

3.5 Métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas

Existen diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, a continuación se describen algunos y se ilustran con ejemplos.

3.5.1 Método de factorización

Si un polinomio de grado dos, $p(x) = ax^2 + bx + c$, se puede escribir como producto de dos polinomios de primer grado, es posible encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática asociada igualando a 0 cada factor. Esto se puede hacer gracias al teorema del factor cero que se presentó en secciones anteriores. Es importante aclarar que para poder aplicar el procedimiento descrito, es necesario que la ecuación cuadrática esté escrita en su forma estándar, es decir, igualada a cero.

Esto quiere decir que si el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se puede escribir como el producto de dos polinomios lineales $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, se puede aplicar el teorema del factor cero para encontrar las soluciones, encontrando el valor de x en cada una de las ecuaciones lineales resultantes.

Ejemplo: Determinar las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 72 = 0$

$x^2 - x - 72 = 0$			
$(x-9)(x+8) = 0$			Factorización del polinomio
$(x-9) = 0$	o	$(x+8) = 0$	Teorema del factor cero
$x = 0 + 9$	o	$x = 0 - 8$	Despejar x en cada una de las
$x = 9$	o	$x = -8$	Ecuaciones lineales

Por lo tanto las soluciones de la ecuación cuadrática dada son $x = 9$ y $x = -8$.

A través del método de factorización, se puede demostrar una propiedad importante que también se usa en la solución de algunas ecuaciones cuadráticas.

- **Propiedad de la raíz:** Si $d \geq 0$ y $x^2 = d$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$

Demostración:

$x^2 - d = 0$			
$(x+\sqrt{d})(x-\sqrt{d}) = 0$			Diferencia de cuadrados perfectos
$x + \sqrt{d} = 0$	o	$x - \sqrt{d} = 0$	Teorema del factor cero
$x = 0 - \sqrt{d}$	o	$x = 0 + \sqrt{d}$	Despejar x en cada una de las ecuaciones
$x = -\sqrt{d}$	o	$x = \sqrt{d}$	lineales

$x = \pm\sqrt{d}$

Esta propiedad da la posibilidad de resolver algunas ecuaciones cuadráticas sin escribirlas en la forma estándar, por ejemplo:

Ejemplo: Determinar las soluciones de la ecuación cuadrática $(3x-4)^2 = 64$

$(3x-4)^2 = 64$	
$3x - 4 = \pm\sqrt{64}$	Propiedad de la raíz
$3x - 4 = \pm 8$	Definición de raíz

$3x-4=-8$	o	$3x-4=8$	
$3x=-8+4$	o	$3x=8+4$	Despejar x en cada una de las ecuaciones
$3x=-4$	o	$3x=12$	lineales
$x=\frac{-4}{3}$	o	$x=\frac{12}{3}$	
$x=\frac{-4}{3}$	o	$x=4$	

Por lo tanto las soluciones de la ecuación cuadrática son $x=\frac{-4}{3}$ y $x=4$.

3.5.2 Método de completar el cuadrado.

El método de factorización funciona perfectamente en el caso que el polinomio cuadrático asociado sea factorizable sobre los enteros, sin embargo, en caso contrario, aún es posible usar un recurso algebraico muy útil; la completación de cuadrados combinado con el proceso descrito en el apartado anterior. Veamos como:

Dada una ecuación cuadrática de la forma $x^2+bx=c$, si se les suma a ambos lados de la ecuación el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, se obtiene en el miembro izquierdo de la ecuación un trinomio cuadrado perfecto así:

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad \left(x+\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Después de completar los cuadrados se procede a aplicar la propiedad de la raíz para poder determinar finalmente las soluciones de la ecuación.

Ejemplo: Determinar las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2-8x+11=0$

$x^2-8x+11=0$	
$x^2-8x+11-11=0-11$	Propiedad I de la igualdad
$x^2-8x+0=-11$	Existencia del inverso aditivo y del módulo de la suma

$x^2 - 8x = -11$	Existencia del módulo de la suma
$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -11 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$	Propiedad I de la igualdad
$x^2 - 8x + 16 = -11 + 16$	
$(x-4)^2 = 5$	Trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo
$x - 4 = \pm\sqrt{5}$	Propiedad de la raíz
$x = \pm\sqrt{5} + 4$	Despejar x en cada una de las ecuaciones

Por lo tanto las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = -\sqrt{5} + 4$ y $x = \sqrt{5} + 4$

Es de notar que este proceso permite encontrar raíces irracionales.

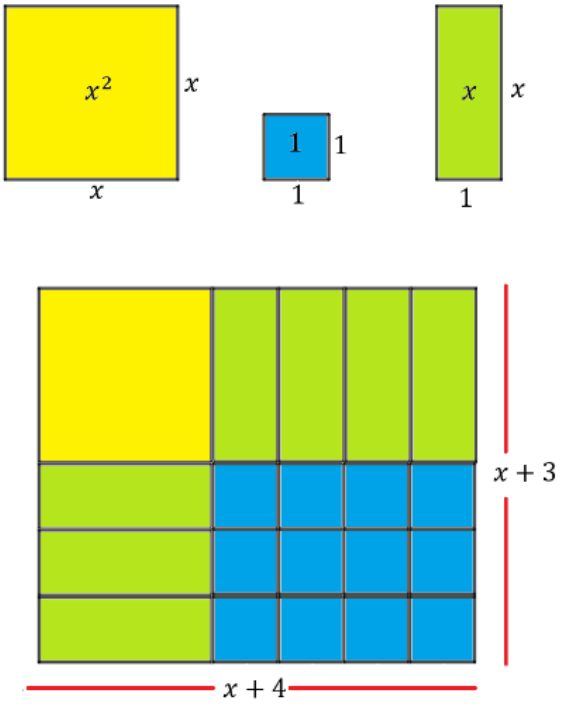
3.5.3 Método de factorización apoyado en lo geométrico

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$ y $b, c \geq 0$, el método de factorización descrito en el apartado 3.5.1 puede, en algunos casos, facilitarse apoyándose en la geometría para factorizar el trinomio del miembro izquierdo. Suponiendo que el término $ax^2 + bx + c$ corresponde al área de un rectángulo cuya longitud de la base es B y la longitud de la altura es H, el miembro izquierdo de la ecuación puede expresarse como $ax^2 + bx + c = B.H$.

Después de obtener la factorización a través de este método, retornamos a la ecuación y aplicamos el teorema del factor cero.

Ejemplo: Determinar las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Imagen 3-1: Factorización del trinomio a través del método geométrico



Se tiene que: $x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$

Volviendo a la ecuación

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x + 4 = 0$	o	$x + 3 = 0$	Teorema del factor cero
$x = 0 - 4$	o	$x = 0 - 3$	Despejar x en cada una de las ecuaciones
$x = -4$	o	$x = -3$	

Por lo tanto las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = -4$ y $x = -3$.

Aunque el método suele ser atractivo para los estudiantes puesto que se puede abordar a través de materiales tangibles, es importante aclarar que constituye tan solo una ayuda en la factorización de ciertos trinomios y no se puede aplicar para aquellas ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones sean números irracionales o números complejos, lo cual

representa una desventaja frente a otros métodos. Como por ejemplo para la ecuación cuadrática $x^2 + 4x + 2 = 0$.

3.5.4 Método utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración:

$ax^2 + bx + c = 0$	
$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$	Propiedad I de la igualdad y existencia del inverso aditivo
$ax^2 + bx + 0 = -c$	Asociativa de la suma
$ax^2 + bx = -c$	Modulativa de la suma
$ax^2\left(\frac{1}{a}\right) + bx\left(\frac{1}{a}\right) = -c\left(\frac{1}{a}\right)$	Propiedad II de la igualdad, existencia del inverso multiplicativo y distributiva de la multiplicación con respecto a la suma
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	Propiedad I de la igualdad
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	Factorización del miembro izquierdo
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac+b^2}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$	
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\lvert 2a\rvert}$	Propiedad de la raíz
$x = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}$	Propiedad I de la igualdad

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se denomina ***discriminante (D)***. Este valor permite determinar la cantidad y clase de raíces que tiene la ecuación cuadrática, así:

- Si $D > 0$, la ecuación tiene 2 raíces reales diferentes
- Si $D = 0$, la ecuación tiene una raíz real de multiplicidad 2
- Si $D < 0$, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales

Ejemplo: Determinar las soluciones de la ecuación cuadrática $2x^2 - 3x - 4 = 0$

Se determinan los valores de a, b y c:

$$a = 2,\ b = -3 \text{ y } c = -4$$

Se reemplazan estos valores en la ecuación de la fórmula cuadrática y se realizan las operaciones correspondientes.

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

Por lo tanto las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = \frac{3+\sqrt{41}}{4}$ y $x = \frac{3-\sqrt{41}}{4}$.

Con respecto al discriminante, éste también se puede usar para determinar los valores que puede tomar un parámetro determinado, de forma que una ecuación cuadrática dada tenga o no soluciones en el conjunto de los números reales. Por ejemplo:

Ejemplo: Determinar todos los valores de k para los que la ecuación $2x^2 - 4k + 3x = 0$ tenga soluciones en el conjunto de los números reales.

Se determinan los valores de a, b y c:

$$a = 2,\ b = 3 \text{ y } c = -4k$$

Para que la ecuación tenga soluciones en el conjunto de los números reales, el discriminante debe ser 0 o un número positivo, es decir debe cumplir que $D \geq 0$.

$$D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-4k) = 9 + 32k$$

$$D \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad 9 + 32k \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad 32k \geq -9 \quad \leftrightarrow \quad k \geq -\frac{9}{32}$$

Por lo tanto, los valores que puede tomar k para que la ecuación cuadrática dada tenga soluciones en los números reales son todos los $k \geq -\frac{9}{32}$.

A través de la fórmula de la ecuación cuadrática es posible deducir las relaciones de Vieta así:

Dada una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ cuyas soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ahora se determinará el valor de $x_1 + x_2$ y $x_1.x_2$, así:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

Se tiene entonces que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1.x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{(2a)^2}$$

$$x_1.x_2 = \frac{b^2 - \ b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Y también se tiene que:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

3.5.5 Otros métodos

En Pieronkiewicz (2020), se exponen algunos métodos alternativos para resolver ecuaciones cuadráticas. Uno de los métodos se fundamenta en la aplicación de las relaciones de Vieta (como lo mencionamos antes). Un ejemplo adicional: encontrar las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 24 = 0$.

Los coeficientes de esta ecuación son: $a = 1$, $b = 2$ y $c = -24$. Teniendo en cuenta las relaciones de Vieta, si x_1 y x_2 son sus raíces, se debe cumplir que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2 \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-24}{1} = -24$$

El problema se reduce a buscar dos números cuyo producto sea – 24 y cuya suma sea - 2. Miremos los posibles números enteros que cumplen estas condiciones:

x_1	x_2	$x_1 x_2 = -24$	$x_1 + x_2 = -2$
1	- 24	- 24	- 23
2	- 12	- 24	- 10
3	- 8	- 24	- 5
4	**- 6**	**- 24**	**- 2**
6	- 4	- 24	2
8	- 3	- 24	5
12	- 2	- 24	10
24	- 1	- 24	23

Por lo tanto las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 24 = 0$ son $x = 4$ y $x = -6$.

Otro método fue presentado por Savage en 1989 y se explica a través del siguiente ejemplo. Encontrar las raíces de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 14x - 147 = 0$$

Se tienen que encontrar dos números p y q tales que: $x^2 + 14x - 147 = (x + p)(x + q)$. Estos números p y q deben cumplir que $p + q = 14$ y $pq = -147$.

Se tiene también que $\frac{p+q}{2} = 7$, lo cuál se podría interpretar como la media aritmética entre p y q. Se puede escribir $p = 7 - u$ y $q = 7 + u$ para $u > 0$; por lo tanto:

$$pq = (7 - u)(7 + u) = 49 - u^2 = -147$$

$$49 + 147 = u^2 \quad \rightarrow \quad 196 = u^2 \quad \rightarrow \quad \pm\sqrt{196} = u \quad \rightarrow \quad \pm 14 = u$$

Teniendo en cuenta la condición de que $u > 0$, se tendría entonces que $u = 14$.

$$p = 7 - u = 7 - 14 = -7 \quad \text{y} \quad q = 7 + u = 7 + 14 = 21$$

Por lo tanto $x^2 + 14x - 147 = (x - 7)(x + 21)$ y en consecuencia, las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 14x - 147 = 0$ son $x = 7$ y $x = -21$.

La mayor limitación de estos métodos es que se pueden aplicar con mayor facilidad, para aquellas ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones son números enteros.

3.6 Función cuadrática y características

Una función f es una función cuadrática sí:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

El dominio de una función f lo constituyen todos los valores para los cuales la función está definida; en el caso de las funciones cuadráticas, su dominio es el conjunto de los números reales. El rango de una función es el conjunto de todos los valores que toma $y = f(x)$, en el caso de la función cuadrática, el rango depende del valor máximo o mínimo que tome la función.

La gráfica de una función cuadrática corresponde a una parábola. Las parábolas son simétricas con respecto a una recta que se denomina eje de la parábola. El punto donde el eje corta a la parábola es el vértice, que es el punto más alto o bajo que toma la función.

Una función cuadrática de la forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \text{ con } a \neq 0,$$

es una parábola con vértice (h, k). Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba, como lo muestra la imagen 3-2 y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo, como se presenta en la imagen 3-3.

Imagen 3-2: Gráfica de la parábola cuando $a > 0$

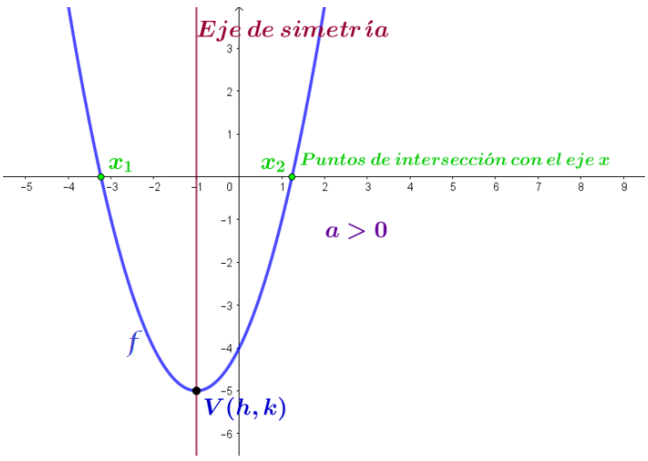
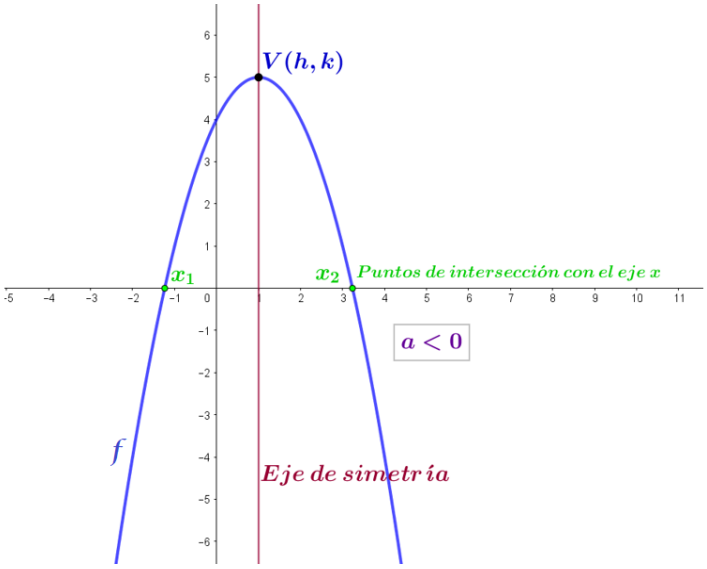


Imagen 3-3: Gráfica de la parábola cuando $a < 0$



Las coordenadas del vértice de la parábola corresponden a: el valor en el que se obtiene el máximo o mínimo y el valor máximo y mínimo respectivamente. Se puede calcular así: $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

El rango de la función es:

- Si $a > 0$ entonces $R = \left[f\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty\right)$
- Si $a < 0$ entonces $R = \left(-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$

3.6.1 Método gráfico para aproximar las soluciones

Este método presenta gran utilidad en la enseñanza de la solución de la ecuación cuadrática, en el sentido que puede ser usado para introducir o reforzar los conocimientos de los estudiantes sobre el plano cartesiano, la representación de funciones y el estudio de una de las cónicas más usada, como es la parábola.

Consiste en estudiar la función cuadrática asociada a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, cuya representación en el plano cartesiano corresponde a una parábola

que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$. En la solución de la ecuación cuadrática, interesa determinar los valores de x para los cuales $f(x) = 0$, es decir, se deben determinar o aproximar (si existen) los puntos en los cuales la parábola interseca el eje de las x; puntos de la forma $(x, 0)$.

Por otra parte, la gráfica de la función cuadrática asociada a la ecuación cuadrática dada, permite no solo determinar el número sino también el tipo de soluciones que tiene la ecuación, así:

- Si la parábola corta al eje x en dos puntos, la ecuación cuadrática tiene 2 soluciones reales diferentes.
- Si la parábola corta al eje x en un punto, la ecuación cuadrática tiene 1 solución real de multiplicidad 2.
- Si la parábola no corta al eje x en algún punto, la ecuación cuadrática no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Es muy posible que en el momento en el que se aborden las ecuaciones cuadráticas en algunas instituciones, no se hayan trabajado aún las cónicas y en particular las parábolas; esto es un buen pretexto para introducir el manejo de algunos graficadores, tales como el GeoGebra, que además de permitir al estudiante aproximar los interceptos (raíces de la ecuación), puede ser usado también para que puedan "jugar" o explorar con los coeficientes y descubrir de esta manera algunas propiedades de la curva o del tipo de soluciones.

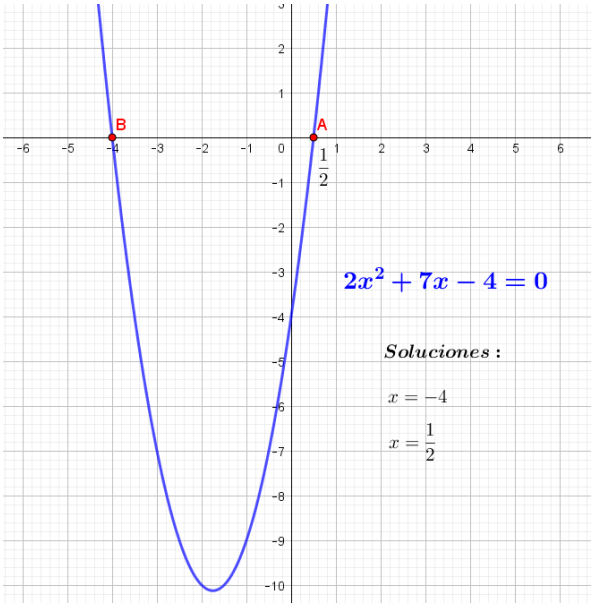
Teniendo en cuenta estos argumentos, se diseñó un applet para la sesión 3 de la secuencia didáctica; en el applet que se encuentra en el enlace https://www.geogebra.org/m/v9pavv2g, los estudiantes pueden interactuar con 3 deslizadores que representan los valores de los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática y a través de esta manipulación y análisis, pueden establecer conjeturas con respecto al número de soluciones de la ecuación cuadrática, así como determinar de qué coeficiente depende que la parábola abra hacía arriba o hacia abajo. Es importante resaltar, que el método en general nos permite aproximar las raíces de la ecuación

cuadrática dada y solo en casos especiales permite determinar con precisión el valor de dichas raíces.

Ejemplo: Determinar las soluciones de la ecuación cuadrática $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

En la imagen 3-4 se puede observar la representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$.

Imagen 3-4: Ejemplo del método gráfico habitual.



Al graficar la función cuadrática asociada, se puede observar en la imagen 3-4, que las coordenadas de las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica con el eje x son los valores de $x = -4$ y $x = \frac{1}{2}$, por lo tanto dichos valores corresponden a las soluciones o raíces de la ecuación.

3.6.2 Círculo de Carlyle

El círculo de Carlyle es un método que permite aproximar las soluciones reales de una ecuación cuadrática. Se incluyó en la secuencia didáctica ya que permite trabajar aún más en el plano cartesiano e introducir o reforzar el estudio de algunos elementos de la

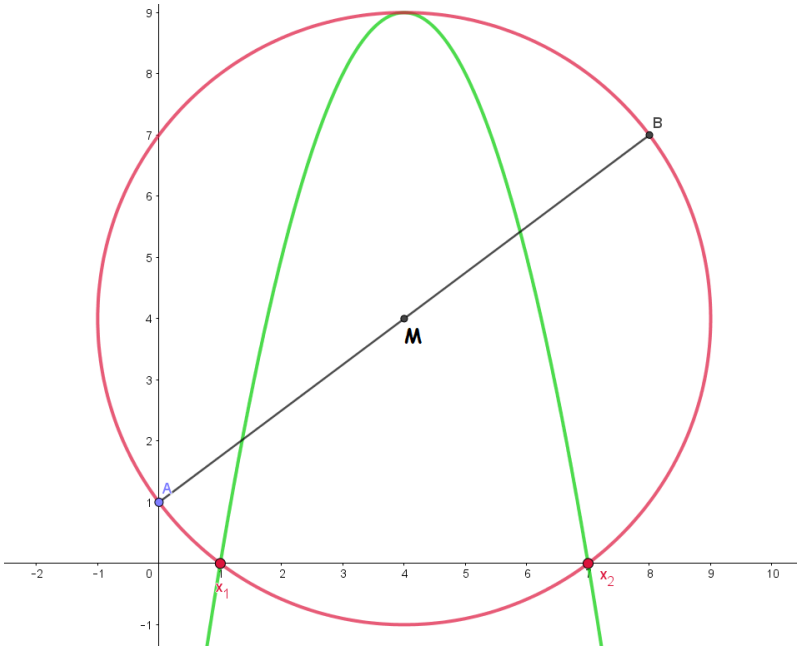
circunferencia (diámetro, centro y radio), la noción de punto medio, distancia entre puntos del plano y reforzar las relaciones de Vieta. A través de este método, también se puede acercar más a los estudiantes al uso de la tecnología, razón por la cual diseñó otro applet en GeoGebra cuyo enlace es https://www.geogebra.org/m/wqdbmamf y con el que se buscaba que los estudiantes pudieran apreciar el funcionamiento del método a través de la manipulación de los deslizadores. Tanto los deslizadores para los coeficientes a, b y c de la ecuación dada de forma original, como los deslizadores para los coeficientes S y P de la ecuación que se reescribe a partir de la inicial.

El círculo de Carlyle permite aproximar las soluciones reales de una ecuación cuadrática dada. El método consiste en:

- Tomar una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y reescribirla de la forma $x^2 - Sx + P = 0$ (para lograrlo se deben dividir todos los términos de la ecuación por a, y entonces $-S = \frac{b}{a}$ y $P = \frac{c}{a}$).
- Ubicar en el plano cartesiano los puntos de coordenadas $B(S, P)$ y $A(0, 1)$
- Trazar el segmento $\overline{AB}$ y luego trazar una circunferencia cuyo diámetro sea este segmento.
- Las coordenadas de las abscisas de los puntos de intersección de la circunferencia trazada con el eje x, corresponden a las raíces reales de la ecuación cuadrática dada.

La representación gráfica del círculo de Carlyle se puede aprenciar en la imagen 3-5.

Imagen 3-5: Círculo de Carlyle



La justificación de la efectividad del método se presenta a continuación:

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se escribe de la forma $x^2 - Sx + P = 0$, para esto se divide cada uno de los términos de la ecuación entre el coeficiente principal así:

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - \left(-\frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a} = 0$$

Se tiene entonces que $S = -\frac{b}{a}$ y $P = \frac{c}{a}$

Por otra parte, se toma el círculo que tiene como uno de sus diámetros el segmento que une los puntos $A(0,1)$ y $B(S,P)$. El centro de este círculo será el punto medio entre A y B, es decir el punto M de coordenadas:

$$M = \left(\frac{0+S}{2}, \frac{1+P}{2}\right) = \left(\frac{S}{2}, \frac{1+P}{2}\right)$$

Uno de los radios del círculo es el segmento $\overline{AM}$ cuya longitud es la distancia entre los puntos A y M:

$$r = \sqrt{\left(\frac{S}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1+P}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{S^2}{4} + \left(\frac{1+P-2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{S^2}{4} + \left(\frac{P-1}{2}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{S^2}{4} + \frac{(P-1)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{S^2 + (P-1)^2}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia de radio $\overline{AM}$ y centro en M es:

$$\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1+P}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{S^2 + (P-1)^2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1+P}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(S^2 + (P-1)^2)$$

Los interceptos de esta circunferencia con el eje x se encuentran haciendo $y = 0$, entonces

$$\left(x - \frac{S}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1+P}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(S^2 + (P-1)^2)$$

Efectuando todas las operaciones algebraicas de la expresión anterior, se tiene que:

$$x^2 - 2(x)\left(\frac{S}{2}\right) + \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \frac{1 + 2P + P^2}{4} = \frac{1}{4}(S^2 + P^2 - 2P + 1)$$

$$x^2 - Sx + \frac{S^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2P}{4} + \frac{P^2}{4} = \frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{4}(2P) + \frac{1}{4}(1)$$

$$x^2 - Sx + \frac{P}{2} = -\frac{P}{2} \qquad \rightarrow \qquad x^2 - Sx + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = 0$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Esta última expresión coincide con una transformación de la ecuación cuadrática inicial, lo que demuestra que las intersecciones de esta circunferencia con el eje x coinciden con las raíces de la ecuación inicial.

Es importante resaltar, que el aspecto más valioso del círculo de Carlyle, es que resulta más fácil graficar un círculo teniendo en cuenta dos puntos que pertenecen a este, en comparación con graficar una parábola de forma precisa, lo cual representa una ventaja para los estudiantes.

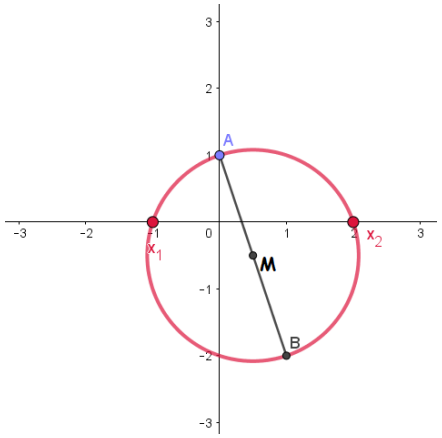
Ejemplo: Encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática $-3x^2 + 3x + 6 = 0$ haciendo uso del método de Carlyle.

Primero se escribe la ecuación en la forma $x^2 - Sx + P = 0$, para lograrlo se dividen todos los términos entre – 3 así:

$$\frac{-3}{-3}x^2 + \frac{3}{-3}x + \frac{6}{-3} = \frac{0}{-3} \quad \rightarrow \quad x^2 - 1x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - (1x) + (-2) = 0$$

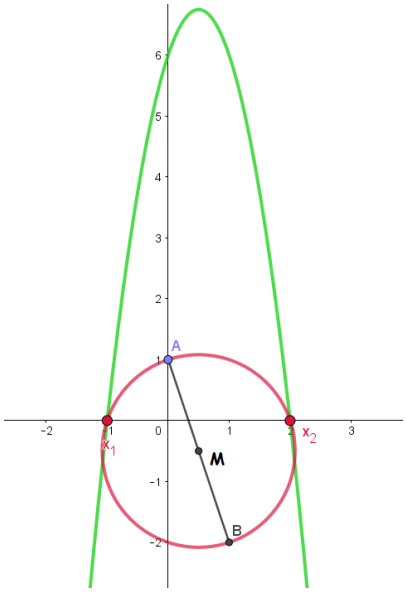
Por lo tanto $S = 1$ y $P = -2$. Se ubican los puntos $B(1, -2)$ y $A(0, 1)$ y se traza el segmento $\overline{AB}$. Se ubica el punto medio M de este segmento y se traza la circunferencia de radio MA, como se observa en la imagen 3-6.

Imagen 3-6: Ejemplo del método del círculo de Carlyle (circunferencia).



Las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia con el eje x son $(-1,0)$ y $(2,0)$, por lo tanto las soluciones de la ecuación cuadrática $-3x^2 + 3x + 6 = 0$ son $x = -1$ y $x = 2$. Podemos verificar trazando también la parábola en un mismo plano cartesiano para verificar de forma visual la validez del método, en la imagen 3-7:

Imagen 3-7: Ejemplo del método del círculo de Carlyle (circunferencia y parábola)



4. Capítulo: Marco Didáctico

La solución de problemas es considerada, desde hace algunos años, como una de las herramientas didácticas más importantes para la enseñanza de las Matemáticas. La razón fundamental por la que se diseñó y aplicó la secuencia presentada en este documento, basada en este enfoque, es por todas las habilidades que puede desarrollar el estudiante al adentrarse en la solución de un problema retador e interesante, destaco por ejemplo: la estimulación en la capacidad de crear, inventar, razonar y analizar.

A continuación, se presentarán los principales aspectos didácticos, relacionados con la resolución de problemas, que se tomaron como referencia en el trabajo.

4.1 ¿Qué es un problema? ¿Qué caracteriza un problema?

El desconocimiento o interpretación errada de la estrategia de resolución de problemas crea en muchos casos una falsa ilusión de estar trabajando con la herramienta didáctica, que, a juicio de grandes expertos, bien enfocada pareciera ser la ruta para “garantizar” el aprendizaje de los conceptos matemáticos incluidos en los currículos. En este sentido, de manera frecuente, algunos docentes de matemáticas planteamos a los estudiantes actividades en las cuáles deben resolver algunos “problemas”, pero en ocasiones, estas actividades no corresponden efectivamente a una situación problémica, sino a situaciones que pueden resolverse de forma rutinaria y no requieren mayor esfuerzo para los estudiantes; por esta razón es importante empezar por definir lo que es un ***problema*** en el contexto de la educación matemática.

De la amplia literatura respecto al tema, se destacan algunas definiciones:

Para Álvarez de Zayas, un problema es el punto de partida que permite al estudiante acercarse al conocimiento y que, a través de la búsqueda de su solución, se puede apropiar de dicho conocimiento y además, puede aprender habilidades relacionadas con éste (como se citó en Pérez y Beltrán, 2011, p. 77).

Otras definiciones de "problema" se encuentran en Alfaro (2008); una de ellas es la definición de Charnay, quién establece que una situación se convierte en problema cuando representa cierta dificultad para el estudiante, por tal razón esta situación puede ser un problema para algunos estudiantes y no para otros. En Alfaro también se destaca la definición dada por Callejo, en donde establece que un problema es una situación cuya solución no es inmediata para la persona que la aborda, por tanto, también depende de la persona que está enfrentado la situación.

Finalmente se mencionará la definición de Hiebert, que es la más adecuada en relación con este trabajo. Para Hiebert, un problema es una tarea o actividad para la cual los estudiantes no tienen reglas o métodos establecidos o memorizados, ni existe una percepción de que hay un método de solución específico correcto" (como se citó en Van de Walle, Karp y Bay – Williams, s.f., p. 34).

Teniendo en cuenta esta definición, es importante que un problema tenga como mínimo las siguientes características:

- Debe tener en cuenta los presaberes de los estudiantes. Es importante que los problemas que se propongan puedan abordarse a partir de los conocimientos previos, adquiridos por los estudiantes hasta el momento, en otras palabras, estos problemas deben ser acordes al nivel conceptual y a las habilidades que posean los estudiantes.
- Debe enmarcarse en un contexto atractivo, motivante y significativo para los estudiantes; dichos contextos pueden ser de su cotidianidad, de otra asignatura o ciencia, relacionado con los intereses particulares propios de su edad o de la matemática misma.

- Deben requerir de justificaciones y explicaciones. Es fundamental que los problemas le exijan al estudiante la argumentación en relación con la estrategia de solución escogida y a la validez de la respuesta encontrada.
- Deben poderse resolver a través de diferentes estrategias. Esto permite que el estudiante explore diferentes heurísticas y reflexione con respecto a la pertinencia de estas en el abordaje de la situación dada.

Según varios autores del NCTM[2], los problemas son el medio más efectivo para facilitar el desarrollo de ideas matemáticas o el aprendizaje de estas (como se citó en Van de Walle, Karp y Bay – Williams, s.f., p. 32); por esta razón, se puede evidenciar que en los lineamientos curriculares, tanto internacionales como nacionales, se encuentra la resolución de problemas como uno los procesos que debe desarrollar y fortalecer todo estudiante.

En los *Principios y estándares de las matemáticas escolares* del NCTM, se contemplan algunos que deben considerarse en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Inicialmente se establecen los estándares de contenido, que son temas que deben abordarse a lo largo de todos los niveles, dichos tópicos son: los números y sus operaciones, el álgebra, la geometría, la medición y el análisis de datos y la probabilidad. Además de los estándares de contenido, también se establecen los estándares de proceso, que hacen referencia a las habilidades que debe desarrollar cada estudiante, éstos son: la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación (Van de Walle, Karp y Bay – Williams, s.f., p. 3)

Por otra parte, en los *Estándares básicos de competencias en matemáticas,* del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, inicialmente se mencionan los cinco procesos que se deben desarrollar en la enseñanza de las matemáticas, estos procesos son: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Luego presentan una división del pensamiento matemático, teniendo en cuenta ejes temáticos comunes así: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento

[2] Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos

variacional y pensamiento aleatorio. Se puede observar de esta forma una relación directa tanto en la organización de contenidos, como en los procesos que se deben fortalecer en los estudiantes, en los lineamientos dados por el NCTM en Estados Unidos y en el MEN en Colombia.

Con respecto a la formulación, planteamiento y solución de problemas en los estándares básicos de competencias en Matemáticas del MEN, se afirma que dicho proceso podría convertirse en el eje articulador de todo el currículo y además se resalta su importancia debido a que es una de las actividades que permiten evidenciar si un estudiante es competente matemáticamente (MEN, 2006, p. 51 - 52).

En relación con la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas, Schroeder y Lester (1989), mencionan tres enfoques diferentes. El primero es el enfoque de *enseñanza para la resolución de problemas*, el cual se relaciona con el método tradicional de enseñanza, en donde se imparte un nuevo tema y posteriormente se aplica en la solución de diferentes situaciones contextualizadas. En segundo lugar se encuentra el enfoque de *enseñanza sobre la resolución de problemas*, el cual apunta a la enseñanza y aplicación de las diferentes estrategias que permiten dar solución a un problema dado; es importante resaltar que este enfoque es bueno, siempre y cuando esté integrado con el aprendizaje de los conceptos matemáticos y no se centre únicamente en el desarrollo de estrategias. Con respecto a este enfoque, el matemático George Pólya escribió en 1945 el libro *How to Solve It*, en el cual se describen los cuatro pasos que se deberían seguir al resolver una determinada situación problema; dichos pasos son: comprender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás. Finalmente, Schroeder y Lester mencionan el enfoque de *enseñanza a través de la resolución de problemas*, en el cual los estudiantes construyen conceptos y aprenden matemáticas a través de la solución de problemas enmarcados en contextos matemáticos o reales. Es este último enfoque el que permite un aprendizaje más duradero y significativo y en donde el papel del docente toma gran relevancia, puesto que tiene que acompañar al estudiante brindando la información suficiente, sin necesidad de dar pautas con respecto a una estrategia de solución determinada, ni mucho menos la solución de la situación problema. (como se citó en Van de Walle, Karp y Bay – Williams, p. 32)

Algunos de los beneficios de trabajar a través del enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas, se destacan en Walle (s.f.):

- Concentra la atención de los estudiantes en las ideas y la construcción de conceptos.
- Desarrolla los procesos matemáticos.
- Desarrolla la confianza y la identidad de los estudiantes en el proceso de "hacer" matemáticas.
- Proporciona un contexto para ayudar a los estudiantes a construir un significado para el concepto.
- Permite el abordaje de una situación, desde diferentes puntos de vista.
- Mejora la disciplina en el aula, al estar los estudiantes concentrados en darle solución a una tarea determinada.
- Proporciona datos de evaluación formativa: estrategias de solución, ideas erróneas, aplicación de conceptos.

En Walle (s.f.) se sugieren tres fases que deberían guiar la enseñanza a través de la resolución de problemas; la primera se denomina *fase previa o fase antes* y es la etapa en la cual se activan los conceptos previos que tienen los estudiantes, o como los llamaba Schoenfeld, los recursos. En esta fase se verifica la comprensión de la situación propuesta y se determinan las dinámicas con respecto al modo de trabajo de los estudiantes y a la presentación de los resultados. Luego viene la *fase durante,* en donde los estudiantes exploran la situación usando diversas estrategias; los estudiantes pueden encontrar tanto aciertos como errores, que también revisten de gran importancia puesto que muchas veces representan oportunidades de aprendizaje como lo menciona Boaler y Humphreys en el 2005 (como se citó en Van de Walle, Karp y Bay – Williams, s.f., p. 52). En esta etapa el docente debe observar los diferentes razonamientos y proporcionar el apoyo adecuado, sin dar directamente la solución ni la estrategia más conveniente. Finalmente se debe desarrollar la *fase posterior o fase después*, en donde los estudiantes discuten acerca de las estrategias y soluciones encontradas y el docente escucha atentamente sin emitir juicios de valor, finalmente resume las ideas principales y formaliza los conceptos o ideas involucrados en la situación.

Aunque el enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas es uno de los que mayores beneficios traen para el estudiante, a continuación se ahondará en el método de los cuatro pasos de Pólya para resolver un problema, puesto que es un método valioso que todo estudiante debería aplicar cuando se enfrente a una situación dada.

4.1.1 Método de los cuatro pasos de Pólya

George Pólya fue un matemático húngaro que dedicó gran parte de su trabajo al diseño de un método que pudiera aplicarse en la solución de diferentes tipos de problemas; y también trabajó en la caracterización de algunas de las estrategias que podían implementarse en el abordaje de las situaciones propuestas, puesto que para él, el punto central en la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo de diferentes tácticas para la resolución de problemas (Alfaro, 2006, p.1).

El método diseñado por Pólya es conocido como el ***método de los cuatro pasos*** y no se aplica únicamente en la solución de problemas de matemáticas, sino que pueden usarse en situaciones relacionadas con otros contextos. El método de Pólya cobra verdadera importancia cuando no solo se centra en el aprendizaje de las diferentes heurísticas propuestas o en la aplicación de los cuatro pasos, sino cuando se abordan de forma simultánea los conceptos o procedimientos.

Los cuatro pasos que conforman el método de Pólya son:

- ***Comprender el problema:*** Este paso consiste en leer detalladamente la situación a resolver para comprender que es lo que se debe calcular o determinar; algunas de las preguntas que se deben analizar en este paso, según lo descrito por Alfaro (2006) son: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuáles son las condiciones? ¿Es suficiente la información?

- ***Concebir un plan:*** Consiste en determinar una estrategia de solución para abordar el problema. Dentro de esta etapa se pueden considerar diferentes estrategias tales como la elaboración de tablas o diagramas, búsqueda de patrones, resolver un problema similar pero más sencillo, elaborar un dibujo o bosquejo, escribir una ecuación y resolverla, usar fórmulas cuando corresponda, trabajar hacía atrás, suponer y verificar, usar ensayo y error y usar el sentido común.

- ***Ejecutar el plan:*** Consiste en aplicar la estrategia determinada en el paso anterior. Si en la aplicación de la estrategia el estudiante se da cuenta que dicho camino no lo llevará a la solución, se debe replantear el plan y las estrategias que se usarán.

- ***Examinar la solución o mirar hacia atrás.*** Consiste en verificar si la respuesta que se encontró cumple con las condiciones del problema y si es válida o coherente para el contexto. Algunas de las preguntas que se deben analizar en este paso, según lo descrito por Alfaro (2006) son: ¿Se puede verificar el resultado?, ¿se puede obtener el mismo resultado en forma diferente?, ¿se puede usar el resultado o la estrategia en otro problema? Esta última pregunta es de gran relevancia, puesto que puede permitir la adquisición de nuevas herramientas o habilidades que podrían generalizar para abordar posteriormente un problema con ciertas condiciones similares.

Aunque Pólya hizo mayor énfasis en los pasos que se debían seguir y en las estrategias que se podían usar frente a la solución de un problema, también mencionó la relevancia del papel del docente en el acompañamiento del proceso de resolución. Según Pólya, el papel del docente es ayudar al estudiante de forma suficiente y necesaria, es decir, es un facilitar en brindar las herramientas necesarias para que el estudiante pueda abordar la situación para encontrar la respuesta. La información que se puede brindar se relaciona con la notación, la terminología utilizada y la aclaración o formalización de ciertos procesos que sean necesarios. Por otra parte, también menciona que es fundamental buscar despertar el interés y la motivación de los estudiantes en la búsqueda de solución de un determinado problema, puesto que es fundamental para que el estudiante sienta deseo por intentar resolverlo (como se citó en Alfaro, 2006, p. 4).

4.1.2 Estrategias para la resolución de problemas

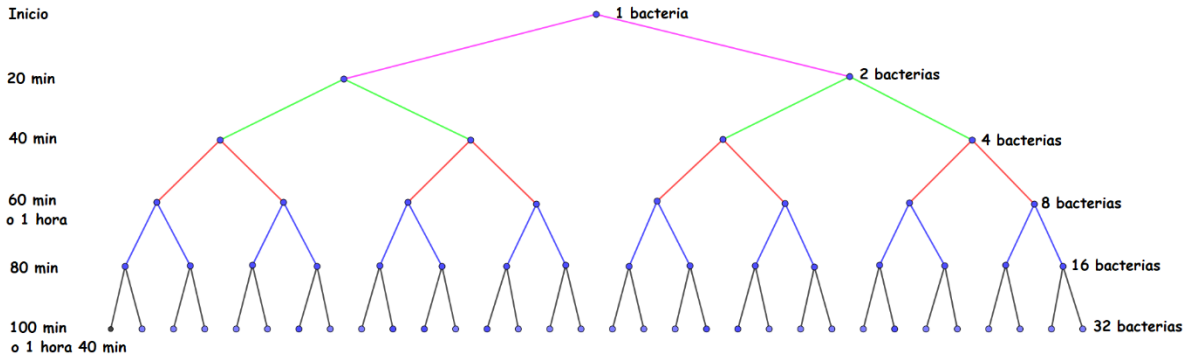
En este apartado se ejemplificarán algunas de las estrategias que pueden ser usadas en la resolución de problemas, según lo establecido por Pólya.

- ***Elaboración de tablas o diagramas.*** Esta estrategia se puede usar cuando se requiere organizar los datos de una situación para reconocer más fácilmente alguna relación o patrón.

Ejemplo: La *Escherichia coli* es una bacteria que habita comúnmente en el intestino humano y puede producir infecciones intestinales y urinarias. La colonia de bacterias *Escherichia coli* se duplica cada 20 minutos. Si en un comienzo la vejiga y el tracto urinario de una persona contiene 1 bacteria de este tipo, ¿Cuántas habrá al cabo de una hora?, ¿y al cabo de una hora y cuarenta minutos?[3]

Solución: Se puede realizar un diagrama de árbol hasta calcular el número de bacterias que hay al cabo de una hora y al cabo de un hora y cuarenta minutos, así como se muestra en la imagen 4-1:

Imagen 4-1: Ejemplo de estrategia de elaborar tablas o diagramas

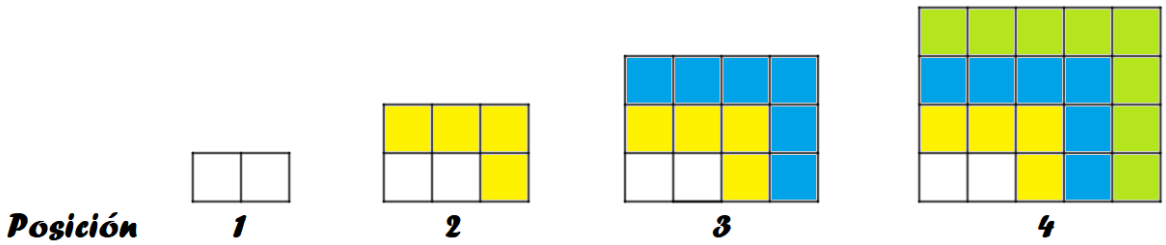


[3] Adaptado de: https://issuu.com/aprendeciencia/docs/7mo_basico_santillana_-_alumno/35

Por lo tanto al cabo de 1 hora hay 8 bacterias. Y al cabo de una hora 40 minutos hay 32 bacterias.

- ***Búsqueda de patrones.*** Esta estrategia se puede usar en situaciones relacionadas con secuencias, en donde se hace necesario encontrar un patrón y establecer una generalización.

Ejemplo: Observa la siguiente secuencia de rectángulos compuesto por cuadrados pequeños.



¿Cuántos cuadrados pequeños tiene la figura de la posición 6? ¿Cuántos cuadrados pequeños tiene la figura de la posición n?

Solución: Se puede realizar una tabla en la cual se relacione la posición con la cantidad correspondiente de cuadrados pequeños, así como se muestra en la tabla 4-1:

Tabla 4-1: Ejemplo de estrategia de búsqueda de patrones.

Posición	Cantidad de cuadrados
1	$2 = 1 + 1 = \mathbf{1}(2)$
2	$6 = 2 + 2 + 2 = \mathbf{2}(3)$
3	$12 = 3 + 3 + 3 + 3 = \mathbf{3}(4)$
4	$20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \mathbf{4}(5)$
6	$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \mathbf{6}(7) = \mathbf{42}$
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n}(n+1)$

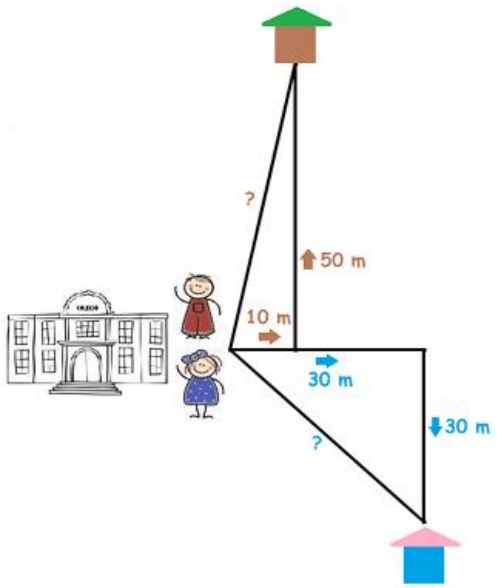
Por lo tanto se puede concluir, que el número de cuadrados pequeños que hay en la posición 6 es 42 y en la posición n se tienen $n(n+1) = n^2 + n$ cuadrados.

- ***Elaborar un bosquejo o dibujo.*** Esta estrategia se puede usar cuando se trata de una situación física y es posible realizar una representación visual de ésta; también se puede usar cuando está relacionada con un contexto geométrico.

Ejemplo: Juan camina después de salir del colegio cada tarde 10 metros hacia el este y 50 metros hacía el norte para llegar a su casa, Rosario camina 30 metros hacia el este y 30 metros hacia el sur y también llega a su casa. ¿Cuál es la distancia en línea recta desde la casa de cada uno al colegio?

Solución: Se realiza un dibujo para tener una representación gráfica de la situación y luego determinar el concepto o procedimiento matemático que se podría utilizar para determinar la solución. El dibujo se muestra en la imagen 4-2.

Imagen 4-2: Ejemplo de estrategia de elaborar un bosquejo o dibujo



Usamos el teorema de Pitágoras para determinar cada una de las distancias:

Juan	**Rosario**
$h^2 = a^2 + b^2$	$h^2 = a^2 + b^2$
$h^2 = 10^2 + 50^2$	$h^2 = 30^2 + 30^2$
$h^2 = 100 + 2500$	$h^2 = 900 + 900$
$h^2 = 2600$	$h^2 = 1800$
$h = \sqrt{2600}$	$h = \sqrt{1800}$
$h \approx 50{,}9$	$h \approx 42{,}4$

Por lo tanto la distancia desde la casa de Juan al colegio es de aproximadamente 50,9m. y desde la casa de Rosario al colegio es de 42,4m.

- ***Escribir una ecuación y resolverla.*** Esta estrategia se puede usar cuando se hace uso de variables, cuando se deba establecer una generalización o cuando se pueda modelar a través de una ecuación.

Ejemplo: Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás ocho novenos del enjambre; sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florcilla, de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?[4]

Solución: Si x es el número de abejas que formaban inicialmente el enjambre, se tiene que:

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\frac{x}{2}}=x-\frac{8}{9}x-2$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{1}{9}x-2 \qquad \rightarrow \qquad \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{9}x-2\right)^2$$

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{81}x^2-\frac{4}{9}x+4 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x}{2}=\frac{x^2-36x+324}{81}$$

$$81x=2x^2-72x+648 \qquad \rightarrow \qquad 0=2x^2-153x+648$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-153)\pm\sqrt{(-153)^2-4(2)(648)}}{2(2)}=\frac{153\pm\sqrt{18225}}{4}=\frac{153\pm135}{4}$$

$$x_1=\frac{153+135}{4}=\frac{288}{4}=72 \quad \text{o} \quad x_2=\frac{153-135}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$$

Se descarta la solución que no es un número natural y por lo tanto se concluye que el número de abejas del enjambre es de 72.

[4] Tomado de: https://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/4/4_matematica_india.pdf

- ***Trabajar hacia atrás:*** Esta estrategia se puede usar en algunas situaciones relacionadas con el pensamiento numérico, consiste en partir del dato final y luego realizar la secuencia de forma contraria, hasta llegar al primer dato.

Ejemplo: Esther recibió su sueldo y gastó la mitad de éste en arriendo y alimentación. Luego pagó $ 200000 de servicios. Después gastó la mitad de lo que le quedaba en ropa. Luego le regalaron $ 100000 de cumpleaños. Finalizando el mes Esther quedó con $ 300000. ¿Cuánto recibió Esther de sueldo?

Solución: Se puede resolver la situación partiendo del dato de $ 300000 y realizar la secuencia de forma inversa.

$$300000 - 100000 = 200000 \quad \rightarrow \quad 200000 \times 2 = 400000$$

$$400000 + 200000 = 600000 \quad \rightarrow \quad 600000 \times 2 = 1200000$$

Por lo tanto el sueldo que recibió Esther fue de $ 1200000.

- ***Usar ensayo y error.*** Esta estrategia se puede usar cuando hay una idea de cual es una posible solución del problema y además cuando no hay un número muy alto de posibilidades para hacer la prueba.

Ejemplo: Manuel y Andrés son hermanos. Manuel es mayor que Andrés 13 años y el producto de sus edades es 2120. ¿Cuál es la edad de cada uno.?

Se puede realizar una tabla en la cual se puedan registrar las posibles edades de Manuel y Andrés y determinar su producto hasta que obtengamos el valor indicado así como se muestra en la tabla 4-2 de la página 67:

Tabla 4-2: Ejemplo de estrategia de usar ensayo y error

Edad de Andrés	Edad de Manuel	Producto	
20	33	660	Como el producto es inferior a 2120, entonces Andrés tiene más de 20 años
30	43	1290	Como el producto es inferior a 2120, entonces Andrés tiene más de 30 años
40	53	2120	

Por lo tanto la edad de Andrés es 40 años y la de Manuel 53.

- ***Hacer una lista***. Esta estrategia se puede usar para aquellos problemas en los que se indaga sobre el número total de formas o casos, en relación con determinado aspecto.

Ejemplo: Miguel quiere hacer una reunión con su familia en la que piensa ofrecer un plato principal, una bebida y un postre. Para el plato principal ha pensado en una paella, una lasaña o unos espaguetis. Para la bebida tiene gaseosa, vino o sangría. Para el postre ha pensado en una tartaleta de frutas o en mousse de chocolate. ¿De cuántas formas distintas puede armar Miguel el menú para su reunión familiar, teniendo en cuenta los platos que ha considerado?

Solución: Se puede realizar una lista de manera organizada, con todas las posibilidades que pueden darse de acuerdo con la situación, así:

Plato principal	Bebida	Postre
1. Paella	Gaseosa	Tartaleta
2. Paella	Gaseosa	Mousse
3. Paella	Vino	Tartaleta
4. Paella	Vino	Mousse
5. Paella	Sangría	Tartaleta
6. Paella	Sangría	Mousse
7. Lasaña	Gaseosa	Tartaleta
8. Lasaña	Gaseosa	Mousse
9. Lasaña	Vino	Tartaleta
10. Lasaña	Vino	Mousse
11. Lasaña	Sangría	Tartaleta
12. Lasaña	Sangría	Mousse
13. Espaguetis	Gaseosa	Tartaleta
14. Espaguetis	Gaseosa	Mousse
15. Espaguetis	Vino	Tartaleta
16. Espaguetis	Vino	Mousse
17. Espaguetis	Sangría	Tartaleta
18. Espaguetis	Sangría	Mousse

Por lo tanto Miguel puede armar 18 menús diferentes con las opciones que ha considerado.

4.2 Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas

La incorporación de algunas herramientas tecnológicas en la educación y en particular en la enseñanza de las matemáticas, es un aspecto que ha tomado gran fuerza, especialmente en el último año, a raíz de todos los cambios que se dieron debido a la emergencia sanitaria por la COVID – 19. Son varios los autores que apoyan la relevancia que tiene la tecnología dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, el NCTM afirma que: “La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y mejoran el aprendizaje de los estudiantes (como se citó en Van de Walle, Karp y Bay – Williams, s.f., p.113).

Por otra parte, en los estándares básicos de competencias en matemáticas del MEN, se destaca el uso de diferentes recursos didácticos en el aula, siendo estos recursos no solo físicos sino también virtuales, por lo que se puede asumir que ciertas herramientas tecnológicas también son consideradas en los lineamientos curriculares nacionales.

Algunos de los aspectos que destacan la importancia de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas son: generar o aumentar la motivación en relación con un concepto, proceso o situación problémica, facilitar el abordaje de ciertos problemas, además de permitir la exploración, consolidación y aplicación de ideas o conceptos matemáticos. Con respecto al último aspecto es importante aclarar, que aunque en muchas ocasiones el uso de ciertas herramientas de tipo tecnológico puede ampliar la concepción de los conocimientos adquiridos por los estudiantes, no quiere decir que reemplace algunas habilidades que se adquieren a través de la práctica. Con respecto a la resolución de problemas, en Santos (2015), se afirma que el uso continuo de diferentes tecnologías debe

permitir que el estudiante desarrolle nuevas formas de pensar y en consecuencia puede contribuir al mejoramiento de habilidades para la solución de problemas.

Grandgenett, Harris y Hofer (2010) mencionan siete tipos de actividades matemáticas que se pueden proponer y en las cuáles se aprovecha de los beneficios del uso de las Tics en el aula de clase. Dichas actividades son: (como se citó en Van de Walle, Karp y Bay – Williams, s.f., p. 114).

- Para considerar y dar sentido a la nueva información.
- Para practicar diferentes técnicas.
- Para interpretar y explorar conceptos, por ejemplo cuando se hace uso del software GeoGebra, que puede llevar a los estudiantes a realizar conjeturas, argumentar, estimar y comprobar, entre otras.
- Para producir artefactos y representaciones
- Para aplicar las matemáticas al mundo real.
- Para evaluar el trabajo y desempeño de los estudiantes, como por ejemplo las herramientas virtuales quizizz, kahoot, seesaw y nearpod, entre otras.
- Para crear productos y recursos.

En relación con el pensamiento variacional, algunas de las herramientas Tics más valiosas son aquellas que permiten graficar funciones, analizar el comportamiento de éstas, hacer comparaciones con otras funciones y que permitan explorar para analizar todas las características de la gráfica; entre las herramientas más conocidas en este campo, se pueden encontrar GeoGebra y Cabri Geometry.

GeoGebra es un software gratuito que fue diseñado para la enseñanza – aprendizaje de diversos tópicos de la geometría, el álgebra y el cálculo; es una herramienta importante para explorar y verificar de forma visual algunos resultados que se pueden obtener también de forma analítica. A través del uso de GeoGebra, en la enseñanza de funciones y en particular las funciones cuadráticas asociadas a una ecuación cuadrática dada, éste permite manipular algunos parámetros de la función para poder visualizar los comportamientos de la gráfica, además de promover el desarrollo de conjeturas o conclusiones con respecto a algún aspecto en particular (Oviedo, 2013). En la tercera sesión de la secuencia didáctica, la cual se enfocó en la resolución de problemas

relacionados con la ecuación cuadrática haciendo uso de métodos gráficos, se usaron dos applets diseñados en GeoGebra con la finalidad de que los estudiantes pudieran aplicar los métodos y establecer conclusiones de una manera más eficiente.

El primer applet permite, haciendo uso de unos deslizadores, en primer lugar graficar la función cuadrática de una ecuación cuadrática asociada y por otra parte permite aproximar las soluciones de dicha ecuación, al observar los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje x. El applet muestra las aproximaciones de las raíces de la ecuación, para que el estudiante pueda corroborar con lo que determinó a partir de la observación de la gráfica de la función. El applet se puede encontrar a través del siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/v9pavv2g.

El segundo applet se diseñó con el propósito de que los estudiantes pudieran corroborar la validez del método de Carlyle. Previo al uso del applet, los estudiantes deberán transformar cada una de las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ a una ecuación de la forma $x^2 - Sx + P = 0$, posteriormente deberán usar los deslizadores para a, b, c, S y P y así corroborar este método. El applet se puede encontrar a través del siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/wqdbmamf.

5. Estructuración y análisis de la secuencia.

En este capítulo se describen los aspectos más relevantes de la secuencia didáctica, incluyendo la caracterización de la institución y la población, la metodología de aplicación de la secuencia, la estructura de cada una de las sesiones y finalmente se realiza un análisis descriptivo de los resultados que arrojó la aplicación de esta. Dentro del análisis, se destaca el nivel general de apropiación con respecto a la solución de ecuaciones cuadráticas, las diferentes estrategias usadas por los estudiantes, las dificultades que se evidenciaron, además de otros factores que fueron relevantes.

5.1 Caracterización de la población

La secuencia didáctica se aplicó a un grupo de 80 estudiantes de grado décimo del Colegio José Francisco Socarrás IED. Esta institución es de carácter público, ubicada en la localidad séptima de Bosa. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 15 y 18 años y la mayoría de ellos viven en estrato 1 y 2. Los estudiantes tienen diferentes dificultades de conectividad, puesto que la mayoría de ellos no cuenta con un computador o Tablet, y además muchos de ellos no tienen conexión a internet permanente para acceder a encuentros de carácter sincrónico o a las actividades diseñadas en entornos virtuales.

5.2 Metodología de Aplicación

Durante el año 2021, a raíz de la emergencia sanitaria, muchas de las prácticas evaluativas de los docentes del Colegio José Francisco Socarrás IED, tuvieron diferentes cambios. Debido a las circunstancias, las dinámicas de enseñanza - aprendizaje se basaron en el

desarrollo de guías de conocimientos, diseñadas por el docente, con una frecuencia quincenal o mensual; estas guías se publicaban en la plataforma institucional y se enviaban también a través de WhatsApp o por correo electrónico. Los estudiantes tuvieron que fortalecer su autonomía al leer, investigar, analizar y resolver los ejercicios propuestos; posteriormente debían enviar la guía resuelta a través de los medios de comunicación descritos para que el docente pudiera revisar y retroalimentar el trabajo.

Además del desarrollo de las guías, de forma semanal se realizaba un encuentro sincrónico con los estudiantes que tuvieran la posibilidad (aproximadamente el 50% de la población), para formalizar conceptos o procedimientos, aclarar inquietudes y socializar aquellos ejercicios que presentaban mayor dificultad. Estos espacios de retroalimentación se vieron afectados debido a las dinámicas de comunicación e interacción entre estudiantes y docentes, puesto que el número de estudiantes que se conectaban a estos encuentros era muy bajo, ya sea por dificultades económicas o por el bajo compromiso con su proceso académico, lo que impidió que la totalidad de estudiantes recibieran las herramientas necesarias que les permitieran solventar las debilidades y culminar satisfactoriamente cada una de las actividades propuestas.

Es importante destacar, que para los estudiantes que no podían ingresar a los encuentros sincrónicos, se elaboraron algunos videos explicativos relacionados con cada uno de los métodos abordados, para que ellos los pudieran consultar como apoyo para la realización de las actividades propuestas, sumado a esto, también se dejaron los encuentros sincrónicos grabados en la plataforma institucional, para que los estudiantes los pudieran observar cuando tuvieran la posibilidad.

5.3 Prueba de entrada

La primera parte de la secuencia didáctica consiste en el diseño y aplicación de una prueba de entrada, para poder determinar el nivel de desempeño que tienen los estudiantes, en relación con algunos de los conceptos y habilidades necesarias para poder comprender

las ecuaciones cuadráticas y sus respectivos métodos de solución. Dichos conceptos y habilidades son de forma puntual: la solución de ecuaciones lineales, la factorización de polinomios cuadráticos, el cálculo del valor numérico de un polinomio y las operaciones con números reales.

5.3.1 Estructura de la prueba de entrada

La prueba de entrada se encuentra en el Anexo A y contiene cinco ejercicios con los cuales se establecerán las principales fortalezas y debilidades en relación con los presaberes ya mencionados. La descripción de cada uno de los ejercicios se muestra a continuación:

- En el primer ejercicio los estudiantes determinarán el valor numérico de algunas expresiones algebraicas, con esto se busca evidenciar si los estudiantes conocen la jerarquía de las operaciones y si las efectúan de forma correcta.
- En el segundo ejercicio se pretende indagar si los estudiantes pueden factorizar polinomios cuadráticos a través de diferentes casos de factorización.
- En el tercer ejercicio se quiere analizar el concepto que tienen los estudiantes sobre la igualdad a través de dos ejercicios de balanzas.
- En el cuarto ejercicio los estudiantes deberán traducir dos enunciados que se encuentran en lenguaje natural al lenguaje simbólico, a través de una ecuación lineal, y posteriormente deberán resolverla por el método que más se les facilite. En este ejercicio se valorará el nivel de desempeño que tienen los estudiantes con respecto a la interpretación del enunciado y a la solución de la ecuación lineal asociada.
- Finalmente, en el ejercicio cinco se evaluará la competencia interpretativa y argumentativa a través de la solución de situaciones que se pueden resolver haciendo uso de ecuaciones lineales. Para esto se les solicitará a los estudiantes que diligencien una tabla por cada situación, con la cual se pretende evidenciar en qué pasos de la solución de las situaciones se presentan fortalezas y en cuáles se presentan falencias.

5.3.2 Análisis de la prueba de entrada

La muestra que se tomó para realizar el análisis, tanto de la prueba de entrada como del resto de sesiones que conforman la secuencia, fue de 25 estudiantes. El criterio que se consideró para la elección de la muestra fue la regularidad en la entrega de actividades, puesto que un porcentaje significativo de estudiantes no desarrolló todas las actividades de la secuencia propuesta.

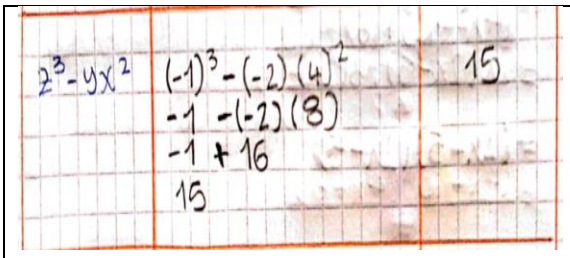
En la tabla 5-1 se encuentran los resultados más relevantes con respecto a tres de los conceptos que se evaluaron; valor numérico de expresiones algebraicas, factorización de polinomios, concepto de igualdad y solución de ecuaciones lineales.

Tabla 5-1: Resultados de la prueba de entrada: Conceptos o procedimientos.

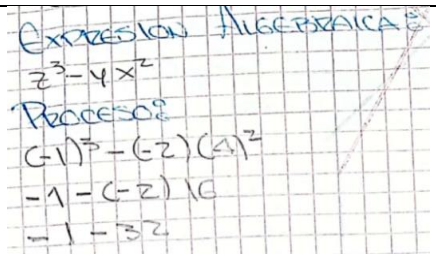
Concepto o Procedimiento	Resultados
Valor numérico de expresiones algebraicas	En promedio, el 61% de los estudiantes resolvió adecuadamente los tres ejercicios propuestos. Las dificultades que más se evidenciaron se relacionan con el cálculo de las potencias y la ley de signos, como se muestra en las imágenes 5-1.
Factorización de polinomios cuadráticos	El 83% de los estudiantes escribió de forma correcta el polinomio dado como producto de dos factores lineales. El ejercicio en el que más se presentó dificultad fue en la factorización del polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.
Concepto de igualdad	En el ejercicio de las balanzas, el 58% de los estudiantes planteó de forma correcta la ecuación que representaba la información de las imágenes, lo que indica una comprensión de la noción de igualdad. Algunos de los errores que se presentaron en este ejercicio se muestran en las imágenes 5-2.
Solución de ecuaciones lineales	En el ejercicio 4, el 84% de los estudiantes escribió correctamente la ecuación lineal asociada a una situación dada en lenguaje natural y posteriormente encontró las soluciones a través del método habitual.

Las imágenes 5-1 corresponden a algunos de los errores que se presentaron en relación con el valor numérico de expresiones algebraicas.

Imagen 5-1: Errores relacionados con el valor numérico de expresiones algebraicas.



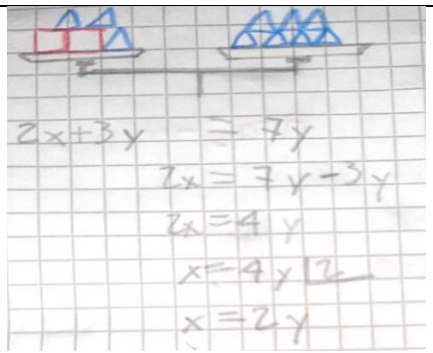
Error al efectuar la potencia 4^2 escribiendo como resultado 8 y no 16.



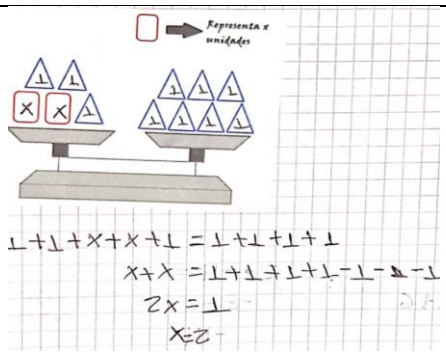
Error en la aplicación de la ley de signos, escribiendo – 32 cuando el resultado es 32.

Las imágenes 5-2 muestran algunos de los errores que se presentaron en el ejercicio de las balanzas.

Imagen 5-2: Errores en el ejercicio de las balanzas



Error en el planteamiento de la ecuación, donde a cada triángulo le dio un valor de y, pese a que se había indicado que era de 1.



Error en el miembro derecho de la ecuación, donde solo colocó cuatro *unos* y eran siete.

En la tabla 5-2 se presentan los resultados más importantes relacionados con las situaciones propuestas en el ejercicio 5. Las categorías que se escogieron para el análisis de este ejercicio se basan en el método de los cuatro pasos de Pólya para la resolución de problemas.

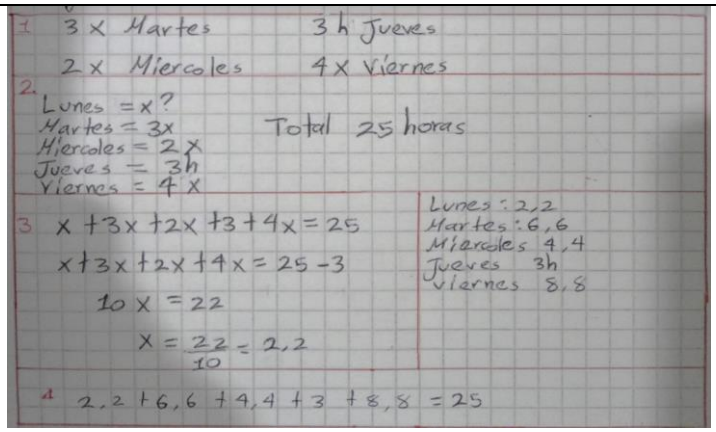
Tabla 5-2: Resultados en la prueba de entrada. Cuatros pasos del método de Pólya

Paso de la resolución de problemas	Resultados
Comprender el problema	El 82% de los estudiantes comprendió la información necesaria para resolver las situaciones y estableció de forma adecuada las relaciones que se encuentran en el enunciado. El error más frecuente que se evidenció se presenta en la imagen 5-3, en donde la relación establecida para el jueves no era la correcta.

Concebir un plan	El 78% de los estudiantes propuso correctamente una ecuación lineal que permitiera darle solución a la situación. Todos los estudiantes optaron por la estrategia de "escribir una ecuación y resolverla".
Ejecutar el plan	El 72% de los estudiantes resolvió correctamente la ecuación que permitía encontrar la solución de las situaciones.
Examinar la solución	El 64% de los estudiantes, luego de encontrar las soluciones, examinó la validez y pertinencia de estas en relación con el enunciado y contexto. Se evidencia que hay un porcentaje significativo de estudiantes que no realizan este paso en la resolución de problemas, puesto que no ven la necesidad de comprobar las soluciones.

La imagen 5-3 de la página 76 corresponde al error más frecuente que se identificó en la solución de la situación 2 del punto 5.

Imagen 5-3: Errores en situación problémica de la prueba de entrada.



Error en la expresión correspondiente al día jueves, donde lo correcto era expresar para el jueves $x + 3$.

Es importante resaltar, que una vez se terminó el análisis de la prueba de entrada, se realizó un espacio de retroalimentación a través de un encuentro sincrónico, en el cuál se destacaron las fortalezas, los ejercicios que evidenciaron mayor dificultad y los principales errores detectados. Este espacio se realizó, buscando aclarar las dificultades mencionadas antes de iniciar la aplicación de cada una de las sesiones propuestas dentro de la secuencia didáctica.

5.4 Sesión 1

El propósito de la sesión 1 es la resolución de ejercicios y problemas relacionados con la ecuación cuadrática, haciendo uso de algunos métodos de solución o teoremas importantes tales como: la propiedad de la raíz, el método de factorización y el método de completación de cuadrados. Además de la guía de trabajo y teniendo en cuenta que los procedimientos eran nuevos para los estudiantes, también se sugirieron algunos videos para que los pudieran consultar y en los espacios de encuentro sincrónico se solucionaban las inquietudes que se presentaran y se formalizaban los conceptos o procesos.

5.4.1 Estructura de la sesión 1

Tema. Ecuación cuadrática: Propiedad de la raíz, método de factorización y método de completación de cuadrados.
Objetivos: Resolver situaciones problema de contextos matemáticos y reales haciendo uso de diferentes métodos.
Recursos: Guía para trabajo autónomo. Encuentros sincrónicos. Fichas (cuadrados de lado x, de lado 1 y rectángulos de lados 1 y x). Videos explicativos de las propiedades y métodos abordados.

La sesión 1 se encuentra en el Anexo B y está compuesta por 10 ejercicios que se describen a continuación:

- En el primer ejercicio los estudiantes deberán aplicar la propiedad de la raíz cuadrada para resolver algunas ecuaciones cuadráticas.
- En el segundo ejercicio se da un arreglo de puntos para que los estudiantes puedan establecer un patrón y generalizar lo que ocurre para la posición n; luego los estudiantes deberán determinar la cantidad de puntos que hay en una posición determinada y también encontrar la posición en la cual hay una cantidad fija de puntos.

- En el tercer ejercicio, los estudiantes reflexionarán acerca de las multiplicaciones cuyo producto es cero, de forma que puedan comprender con mayor facilidad la propiedad del factor cero.
- En el cuarto ejercicio, los estudiantes aplicarán la propiedad del factor cero para encontrar las soluciones de algunas ecuaciones polinómicas.
- En el quinto ejercicio, se da un conjunto de fichas cuyas áreas son x^2, x y 1 unidad cuadrada; con este conjunto de fichas los estudiantes deberán construir algunos rectángulos con un área establecida y deberán dibujarlos indicando los valores de la base y la altura; esto con el fin de mostrar una forma alternativa de factorizar algunos trinomios. Una vez tengan escritas las expresiones factorizadas, los estudiantes deberán aplicar el factor cero para determinar las soluciones de unas ecuaciones cuadráticas.
- En el sexto ejercicio, los estudiantes resolverán algunas ecuaciones cuadráticas haciendo uso del método de factorización.
- El séptimo ejercicio, tiene una estructura similar al segundo, pero en este caso se da un arreglo de rectángulos en donde los estudiantes buscarán un patrón que permita determinar la cantidad de cuadrados pequeños que conforman cada uno de estos para una posición n. Posteriormente, deberán determinar el número de cuadrados para una posición n y la posición correspondiente a una cantidad dada de cuadrados.
- En el octavo ejercicio, inicialmente se presenta un ejemplo en el cual se evidencia el proceso de completación de cuadrados de forma geométrica. Luego, los estudiantes deberán usar el mismo método y las fichas del punto 5 para completar el cuadrado de dos expresiones algebraicas dadas y escribir dos ecuaciones que representen este proceso.
- En el noveno ejercicio, los estudiantes deberán resolver algunas ecuaciones cuadráticas haciendo uso del método de completación de cuadrados.
- Finalmente, en el décimo ejercicio, los estudiantes deberán completar una tabla con los pasos para resolver una situación problema relacionada con el producto de dos edades.

5.4.2 Análisis de la sesión 1

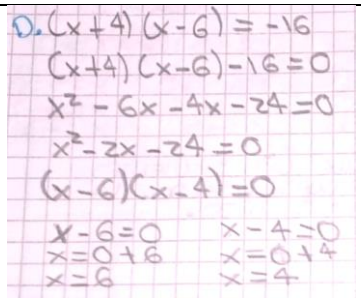
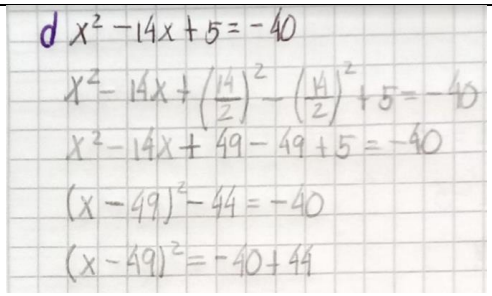
Para el análisis de esta sesión se tomó una muestra de 25 estudiantes. En la tabla 5-3 se encuentran los resultados más importantes, con respecto al proceso de comparación y ejercitación de los procedimientos y algoritmos involucrados en la sesión 1: propiedad de la raíz cuadrada, teorema del factor cero, método de factorización para la solución de ecuaciones cuadráticas y método de factorización.

Tabla 5-3: Resultados de la sesión 1: Conceptos o procedimientos.

Concepto o Procedimiento	Resultados
Propiedad de la raíz	El 74% de los estudiantes aplicó de forma adecuada la propiedad de la raíz para resolver algunas ecuaciones cuadráticas. La ecuación en la que más se evidenció dificultades fue $(2x-5)^2=11$, probablemente debido a que el número 11 no tiene raíz cuadrada exacta.
Teorema del factor cero	El 81% de los estudiantes aplicó de forma correcta el teorema del factor cero en la solución de algunas ecuaciones polinómicas.
Método de factorización	El 64% de los estudiantes resolvió correctamente las ecuaciones cuadráticas propuestas a través del método de factorización. La ecuación que más se les dificultó fue: $(x+4)(x-6)=-16$, debido a que antes de usar el método de factorización se tenía que efectuar la multiplicación del lado izquierdo y luego dejar la ecuación igualada a cero; sólo el 52% de los estudiantes pudieron culminar el ejercicio con éxito. En la primera parte de la imagen 5-4 se destacan algunos de los errores.
Método de completación de cuadrados	El 60% de los estudiantes resolvió de forma adecuada las ecuaciones cuadráticas del punto 9 a través del método de completación de cuadrados. Algunas de las dificultades se dan en alguno de los pasos del proceso de completación, o en la transposición de términos. En la segunda parte de la imagen 5-4 se muestran algunos de los errores más frecuentes.

Las imágenes 5-4 muestran algunos de los errores que se presentaron en los ejercicios relacionados con la aplicación del método de factorización y de completación de cuadrados para la solución de algunas ecuaciones cuadráticas.

Imagen 5-4: Errores en la sesión 1: Factorización y completación de cuadrados

	
Error en la transposición del término -16 del miembro derecho al miembro izquierdo de la ecuación.	Error en la factorización del trinomio cuadrado perfecto.

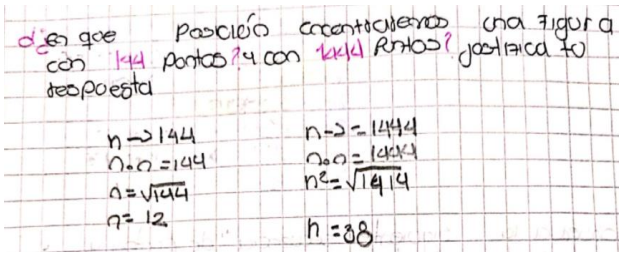
En relación con los otros ejercicios que hacen parte de la sesión 1, en los cuales tenían que acudir a diferentes estrategias para la resolución de problemas, los resultados más importantes se consignaron en la tabla 5-4 que se muestra a continuación:

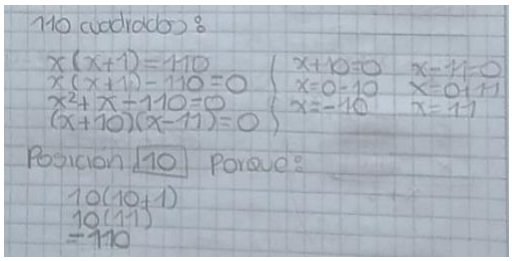
Tabla 5-4: Resultados de la sesión 1: Resolución de problemas.

Ejercicio	Resultados
2 y 7	En relación con los ejercicios 2 y 7, en los cuáles los estudiantes tenían que encontrar un patrón para una secuencia de puntos o cuadrados, se evidenció que aunque el 90% de los estudiantes continuaron con la secuencia de forma gráfica, solo un 36% pudo encontrar de forma correcta una expresión que permitiera determinar lo que ocurre con la posición n. Pese a que la mayoría no pudo escribir una generalización, el 80% de los estudiantes logró determinar el número de puntos o cuadrados que había en determinada posición y también el 80% determinó correctamente la posición para la cual había cierto número de puntos o cuadrados. Se observó que la estrategia que predominó fue el tanteo, y que solo un porcentaje mínimo de estudiantes acudió a la estrategia de planteamiento de ecuaciones. En las imágenes 5-5 se muestran algunos de los procesos presentados por los estudiantes.
3	El 78% de los estudiantes respondió de forma adecuada las preguntas que buscaban la comprensión del teorema del factor cero.
5	El 30% de los estudiantes uso apropiadamente las fichas dadas en el punto 5 para construir los rectángulos con el área indicada y escribir su base y su altura. El 38% de los estudiantes únicamente construyó los rectángulos pero no escribieron de forma correcta una expresión para la base y la altura. En las imágenes 5-6 se muestran algunos de los procesos efectuados por los estudiantes.
8	El 62% de los estudiantes realizó correctamente el procedimiento de completación de cuadrados de forma geométrica haciendo uso de las fichas dadas en el punto 5 y también escribió la igualdad que evidenciaba el proceso de completación de cuadrados.
10	El 60% de los estudiantes siguió de forma adecuada los cuatro pasos de Pólya para la resolución de la situación problémica, relacionada con el producto de edades. Algunos estudiantes encontraron la solución al problema pero a través de un razonamiento incorrecto como se muestra en la figura 5-7.

Las imágenes 5-5 muestran algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes en los ejercicios que requerían del establecimiento de un patrón.

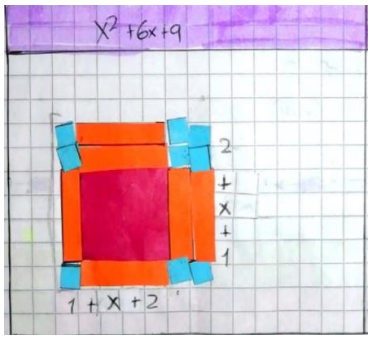
Imagen 5-5: Soluciones sesión 1: Establecimiento de patrones.

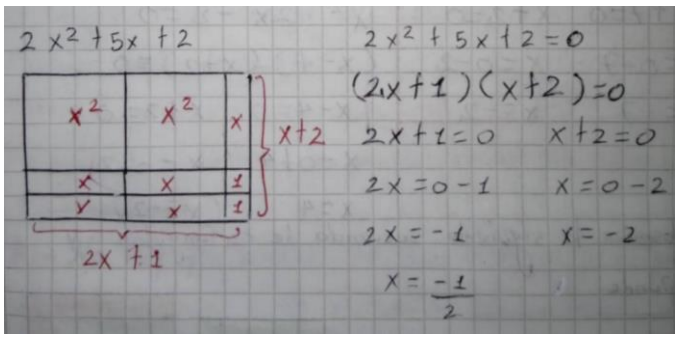




Las imágenes 5-6 muestran algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes para el ejercicio 5 (factorización geométrica).

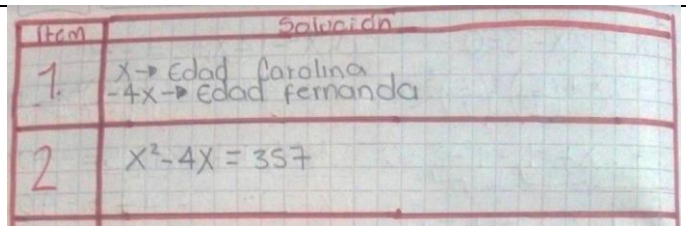
Imagen 5-6: Soluciones sesión 1: Factorización geométrica.





La imagen 5-7 muestra uno de los errores más frecuentes evidenciados en el ejercicio 10.

Imagen 5-7: Errores sesión 1: Situación relacionada con el producto de edades.



Error en la relación dada para la edad de Fernanda, ya que no corresponde a menos cuatro veces la edad de Carolina sino a cuatro años menos que Carolina: $x - 4$

5.5 Sesión 2

El propósito de la sesión 2 es la resolución de ejercicios y problemas relacionados con la ecuación cuadrática, haciendo uso de la fórmula de la ecuación cuadrática y las relaciones de Vieta.

5.5.1 Estructura de la sesión 2

Tema. Ecuación cuadrática: Fórmula de la ecuación cuadrática y relaciones de Vieta.
Objetivos: Resolver situaciones problema de contextos matemáticos y reales haciendo uso de la fórmula de la ecuación cuadrática y de las relaciones de Vieta.
Recursos: Guía para trabajo autónomo. Encuentros sincrónicos. Videos explicativos de las propiedades y métodos abordados.

La sesión 2 se encuentra en el Anexo C y está conformada por 9 ejercicios que se describen a continuación.

- En el primer ejercicio, los estudiantes deberán calcular el discriminante de algunas ecuaciones cuadráticas y a partir de este determinarán el número de soluciones reales que tiene cada una.
- En el segundo ejercicio, se dan dos ecuaciones cuadráticas, expresadas en términos de x y k. Los estudiantes deberán determinar los valores que puede tomar k, de forma que dichas ecuaciones cuadráticas tengan soluciones en el conjunto de los números reales.
- En el tercer ejercicio, los estudiantes tendrán que resolver las ecuaciones del primer punto, cuyo discriminante sea cero o mayor que cero.
- En el cuarto y el quinto ejercicio, se proponen dos situaciones enmarcadas en contextos de la cotidianidad de los estudiantes: ubicación de algunas viviendas con respecto a la ubicación del colegio y área de las aulas de la institución. En dichos problemas, los estudiantes deberán usar diferentes herramientas tales como el teorema de Pitágoras o la fórmula de área para un rectángulo y así poder plantear

la ecuación cuadrática que permita resolver las situaciones problémicas propuestas.

- En el sexto ejercicio, se da una secuencia de figuras para que los estudiantes puedan establecer un patrón y generalizar lo que ocurre para la posición n; luego los estudiantes deberán determinar la cantidad de cuadrados que hay en una posición determinada y también encontrar la posición en la cual hay una cantidad fija de cuadrados.
- El séptimo ejercicio está contextualizado en relación con la proporción áurea y el número áureo. Inicialmente los estudiantes deberán observar un video[5] en el cual se muestra cierta información relacionada con esta temática. Posteriormente se establecerá la "divina proporción" para que los estudiantes determinen los valores de x que la hacen válida y finalmente obtendrán el valor del número áureo, a través de la solución de la ecuación que resulta después de aplicar la propiedad fundamental de las proporciones.
- El octavo ejercicio busca que los estudiantes realicen la deducción de las relaciones de Vieta para las ecuaciones cuadráticas a través del diligenciamiento de una tabla que contiene la siguiente información: ecuación cuadrática, soluciones, suma de las raíces, producto de las raíces y cocientes $-\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$.
- Finalmente en el noveno ejercicio los estudiantes deberán resolver un problema en el cuál deberán determinar una ecuación cuadrática, dadas sus dos soluciones (números reales).

5.5.2 Análisis de la sesión 2

Para el análisis de esta sesión se tomó una muestra de 25 estudiantes. En la tabla 5-5 se encuentran los resultados más importantes con respecto al proceso de comparación y ejercitación de los procedimientos y algoritmos involucrados en la sesión 2: cálculo del

- [5] https{://www.youtube.com/watch?v=JOkVfu2FxpA ***Donald en el país de las matemáticas.***

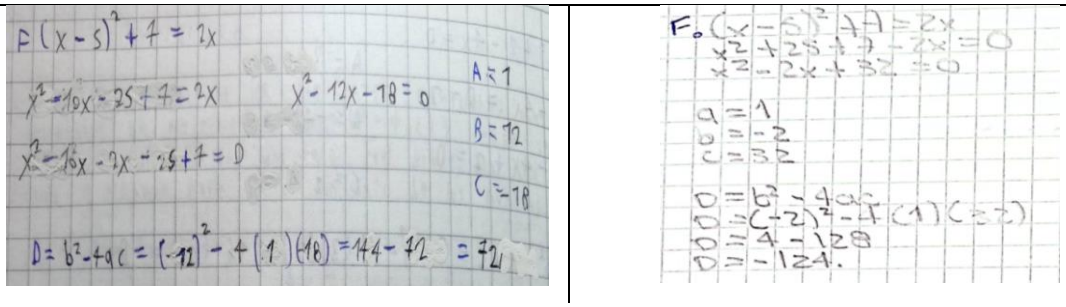
discriminante de una ecuación cuadrática, aplicación de la fórmula general, deducción de las relaciones de Vieta.

Tabla 5-5: Resultados de la sesión 2: Conceptos o procedimientos.

Concepto o Procedimiento	Resultados
Discriminante de una ecuación cuadrática	El 68% de los estudiantes calculó de forma correcta el discriminante para las ecuaciones cuadráticas dadas y a partir de este determinaron si la ecuación tenía una, dos o ninguna solución dentro del conjunto de los números reales. La ecuación en la que más se evidenció dificultades fue $(x-5)^2+7=2x$, debido a que cometieron diferentes errores al efectuar los procedimientos algebraicos, necesarios para poder escribir la ecuación en su forma estándar. Algunos de los errores evidenciados se muestran en las imágenes 5-8.
Fórmula general para la ecuación cuadrática	El 60% de los estudiantes aplicó de forma correcta la fórmula de la ecuación cuadrática para determinar las raíces de estas. La ecuación en la que más se evidenció dificultades fue $(x-5)^2+7=2x$, debido a las razones expuestas anteriormente.
Relaciones de Vieta	El 59% de los estudiantes diligenció correctamente la tabla que buscaba la deducción de las relaciones de Vieta; la ecuación en la que se evidenció mayor porcentaje de error fue $3x^2+19x+6=0$. Pese a que un 59% de estudiantes construyó correctamente la tabla, solo el 45% de los estudiantes logró deducir de forma adecuada las relaciones de Vieta teniendo en cuenta los resultados obtenidos. Un porcentaje significativo de estudiantes elaboró conclusiones que no correspondían con las relaciones de Vieta. Algunas de las respuestas presentadas por los estudiantes se muestran en las imágenes 5-9.

Las imágenes 5-8 muestran algunos de los errores más frecuentes evidenciados en el cálculo del discriminante.

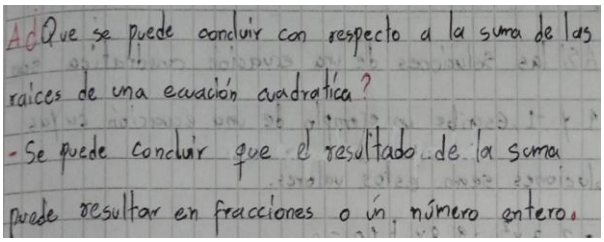
Imagen 5-8: Errores sesión 2: Cálculo del discriminante.

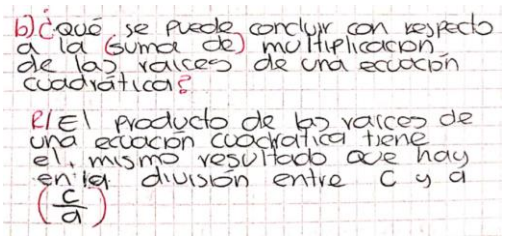


Error: Determina de forma incorrecta el producto $(x-5)^2=x^2-10x+25$.

Las imágenes 5-9 muestran algunas de las respuestas dadas por los estudiantes en la deducción de las relaciones de Vieta.

Imagen 5-9: Soluciones sesión 2: Relaciones de Vieta





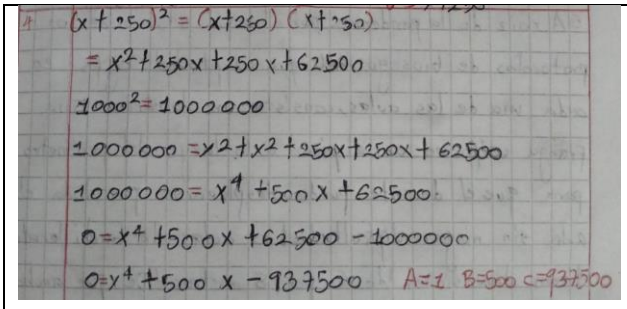
En la tabla 5-6 se presentan los resultados más importantes relacionados con las situaciones propuestas en los ejercicios 4 y 5. Las categorías que se escogieron para el análisis de estos ejercicios, se basan en el método de los cuatro pasos de Pólya para la resolución de problemas.

Tabla 5-6: Resultados de la sesión 2: Resolución de problemas (cuatro pasos de Pólya)

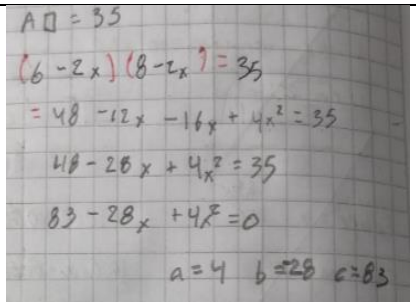
Paso de la resolución de problemas	Resultados
Comprender el problema	El 94% de los estudiantes comprendió la información necesaria para resolver las situaciones y estableció de forma adecuada las relaciones que se encontraban en el enunciado.
Concebir un plan	El 54% de los estudiantes planteó de forma adecuada la ecuación cuadrática que permitía resolver cada una de las situaciones. El ejercicio 4 fue el que evidenció mayores errores debido a que, en primer lugar, algunos de los estudiantes no usaron el Teorema de Pitágoras para el planteamiento de la situación y por otra parte, otros estudiantes cometieron errores algebraicos al desarrollar la expresión $(x + 250)^2$ por lo que no llegaron a la ecuación correcta. En las imágenes 5-10 se muestran algunos de los errores presentados por los estudiantes.
Ejecutar el plan	El 48% de los estudiantes resolvió correctamente la ecuación que permitía encontrar la solución de las situaciones. Se evidenció el uso de la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones y un adecuado descarte de la solución que no era válida según el contexto.
Examinar la solución	El 44% de los estudiantes examinó la validez y pertinencia de las soluciones en relación con el enunciado y contexto. Un porcentaje significativo de estudiantes no realizó el proceso de verificación de las soluciones e interpretación de estas según el contexto.

Las imágenes 5-10 muestran algunos de los errores evidenciados en los ejercicios 4 y 5, que fueron en su mayoría relacionados con procedimientos de tipo algebraico:

Imagen 5-10: Errores sesión 2: Ejercicios 4 y 5.



Error: Determina de forma incorrecta la suma $x^2 + x^2$.



Error en el último renglón, en el cual reduce la ecuación encontrada a la ecuación cuadrática en su forma estándar.

En relación con los otros ejercicios que hacen parte de la sesión 2, los resultados más importantes se consignaron en la tabla 5-7 que se muestra a continuación:

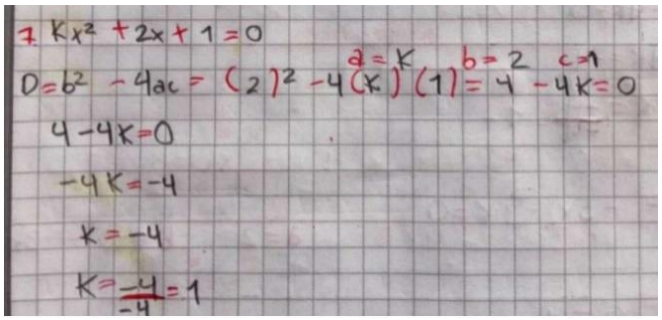
Tabla 5-7: Resultados de la sesión 2. Resolución de problemas.

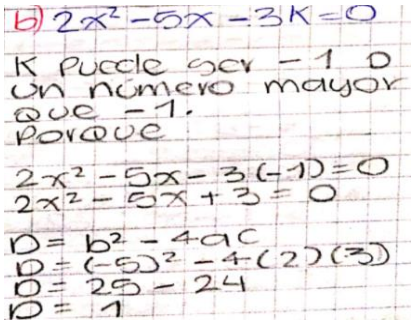
Ejercicio	Resultados
2	El 60% de los estudiantes determinó todos los valores que podía tomar la variable k, de forma que las ecuaciones dadas tuvieran soluciones en el conjunto de los números reales. Algunos de los estudiantes optaron por el tanteo para determinar un conjunto posibles de valores, otros estudiantes se centraron en el discriminante y otros estudiantes en la fórmula de la ecuación cuadrática. Solo el 40% de los estudiantes encontró todos los posibles valores que podía tomar k en la ecuación $2x^2 - 5x - 3k = 0$, ya que buscaron el entero que más se acercará y a partir de este determinar un intervalo de solución. Algunas de las soluciones que presentaron los estudiantes se muestran en las imágenes 5-11.
6	Se evidenció que aunque todos los estudiantes continuaron con la secuencia de forma gráfica, solo un 36% pudó encontrar de forma correcta una expresión que permitiera determinar el número de cuadrados para una posición n. Pese a que la mayoría de los estudiantes no logró escribir la expresión adecuada en términos de n, el 92% de los estudiantes pudo determinar el número de cuadrados que había en determinada posición y el 84% de los estudiantes determinó correctamente la posición para la cual había cierto número de cuadrados. Se observó que la estrategia que predominó, en estos ejercicios, fue el tanteo y que solo un porcentaje mínimo de estudiantes acudió a la estrategia de planteamiento de ecuaciones. En las imágenes 5-12 se muestran algunos de los procesos presentados por los estudiantes.
7	El 55% de los estudiantes encontró correctamente el valor del número áureo al seguir las indicaciones dadas. Los estudiantes que no encontraron este valor cometieron errores de tipo algebraico, al aplicar las propiedades de las proporciones, razón por la cual no pudieron llegar a la ecuación correcta en su forma estándar y por ende las soluciones de la ecuación cuadrática resultante eran erróneas.

9	El 48% de los estudiantes encontró la ecuación cuadrática solicitada partiendo de sus dos raíces. Se destaca que varios estudiantes no desarrollaron el ejercicio, otros no mostraron la forma en la cual llegaron a la ecuación correspondiente, mientras que un pequeño porcentaje de los estudiantes mostró el proceso que desarrollaron a través de la comprensión de las relaciones de Vieta y el tanteo.

Las imágenes 5-11 muestran algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes para el ejercicio 2.

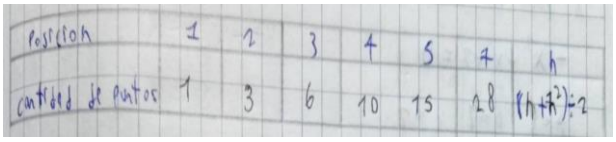
Imagen 5-11: Soluciones sesión 2: Ejercicio del parámetro k.

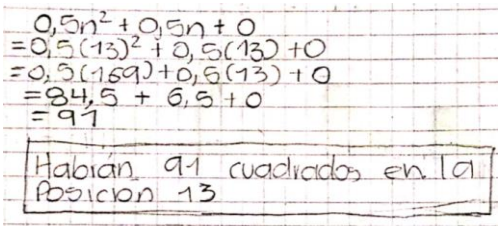




Las imágenes 5-12 muestran algunos de los procesos presentados por los estudiantes en el ejercicio 6.

Imagen 5-12: Soluciones sesión 2: Establecimiento de patrones





5.6 Sesión 3

El propósito de la sesión 3 es la solución de ejercicios y problemas relacionados con la ecuación cuadrática, usando el método geométrico y el método de Carlyle. En esta sesión se hizo uso de unos applets, diseñados en la herramienta GeoGebra, con el fin de facilitar la aplicación y la comprensión de dichos métodos.

5.6.1 Estructura de la sesión 3

Tema. Ecuación cuadrática: Métodos gráficos.
Objetivo: Resolver situaciones problema de contextos matemáticos y reales haciendo uso de métodos gráficos para la solución de ecuaciones cuadráticas.
Recursos: Guía para trabajo autónomo. Encuentros sincrónicos. Applets en GeoGebra[6]. Videos explicativos de las propiedades y métodos abordados.

La sesión 3 se encuentra en el Anexo C y está compuesta por 7 ejercicios que se describen a continuación.

- En el primer ejercicio, los estudiantes deberán completar una tabla para seis ecuaciones cuadráticas dadas. En esta tabla determinarán el discriminante, realizarán la gráfica de la función asociada y escribirán las soluciones haciendo uso del applet: *Ecuación cuadrática*. Luego, se proponen algunas preguntas, relacionadas con el comportamiento de la gráfica, cuando a es positivo o negativo, y cuando el discriminante es cero, positivo o negativo.
- En el segundo, tercer y cuarto ejercicio, se proponen situaciones enmarcadas en algunos contextos cotidianos o matemáticos: área de pancartas, producto de dos números y caída libre, en las que los estudiantes deben plantear una ecuación cuadrática que permita resolver las situaciones y posteriormente deberán aplicar algún método de solución, en lo posible el método gráfico, haciendo uso del applet.
- El quinto ejercicio, se relaciona con el método del círculo de Carlyle, el cual es un método gráfico diferente al habitual. Los estudiantes deberán comprobar el funcionamiento y validez del método para cuatro ecuaciones cuadráticas dadas, apoyándose del applet: *Círculo de Carlyle*, y siguiendo algunas indicaciones.
- En el sexto y séptimo ejercicio, los estudiantes deberán encontrar, haciendo uso del segundo applet, una ecuación cuadrática dados algunos valores. Se espera

[6] **Ecuación cuadrática:** https://www.geogebra.org/m/v9pavv2q
Círculo de Carlyle: https://www.geogebra.org/m/wqdbmamf

evaluar la comprensión de los dos métodos gráficos a través de la manipulación de los diferentes deslizadores.

5.6.2 Análisis de la sesión 3

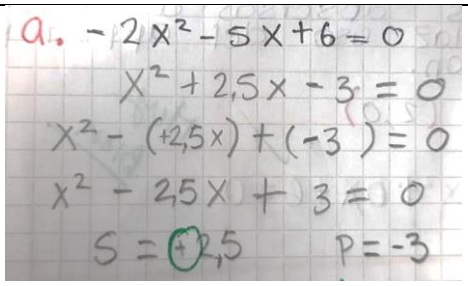
Para el análisis de esta sesión, se tomó una muestra de 25 estudiantes. En la tabla 5-8 se encuentran los resultados más importantes, con respecto al proceso de comparación y ejercitación de los procedimientos y algoritmos involucrados en la sesión 3: cálculo del discriminante de una ecuación cuadrática y cálculo de las raíces de una ecuación cuadrática, a través del método gráfico habitual y el método de Carlyle.

Tabla 5-8: Resultados de la sesión 3: Conceptos o procedimientos.

Concepto o Procedimiento	Resultados
Discriminante de una ecuación cuadrática	El 88% de los estudiantes calculó de forma correcta el discriminante para las ecuaciones cuadráticas dadas y a partir de este determinaron si la ecuación tenía una, dos o ninguna solución dentro del conjunto de los números reales.
Método gráfico habitual	El 75% de los estudiantes representaron gráficamente las funciones cuadráticas asociadas a las ecuaciones dadas, y además determinaron las soluciones a partir del análisis de dichas gráficas. Algunos estudiantes mencionaron algunas dificultades para usar el applet desde el celular, por lo que realizaron el ejercicio desde la aplicación de GeoGebra. El 72% de los estudiantes pudo establecer la relación entre el discriminante y la representación gráfica de las funciones cuadráticas asociadas.
Método de Carlyle	El 60% de los estudiantes pudo confirmar la validez del método de Carlyle. La principal razón por la cual algunos estudiantes no pudieron comprobar el método, fue porque tuvieron errores en los signos, al reescribir la ecuación dada a la forma $x^2 - Sx + P = 0$. Algunos de los errores presentados por los estudiantes en este ejercicio se muestran en la imagen 5-13.

La imagen 5-13 muestra uno de los errores presentados por los estudiantes en el ejercicio relacionado con la comprobación del método de Carlyle.

Imagen 5-13: Errores sesión 3: Método del círculo de Carlyle



Error al reescribir la ecuación inicial en una ecuación de la forma $x^2 - Sx + P = 0$. $x^2 - (-2{,}5x) + (-3) = 0$

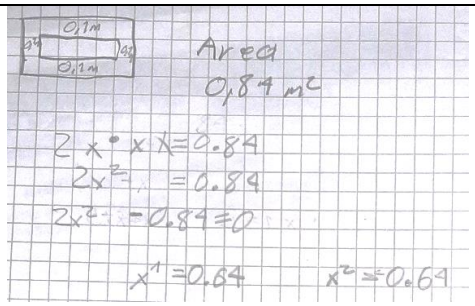
En la tabla 5-9, se presentan los resultados más importantes, relacionados con las situaciones propuestas en los ejercicios 2, 3 y 4. Las categorías que se escogieron para el análisis de estos ejercicios, se basan en el método de los cuatro pasos de Pólya para la resolución de problemas.

Tabla 5-9: Resultados de la sesión 3. Resolución de problemas (cuatro pasos de Pólya)

Paso de la resolución de problemas	Resultados
Comprender el problema	El 90% de los estudiantes comprendió la información necesaria para resolver las situaciones y estableció de forma adecuada las relaciones que se encontraban en el enunciado.
Concebir un plan	El 74% de los estudiantes planteó de forma adecuada la ecuación cuadrática, que permitía resolver cada una de las situaciones. Se evidenció una mayor dificultad en el ejercicio número 2, debido a algunos errores en los procedimientos algebraicos, previos a la forma estándar de la ecuación cuadrática. En la imagen 5-14 se muestran algunos de estos errores.
Ejecutar el plan	El 55% de los estudiantes resolvió correctamente la ecuación que permitía encontrar la solución de las situaciones. Se evidenció que los estudiantes toman decisiones con respecto a cuál de las dos raíces obtenidas es la que tiene validez de acuerdo con la información dada.
Examinar la solución	El 40% de los estudiantes examinó la validez y pertinencia de las soluciones en relación con el enunciado y contexto.

La imagen 5-14 muestra el error más frecuente que se presentó en el paso de “concebir un plan” y que conllevó a una solución errónea en la situación problema número 2.

Imagen 5-14: Errores sesión 3:



Error al escribir la expresión que representa el área del rectángulo con la información dada.

Vale la pena resaltar que una vez se finalizaba el análisis de cada una de las sesiones, se realizaba una sesión sincrónica con los estudiantes para dialogar acerca de las dificultades que se evidenciaron y realizar la socialización de aquellos ejercicios que causaron mayor dificultad, buscando la superación de las dificultades en un porcentaje significativo de estudiantes. Además, una vez se regresó a la presencialidad, también se dedicaron algunas clases a consolidar los conocimientos relacionados con la ecuación cuadrática, los métodos de solución y la resolución de problemas que se pueden modelar a través de estas ecuaciones.

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

La secuencia didáctica que se diseñó para la enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática a través del enfoque de resolución de problemas, y que se aplicó en el año 2021 en un entorno remoto, debido a la actual emergencia sanitaria a raíz de la pandemia de la COVID 19, permitió obtener diversas conclusiones, relacionadas con la modalidad de aplicación, el tipo de situaciones problémicas que se pueden usar y otros aspectos relevantes que se evidenciaron posterior a la implementación. A continuación se presentan estas conclusiones:

- Con relación a la pregunta problemática inicial: **¿Cuáles situaciones problema se pueden proponer dentro de una secuencia didáctica, para favorecer la comprensión y solución de ecuaciones cuadráticas y así fortalecer algunos componentes del pensamiento variacional?**, es importante resaltar que lo más importante es que estas situaciones estén en contextos atractivos y significativos que generen en el estudiante la motivación y el deseo de resolverlo. Dentro de estos contextos se pueden proponer, en primer lugar, situaciones en contextos relacionados con la cotidianidad de los estudiantes: entornos cercanos o intereses; en segundo lugar situaciones relacionadas con otras ciencias, en particular con la física para el caso de las ecuaciones cuadráticas, y finalmente se pueden plantear situaciones problema en contextos matemáticos, como aquellas en las cuáles se puedan establecer patrones, realizar conjeturas o realizar dibujos o gráficos.

- En la prueba de entrada se pudieron haber incluido otros ejercicios que permitieran determinar el nivel de apropiación con respecto a otros conceptos o procedimientos

que no fueron valorados. Dichos procedimientos se relacionan con el pensamiento variacional, como cálculo del cuadrado de la suma o de la diferencia de un binomio, el producto de polinomios y la reducción de términos semejantes; y son aquellos que evidenciaron mayor probabilidad de error en algunas situaciones propuestas en las otras sesiones.

- Es posible que los resultados de la secuencia didáctica, hubiesen sido más favorables, si la aplicación se hubiera dado en un entorno de presencialidad, debido al mayor acompañamiento por parte del docente durante el desarrollo de cada una de las actividades. Desde el entorno remoto, en el cual se implementó la secuencia, fue difícil evidenciar la forma en la cual los estudiantes abordaban cada situación problémica, debido a esto, las únicas fuentes de información de la cual se podían obtener conclusiones, era del material que llegaba a través de los diferentes medios de comunicación establecidos y de la participación en los encuentros sincrónicos que se daban de forma semanal.

- Pese a las dificultades mencionadas durante la aplicación de la secuencia didáctica, se puede concluir que la experiencia fue significativa, ya que se abordaron diferentes situaciones contextualizadas a través de diferentes métodos y haciendo uso de distintos recursos; y aunque se tomo una muestra de 25 estudiantes para efectos del análisis, los resultados fueron positivos para la muestra escogida.

- El uso de los applets diseñados para la sesión número 3, generó un impacto positivo en los estudiantes, ya que a partir de la manipulación con los deslizadores, pudieron llegar a diversas conclusiones en relación con el comportamiento de la parábola y, en especial, evidenciar las relaciones entre el discriminante, el número de soluciones de la ecuación cuadrática asociada y la gráfica de la parábola. Además, fue valioso para los estudiantes poder hacer uso de los applets para poder resolver, de una manera más ágil, las diferentes situaciones propuestas, o para poder comprobar los resultados obtenidos con la aplicación de los otros métodos abordados.

- Se pudo observar que un porcentaje significativo de los estudiantes aplicaron de forma correcta los diferentes métodos de solución para las ecuaciones cuadráticas. Por otra parte, también se evidenció en el abordaje de las diferentes situaciones propuestas, que la mayoría de los errores que cometieron los estudiantes, se relacionaban con otros procedimientos que se tenían que realizar y no con la aplicación de los diferentes métodos, lo cual muestra que en muchas ocasiones, los errores y las dificultades recaen en preconceptos que los estudiantes deberían aplicar de forma adecuada, pero que por diversos factores se convierten en vacíos conceptuales o procedimentales. Se observaron especialmente errores en el cálculo del producto de expresiones algebraicas y en el desarrollo de productos notables.

- En las situaciones que estaban propuestas, con la finalidad de que los estudiantes pudieran encontrar un patrón para determinada secuencia, se evidenció que pocos estudiantes lograron escribir una expresión en términos de n. Vale la pena resaltar, que aunque no lograron escribir una generalización, sí pudieron determinar a través del tanteo el número de puntos o cuadrados que tenía que haber en determinada posición, y de forma recíproca, también lograron encontrar la posición en la cual había cierto número de puntos o cuadrados, lo que evidencia comprensión en la lógica de cada una de las secuencias propuestas, pero dificultades en el proceso de establecer generalizaciones.

- La mayoría de los estudiantes aplicó de forma correcta el método de los cuatro pasos de Pólya, en la solución de diferentes situaciones problema, aunque se evidencia que algunos omiten el último paso (examinar la solución o mirar hacia atrás), probablemente debido a que confían en la respuesta obtenida y no ven la necesidad de comprobar si las soluciones obtenidas tienen coherencia para el contexto y la información dada.

- Como se mencionaba anteriormente, es importante que algunas de las situaciones problema que se apliquen en el aula se encuentren enmarcadas en contextos cercanos a los estudiantes para generar una mayor motivación y comprensión de la situación. Esto se pudo evidenciar a través de las situaciones relacionadas con las aulas del colegio, los desplazamientos en el barrio y la inauguración de juegos,

que aunque requerían de ciertos procedimientos matemáticos adicionales, les permitieron a los estudiantes un mayor acercamiento y análisis del contexto y la situación dada.

6.2 Recomendaciones

Además de las conclusiones que se presentaron en el apartado anterior, también es necesario realizar algunas recomendaciones para aquellos lectores que contemplen la aplicación de la secuencia más adelante, por ejemplo:

- Es recomendable poder aplicar la secuencia didáctica dentro de un entorno de presencialidad, de forma que el docente pueda observar las diferentes estrategias adoptadas por los estudiantes y pueda realizar las intervenciones que considere necesarias, de forma que se pueda lograr una comprensión en los conceptos y procedimientos en un mayor porcentaje de estudiantes.

- En la prueba de entrada, se recomienda añadir algunos ejercicios enfocados en determinar el nivel de apropiación que tienen los estudiantes con respecto a las operaciones entre polinomios, de tal manera que el docente pueda subsanar las dificultades que se evidencien, posterior a su aplicación, y de manera previa a la implementación de las sesiones que hacen parte de la secuencia.

- Se recomienda que la sesión 3 también se pueda aplicar de forma presencial, para que todos los estudiantes puedan tener acceso a los applet a través de los recursos ofrecidos por la institución, debido a que algunos estudiantes no pudieron realizar los ejercicios que requerían del uso de estos, ya que no contaban con un computador ni con conexión a internet. También se evidenció que algunos estudiantes que solo contaban con celular, tuvieron dificultades al manipular los deslizadores y esto impidió que pudieran desarrollar la actividad de manera correcta.

- Para posteriores aplicaciones de esta secuencia didáctica se sugiere, inicialmente, proponer ejercicios en donde los estudiantes deban formular las situaciones problémicas a partir de cierto conjunto de datos, puesto que la competencia propositiva no pudo ser valorada en las sesiones diseñadas. En segundo lugar, se podrían proponer más situaciones relacionadas con la física u otras áreas para fortalecer la interdisciplinariedad. Con respecto a la física y en un ambiente de presencialidad, se podría plantear alguna situación que requiriera la realización de algún experimento, previo a la formulación y solución de determinado problema.

A. Anexo: Prueba de entrada

1. Determina el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, teniendo en cuenta estos valores: $x = 4$, $y = -2$ y $z = -1$.

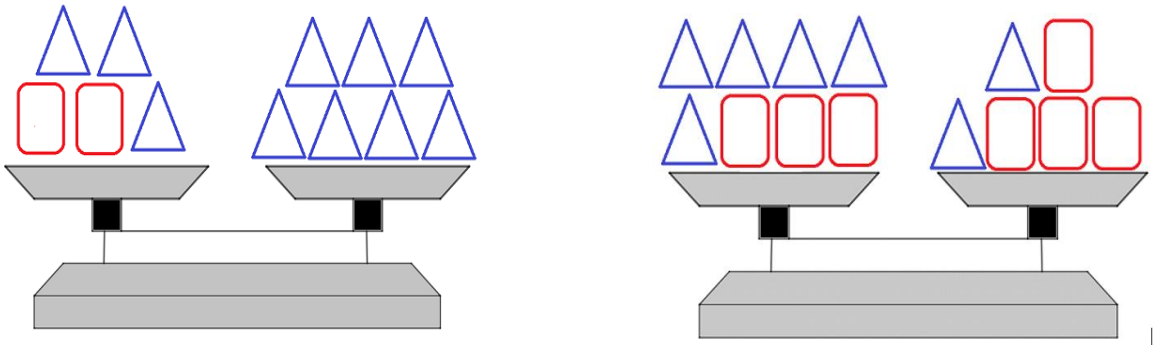
Expresión algebraica	Proceso	Resultado
$x^2 - 4yz$		
$z^3 - yx^2$		
$y - 2\sqrt{x} \div z$		

2. Relaciona los polinomios de la columna A con su correspondiente factorización en la columna B.

Columna A
$4x^2 - 25$
$x^2 - x - 72$
$4x^2 - 4x - 15$
$x^2 - 8x + 15$

Columna B
$(x-5)(x-3)$
$(x-9)(x+8)$
$(2x+5)(2x-5)$
$(2x-5)(2x+3)$
$(2x-5)(2x-5)$
$(2x+5)(2x-3)$
$(x+9)(x-8)$
$(x+5)(x-3)$

3. Para cada una de las siguientes balanzas en equilibrio, plantea una ecuación lineal y luego determina el valor de la incógnita. Debes tener en cuenta las siguientes equivalencias.



4. Teniendo en cuenta cada enunciado, escribe una ecuación que represente la información y resuélvela.

Enunciado	Ecuación	Solución
El doble de un número disminuido en 6 es igual a – 14		
Cuatro veces un número aumentado en 2 es equivalente a 5 veces el mismo número disminuido en 6		

5. Para **CADA UNA** de las siguientes situaciones problema, completa la tabla correspondiente teniendo en cuenta los pasos propuestos para resolver la situación, para ello elabora una tabla como la que se indica a continuación por cada problema:

Ítem
1. Establece la relación entre los datos. En esta parte debes asignar una variable (letra) al valor desconocido y establecer las relaciones que se encuentren en el enunciado.
2. Planteamiento de la situación (Traducción del lenguaje natural al simbólico). En este ítem deben plantear la ecuación que permite dar solución a la situación.
3. Ejecución del plan. En este ítem debes resolver la ecuación para encontrar el valor de la incógnita.
4. Verificación de las soluciones. En este ítem compruebas el resultado obtenido teniendo en cuenta la información del enunciado.

Situación 1. El miércoles en la cooperativa, Martín pagó $2.850 por una empanada, unas galletas y una gaseosa. La empanada costó $750 más que las galletas y la gaseosa costó $150 menos que las galletas. ¿Cuál es el costo de la gaseosa, las galletas y la empanada? Justifica tu respuesta.

Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	

Situación 2. La red social preferida por Sergio es Facebook, él navega todos los días según el tiempo que le permita su mamá. El martes Sergio navegó el triple del tiempo que navegó el lunes. El miércoles navegó el doble del lunes. El jueves navegó 3 horas más que el lunes y el viernes cuatro veces lo que navegó el lunes. Si el total de horas en las que Sergio navegó en Facebook de lunes a viernes es de 25 horas, ¿Cuántas horas navegó cada día? Justifica tu respuesta.

Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	

B. Anexo: Sesión 1

1. Lee con atención la siguiente propiedad:

Propiedad de la raíz cuadrada: Si $k \geq 0$, entonces las soluciones de una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = k$ son $x = \pm\sqrt{k}$

Teniendo en cuenta la propiedad anterior, encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones:

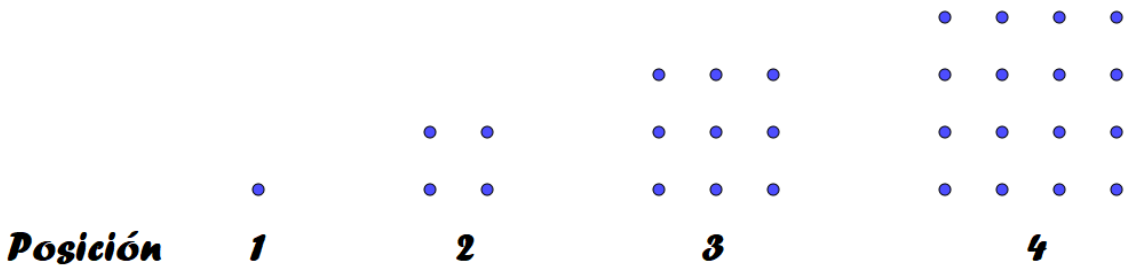
a. $x^2 = 36$

b. $(x-2)^2 = 9$

c. $x^2 - 100 = 0$

d. $(2x-5)^2 = 11$

2. Observa la siguiente secuencia de puntos y responde las preguntas.



a. Dibuja las figuras de las posiciones 5 y 7.

Posición 5	Posición 7

b. Completa la siguiente tabla indicando el número de puntos que hay en cada una de las posiciones.

Posición	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	n
Cantidad de puntos							

c. Teniendo en cuenta la expresión que permite determinar el número de puntos que hay en la posición n, ¿Cuántos puntos tendremos en la posición 21? ¿Y en la posición 36?

d. ¿En qué posición encontraremos una figura con 144 puntos? ¿y con 1444 puntos? Justifica tu respuesta.

3. Si $a \,.\, b = 30$, analiza y responde:

a. ¿Qué valores puede tomar a y b?

b. ¿Cuántos valores diferentes puede tomar a y b?

Si $a \,.\, b = 0$

c. ¿Qué valores puede tomar a y b?

d. ¿Cuántos valores diferentes puede tomar a y b?

e. ¿Qué tienen en común todas las parejas de los valores posibles que pueden tomar a y b y que satisfacen la condición conocida como: ***la propiedad del factor cero***?

4. Usando *la propiedad del factor cero* encuentra los valores de x que satisfacen:

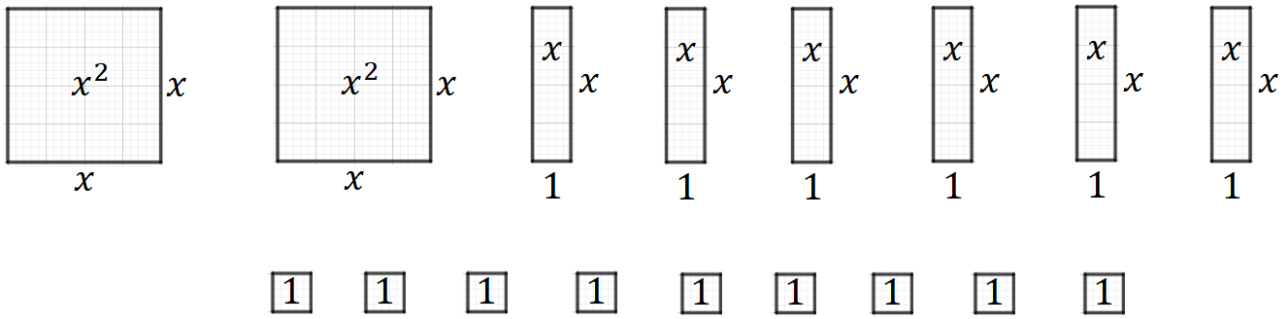
a. $(x+3)(x-9)=0$

b. $(3x-7)(2x-4)=0$

c. $(x-1)(2x+6)=0$

d. $(x-1)(x+2)(3x-12)=0$

5. Imprime[7] y recorta las siguientes fichas.



a. Las siguientes expresiones algebraicas representan el área de algunos rectángulos. Haciendo uso de algunas de las fichas recortadas, forma un rectángulo para cada una de las expresiones algebraicas y dibújalas en el espacio correspondiente indicando el valor de la base y la altura.

x^2+4x	x^2+5x+6

[7] Si no puedes imprimir, por favor realiza los dibujos de las piezas según la indicación.

$x^2 + 6x + 9$	$2x^2 + 5x + 2$

b. Si cada una de las expresiones anteriores las igualamos a cero, ¿Cuáles son los valores de la variable "x" en cada una de las expresiones?

6. Factoriza y resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la propiedad del factor cero.

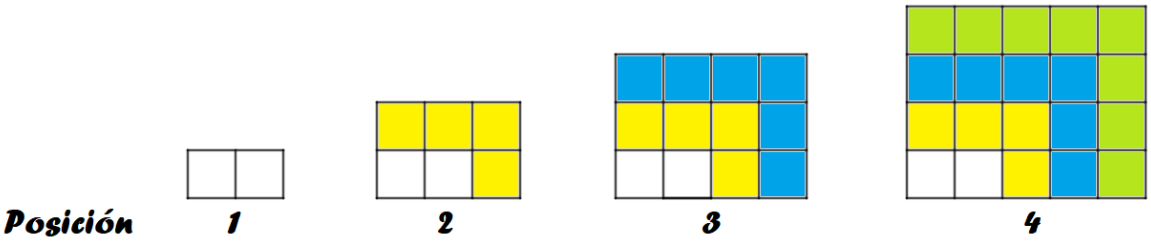
a. $x^2 - x = 12$

b. $x^2 + 4x - 5 = 0$

c. $x^2 + 9x = -14$

d. $(x + 4)(x - 6) = -16$

7. Observa la siguiente secuencia de rectángulos y responde:



a. Dibuja las figuras de las posiciones 5 y 8.

Posición 5	Posición 8

b. Completa la siguiente tabla indicando el número de cuadrados que hay en cada una de las posiciones.

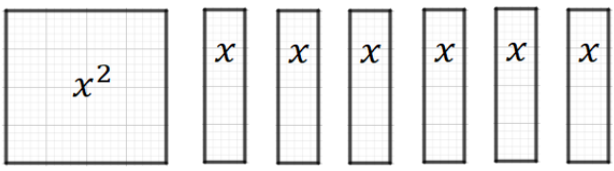
Posición	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**8**	n
Cantidad de puntos							

c. Teniendo en cuenta la expresión que permite determinar el número de cuadrados que hay en la posición n, ¿Cuántos rectángulos tendremos en la posición 15? ¿Y en la posición 28?

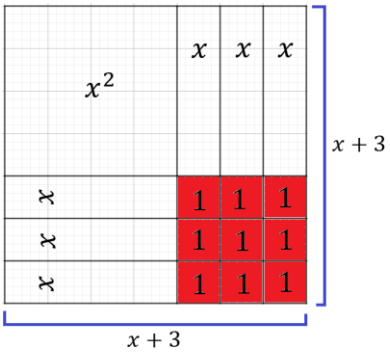
d. Es posible encontrar una posición en la que se encuentren 80 cuadrados? Justifica tu respuesta.

e. ¿En qué posición encontraremos una figura con 110 cuadrados? ¿y con 506 cuadrados? Describe el proceso que efectuaste para encontrar la solución.

8. ¿Crees que es posible armar un cuadrado con las siguientes figuras? Puedes intentarlo con las fichas recortadas en el punto 5.



Si ya has ensayado varias veces te habrás dado cuenta que la respuesta es ***no***, pero podríamos tratar de completarlo así:



Claro que el área del cuadrado formado no es igual al área de la figura que se podía armar inicialmente, pero la expresión algebraica inicial la podemos escribir de la siguiente forma:

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$$

Este proceso se denomina ***completación de cuadrados***.

a. Utilizando algunas de las fichas que se utilizaron en el punto número 5, verifica para cada una de las expresiones algebraicas si es posible armar un cuadrado. Si no es posible, realiza la completación de cuadrados y escribe la igualdad que se establece entre la expresión original y la obtenida, de forma similar a lo que se presentó en el ejemplo. Completa la siguiente tabla.

Expresión algebraica	$x^2 + 4x$	$x^2 + 8x + 3$
Dibujo		
Igualdad	$x^2 + 4x =$	$x^2 + 8x + 3 =$

En forma general el proceso de completación de cuadrados lo podemos resumir así:

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

o

$$x^2 - bx = x^2 - bx + (\frac{b}{2})^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

Observa el siguiente ejemplo:

$$x^2 - 12x = x^2 - 12x + 6^2 - 6^2 = x^2 - 12x + 36 - 36 = (x-6)^2 - 36$$

Las propiedades de las operaciones de los números reales y el proceso descrito de completación de cuadrados, combinados con la propiedad de la raíz abordada en el punto número 1, pueden ser útiles en muchos casos para resolver algunas ecuaciones cuadráticas, por ejemplo:

$$x^2 + 6x = 7$$
$$x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 = 7$$
$$(x+3)^2 - 9 = 7$$
$$(x+3)^2 = 7 + 9$$
$$(x+3)^2 = 16$$
$$\sqrt{(x+3)^2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$
$$x + 3 = \pm 4 \quad entonces \quad x = 4 - 3 = 1 \quad \text{ó} \quad x = -4 - 3 = -7$$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas a través del método de ***completar cuadrados.***

a. $x^2 + 6x = 0$

b. $x^2 - 10x = -24$

c. $x^2 + 2x - 8 = 0$

d. $x^2 - 14x + 5 = -40$

10. Para la siguiente situación problema, completa la tabla correspondiente teniendo en cuenta los pasos propuestos para resolver la situación, para ello elabora una tabla como la que se indica a continuación:

Ítem
1. Establece la relación entre los datos. En esta parte debes asignar una variable (letra) al valor desconocido y establecer las relaciones que se encuentren en el enunciado.
2. Planteamiento de la situación (Traducción del lenguaje natural al simbólico). En este ítem deben plantear la ecuación que permite dar solución a la situación.
3. Ejecución del plan. En este ítem debes resolver la ecuación para encontrar el valor de la incógnita.
4. Verificación de las soluciones. En este ítem compruebas el resultado obtenido teniendo en cuenta la información del enunciado.

Situación: Carolina y Fernanda son hermanas. Fernanda es menor que Carolina 4 años y el producto de sus edades es 357. ¿Cuál es la edad de cada una.? Justifica tu respuesta.

Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	

C. Anexo: Sesión 2

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas encuentra su discriminante ($D = b^2 - 4ac$) y luego indica si dicha ecuación tiene una raíz real doble, dos raíces reales o ninguna raíz en el conjunto de los números reales.

a. $2x^2 - 7x = -3$

b. $3x^2 - 4x - 2 = 0$

c. $3x^2 + 2 - 4x = 0$

d. $6x + 5 = -2x^2$

e. $x^2 + 49 = -14x$

f. $(x - 5)^2 + 7 = 2x$

2. Determina todos los valores de k para los que las ecuaciones tengan soluciones en el conjunto de los números reales.

a. $kx^2 + 2x + 1 = 0$

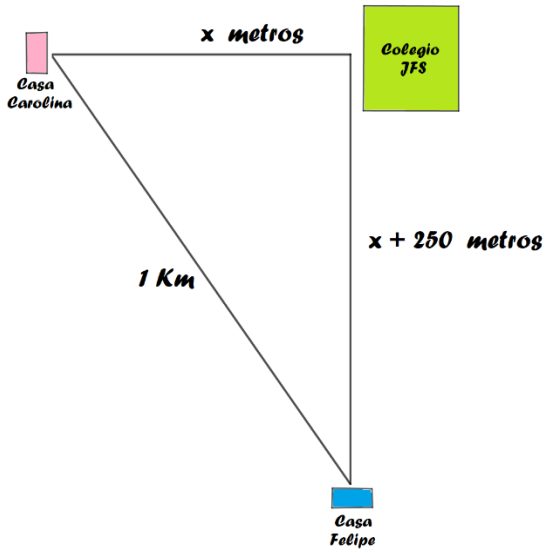
b. $2x^2 - 5x - 3k = 0$

3. Resuelve usando la formula cuadrática las ecuaciones del punto 1 que tienen raíces reales.

Para las siguientes situaciones problema, completa la tabla correspondiente teniendo en cuenta los pasos propuestos para resolver la situación.

Ítem	
1.	**Identificación de datos.** Identificar las variables o datos que aparecen en el enunciado: incógnita, datos conocidos, unidades, etc.
2.	**Establece la relación entre los datos.** Asignar una variable (letra) al valor desconocido y establecer las relaciones entre los datos.
3.	**Planteamiento de la situación (Traducción del lenguaje natural al simbólico)**. Plantear la ecuación que permite dar solución a la situación.
4.	**Ejecución del plan.** Resolver la ecuación para encontrar el valor de la incógnita.
5.	**Verificación de las soluciones.** Comprobar el resultado obtenido teniendo en cuenta la información del enunciado.

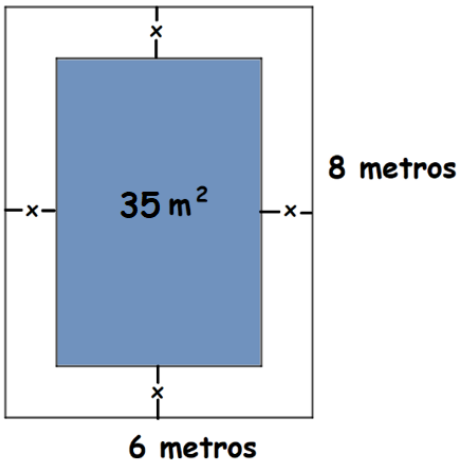
4. Felipe y Carolina son estudiantes del Colegio José Francisco Socarrás. Después de salir del colegio, Felipe camina hacia el sur para llegar a su casa y Carolina camina hacia el oeste. Cuando al fin llegan a sus casas, la distancia que los separa es de 1 Km. En el recorrido desde el colegio a su casa, Felipe recorrió 250 metros más que Carolina. ¿Cuántos metros hay entre la Casa de Carolina y el colegio? ¿Cuántos metros hay entre la casa de Felipe y el colegio?



Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

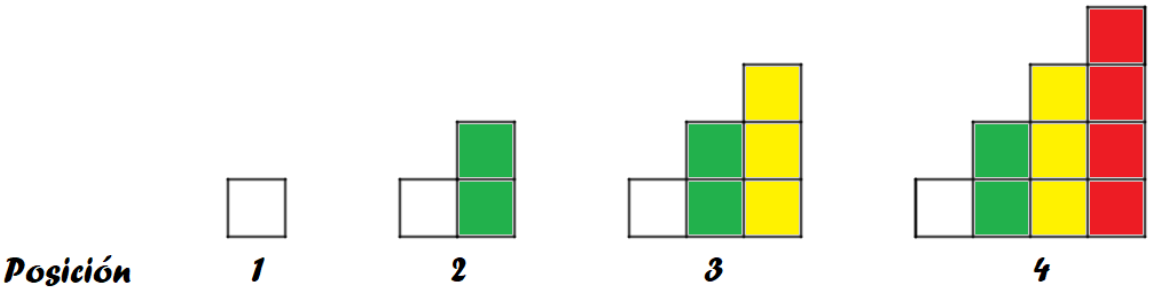
5. A raíz de la pandemia por el COVID 19, uno de los protocolos de bioseguridad que adoptó el Colegio José Francisco Socarrás en cada una de las aulas, consiste en

demarcar una franja uniforme en el piso a lo largo del perímetro para que el docente pueda desplazarse por toda el aula sin ninguna dificultad. Las aulas de bachillerato tienen dimensiones de 6 por 8 metros. ¿De qué ancho será la franja que van a demarcar, si el espacio en el cual se ubicarán los puestos y sillas de los estudiantes tendrá un área de 35 metros cuadrados?



Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

6. Observa la siguiente secuencia de figuras y responde las preguntas.



a. Dibuja las figuras de las posiciones 5 y 7.

Posición 5	Posición 7

b. Completa la siguiente tabla indicando el número de cuadrados pequeños que hay en cada una de las posiciones.

Posición	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	n
Cantidad de puntos							

c. Teniendo en cuenta la expresión que permite determinar el número de cuadrados pequeños que hay en la posición n, ¿Cuántos cuadrados pequeños tendremos en la posición 13? ¿Y en la posición 22?

d. ¿En qué posición encontraremos una figura con 153 cuadrados? ¿y con 496 cuadrados? Justifica tu respuesta.

7. Observa los primeros 14 minutos del video del link adjunto, relacionados con la historia del número de oro y la proporción áurea y responde las siguientes preguntas.

- https{://www.youtube.com/watch?v=JOkVfu2FxpA ***Donald en el país de las matemáticas.***

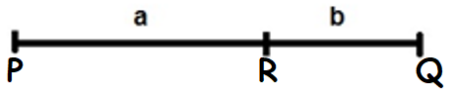
a. ¿Qué comprendiste sobre sección áurea o sección de oro?

b. Nombra un ejemplo en donde se encuentren de forma implícita los rectángulos áureos.

La "divina proporción" de la cual se habla en el video de "Donald en el país de las matemáticas", establece que:

Una recta está dividida en extrema y media razón cuando la recta es al segmento mayor lo que éste es al menor. En otras palabras, dado un segmento $\overline{PQ}$, diremos que $\overline{PR}$ es el segmento o sección aurea de $\overline{PQ}$, si cumple que $\frac{PR}{RQ} = \frac{PQ}{PR}$.

Para el segmento que se muestra a continuación, la divina proporción estaría dada por: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$



Asumamos que la razón $\frac{a}{b} = x$ y $b = 1$, por lo tanto $\frac{a}{1} = x$ y $a = x$.

Tendríamos entonces que $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$

c. Aplicando las propiedades de las proporciones y la fórmula de la ecuación cuadrática, determina los valores de x para los cuáles es válida la proporción anterior.

d. Descarta la solución negativa, el valor positivo representa el número áureo φ.

8. Asume que la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones en el conjunto de los números reales: $x_1 \, y \, x_2$. Completa la siguiente tabla y luego responde las preguntas.

Ecuación cuadrática	**Soluciones**	$\boldsymbol{x_1 + x_2}$	$\boldsymbol{x_1 . x_2}$	$\boldsymbol{-\frac{b}{a}}$	$\boldsymbol{\frac{c}{a}}$
$x^2 - x - 12 = 0$					
$2x^2 + 3x - 2 = 0$					
$x^2 - 11x + 30 = 0$					
$3x^2 + 19x + 6 = 0$					

a. ¿Qué puedes concluir con respecto a la suma de las raíces de una ecuación cuadrática?

b. ¿Qué puedes concluir con respecto al producto de las raíces de una ecuación cuadrática?

c. Comprueba las hipótesis que estableciste en el ítem a y b, haciendo el análisis para una ecuación cuadrática en la que a, b y c sean los siguientes valores.

a: Primer dígito de tu documento de identidad

b: Mes de tu nacimiento. (Ejemplo: Octubre – 10)

c: Un entero negativo entre – 9 y – 1.

9. Las relaciones que observaste en el punto anterior se conocen como las relaciones de Vieta y establecen que si tenemos una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y sus raíces son x_1 y x_2, se cumple que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Si las soluciones de una ecuación cuadrática son – 4 y – 1, escribe un ejemplo de una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean estos valores.

D. Anexo: Sesión 3

1. Usa el siguiente applet para trazar la gráfica de la función cuadrática asociada y completar la siguiente tabla:

Ecuación cuadrática: https://www.geogebra.org/m/v9pavv2g

Ecuación cuadrática	**Discriminante**	**Gráfica de la función asociada**	**Soluciones**
$2x^2 - 3x + 1 = 0$			
$-3x^2 + 4x - 5 = 0$			
$9x^2 - 6x + 1 = 0$			

$-4x^2 + 4x - 1 = 0$			
$-x^2 - 3x + 10 = 0$			
$4x^2 - 7x + 5 = 0$			

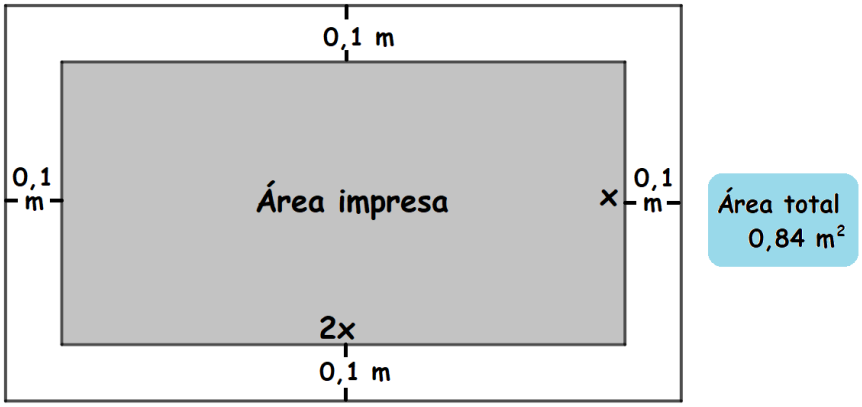
Observa los puntos de corte de cada una de las gráficas con el eje x y responde las siguientes preguntas:

- **a.** ¿Cómo es la gráfica de la función cuadrática de la ecuación asociada, cuando el discriminante es positivo?
- **b.** ¿Cómo es la gráfica de la función cuadrática de la ecuación asociada, cuando el discriminante es cero?
- **c.** ¿Cómo es la gráfica de la función cuadrática de la ecuación asociada, cuando el discriminante es negativo?
- **d.** ¿Cómo es la gráfica de la función cuadrática de la ecuación asociada, cuando a es positivo?
- **e.** ¿Cómo es la gráfica de la función cuadrática de la ecuación asociada, cuando a es negativo?

Para las siguientes situaciones problema, completa la tabla correspondiente teniendo en cuenta los pasos propuestos para resolverla. Una vez tengas escrita la ecuación que modela cada situación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, puedes usar el applet para obtener las soluciones.

Ítem
1. Identificación de datos. Identificar las variables o datos que aparecen en el enunciado: incógnita, datos conocidos, unidades, etc.
2. Establece la relación entre los datos. Asignar una variable (letra) al valor desconocido y establecer las relaciones entre los datos.
3. Planteamiento de la situación (Traducción del lenguaje natural al simbólico). Plantear la ecuación que permite dar solución a la situación.
4. Ejecución del plan. Resolver la ecuación para encontrar el valor de la incógnita.
5. Verificación de las soluciones. Comprobar el resultado obtenido teniendo en cuenta la información del enunciado.

2. Para la inauguración de juegos del colegio cada uno de los cursos debe elaborar una pancarta alusiva al país asignado. En grado décimo los estudiantes acordaron que en el área impresa de la pancarta el largo debía ser igual al doble del ancho. También acordaron que debía tener una franja de ancho uniforme equivalente a 0,1 m alrededor de los bordes. Si el área de toda la pancarta, incluyendo el área impresa y la franja uniforme, es de 0,84 m^2¿Cuáles son las dimensiones del área impresa de la pancarta?



Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

3. El producto de dos números racionales positivos es $\frac{9}{2}$. El número mayor equivale al doble del menor. ¿Cuáles son los números?

Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

4. En clase de educación física un estudiante lanza una pelota hacía arriba desde el suelo. Después de x segundos la distancia en metros arriba del suelo, está dada por la siguiente expresión $y = -5x^2 + 10x$ (altura en función del tiempo).

a. ¿En cuántos segundos la pelota cae al piso?

b. ¿Cuántos segundos transcurren hasta que la pelota alcanza una altura de 3,5 metros?

Ítem	Solución
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

5. El círculo de Carlyle es un método gráfico que permite aproximar las soluciones reales de una ecuación cuadrática. El método consiste en:

- Tomar una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y reescribirla de la forma $x^2 - Sx + P = 0$ (para lograrlo se deben dividir todos los términos de la ecuación por a, y entonces $-S = \frac{b}{a}$ y $P = \frac{c}{a}$).
- Ubicar en el plano cartesiano los puntos de coordenadas $B(S, P)$ y $A(0, 1)$
- Trazar el segmento $\overline{AB}$ y luego trazar una circunferencia cuyo diámetro sea este segmento.
- Los puntos de intersección de la circunferencia trazada con el eje x corresponden a las raíces reales de la ecuación cuadrática dada.

Para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas, confirma el método del círculo de Carlyle. Primero debes escribir la ecuación de la forma $x^2 - Sx + P = 0$ y luego debes usar el siguiente applet para visualizar las soluciones, moviendo los deslizadores para los valores de S y P obtenidos. Después debes usar los deslizadores para a, b y c para representar la función cuadrática original.

Círculo de Carlyle: https://www.geogebra.org/m/wqdbmamf

a. $-2x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $3x^2 + 9x - 6 = 0$

c. $8x - x^2 - 7 = 0$

d. $4x^2 - 2 - 8x = 0$

e. ¿Cómo son las soluciones que se obtienen al utilizar el método del círculo de Carlyle, en comparación con las raíces que se obtienen al graficar la función cuadrática inicial?

6. Dados los siguientes valores para S y P y haciendo uso del último applet, encuentra una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean las abscisas de los puntos de intersección de la circunferencia de diámetro AB con el eje x.

$$S = 2 \text{ y } P = -2$$

7. Dadas las siguientes parejas ordenadas que representan los interceptos de la circunferencia de diámetro AB con el eje x, encuentra una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean las abscisas de dichas parejas.

$$(-2,0) \text{ y } (2,0)$$

Bibliografía

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la resolución de problemas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, Vol. 1,* (1), 1–13.

Alfaro, C. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, Vol. 3,* (4), 83–98.

Apostol, T. (1967). *Calculus. Volumen I.* Barcelona: Editorial Reverté, S. A.

Barrantes, H. (2006). RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, Vol. 1,* (1), 1–9.

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza editorial.

Do Amaral, J. (s. f.).Método de Viète para Resolução de Equações do 2.° Grau. *RPM 13.* Obtenido de: https://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm

Elizarras, S. (2017). *Enseñanza de ecuaciones cuadráticas mediante la resolución de problema con estudiantes de bachillerato*. *Avances en Matemática Educativa.* 54–70. México: Editorial Lectorum.

Grossman, P., Wilson, S. y Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: El conocimiento de la materia para la enseñanza. *Revista de currículum y formación del profesorado, Vol. 9,* (2), 1-21.

Hernández, R. (2014). *Metodología de la investigación.* (6ª edición). México: Mc Graw Hill Education

Meavilla, S. V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales.* Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Miller, C. (2013). *Matemática: Razonamiento y aplicaciones.* (12ª edición). México: Pearson Education

Musser, G. (2008). *Mathematics For Elementary Teachers. A contemporary Approach.* (8ª edición). Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.

Notas sobre polinomios. (s. f.). Obtenido de https://www.unirioja.es/talleres/creatividad_matematica/SeminarioBachillerato/teoria_polinomios_18.pdf

Ortiz, J. A. (2005). *Historia de la matemática. La matemática en la antigüedad.* (Vol. 1). Lima: PUCP

Oviedo, N. (septiembre, 2013). *Enseñanza y aprendizaje de ecuación cuadrática con apoyo GeoGebra*. VII Congreso iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM). Montevideo, Uruguay. Obtenido de: http://funes.uniandes.edu.co/18645/1/Oviedo2013Ense%C3%B1anza.pdf

Patterson, W., Lubecke, A. (1991). A Special Circle for Quadratic Equations. The *Mathematics Teacher, Vol. 84,* (2). 125–127.

Pérez, Y., Beltrán, C. (2011). ¿Qué es un problema en Matemática y como resolverlo? Algunas consideraciones preliminares. *EduSol, Vol. 11,* (34), 74–89.

Pérez, Y., Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación, Vol. 35,* (73), 169–192.

Pieronkiewicz, B y Tanton, J. (2020). Different ways of solving quadratic equations. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia Mathematica.*93-114*.* DOI 10.24917/20809751.11.6

Salvador, A. (s. f.). *Recursos para el aula. El número de oro.* Obtenido de: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/11.Numero%20de%20oro.pdf

Solano, A. (2016). *Situaciones problema como estrategia para la enseñanza - aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales*. Tesis UN. Bogotá

Stewart, I. (2007). Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años. Barcelona: Crítica

Suárez, C. (s. f.). *Resolución de ecuaciones según Al-Khowarizmi.* Obtenido de https://clasedematematicas.files.wordpress.com/2009/02/resolucion-arabe.pdf

Swokowski E.W. (2006). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. (11ª edición). México: Thomson

Torres, R. (2002). Descartes y la ecuación cuadrática. *Cubo matemática educacional, Vol. 4,* (1), 65–74.

Torres, R. (2018). Enseñanza de las operaciones entre polinomios de una variable de primer y segundo grado bajo el enfoque de la resolución de problemas. Tesis UN. Bogotá

Santos, L. (s. f.). La *resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales.* Obtenido de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23952

Stewart, J. (2012). *Precálculo 6ª edición.* México: CENGAGE Learning.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay – Williams, J. M. *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally.* (8ª Ed.). Estados Unidos: Pearson