Ortogonalidades en planos afines y proyectivos

Carlos Isaac Zainea Maya
Código: 01830499

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2014

Ortogonalidades en planos afines y proyectivos

Carlos Isaac Zainea Maya
Código: 01830499

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Ciencias Matemáticas

Director
Dr. Lorenzo Acosta Gempeler
Profesor asociado

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio de 2014

Título en español

Ortogonalidades en planos afines y proyectivos

Title in English

Orthogonality in affine planes and projective planes

Resumen: En este escrito se generaliza, en el contexto de los planos afines desarguesianos, la noción de ortogonalidad. Para lograrlo se utilizan las ideas expuestas en [12] para definir la ortogonalidad en el plano euclidiano. Además esta nueva noción es extendida al contexto de los planos proyectivos. Por otro lado, también se estudian algunas colineaciones inspiradas en la ortogonalidad, usándolas, se construyen nuevos subgrupos del grupo de colineaciones.

Abstract: In this paper the notion of orthogonality is generalized in the context of desarguesian affine planes. I used the ideas in [12] to define the orthogonality in the Euclidean plane. On the other hand, some collineations inspired in this orthogonality notion are also studied, using them, new subgroups of the group of collineations are built.

Palabras clave: Geometría, Traslaciones, Rotaciones,Ortogonalidad, Planos Afines, Planos Proyectivos, Planos Desarguesianos

Keywords: Geometry, Translations, Rotations, Orthogonality, Affine planes, Projective Planes, Desarguesian planes

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Director
Dr Lorenzo Acosta Gempeler

Bogotá, D.C., Junio de 2014

A mis padres Carlos Julio y Esperanza,
gracias por su constante esfuerzo.

Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento a todas las personas que de una forma, u otra, contribuyeron a la realización de este escrito. En principio, quiero agradecer a todos los amigos que con sus conversaciones, o su apoyo, aportaron pequeñas ideas expresadas aquí. También, agradezco a mi familia su comprensión, paciencia y apoyo.

Por último, y de manera muy especial, agradezco profundamente la colaboración, la disposición y la paciencia del profesor Lorenzo Acosta, su apoyo y orientación fueron indispensables para la realización de este trabajo.

Índice general

Índice general **III**

Introducción **V**

1. Introducción a planos **1**

1.1. Planos afines 1

1.1.1. Planos afines $\mathcal{T}$-simétricos. 4

1.2. Planos proyectivos 5

2. Simetrías centrales y simetrías axiales **9**

2.1. Simetrías en planos afines 9

2.1.1. Simetrías centrales 9

2.1.2. Simetrías axiales 12

2.2. Simetrías en planos proyectivos 15

3. Ortogonalidades y rotaciones **17**

3.1. Planos afines 17

3.1.1. Ortogonalidades de planos afines desarguesianos 17

3.1.2. Simetrías ortogonales 19

3.1.3. Rotaciones 22

3.1.4. Un algoritmo en Mathematica 9 para calcular rotaciones en planos de orden p 24

3.1.5. Órbitas 30

3.2. Planos proyectivos 34

Conclusiones **37**

Bibliografía **39**

Introducción

Este trabajo se desarrolla en el contexto de los planos afines y los planos proyectivos. Los objetos básicos de un plano son los puntos, las líneas y la relación de incidencia. Por consiguiente, las funciones naturales de un plano en sí mismo son aquellas biyecciones que envían puntos en puntos, líneas en líneas y respetan la relación de incidencia. Estas funciones se conocen generalmente como colineaciones y constituyen un grupo con la composición usual. El estudio de este grupo y de sus subgrupos proporciona información sobre el plano.

Veamos primero el panorama de los planos afines. En este caso el axioma fundamental es el axioma de las paralelas: dados un punto y una línea existe una única línea que pasa por el punto dado y es paralela a la línea dada. Debido a esto, en este ámbito, se estudian las dilataciones que son aquellas colineaciones que envían cada línea en una línea paralela. Las dilataciones se dividen en dos clases: las traslaciones (dilataciones sin puntos fijos) y las homotecias (dilataciones con un punto fijo).

Cuando el grupo $\mathcal{T}$ de las traslaciones actúa transitivamente sobre el conjunto de puntos decimos que el plano es $\mathcal{T}$-simétrico . En este caso se construye un cuerpo K, no necesariamente conmutativo, de tal manera que $\mathcal{T}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre K. Cada vez que se fija un punto del plano se establece una biyección entre el conjunto de puntos y $\mathcal{T}$ y por consiguiente podemos trasladar la estructura de espacio vectorial al conjunto de puntos del plano. La multiplicación por escalar estará estrechamente relacionada con las homotecias.

Esta presentación de las traslaciones y las homotecias difiere de la que se hace en los textos elementales de geometría euclidiana y puede ser explotada de una manera más profunda aprovechando las herramientas algebraicas de la teoría de grupos y del álgebra lineal.

En una presentación elemental de la geometría euclidiana a través de las transformaciones (como se hace por ejemplo en [12]) se estudian además otras transformaciones útiles del plano: las simetrías centrales (caso particular de homotecias), las simetrías paralelas (llamadas aquí simetrías axiales), las simetrías ortogonales

(caso particular de simetrías paralelas) y las rotaciones. Estas últimas son las que permiten una definición de ángulo y por consiguiente las que abren la puerta a la trigonometría.

El primer objetivo de este trabajo consiste en encontrar una definición adecuada de cada uno de estos tipos de transformaciones en el contexto general de los planos afines haciendo énfasis en el concepto de rotación. En la geometría euclidiana es bien sabido que toda rotación es la compuesta de dos simetrías ortogonales, de manera que si se logra definir simetría ortogonal el asunto está resuelto. Aparentemente, la noción de simetría ortogonal depende de lo que significa que dos rectas sean ortogonales o perpendiculares, es decir del significado de ángulo recto, lo cual nos hace pensar que estamos cayendo en un círculo vicioso. Sin embargo, revisando [12] encontramos una noción de ortogonalidad que se puede definir en casi todos planos afines.

La definición de simetría ortogonal requiere que el plano sea $\mathcal{T}$-simétrico y si queremos que estas simetrías sean colineaciones necesitaremos además que el plano sea desarguesiano, lo que equivale a que el espacio vectorial mencionado sea de dimensión 2.

Observamos que un plano afín desarguesiano tiene una multitud de ortogonalidades y por consiguiente el estudio de las rotaciones debe hacerse fijando una de ellas. En otras palabras, las propiedades del conjunto de rotaciones dependen de la ortogonalidad escogida. A diferencia del caso euclidiano, el conjunto de las rotaciones de centro fijo no es en general un grupo y, cuando lo es, éste no siempre es conmutativo. Esta situación se ilustra con diversos ejemplos.

En los planos afines finitos el cálculo de las rotaciones de centro fijo puede hacerse muy dispendioso. Sin embargo, con la ayuda del programa Mathematica se construyó un algoritmo desarrollado específicamente para encontrar todas las rotaciones de centro fijo y determinar además si este conjunto es o no un grupo. También se presenta un algoritmo que permite hallar la órbita de cada punto bajo la acción de las rotaciones. Estos algoritmos aprovechan la estructura de espacio vectorial de los planos desarguesianos y el hecho que toda rotación de centro 0 es una trasformación lineal.

En el contexto de los planos proyectivos el axioma de las paralelas se sustituye por un axioma que impide el paralelismo: todo par de líneas distintas se cortan en único punto. Cada plano afín da lugar a un plano proyectivo añadiendo un punto por cada dirección y una línea constituida por los nuevos puntos. Recíprocamente, si a un plano proyectivo le quitamos una línea (y todos sus puntos) obtenemos un plano afín. Si el plano proyectivo es desarguesiano este proceso no dependerá de la línea suprimida.

Dada esta estrecha relación entre los planos afines y los proyectivos, el siguiente paso consistió en extender las nociones de ortogonalidad, de simetría y de rotación

al caso de los planos proyectivos. En este contexto las colineaciones más estudiadas son las perspectivas.

Una perspectiva es una colineación que deja fija una línea con todos sus puntos y un punto con todas las líneas que lo contienen. Si el punto fijo está sobre la línea fija la perspectiva se llama elación y en caso contrario se llama homología. Si suprimimos la línea fija, la restricción de la perspectiva al plano afín correspondiente resulta ser una traslación (en el caso de las elaciones) o una homotecia (en el caso de las homologías). Por consiguiente las perspectivas no son otra cosa que las extensiones de las dilataciones del contexto afín. Las simetrías centrales y axiales se obtienen mediante restricciones convenientes de homologías de orden dos, lo que nos permite dar una definición adecuada de simetría en un plano proyectivo. La extensión del concepto de ortogonalidad al ámbito de los planos proyectivos se hizo de manera que depende de una línea. Así, hablamos de ortogonalidad que fija a una línea. A partir de este concepto se define lo que es una simetría ortogonal y las rotaciones se obtienen de la misma manera que en el caso de los planos afines. Estas rotaciones son colineaciones que dejan fijos únicamente un punto y una línea y por lo tanto constituyen un tipo de colineación diferente.

A continuación hacemos una descripción de la estructura de este trabajo.

En el primer capítulo se hace una breve introducción a los planos afines y proyectivos. El lector encontrará dos partes: en la primera parte se hace una rápida revisión de los planos afines y, de éstos, se resaltan los planos desarguesianos. Se muestra también lo que son las dilataciones y cómo se utilizan para construir un cuerpo sobre el cual el plano tiene estructura de espacio vectorial. Todo este material es tomado de [3] aunque se modificó la notación. En la segunda parte, con base en [13], se presentan los planos proyectivos y se describen las perspectivas. Se establece la manera de extender un plano afín para obtener un plano proyectivo y la manera de restringir un plano proyectivo para obtener un plano afín. Se muestra también la estrecha relación entre las colineaciones de un plano afín y las colineaciones de su extensión.

En el capítulo dos se presentan las nociones de simetría central y de simetría axial en un plano afín desarguesiano y se estudian algunas de sus propiedades. Respecto a los planos proyectivos, se extienden esta nuevas funciones a este contexto y se muestra que son perspectivas. Además, se recalca el hecho de que una simetría axial se extiende a una perspectiva cuyo eje no es la línea infinita del plano proyectivo. Finalmente se define el concepto de simetría de un plano proyectivo.

El último capítulo inicia con la definición de ortogonalidad sobre los planos afines. Luego se definen las simetrías ortogonales como aquellas simetrías axiales cuyo eje y dirección son ortogonales y se presentan las rotaciones como compuestas de pares de simetrías ortogonales cuyos ejes no son disyuntos. Se muestra que el grupo de traslaciones actúa por conjugación sobre el conjunto de las rotaciones lo que permite reducir el estudio de todas las rotaciones al de las rotaciones de un centro fijo. Dependiendo de la ortogonalidad escogida, los conjuntos de rotaciones de centro

fijo pueden o no conformar subgrupos del grupo de las colineaciones. Se muestran aquí algunos ejemplos que ilustran las dos situaciones. También se exploran algunas condiciones suficientes sobre las relaciones de ortogonalidad para que el conjunto de rotaciones sea un grupo y al final se hace un análisis de las órbitas de la acción de este grupo sobre los puntos del plano. Para el caso de los planos finitos se presentan algoritmos que calculan la representación matricial de las rotaciones de un plano afín y permiten determinar si éstas constituyen un grupo.

En la última parte se extienden las nociones de ortogonalidad, simetría y rotación al contexto de los planos proyectivos y se demuestra que las rotaciones no son perspectivas.

Capítulo 1

Introducción a planos

1.1. Planos afines

En este trabajo se pretende presentar una noción de ortogonalidad y una de rotación en el contexto de los planos afines y en el de los planos proyectivos. En este primer capítulo hacemos una breve exploración de estas estructuras geométricas y fijamos condiciones sobre ellas que nos permitirán lograr las definiciones mencionadas.

Este capítulo tiene dos secciones. En la primera tratamos las nociones básicas de los planos afines y en la segunda las de los planos proyectivos y su conexión con los planos afines. El material sobre planos afines es adaptado, con algunas modificaciones de notación, de [3]. Lo que corresponde a los planos proyectivos se encuentra esencialmente en [13].

Un plano es una pareja $\mathscr{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ donde $\mathcal{P}$ es un conjunto y $\mathcal{L}$ es un subconjunto de partes de $\mathcal{P}$. Los elementos de $\mathcal{P}$ se llamarán puntos y los notaremos con letras mayúsculas. Los elementos de $\mathcal{L}$ se llamarán líneas y los notaremos con letras minúsculas.

Si dos líneas l y m son iguales o si son disyuntas diremos que son paralelas y escribiremos $l \parallel m$. En caso contrario escribiremos $l \nparallel m$. Cuando $P \in l$ diremos que P incide en l, P está en l o l pasa por P.

Una función biyectiva $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ se llama una **colineación** (o automorfismo) del plano si para cada $l \in \mathcal{L}$ se tiene que $\varphi(l) \in \mathcal{L}$. Al conjunto de todas las colineaciones de un plano $\mathscr{P}$ lo designaremos $Aut(\mathscr{P})$ y es claro que es un grupo con la composición de funciones. Es evidente que si φ es una colineación y $l \parallel m$ entonces $\varphi(l) \parallel \varphi(m)$.

Definición 1.1 (Plano Afín)**.** Diremos que un plano $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un plano afín si cumple las siguientes condiciones:

(i) Para cualquier par de puntos P y Q distintos, existe una única línea l tal que $P \in l$ y $Q \in l$.

(ii) Para todo $P \in \mathcal{P}$ y todo $l \in \mathcal{L}$, existe una única línea m paralela a l tal que $P \in m$.

(iii) Existen tres puntos no colineales.

La línea que pasa por los puntos P y Q se designa por PQ. A la línea paralela a l que pasa por P la notaremos l_P. Se puede demostrar fácilmente que dos líneas no paralelas l y m tienen un único punto en común que notaremos lm.

Nótese que la relación de paralelismo en un plano afín es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{L}$. El conjunto de todas las líneas paralelas a l se llama la dirección de l y se nota $Dir(l)$. El conjunto de todas las direcciones del plano se nota $Dir(\mathscr{A})$.

Ejemplo 1.1. Sea K un cuerpo (no necesariamente conmutativo) y sea $\mathcal{P} = K \times K$. Para cada par de puntos P y Q en $K \times K$ definimos $l_Q^P = \{P + \alpha Q : \alpha \in K\}$. Si $\mathcal{L} = \{l_Q^P : P, Q \in K \times K \text{ y } P \neq Q\}$ entonces $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un plano afín.

Uno de los primeros resultados al estudiar los planos afines es el siguiente:

Teorema 1.1. *Sea $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano afín.*

(i) Todas las líneas del plano son equipotentes.

(ii) Si l es una línea entonces $\mathcal{P}$ es equipotente a $l \times l$.

(iii) El cardinal de $Dir(\mathscr{A})$ es igual al cardinal de l mas 1, para cada $l \in \mathcal{L}$.

El cardinal de cada línea se llama el **orden** del plano.

En el resto de esta sección $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ será un plano afín.

Definición 1.2. Una colineación σ es un dilatación si para toda línea l se tiene que $\sigma(l) \parallel l$.

Evidentemente el conjunto $\mathcal{D}$ de las dilataciones del plano es un subgrupo de $Aut(\mathscr{A})$.

Trabajar con las dilataciones es relativamente fácil pues una dilatación está completamente determinada por su valor en dos puntos. Como consecuencia de esta observación, si una dilatación tiene más de un punto fijo entonces es la identidad de $\mathcal{P}$.

La siguiente proposición se prueba sin dificultad:

Proposición 1.1. *Sea σ una dilatación. Si existen $P, Q \in \mathcal{P}$ tales que $P \neq \sigma(P), Q \neq \sigma(Q)$ y $P\sigma(P) \nparallel Q\sigma(Q)$ entonces:*

(a) σ tiene un punto fijo C (forzosamente único).

(b) Para todo $P \in \mathcal{P} - \{C\}$, $\sigma(P)$ está en la línea PC.

Tenemos entonces que existen dos clases de dilataciones: las que tienen un único punto fijo y las que no. Las primeras se llaman **homotecias** y las segundas se llaman **traslaciones**. Es claro que una traslación que no es la idéntica no tiene puntos fijos. Además, una traslación queda completamente determinada por su valor en un punto.

Al conjunto de todas las homotecias lo notaremos $\mathcal{H}$, al de todas las homotecias con punto fijo C lo notaremos $\mathcal{H}_C$ y al conjunto de todas las traslaciones lo notaremos $\mathcal{T}$. Llamaremos $\mathcal{T}_l$ al conjunto de las traslaciones τ tales que $\tau(l) = l$. Un elemento de $\mathcal{T}_l$ se llama traslación en la dirección de l y claramente deja fija a cualquier línea en $Dir(l)$.

Nótese que la identidad es a la vez una homotecia y una traslación.

El siguiente resultado se obtiene inmediatamente:

Proposición 1.2. *(i) Para cada $C \in \mathcal{P}$ se tiene que $\mathcal{H}_C$ es un subgrupo de $\mathcal{D}$.*

(ii) Para cada $l \in L$ se tiene que $\mathcal{T}_l$ es un subgrupo de $\mathcal{D}$.

(iii) $\mathcal{T}$ es un subgrupo normal de $\mathcal{D}$.

(iv) Si $\tau \in \mathcal{T}$ y $C \in \mathcal{P}$ entonces $\tau\mathcal{H}_C\tau^{-1} = \mathcal{H}_{\tau(C)}$.

(v) Si $\sigma \in \mathcal{D}$ y $l \in \mathcal{L}$ entonces $\sigma\mathcal{T}_l\sigma^{-1} = \mathcal{T}_{\sigma(l)}$.

(vi) Si $\tau \in T_l$, $\lambda \in T_m$ y $l \nparallel m$ entonces $\tau\lambda = \lambda\tau$.

Como consecuencia de (vi) en la proposición anterior, si el plano tiene traslaciones en direcciones diferentes entonces $\mathcal{T}$ es un grupo abeliano.

Definición 1.3. Diremos que el plano afín $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es $\mathcal{T}-$**simétrico** si para todo par de puntos P y Q existe una traslación τ tal que $\tau(P) = Q$. Esta traslación se nota $\overrightarrow{PQ}$.

Es claro que en un plano $\mathcal{T}-$simétrico el grupo $\mathcal{T}$ es abeliano.

1.1.1. Planos afines $\mathcal{T}$-simétricos.

Para esta sección suponemos que el plano afín $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es $\mathcal{T}-$simétrico y por consiguiente el grupo $\mathcal{T}$ es abeliano. Usaremos de ahora en adelante notación aditiva para la composición de traslaciones.

Un resultado de álgebra abstracta es que si $(G, +)$ es un grupo abeliano entonces $(End(G), +, \circ)$ es un anillo con unidad. En particular tendremos entonces que $End(\mathcal{T})$ es un anillo con unidad. El cero de este anillo es el homomorfismo constante de valor $1_{\mathcal{P}}$ y la unidad será el homomorfismo idéntico.

Definición 1.4. Decimos que $\alpha \in End(\mathcal{T})$ preserva dirección si para toda línea l se tiene que $\alpha(\mathcal{T}_l) \subseteq \mathcal{T}_l$.

Al conjunto de todos los endomorfismos de $\mathcal{T}$ que preservan dirección lo notaremos K.

Nótese que si $\sigma \in \mathcal{D}$ entonces el homomorfismo $\widehat{\sigma} : \mathcal{T} \to \mathcal{T} : \tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$ es un elemento de K.

En el siguiente teorema resumimos algunas propiedades de K :

Teorema 1.2. *(i) K es un subanillo de $End(\mathcal{T})$.*

(ii) $K - \{0\} = \{\widehat{\sigma} : \sigma \in \mathcal{H}_C\}$, donde C es cualquier punto de $\mathcal{P}$.

(iii) K es un cuerpo (no necesariamente conmutativo).

(iv) $\mathcal{T}$ es un espacio vectorial sobre K, donde la multiplicación por escalar está dada por $\widehat{\sigma} \cdot \tau = \sigma\tau\sigma^{-1}$.

Si fijamos dos traslaciones τ y λ en direcciones diferentes tenemos que la función

$$\varphi : K \times K \to \mathcal{T} : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \tau + \beta \cdot \lambda$$

es una transformación lineal inyectiva y por consiguiente la dimensión de $\mathcal{T}$ sobre K es mayor o igual a 2.

Para que la dimensión sea 2 se requiere una condición adicional sobre el plano afín, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para el plano afín $\mathcal{T}$-simétrico $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$:*

(i) La dimensión de $\mathcal{T}$ sobre K es 2.

(ii) Dados tres puntos colineales P, Q y R existe una homotecia $\sigma \in \mathcal{H}_P$ tal que $\sigma(Q) = R$.

Diremos que un plano afín es $\mathcal{H}-$simétrico si satisface la condición (ii) del teorema anterior. Por consiguiente, un plano afín $\mathcal{T}-$simétrico es $\mathcal{H}-$simétrico si y solamente si la dimensión de $\mathcal{T}$ sobre K es 2. Estos planos también se llaman **planos desarguesianos** pues son exactamente aquellos en donde se satisfacen los teoremas de Desargues.

Fijemos ahora un punto $O \in \mathcal{P}$. A la pareja $(\mathcal{P}, O)$ la llamaremos $\mathcal{P}_O$. Utilizando la biyección

$$\mu : \mathcal{T} \to \mathcal{P}_O : \tau \mapsto \tau(O)$$

transferimos la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{T}$ al conjunto $\mathcal{P}_O$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P + Q &= \mu\left(\mu^{-1}(P) + \mu^{-1}(Q)\right) \\ \alpha \cdot P &= \mu\left(\alpha \cdot \mu^{-1}(P)\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente $\mathcal{P}_O$ es un espacio vectorial sobre K y cada línea l que pasa por O es un subespacio de $\mathcal{P}_O$ isomorfo a $\mathcal{T}_l$.

El espacio vectorial $\mathcal{P}_O$ es isomorfo a $K \times K$ si y solo si el plano es desarguesiano. Además las líneas son exactamente los subespacios de dimensión 1 y sus imágenes mediante las traslaciones del plano.

Esto nos muestra que, en el contexto de los planos desarguesianos, no perdemos generalidad si consideramos únicamente planos afines como los del Ejemplo 1.1.

1.2. Planos proyectivos

Definición 1.5 (Plano Proyectivo)**.** Un plano proyectivo $\mathscr{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un plano que satisface las siguientes condiciones:

(i) Dados dos puntos P y $Q \in \mathcal{P}$ distintos, hay una única línea $l \in \mathcal{L}$ tal que $P \in l$ y $Q \in l$.

(ii) Dadas dos líneas l y $m \in \mathcal{L}$ distintas, hay un único punto $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \in l$ y $P \in m$.

(iii) Existen cuatro elementos en $\mathcal{P}$ tales que tres de ellos no inciden sobre un mismo elemento de $\mathcal{L}$.

A partir de todo plano afín se puede construir un plano proyectivo agregando un punto en cada dirección y una línea que está conformada por todos estos nuevos puntos. En efecto, si $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es el plano afín entonces para cada $l \in \mathcal{L}$ definimos $l^* = l \cup \{Dir\,(l)\}$. Si llamamos $\widetilde{\mathcal{P}}$ al conjunto $\mathcal{P} \cup Dir\,(\mathscr{A})$, $[\infty]$ al conjunto $Dir\,(\mathscr{A})$ y $\widetilde{\mathcal{L}} = \{l^* : l \in L\} \cup \{[\infty]\}$ entonces $\widetilde{\mathscr{A}} = (\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{L}})$ es un plano proyectivo. La línea adicional, que hemos notado $[\infty]$, se acostumbra llamar la línea del infinito.

Recíprocamente, si partimos de un plano proyectivo y quitamos una línea y todos sus puntos, obtenemos un plano afín. Más precisamente, si $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es un plano proyectivo y l es una línea, definimos $m_* = m - l$ para cada línea m, $\mathcal{P}^l = \mathcal{P} - l$ y $\mathcal{L}^l = \{m_* : m \in \mathcal{L} - \{l\}\}$. Así, $\mathscr{P}^l = (\mathcal{P}^l, \mathcal{L}^l)$ es un plano afín. $\mathscr{P}^l$ es llamado el plano afín de $\mathscr{P}$ asociado a l.

Con base en estas observaciones concluimos que todas las líneas de un plano proyectivo tienen el mismo cardinal y que el cardinal del conjunto de puntos es de la forma $\kappa^2 + \kappa + 1$ donde $\kappa + 1$ es el cardinal de cada línea. Se define el **orden** del plano proyectivo como el número κ. Este número es igual al orden del plano afín de $\mathscr{P}$ asociado a cualquier línea l.

Veamos ahora la estrecha relación entre las colineaciones de un plano proyectivo y las colineaciones de un plano afín asociado. Fijemos una línea l del plano proyectivo $\mathscr{P}$.

En primer lugar, es evidente que la restricción de una colineación de $\mathscr{P}$ es una colineación de $\mathscr{P}^l$.

Sea ahora φ una colineación de $\mathscr{P}^l$ y sea $X \in l$. Consideremos $m \in \mathcal{L} - \{l\}$ tal que $X \in m$. Tenemos que existe una única línea $\overline{m}_X \in \mathcal{L}$ tal que $\varphi(m_*) = \overline{m}_X - l$. Esta línea no depende de m pues si n es otra línea que pasa por X tenemos que m_* y n_* son líneas paralelas de $\mathscr{P}^l$ y por consiguiente $\varphi(m_*) = \varphi(n_*)$. Esto nos muestra que la función $\varphi^* : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definida por

$$\varphi^*(X) = \begin{cases} \varphi(X) \text{ si } X \in \mathcal{P}^l \\ l\overline{m}_X \text{ si } X \in l, \text{ donde } m \text{ es una línea que pasa por } X \end{cases}$$

está bien definida.

Es claro que φ^* es una colineación de $\mathscr{P}$ y que es la única colineación de $\mathscr{P}$ que extiende a φ.

Ahora bien, otro punto de interés es ver qué clase de conjuntos quedan fijos por las colineaciones.

Dada una colineación φ del plano proyectivo $\mathscr{P}$, $\mathcal{F}(\varphi)$ es el conjunto $\{P \in \mathcal{P} : \varphi(P) = P\} \cup \{l \in \mathcal{L} : \varphi(l) = l\}$. Evidentemente $\mathcal{F}(\varphi)$ es una configuración cerrada.

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4. *Sea α una colineación de $\mathscr{P}$ que no es la idéntica.*

(i) Si α fija una línea punto a punto entonces hay un punto tal que todas las líneas que pasan por él quedan fijas por α.

(ii) Si α fija todas las líneas que pasan por un punto entonces existe una línea cuyos puntos quedan fijos por α.

Definición 1.6. Una **perspectiva** es una colineación φ de $\mathscr{P}$ que satisface las siguientes condiciones:

(i) Todo punto de $\mathscr{P}$ está en una línea de $\mathcal{F}(\varphi)$ y toda línea de $\mathscr{P}$ contiene a un punto de $\mathcal{F}(\varphi)$.

(ii) Existe un punto P, llamado **centro**, tal que todas las líneas que lo contienen están en $\mathcal{F}(\varphi)$ y existe una línea l, llamada **eje**, tal que todos sus puntos están en $\mathcal{F}(\varphi)$.

Si se quiere precisar el punto y la línea mencionados se dice que φ es una $(P,l)-$perspectiva. Si $P \in l$ la perspectiva es una **elación** y en caso contrario es una **homología**. Al conjunto de todas las $(P,l)-$perspectivas de $\mathscr{P}$ lo notamos $\mathcal{D}(P,l)$. Evidentemente la identidad es una elación y una homología.

Observe que la restricción de una $(P,l)-$elación al plano afín $\mathscr{P}^l$ es una traslación y la restricción de una $(P,l)-$homología es una homotecia.

El siguiente resultado se obtiene inmediatamente:

Proposición 1.3. *Sean $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$.*

(i) $\mathcal{D}(P,l)$ es un subgrupo de $Aut(\mathscr{P})$.

(ii) Para cada $\beta \in Aut(\mathscr{P})$ se tiene que $\beta\mathcal{D}(P,l)\beta^{-1} = \mathcal{D}(\beta(P),\beta(l))$.

(iii) Para cada $\beta \in Aut(\mathscr{P})$, si existe $\alpha \in \mathcal{D}(P,l) - \{1_{\mathcal{P}}\}$ que conmuta con β entonces $\beta(P) = P$ y $\beta(l) = l$.

Otros subgrupos de $Aut(\mathscr{P})$ construidos con base en las perspectivas son los siguientes:

1. para cada $k, l \in \mathcal{L} : \mathcal{D}(k,l) = \bigcup_{P \in k} \mathcal{D}(P,l)$;
2. para cada $P, Q \in \mathcal{P} : \mathcal{D}(P,Q) = \bigcup_{Q \in l} \mathcal{D}(P,l)$;
3. para cada $l \in \mathcal{L} : \mathcal{D}(l) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \mathcal{D}(P,l)$;
4. para cada $P \in \mathcal{P} : \mathcal{D}(P) = \bigcup_{l \in \mathcal{L}} \mathcal{D}(P,l)$.

Se tiene que $\mathcal{D}(l,l) \trianglelefteq \mathcal{D}(l)$ y $\mathcal{D}(P,P) \trianglelefteq \mathcal{D}(P)$.

Nótese que el grupo $\mathcal{D}(l,l)$ corresponde al grupo de traslaciones del plano afín $\mathscr{P}^l$.

Definición 1.7. El plano proyectivo $\mathscr{P}$ es $(V,l)-$**transitivo** si para todo par de puntos A y B distintos de V y que no están en l existe una $(V,l)-$perspectiva α tal que $\alpha(A) = B$. Si el plano es $(V,l)-$transitivo para todos los puntos V en una línea

m, se dice que $\mathscr{P}$ es $(m, l)-$transitivo. Si l es una línea tal que $\mathscr{P}$ es $(l, l)-$transitivo, se dice que l es una **línea de traslación** o que P es un plano de traslación con respecto a l. El plano proyectivo $\mathscr{P}$ es **desarguesiano** si es $(V, l)-$transitivo para todas las escogencias de V y l.

Es claro que si l es una línea de traslación de $\mathscr{P}$ entonces $\mathscr{P}^l$ es un plano afín $\mathcal{T}-$simétrico y que si $\mathscr{P}$ es desarguesiano entonces $\mathscr{P}^l$ es un plano afín desarguesiano para todas las escogencias de l. En este caso tendremos que si l y m son dos líneas de $\mathscr{P}$ entonces los planos afines $\mathscr{P}^l$ y $\mathscr{P}^m$ son isomorfos entre sí e isomorfos a un mismo plano de la forma $K \times K$, donde K es un cuerpo.

Capítulo 2

Simetrías centrales y simetrías axiales

En este capítulo presentamos las nociones de simetría central y simetría axial en planos afines y proponemos una definición de este tipo de simetrías en el contexto de los planos proyectivos.

Aunque la definición de estas simetrías solamente requiere de la $\mathcal{T}$-simetría del plano afín, la prueba de que las simetrías axiales son colineaciones hace uso de la $\mathcal{H}$-simetría. Por consiguiente, en este capítulo supondremos siempre que el plano afín $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ es desarguesiano y su cuerpo asociado lo llamaremos K.

El propósito de este capítulo es introducir las simetrías centrales y las simetrías axiales en el ámbito de los planos afines y extender estas nociones al contexto de los planos proyectivos.

2.1. Simetrías en planos afines

2.1.1. Simetrías centrales

Cuando pensamos en simetrías o reflexiones en el plano euclidiano las consideramos de dos tipos: con respecto a un punto y con respecto a una línea. En lo que sigue enunciamos una definición formal de simetría respecto a un punto en planos afines, luego, mostraremos algunas propiedades.

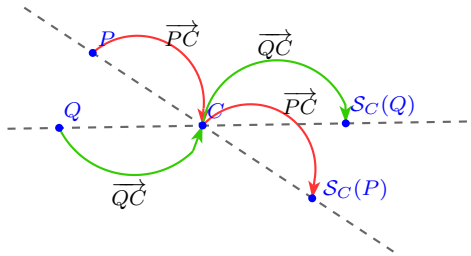


FIGURA 2.1. Representación gráfica de la simetría central en el plano euclidiano

Definición 2.1. (**Simetría Central**) Sea C un punto del plano afín $\mathscr{A}$, la simetría central $\mathcal{S}_C$ de centro C es una función de $\mathcal{P}$ en sí mismo tal que para todo $P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{S}_C(P) = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC})(P) = 2\overrightarrow{PC}(P)$, donde $\overrightarrow{PC}$ es la traslación que envía al punto P en el punto C.

La Figura 2.1 nos muestra la acción de la simetría central de centro C sobre los puntos P y Q.

Proposición 2.1. *Si $\mathscr{A}$ es un plano $\mathcal{T}$-simétrico tal que K es de característica 2 entonces la única simetría central es $1_{\mathcal{P}}$.*

Demostración. Si K es de característica 2 se tiene que $2\overrightarrow{t} = \overrightarrow{0} = 1_{\mathcal{P}}$ para toda traslación $\overrightarrow{t}$. Así, para todo $P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{S}_C(P) = 1_{\mathcal{P}}(P) = P$. □

Un hecho interesante es que las simetrías centrales son transformaciones que resultan ser homotecias, para mostrar esto veamos primero que las simetrías centrales son colineaciones.

Proposición 2.2. $\mathcal{S}_C(l) \in \mathcal{L}$ *para toda línea* $l \in \mathcal{L}$

Demostración. Esta proposición es equivalente a afirmar que la imagen de $\mathcal{S}_C$ en cualquier terna de puntos colineales es una terna de puntos colineales.

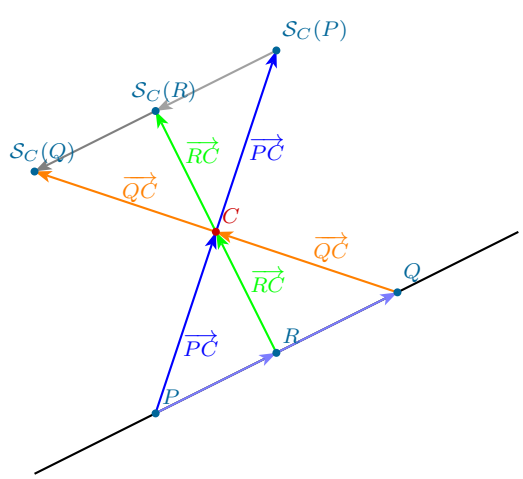


FIGURA 2.2. Ayuda para mostrar la Proposición 2.2

Sean P, Q y R puntos colineales. La traslación que envía el punto $\mathcal{S}_C(P)$ a $\mathcal{S}_C(R)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{\mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(R)} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{RP}$$

pues $\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PC}$.

De la misma forma, la traslación que envía el punto $\mathcal{S}_C(R)$ al punto $\mathcal{S}_C(Q)$ se escribe :

$$\overrightarrow{\mathcal{S}_C(R)\mathcal{S}_C(Q)} = \overrightarrow{QR}.$$

Por lo tanto, las traslaciones $\overrightarrow{\mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(R)}$ y $\overrightarrow{\mathcal{S}_C(R)\mathcal{S}_C(Q)}$ tienen la misma dirección por ser P, Q y R colineales. Así, $\mathcal{S}_C(P), \mathcal{S}_C(Q)$ y $\mathcal{S}_C(R)$ son colineales.

□

Proposición 2.3. *Para cualquier $C \in \mathcal{P}$, la simetría central $\mathcal{S}_C$ es una homotecia.*

Demostración. Sean P y Q elementos de $\mathcal{P}$, veamos que $\mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$ es una línea paralela a PQ. En efecto, si $P \in QC$ entonces $\mathcal{S}_C(P) \in QC = PQ$. Análogamente $\mathcal{S}_C(Q) \in PC = PQ$. Por lo tanto $PQ = \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$, es decir $PQ || \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$.

Ahora bien, supongamos que $P \notin QC$, para ver que $S_C(P)S_C(Q)$ es paralela a PQ razonamos por contradicción asumiendo que existe un punto $R \in \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q) \cap PQ$. En ese caso es claro que P, Q y R son colineales; así, $\mathcal{S}_C(R), \mathcal{S}_C(P)$ y $\mathcal{S}_C(Q)$ son colineales por la Proposición 2.2. Sin embargo, $\mathcal{S}_C(R)$, R y C también son colineales y, debido a que $R \in S_C(P)S_C(Q)$, $C \in \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$. Esto implica que $P \in \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$, porque $P, \mathcal{S}_C(P)$ y C son colineales. Análogamente $Q \in \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$. Por lo tanto, $P \in QC = \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$, lo cual es absurdo. Así $\mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q) \cap PQ = \emptyset$ y por lo tanto $PQ \parallel \mathcal{S}_C(P)\mathcal{S}_C(Q)$. □

Al conjunto de todas la simetrías centrales lo notaremos $\mathcal{C}$. Es evidente que para toda $\mathcal{S}_C \in \mathcal{C}$, $\mathcal{S}_C^2 = 1_{\mathcal{P}}$. Ahora bien, si tenemos dos puntos A y $B \in \mathcal{P}$ ¿Qué podemos decir de $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$?.

Proposición 2.4. *Dados A y $B \in \mathcal{P}$, $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = 2\overrightarrow{AB}$.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{P}$ y $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A(X) = Z$. Consideremos que $Y = \mathcal{S}_A(X)$. Por la definición de simetría central $Y = 2\overrightarrow{XA}(X) = 2\overrightarrow{AY}(X)$. Análogamente, $Z = 2\overrightarrow{YB}(Y)$. Así, para todo $X \in \mathcal{P}$:

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A(X) = Z = (2\overrightarrow{AY} + 2\overrightarrow{YB})(X) = 2\overrightarrow{AB}(X).$$

□

En una observación previa se estableció que si K es de característica 2 el conjunto $\mathcal{C}$, de simetrías centrales, solo contiene al elemento identidad. Sin embargo, cuando K es de característica distinta podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 2.5. *Si $\mathscr{A}$ es un plano afín $\mathcal{T}$-simétrico donde $car(K) \neq 2$, entonces:*

(i) $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_C \in \mathcal{C}$ *para todo* A, B *y* $C \in \mathcal{P}$.

(ii) Toda traslación es la compuesta de un par de simetrías centrales.

Demostración.

(i) Sea $D = \overrightarrow{BA}(C)$. Nótese que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ y así, $\mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_C = 2\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA} = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B$. Como $\mathcal{S}_C^2 = 1_{\mathcal{P}}$ entonces $\mathcal{S}_D = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_C$, por lo tanto, $\mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_C$ es una simetría central.

(ii) Sea $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{T} - \{1_{\mathcal{P}}\}$, como la característica de K es distinta de 2 entonces existe el elemento 2^{-1} en K. Dado que $\mathcal{T}$ es un K-espacio vectorial, $2^{-1}\overrightarrow{AB} \in \mathcal{T} - \{id_{\mathcal{P}}\}$. Si $C = 2^{-1}\overrightarrow{AB}(A)$ entonces, $\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_A = 2\overrightarrow{AC} = 2(2^{-1}\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$.

□

Corolario 2.6. $\mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ *es un grupo donde* $\mathcal{T} \trianglelefteq \mathcal{C} \cup \mathcal{T}$ *y* $(\mathcal{C} \cup \mathcal{T})/\mathcal{T} \cong \mathbb{Z}_2$.

2.1.2. Simetrías axiales

Las simetrías centrales en el plano euclidiano corresponden al reflejo respecto a un punto. Una idea complementaria es el reflejo respecto a una línea, pero este concepto, como lo conocemos, está fuertemente ligado a la noción de ortogonalidad.

No obstante, antes de dar una definición de simetría respecto a una línea está a la mano el reflejo respecto a una línea l en dirección de otra línea h. En este caso la ortogonalidad no es necesaria y con lo definido hasta ahora es posible construirlo.

Definición 2.2 (Simetría axial). Sean l y h líneas no paralelas. Una simetría axial $\mathcal{S}^{(l,h)}$ de eje l y dirección h es una transformación del plano en sí mismo tal que

$$\mathcal{S}^{(l,h)}(P) = \mathcal{S}_Q(P)$$

donde Q es la intersección de l con la línea paralela a h que pasa por P.

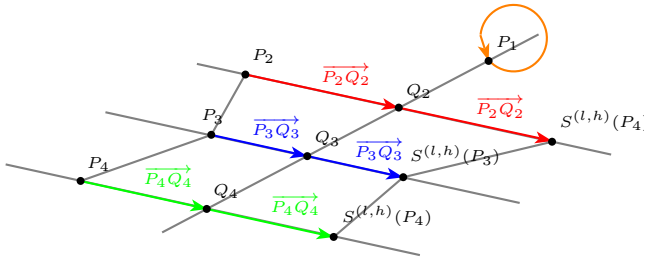


FIGURA 2.3. Simetría Axial en el plano euclidiano

Un hecho importante es que la simetrías axiales, de la misma forma que todas las funciones expuestas en este trabajo, resultan ser colineaciones. Para demostrar este hecho haremos uso del siguiente lema:

Lema 2.7. *Sean P, Q y R puntos colineales, l una línea distinta de PQ que pasa por P y h una línea no paralela a l ni a PQ. Si $Q_1 = lh_Q$ y $R_1 = lh_R$ entonces $\alpha\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PR_1}$ y $\alpha\overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{RR_1}$ para $\alpha \in K$ tal que $\alpha\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.*

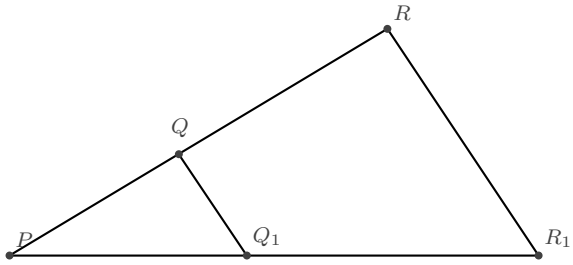


FIGURA 2.4. Lema 2.7

Demostración. Es claro que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PR_1} - \overrightarrow{RR_1}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \alpha\overrightarrow{PQ}\\ &= \alpha(\overrightarrow{PQ_1} - \overrightarrow{QQ_1})\\ &= \alpha\overrightarrow{PQ_1} - \alpha\overrightarrow{QQ_1}.\end{aligned}$$

Sin embargo, sabemos que $\overrightarrow{PR_1} = \beta\overrightarrow{PQ_1}$ y que $\overrightarrow{RR_1} = \gamma\overrightarrow{QQ_1}$, por lo tanto,

$$\alpha\overrightarrow{PQ_1} - \alpha\overrightarrow{QQ_1} = \beta\overrightarrow{PQ_1} - \gamma\overrightarrow{QQ_1}$$

Ahora bien, como $\overrightarrow{PQ_1}$ y $\overrightarrow{QQ_1}$ son traslaciones con direcciones distintas, entonces $\overrightarrow{PQ_1}$ y $\overrightarrow{QQ_1}$ son linealmente independientes y por lo tanto $\beta = \gamma = \alpha$. □

Proposición 2.8. *Las simetrías axiales son colineaciones*

Demostración. Sean P, Q y R puntos colineales y $\mathcal{S}^{(l,h)}$ la simetría axial de eje l y dirección h. Debemos ver que $\mathcal{S}^{(l,h)}(P), \mathcal{S}^{(l,h)}(Q)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(R)$ son colineales.

Consideremos los siguientes casos:

1. Supongamos que la línea PQ es paralela al eje l y que $P_1 = lh_P$. Es claro que el punto $lh_Q = Q_1$ se obtiene al aplicar la translación $\overrightarrow{PP_1}$ en el punto Q, es decir, $Q_1 = \overrightarrow{PP_1}(Q)$. Análogamente, $R_1 = \overrightarrow{PP_1}(R)$ donde $R_1 = lh_R$. Así, $\mathcal{S}^{(l,h)}(P) = 2\overrightarrow{PP_1}(P)$, $\mathcal{S}^{(l,h)}(Q) = 2\overrightarrow{PP_1}(Q)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(R) = 2\overrightarrow{PP_1}(R)$, y por lo tanto $\mathcal{S}^{(l,h)}(P), \mathcal{S}^{(l,h)}(Q)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(R)$ son colineales.

2. Supongamos que la línea PQ no es paralela al eje l y que $P \in l$. En ese caso $P = \mathcal{S}^{(l,h)}(P)$ y del Lema 2.7 deducimos que si $\alpha\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$ entonces $\alpha QQ_1 = RR_1$, donde Q_1 y R_1 son los puntos lh_Q y lh_R, respectivamente. Así,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P\mathcal{S}^{(l,h)}(R)} &= \overrightarrow{PR} + 2\overrightarrow{RR_1}\\ &= \alpha\overrightarrow{PQ} + \alpha 2\overrightarrow{QQ_1}\\ &= \alpha(\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{QQ_1})\\ &= \alpha\overrightarrow{P\mathcal{S}^{(l,h)}(Q)}.\end{aligned}$$

   Concluimos que $\mathcal{S}^{(l,h)}(P), \mathcal{S}^{(l,h)}(Q)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(R)$ son colineales.

3. Por último consideremos que la línea PQ no es paralela al eje l y que $P \notin l$. Es claro que existe un único punto $P' \in lPQ$ y, por el ítem anterior, el hecho de que P', P y Q sean colineales implica que $P', \mathcal{S}^{(l,h)}(P)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(Q)$ son colineales. Análogamente, como P', Q y R son colineales, $P', \mathcal{S}^{(l,h)}(Q)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(R)$ son colineales. Por lo tanto $\mathcal{S}^{(l,h)}(P)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(R) \in P'\mathcal{S}^{(l,h)}(Q)$ y así $\mathcal{S}^{(l,h)}(P), \mathcal{S}^{(l,h)}(Q)$ y $\mathcal{S}^{(l,h)}(R)$ son colineales.

□

2.2. Simetrías en planos proyectivos

En primer lugar, sabemos que una simetría central S_C de $\mathscr{A}$ es una homotecia y, por consiguiente, su extensión S_C^* al plano proyectivo es una $(C, [\infty])$-homología de orden 2. Fijemos ahora una simetría axial $S^{(l,h)}$ de $\mathscr{A} = \mathscr{P}^{[\infty]}$, para algún plano proyectivo $\mathscr{P}$, y veamos como es su extensión a éste. Llamemos H al punto de la línea $[\infty]$ correspondiente a la dirección de h. Como h y l no son paralelas $H \notin l^*$. Además es evidente que $l^* \neq [\infty]$. Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.9. *$S^{(l,h)}$ es una (H, l^*)-homología de orden 2 de $\mathscr{P}$.*

Consideremos ahora un plano proyectivo desarguesiano $\mathscr{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, veamos el comportamiento de la restricción de una homología de orden 2 a un plano afín que se obtenga de $\mathscr{P}$ suprimiendo una línea.

Proposición 2.10. *Sea σ una (P, l)-homología de orden 2. Si m es una línea de $\mathscr{P}$ que contiene a P y σ_* es la restricción de σ a $\mathscr{P}^m$.*

1. *Si $m = l$ entonces σ_* es una simetría central de $\mathscr{P}^m$ cuyo centro es P.*
2. *Si $m \neq l$ entonces σ_* es una simetría axial de $\mathscr{P}^m$ cuyo eje es l_*.*

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores definimos lo siguiente:

Definición 2.3. Sea σ una colineación del plano proyectivo $\mathscr{P}$. Si σ es una (P, l)-homología de orden 2, diremos que σ es una simetría de eje l y centro P.

El siguiente teorema es ahora evidente

Teorema 2.1. *Sean $\mathscr{P}$ un plano proyectivo y σ una simetría de centro P y eje l. Si σ_* es la restricción de la simetría al plano afín $\mathscr{P}^m$ entonces tenemos lo siguiente:*

1. *σ_* es una simetría central si $P \notin m$.*
2. *σ_* es una simetría axial si $P \in m$.*

Capítulo 3

Ortogonalidades y rotaciones

El propósito de este capítulo es introducir la noción de rotación en el ámbito de los planos afines y extenderla al contexto de los planos proyectivos. Introducimos primero los conceptos de ortogonalidad y de simetría ortogonal y, generalizando lo que ocurre en la geometría euclidiana, definimos una rotación como la compuesta de dos simetrías ortogonales cuyos ejes no son disyuntos. Las definiciones dadas son inspiradas en ideas de [12].

En lo que resta de este trabajo los planos afines y los planos proyectivos considerados serán todos desarguesianos y con cuerpos asociados de característica diferente de 2.

3.1. Planos afines

3.1.1. Ortogonalidades de planos afines desarguesianos

En el caso de la geometría euclidiana, la relación de ortogonalidad puede verse como una función del conjunto de direcciones del plano en sí mismo que es involutiva y sin puntos fijos. Usamos esta idea para dar una definición de ortogonalidad en el caso general.

Definición 3.1. (Ortogonalidades de un plano afín) Sea $\mathscr{A}$ un plano afín desarguesiano y $Dir(\mathscr{A})$ su conjunto de direcciones. Decimos que una ortogonalidad de $\mathscr{A}$ es una función $\omega : Dir(\mathscr{A}) \to Dir(\mathscr{A})$ involutiva y sin puntos fijos.Si $\omega(Dir(l)) = Dir(m)$ diremos que las líneas l y m son ω-ortogonales.

En el caso finito es claro que las ortogonalidades solo se pueden definir en planos de orden impar, pues el conjunto de direcciones debe tener un número par de elementos.

Ahora bien, sea $\mathscr{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ un plano afín desarguesiano y sea $O \in \mathcal{P}$. Por lo visto en el Capítulo 1 $\mathcal{P}_O$ es isomorfo a $K \times K$.

Es claro que la siguiente función es una biyección de $Dir(\mathscr{A})$ en el conjunto $\mathcal{R}_K := \{(1,k) : k \in K\} \cup \{(0,1)\}$,

$$\begin{array}{rrl} g: & Dir(\mathscr{A}) \longrightarrow & \mathcal{R}_K \\ & Dir(l) \longmapsto & \begin{cases} (1,k) & \text{si } (1,k) \in l \\ (0,1) & \text{si } (0,1) \in l \end{cases} \end{array}$$

donde l es una línea que pasa por O.

Tenemos que cualquier biyección $\Omega : \mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{R}_K$ involutiva y sin puntos fijos produce una ortogonalidad $\omega = g^{-1} \circ \Omega \circ g$.

Ejemplo 3.1. Considere la siguiente función Ω_C de $\mathcal{R}_K$ en $\mathcal{R}_K$:

$$\Omega_C(a,b) := \begin{cases} (1, -b^{-1}) & \text{si } a = 1 \text{ y } b \neq 0 \\ (0,1) & \text{si } a = 1 \text{ y } b = 0 \\ (1,0) & \text{si } a = 0 \text{ y } b = 1 \end{cases}$$

Es evidente que esta función es una involución pues $\Omega_C(1, -x^{-1}) = (1, -(-x^{-1})^{-1}) = (1, x)$. Por otro lado, para que genere una ortogonalidad, esta función no debe tener puntos fijos, es decir $\Omega_C(1,x) \neq (1,x)$, lo que implica que $-x^{-1} \neq x$.

Sin embargo, esto no ocurre en todos los casos, en el campo $\mathbb{Z}_5$, por ejemplo, $3 \equiv_5 -2 \equiv_5 -(3^{-1})$. Luego, para garantizar que Ω_C no tiene puntos fijos es necesario que $x + x^{-1} \neq 0$ para todo x no nulo en K, es decir $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \neq 0$ en K. Esta última condición es satisfecha en algunos campos, como $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_7$, y $\mathbb{R}$. Los planos asociados a estos cuerpos admiten la ortogonalidad $\omega_C = g^{-1} \circ \Omega_C \circ g$. A estas ortogonalidades las llamaremos **ortogonalidades circulares**. En el caso del plano euclidiano esta ortogonalidad es la ortogonalidad usual.

Ejemplo 3.2. Sobre el conjunto $\mathcal{R}_K$ definimos la función involutiva y sin puntos fijos $\Omega_H : \mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{R}_K$, dada por:

$$\Omega_H(a,b) = \begin{cases} (1, -b) & \text{si } a = 1 \text{ y } b \neq 0 \\ (0,1) & \text{si } a = 1 \text{ y } b = 0 \\ (1,0) & \text{si } a = 0 \text{ y } b = 1 \end{cases}$$

Es evidente que la función Ω_H es involutiva, pues $\Omega_H(1,-x) = (1, -(-x)) = (1,x)$. También es una función sin puntos fijos, pues si $\Omega_H(1,x) = (1,x)$, entonces $(1,-x) = (1,x)$, pero esto implica que $x + x = 0$, es decir, $2x = 0$ lo cual es absurdo pues la característica de K es distinta de 2. Por razones que veremos más adelante este tipo de ortogonalidades las llamaremos **ortogonalidades hiperbólicas**.

Este ejemplo justifica la siguiente proposición:

Proposición 3.1. *Todo plano afín desarguesiano asociado a un cuerpo K de característica distinta de 2 admite una ortogonalidad.*

Note que en el plano de orden 3 la ortogonalidad hiperbólica y la ortogonalidad circular son iguales.

Por último, para mostrar una particularidad más adelante, veamos la siguiente ortogonalidad definida en un plano afín:

Ejemplo 3.3. Fijemos un $\beta \in K - \{0\}$. Definimos $\Omega_\beta : \mathcal{R}_K \longrightarrow \mathcal{R}_K$, dada por:

$$\Omega_\beta(a,b) := \begin{cases} (1,-b^{-1}) & \text{si } a=1 \text{ y } b \neq 0, \beta, -\beta^{-1} \\ (1,\beta) & \text{si } a=1 \text{ y } b=0 \\ (1,0) & \text{si } a=1 \text{ y } b=\beta \\ (0,1) & \text{si } a=1 \text{ y } b=-\beta^{-1} \\ (1,-\beta^{-1}) & \text{si } a=0 \text{ y } b=1 \end{cases}$$

De nuevo esta es una biyección involutiva y si K no tiene soluciones de la ecuación $x^2+1=0$ entonces $\omega_\beta = g^{-1} \circ \Omega_\beta \circ g$ es una ortogonalidad de $K \times K$.

En el caso en el que $K = \mathbb{R}$ y $\beta = 1$ tenemos que la ortogonalidad es la usual salvo que las líneas horizontales son ortogonales a la línea $y = x$ y las líneas verticales son ortogonales a la línea $y = -x$.

3.1.2. Simetrías ortogonales

De aquí en adelante $\mathscr{A}$ será un plano afín desarguesiano dotado con una ortogonalidad ω. Es claro que dada una línea l del plano afín existe una única simetría axial cuya dirección corresponde a la dirección ortogonal de l. Estas simetrías axiales dependientes de la ortogonalidad las llamaremos simetrías ortogonales.

Definición 3.2 (Simetría Ortogonal)**.** La simetría axial $\mathcal{S}^{(l,h)}$, donde h es una línea ortogonal a l la notaremos SO_l y la llamaremos simetría ortogonal de eje l.

Observe que si el eje de la simetría ortogonal pasa por el origen O entonces la simetría ortogonal es una transformación lineal de $\mathcal{P}_O$.

Si L es un punto del plano tal que $OL = l$ y H es un punto tal que OH es ortogonal a l, tenemos que $SO_l(L) = L$ y $SO_l(H) = -H$. Así, la transformación lineal SO_l tiene como valores propios a -1 y 1 y su determinante será -1.

Teorema 3.1. *El grupo de traslaciones actúa por conjugación sobre el conjunto de simetrías ortogonales.*

Demostración. Fijemos dos puntos P y Q en el plano afín. Así, $\mathcal{P}_P$ y $\mathcal{P}_Q$ son espacios vectoriales de dimensión dos sobre K cuyos orígenes son P y Q respectivamente.

Sea l una línea que pasa por P y llamemos m a la línea $\overrightarrow{PQ}(l)$. Análogamente, sea h la línea ortogonal a l que pasa por P y $n = \overrightarrow{PQ}(h)$.

Escogemos una base $B_P = \{P_1, P_2\}$ del espacio $\mathcal{P}_P$ de tal manera que $P_1 \in l$ y $P_2 \in h$.

Definimos $B_Q = \{Q_1, Q_2\}$ donde $Q_1 = \overrightarrow{PQ}(P_1)$ y $Q_2 = \overrightarrow{PQ}(P_2)$. Es claro que $Q_1 \in m$ y $Q_2 \in n$ y como son distintos de Q determinan una base.

Tenemos lo siguiente:

1. $\overrightarrow{PQ} : \mathcal{P}_P \to \mathcal{P}_Q$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La matriz de $\overrightarrow{PQ}$ con respecto a las bases B_P y B_Q es:

$$[\overrightarrow{PQ}]_{B_P,B_Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $SO_l : \mathcal{P}_P \to \mathcal{P}_P$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La matriz de SO_l con respecto a la base B_P es:

$$[SO_l]_{B_P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. $SO_m : \mathcal{P}_Q \to \mathcal{P}_Q$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La matriz de SO_m con respecto a la base B_Q es:

$$[SO_m]_{B_Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Así la matriz de $SO_m \circ \overrightarrow{PQ} \circ SO_l$ respecto a las bases B_P y B_Q es:

$$\begin{aligned} [SO_m \circ \overrightarrow{PQ} \circ SO_l]_{B_P,B_Q} &= [SO_m]_{B_Q}[\overrightarrow{PQ}]_{B_P,B_Q}[SO_l]_{B_P} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [\overrightarrow{PQ}]_{B_P,B_Q} \end{aligned}$$

De lo que se concluye:

$$SO_m = \overrightarrow{PQ} \circ SO_l \circ (\overrightarrow{PQ})^{-1}$$

Es claro que SO_l y SO_m están en la misma órbita si l es paralelo a m. $\square$

Como consecuencia de este teorema vemos que es suficiente estudiar las simetrías ortogonales cuyos ejes pasan por O.

Veamos ejemplos de algunas simetrías ortogonales.

Ejemplo 3.4. Supongamos que $\mathscr{A}$ es el plano afín euclidiano y ω la ortogonalidad usual. Si l_θ es una recta en el plano euclidiano que pasa por el origen y cuyo ángulo con la horizontal es θ, se sabe que la matriz que representa la simetría ortogonal SO_{l_θ} con respecto a la base canónica es:

$$SO_{l_\theta} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.5. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 y considere la ortogonalidad hiperbólica $\omega_H = g^{-1} \circ \Omega_H \circ g$ de $K \times K$ definida en el Ejemplo 3.2. Fijemos la línea l que pasa por $(0,0)$ y $(1,\alpha)$, con $\alpha \neq 0$. Tenemos que:

$$SO_l(1,0) = (0,\alpha) \text{ y } SO_l(0,1) = (\alpha^{-1}, 0),$$

luego, la matriz que representa SO_l en la base canónica es:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

De igual manera tenemos que si $\alpha = 0$ la matriz de SO_l es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Para la línea que pasa por $(0,0)$ y $(0,1)$ tenemos que la simetría ortogonal correspondiente tendrá asociada la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3.6. Consideremos al plano $\mathbb{R}^2$ con la ortogonalidad ω_1 definida en el ejemplo 3.3.

Para una línea que pasa por el origen y cuyo ángulo con el eje x no es de la forma $\frac{n\pi}{4}$ con $n \in \mathbb{Z}$, la matriz de la simetría ortogonal correspondiente es de la forma $\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$.

Las demás simetrías se representan de la siguiente forma:

Eje de simetría	$y = 0$	$x = 0$	$y = x$	$y = -x$
Matriz	$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

3.1.3. Rotaciones

En esta sección fijamos una ortogonalidad ω para un plano afín $\mathscr{A}$. Motivados por el hecho de que un par de simetrías ortogonales generan una rotación en el plano euclidiano definimos lo siguiente:

Definición 3.3. Sean l y m líneas de un plano afín $\mathscr{A}$ tales que $l \cap m \neq \emptyset$. La compuesta $SO_l \circ SO_m$ se llama rotación. Si $P \in l \cap m$ diremos que la rotación es de centro P.

El conjunto de todas las rotaciones de $\mathscr{A}$ con la ortogonalidad ω se nota R^ω y el conjunto de todas las rotaciones de centro P lo notaremos R^ω_P

Note que la identidad es una rotación.

Teorema 3.2. *El grupo de las traslaciones actúa por conjugación sobre R^ω. Más precisamente, si P es punto del plano y $\tau \in \mathcal{T}$ entonces $\tau \circ R^\omega_P \circ \tau^{-1} = R^\omega_{\tau(P)}$.*

Demostración. Sea $r = SO_l \circ SO_m \in R^\omega_P$ y sea $\tau \in \mathcal{T}$. Como vimos en la demostración del Teorema 3.1 tenemos que $\tau \circ SO_l \circ \tau^{-1} = SO_{\tau(l)}$ y $\tau \circ SO_m \circ \tau^{-1} = SO_{\tau(m)}$.

Así

$$\begin{aligned}\tau \circ r \circ \tau^{-1} &= \tau \circ SO_l \circ SO_m \circ \tau^{-1} \\ &= \tau \circ SO_l \circ \tau^{-1} \circ \tau SO_m \circ \tau^{-1} \\ &= SO_{\tau(l)} \circ SO_{\tau(m)} \in R^\omega_\tau(P).\end{aligned}$$

□

Vemos entonces que para estudiar R^ω basta conocer el comportamiento de R^ω_O. Esto es conveniente pues los elementos de R^ω_O son transformaciones lineales.

En el caso euclidiano se tiene que el conjunto de rotaciones de centro fijo siempre es un grupo abeliano. Veremos que en general esto no se tiene.

Proposición 3.2. *R^ω_P es un grupo si y solamente si es cerrado para la composición.*

Demostración. Esto es evidente pues es claro que la inversa de una rotación es una rotación. □

En lo que sigue enunciamos un teorema que nos dá una condición suficiente y necesaria para que las rotaciones de centro O conformen un grupo abeliano.

Teorema 3.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes en un plano afín con una ortogonalidad ω:*

1. *La compuesta de tres simetrías ortogonales cuyos ejes pasan por O es una simetría ortogonal.*

2. R_O^ω es un grupo abeliano.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2)) Sean $r_1 = SO_{l_1} \circ SO_{l_2}$ y $r_2 = SO_{l_3} \circ SO_{l_4} \in R_O^\omega$. Veamos primero que existe SO_l tal que $r_2 = SO_{l_2} \circ SO_l$. En efecto, $r_2 = SO_{l_2} \circ SO_{l_2} \circ SO_{l_3} \circ SO_{l_4}$ y por la hipótesis tenemos que $r_2 = SO_{l_2} \circ SO_l$. Ahora bien, $r_1 \circ r_2 = SO_{l_1} \circ SO_{l_2} \circ SO_{l_2} \circ SO_l = SO_{l_1} \circ SO_l$ y esto implica que $r_1 \circ r_2 \in R_O^\omega$. Por otro lado, $r_1^{-1} = (SO_{l_1} \circ SO_{l_2})^{-1} = SO_{l_2} \circ SO_{l_1}$. Por lo tanto, R_O^ω es un grupo.

Ahora bien, calculemos $r_2 \circ r_1$:

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 &= SO_{l_2} \circ SO_l \circ SO_{l_1} \circ SO_{l_2} \\ &= (SO_{l_1} \circ SO_l \circ SO_l \circ SO_{l_1}) \circ SO_{l_2} \circ SO_l \circ SO_{l_1} \circ SO_{l_2} \\ &= SO_{l_1} \circ SO_l \circ (SO_l \circ SO_{l_1} \circ SO_{l_2} \circ SO_l \circ SO_{l_1} \circ SO_{l_2}) \end{aligned}$$

y como $SO_l \circ SO_{l_1} \circ SO_{l_2}$ es una simetría ortogonal por la hipótesis entonces:

$$\begin{aligned} r_2 \circ r_1 &= SO_{l_1} \circ SO_l \circ (SO_l \circ SO_{l_1} \circ SO_{l_2} \circ SO_l \circ SO_{l_1} \circ SO_{l_2}) \\ &= SO_{l_1} \circ SO_l \\ &= r_1 \circ r_2 \end{aligned}$$

Es decir, R_O^ω es un grupo conmutativo.

(2) $\Leftarrow$ (1)) Evidente

□

Esta condición es cumplida por las simetrías ortogonales de la ortogonalidad usual del plano euclidiano. No obstante, no todas las ortogonalidades satisfacen lo anterior. A continuación veremos el caso de las ortogonalidades hiperbólicas.

Teorema 3.4. *Las rotaciones centradas en el origen asociadas a las ortogonalidades hiperbólicas conforman un grupo.*

Demostración. De acuerdo al Ejemplo 3.2 las matrices de las simetrías ortogonales cuyos ejes pasan por el origen son de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$

Así, las matrices de las rotaciones de centro O son de los siguientes tipos:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta^{-1} \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha\beta^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $R_O^{\omega_H}$ puede identificarse con el conjunto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} : x \in K - \{0\} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x^{-1} & 0 \end{bmatrix} : x \in K - \{0\} \right\}$$

Que claramente es un grupo.

Observe que $R_O^{\omega_H}$ es un subgrupo no conmutativo de las colineaciones. Del Teorema 2 se tiene que en este ejemplo la composición de tres simetrías ortogonales no necesariamente es una simetría ortogonal. □

Por último consideramos una ortogonalidad ω tal que el conjunto R_O^{ω} no es un grupo.

Ejemplo 3.7. Considere ahora sobre el plano euclidiano la ortogonalidad ω_1 definida en el Ejemplo 3.3. Al calcular las matrices de las rotaciones centradas en el origen se obtiene la siguiente lista:

$$\begin{bmatrix} \cos(2\theta - 2\phi) & -\sin(2\theta - 2\phi) \\ \sin(2\theta - 2\phi) & \cos(2\theta - 2\phi) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -2\cos(2\theta) - \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) - 2\sin(2\theta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos(2\theta) + 2\sin(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -2\cos(2\theta) - \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\cos(2\theta) & 2\cos(2\theta) + \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & -\cos(2\theta) + 2\sin(2\theta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(2\theta) - 2\sin(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 2\cos(2\theta) + \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(2\theta) - 2\sin(2\theta) & 2\cos(2\theta) + \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 2\cos(2\theta) + \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) + 2\sin(2\theta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos(2\theta) + 2\sin(2\theta) & -2\cos(2\theta) - \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -2\cos(2\theta) - \sin(2\theta) & \cos(2\theta) - 2\sin(2\theta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Es claro que $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$ no está en la lista y por lo tanto, $R_O^{\omega_1}$ no es un grupo.

3.1.4. Un algoritmo en Mathematica 9 para calcular rotaciones en planos de orden p

En esta sección vamos a presentar un algoritmo que a partir de la función de ortogonalidad nos permite visualizar el conjunto de rotaciones asociado y además mediante un sencillo test nos muestra si este conjunto es un grupo.

Sea $\mathscr{A}$ un plano afín desarguesiano cuyo cuerpo asociado es K. Identifiquemos $\mathcal{P}$ con $K \times K$. Supongamos que l es una línea que pasa por $(0, 0)$ y tiene dirección

$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$, es decir, $l = (0,0)(l_1, l_2)$. Sea l^ω la línea ortogonal a l que pasa por $(0,0)$, cuya dirección es $\begin{bmatrix} l_1^\omega \\ l_2^\omega \end{bmatrix}$.

Entonces la representación matricial de SO_l es:

$$SO_l = \begin{bmatrix} l_1 & -l_1^\omega \\ l_2 & -l_2^\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_1^\omega \\ l_2 & l_2^\omega \end{bmatrix}^{-1}. \tag{3.1}$$

También sabemos que la representación de SO_{l^ω} es:

$$SO_{l^\omega} = \begin{bmatrix} -l_1 & l_1^\omega \\ -l_2 & l_2^\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_1^\omega \\ l_2 & l_2^\omega \end{bmatrix}^{-1}. \tag{3.2}$$

En nuestro algoritmo tendremos la opción de escoger la relación de ortogonalidad. Se escribirá como una lista de matrices 2×2 en la que cada fila representa una dirección y en cada matriz se escriben dos direcciones ortogonales. Así cada lista tendrá $\frac{p+1}{2}$ elementos, donde p es el orden del plano.

Para calcular las simetrías ortogonales definimos las siguientes funciones:

```
Invort[x_, n_] := Inverse[Transpose[x], Modulus ->n];
Ortc1[x_] := Transpose[{-x[[1]], x[[2]]}];
Ortc2[x_] := Transpose[{x[[1]], -x[[2]]}];
```

La función `Invort` calcula la matriz inversa módulo n.

Las funciones `Orct1` y `Orct2` las usamos para generar las matrices $\begin{bmatrix} -l_1 & l_1^\omega \\ -l_2 & l_2^\omega \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} l_1 & -l_1^\omega \\ l_2 & -l_2^\omega \end{bmatrix}$ respectivamente.

Ahora bien, escribamos una función que en una lista almacene todos las simetrías ortogonales:

```
A[Ortg_, n_] := Join[Table[ Mod[Dot[Ortc1[Ortg[[i]]],
Invort[Ortg[[i]], n]], n], {i, 1, Length[Ortg]}],
Table[Mod[Dot[Ortc2[Ortg[[i]]], Invort[Ortg[[i]], n]], n],
{i, 1, Length[Ortg]}]];
```

La función `A` tiene un par de entradas, *Ortg* y *n*. La primera de ellas recibe la lista completa de ortogonalidades y la segunda recibe el orden del plano. Es claro que esta función hace la operación presentada en las ecuaciones 3.1 y 3.2.

Ahora bien, a partir de la lista que guarda la función `A` hacemos otra lista que guarde las composiciones de pares de simetrías ortogonales:

```
Grupo[ort_, n_] := SortBy[DeleteDuplicates[ Flatten[Table[
Mod[Dot[A[ort, n][[i]], A[ort, n][[j]]], n], {i, 1,
Length[A[ort, n]]}, {j, 1, Length[A[ort, n]]}], 1]], Total]
```

La función `Grupo`, al igual que la anterior función tiene dos entradas.

Por último una tabla de multiplicación de la lista anterior:

```
Multiplicacion[x_, n_] := Table[Mod[Dot[x[[i]], x[[j]]], n],
{i, 1, Length[x]}, {j, 1, Length[x]}]
```

Sobre esta tabla de multiplicación se hace un pequeño test para determinar si hay elementos que no están en la lista `Grupo`. En ese caso tendremos que el conjunto no es un grupo:

```
Test2[x_, n_] := If[Flatten[ DeleteDuplicates[
Table[DeleteDuplicates[ SortBy[Multiplicacion[x, n][[i]],
Total] - x], {i, 1, Length[x]}]], 2] == {{0, 0}, {0, 0}},
"Sí es un grupo", "No es un grupo"]
```

En lo que sigue se muestran algunas ortogonalidades sobre planos finitos y se verifica si las rotaciones correspondientes conforman un grupo:

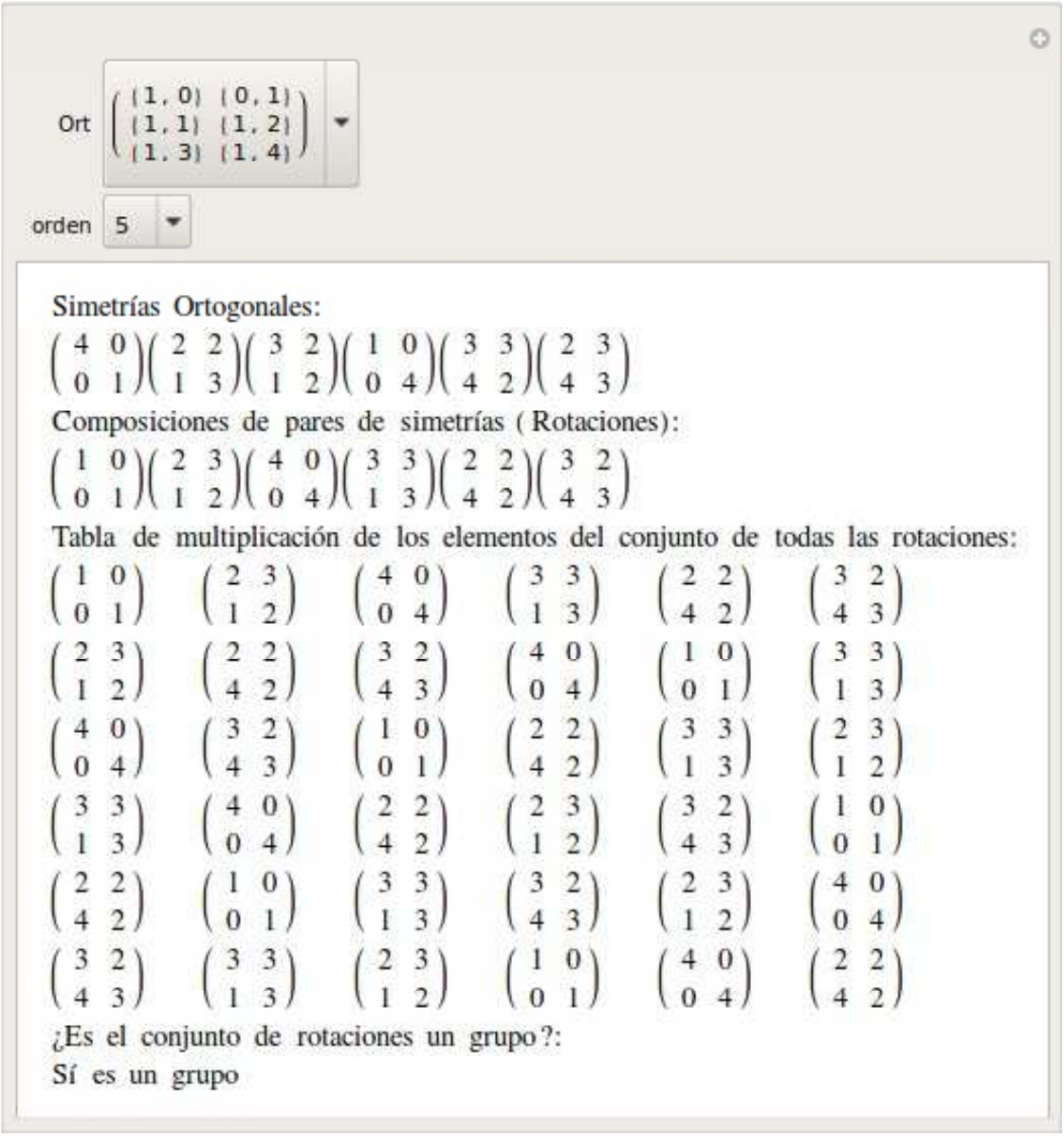


FIGURA 3.1. Implementación del algoritmo para una ortogonalidad en plano de orden 5

Ahora apliquemos este algoritmo para la ortogonalidad hiperbólica en el plano de orden 5:

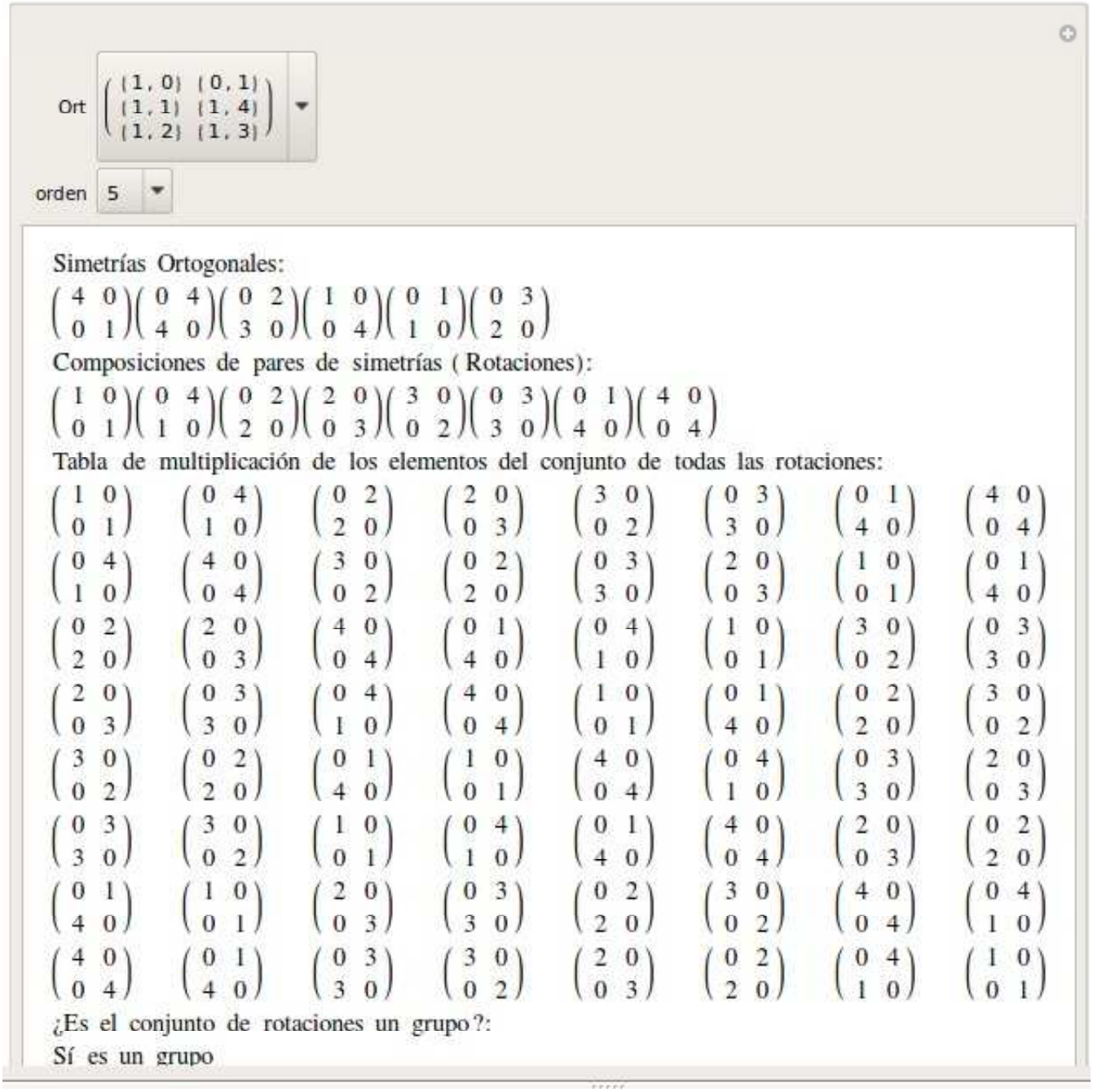


FIGURA 3.2. Implementación del algoritmo para la ortogonalidad hiperbólicas en plano de orden 5

En este caso las rotaciones forman el grupo de los cuaterniones. Como en $\mathbb{Z}_5$ existen elementos tales que $x = -(x^{-1})$, 2 y 3 por ejemplo, no podemos definir la ortogonalidad circular del plano de orden 5.

Observe que la cantidad de rotaciones depende de la ortogonalidad escogida.

Ahora consideremos la ortogonalidad circular del plano de orden 7:

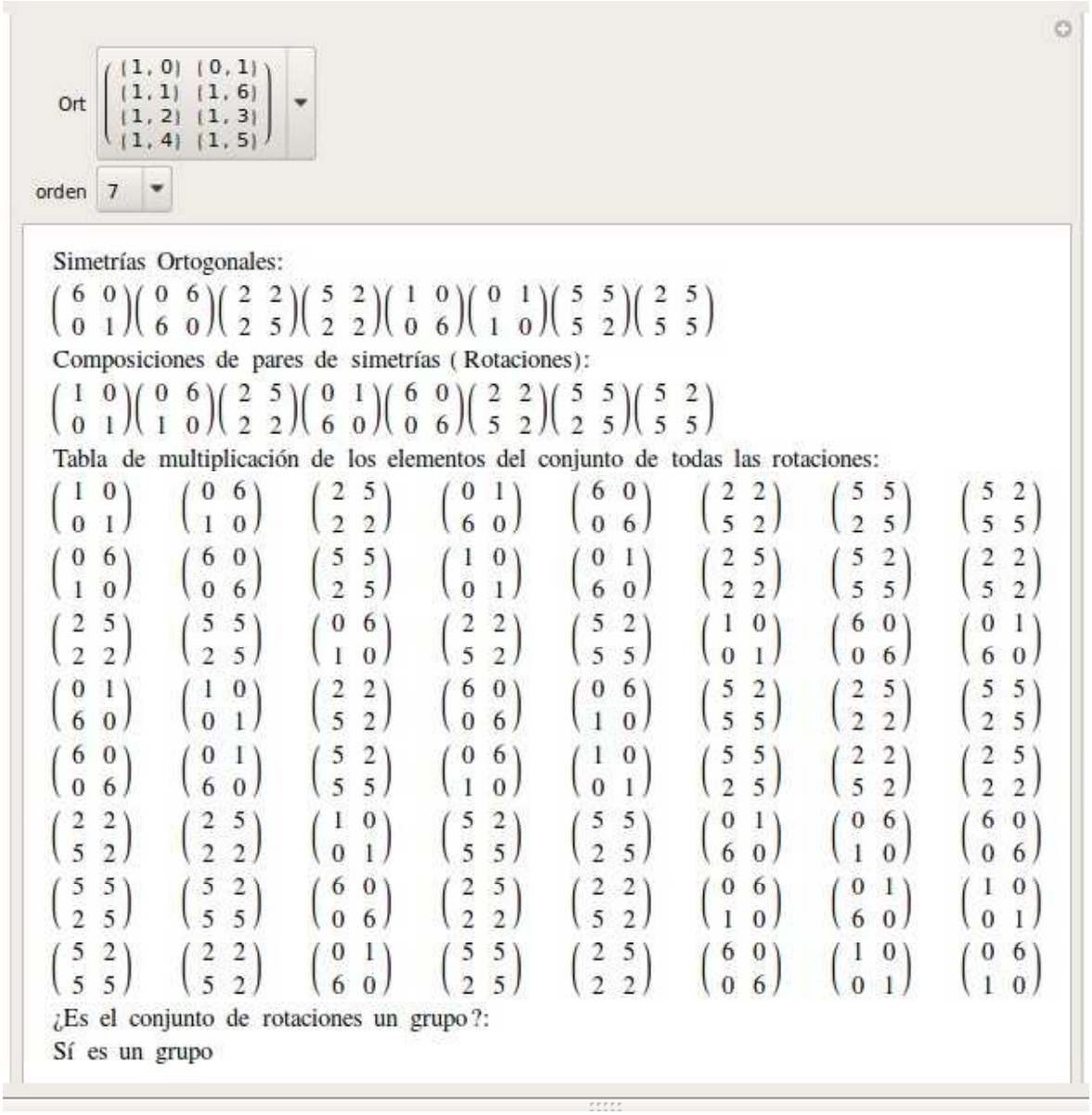


FIGURA 3.3. Implementación del algoritmo para la ortogonalidad circular en plano de orden 7

Como se puede apreciar, el grupo generado por la ortogonalidad circular del plano de orden 7 es un grupo conmutativo de 8 elementos.

Por último mostramos una relación de ortogonalidad en el plano de orden 7 tal que el conjunto de rotaciones de centro fijo no es un grupo.

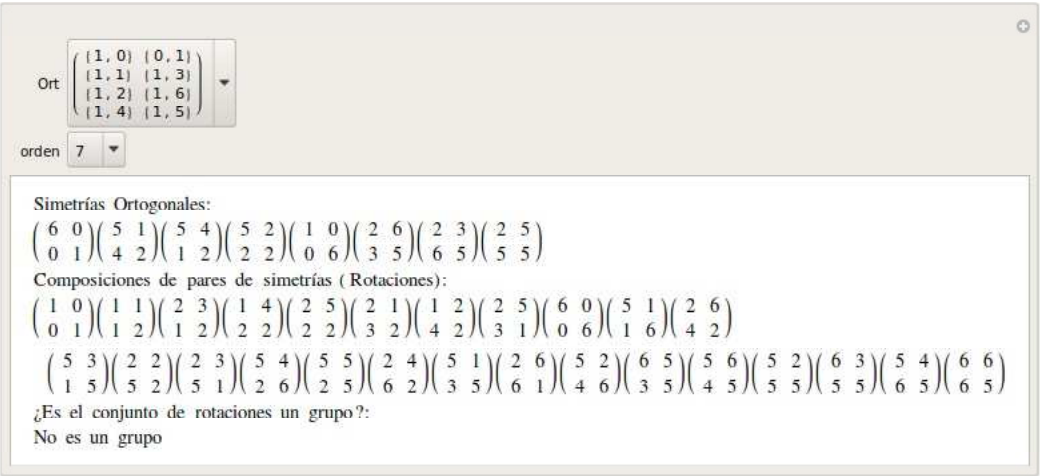


FIGURA 3.4. Implementación del algoritmo para una ortogonalidad en plano de orden 7 cuyas rotaciones no conforman un grupo

Nota. En el transcurso de este trabajo pensábamos que en los planos finitos el conjunto de rotaciones de centro fijo siempre era un grupo. Este ejemplo nos permitió desechar esta conjetura.

3.1.5. Órbitas

En las secciones previas vimos dos tipos de ortogonalidades en el plano euclidiano cuyas rotaciones de centro fijo conformaban un grupo: la ortogonalidad circular y la ortogonalidad hiperbólica. Vamos ahora a dar una explicación de los nombres escogidos para estas ortogonalidades.

En cada caso, el grupo de rotaciones de centro O actúa sobre el conjunto de puntos mediante la acción definida por $r \cdot P = r(P)$. Estudiemos ahora las órbitas correspondientes.

El grupo R de las rotaciones asociadas a la ortogonalidad circular del plano euclidiano es :

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} ; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

Si $P = (a, b)$ es un punto distinto de $(0, 0)$ del plano euclidiano, es claro que la órbita de R es:

$$O_R(a, b) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

que no es más que el conjunto de puntos de la circunferencia centrada en $(0,0)$ que pasa por P.

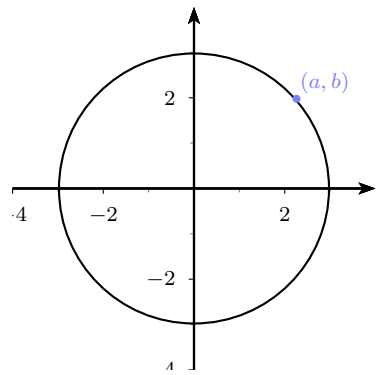


FIGURA 3.5. Órbita del punto (a,b)

Por otro lado, para el caso de la ortogonalidad hiperbólica la órbita del punto (a,b) es:

$$O_{R_O^\omega}(a,b) = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

Es decir,

$$O_{R_O^\omega}(a,b) = \left\{ \begin{bmatrix} a/\alpha \\ \alpha b \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \alpha b \\ -a/\alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

Este conjunto es la gráfica de la "hipérbola doble" cuya ecuación es $(xy)^2 = (ab)^2$.

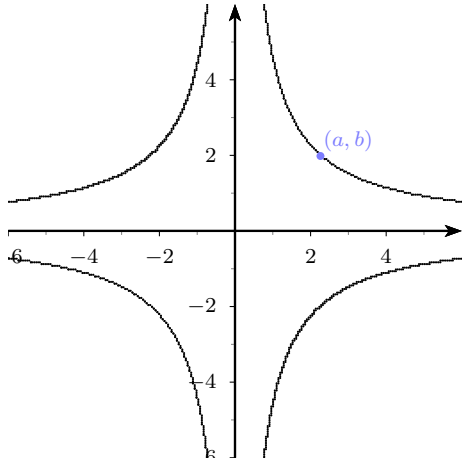


FIGURA 3.6. Órbita del punto (a,b) bajo la acción de $R_O^{\omega_H}$

Proposición 3.3. *Sea $\mathscr{A}$ un plano afín desarguesiano asociado a un cuerpo K. Supongamos que sobre $\mathscr{A}$ se establece una ortogonalidad cuyas rotaciones de centro O conforman un grupo R. Si $P \in \mathcal{P}_O$ es un punto distinto de O entonces el estabilizador de P bajo la acción de R está constituido únicamente por la identidad, es decir, $R_P = \{1_{\mathcal{P}_O}\}$.*

Demostración. Supongamos que existe $r \in R$ tal que $r(P) = P$. Así, $1 \in K$ es un valor propio de r. Por lo tanto, el polinomio característico de la rotación r es $P_r(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - c)$, para algún $c \in K$.

De aquí se obtiene lo que $r = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} A$ para alguna matriz invertible A de tamaño 2×2. Como $\det(r) = 1$ concluimos que $c = 1$ y por lo tanto $r = 1_{\mathscr{A}}$ que era lo que queríamos demostrar.

□

De aquí en adelante asumimos que $\mathscr{A}$ es un plano desarguesiano asociado al cuerpo K con una relación ω de ortogonalidad cuyas rotaciones de centro O conforman el grupo R.

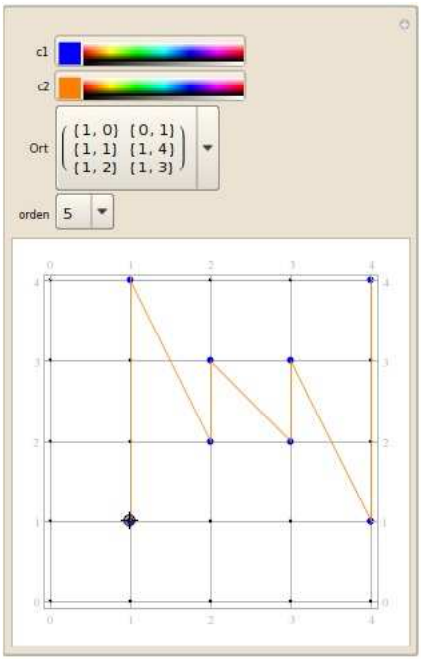
Corolario 3.4. *Si $\mathscr{A}$ es un plano de orden finito n entonces $|R|$ divide a $n^2 - 1$.*

Demostración. Del teorema anterior tenemos que para cada punto P distinto de O, $|O_R(P)| = |R|$, mientras que $|O_R(O)| = 1$. Así, usando la fórmula de descomposición de órbitas, tenemos que:

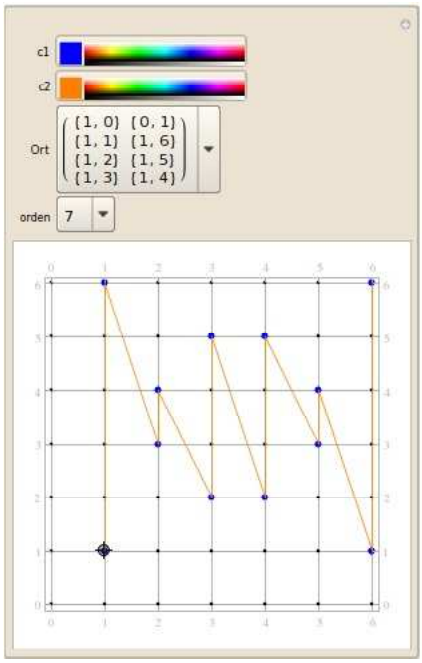
$$|\mathcal{P}_O| = \sum_{i \in I} |O_R(P_i)| = 1 + c|R|$$

donde P_i es un representante de cada órbita y c es la cantidad de órbitas no triviales generadas por R en el plano $\mathscr{A}$. Cómo $|\mathscr{A}| = n^2$, $c|R| = n^2 - 1$. □

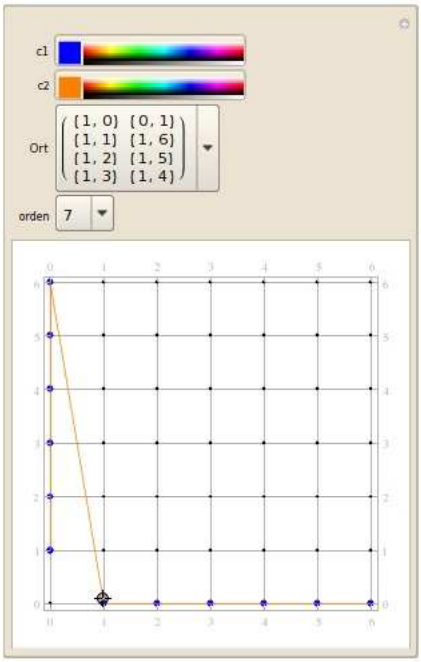
Ahora veamos algunos ejemplos de órbitas de rotaciones en planos finitos.



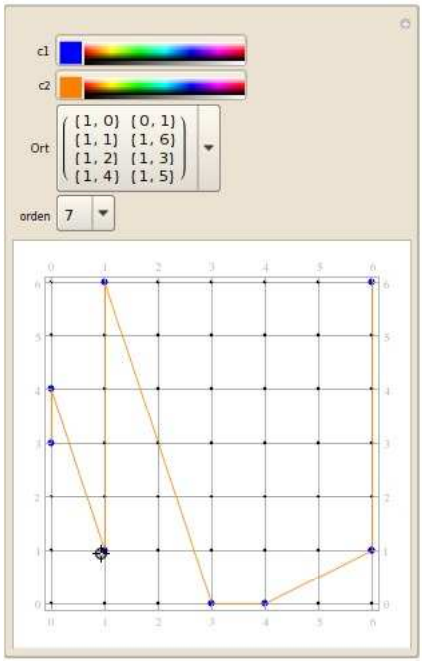
Órbita del punto $(1,1)$ para las rotaciones de la ortogonalidad hiperbólica del plano de orden 5



Órbita del punto $(1,1)$ para las rotaciones de la ortogonalidad hiperbólica del plano de orden 7



Órbita del punto $(1,0)$ para las rotaciones de la ortogonalidad hiperbólica del plano de orden 7



Órbita del punto $(1,1)$ para las rotaciones de la ortogonalidad circular del plano de orden 7

3.2. Planos proyectivos

Respecto a la visualización de las ortogonalidades en los planos proyectivos, debemos observar que una ortogonalidad es una función involutiva y sin puntos fijos entre direcciones que se definió sobre un plano afín desarguesiano. Es claro que cada una de esas direcciones representa un punto de la línea $[\infty]$, asumiendo que el plano afín es el plano restringido $\mathscr{P}^{[\infty]}$.

Definición 3.4. Sea $\mathscr{P}$ un plano proyectivo desarguesiano y $l \in \mathcal{L}$. Decimos que una ortogonalidad de $\mathscr{P}$ que fija a l es una función $\omega : l \to l$ involutiva y sin puntos fijos.

Nótese que una ortogonalidad ω de $\mathscr{P}$ que fija a l es una relación entre todas las líneas sin incluir a l. En efecto, sea $m \in \mathcal{L}$, $m \neq l$. Las líneas ortogonales a m son todas las líneas h tales que $\omega(m) = lh$. También tenemos que en planos finitos las ortogonalidades solo se pueden definir en planos de orden impar, pues el conjunto de puntos en una línea debe tener un número par de elementos.

Ahora bien, recordemos que las simetrías axiales de un plano proyectivo $\mathscr{P}$ son (P, m)-homologías de orden 2 en las cuales $P \in [\infty]$. Es claro que el papel de la línea $[\infty]$ corresponde a la línea fijada por la ortogonalidad. Por lo tanto, una extensión de las simetrías ortogonales sobre los planos proyectivos desarguesianos sería la siguiente:

Definición 3.5. Sea $\mathscr{P}$ un plano proyectivo desarguesiano con una ortogonalidad que fija a una línea l. La simetría ortogonal de eje m con $l \neq m$ es la simetría axial $S^m_{\omega(ml)}$.

Observe que el centro de la simetría axial es un elemento de la línea l como en la extensión expuesta al final del Capítulo 2.

Sentado esto, sabemos que cada simetría ortogonal de una ortogonalidad que fija a l es una $(\omega(lm), m)$-homología de orden 2.

Continuemos generalizando las nociones obtenidas en la anterior sección:

Definición 3.6. Sean $\mathscr{P}$ un plano proyectivo desarguesiano con una ortogonalidad ω que fija a l y O un punto no incidente en l. Una rotación centrada en O es la compuesta de un par de simetrías ortogonales, $S^m_{\omega(ml)} \circ S^h_{\omega(hl)}$, tales que $mh = O$. El conjunto de todas las rotaciones centradas en O lo notamos R^ω_O.

Como vimos en la sección anterior, en ocasiones R^ω_O conforma un grupo. Ahora bien, de la Proposición 2.8 se deduce que las rotaciones son colineaciones. Así la pregunta a resolver es ¿Qué tipo de colineaciones son las rotaciones?

Calculemos $\mathcal{F}(r)$ para $r \in R^\omega_O - \{1_{\mathscr{P}}\}$. De la demostración de la Proposición 3.3 tenemos dos observaciones:

(i) Si r_* es la restricción de r a $\mathscr{P}^l$ entonces el único punto fijo de r_* es O,

(ii) r_* no tiene valores propios.

De la primera observación, obtenemos que $\mathcal{F}(r) \cap \mathcal{P}^l = \{O\}$. Por otro lado, dado que para cada simetría ortogonal la línea l queda fija, obtenemos que $\{l, O\} \subset \mathcal{F}(r)$.

Supongamos ahora que hay un punto $P \in l$ tal que $r(P) = P$, si esto ocurre, como $\mathcal{F}(r)$ es una configuración cerrada, entonces la línea $OP \in \mathcal{F}(r)$. Esto quiere decir que para cada punto $Q \in OP \cap \mathcal{P}^l$, $r(Q) \in OP$, que es equivalente a afirmar que $r(Q) = \alpha Q$, para algún $\alpha \in K$. Es claro que esto es una contradicción pues $\alpha Q = r(Q) = r_*(Q)$ y r_* no tiene valores propios. Así el único punto fijo de r en $\mathscr{P}$ es O.

Por otro lado, supongamos que existe una línea $m \in \mathcal{F}(r)$, $m \neq l$. Es claro que existe un único punto $Q \neq O$, tal que $Q \in l \cap m$, como $\mathcal{F}(r)$ es una configuración cerrada entonces $r(Q) = Q$, lo cual es absurdo puesto que el único punto fijo es O.

De esta observación obtenemos lo siguiente.

Teorema 3.5. *Sea $\mathscr{P}$ un plano proyectivo desarguesiano con una ortogonalidad ω que fija a l y O un punto no incidente en l. Para todo $r \in R_O$, distinto a la identidad, $\mathcal{F}(r) = \{l, O\}$.*

Las rotaciones son colineaciones que solo fijan a una única línea y a un único punto. Hemos encontrado así subgrupos de $Aut(\mathscr{P})$ cuyos elementos no son perspectivas.

Conclusiones

Las nociones de traslación, homotecia y simetría central de la geometría euclidiana se extienden naturalmente al contexto general de los planos afines y su comportamiento desde el punto de vista algebraico es muy satisfactorio. Por ejemplo, las traslaciones constituyen un grupo abeliano que actúa por conjugación sobre las homotecias, lo que permite reducir el estudio de estas últimas a las de un centro fijo. Además, las simetrías centrales junto con las traslaciones conforman un grupo. Para definir las simetrías paralelas o axiales es necesario que el grupo de traslaciones actúe transitivamente sobre el conjunto de puntos del plano y si queremos además garantizar que estas transformaciones sean colineaciones el plano debe ser desarguesiano. Por esta razón la mayoría del trabajo se restringió al ámbito de los planos afines desarguesianos. En este contexto todos estos tipos de transformaciones del plano son colineaciones.

La noción de rotación no se extiende de manera tan natural. Para hacerlo es necesario introducir el concepto de simetría ortogonal que depende claramente de lo que significa que dos líneas sean ortogonales. Por consiguiente hay que empezar por definir el concepto de ortogonalidad. En general, cada plano tiene una multitud de ortogonalidades. Una vez fijada una ortogonalidad las nociones de simetría ortogonal y de rotación surgen naturalmente. Aunque el número de simetrías ortogonales es independiente de la ortogonalidad, no sucede lo mismo con el número de rotaciones. Además la estructura algebraica se complica. A diferencia de lo que sucede en la geometría euclidiana, la compuesta de rotaciones del mismo centro no siempre es una rotación y por lo tanto la estructura de grupo se pierde. Sin embargo, el grupo de traslaciones actúa siempre por conjugación sobre el conjunto de rotaciones, lo que permite reducir el estudio a las rotaciones de un centro fijo. En el caso en que el conjunto de rotaciones de centro fijo sea un grupo, éste no siempre es conmutativo. Una condición necesaria y suficiente para que este conjunto sea un grupo abeliano es que la compuesta de tres simetrías ortogonales de ejes concurrentes sea siempre una simetría ortogonal. En todos los casos, tanto las simetrías ortogonales como las rotaciones son colineaciones.

El concepto de simetría, que abarca los de simetría central y simetría axial, tiene una extensión natural al contexto de los planos proyectivos: una simetría es una homología de orden 2.

La extensión de ortogonalidad a este ámbito se relativiza aún más, pues hablamos de ortogonalidades que fijan una línea. Una vez escogida la línea y la ortogonalidad, no hay dificultad para definir las simetrías ortogonales y las rotaciones. Estas últimas resultan ejemplos de colineaciones del plano proyectivo que no son perpectivas.

Bibliografía

[1] L. Acosta, *Notas del seminario de álgebra geométrica*, http://www.docentes.unal.edu.co/lmacostag/docs/, Primer semestre de 2012.

[2] _____, *Seminario álgebra geométrica*, Universidad Nacional de Colombia, Primer semestre de 2013.

[3] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience publishers, inc., 1957.

[4] J. Baez, *The octonoions*, Bull. Amer. Math. Soc.39:145-205, 2002.

[5] M. K. Bennett, *Affine and projective geometry*, John Wiley & sons, inc, 1995.

[6] P. J. Cameron, *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1904.

[7] L.H. Thiel y S. Swiercz C.W. Lam, *The non-esixtence of finite projective planes of order 10*, Canadian J. Math. 41, 1117-1123, 1989.

[8] P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1968.

[9] M. Hall, *Projective planes*, Trans. Am. Math. Soc. 54, 229-277, 1943.

[10] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, 2002.

[11] H. Lunerburg, *Lectures on projective planes*, University of Illinois at Chicago Circle, 1969.

[12] G. Papy, *Matemática moderna vol. iii*, Editorial Universitaria Buenos Aires, 1969.

[13] D. R. Hughes y F. C. Piper, *Projective planes*, Springer-Verlag, 1973.

[14] R. Lidl y H. Niederreiter, *Finite fields*, Cambridge, 2da edición, 1997.

[15] A. Albert y R. Sandler, *An introduction to finite projective planes*, Holt, Rinehart and Winston, 1968.

[16] S. Ball y Z. Weiner, *An introduction to finite geometry*, Universitat Politecnica de Catalunya, 2011.