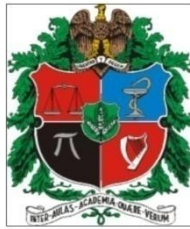


**RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES DE RESONANCIA
EN CAMPO CERCANO**

WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA
BOGOTA-COLOMBIA
2014**

**RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES DE RESONANCIA EN CAMPO
CERCANO**

WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS

**Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de:
Ms. C. en Física médica.**

DIRECTOR:

Dr.rer.nat . LUIS AGULLES PEDRÓS.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FISICA

BOGOTA

2014

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	11
2. RESONANCIA MAGNETICA NUCLEAR.	13
2.1 EFECTO ZEEMAN PARA UN SISTEMA DE ESPIN $\frac{1}{2}$	17
2.2 TIEMPOS DE RELAJACIÓN.	18
2.3 DETECCION DE LA SEÑAL.....	23
2.3.1 GRADIENTES DE CAMPO.	24
2.4 LOCALIZACION DE LA SEÑAL.....	25
2.4.1 CODIFICACION EN FRECUENCIA.....	25
2.4.2 CODIFICACIÓN EN FASE.....	27
3. FUNCIONES DE HERMITE-GAUSS.....	29
3.1 FUNCION GENERATIZ - POLINOMIOS DE HERMITE	29
3.2 RELACIONES DE RECURRENCIA.....	31

3.3 REPRESENTACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE - FÓRMULA DE RODRÍGUEZ.....	33
3.4 ORTOGONALIDAD DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE.	34
3.5 ALGUNAS APLICACIONES FISICAS.	36
4. TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL.	38
4.1 TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL	38
4.1.1. APLICACIONES MATEMATICAS.	41
4.2 PROPIEDADES DE LA TANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL.	41
4.2.1 TRANSLACION FRACCIONARIA.....	42
4.2.2 CONVOLUCION FRACCIONARIA.	42
4.3 DIFRACCION DE FRESNEL Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL.....	43
5. METODOS	45
6. RESULTADOS.....	49
6. CONCLUSIONES.....	64
7. ANEXO A. DESVIACION ESTANDAR DEL RUIDO.....	65
8. ANEXO B. DESVIACION ESTANDAR LA SEÑAL.	67

9. ANEXO C. RELACIÓN SEÑAL A RUIDO.....69

8. REFERENCIAS.....71

TABLA DE TABLAS.

TABLA 1. CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚCLEOS MÁS UTILIZADOS EN MEDICINA: ESPÍN Y CONSTANTE DE RAZÓN GIRO MAGNÉTICA [14].	14
TABLA 2. TIEMPOS DE RELAJACION PARA DIFERENTES TEJIDOS [20].	22
TABLA 3. POLINOMIOS DE HERMITE [26].	34
TABLA 4. TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL PARA ALGUNAS FUNCIONES [33].	40
TABLA 5. VALORES DE DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL RUIDO PARA DIFERENTES VALORES DEL PARAMETRO A.	58
TABLA 6. VALORES DE DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA SEÑAL PARA DIFERENTES VALORES DEL PARAMETRO A.	59
TABLA 7. COMPARACIÓN DE LA RELACIÓN SEÑAL A RUIDO PARA LOS VALORES 0.9985 Y 1.	60
TABLA 8. VALORES DE DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA RUIDO PARA DIFERENTES VALORES DEL PARÁMETRO A.	60
TABLA 9. VALORES DE DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA SEÑAL PARA DIFERENTES VALORES DEL PARÁMETRO A.	61
TABLA 10. COMPARACIÓN DE LA RELACIÓN SEÑAL A RUIDO PARA LOS VALORES 0.9985 Y 1.	62
TABLA 11. COMPARATIVO PORCENTUAL ENTRE LAS DOS RECONSTRUCCIONES PARA LA LÍNEA 1	63
TABLA 12. COMPARATIVO PORCENTUAL ENTRE LAS DOS RECONSTRUCCIONES PARA LA LÍNEA VERTICAL.	63

TABLA DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1. DEFINICIÓN DE EJES COORDENADOS Y DIRECCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.	15
ILUSTRACIÓN 2. EFECTO ZEEMAN PARA UN SISTEMA DE ESPÍN $\frac{1}{2}$ [18].	18
ILUSTRACIÓN 3. VARIACIÓN DEL VECTOR MAGNETIZACIÓN DESPUÉS DE APLICADO UN PULSO DE RF [11].	20
ILUSTRACIÓN 4. CAMBIO DE SISTEMA COORDENADO X,Y,Z AL MARCO ROTARIO DE LARMOR X',Y',Z'.	20
ILUSTRACIÓN 5. CURVAS DE RELAJACIÓN DESPUÉS DE UN PULSO DE RF 90° [21]	22
ILUSTRACIÓN 6. VARIACIÓN DE LA FRECUENCIA DE UN OBJETO UNIDIMENSIONAL APLICADO UN GRADIENTE DE CAMPO GX [18].	26
ILUSTRACIÓN 7. CODIFICACIÓN EN FASE [18].	27
ILUSTRACIÓN 8. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER COMO MÉTODO DE RECONSTRUCCIÓN	28
ILUSTRACIÓN 9. POLINOMIOS DE HERMITE [26]	30
ILUSTRACIÓN 10. ESQUEMA DE UN EQUIPO DE RMN [37]	45
ILUSTRACIÓN 11. TRANSFORMADA DE FOURIER FRACIONAL PARA LA FUNCION RECTANGULO.	47
ILUSTRACIÓN 12. ANTENA DE TÓRAX [38]	48
ILUSTRACIÓN 13. ANTENAS DE HOMBROS [38]	48
ILUSTRACIÓN 14. RECONSTRUCCIÓN DE UNA IRMN VARIANDO EL PARÁMETRO α	53
ILUSTRACIÓN 15. LÍNEAS DE CORTES HORIZONTALES Y VERTICALES PARA EL ANÁLISIS DE LA IMAGEN.	54
ILUSTRACIÓN 16. COMPARACIÓN DE INTENSIDADES PARA LOS VALORES DE 1 - 0.997	54

ILUSTRACIÓN 17. REGIÓN DE RUIDO A AMPLIAR	55
ILUSTRACIÓN 18. PERFIL DE INTENSIDAD DE RUIDO COMPARANDO EL MÉTODO CONVENCIONAL (LÍNEA AZUL) CON EL MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL (LÍNEA ROJA).	55
ILUSTRACIÓN 19. VARIACIÓN DE RUIDO EN FUNCIÓN DEL PARÁMETRO ALFA, MÉTODO CONVENCIONAL (LÍNEA AZUL), MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL (LÍNEA ROJA).	57
ILUSTRACIÓN 20. DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL RUIDO EN FUNCIÓN DEL PARÁMETRO <u>α</u>	58
ILUSTRACIÓN 21. DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA SEÑAL EN FUNCIÓN DEL PARÁMETRO <u>α</u>	59
ILUSTRACIÓN 22. DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA RUIDO EN FUNCIÓN DEL PARÁMETRO <u>α</u>	61
ILUSTRACIÓN 23. VALORES DE DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA SEÑAL PARA DIFERENTES VALORES DEL PARÁMETRO A	62
ILUSTRACIÓN 24. RECONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN PARA EL PARÁMETRO 0.9985	62
ILUSTRACIÓN 25. DESVIACIÓN DEL RUIDO PARA DIFERENTES LÍNEAS HORIZONTALES.	65
ILUSTRACIÓN 26. DESVIACIÓN DEL RUIDO PARA DIFERENTES LÍNEAS VERTICALES	66
ILUSTRACIÓN 27. DESVIACIÓN DE LA SEÑAL PARA DIFERENTES LÍNEAS HORIZONTALES	67
ILUSTRACIÓN 28. DESVIACIÓN DE LA SEÑAL PARA DIFERENTES LÍNEAS VERTICALES	68
ILUSTRACIÓN 29. RELACIÓN SEÑAL A RUIDO PARA DIFERENTES LÍNEAS HORIZONTALES.	69
ILUSTRACIÓN 30. RELACIÓN SEÑAL A RUIDO PARA DIFERENTES LÍNEAS VERTICALES.	70

RESUMEN

TÍTULO: RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES DE RESONANCIA EN CAMPO CERCANO*

AUTOR: WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS**

PALABRAS CLAVE: Resonancia Magnética Nuclear; Transformada de Fourier; Difracción de Fresnel.

En este trabajo se estudia un método para analizar la señal de resonancia magnética proveniente de los núcleos, en especial la de los hidrógenos de las moléculas de agua del cuerpo humano cuando están en presencia de un campo magnético, base de las Imágenes de Resonancia Magnética. Es importante reconstruir la señal evanescente de la onda ya que esta nos ayuda a mejorar la calidad de la imagen y así definir un tamaño de píxel más pequeño.

Se analiza cómo varía la señal cuando se pasa de un campo lejano (campo Fraunhofer) a un campo cercano (campo Fresnel). Para ello, es importante entender cómo se relaciona la difracción de Fresnel con la transformada de Fourier fraccional, y como de esto se puede llegar al método convencional de reconstrucción de imágenes debido a que la transformada de Fourier es un caso específico de la transformada de Fourier fraccional.

En este estudio se encontró que existe un orden fraccional con el cual se puede reconstruir la imagen con una desviación en el ruido menor y un aumento en la desviación estándar de la señal en comparación con el método convencional.

*Trabajo de Post- Grado

** Facultad de Ciencias. Depto. de Física. Director: Dr. Ret. Nat Luis Agulles Pedrós.

ABSTRACT

TITLE: RECONSTRUCTION OF RESONANCE IMAGING NEAR FIELD*

AUTHOR: WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS**

KEYWORDS: Magnetic Nuclear Resonance, Fourier Transform, Diffraction of Fresnel

In this work a method for analyzing magnetic resonance signals from nuclei is studied, especially the signal of the hydrogen of water molecules of the human body in the presence of a magnetic field, principle of Magnetic Resonance Imaging. It is important to reconstruct the evanescent wave signal since its allows to improve the quality of the image and thus to define a smaller pixel size.

The changes of the signal are analyzed when passing from a far-field (Fraunhofer field) to a near field (Fresnel field). Therefore it is important to understand how the Fresnel diffraction and the fractional Fourier transform are related, and how the conventional method of image reconstruction is reached because the Fourier transform is a specific case of the fractional Fourier transform.

This study found that there is a fractional order α which allows reconstructing the image with small noise deviation and an increase in the standard deviation of the signal.

* Work Degree.

** Faculty of Science. Department of Physics. Advisor: Dr. ret. Nat. Luis Agulles Pedrós.

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de resonancia magnética fue descubierto y descrito hacia 1946 por Bloch y Purcell de manera simultánea [1,2], pero solamente hasta principios de la década de los 70 se aplicó a la obtención de imágenes diagnósticas y aplicaciones médicas con base en los trabajos realizados por Lauterbur [3]. La resonancia magnética nuclear (RMN) aprovecha el principio intrínseco del espín nuclear. Cabe anotar que dentro de todos los elementos de la tabla periódica, el más importante por su abundancia biológica es el hidrógeno, el cual es un elemento con momento magnético grande y dada su abundancia en el cuerpo humano es el principal elemento de estudio clínico.

El cuerpo humano al estar compuesto en su gran mayoría por agua y grasas, es evidente que la señal proviene de los núcleos de 1H en los radicales $-OH$ de las moléculas de agua en sus distintos estados y de los 1H de los radicales $-CH_2-CH_3$ para el caso de las grasas. Señales de otros núcleos como el ^{23}Na [4], el 7Li [5], están en fase experimental. Por lo tanto, en este trabajo cuando hablamos de imágenes de resonancia magnética nos referimos únicamente a la señal emitida por los núcleos de hidrogeno.

A diferencia de las imágenes de tomografía computarizada (TC) o rayos X (RX) donde el papel del paciente es atenuar la radiación mediante la diferencia que existe en el coeficiente de atenuación lineal en los diversos tejidos, en el método de imágenes de resonancia magnética nuclear (IRMN) el paciente juega un papel completamente activo, dado que absorbe y emite una señal que por medio de unas bobinas se detecta bajo el principio de inducción de Faraday.

En las IRMN al igual que las imágenes de TC se puede tener un medio de contraste [6] que nos permite variar la señal de los núcleos de 1H actuando sobre el tiempo

de relajación. El medio de contraste más utilizado en IRMN es el Gadolinio (Gd), sustancia que tiene consolidado su uso clínico con grandes beneficios en estudios de perfusión, Angio-RM entre otros. Existen además otras sustancias de contraste a base de Hierro (Fe), entre ellas los USPIOS utilizadas como trazadores magnéticos [7].

En los equipos de resonancia magnética una parte importante es cómo se genera el campo magnético, así que, existen tres formas de generar dicho campo. El primero es producir un campo magnético permanente, esto se logra por medio de materiales ferromagnéticos los cuales presentan una imantación permanente. El segundo método, es por medio del uso de corrientes eléctricas con materiales resistivos o superconductivos, y el tercer método son sistemas híbridos. Una comparación entre los tres métodos se puede decir que el primer método no necesita de corrientes elevadas ni de sistemas de refrigeración, mientras que en los otros dos casos sí se necesitan corrientes elevadas además de sistemas de refrigeración.

Otro aspecto importante es que industrialmente se cuenta con equipos para resonancia magnética que varían desde los 0,02T hasta los 3T para uso clínico, actualmente se realiza investigación con equipos de resonancia magnética que van desde 4T, 7T [8], 8T [9], y de 11,4T [10] donde la frecuencia de funcionamiento aumenta en proporción al campo magnético estático, de 128 MHz en 3 T a 500 MHz en 11.7 T.

Para poder reconstruir la imagen se busca una manera de codificación espacial que nos indique el lugar donde se produce la señal, este proceso se realiza a través de gradientes de campo magnético que nos codifica la información pasando de posiciones a frecuencias. La forma de almacenamiento en frecuencias espaciales “*espacio K*” nos proporciona los datos de manera adecuada donde por medio de transformaciones matemáticas se puede pasar del espacio de frecuencias “*espacio K*” al espacio de posiciones y de tal manera obtener una imagen [11].

2. RESONANCIA MAGNETICA NUCLEAR.

En este capítulo se hará un revisión de cuál es el comportamiento de los espines nucleares bajo la presencia de un campo magnético \mathbf{B}_0 . Teniendo en cuenta el aspecto semiclásico los espines nucleares se pueden orientar de manera paralela o anti paralela al campo externo, la separación de los niveles de energía corresponde al efecto Zeeman. Como se verá con más detalle, un valor importante es el término γ que es la razón giromagnética, el valor numérico para el Hidrógeno es de 42.58 MHz/T, es decir que la transición entre los dos estados energéticos puede darse por la absorción o emisión de un fotón a la frecuencia de Larmor, donde la frecuencia corresponde en el espectro electromagnético a radiofrecuencia [12].

Como se mencionó anteriormente el fenómeno de resonancia magnética nuclear aprovecha el momento angular intrínseco de los núcleos, a este término se le llama comúnmente *espín*, dicho término puede explicarse desde el concepto clásico de que una esfera cargada con densidad de carga σ que rota sobre un eje, crea un campo magnético \vec{B} y su análogo en el caso de resonancia magnética son los protones, que giran sobre sí mismos creando un campo magnético alrededor de ellos. Físicamente se puede definir un valor de *momento de dipolo magnético nuclear* o *momento magnético* ($\vec{\mu}$), dado por [13]:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{J} \tag{2.1}$$

Donde el vector \vec{J} es conocido como momento angular, definiendo el término γ el cual es más utilizado en la literatura como:

$$\gamma = \frac{\gamma}{2\pi} \quad (2.2)$$

Es de anotar que tanto el término γ como γ dependen del tipo de núcleo, en la tabla 1, se describen los núcleos más utilizados en medicina:

NUCLEO	ESPÍN	γ (MHz/T)
1H	1/2	42.58
^{13}C	1/2	10.71
^{17}O	1/2	-3.63
^{19}F	1/2	40.05
^{31}P	1/2	11.26

Tabla 1. Características de los núcleos más utilizados en medicina: Espín y Constante de Razón giro magnética [14].

Para poder definir bien el valor de γ recurriremos al uso de la mecánica cuántica para poder entender algunas propiedades de los núcleos:

$$\mu = \gamma \hbar \sqrt{I(I+1)} \quad (2.3)$$

Donde I es el espín cuántico, que puede tomar diferentes valores de la forma $n/2$ donde $[n \in \mathbb{N}]$ y depende según el tipo de núcleo, para esto, se tiene tres reglas de selección:

- Núcleos con número másico impar toman valores impares de n.
- Núcleos con número másico par y número de carga par toman el valor n = 0.
- Núcleos con número másico par pero número de carga impar toman valores pares de n.

Para los núcleos descritos en la tabla 1, el valor de spin es igual a $\frac{1}{2}$ y son los más relevantes para el estudio clínico. Por otro lado, aunque se conoce bien el valor de la magnitud $|\vec{\mu}|$, su dirección es completamente aleatoria en ausencia de un campo magnético externo, esto es debido al movimiento térmico aleatorio [1].

Para poder medir un valor significativo de la magnetización es necesario alinear los momentos magnéticos en una dirección y para ello se utiliza un campo magnético que puede variar desde los 0,02T hasta los 3T para uso clínico y actualmente se realiza investigación con resonadores de 4T, 7T [8], 8T [9], y de 11,4T [10]. Para efectos de facilitar el modelo matemático se asume que este campo magnético de intensidad B_0 es aplicado en la dirección de eje z tal que:

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{k} \quad (2.4)$$

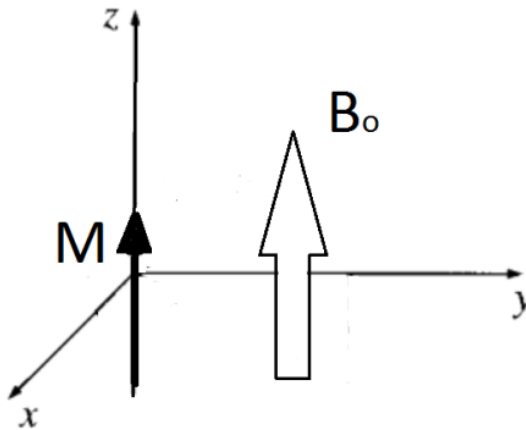


Ilustración 1. Definición de ejes coordenados y dirección del campo magnético externo.

Usando un tratamiento semiclásico, se puede suponer que $\vec{\mu}$ es un vector de momento magnético. Debido a la presencia del campo magnético externo el vector $\vec{\mu}$ presentará un torque dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times B_0 \vec{k} \quad (2.5)$$

Que es igual a la tasa de cambio del momento angular:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\mu} \times B_0 \vec{k} \quad (2.6)$$

Como se mencionó anteriormente y dado que $\vec{\mu} = \gamma \vec{J}$ se obtiene la ecuación diferencial de movimiento para un solo espín [15].

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times B_0 \vec{k} \quad (2.7)$$

La solución a esta ecuación se puede ver como:

$$\begin{cases} \mu_{xy}(t) = \mu_{xy}(0) e^{-i\omega_0 t} \\ \mu_z(t) = \mu_z(0) \end{cases} \quad (2.8)$$

Donde los valores de $\mu_{xy}(0)$ y $\mu_z(0)$ son los valores iniciales.

La frecuencia angular de precesión se define como $\omega_0 = \gamma B_0$ y es conocida como la frecuencia de Larmor.

Hasta el momento solo hemos hablado del comportamiento de un solo espín, para poder describir el comportamiento de un sistema completo se introduce el término de vector magnetización \vec{M} y se puede escribir como la suma de:

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^{N_s} \vec{\mu}_n$$

Donde N_s es el número total de espines en el objeto examinado y μ_n es el momento magnético del n -ésimo espín nuclear [16].

2.1 EFECTO ZEEMAN PARA UN SISTEMA DE ESPIN $\frac{1}{2}$.

En ausencia del campo magnético externo se tiene que el valor del vector magnetización $\vec{M} = 0$, esto es debido a que la dirección de los momentos magnéticos individuales es aleatoria y se anulan mutuamente. Cuando es aplicado el campo magnético los espines tienen dos direcciones de posible orientación, la primera en dirección del campo magnético y la segunda en dirección contraria [17].

Específicamente la energía se puede definir por medio de la mecánica cuántica como:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B_0 = -\gamma \hbar m_l B_0 \quad (2.9)$$

Donde el valor de m_l es normalmente llamado número magnético cuántico.

Para el valor $m_l = 1/2$ que corresponde al valor para los espines orientados en dirección del campo se tiene:

$$E_{\uparrow} = -\frac{\gamma \hbar B_0}{2} \quad (2.10)$$

Para el valor $m_l = -1/2$ que corresponde al valor para los espines orientados en dirección opuesta del campo se tiene:

$$E_{\downarrow} = \frac{\gamma \hbar B_0}{2} \quad (2.11)$$

Luego cuando es aplicado el campo magnético externo se tiene un desdoblamiento de los estados energéticos con una diferencia de energía como se ve en la ilustración 1

$$\Delta E = E_{\downarrow} - E_{\uparrow} = \frac{\gamma \hbar B_0}{2} + \frac{\gamma \hbar B_0}{2} = \gamma \hbar B_0 \quad (2.12)$$

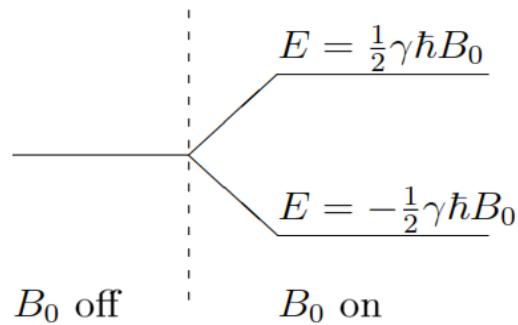


Ilustración 2. Efecto Zeeman para un sistema de espín $\frac{1}{2}$ [18].

Dado que el estado con $m_l = 1/2$ es el estado de menor energía y dado que es algo natural que los espines prefieran estar en un estado de menor energía la mayor cantidad de población estará en este nivel energético, sin embargo, la diferencia de población en los dos estados estará relacionada con la diferencia de energía y está dado según la relación de Boltzmann por:

$$\frac{N_{\uparrow}}{N_{\downarrow}} = e^{\frac{\Delta E}{K_B T}} \quad (2.13)$$

Un aspecto importante es que la temperatura no se puede alterar pues es un parámetro fijo definido por la temperatura corporal que comúnmente es de 37 °C, de esta manera solo es posible aumentar la diferencia de población aumentando el campo magnético externo \mathbf{B}_0 .

2.2 TIEMPOS DE RELAJACIÓN.

Luego que los spines se han alineado al campo magnético externo se aplica un pulso de radiofrecuencia (RF). Para que se cumpla la condición de resonancia esta

señal de radiofrecuencia tiene que tener la misma energía que la diferencia de los niveles energéticos, esto es significa que:

$$E_{rf} = \hbar\omega_{rf} = \gamma\hbar B_0 \quad (2.14)$$

$$\omega_{rf} = \gamma B_0 = \omega_0 \quad (2.15)$$

La ecuación 2.15 es conocida como *Condición de Resonancia*. Este pulso de radiofrecuencia al ser una onda electromagnética se le asocia un campo magnético de magnitud \mathbf{B}_1 . Una de las diferencias con el campo magnético externo \mathbf{B}_0 que actúa continuamente, es que el campo \mathbf{B}_1 es de corta duración, por lo general se aplica unos pocos milisegundos o microsegundos. Otra gran diferencia es la magnitud, mientras que \mathbf{B}_0 está en el orden de Tesla (1,5T) el campo B_1 es mucho más débil del orden del mT [16].

La forma más común para la parte magnética del pulso de radio frecuencia es de la forma:

$$\vec{B}_1(t) = 2B_1^e(t) \cos(\omega_{rf}t + \varphi) \vec{i} \quad (2.16)$$

Donde el término B_1^e es una función de pulso el cual generalmente esta en el plano x y φ es el valor de fase inicial.

Luego de que el sistema ha sido perturbado por el pulso de RF, el sistema deberá de acuerdo a las leyes de termodinámica volver a su estado de equilibrio siempre y cuando se le dé el suficiente tiempo. Este proceso se caracteriza por la precesión de la magnetización \mathbf{M} en torno al campo \mathbf{B}_0 (ilustración 3).

Para poder estudiar el sistema, analizamos como se recupera la proyección de la magnetización en torno al eje z llamada *relajación longitudinal* y como disminuye la magnetización en el plano x - y llamada comúnmente *relajación transversal*.

Ambos procesos de relajación son a menudo atribuidos a la dependencia temporal de los campos magnéticos microscópicos que rodean al núcleo.

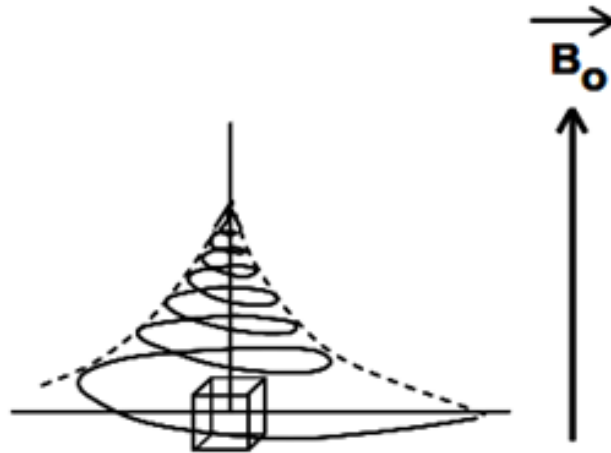


Ilustración 3. Variación del vector magnetización después de aplicado un pulso de RF [11].

Para tener una matemática más simple se utilizará un nuevo marco de referencia $x'y'z'$, en el cual \mathbf{M} permanece estático y el plano $x-y$ rota alrededor del eje z como se muestra en la ilustración 4.

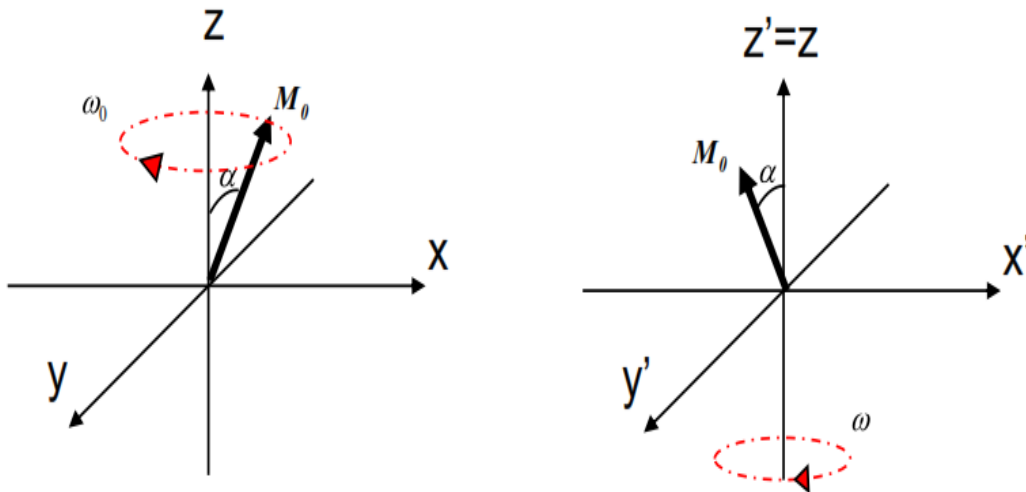


Ilustración 4. Cambio de sistema coordenado x,y,z al marco rotatorio de Larmor x',y',z' .

Específicamente hablando en un lenguaje matemático en el marco rotatorio de Larmor la magnetización se comporta [19] cómo:

$$\frac{dM_{z'}}{dt} = -\frac{M_{z'} - M_{z'}^0}{T_1} \quad (2.17A)$$

$$\frac{dM_{x',y'}}{dt} = -\frac{M_{x',y'}}{T_2} \quad (2.17B)$$

La solución de las ecuaciones 2.17A y 2.17B nos da como resultado la evolución temporal de las magnetizaciones transversal y longitudinal:

$$\begin{aligned} M_{z'}(t) &= M_{z'}^0(1 - e^{-t/T_1}) + M_{z'}(0_+)e^{-t/T_1} \\ M_{x',y'}(t) &= M_{x',y'}(0_+)e^{-t/T_2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Donde los valores de $M_{z'}(0_+)$ y $M_{x',y'}(0_+)$ son los valores iniciales inmediatamente después del pulso de RF, vale la pena aclarar que tanto T_1 como T_2 no son los tiempos para los cuales se han completado las relajaciones en los dos planos, para verlo más claro, se analiza el valor de la magnetización pasado un tiempo $t=T_1$ para el valor de la magnetización longitudinal y $t=T_2$ para valor de la magnetización transversal. [18, 20]

Aplicando un pulso de RF a 90° se producirá que $M_{z'}(0_+) = 0$; y $M_{x',y'}(0_+) = M_{z'}^0$ que son los valores iniciales para la solución a la ecuación de Bloch:

$$\begin{aligned} M_{z'}(T_1) &= M_{z'}^0(1 - e^{-1}) = 0,63M_{z'}^0 \\ M_{x',y'}(T_2) &= M_{x',y'}(0_+)e^{-1} = 0,37M_{x',y'}(0_+) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Luego pasado un tiempo igual a T_1 la magnetización longitudinal se ha recuperado un 63% mientras que $M_{x,y}$ habrá perdido un 63% de su valor inicial una vez pasado un tiempo igual a T_2 .(ilustración 5).

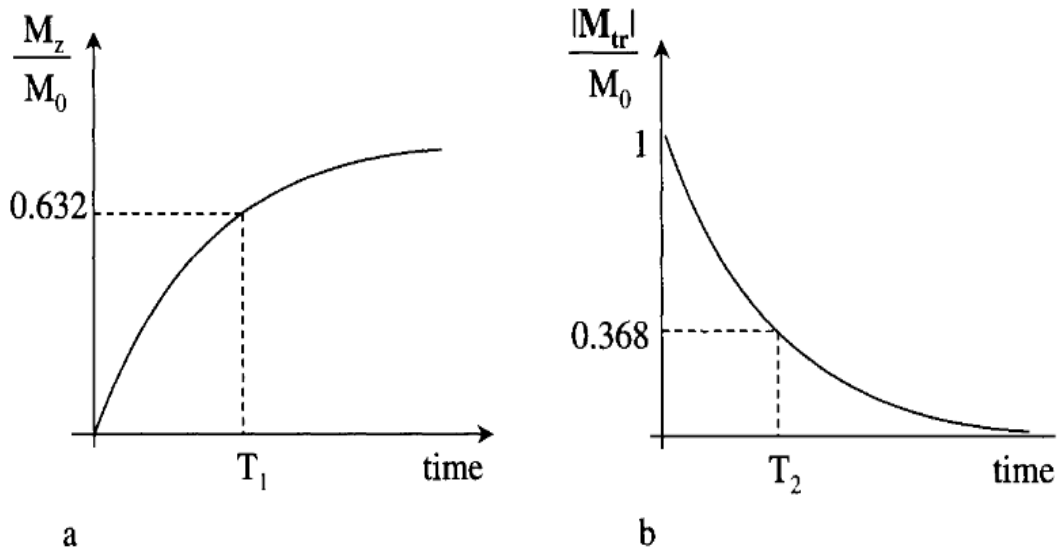


Ilustración 5. Curvas de relajación después de un pulso de RF 90° [21]

Teniendo en cuenta estas curvas se presentan los tiempos más representativos en la tabla 2:

TEJIDO	T1 [ms]	T2 [ms]
AGUA	3000	3000
MUSCULO	850	45
GRASA	250	80
HIGADO	400	40
SANGRE	1400	180/250
CSF	2000	150
SOLIDO	1	0.01

Tabla 2. TIEMPOS DE RELAJACION PARA DIFERENTES TEJIDOS [20].

2.3 DETECCIÓN DE LA SEÑAL.

Hasta el momento se ha analizado cómo se produce el vector magnetización y cómo este vuelve a su estado inicial después de un pulso de radiofrecuencia RF, el siguiente paso es entender cómo se detecta la señal, o cómo convertir ese cambio de magnetización en una señal eléctrica.

Para poder entender este principio de detección es importante tener claro el *principio de inducción de Faraday* el cual establece que la variación en el tiempo de un flujo magnético a través de una espira (bobina receptora) inducirá en la espira una fuerza electromagnética que será proporcional al cambio del flujo magnético [18].

Supongamos un campo magnético $\vec{B}_r(r)$ en el marco de laboratorio en la posición \vec{r} producido por una corriente que fluye en la espira, el flujo magnético a través de la espira se puede escribir como [18]:

$$\Phi(t) = \int_{\text{objeto}} \vec{B}_r(r) \cdot \vec{M}(r,t) dr \quad (2.20)$$

De acuerdo a la ley de inducción de Faraday, el voltaje o *fem* inducida en la espira estará dado por:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\text{objeto}} \vec{B}_r(r) \cdot \vec{M}(r,t) dr \right] \quad (2.21)$$

La expresión anterior es la ecuación básica para la detección de la señal.

Cuando hablamos de la señal en resonancia magnética podemos referirnos a dos cosas, la primera es cómo varía el vector magnetización en función del tiempo y la segunda cómo varía la *fem* inducida en la espira.

2.3.1 GRADIENTES DE CAMPO.

El término gradiente de campo se utiliza para expresar la variación del campo en una dirección específica, para tener un entendimiento y modelo matemático más simple, asumimos que este gradiente varía de forma lineal con la posición de la forma:

$$B_{G,z} = \delta_{i,j} G_{x_i} x_j \quad (2.22)$$

Donde el término G_{x_i} es el gradiente en la dirección i y x_j es la dirección del eje cartesiano.

Específicamente para el eje x se tiene:

$$B_{G,z} = G_x x \quad (2.23)$$

Similarmente para el eje y :

$$B_{G,z} = G_y y \quad (2.24)$$

Y finalmente para el eje z :

$$B_{G,z} = G_z z \quad (2.25)$$

Este tipo de gradiente es producido por unas bobinas en cada una de las direcciones, además, es importante anotar que las bobinas también producen un gradiente de campo en las direcciones x, y de manera similar a las ecuaciones anteriores $B_{G,x}; B_{G,y}$, sin embargo estas componentes son normalmente despreciadas debido a la intensidad del campo \mathbf{B}_0 en la dirección z , finalmente, el campo magnético \mathbf{B} estará dado por [18, 20]:

$$\vec{B} = (B_0 + B_{G,z}) \vec{k} \quad (2.26)$$

2.4 LOCALIZACION DE LA SEÑAL.

Para la localización de la señal se utiliza el hecho de que ahora el campo magnético en la dirección del eje z no es un valor constante B_0 , sino que varía de manera lineal, como consecuencia un pulso de radiofrecuencia solo puede estimular una capa en específica.

Básicamente hay dos métodos de localización el primero el cual es una excitación selectiva de capa “selección de *slice*”, para ello hay dos cosas esenciales:

- El Gradiente de Campo
- La forma del Pulso de RF.

La necesidad de activar el gradiente de campo durante el periodo de excitación es debido a que el pulso de RF solo puede estar a la frecuencia selectiva de la capa, este gradiente de selección es diferente a los gradientes de codificación en fase y en frecuencia, esto con el fin de poder distinguirlo.

2.4.1 CODIFICACION EN FRECUENCIA.

La codificación en frecuencia, se basa en un gradiente a lo largo del eje x que varía la frecuencia de manera lineal, para entender eso consideremos un objeto unidimensional con una distribución de espines $\rho(x)$, luego de haber seleccionado la capa con el pulso de radiofrecuencia RF se aplica un gradiente de campo magnético en la dirección x de forma [22]:

$$B = B_0 + G_x x \quad (2.27)$$

La frecuencia está dada por:

$$\gamma B(x) = \omega(x) \quad (2.28)$$

Remplazando el campo B se tiene que la frecuencia varia con la posición y la pendiente de inclinación la da la magnitud del gradiente.

$$\begin{aligned} \gamma(B_0 + G_x x) &= \omega(x) \\ \omega_0 + \gamma G_x x &= \omega(x) \end{aligned} \quad (2.29)$$

La señal generada localmente por un grupo de espines en un espacio dx estará dado por:

$$\begin{aligned} dS &= \rho(x) e^{-i\omega t} dx \\ dS &= \rho(x) e^{-i(\omega_0 + \gamma G_x x)t} dx \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para tener la señal en todo el objeto por la presencia del mismo gradiente:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i(\omega_0 + \gamma G_x x)t} dx = e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i\gamma G_x x t} dx \quad (2.31)$$

Una manera gráfica de ver como varía la frecuencia en función de la posición

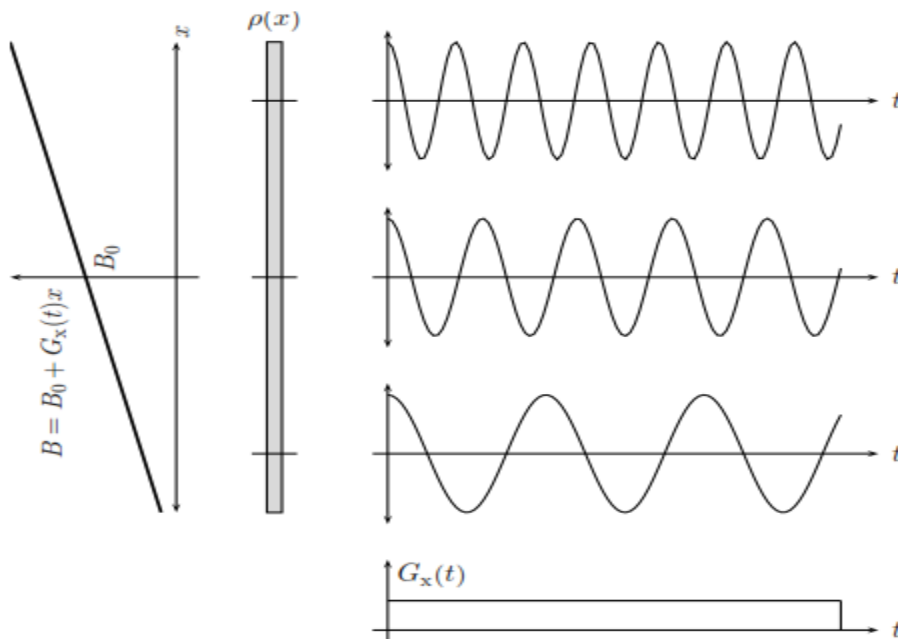


Ilustración 6. Variación de la frecuencia de un objeto unidimensional aplicado un gradiente de campo

Gx [18].

2.4.2 CODIFICACIÓN EN FASE.

Par poder entender nuevamente el modelo, lo más conveniente es analizar el caso unidimensional, supongamos que una vez seleccionada la capa con el pulso de radiofrecuencia RF, se activa el gradiente G_x por un intervalo pequeño T_p y luego se apaga.

La señal medida será dependiente de la posición y del tiempo, así tendremos definidos dos intervalos par la señal:

$$\begin{aligned} dS &= \rho(x)e^{-i(\omega_0 + \gamma G_x x)t} dx \rightarrow 0 \leq t \leq T_p \\ dS &= \rho(x)e^{-i\gamma G_x x T_p} e^{-i\omega_0 t} dx \rightarrow T_p \leq t \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como resultado la señal es codificada en fase para cada posición en x luego:

$$\phi(x) = -i\gamma G_x x T_p \quad (2.33)$$

La fase mantiene una relación lineal y es dependiente de la posición y del tiempo teniendo una relación más estricta podemos hablar de un gradiente de fase G_p que tenga componentes en las tres direcciones.

$$\phi(x) = -i\gamma \vec{G}_p \cdot \vec{r} T_p \quad (2.34)$$

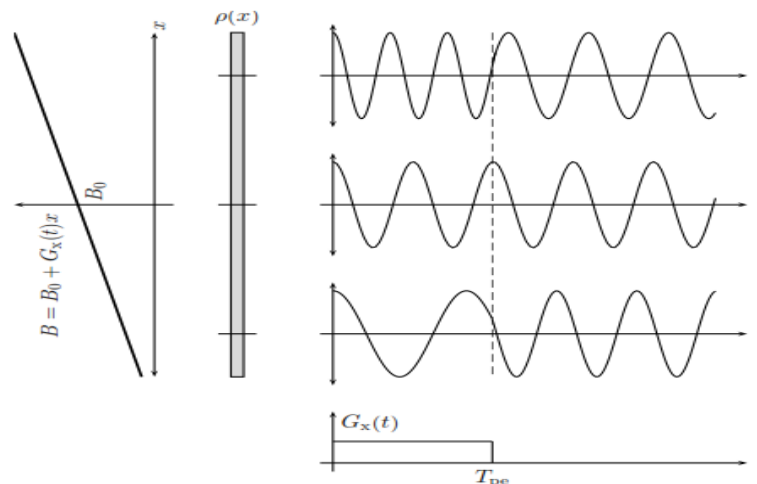


Ilustración 7. Codificación en Fase [18].

Por otro lado, es importante establecer una relación entre la señal y la transformada de Fourier. Para ello como se mencionó en la introducción se utiliza el recurso del espacio K [23], que es la señal codificada en fase y en frecuencia.

Primero consideramos la señal codificada en fase y en frecuencia descrita por:

$$dS = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i\gamma G_x x T_p} dx \quad (2.35)$$

Realizando un cambio de variable se tiene que:

$$K_x = \gamma G_x T_p \quad (2.36)$$

Sustituyendo la ecuación (2.36) en (2.35):

$$S(K_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-iK_x x} dx \quad (2.37)$$

La ecuación 2.37 tiene la misma forma de la Transformada de Fourier y se puede simplificar como:

$$S(x) = \mathfrak{F}[\rho(K_x)] \quad (2.38)$$

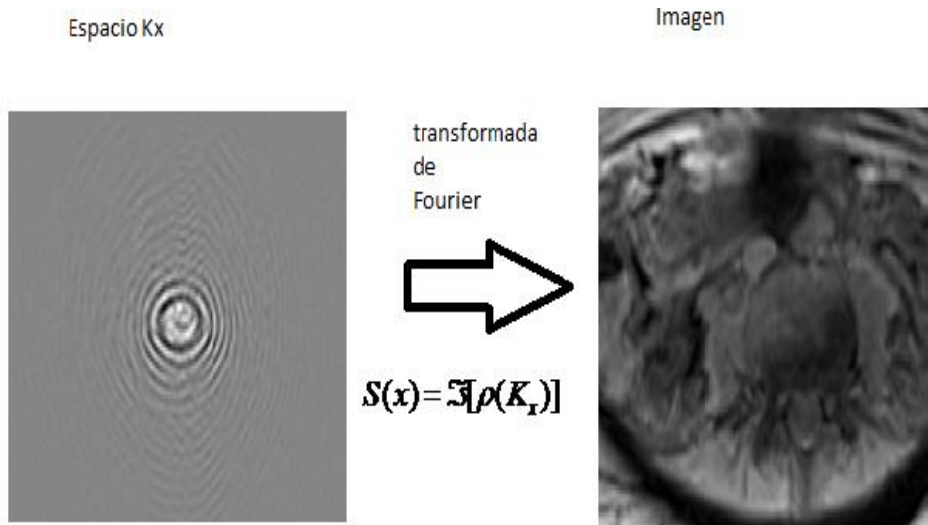


Ilustración 8. Aplicación de la Transformada de Fourier como método de reconstrucción

3. FUNCIONES DE HERMITE-GAUSS

En este capítulo se realizará un estudio de las funciones de Hermite, de cómo se generan y algunas relaciones de recurrencia, por otro lado se analizará la parte matemática y física como por ejemplo la solución al oscilador armónico a través de la mecánica cuántica y algunas formas alternativas en que se pueden expresar estas funciones.

3.1 FUNCION GENERATRIZ - POLINOMIOS DE HERMITE

Las funciones de Hermite H_n , son definidas por la función generatriz $\varphi(x, t)$, para demostrar dicha función supongamos la función [25]:

$$\varphi(x, t) = e^{x^2} e^{(t-x)^2} = e^{-t^2+2xt} \quad (3.1)$$

Su desarrollo por series de Taylor es:

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (3.2)$$

Donde la función:

$$A_n(x) = \left. \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right|_{t=0} \quad (3.3)$$

Como:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial(x-t)} (-1)$$

Luego se tiene que:

$$A_n(x) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial(x-t)^n} e^{-(t-x)^2} \Big|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n} = H_n(x) \quad (3.4)$$

Finalmente:

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (3.5)$$

Se dice que la función e^{-t^2+2xt} es la función generatriz de los polinomios de Hermite, cabe anotar que se generaron a partir de la expansión por series de Taylor en una de las variables. En la ilustración 9 se muestra la forma de los tres primeros polinomios de Hermite.

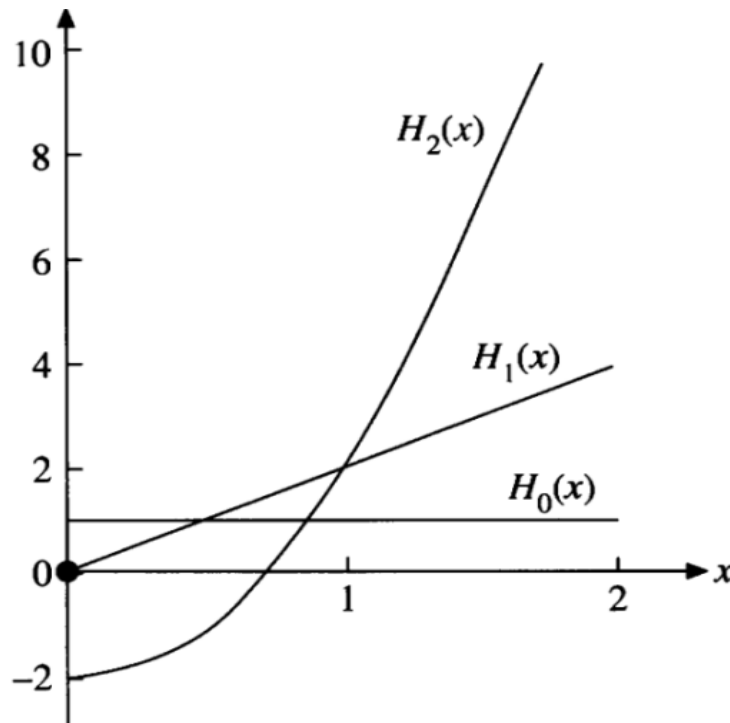


Ilustración 9. Polinomios de Hermite [26]

3.2 RELACIONES DE RECURRENCIA.

Las funciones de recurrencia son aquellas que a partir de una función conocida se pueden generar las demás, para encontrar las funciones de recurrencia de los polinomios de Hermite recurriremos a la ecuación e^{-t^2+2xt} . La estrategia para encontrarla es derivar parcialmente con respecto a alguna de las dos variables y luego comparar las potencias en los desarrollos por series de Taylor [27].

$$\varphi(x, t) = e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (3.6)$$

Derivando con respecto a la variable x se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\varphi(x, t)] = 2t \cdot g(x, t) \quad (3.7)$$

Reemplazando con la primera definición:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial}{\partial x} [H_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{2t^{n+1}}{n!}$$

$$H'_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{m+1} [H'_{m+1}(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{2t^{n+1}}{n!} \quad (3.8)$$

Comparando coeficientes en las potencias y teniendo en cuenta que $H_0(x)=1$ y por ende su derivada es $H'_0(x)=0$ se obtiene:

$$2nH_{n-1}(x) = \frac{1}{n+1} H'_{n+1}(x) \quad (3.9)$$

Realizando un cambio de variable en los índices de suma por $m = n+1$ y volviéndola a escribir en el índice original se puede llegar a:

$$2nH_{n-1}(x) = H'_n(x) \quad (3.10)$$

Es de anotar que para el caso con el valor de $n = 0$ se obtienen polinomios con índice negativos, esto es válido debido a que podemos definir que cualquier polinomio de Hermite con índice negativo es igual a cero. Para la siguiente relación de recurrencia se realiza la derivada parcial con respecto a t :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\varphi(x, t)] = (2t - 2x) \cdot \varphi(x, t) \quad (3.11)$$

Remplazando la función $\varphi(x, t)$ por la forma de suma de polinomios se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} \quad (3.12)$$

Realizando un cambio de índices se puede escribir como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2xH_n(x) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 2H_{n-1}(x) \frac{t^n}{(n-1)!} \quad (3.13)$$

Para el valor $n=0$ se tiene que:

$$H_1(x) = 2xH_0(x) \quad (3.14)$$

Para cualquier valor de n :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (3.15)$$

De esta manera se puede generalizar para cualquier valor de n :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x); n \geq 0$$

Relacionando las dos ecuaciones de recurrencia encontradas anteriormente podemos encontrar una tercera relación:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x) \quad (3.16)$$

3.3 REPRESENTACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE - FÓRMULA DE RODRÍGUEZ.

La ecuación generatriz de los polinomios de Hermite se puede escribir de la forma:

$$\varphi(x, t) = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} \quad (3.17)$$

Teniendo en cuenta la derivada parcial con respecto a t evaluada en $t=0$ se puede ver que:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = (2x - 2t)\varphi(x, t) \Big|_{t=0} = 2x = H_1(x) = -e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} \quad (3.18)$$

Más directamente, para el caso de derivar n veces con respecto a t y evaluar en $t=0$ se puede obtener un polinomio de Hermite de grado n :

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[e^{x^2} e^{-(t-x)^2} \right] \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (3.19)$$

La anterior representación es o que se conoce como la representación de Rodríguez, en base a esta definición se puede encontrar fácilmente en la tabla 3, los primeros polinomios de Hermite [28].

$H_0(x)$	1
$H_1(x)$	$2x$
$H_2(x)$	$4x^2 - 2$
$H_3(x)$	$8x^3 - 12x$
$H_4(x)$	$16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x)$	$32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_6(x)$	$64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

Tabla 3. Polinomios de Hermite [26]

3.4 ORTOGONALIDAD DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE.

Para encontrar la condición de ortogonalidad empezaremos evaluando la integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx \quad (3.20)$$

Teniendo en cuenta que tanto m y n no pueden ser negativos:

$$I = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] dx \quad (3.21)$$

Integrando por parte y utilizando las fórmulas de recurrencia:

$$I = (-1)^{n+1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [e^{-x^2}] dx \quad (3.22)$$

Integrando n veces:

$$I = (-1)^{m+n} 2^n m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [e^{-x^2}] dx \quad (3.23)$$

En este punto se pueden ver dos casos, el primero cuando $n > m$ y el segundo cuando $n = m$

- Para el caso $n > m$:

$$I = (-1)^{m+n} 2^n m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [e^{-x^2}] dx = (-1)^{m+n} 2^n m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} [e^{-x^2}] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

- Para el caso $n = m$:

$$I = 2^n m! \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-x^2}] dx = 2^n m! \sqrt{\pi}$$

Compactando los dos casos para el valor de la integral se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n m! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad (3.25)$$

Para encontrar el anterior resultado, la integral tiene un valor adicional o de peso se puede decir que los polinomios de Hermite son ortogonales con una función de peso igual a [27]:

$$p(x) = e^{-x^2/2} \quad (3.26)$$

Si definimos el conjunto de funciones:

$$\Psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n m! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \quad (3.27)$$

De esta manera se puede decir que el conjunto de funciones $\Psi_n(x)$ es un conjunto ortonormal debido a que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x) \Psi_m(x) dx = \delta_{nm} \quad (3.28)$$

3.5 ALGUNAS APLICACIONES FISICAS.

Dentro de las aplicaciones físicas se puede demostrar que las funciones de Hermite son funciones propias del oscilador armónico dado que la solución a la ecuación diferencial para este caso se puede representar como:

$$\psi'' - x^2\psi = -(2n+1)\psi \quad (3.29)$$

Reescribiendo la ecuación en forma del Hamiltoniano y teniendo en cuenta que la energía potencial es $V = \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$ y la fuerza $\mathbf{F} = -\nabla V = -kz\hat{\mathbf{z}}$ | Específicamente hablando en un lenguaje matemático en el marco rotatorio de Larmor la magnetización se comporta [19] como:

a ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico se reescribe como [28]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(z) + \frac{1}{2}kz^2\Psi(z) = E\Psi(z) \quad (3.30)$$

Realizando un cambio de variable:

$$x = \alpha z \quad \alpha^4 = \frac{mK}{\hbar^2} = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar} \left(\frac{m}{k}\right)^2 = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

De manera que:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + (\lambda - x^2)\psi(x) = 0 \quad (3.31)$$

Para que la ecuación coincida con la primera ecuación se debe cumplir que:

$$\lambda = 2n + 1 = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

Condición que nos da los estados cuantizados para el oscilador armónico cuántico con valores de energía iguales a:

$$\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{con } n \geq 0 \quad (3.32)$$

Finalmente las funciones de onda $\Psi_n(x)$ se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\Psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \quad (3.33)$$

Otra aplicación que tiene los polinomios de Hermite se dan particularmente en el área de espectroscopia molecular, donde se encuentran integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \quad (3.34)$$

Por otro lado, se puede demostrar que dada una función:

$$\Phi_n(\omega) = \mathfrak{F}[\psi_n(t), \omega]$$

Se cumple que:

$$\psi'' + (2n + 1 - t^2)\psi = 0$$

Aplicando el operador transformada de Fourier \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F}[\psi'' + (2n + 1 - t^2)\psi] = [\Phi'' + (2n + 1 - \omega^2)\Phi] = 0 \quad (3.35)$$

Es decir, que la transformada de Fourier en la ecuación diferencial es esencialmente ella misma cómo se verá en el siguiente capítulo donde se muestra cómo a partir de los polinomios de Hermite se puede dar una definición para la transformada de Fourier y generalizarla para definir la Transformada de Fourier Fraccional.

4. TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL.

En la formulación de nuestro modelo, consideramos que la señal producida por los spines nucleares cuando se aplica un campo magnético externo no se propaga una distancia mayor a la longitud de onda, en nuestro caso en particular la longitud varía de algunos centímetros hasta 100 metros debido a que son ondas con una frecuencia del orden de los MHz, como la señal no se propaga más de la longitud de onda decimos que analizaremos la señal en campo cercano o campo de Fresnel. Luego analizaremos este caso como una difracción de Fresnel, pero para esto se mostrará una relación entre la teoría de difracción y la transformada de Fourier fraccional [29].

4.1 TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL

Para iniciar este estudio haremos una definición sobre nuestro operador, para el caso usual de Fourier, se puede demostrar que las funciones propias del operador vienen dadas por [30]:

$$\mathfrak{F}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) H_n(x) = e^{i\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) H_n(x) \quad (4.1)$$

Es posible en concordancia con el anterior resultado considerar la expresión generalizada para cualquier parámetro:

$$\mathfrak{F}_\alpha \exp\left[\frac{-x^2}{2}\right] H_n(x) = \exp[in\alpha] \exp\left[\frac{-x^2}{2}\right] H_n(x) \quad (4.2)$$

De la ecuación 4.2 se tiene que las funciones de Hermite-gauss son funciones propias del operador \mathfrak{F}_α . Con valores propios $e^{in\alpha}$ y como una función de cuadrado integrable $f(x)$ puede ser expandida en términos de estas funciones propias donde el cálculo de los coeficientes se realiza aplicando las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Hermite y el uso de la fórmula de Mehler [30,31].

$$\mathfrak{F}_\alpha [f(x)] = \frac{\exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\sqrt{2\pi \operatorname{sen}\alpha}} \exp\left(-\frac{ix^2}{2} \cot \alpha\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{iv^2}{2} \cot \alpha + -\frac{ixv}{\operatorname{sen}\alpha}\right) f(v) dv \quad (4.3)$$

Para el caso cuando el valor de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se puede llegar de la ecuación 4.3 a la definición formal de la transformada de Fourier escrita como:

$$\mathfrak{F}_{\frac{\pi}{2}} [f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixv) f(v) dv$$

Reescribiendo la fórmula de la transformada de Fourier fraccional descrita por Namias [29,32] de manera bidimensional:

$$\mathfrak{F}_\alpha [f(x, y)] = \frac{\exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]}{2\pi \operatorname{sen}\alpha} \exp\left(-\frac{i(x^2 + y^2)}{2 \tan \alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i(\xi^2 + \eta^2)}{2 \tan \alpha} + -\frac{i(x\xi + y\eta)}{\operatorname{sen}\alpha}\right) U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.4)$$

La ecuación 4.4 nos da la definición de la transformada de Fourier Fraccional para dos dimensiones, en la tabla 4 se muestran algunas transformadas de Fourier Fraccional para algunas funciones:

FUNCION	TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL
1	$\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\cos \alpha}} \exp\left[i\frac{x^2}{2} \tan \alpha\right]$
$\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$	$\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$
$H_n(x) \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$	$e^{in\alpha} H_n(x) \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$
$\exp\left[-\frac{x^2}{2} + ax\right]$	$\exp\left[-\frac{x^2}{2} - i\frac{a^2}{2} e^{i\alpha} \operatorname{sen}(\alpha) + axe^{i\alpha}\right]$
$\delta(x)$	$\frac{\exp\left[i\frac{\pi}{4} - i\frac{\alpha}{2}\right]}{\sqrt{2\pi \operatorname{sen}(\alpha)}} \exp\left[i\frac{x^2}{2} \operatorname{ctg}(\alpha)\right]$
$\delta(x-a)$	$\frac{\exp\left[i\frac{\pi}{4} - i\frac{\alpha}{2}\right]}{\sqrt{2\pi \operatorname{sen}(\alpha)}} \exp\left[i\frac{(x^2+a^2)}{2} \operatorname{ctg}(\alpha) + iax \operatorname{csc}(\alpha)\right]$
e^{ikx}	$\frac{\exp\left[i\frac{\pi}{4} - i\frac{\alpha}{2}\right]}{\sqrt{\cos(\alpha)}} \exp\left[i\frac{(x^2+a^2)}{2} \operatorname{ctg}(\alpha) + iax \operatorname{sec}(\alpha)\right]$

Tabla 4. Transformada de Fourier Fraccional para algunas funciones [33].

4.1.1. APLICACIONES MATEMATICAS.

La Transformada de Fourier Fraccional (TFF) siendo una teoría más completa de la transformada de Fourier, es una herramienta útil, ya que proviene de un planteamiento matemático que utiliza los polinomios de Hermite-Gauss, el cual nos permite encontrar soluciones para varios problemas físicos como son:

- Solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el oscilador armónico cuántico,
- Funciones de Green para el oscilador armónico y la evolución temporal del paquete de onda, funciones de Green para el oscilador armónico forzado.
- Estados estacionarios y niveles de energía para electrones libres en un campo magnético uniforme y constante.
- Evolución de paquetes de onda electrónicos en un campo magnético uniforme y constante.
- Soluciones de la ecuación de Schrödinger para electrones libres en un campo magnético uniforme variando temporalmente [29,33].

4.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL.

Al igual que la transformada de Fourier, la transformada de Fourier fraccional también posee ciertas propiedades como lo son translación, convolución, correlación las cuales se muestran a continuación siendo este un operador lineal.

4.2.1 TRANSLACION FRACCIONARIA.

Se define una traslación fraccionaria como:

$$T_{\tau,\alpha}[f(x)] = f(x - \tau) \exp\left[2i\pi\tau\left(x - \tau/2\right)ctg\alpha\right] \quad (4.5)$$

De manera que al aplicar la transformada al operador traslación fraccionaria se tiene:

$$\mathfrak{F}_\alpha \left[T_{\tau,\alpha} \left[f(x) \right] \right] = f_\alpha(x) e^{-\frac{i2\pi\tau x}{\text{sen}\alpha}} \quad (4.6)$$

Este operador recupera una invariancia en el modulo de la transformada bajo una traslación fraccionaria en el sentido en que:

$$\left\| \mathfrak{F}_\alpha T_{\tau,\alpha} \left[f(x) \right] \right\| = \left\| \mathfrak{F}_\alpha \left[f(x) \right] \right\| \quad (4.7)$$

De manera similar al caso de la transformada de Fourier Fraccional para el caso de $\alpha = \pi/2$, se puede obtener el operador de traslación usual dado como:

$$T_{\tau,\frac{\pi}{2}}[f(x)] = T_\tau[f(x)] = f(x - \tau) \quad (4.8)$$

4.2.2 CONVOLUCIÓN FRACCIONARIA.

De manera similar a la definición de convolución entre dos funciones se tiene que:

$$f * g = \mathfrak{F}^{-1} \left[\left[\mathfrak{F}(f) \right] \left[\mathfrak{F}(g) \right] \right] \quad (4.9)$$

De manera similar se puede escribir la convolución fraccionaria como [34]:

$$f *^\alpha g = \mathfrak{F}^{-\alpha} \left[\left[\mathfrak{F}^\alpha(f) \right] \left[\mathfrak{F}^\alpha(g) \right] \right] \quad (4.10)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} f \overset{\pi/2}{*} g &= f * g \\ f \overset{0}{*} g &= fg \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación anterior nos muestra las dos condiciones para que se siga cumpliendo el teorema de convolución.

4.3 DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL

Comparando la anterior definición para la transformada de Fourier Fraccional descrita en la ecuación 4.12 con la definición para la difracción de Fresnel [30, 32]

$$U_p(u, v) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d}(u^2 + v^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\pi}{\lambda d}(\xi^2 + \eta^2)\right) \exp\left(\frac{-2i\pi(u\xi + v\eta)}{\lambda d}\right) U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.12)$$

donde el tiempo origen \mathbf{P} es desplazado con respecto al origen temporal en \mathbf{A} ,

donde el factor $\exp\left(\frac{2i\pi d}{\lambda}\right)$ ha sido desestimado. Es evidente encontrar una similitud entre la transformada de Fourier fraccional y la difracción de Fresnel de manera tal que se puede escribir de la siguiente manera [35]:

$$U(x, y) = \frac{2\pi \operatorname{sen}\alpha}{id\lambda} \exp\left(\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{d}\right) \frac{i\pi(x^2 + y^2)}{\lambda}\right) \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \mathfrak{F}^\alpha[U_A(\xi, \eta)] \quad (4.13)$$

Luego podemos notar que cuando una onda $U(\xi, \eta)$ se propaga una distancia d se puede ver como una difracción de Fresnel $U(x, y)$, escrita en la ecuación anterior y a su vez como una transformada de Fourier fraccional, para poder retroceder- nos al plano del campo $U(x, y)$ teniendo como referencia el campo en el plano $U(\xi, \eta)$ se utiliza la transformada inversa de Fourier [36]

5. METODOS

Para la parte experimental se tomaron imágenes de resonancia magnética en la región abdominal para la cual el campo magnético externo es de 1,5 T, (ilustración 10):

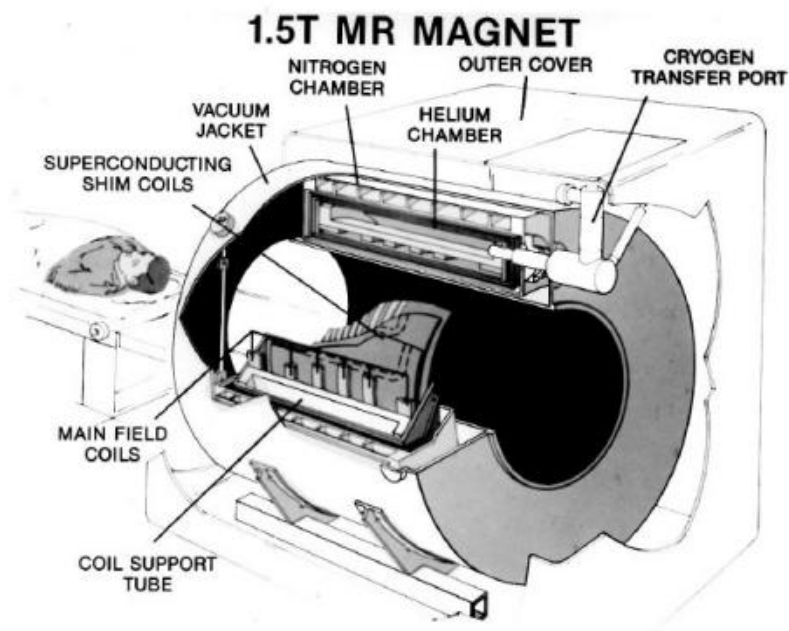


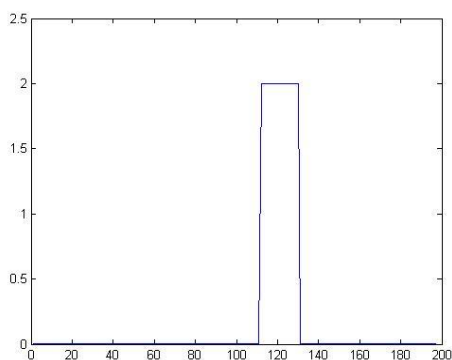
Ilustración 10. Esquema de un equipo de RMN [37]

Las imágenes que se presentan en el siguiente capítulo ilustración 13, muestran un estudio de abdomen, a estas imágenes se les aplicó una transformada de Fourier inversa para obtener la señal en el espacio K . luego de obtenidas la señal, se procedió a reconstruirlas variando el parámetro α en la Transformada de Fourier Fraccional descrita por la ecuación:

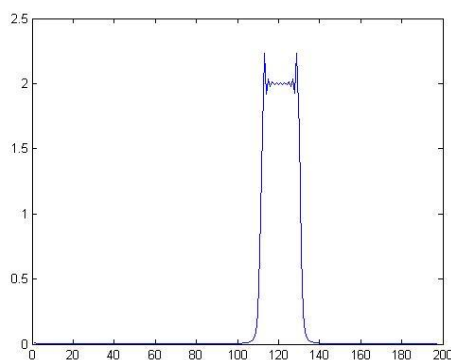
$$U(u, v) = \frac{2\pi \operatorname{sen} \alpha}{id\lambda} \exp\left(\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{d}\right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda}\right) \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \mathfrak{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)]$$

(5.1)

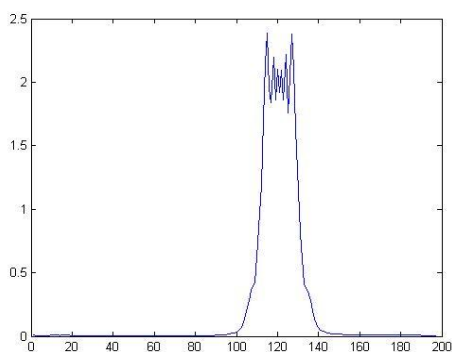
Para entender como varía la señal producida por un pixel desde el plano imagen hasta el espacio K, se establece la función rectángulo en una dimensión como modelo matemático, de esta manera se puede ver en la ilustración 11:



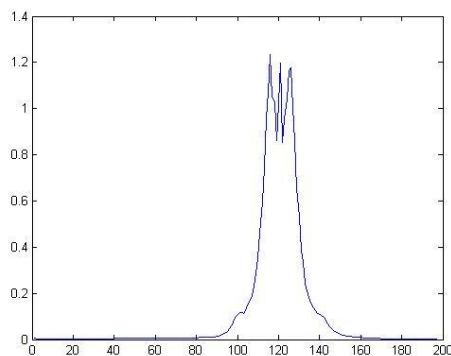
a.) Función Rectángulo



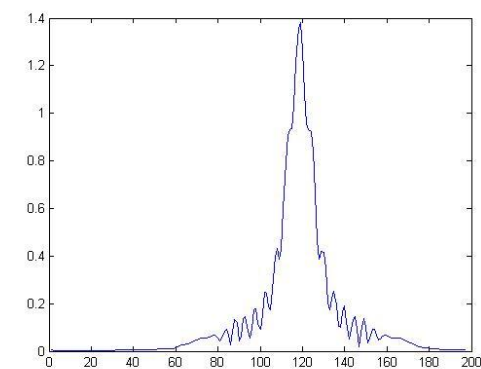
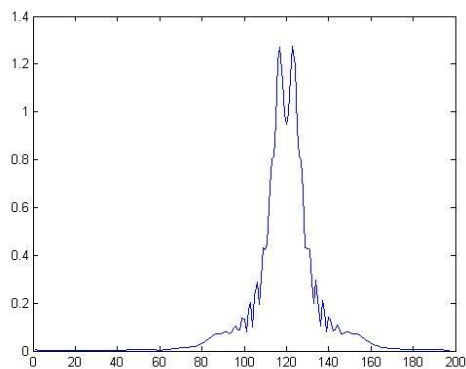
b.) TFF con un valor de $\alpha = 0,01$



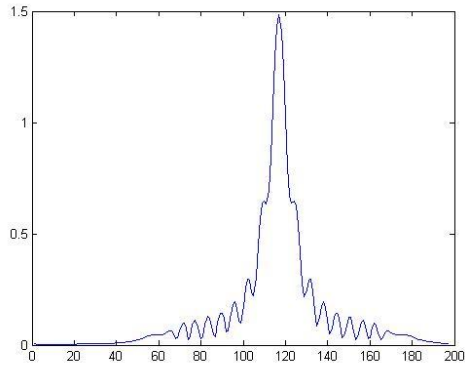
c.) TFF con un valor de $\alpha = 0,05$



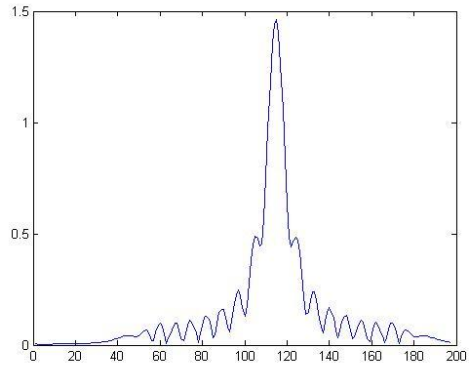
d.) TFF con un valor de $\alpha = 0,1$



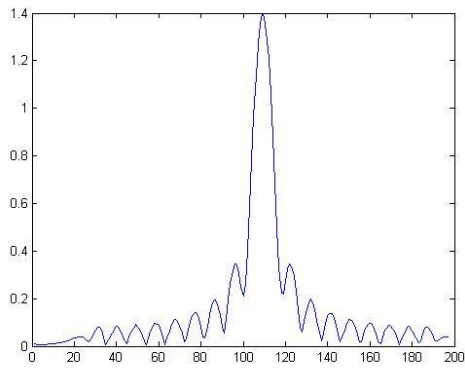
e.) TFF con un valor de $\alpha = 0,2$



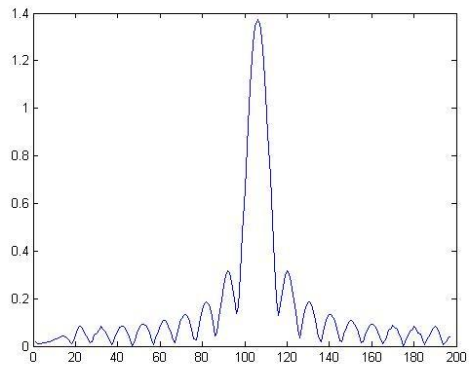
f.) TFF con un valor de $\alpha = 0,3$



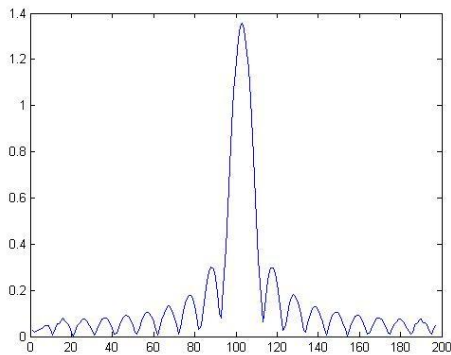
g.) TFF con un valor de $\alpha = 0,4$



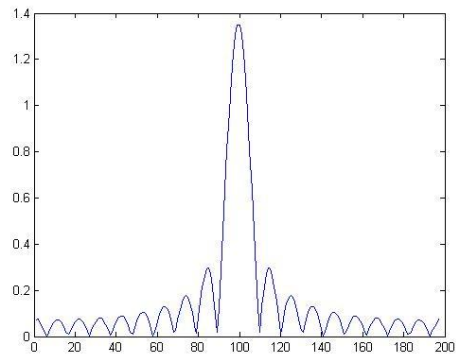
h.) TFF con un valor de $\alpha = 0,5$



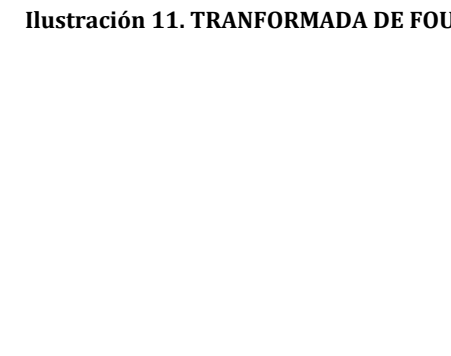
g.) TFF con un valor de $\alpha = 0,7$



h.) TFF con un valor de $\alpha = 0,8$



g.) TFF con un valor de $\alpha = 0,9$



h.) TFF con un valor de $\alpha = 1$

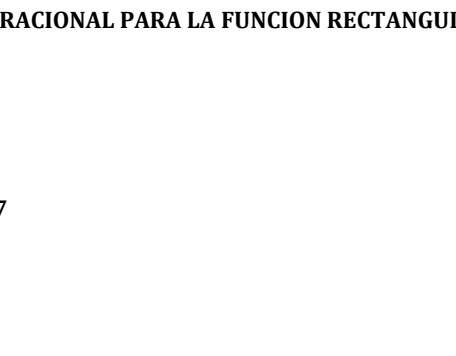


Ilustración 11. TRANSFORMADA DE FOURIER FRACIONAL PARA LA FUNCION RECTANGULO.

Una vez entendido el proceso de propagación de la señal, es importante saber cómo se detecta. Como se menciona anteriormente, éste se realiza por medio de la “ley de inducción de Faraday” en donde hay dos cosas a tener en cuenta:

La primera la forma del campo magnético y la segunda la forma de la antena o “loop” receptor.

$$\varepsilon = -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{objeto} \vec{B}_r(r) \cdot \vec{M}(r,t) dr \right] \quad (5.2)$$

Dado que dependiendo el tipo de estudio que se desea realizar al paciente se eligen diferentes tipos de antenas donde se varía el área y la forma geométrica, para citar algunos ejemplos se tienen:



Ilustración 12. Antena de tórax [38]

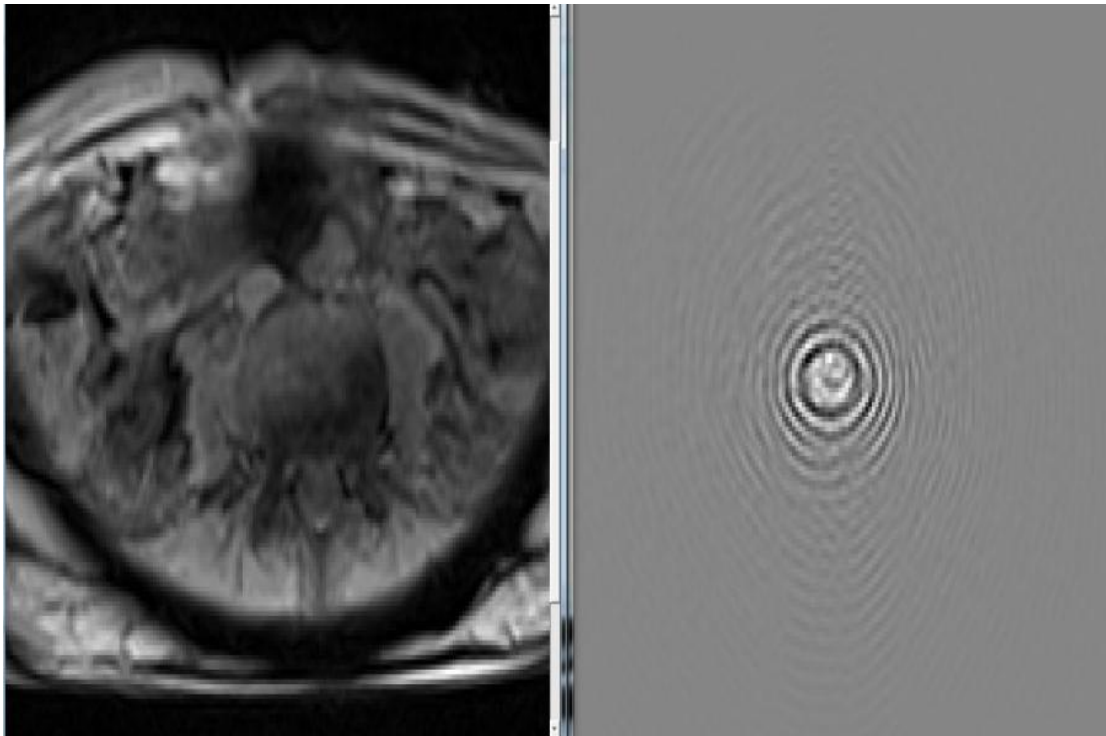


Ilustración 13. Antenas de hombros [38]

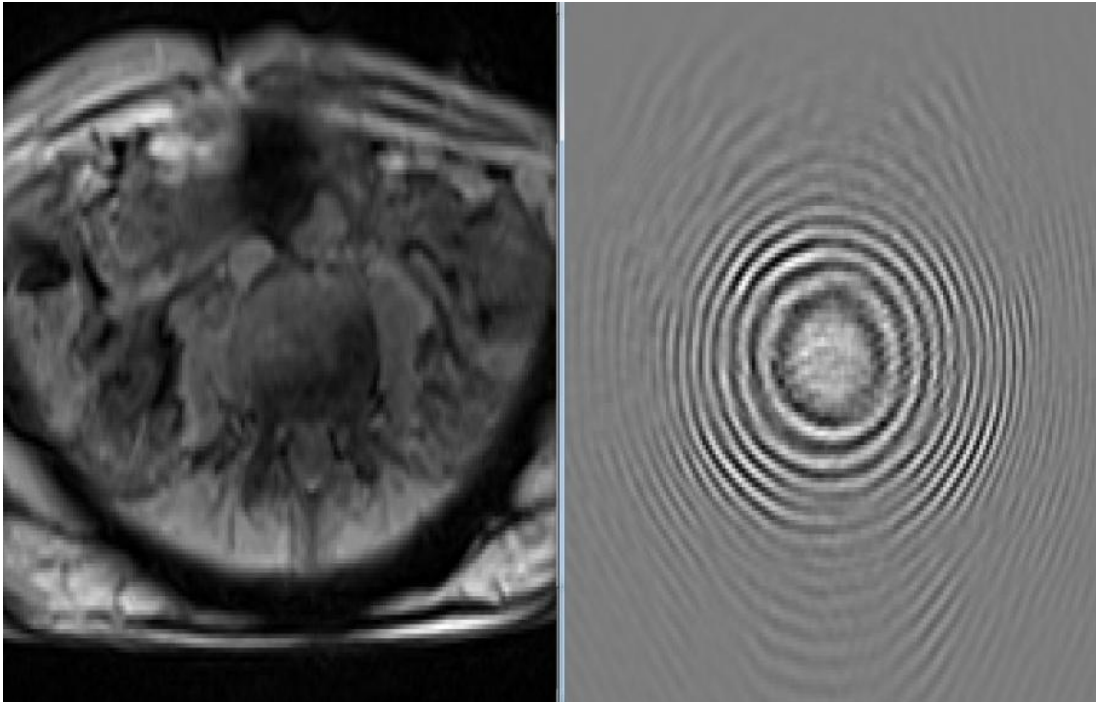
6. RESULTADOS

Luego de entender cómo varía la propagación de un pixel, proseguimos a ver cómo varía la señal desde el espacio K , en la ilustración 13 se observa la reconstrucción de IRMN variando el parámetro α , para ello se tiene que la imagen de la parte izquierda corresponde a la imagen normal reconstruida con el método convencional y la imagen de la parte izquierda es la imagen reconstruida utilizando la Transformada de Fourier Fraccional variando el orden fraccional, de esta manera podemos observar la evolución de la señal desde el espacio K hasta el plano de formación de la imagen (Ilustración 14):

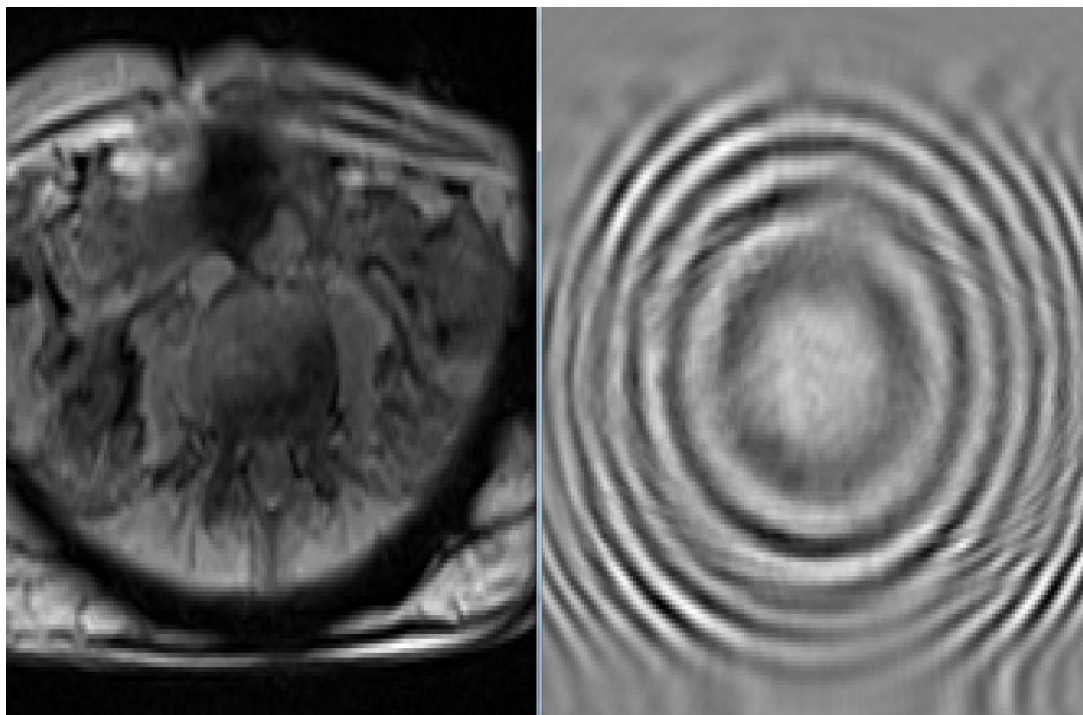
Con un orden $\alpha=0.003$



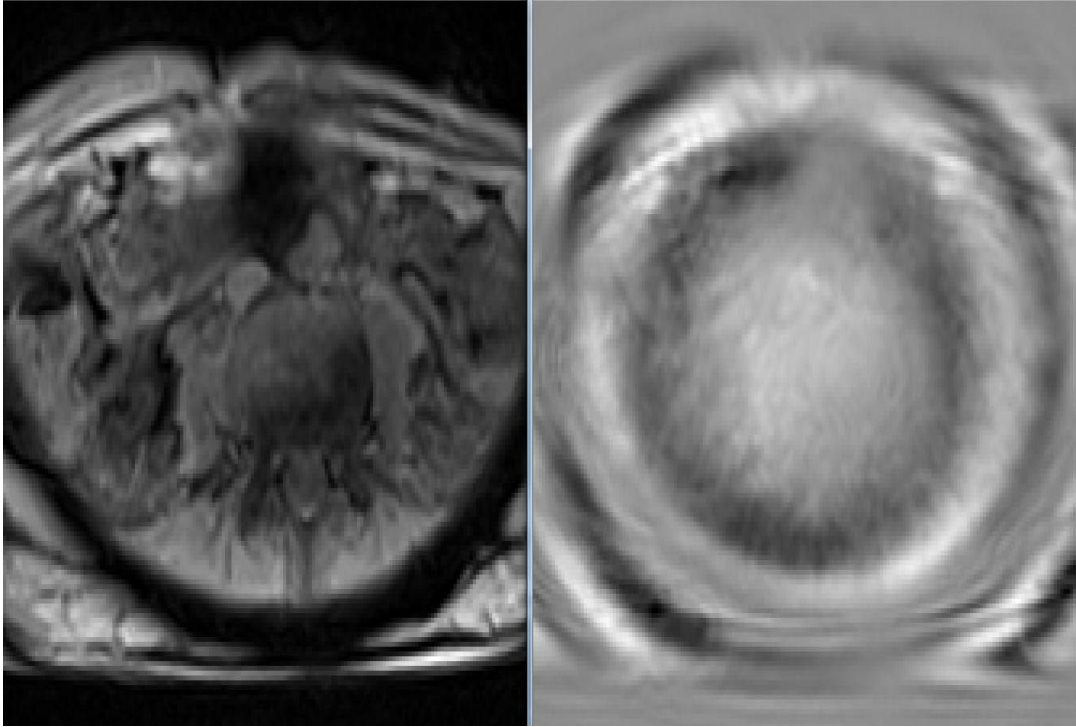
Con un orden $\alpha=0.3$



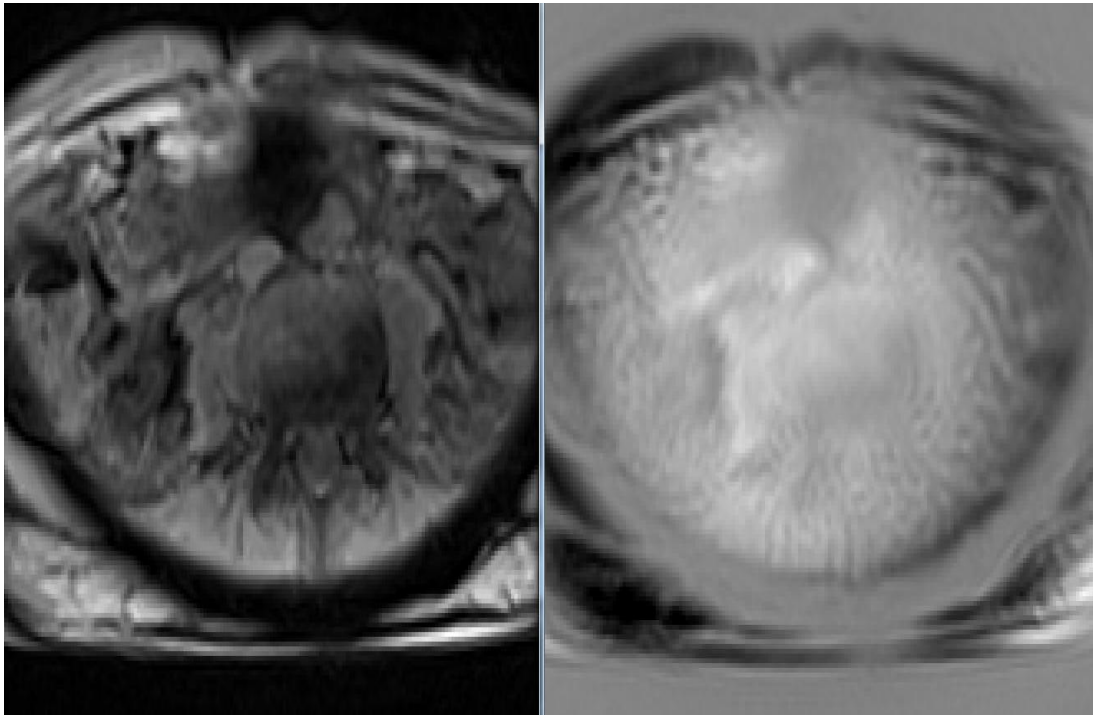
Con un orden $\alpha=0.7$



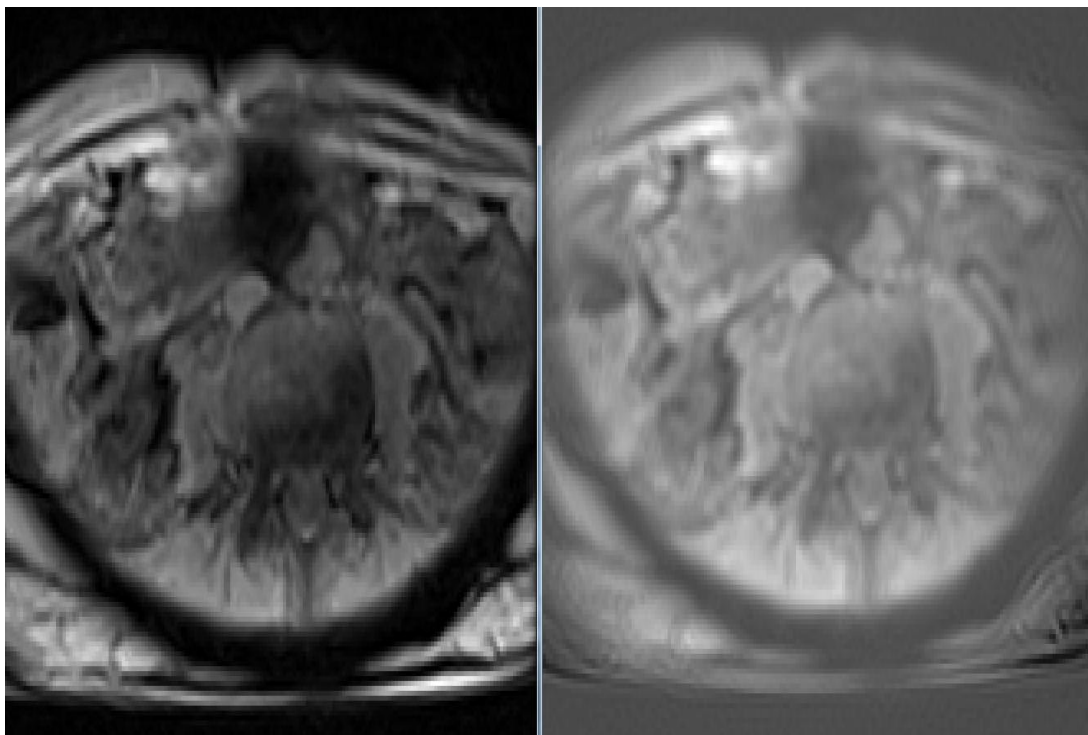
Con un orden $\alpha=0.9$



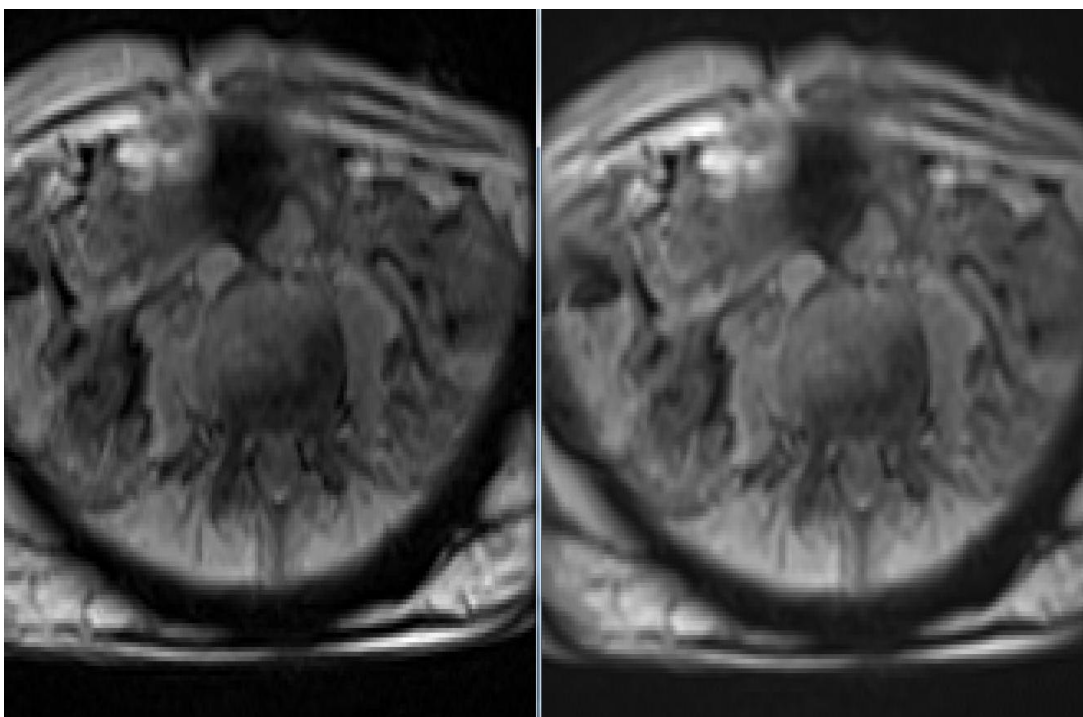
Con un orden $\alpha=0.97$



Con un orden $\alpha=0.99$



Con un orden $\alpha=0.995$



Con un orden $\alpha=0.997$

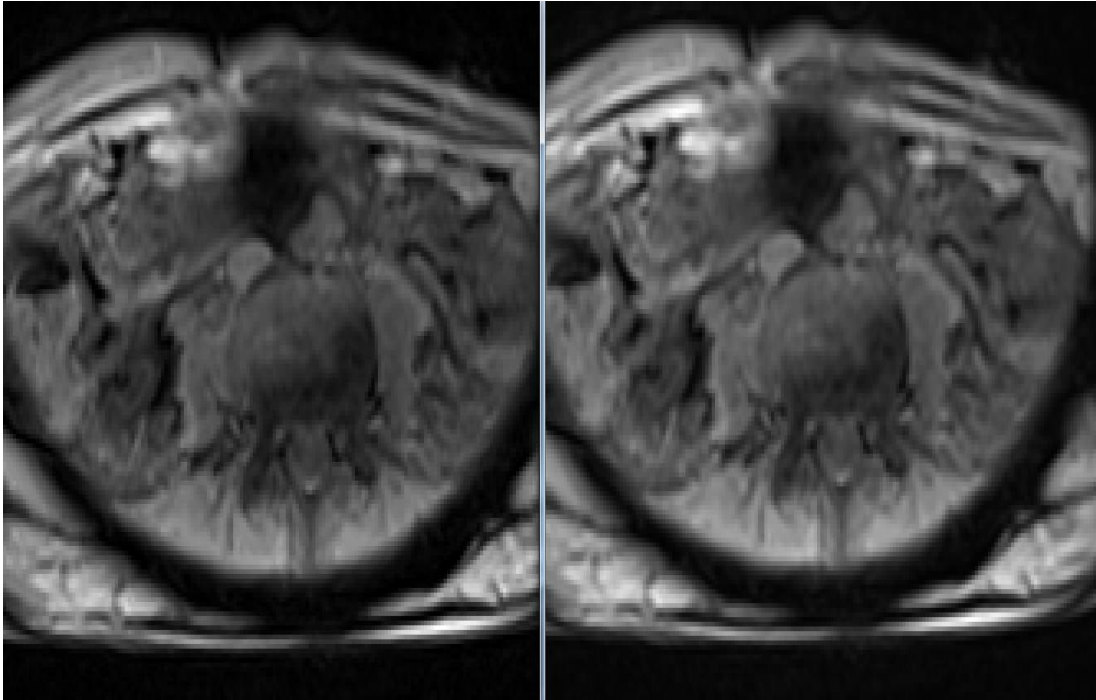


Ilustración 14. Reconstrucción de una IRMN variando el parámetro α

En la ilustración 14 se observa que variando el parámetro alfa (α) en la Transformada de Fourier Fraccional se puede ver la evolución del paquete de onda desde el espacio K hasta el plano donde se forma la imagen y este es muy cercano al orden $\alpha = 1$, esto es debido a que la señal fue analizada cerca de la región de intersección entre el campo lejano o campo Fraunhofer y el campo cercano o campo Fresnel.

Por otro lado, se observa cómo a partir de un valor de $\alpha = 0.97$ se forma la imagen y se elimina el patrón de difracción, esto es debido a que la señal tiene la forma de función rectángulo y la altura de esta función nos da la intensidad de la señal.

Para ver la diferencia entre las dos imágenes se establecen diferentes cortes de intensidad de manera vertical y horizontal a la imagen en diferentes regiones

donde se observa ruido y se analiza el patrón de intensidad de la línea correspondiente como se muestra en la ilustración 15:

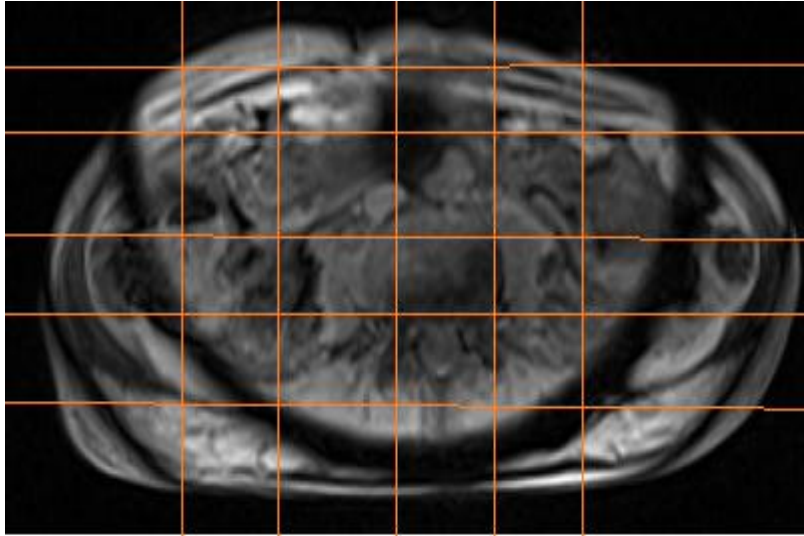


Ilustración 15. Líneas de cortes horizontales y verticales para el análisis de la imagen.

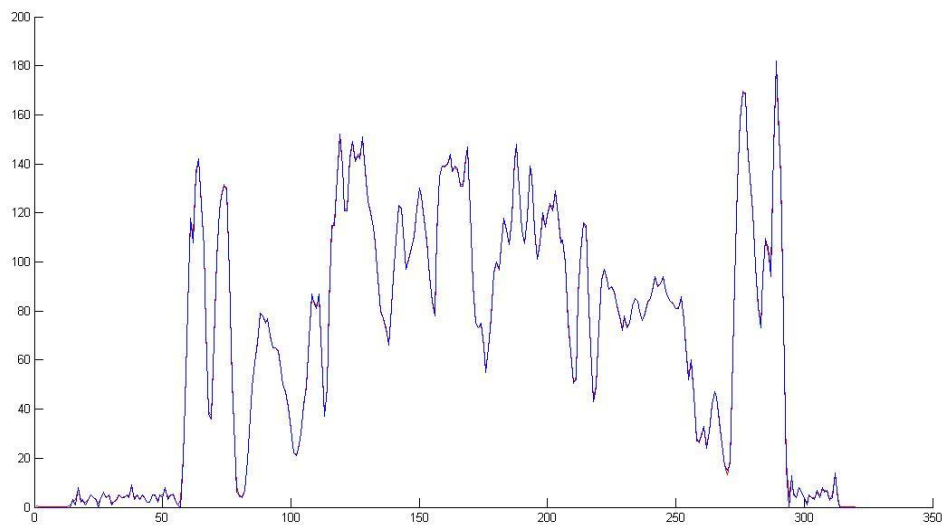


Ilustración 16. Comparación de intensidades para los valores de 1 - 0.997

En la ilustración 16 se observa a simple vista, dado que el orden de reconstrucción entre las dos es muy similar que el espectro de intensidad para ambas re-

construcciones también es muy parecido, sin embargo, realizando una aumento de la ilustración 16 a la parte de ruido la cual se señala en la ilustración 17 y se amplía en la ilustración 18 se observa la diferencia.

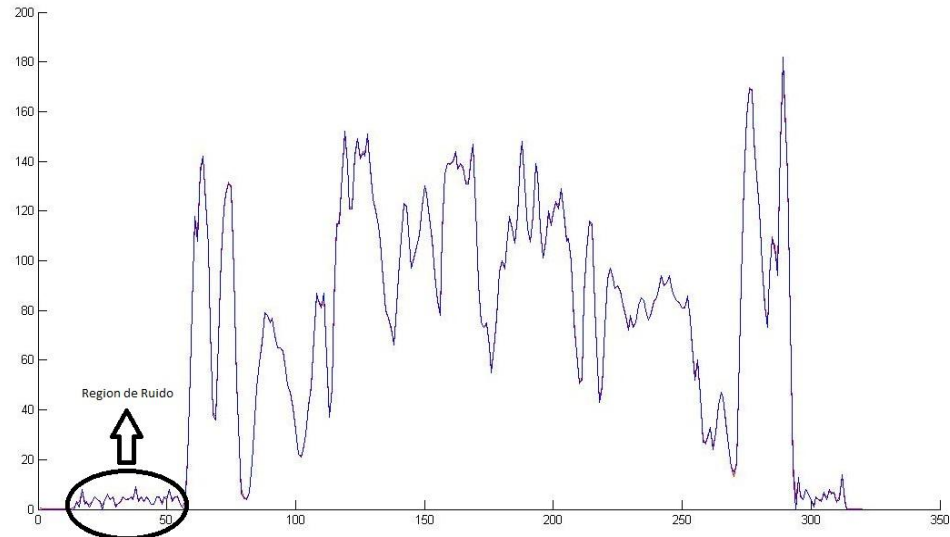


Ilustración 17. Región de Ruido a Ampliar

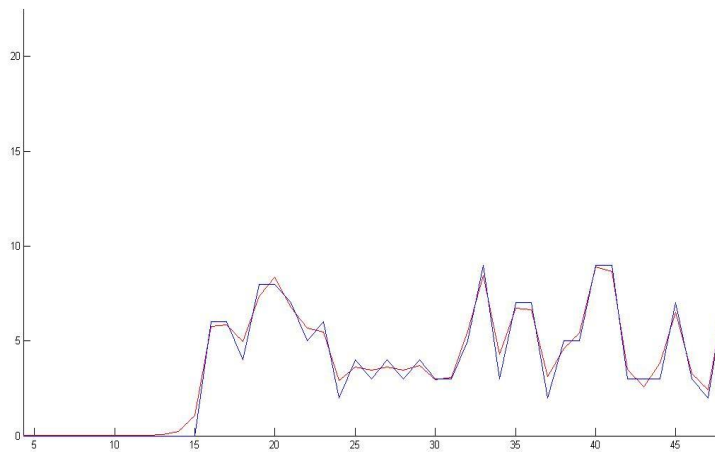
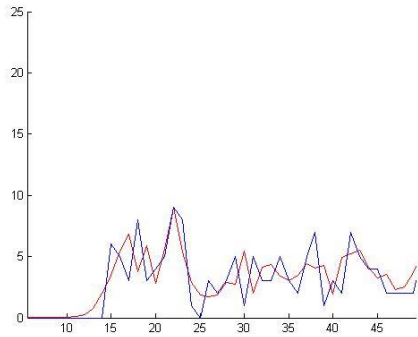
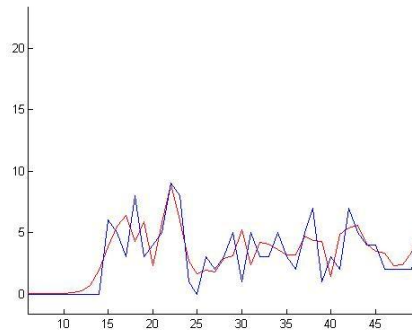


Ilustración 18. Perfil de intensidad de ruido comparando el método convencional (línea azul) con el método de la transformada de Fourier Fraccional (línea roja).

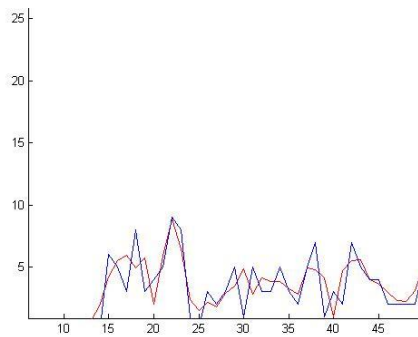
En la ilustración 18 se nota claramente un suavizado en la región del ruido, para analizar cómo cambia dicho suavizado se varía el parámetro α desde el valor 0.991 hasta 1 en la transformada de Fourier Fraccional.



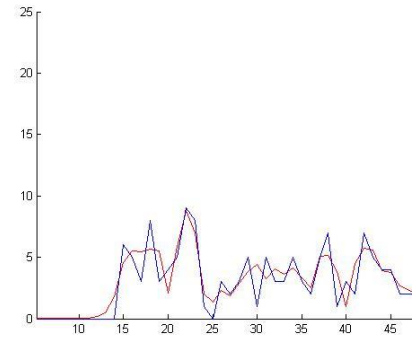
$\alpha=0.991$



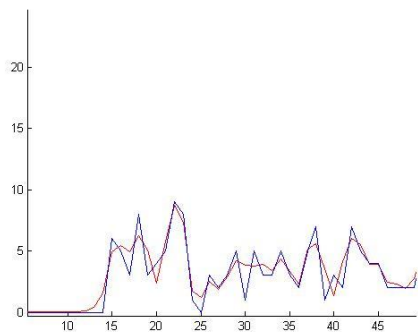
$\alpha=0.992$



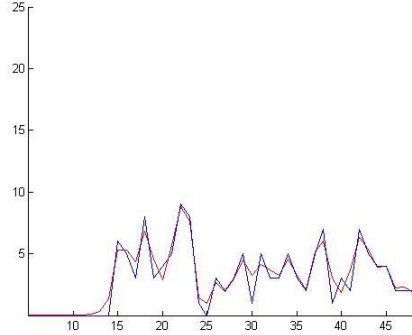
$\alpha=0.993$



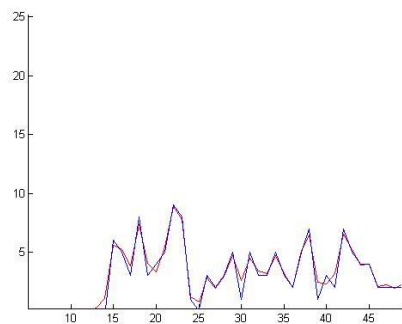
$\alpha=0.994$



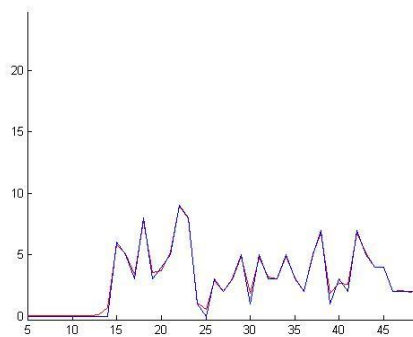
$\alpha=0.995$



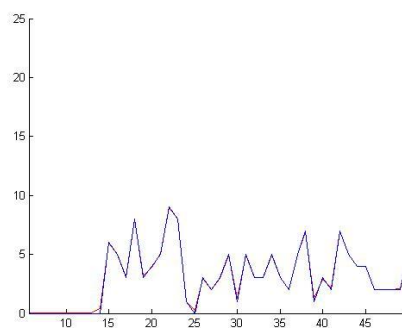
$\alpha=0.996$



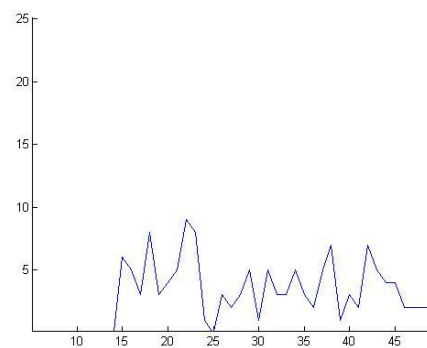
$\alpha=0.997$



$\alpha=0.998$



$\alpha=0.999$



$\alpha=1.000$

Ilustración 19. Variación de ruido en función del parámetro alfa, método convencional (línea azul), método de la transformada de Fourier Fraccional (línea roja).

Para encontrar que existe un valor en el cual la desviación estándar del ruido se reduce como se ve en la ilustración 19, se analizó dicha desviación en un sector donde se encuentra el ruido, dichos valores se grafican en función del parámetro α en la tabla 5.

α	DS del Ruido
0.9910	1.671410
0.9920	1.659635
0.9930	1.646392
0.9940	1.633807
0.9950	1.623635
0.9960	1.616828
0.9970	1.613326
0.9975	1.612555
0.9980	1.612233
0.9985	1.612196
0.9990	1.612294
1	1.612452

Tabla 5. Valores de desviación estándar del ruido para diferentes valores del parámetro α

Después de analizar los valores de la desviación estándar del ruido para una línea horizontal se encuentra que para el valor $\alpha=0.9985$ obtiene el menor valor. Gráficamente se observa en la ilustración 20:

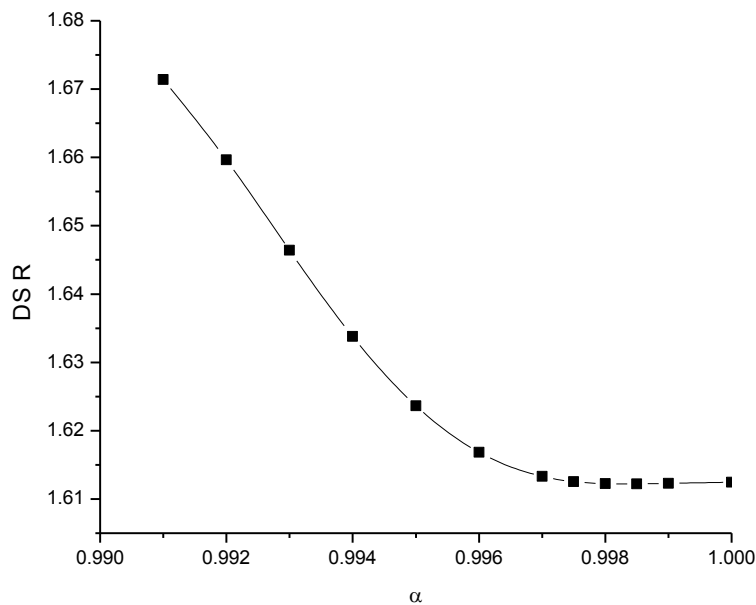


Ilustración 20. Desviación estándar del ruido en función del parámetro α

Ahora el siguiente paso es analizar como varía la desviación estándar en una parte de la señal que sabemos es un tejido homogéneo en función del parámetro α , (Tabla 6):

α	DS señal
0.9910	9.524960
0.9920	9.050427
0.9930	8.635073
0.9940	8.275431
0.9950	7.967104
0.9960	7.707366
0.9970	7.496866
0.9975	7.411263
0.9980	7.339714
0.9985	7.283006
0.9990	7.241880
1	7.208581

Tabla 6. Valores de desviación estándar de la señal para diferentes valores del parametro α

El comportamiento se puede observar de manera grafica en la ilustración 21:

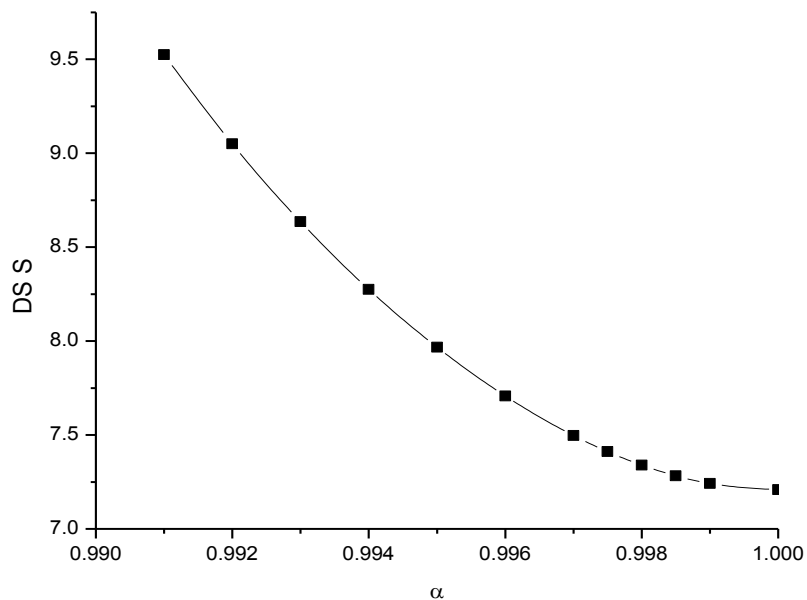


Ilustración 21. Desviación estándar de la Señal en función del parámetro α

Debido que la idea es en lo posible mejorar la calidad de la imagen en cuanto al ruido vamos a analizar los datos para el valor de $\alpha=0.9985$, que es para el valor en el cual se tiene una menor desviación estándar en el ruido y se aumenta la desviación estándar en la señal. Para ello encontraremos la relación señal a ruido para poder decir cual imagen es mejor en función al ruido.

A	Señal	Ruido
0.9985	7.283006	1.6121958
1	7.208581	1.6124515

Tabla 7. Comparación de la relación señal a ruido para los valores 0.9985 y 1

Tomando una línea vertical y realizando el mismo análisis se obtiene:

A	DS Ruido
0.9910	2.398090
0.9920	2.375068
0.9930	2.356339
0.9940	2.342763
0.9950	2.334628
0.9960	2.331428
0.9970	2.331839
0.9975	2.332842
0.9980	2.334060
0.9985	2.335273
0.9990	2.336290
1	2.337199

Tabla 8. Valores de desviación estándar de la ruido para diferentes valores del parámetro α

El comportamiento se puede observar de manera grafica en la ilustración 22:

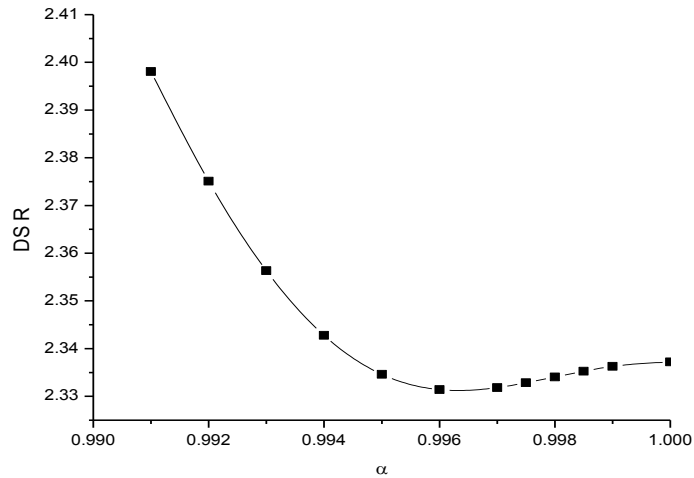


Ilustración 22. Desviación estándar de la Ruido en función del parámetro α

La desviación estándar para la señal en una línea vertical:

A	DS señal
0.9910	7.703770
0.9920	7.664530
0.9930	7.630109
0.9940	7.601442
0.9950	7.579034
0.9960	7.562789
0.9970	7.552012
0.9975	7.548337
0.9980	7.548337
0.9985	7.543654
0.9990	7.542366
1	7.541401

Tabla 9. Valores de desviación estándar de la señal para diferentes valores del parámetro α

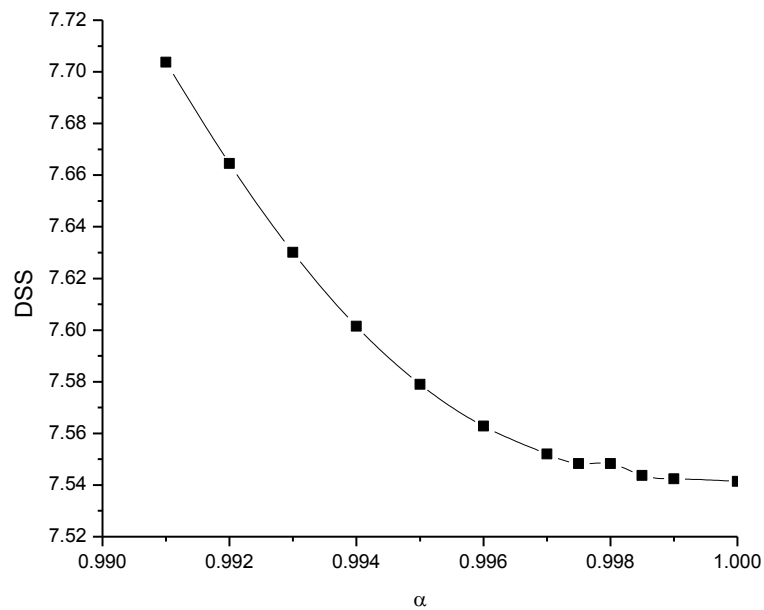


Ilustración 23. Valores de desviación estándar de la señal para diferentes valores del parámetro α

α	señal	ruido	señal/ruido
0.9985	7.543654	2.33527274	3.23030942
1	7.541401	2.33719918	3.22668301

Tabla 10. Comparación de la relación señal a ruido para los valores 0.9985 y 1

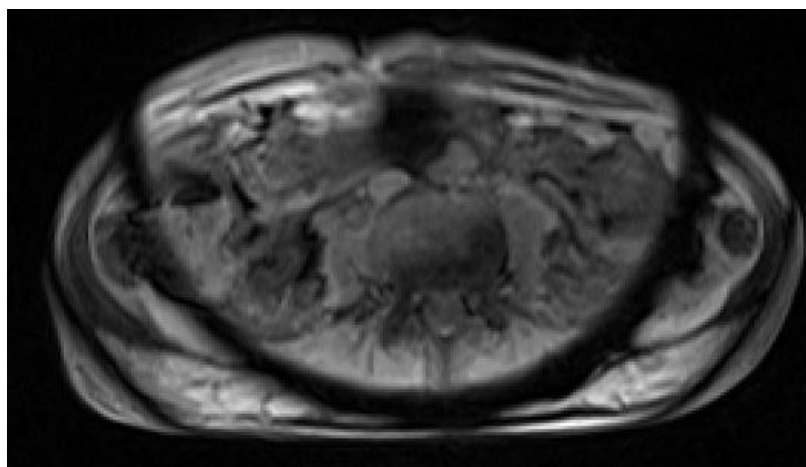


Ilustración 24. Reconstrucción de la imagen para el parámetro 0.9985

Realizando el cálculo de errores y tomando los valores teóricos como los obtenidos con la imagen con reconstrucción convencional podemos decir que:

Para la línea horizontal:

α	DS. señal	DS. ruido
0.9985	7.283006	1.6121958
1	7.208581	1.61245155
porcentaje	1.032448	0.015861

Tabla 11. Comparativo porcentual entre las dos reconstrucciones para la línea 1

Luego para la línea horizontal se obtiene una ganancia en la señal del 1%, una disminución en el ruido de 0.016%.

Para la línea vertical:

α	DS. señal	DS. Ruido
0.9985	7.543654	2.33527274
1	7.541401	2.33719918
porcentaje	0.02987	0.08242508

Tabla 12. Comparativo porcentual entre las dos reconstrucciones para la línea vertical

Tanto para la línea vertical como horizontal se obtienen mejoras en la señal disminución en el ruido y sobre todo la ganancia en la desviación estándar de la señal.

En la sección de anexos se muestran las gráficas para diferentes líneas tanto verticales como horizontales de la imagen y se mira el tipo de comportamiento que se obtiene después de la reconstrucción variando el parámetro α .

6. CONCLUSIONES.

En este trabajo se analizó señales en campo cercano o campo Fresnel, se analizó cómo es el proceso de difracción desde el plano imagen al espacio K y cómo se relaciona dicha propagación con una transformada de Fourier Fraccional.

El Implementar un algoritmo computacional que reconstruye la imagen fue de gran ayuda, pues nos aporta información sobre cómo el ruido no es realmente ruido, y que por el contrario, es información del patrón de difracción. Por otro lado, no se observó un tendencia en el comportamiento para la relación señal a ruido dependiente del parámetro α (ver anexo A) y es más dependiente de la línea del registro que se analiza cómo se ilustra en las ilustraciones 16-19.

En cuanto a la desviación estándar de la señal, esta presenta un comportamiento en el cual decae como se muestra en las graficas del anexo B.

En este trabajo se observa cómo la transformada de Fourier no siempre es la transformada óptima para reconstruir la imagen con la mayor información posible. Se demuestra que en la desviación estándar del ruido adquiere un mínimo entre los valores 0.996 - 0.999(ver ilustración 20) teniendo como resultado el suavizado del ruido.

Finalmente se puede implementar un algoritmo utilizando la Transformada de Fourier Fraccional como un nuevo recurso en la reconstrucción de imágenes de resonancia magnética que dependa de la geometría del paciente quedando esto para futuros estudios.

7. ANEXO A. DESVIACION ESTANDAR DEL RUIDO

Dentro del estudio de datos se analizarán diferentes líneas quedando en el capítulo de resultados los valores para solo una línea, a continuación se presentan las graficas para la desviación estándar del ruido (DSR) en la ilustración 25, donde se calcula la DSR en función del parámetro α en la transformada de Fourier Fraccional:

Para las líneas horizontales:

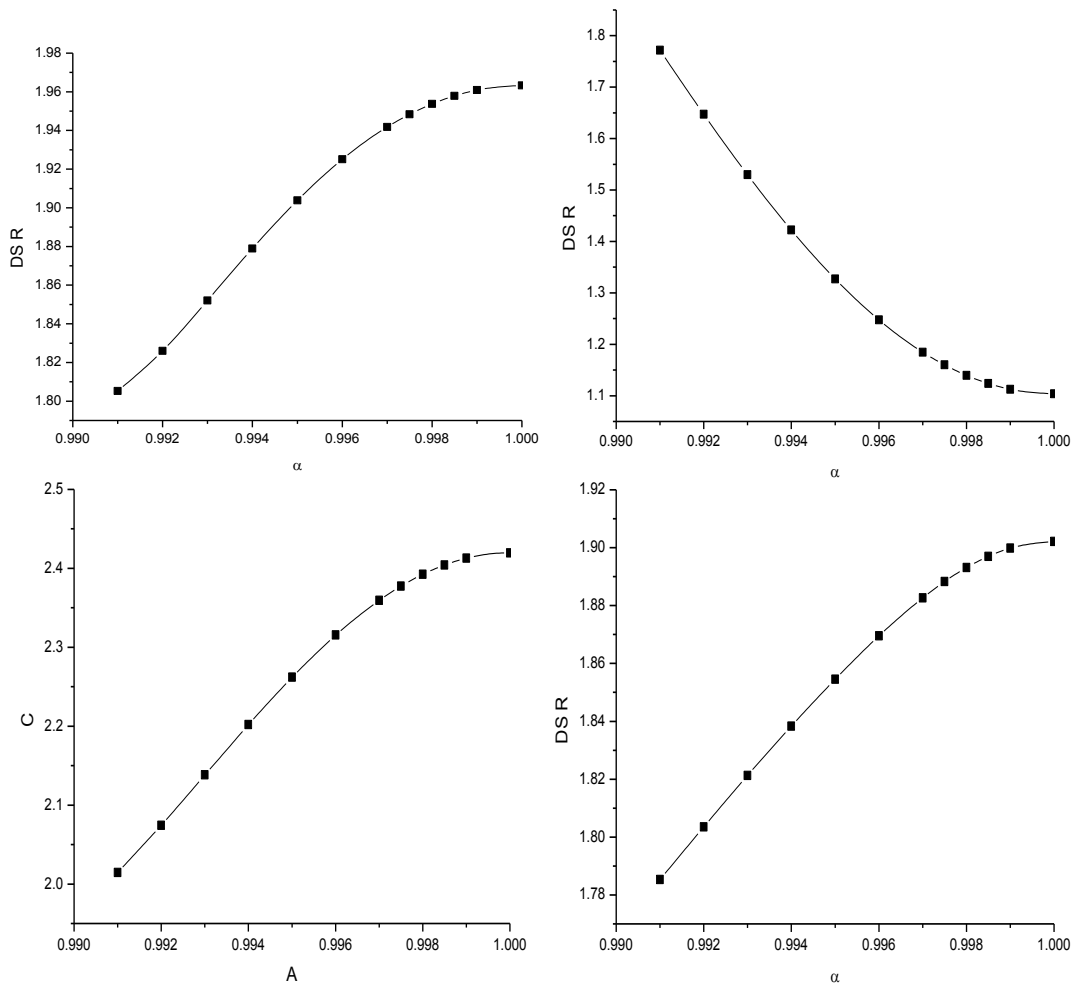


Ilustración 25. Desviación del ruido para diferentes líneas horizontales.

Cada grafica corresponde a la DSR para diferentes líneas horizontales las cuales se señalaron en la ilustración 15.

Par las líneas verticales se tienen que la DSR en función del parámetro α corresponde gráficamente a:

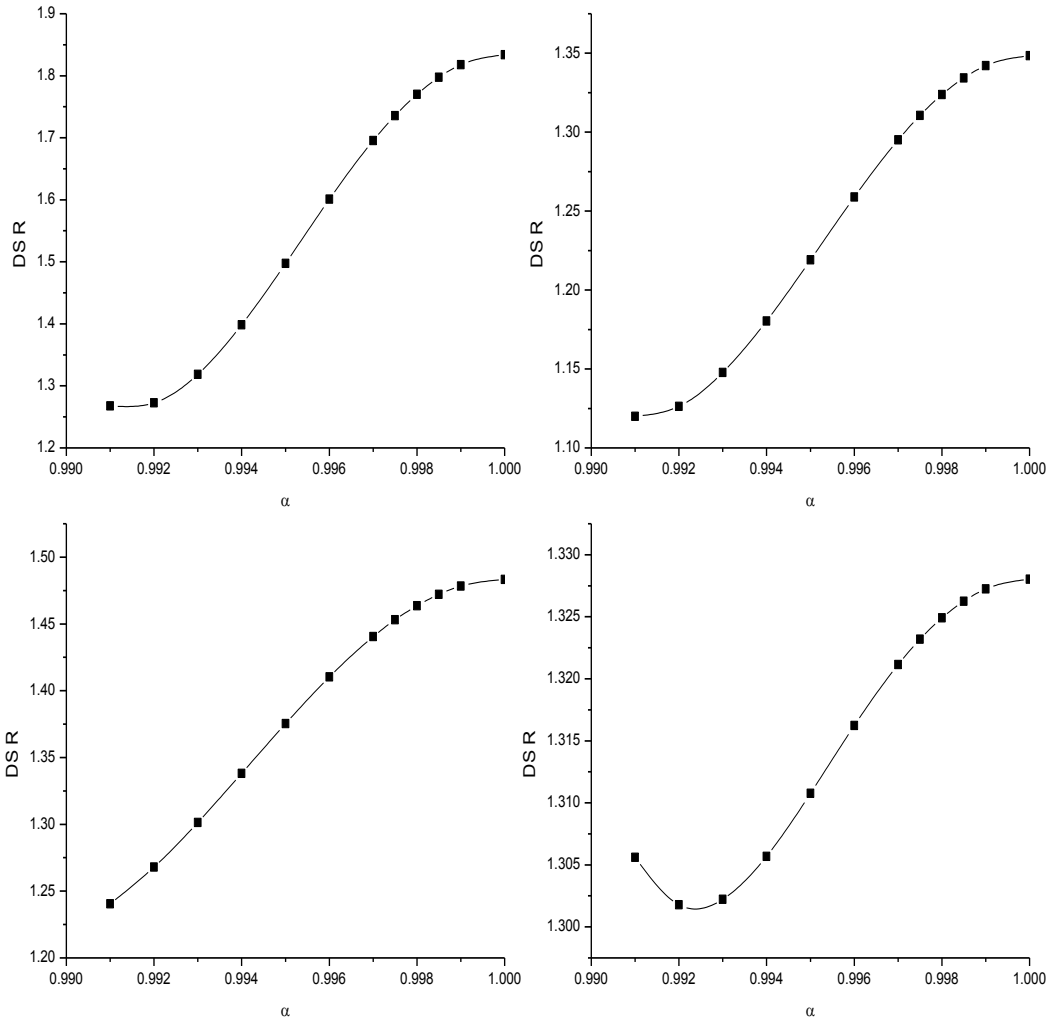


Ilustración 26. Desviación del ruido para diferentes líneas verticales

8. ANEXO B. DESVIACION ESTANDAR LA SEÑAL.

Como se menciona anteriormente dentro del estudio de datos se analizaron diferentes líneas quedando en el capítulo de resultados los valores para solo una línea, a continuación se presentan las graficas para la desviación estándar de la señal (DSS) par diferentes líneas, en la ilustración 27 se muestran para 4 diferentes cortes donde se calcula la DSS en función del parámetro α en la transformada de Fourier Fraccional:

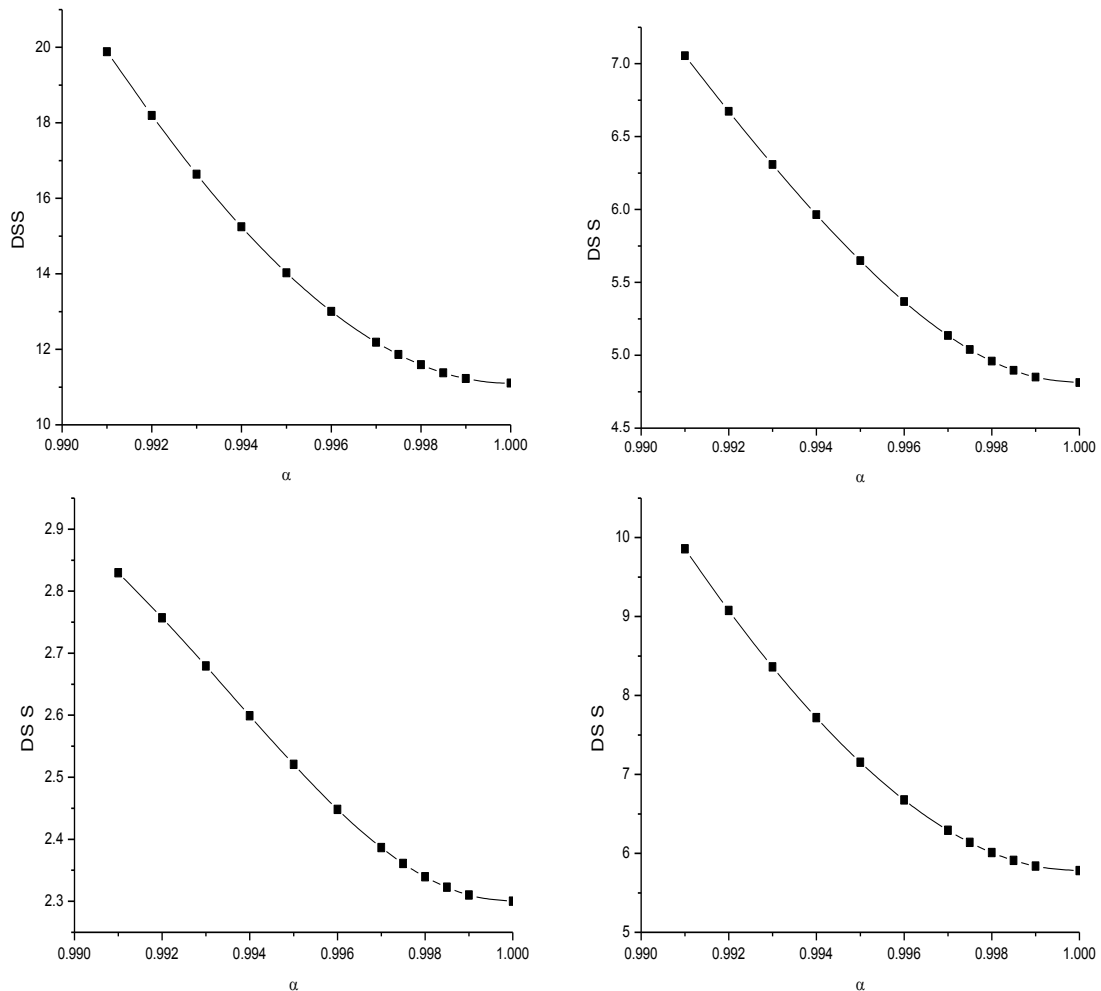


Ilustración 27. Desviación de la señal para diferentes líneas horizontales

Para las líneas verticales se tienen que la DSS en función del parámetro α varía según la línea que se analiza y corresponde gráficamente a:

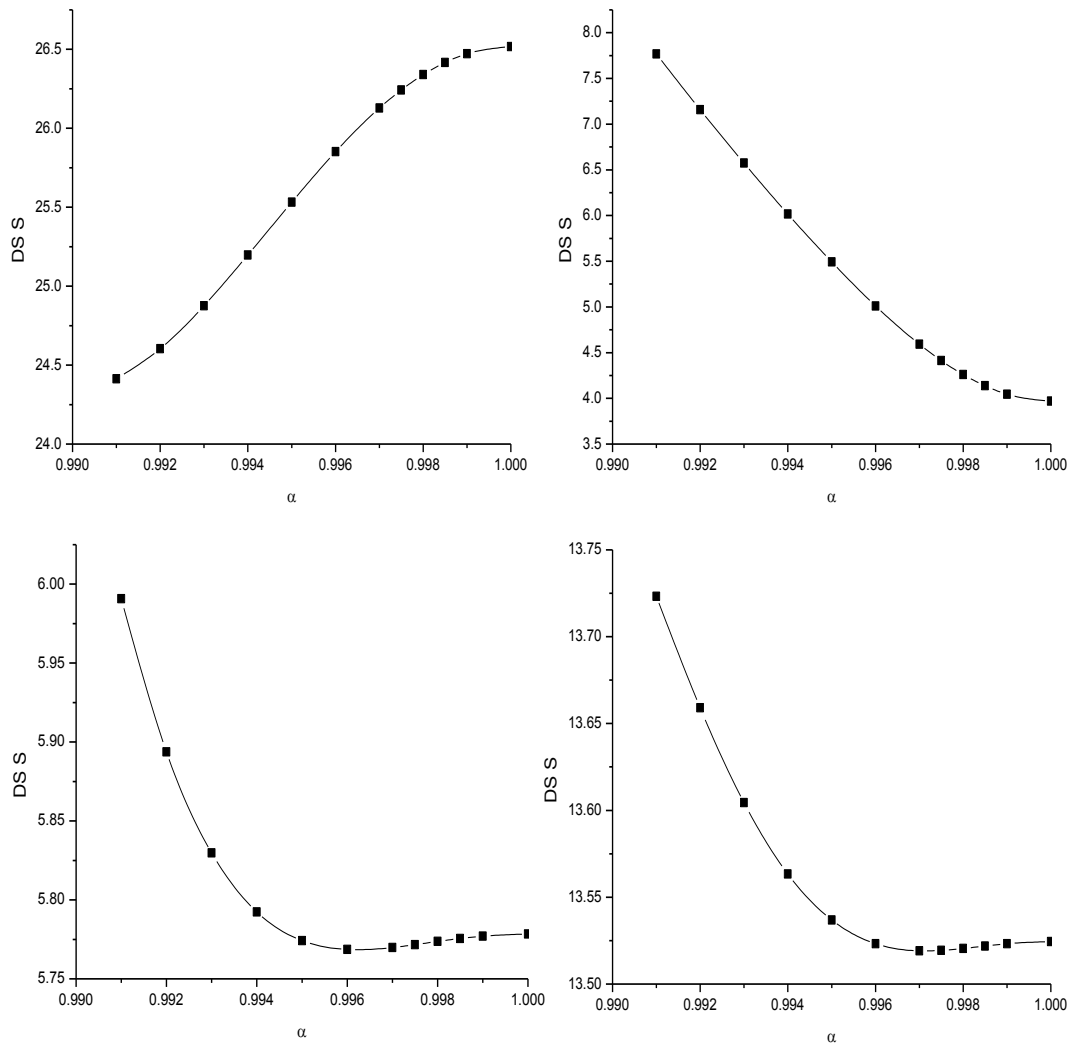


Ilustración 28. Desviación de la señal para diferentes líneas verticales

9. ANEXO C. RELACIÓN SEÑAL A RUIDO.

A continuación se presentan las graficas para la relación señal a ruido (R SR), en la ilustración 29 se presentan 4 graficas distintas correspondiendo cada una a diferentes líneas de corte horizontal de la imagen, donde se calcula la R SR en función del parámetro α en la transformada de Fourier Fraccional:

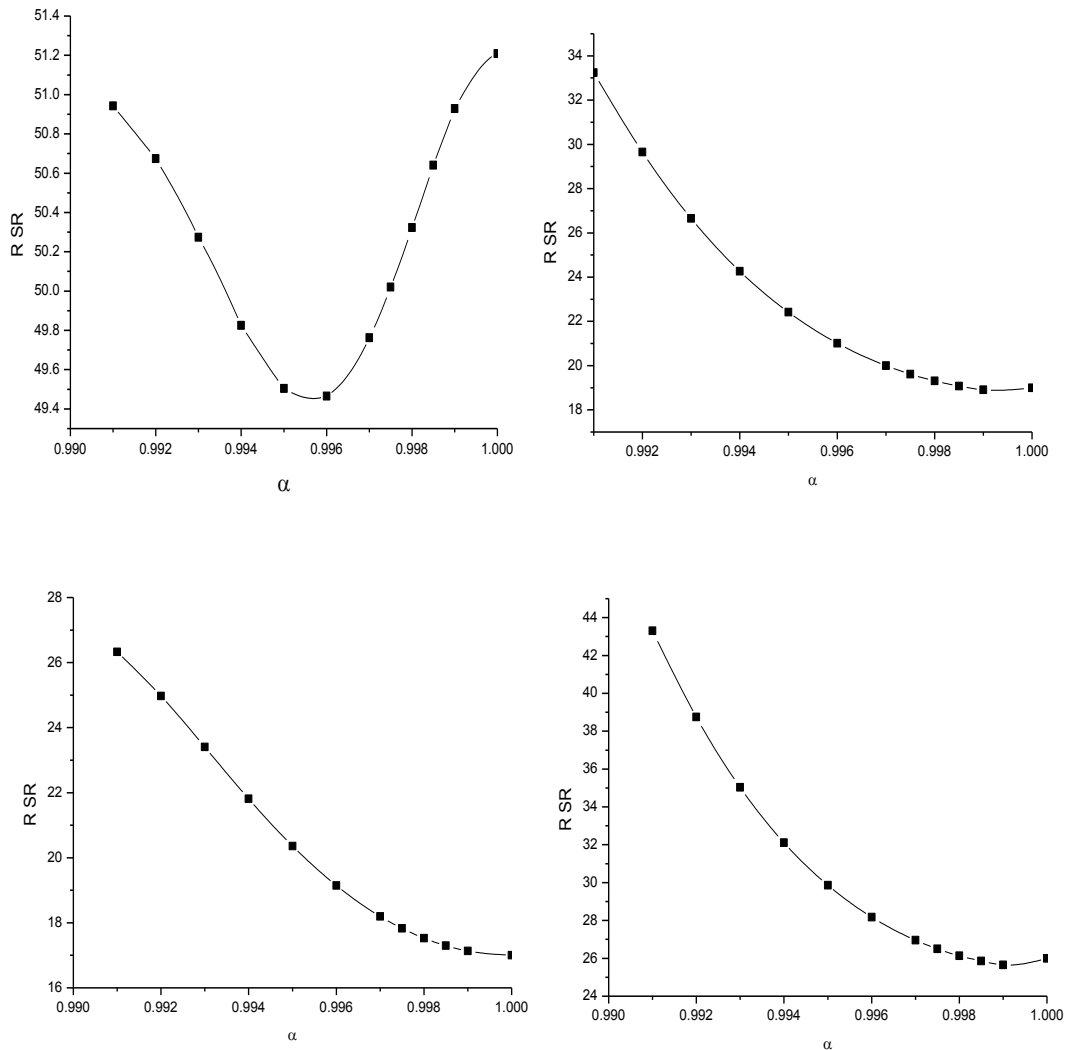


Ilustración 29. Relación señal a ruido para diferentes líneas horizontales.

Para los cortes verticales se tienen que la R SR en función del parámetro α para diferentes líneas corresponde gráficamente a:

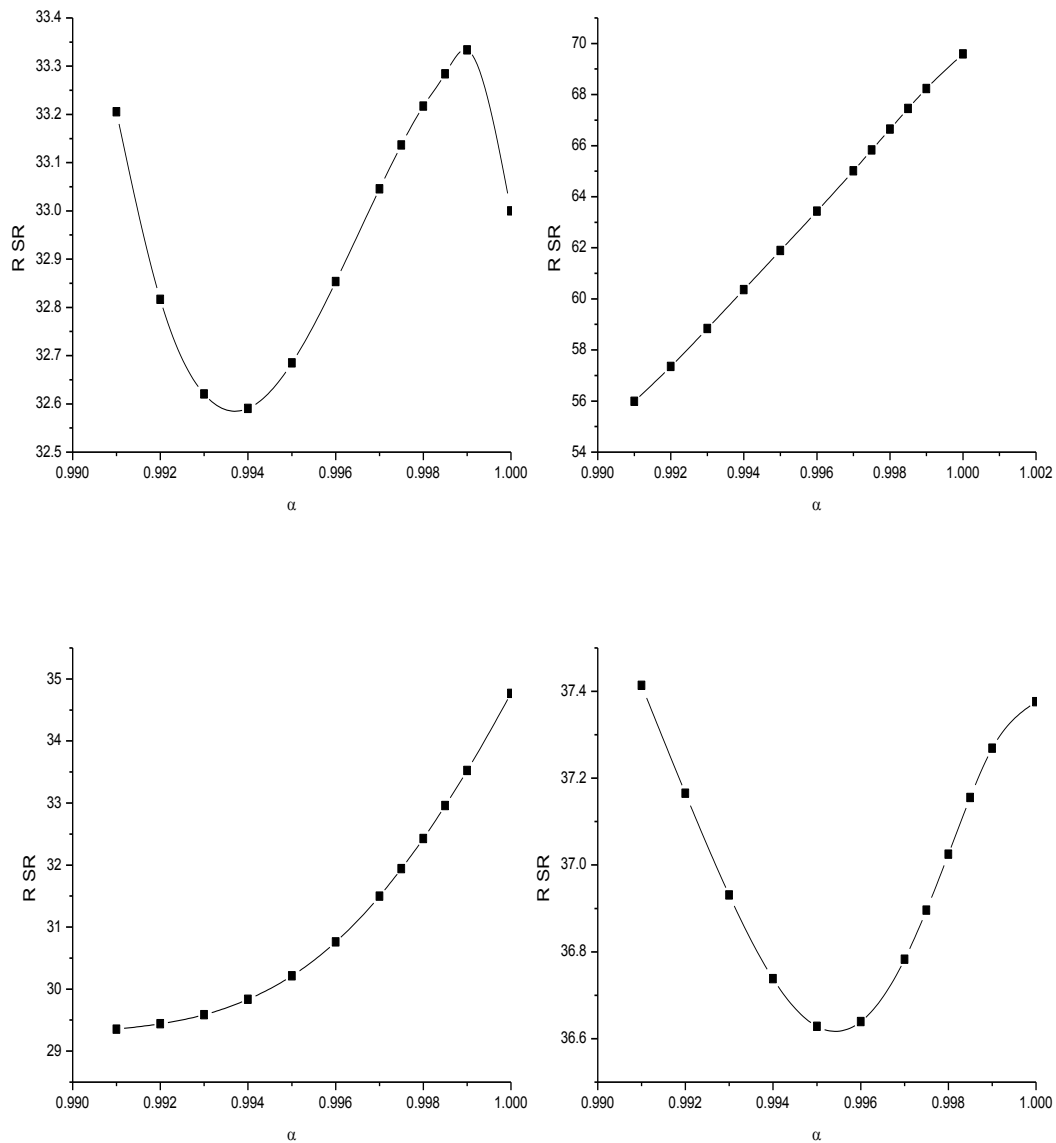


Ilustración 30. Relación señal a ruido para diferentes líneas verticales.

8. REFERENCIAS

- [1] Bloch, F. Nuclear induction. *Phys. Rev.* 70(7-8): 460–474, (1946)
- [2] Purcell E.M., Torrey H.C., Pound R.V. Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid. *Phys. Rev.* 69(1-2):37-38, (1946).
- [3] Lauterbur P.C. Image Formation by Induced Local Interactions: Examples Employing. *Nuclear Magnetic Resonance. Nature*, 242:190-191, (1973).
- [4] Borthakur Arijitt. Quantifying Sodium in the Human Wrist in vivo by using MR Imaging. *RADIOLOGY* 224 (2):598-602. (2002)
- [5] Komoroski W. *RMN*, 38 (2) :275-278
- [6] Funama Y, Awai K, Nakayama Y, Kake K, Nagasue N, Shimamura M, et al. Radiation dose reduction without degradation of low-contrast detectability at abdominal multisection CT with a low-tube voltage technique: phantom study. *Radiology*; 237:905–10. (2005)
- [7] Xie J, Peng S, Brower N, Pourmand N, Wang SX, Sun SH: One-pot synthesis of monodisperse iron oxide nanoparticles for potential biomedical applications. *Pure and Applied Chemistry*, 78:1003-1014, (2006)
- [8] Vaughan J. T, 7T Vs 4T: Power, Homogeneity and Signal to Noise Comparison in Head Images MRM; 46:24-30 (2001)
- [9] Abduljilil J. T., Kangarlu A., Zhang X. Acquisition of Human Multislice MR Images at 8T JCAT, 23(3)-335-340. (1999).
- [10] Proyecto Neurospin, Comisión de Energía Atómica Francesa; CST European User Group Meeting 17-19, Munich, Germany, (2011)
- [11] Gili Jaume. Apuntes Introducción biofísica a la resonancia magnética aplicada. Universidad Autónoma de Barcelona. (2009).
- [12] Melissinos Adrian, “Experiments in modern physics”, cap 7, (1966).

- [13] E. Mark Haacke. Magnetic Resonance Imaging Physical Principles and Sequence Design. ISBN 0-471-35128-8, by John Wiley & Sons Inc Publication, (1999).
- [14] Rojas R. Rafael. Tesis Antena Peres Volumétrica para la Técnica Ultrarrápida Sence. Universidad Autónoma Metropolitana. Tesis Maestría en Ingeniería Biomédica.
- [15] Robin A de Graaf. IN Vivo NMR Spectroscopy: Principles and techniques. Second edition. Editorial WILEY. (2007).
- [16] Abragam. Principles of Nuclear Magnetism. Oxford University. (1983).
- [17] C.P. Slichter. Principles of Magnetic Resonance. Springer-Verlag, (1978).
- [18] Rodrigo Ignacio. Brevis Vergara. Tesis Transformada de Fourier Fraccionaria en Imágenes de Resonancia Magnética. Universidad de Santiago de Chile. Facultad de Ciencia. (2011)
- [19] D.I. Hoult, R.E. Richards. "The signal-to-noise ratio of the nuclear magnetic resonance experiment," *J. Magn. Reson.* 24, 71 (1976).
- [20] Gantes Cabrera Rosa. Técnicas de Reconstrucción de Imagen en Resonancia Magnética. Maestría en física biomédica UCM (2008-2009).
- [21] Vadim Kuperman. Magnetic Resonance Imaging. Physical Principles and Applications. University of Chicago. © Academic Press (2000).
- [22] J. Pauly, P. Le Roux, D. Nishimura, A. Macovski. "Parameter relations for the Shinnar-Le Roux selective excitation pulse design algorithm." *IEEE Trans. Med. Imag.* 10, 53 (1991).
- [23] R.N. Bracewell. The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill (1986).
- [24] D.B. Tveig. "The k-trajectory formulation of the NMR imaging process with applications in analysis and synthesis of imaging methods", *Med. Phys.* 10, 610 (1983).
- [25] Mary I Boas. Mathematical Methods in the Physical Sciences. © by John Wiley & Sons Inc Publication, (1983).

- [26] George B. Arfken, Hans J Weber. Mathematical Methods for Physicists. Sixth edition © Elsevier Academic press (2005).
- [27] Andrews, L. C., Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians, MacMillan Publishing Co. New York, NY. (1985).
- [28] Eugene Butrov. Mathematical Physics. © Addison-Wesley publishing company (1968).
- [29] V. Namias, J. Inst. Math. Appl. 25 -241, (1980).
- [30] P. Pellat-Finet, Opt. Lett. 19-1388, (1994).
- [31] P. Pellat-Finet and G. Bonnet, Opt. Comm. 111 -141, (1994).
- [32] P. Pellat-Finet, C. R. Acad. Sci. Paris, 327-1269, (1999).
- [33] C. O. Torrez, Y. Torres. Óptica Fraccional de Fourier. Universidad Industrial de Santander.
- [34] Torres Amarís, Rafael. Tratamiento de Señales por Transformación de Fourier Fraccionaria. Aplicaciones a la Holografía Sintética y al Filtrado Óptico. Universidad Industrial de Santander. (2008).
- [35] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, and L. B. Almeyda, Journal of modern optics. 41 -1037, (1994).
- [36] Z. Lizarazo, Y. Torres. Encriptación de imágenes usando la transformada de Fourier Fraccional. RCF. (02-2003).
- [37] J. Bronzino. Electroimán superconductor. Ed. "The Biomedical Engineering Handbook". CRC Press (1999).
- [38] <http://www.medicalexpo.es/prod/toshiba-medical-systems/bobinas-matrices-resonancia-magnetica-torax-abdomenes-70354-428397.html>. Visitada el 21-01-2014 a las 14.30.

