

**SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE RIEMANN PARA UN MODELO DE TRÁFICO
2-FASES CON VELOCIDAD ACOTADA**

JOSELÍN MONTEALEGRE MARTÍNEZ

Código 830215

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2013**

**SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE RIEMANN PARA UN MODELO DE TRÁFICO
2-FASES CON VELOCIDAD ACOTADA**

JOSELÍN MONTEALEGRE MARTÍNEZ

**Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Ciencias Matemáticas**

Director

**PhD. LEONARDO RENDÓN ARBELÁEZ
Profesor del Departamento de Matemáticas**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C
2013**

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

BOGOTÁ D.C, Agosto de 2013

DEDICADO A....

...Indudable y eternamente a toda mi amada familia.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis agradecimientos al profesor Leonardo Rendón Arbeláez, por sus importantes cursos durante el programa de maestría, por dirigir el presente trabajo y sus valiosos conocimientos.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como fin, construir la solución general al problema de Riemann para un sistema 2×2 de leyes de conservación hiperbólico, asociado a un modelo de tráfico vehicular 2-fases con velocidad acotada.

Palabras clave: *Problema de Riemann, Leyes de conservación, tráfico 2-fases.*

ABSTRAC

This work has as a goal, to build the general solution to the Riemann problem for a 2×2 system of hyperbolic conservations laws, associated to vehicular traffic model of 2-fases with bounded speed.

Keywords: *Riemann problem, hyperbolic conservations laws, vehicular traffic model of 2-fases.*

ÍNDICE GENERAL

Introducción	10
1. Sistemas de leyes de conservación hiperbólicos	11
1.1. Nociones básicas	11
1.2. Sistemas lineales y efectos de la no-linealidad	15
1.3. El problema de Riemann	22
1.3.1. Ondas elementales	25
1.3.2. Solución general al problema de Riemann	28
1.3.3. Soluciones autosimilares	30
2. El modelo de tráfico 2-fases con velocidad acotada	32

2.1. Un primer modelo escalar de tráfico vehicular	32
2.2. Modelos de tráfico con transición de fases	34
2.3. Notación y algunos resultados	36
3. Solución al problema de Riemann para el modelo de tráfico 2-fases con velocidad acotada	40
Conclusiones	52
Bibliografía	53

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se busca realizar una aplicación de los sistemas 2×2 de leyes de conservación hiperbólicos, al modelamiento de los flujos de tráfico vehicular. Para tal fin haremos una revisión detallada sobre algunos conceptos básicos de la teoría de sistemas de leyes de conservación hiperbólicos estudiados en [2] y luego presentaremos un modelo de tráfico introducido en [6] el cual describe un fenómeno llamado transición de fases.

Más precisamente nuestro objetivo es construir la solución general al problema de Riemann para un sistema 2×2 de leyes de conservación hiperbólico, el cual representa un modelo de tráfico 2- fases con velocidad acotada.

En un primer capítulo, se exponen las nociones básicas y necesarias de la teoría clásica de los sistemas $n \times n$ de leyes de conservación hiperbólicos para abordar el problema. En el segundo capítulo se presenta el modelo de tráfico que pretendemos estudiar junto con sus principales características. El tercer y último capítulo lo dedicamos a la construcción de la solución para el problema de Riemann asociado al modelo de tráfico en cuestión. Finalmente algunas conclusiones y consideraciones sobre el desarrollo del presente trabajo.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DE LEYES DE CONSERVACIÓN HIPERBÓLICOS

En este primer capítulo, se pretende dar un recorrido sobre los conceptos básicos de la teoría de sistemas $n \times n$ de leyes de conservación hiperbólicos. Destacaremos cualidades para los sistemas lineales y discutiremos algunos efectos para los no-lineales. Seguidamente se presenta el problema de Riemann y la construcción de su solución general. Con lo anterior en mente podremos enmarcar el contexto y los elementos necesarios para lograr nuestro objetivo general.

1.1. Nociones básicas

Definición 1. *Una ley de conservación escalar en el espacio de una dimensión, es una ecuación en derivadas parciales de primer orden de la forma*

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{1.1}$$

Aquí $u = u(t, x)$ es llamada cantidad conservada y f el flujo. La variable t denota tiempo, mientras x es una variable unidimensional. Ecuaciones de este tipo modelan fenómenos provenientes de los flujos de tráfico vehicular, así que de esto tomaremos partido.

Transponiendo el término $f(u)_x$ al otro lado de la igualdad en (1.1) e integrando en ambos lados sobre un intervalo $[a, b]$ obtenemos que

$$\int_a^b u_t(t, x) dx = - \int_a^b f(u(t, x))_x dx, \quad (1.2)$$

usando la regla de Leibniz en el lado izquierdo y el teorema fundamental de cálculo en el lado derecho de la igualdad (1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(t, x) dx &= f(u(t, a)) - f(u(t, b)) \\ &= [\text{flujo en } a] - [\text{flujo en } b]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si consideramos a u como la densidad de una sustancia, la relación (1.3) establece que el cambio en el tiempo de la densidad de masa contenida en un intervalo $[a, b]$ es igual al flujo de entrada menos el flujo de salida de dicha sustancia.

La forma cuasilineal de (1.1) puede ser escrita como

$$u_t + \mathbf{a}(u)u_x = 0, \quad (1.4)$$

donde $\mathbf{a} = f'$ es la derivada de f .

Para soluciones suaves, las ecuaciones (1.1) y (1.4) son equivalentes. Sin embargo, si u tiene un salto en un punto $\xi \in [a, b]$, entonces en el lado izquierdo de (1.4) habrá un producto entre una función discontinua $\mathbf{a}(u)$ y una derivada distribucional u_x . En general, tal producto no está bien definido dentro de las funciones continuas.

Así pues, trabajando con la ecuación (1.1) debemos considerar soluciones discontinuas, interpretadas en el sentido distribucional.

Definición 2. Sean $u = u(t, x)$, $f(u)$ funciones localmente integrables en el plano (t, x) . Se dice que u es una solución débil de (1.1) si

$$\int \int \{u\phi_t + f(u)\phi_x\} dxdt = 0, \quad (1.5)$$

para toda función continuamente diferenciable con soporte compacto $\phi \in C_c^1$.

A la luz de la anterior definición, debemos considerar la solución de (1.1) en el sentido distribucional.

Ejemplo 1. (El modelo de tráfico LWR). Sea $\rho(t, x)$ la densidad de carros sobre una carretera en un punto x y un tiempo t . Por densidad haremos referencia la cantidad de carros por kilómetro, y por simplicidad asumamos que ρ es continua y que la velocidad V solamente depende de la densidad, es decir, $V = V(\rho)$, con $\frac{dV}{d\rho} < 0$.

Dados dos puntos a, b distintos sobre la carretera, se cumple que

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho_t(t, x) dx &= \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(t, x) dx = [\text{flujo en } a] - [\text{flujo en } b] \\ &= V(\rho(t, a)) \cdot \rho(t, a) - V(\rho(t, b)) \cdot \rho(t, b) = - \int_a^b (V(\rho)\rho)_x dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Como (1.6) se tiene para todo a, b , esto sugiere que satisface la ley de conservación.

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho V) = 0,$$

donde ρ es la cantidad conservada y $f(\rho) = V(\rho)\rho$ es la función de flujo.

Definición 3. Un sistema de leyes de conservación es un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \frac{\partial}{\partial x} [f_1(u_1, u_2, \dots, u_n)] = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t} u_n + \frac{\partial}{\partial x} [f_n(u_1, u_2, \dots, u_n)] = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Donde $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ es un vector en \mathbb{R}^n y $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ es una aplicación diferenciable de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

Luego, haciendo

$$A(u) \doteq Df(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

la matriz Jacobiana $n \times n$ de la aplicación f en el punto u , podemos escribir el sistema (1.7) en la forma cuasilineal

$$u_t + A(u) u_x = 0. \quad (1.9)$$

Por simplicidad en la notación haremos referencia a un sistema de leyes de conservación definido en (1.7) como

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.10)$$

y condición inicial al dato

$$u(0, x) = \bar{u}(x). \quad (1.11)$$

El problema de valor inicial (1.10), (1.11) es llamado *problema de Cauchy*. Una función $u = u(t, x) \in C^1$ es una solución clásica para el sistema (1.10) si y solamente si es solución de (1.9). Para el sistema conservativo (1.10) podemos considerar soluciones débiles $u \in L^1$ en el sentido distribucional, conforme a la condición (1.5).

Además, diremos que el sistema de leyes de conservación (1.9) es estrictamente hiperbólico si para toda u , la matriz Jacobiana $A(u) \doteq Df(u)$ tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \dots < \lambda_n(u)$.

En este caso, podemos encontrar bases de vectores propios izquierdos y derechos respectivamente como $\{l_1, \dots, l_n\}$ y $\{r_1, \dots, r_n\}$ tales que

$$|r_i| = 1, \quad l_i \cdot r_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.12)$$

Los vectores propios izquierdos son vectores fila, mientras los derechos son vectores columna. Así, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ e $i = 1, \dots, n$ se tiene que

$$A(u)r_i(u) = \lambda(u)r_i(u), \quad l_i(u)A(u) = \lambda(u)l_i(u).$$

1.2. Sistemas lineales y efectos de la no-linealidad

Consideremos el problema de valor inicial para una ley de conservación escalar

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1.13}$$

$$u(0, x) = \bar{u}(x). \tag{1.14}$$

En el caso especial cuando la función de flujo es $f(u) = \lambda u + c$, con $\lambda, c \in \mathbb{R}$ la ecuación (1.13) se reduce a

$$u_t + \lambda u_x = 0. \tag{1.15}$$

El problema de Cauchy (1.13)-(1.14) admite la solución explícita

$$u(t, x) = \bar{u}(x - \lambda t), \tag{1.16}$$

la cual adquiere la forma de una onda viajera con velocidad constante $\lambda = f'(u)$, ver figura 1.1. Si $\bar{u} \in C^1$, entonces la función definida por (1.16)

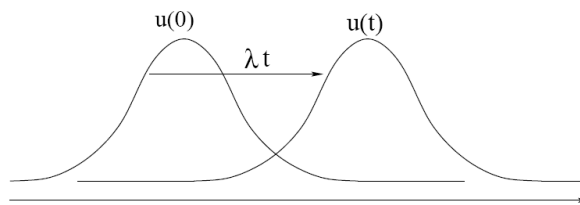


Figura 1.1: Solución del problema lineal (1.13)-(1.14), la cual consiste de una onda viajera con velocidad constante λ .

es una solución clásica.

De otro lado, si la condición inicial \bar{u} no es diferenciable y solamente se tiene que $\bar{u} \in L^1_{loc}$, entonces la función u deberá entenderse como una solución débil en el sentido distribucional.

Ahora, consideremos el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$u_t + Au_x = 0, \quad u(0, x) = \bar{u}(x), \quad (1.17)$$

donde A es una matriz hiperbólica $n \times n$, con valores propios reales $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ y vectores propios r_i, l_i escogidos como antes. De esta forma, (1.17) consiste de n problemas escalares de Chauchy, los cuales pueden ser resueltos de forma separada, de igual forma que el problema (1.13)-(1.14). Así pues, la función

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i(x - \lambda t) r_i, \quad (1.18)$$

es la solución explícita para (1.17), donde $\bar{u}_i(x - \lambda t)$ es la solución del i -ésimo problema (1.13)-(1.14). Además, su perfil inicial puede ser descompuesto como la suma de n ondas, cada una viajando con una velocidad característica $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ver figura 1.2.

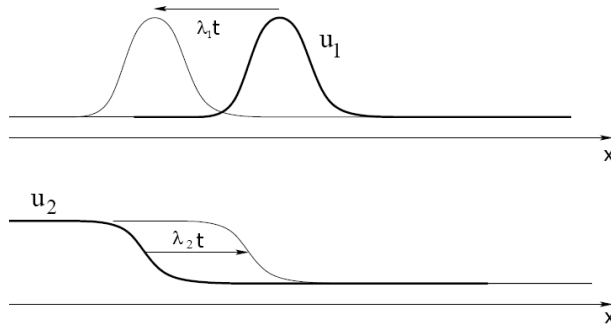


Figura 1.2: Solución del problema hiperbólico (1.17), la cual consiste en la superposición de n ondas, donde cada una de estas es la solución del i -ésimo problema (1.13)-(1.14).

En el caso general cuando la matriz A dependa de u , importantes complicaciones podrán aparecer sobre las soluciones, a saber:

- i) Debido a que ahora los valores propios λ_i dependen de u , la solución podrá variar en el tiempo generando ondas de choque en un tiempo finito, ver figura 1.3.

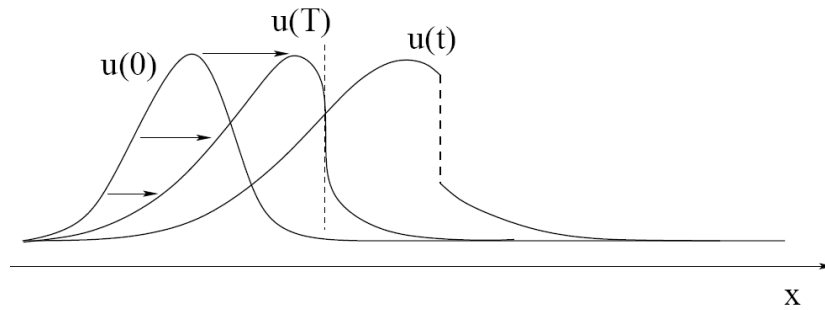


Figura 1.3: Si la velocidad de propagación depende de u , entonces el perfil de la solución cambia en el tiempo y puede formar ondas de choque en un tiempo finito T . Tal fenómeno es característico en el problema de Cauchy para los sistemas de leyes de conservación, incluso si el dato inicial es suave.

- ii) Los vectores propios r_i también dependen de u luego, podrán ocurrir interacciones entre diferentes ondas a lo largo del tiempo, generando nuevas ondas, ver figura 1.4.

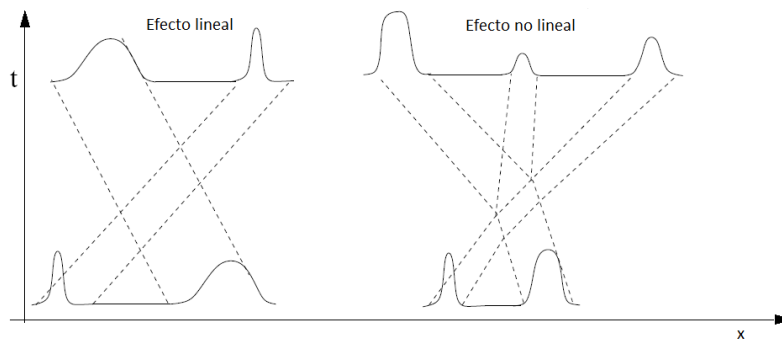


Figura 1.4: Izquierda: Efecto a través del tiempo para el sistema lineal (1.17), el cual consiste en la superposición de n ondas. Derecha: Efecto a través del tiempo para un sistema no lineal (1.10) el cual puede generar nuevas ondas debido a la interacción de otras.

- iii) Una importante característica es la pérdida de regularidad, esto es; la solución al problema de Cauchy puede desarrollar discontinuidades en tiempo finito, incluso si el dato inicial es una función suave.

Por lo anterior, es un hecho que debemos sumergirnos en el conjunto de las funciones discontinuas en busca de soluciones débiles. En este sentido, se hace necesario imponer cierta condición en los puntos de salto de dichas funciones discontinuas.

Definición 4. (Las ecuaciones de Rankine-Hugoniot) Sean u^+ , u^- vectores constantes en \mathbb{R}^n los cuales llamaremos estados derecho e izquierdo respectivamente y $\lambda \in \mathbb{R}$ velocidad de discontinuidad o velocidad de choque. Las ecuaciones de Rankine-Hugoniot consisten en n ecuaciones escritas en forma vectorial como

$$\lambda (u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-). \quad (1.19)$$

Una forma alternativa de presentar estas ecuaciones es mediante la definición de la siguiente matriz.

Definición 5. Sea $A(u) = Df(u)$ la matriz jacobiana de f en u . Para $u, v \in \mathbb{R}^n$ se define la matriz promedio como

$$A(u, v) = \int_0^1 A(\theta v + (1 - \theta)u) d\theta, \quad (1.20)$$

con $\lambda_i(u, v)$, $i = 1, \dots, n$ el i -ésimo valor propio.

Lema 1. La matriz promedio $A(u, v)$ satisface las siguientes dos propiedades:

- i) $A(u, v) = A(v, u)$
- ii) $A(u, u) = A(u)$.

Demostración. La primera se verifica a partir de la definición (5) y el cambio de variable $\alpha = 1 - \theta$ es decir,

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_0^1 Df(\theta v + (1 - \theta)u) d\theta = - \int_1^0 Df((1 - \alpha)v + \alpha u) d\alpha \\ &= \int_0^1 A(\alpha u + (1 - \alpha)v) d\alpha \\ &= A(v, u). \end{aligned} \tag{1.21}$$

La segunda se verifica fácilmente pues

$$A(u, u) = \int_0^1 A(\theta u + (1 - \theta)u) d\theta = \int_0^1 A(u) d\theta = A(u). \tag{1.22}$$

□

Lema 2. *Las ecuaciones de Rankine-Hugoniot se satisfacen si y solamente si el salto $u^+ - u^-$ es un vector propio derecho de la matriz promedio $A(u^-, u^+)$ y la velocidad de choque λ coincide con su respectivo valor propio.*

Demostración. Haciendo el cambio de variable $\alpha = (\theta u^+ + (1 - \theta)u^-)$ tenemos que $d\alpha = (u^+ - u^-)d\theta$, luego

$$\int_0^1 Df(\theta u^+ + (1 - \theta)u^-) (u^+ - u^-) d\theta = \int_{u^-}^{u^+} Df(\alpha) d\alpha = f(u^+) - f(u^-). \tag{1.23}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \lambda(u^+ - u^-) &= f(u^+) - f(u^-) = \int_0^1 Df(\theta u^+ + (1 - \theta)u^-) (u^+ - u^-) d\theta \\ &= A(u^-, u^+)(u^+ - u^-), \end{aligned} \tag{1.24}$$

lo cual prueba la afirmación en ambos sentidos. □

Ahora consideremos el siguiente problema: Dado un $u_0 \in \mathbb{R}^n$, encontrar todos los estados $u \in \mathbb{R}^n$ para los cuales se satisfacen las ecuaciones de

Rankine-Hugoniot

$$\lambda(u - u_0) = A(u_0, u)(u - u_0), \quad (1.25)$$

para alguna $\lambda = \lambda_i(u_0, u)$ dada.

El siguiente teorema asegura que si $u^-, u^+ \in \mathbb{R}^n$ están suficientemente cerca, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una única curva la cual contiene todos los estados u que satisfacen (1.25).

Teorema 1. *Supongamos que el sistema (1.10) es estrictamente hiperbólico. Entonces, para cada $u_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un $\sigma_0 > 0$ y n curvas suaves $S_i : [-\sigma_0, \sigma_0] \rightarrow \Omega$ junto con n funciones escalares $\lambda_i : [-\sigma_0, \sigma_0] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$f(S_i(\sigma)) - f(u_0) = \lambda_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0), \quad (1.26)$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ con $\sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$.

Demostración. Fijemos un $i \in \{1, \dots, n\}$. Por el lema (2), $u - u_0$ es un vector propio derecho de la matriz promedio $A(u_0, u)$, luego por un argumento análogo a (1.12) $u - u_0$ es ortogonal a todos los vectores $l_i(u_0, u)$ para todo $i \neq j$. De esta manera podemos definir las siguientes $n - 1$ funciones escalares

$$F_j(u) \doteq l_i(u_0, u) \cdot (u - u_0) = 0, \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (1.27)$$

El sistema (1.27) consiste de $n - 1$ ecuaciones con n variables desconocidas $u = (u_1, \dots, u_n)$, donde u son precisamente todos los estados que satisfacen las ecuaciones de Rankine-Hugoniot. En particular $u = u_0$ satisface el sistema (1.27).

Debemos mostrar que tales estados u están sobre la curva $S_i(\sigma)$. Para mostrar la existencia de tal curva, debemos aplicar el teorema de la función implícita al sistema (1.27). De esta manera despejar las $n - 1$ variables $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ en función de la i -ésima variable u_i y luego formar la curva $(u_1(u_i), \dots, u_{i-1}(u_i), u_i, u_{i+1}(u_i), \dots, u_n(u_i))$. Por último, parametrizar la curva como $S_i : [-\sigma_0, \sigma_0] \rightarrow \Omega$, con $\sigma \mapsto (u_1(\sigma), \dots, u_{i-1}(\sigma), u_i(\sigma), u_{i+1}(\sigma), \dots, u_n(\sigma))$.

Sea $F = (F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_n)$ con cada componente definida en (1.27), una matriz $n \times (n - 1)$. La matriz DF calculada en $u = u_0$ está formada por los $n - 1$ gradientes $\nabla F_j(u_0)$ con $i \neq j$, pero $\nabla F_j(u_0) = l_j(u_0)$, es decir que $DF(u_0)$ está formado por los $n - 1$ vectores propios izquierdos $l_i(u_0)$ de la matriz $A(u_0)$ los cuales son linealmente independientes, por tanto $DF(u_0)$ es invertible.

Luego aplicando el teorema de la función implícita al sistema (1.27) podemos despejar las $n - 1$ variables $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ en función de la variable u_i en una vecindad de Ω .

La gráfica de la función definida implícitamente, está conformada por los estados $(u_1(u_i), \dots, u_{i-1}(u_i), u_i, u_{i+1}(u_i), \dots, u_n(u_i))$ los cuales satisfacen las ecuaciones de Rankine-Hugoniot. Tal gráfica puede ser parametrizada por longitud de arco como $\sigma \mapsto S_i(\sigma)$ con $S_i(0) = u_0$.

Así, tomando $\lambda_i(\sigma) \doteq \lambda_i(S_i(\sigma), u_0)$ se tiene entonces que

$$f(S_i(\sigma)) - f(u_0) = \lambda_i(\sigma)(S_i(\sigma) - u_0), \quad (1.28)$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ con $\sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$ como queríamos demostrar. \square

Resaltamos que en el caso de pretender resolver el problema de Cauchy (1.10)-(1.11), la simple noción de solución débil y la implementación de las ecuaciones de Rankine-Hugoniot, no son suficientes para garantizar tanto la unicidad de la solución a tal problema, como la dependencia continua sobre el dato inicial. En este caso se deberá implementar condiciones adicionales, algunas llamadas condiciones de admisibilidad. Dos enfoques en esta dirección son la condición de entropía y la condición de admisibilidad de Lax.

Definición 6. *Una función continuamente diferenciable $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una entropía para el sistema de leyes de conservación de la forma (1.10), con flujo entrópico $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si para todo $u \in \mathbb{R}^n$ se tiene*

$$D\beta(u) \cdot Df(u) = Dq(u). \quad (1.29)$$

Definición 7. (Condición de entropía) Una solución débil u de (1.10) es una entropía admisible si

$$\beta_t(u) + q(u)_x \leq 0, \quad (1.30)$$

en el sentido distribucional, es decir

$$\int \int \{\beta(u)\phi_t + q(u)\phi_x\} dxdt \geq 0, \quad (1.31)$$

para todo par (β, q) donde β es una entropía convexa para (1.10), q es el correspondiente flujo entrópico y para toda $\varphi \geq 0$ continuamente diferenciable con soporte compacto.

Otra importante es la condición de admisibilidad introducida por P. Lax.

Definición 8. (Condición de Lax). La curva i -choque que conecta los estados u^-, u^+ y viaja con velocidad $\lambda = \lambda(u^-, u^+)$, satisface la condición de admisibilidad de Lax si

$$\lambda(u^-) \geq \lambda(u^-, u^+) \geq \lambda(u^+). \quad (1.32)$$

1.3. El problema de Riemann

El problema de Riemann es un caso especial del problema de Cauchy

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.33)$$

$$u(0, x) = \bar{u}(x), \quad (1.34)$$

donde el dato inicial es una función constante a trozos

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x < 0 \\ u^+ & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (1.35)$$

Escribimos el vector $u^+ - u^-$ como una combinación lineal de los vectores propios de A , esto es

$$u^+ - u^- = \sum_{j=1}^n c_j r_j$$

ahora, definimos los estados intermedios

$$w_i \doteq u^- + \sum_{j \leq i} c_j r_j, \quad i = 0, \dots, n.$$

Así, la solución toma la forma

$$u(t, x) = \begin{cases} w_0 = u^- & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_1 \\ \dots & \dots \\ w_i & \text{si } \lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1} \\ \dots & \dots \\ w_n = u^+ & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_n, \end{cases} \quad (1.36)$$

la cual consiste de n saltos, donde el i -ésimo salto $w_i - w_{i-1} = c_i r_i$ es paralelo al i -ésimo vector propio de la matriz A , viajando con velocidad λ_i correspondiente a su valor propio, ver figura 1.6.

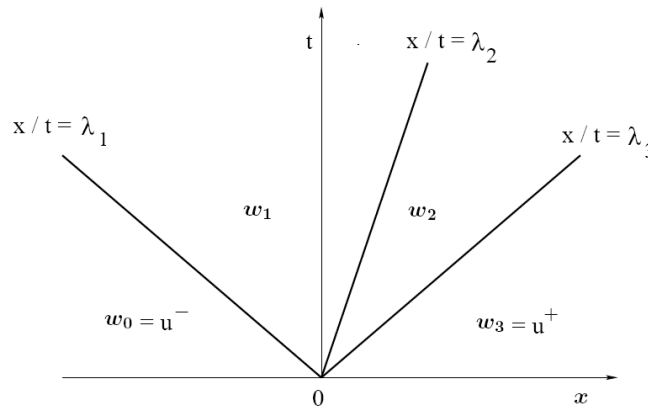


Figura 1.6: Solución al problema de Riemann para un sistema lineal 3×3 .

1.3.1. Ondas elementales

Ahora introducimos una hipótesis implementada por P. Lax, la cual simplifica considerablemente la búsqueda de la solución para el problema (1.33)-(1.35).

Definición 9. (Hipótesis H). *Para cada $i = 1, \dots, n$, el i -ésimo campo característico es genuinamente no lineal si $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i > 0$ o linealmente degenerado si $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i = 0$ para todo u .*

Aquí $\nabla \lambda_i(u)$ denota el gradiente de la función escalar $u \rightarrow \lambda_i(u)$, por tanto $\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i$ es la derivada direccional de λ_i en dirección del vector r_i . Como veremos, si la hipótesis (H) se tiene, entonces la solución al problema de Riemann goza de una estructura simple, la cual consiste en la superposición de n ondas elementales.

Sea $u_0 \in \mathbb{R}^n$ un estado fijo y un $i \in \{1, \dots, n\}$. Como antes, sea $r_i(u)$ el i -ésimo vector propio de la matriz $A(u) \doteq Df(u)$. Entonces, la curva integral del i -ésimo campo vectorial r_i que pasa a través del punto u_0 es llamada *i -rarefracción*. Tal curva es obtenida resolviendo el problema de valor inicial en el espacio de estados:

$$\frac{du}{d\sigma} = r_i(u), \quad u(0) = u_0. \quad (1.37)$$

Denotaremos esta curva como $\sigma \mapsto R_i(\sigma)(u_0)$.

Ondas de rarefacción

Supongamos que el i -ésimo campo es genuinamente no lineal y que u^+ está sobre la curva i -rarefracción que pasa a través de u^- , es decir $u^+ = R_i(\sigma)(u^-)$ para algún $\sigma > 0$.

Para cada $s \in [0, \sigma]$ definimos la velocidad característica $\lambda_i(s) = \lambda_i(R_i(s)(u^-))$. Observemos que para el caso genuinamente no lineal, la aplicación $s \mapsto \lambda_i(s)$ es estrictamente creciente.

Así, para cada $\lambda \in [\lambda_i(u^-), \lambda_i(u^+)]$, existe un único valor $s \in [0, \sigma]$ tal que $\lambda = \lambda_i(s)$.

De esta forma, la función

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_i(u^-) \\ R_i(s)(u^-) & \text{si } \frac{x}{t} = \lambda_i(s) \in [\lambda_i(u^-), \lambda_i(u^+)] \\ u^+ & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_i(u^+), \end{cases} \quad (1.38)$$

es una solución suave a trozos del problema de Riemann. Para verificar esta afirmación, notemos que la ecuación (1.33) es satisfecha, pues en las regiones del plano (t, x) donde $x < t\lambda_i(u^-)$ o $x > t\lambda_i(u^+)$ se tiene que $u_t = u_x = 0$. Supongamos ahora que $x = t\lambda_i(s)$ para algún $s \in (0, \sigma)$. Como u es constante a lo largo de cada recta $\left\{ \frac{x}{t} = c \right\}$ que parte del origen, tenemos que al derivar con respecto a t

$$u(t, ct) = k \quad (1.39)$$

$$u_t(t, ct) + cu_x(t, ct) = 0 \quad (1.40)$$

$$u_t(t, x) + \frac{x}{t}u_x(t, x) = 0. \quad (1.41)$$

Ahora, de la definición (1.38) se tiene que $\frac{x}{t} = \lambda_i(u(t, x))$. Por construcción se tiene que u_x es paralela al vector $r_i(u)$ el cual es un vector propio de la matriz Jacobiana $A(u) = Df(u)$ con valor propio $\lambda_i(u)$. Luego, en la región del plano (t, x) donde $\lambda_i(u^-) < \frac{x}{t} < \lambda_i(u^+)$ se tiene que,

$$u_t + A(u)u_x = u_t + \lambda_i(u)u_x = 0. \quad (1.42)$$

Además, de la definición se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(t, \cdot) - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^1} = 0$ verificando la condición inicial y probando nuestra afirmación.

Ondas de choque

Asumamos nuevamente que el i -ésimo campo es genuinamente no lineal y que el estado u^+ está conectado con el estado u^- a través de una curva i -choque,

es decir $u^+ = S_i(\sigma)(u^-)$. Entonces, llamando $\lambda = \lambda_i(u^-, u^+)$ la velocidad Rankine-Hugoniot del choque, la función

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_i(u^-) \\ u^+ & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_i(u^+), \end{cases} \quad (1.43)$$

resulta ser una solución constante a trozos para el problema de Riemann. Notamos además que si $\sigma < 0$ entonces se tiene la condición de Lax. En efecto, como la velocidad es monótonamente creciente a lo largo de la curva de choque, se tiene que

$$\lambda_i(u^+) < \lambda_i(u^-, u^+) < \lambda_i(u^-).$$

En el caso contrario si $\sigma > 0$, entonces la condición de Lax no se tiene.

Discontinuidades de contacto

Cuando el i -ésimo campo es linealmente degenerado, curvas de choque y curvas de rarefacción coinciden, esto es: $S_i(\sigma)(u^-) = R_i(\sigma)(u^-)$ para todo σ .

Los anteriores resultados pueden resumirse como sigue. Para un estado izquierdo fijo u^- e $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos la curva mixta

$$\Psi_i(\sigma)(u^-) = \begin{cases} R_i(\sigma)(u^-) & \text{si } \sigma \geq 0 \\ S_i(\sigma)(u^-) & \text{si } \sigma < 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

En el caso especial cuando $u^+ = \Psi_i(\sigma)(u^-)$ para algún σ , entonces el problema de Riemann puede ser resuelto por una onda elemental; onda de rarefacción, onda de choque o una discontinuidad de contacto. Sin embargo, cuando u^+ no está sobre alguna curva característica para algún σ , entonces se debe considerar la solución al problema de Riemann como una construcción más general. La siguiente sección aborda esta situación.

1.3.2. Solución general al problema de Riemann

Apoyándonos en el anterior análisis y en [4], [1] y [2], la solución general del problema de Riemann (1.33)-(1.35) puede ser obtenida, encontrando estados intermedios únicos $\omega_0 = u^-$, $\omega_1, \dots, \omega_n = u^+$ tales que cada par de estados seguidos ω_{i-1}, ω_i puedan ser conectados por una única onda elemental; onda de choque, onda de rerefracción o discontinuidad de contacto.

El siguiente resultado fue probado por primera vez por P. Lax en 1957 [4] y asegura la unicidad de la solución al problema de Riemann. Para otra prueba análoga del mismo teorema ver [1].

Teorema 2. *Suponga que el sistema (1.33) es estrictamente hiperbólico y satisface la hipótesis (H). Para cada estado $u^- \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^n$, tal que si $u^+ \in V$, el problema de Riemann (1.33)-(1.35) tiene una única solución. Esta solución consiste en $n + 1$ estados constantes $\omega_0 = u^-$, $\omega_1, \dots, \omega_n = u^+$ tal que cada par de estados contiguos son conectados por una única onda elemental y donde cada estado está en la vecindad V de u^- .*

Cada estado intermedio está determinado por

$$\omega_i = \Psi_i(\sigma_i)(\omega_{i-1}) \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.45)$$

Considerando la función vectorial

$$\Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \Psi_n(\sigma_n) \circ \dots \circ \Psi(\sigma_1)(u^-), \quad (1.46)$$

una aplicación del teorema de la función implícita garantiza que la función Λ resulta ser una biyección continua de una vecindad del origen de \mathbb{R}^n en una vecindad de $u^- \in \mathbb{R}^n$.

De esta forma, para u^+ suficientemente cerca de u^- existen *únicos* parámetros $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ tales que u^+ puede ser conectado a u^- mediante los estados intermedios $\omega_0 = u^-$, $\omega_1, \dots, \omega_n = u^+$ y

$$u^+ = \Psi_n(\sigma_n) \circ \dots \circ \Psi(\sigma_1)(u^-), \quad (1.47)$$

ver figura¹ 1.7. Esto a su vez determina los estados intermedios ω_1 en (1.45). La solución completa es ahora obtenida uniendo las soluciones de n problemas

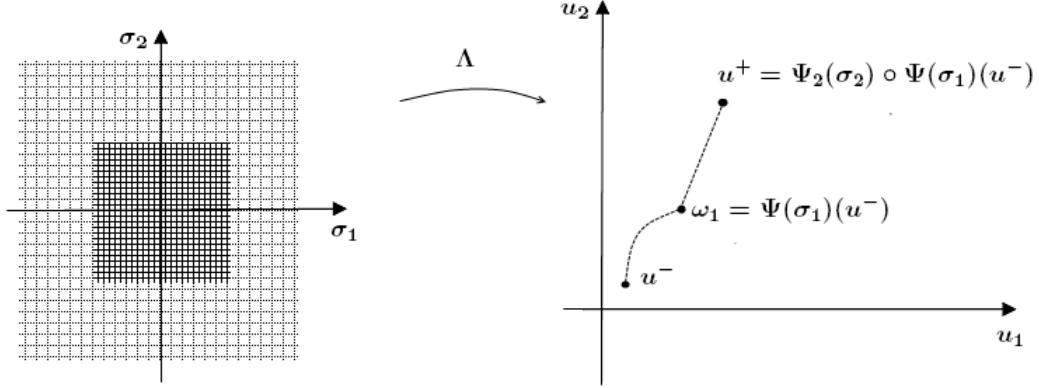


Figura 1.7: En el caso $n = 2$, para u^-, u^+ suficientemente cerca existen únicos σ_1, σ_2 tales que u^- es conectado con el estado intermedio ω_1 y ω_1 con u^+ a través de ondas elementales.

de Riemann de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} w_{i-1} & \text{si } x < 0 \\ w_i & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (1.48)$$

en diferentes sectores del plano (t, x) . Por construcción, cada uno de estos problemas tiene por solución una entropía admisible consistiendo en una onda elemental asociada al i -ésimo campo característico. Más precisamente:

Caso 1: Si el i -ésimo campo característico es genuinamente no lineal y $\sigma_i > 0$, entonces la solución de (1.48) es una onda de rarefacción. El i -ésimo campo de velocidades características recorre el intervalo $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$, definidas como $\lambda_i^- \doteq \lambda_i(w_{i-1})$, $\lambda_i^+ \doteq \lambda_i(w_i)$.

¹Cada una de las ondas elementales está parametrizada por σ_1, σ_2 respectivamente. Si $\sigma_i \geq 0$ o $\sigma_i < 0$, esto determina el tipo de onda elemental, a fin de garantizar las condiciones de admisibilidad de la solución.

Caso 2: Si el i -ésimo campo característico es linealmente degenerado con $\sigma_i < 0$ o en caso contrario, si el i -ésimo campo característico es linealmente degenerado (con σ_i arbitrario), entonces la solución de (1.48), es una onda de choque o una discontinuidad de contacto la cual viaja con velocidad Rankine-Hugoniot $\lambda_i^- = \lambda_i^+ \doteq \lambda_i(w_{i-1}, w_i)$.

Así entonces, la solución al problema de Riemann es la función suave a trozos $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$u(t, x) = \begin{cases} u^- = w_0 & \text{si } \frac{x}{t} \in (-\infty, \lambda_1^-) \\ R_i(s)(w_{i-1}) & \text{si } \frac{x}{t} = \lambda_i(R_i(s)(w_{i-1})) \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+) \\ w_i & \text{si } \frac{x}{t} \in [\lambda_i^+, \lambda_{i+1}^-) \\ u^+ = w_n & \text{si } \frac{x}{t} \in [\lambda_n^+, \infty). \end{cases} \quad (1.49)$$

Destacamos que esta solución además de ser única por el teorema 2, tiene la forma $u(t, x) = F(\frac{x}{t})$, con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1.3.3. Soluciones autosimilares

Definición 10. Una solución $u(t, x)$ de una ecuación en derivadas parciales (EDP) se dice solución autosimilar, si existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$u(t, x) = t^\alpha F(xt^\beta). \quad (1.50)$$

De otro lado, supongamos que $u(t, x)$ es solución de una EDP. Si sus variables de tiempo y estado son reescaladas por alguna constante, es posible que la nueva función reescalada resulte ser también solución para la EDP. Más precisamente, es el caso de la solución al problema de Riemann como lo describe el siguiente lema.

Lema 3. Si $u(t, x)$ es solución débil para el problema de Riemann (1.33)-(1.35), entonces para todo $\theta > 0$ la función reescalada

$$u^\theta(t, x) = u(\theta t, \theta x), \quad (1.51)$$

también es solución para el problema de Riemann (1.33)-(1.35).

Demostración. La prueba es consecuencia directa de la definición (1.5) de solución débil y la aplicación del teorema de cambio de variable para $\tau = \theta t$, $\chi = \theta x$.

$$\int \int \{u^\theta(t, x)\phi_t^\theta(t, x) + f(u^\theta(t, x))\phi_x^\theta(t, x)\} dxdt \quad (1.52)$$

$$= \int \int \{u(\theta t, \theta x)\phi_t(\theta t, \theta x) + f(u(\theta t, \theta x))\phi_x(\theta t, \theta x)\} dxdt \quad (1.53)$$

$$= \int \int \{u(\tau, \chi)\phi_\tau(\tau, \chi) + f(u(\tau, \chi))\phi_\chi(\tau, \chi)\} \theta^3 d\chi d\tau \quad (1.54)$$

$$= \theta^3 \cdot 0. \quad (1.55)$$

Además, la condición inicial (1.35) se satisface trivialmente pues

$$u^\theta(0, x) = u(0, \theta x) \quad (1.56)$$

$$= \begin{cases} u^- & \text{si } \theta x < 0 \\ u^+ & \text{si } \theta x > 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

$$= \bar{u}(x). \quad (1.58)$$

□

Dado que la solución del problema de Riemann es única y cumple el lema anterior, entonces necesariamente se debe tener que $u \equiv u^\theta \forall \theta > 0$. En particular haciendo $\theta = t^{-1}$ se tiene que

$$u(t, x) = u\left(1, \frac{x}{t}\right), \text{ o equivalentemente } u(t, x) = F\left(\frac{x}{t}\right), \quad (1.59)$$

para $\alpha = 0$ y $\beta = -1$ en la definición (1.50) es decir, u es una solución autosimilar.

Por la tanto, concluimos este capítulo estableciendo que para el problema de Riemann (1.33)-(1.35) para u^-, u^+ suficientemente cerca, existe una única solución autosimilar dada por (1.49).

CAPÍTULO 2

EL MODELO DE TRÁFICO 2-FASES CON VELOCIDAD ACOTADA

2.1. Un primer modelo escalar de tráfico vehicular

Debido al creciente aumento de la industria automotriz, y en necesidad de describir los fenómenos de flujo de transporte que estos traerían consigo, un primer modelo es propuesto en el año 1950. Este se debe al trabajo de Lighthill, Whitham y Richards [8], [9] quienes construyen un modelo de evolución de la densidad de vehículos sobre una carretera, usando una ecuación hiperbólica en derivadas parciales escalar de primer orden, conocido como el modelo LWR.

Descrito en el ejemplo 1 del capítulo anterior, el modelo LWR corresponde a la ecuación

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho V(\rho)) = 0, \tag{2.1}$$

donde $\rho \in [0, R]$ es la densidad media del tráfico, $V(\rho)$ la velocidad media del tráfico y $\rho V(\rho)$ la función de flujo.

Sin embargo, debido a la simplicidad del modelo, su diagrama fundamental en el plano $(\rho, \rho V)$ no corresponde generalmente a los diagramas proporcionados por datos experimentales, registrados en distintos lugares del mundo, ver figura 2.1.

El diagrama de la izquierda correspondiente al modelo LWR, sugiere que cuando la densidad del flujo vehicular ρ es alta ($\rho > \hat{\rho}$), la gráfica en el plano $(\rho, \rho V)$ que representa la función de flujo ρV sigue siendo unidimensional y esta es una falla considerable del modelo LWR.

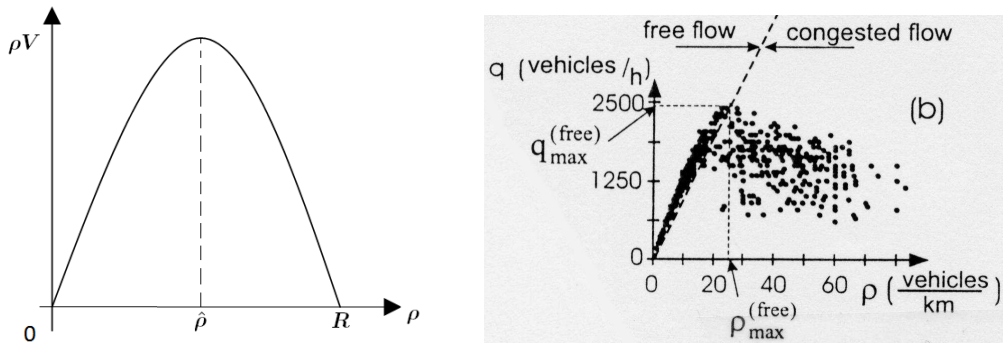


Figura 2.1: Izquierda: Función de flujo para el modelo LWR. Derecha: Datos experimentales tomados en [10].

Esto sugiere que un buen modelo de tráfico debe exhibir dos tipos de comportamientos:

1. Para bajas densidades del tráfico, el flujo vehicular debe ser *libre* y esencialmente análogo al modelo LWR.
2. En altas densidades del tráfico, el flujo vehicular es *congestionado* y debe ser representado en un dominio 2-dimensional, ver figura 2.2.

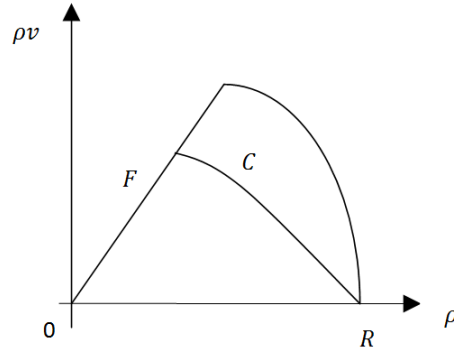


Figura 2.2: Modelo 2-dimensional para tráfico congestionado.

2.2. Modelos de tráfico con transición de fases

Usualmente el término “*transición de fase*” se refiere a un cambio de estado físico de una sustancia dada, por ejemplo líquido \leftrightarrow vapor. Sin embargo este ha sido recientemente introducido en la literatura de modelamiento de tráfico vehicular, indicando algún fenómeno experimental observado. Generalmente el flujo de tráfico puede presentar dos tipos de comportamientos: *libre y congestionado*. Estos fenómenos pueden ser descritos dentro del marco de las leyes de conservación hiperbólicas que desarrollan transición de fases. Como describimos en el capítulo anterior, un sistema de leyes de conservación hiperbólico es de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.2)$$

$$u(0, x) = u(\bar{x}), \quad (2.3)$$

con $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$, $u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

En presencia de transición de fases, Ω es la unión de dos (o más) conjuntos disyuntos llamados fases, es decir

$$\Omega = F \cup C. \quad (2.4)$$

De esta forma, una *transición de fase* es un salto de discontinuidad entre dos estados pertenecientes a diferentes fases, el cual satisface las ecuaciones de Rankine-Hugoniot.

En vista de que el flujo de tráfico puede desarrollar transición de fase, [5] propone un modelo hiperbólico de flujo de tráfico con transición de fases, el cual establece características más similares a los flujos de tráfico real que el simple modelo LWR. Posteriormente los autores; *Colombo, Marcellini y Rascle* proponen en [6] la extensión del modelo en [5] al caso donde la velocidad no es igual para todos los vehículos.

Las principales características del modelo [6] son:

1. En una misma densidad de tráfico dada, distintos vehículos pueden alcanzar diferentes velocidades. Esto sugiere que cada vehículo puede alcanzar su propia velocidad máxima. Denotaremos con $w = w(t, x)$ la velocidad máxima que puede alcanzar el vehículo que está en la posición x en el instante de tiempo t . De esta forma llamaremos al intervalo real $[\check{w}, \hat{w}]$, $\check{w} > 0$ el conjunto de todas las velocidades máximas que los vehículos pueden lograr.
2. La velocidad general del tráfico denotada por v toma la forma $v = w\psi(\rho)$.
3. La densidad del tráfico ρ alcanza un valor máximo R es decir, $\rho \in [0, R]$.
4. Se introduce una función $\psi \in C^2([0, R]; [0, 1])$ la cual mide la intención en cada vehículo de ajustar su propia velocidad a la densidad local del tráfico. Además $\psi(0) = 1$, $\psi(R) = 0$ es decir, cuando $\rho = 0$ el vehículo puede acelerar plenamente y para $\rho = R$ el vehículo quedará atrapado en la densidad máxima del tráfico sobre la carretera.
5. Se fija una cota superior uniforme denotada por V_{max} sobre la velocidad general del tráfico. Esta condición supone que ningún vehículo

podrá adelantar e ir a una velocidad mayor que la velocidad del flujo vehicular.

Más precisamente el modelo [6] es el sistema 2×2 de leyes de conservación hiperbólico

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v(\rho, \eta)) = 0 \\ \partial_t \eta + \partial_x (\eta v(\rho, \eta)) = 0 \end{cases} \quad \text{con } v(\rho, \eta) = \min \left\{ V_{max}, \frac{\eta}{\rho} \psi(\rho) \right\}, \quad (2.5)$$

donde $w = \frac{\eta}{\rho}$ y la velocidad v se define como el mínimo entre esas dos velocidades para garantizar que la velocidad del tráfico no exceda la velocidad máxima V_{max} .

2.3. Notación y algunos resultados

Dado que el modelo (2.5) es una extensión del modelo [5] el cual experimenta transición de fases, definimos las fases como los conjuntos

$$\begin{aligned} F &= \{(\rho, w) \in [0, R] \times [\check{w}, \hat{w}] : v(\rho, \rho w) = V_{max}\}, \\ C &= \{(\rho, w) \in [0, R] \times [\check{w}, \hat{w}] : v(\rho, \rho w) = w\psi(\rho)\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde F representa la fase libre y C la fase congestionada para el modelo (2.5), ver figura (2.3).

A continuación, algunas hipótesis adicionales para enunciar y demostrar en el próximo capítulo, el teorema que es el objetivo de este trabajo:

- A. $R, \check{w}, \hat{w}, V_{max}$ son constantes positivas con $\check{w} < \hat{w}$.
- B. $\psi \in C^2([0, R]; [0, 1])$ tal que $\psi(0) = 1, \psi(R) = 0, \psi'(\rho) \leq 0, \frac{d^2}{d\rho^2}(\rho\psi(\rho)) \leq 0$ para todo $\rho \in [0, R]$.
- C. $\check{w} > V_{max}$.

En la hipótesis B las tres primeras son condiciones describen a ψ como una función no creciente y la cuarta es una condición puramente técnica, necesaria para la prueba del principal teorema en el siguiente capítulo.

La condición C significa que cada vehículo puede localmente superar la velocidad máxima del flujo. Podemos pensar en esta condición como la oportunidad de acelerar el vehículo en un corto tramo despejado sobre la carretera.

El siguiente lema muestra que la función $\psi(\rho)$, la cual representa la intención de cada conductor de acelerar localmente, vale 1 hasta cierto $\bar{\rho} \in [0, R]$ luego $\psi(\rho)$ empieza a decaer estrictamente hasta llegar a cero.

Lema 4. *Suponga que $\psi(\rho)$ satisface la hipótesis B. Entonces*

$$\exists \bar{\rho} \in [0, R) \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \psi(\rho) \text{ es constante en } [0, \bar{\rho}], \\ \psi(\rho) \text{ es estrictamente decreciente en } [\bar{\rho}, R]. \end{cases}$$

Demostración. Si ψ es estrictamente monótona, entonces por $\psi'(\rho) < 0$, ψ es estrictamente decreciente por tanto $\bar{\rho} = 0$ y la prueba está terminada.

De lo contrario, $\exists \rho_1, \rho_2 \in (0, R]$ tales que $\psi(\rho_1) = \psi(\rho_2) = c$, con $\rho_1 \neq \rho_2$.

Definamos $q(\rho) = \rho\psi(\rho)$.

Por hipótesis $\frac{d^2q}{d\rho^2} \leq 0$, es decir la función $q(\rho)$ es cóncava, por tanto para todo $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$ se tiene que $\psi(\rho) = c$ y $q(\rho) = c\rho$. Luego, si $\psi(0) = c$ entonces $c = 1$ y $\bar{\rho} = \rho_2$.

De otra forma, si $\psi(0) \neq c$ entonces $c < 1$ y $\psi(0) > c$.

Como $q'(\rho) = \rho\psi'(\rho) + \psi(\rho)$ se tendría que $q'(0) = \psi(0) > c$ en otras palabras, para $\rho \in [0, \rho_1]$ por la concavidad de $q(\rho)$, las pendientes de sus rectas tangentes, son estrictamente decrecientes y para $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$, $q(\rho)$ es una función lineal con pendiente mayor que el intervalo anterior, lo cual es absurdo ya que contradice la concavidad de $q(\rho)$. \square

Corolario 1. *Asuma que las hipótesis A, B y C son satisfechas. Entonces:*

i) $\exists \rho_{min} \in [0, R]$ el cual

$$\rho_{min} = \mathbf{min} \{ \rho \in [0, R] : \exists w \in [\check{w}, \hat{w}] \text{ tal que } (\rho, w) \in C \}.$$

ii) $\bar{\rho} < \rho_{min}$.

Demostración. Por el lema anterior y por la hipótesis $\check{w} > V_{max}$ podemos definir la función $w(\rho) = \frac{V_{max}}{\psi(\rho)}$, ver figura 2.3.

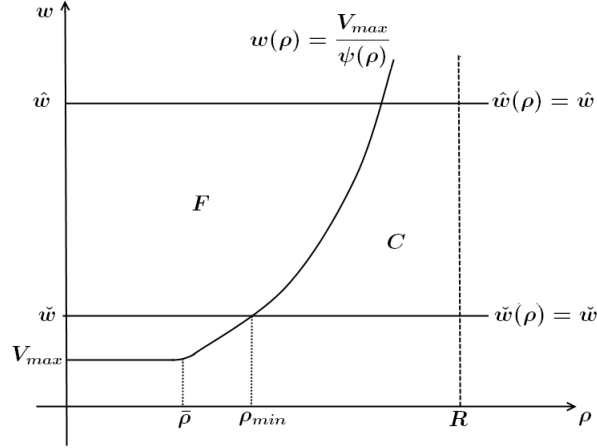


Figura 2.3: La fase libre F y la fase congestionada C (2.6) en el plano (ρ, w) .

De esta forma

$$F \cap C = \left\{ (\rho, w) \in [0, R] \times [\check{w}, \hat{w}] : w(\rho) = \frac{V_{max}}{\psi(\rho)} \right\}. \quad (2.7)$$

Sea $\rho_{min} \in [0, R]$ tal que $\check{w}(\rho) = w(\rho_{min})$ es decir, el valor en $[0, R]$ para el cual la recta constante $\check{w}(\rho) = \check{w}$ es igual a la curva $w(\rho) = \frac{V_{max}}{\psi(\rho)}$ así,

$$F \cap C \neq \emptyset \text{ y } \rho_{min} = \mathbf{min} \{ \rho \in [0, R] : \exists w \in [\check{w}, \hat{w}] \text{ tal que } (\rho, w) \in C \}, \quad (2.8)$$

probando así i).

Para probar ii) supongamos que $\bar{\rho} = \rho_{min}$, entonces por el lema anterior necesariamente se debe tener que $V_{max} = \check{w}$ lo que contradice la hipótesis C. Ahora

supongamos que $\bar{\rho} > \rho_{min}$, entonces $\bar{\rho} \in \{\rho \in [0, R] : \exists w \in [\check{w}, \hat{w}] \text{ tal que } (\rho, w) \in C\}$ por tanto $\exists \bar{w} \in [\check{w}, \hat{w}]$ tal que $(\bar{\rho}, \bar{w}) \in C$, es decir que $V_{max} > v(\bar{\rho}, \bar{\eta}) = \bar{w}\psi(\bar{\rho})$. Por el lema anterior $\psi(\bar{\rho}) = 1$, luego $v(\bar{\rho}, \bar{\eta}) = \bar{w}$ por tanto $V_{max} > \bar{w}$ lo que contradice nuevamente la hipótesis C, pues $\bar{w} \geq \check{w}$. \square

Definición 11. Sea $u(t, x)$ la solución al problema de Riemann (1.33)-(1.35), sea $S \subseteq \Omega$ un conjunto cerrado y conexo en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con frontera ∂S suave a trozos y conexa. Se dice que una región S es invariante, si siempre que $u^-, u^+ \in S$ para todo x , entonces la solución $u(t, x)$ esté en S para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Ahora enunciamos un teorema (ver su demostración en [7]) el cual caracteriza las regiones invariantes a partir de la geometría de su frontera.

Teorema 3. Una región S es invariante si y solamente si las siguientes dos condiciones se tienen:

- (a) Existe un índice $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que en cada u_0 de ∂S , el vector $l_p(u_0)$ es paralelo al vector normal de ∂S .
- (b) Si $i < p$ y el i -ésimo campo característico es linealmente degenerado, entonces $S_i(u_0)(\sigma) \in S$ para todo $u_0 \in \partial S$ y todo $\sigma < 0$.

CAPÍTULO 3

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE RIEMANN PARA EL MODELO DE TRÁFICO 2-FASES CON VELOCIDAD ACOTADA

Así entonces, estamos listos para enunciar y demostrar nuestro principal objetivo.

Teorema 4. *Bajo las hipótesis A, B y C, para todos los estados $(\rho^l, \eta^l), (\rho^r, \eta^r) \in F \cup C$, el problema de Riemann*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v(\rho, \eta)) = 0 \\ \partial_t \eta + \partial_x (\eta v(\rho, \eta)) = 0 \end{cases} \quad \text{con } v(\rho, \eta) = \min \left\{ V_{max}, \frac{\eta}{\rho} \psi(\rho) \right\}, \quad (3.1)$$

y dato inicial

$$(\rho, \eta)(0, x) = \begin{cases} (\rho^l, \eta^l) & \text{si } x < 0 \\ (\rho^r, \eta^r) & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

admite una única solución débil autosimilar $(\rho, \eta) = (\rho, \eta)(t, x)$ construida como sigue:

I. Si $(\rho^l, \eta^l), (\rho^r, \eta^r) \in F$ entonces,

$$(\rho, \eta)(t, x) = \begin{cases} (\rho^l, \eta^l) & \text{si } x < V_{max}t \\ (\rho^r, \eta^r) & \text{si } x > V_{max}t. \end{cases} \quad (3.3)$$

II. Si $(\rho^l, \eta^l), (\rho^r, \eta^r) \in C$ entonces la solución $(\rho, \eta)(t, x)$ consiste de una 1-onda elemental (choque o rerefacción) entre (ρ^l, η^l) y (ρ^m, η^m) seguida por una 2-discontinuidad de contacto entre (ρ^m, η^m) y (ρ^r, η^r) .

El estado intermedio (ρ^m, η^m) está en C y es caracterizado únicamente por las condiciones $\frac{\eta^m}{\rho^m} = \frac{\eta^l}{\rho^l}$ y $v(\rho^m, \eta^m) = v(\rho^r, \eta^r)$.

III. Si $(\rho^l, \eta^l) \in C$ y $(\rho^r, \eta^r) \in F$, entonces la solución $(\rho, \eta)(t, x)$ consiste de una onda elemental 1-rarefacción entre (ρ^l, η^l) y un estado (ρ^m, η^m) , seguida por una onda de choque entre (ρ^m, η^m) de (ρ^r, η^r) .

El estado intermedio (ρ^m, η^m) está en $F \cap C$ y es caracterizado únicamente por las condiciones $\frac{\eta^m}{\rho^m} = \frac{\eta^l}{\rho^l}$ y $v(\rho^m, \eta^m) = V_{max}$.

IV Si $(\rho^l, \eta^l) \in F$ y $(\rho^r, \eta^r) \in C$, entonces la solución $(\rho, \eta)(t, x)$ consiste de un choque entre (ρ^l, η^l) y (ρ^m, η^m) seguido por una 2-discontinuidad de contacto entre (ρ^m, η^m) y (ρ^r, η^r)

El estado intermedio (ρ^m, η^m) está en C y es caracterizado únicamente por las condiciones $\frac{\eta^m}{\rho^m} = \frac{\eta^l}{\rho^l}$ y $v(\rho^m, \eta^m) = v(\rho^r, \eta^r)$.

Demostración. Caso I

Si $u^l \doteq (\rho^l, \eta^l), u^r \doteq (\rho^r, \eta^r) \in F$, entonces $v(\rho, \eta) = V_{max}$ y el sistema (3.1) toma la forma

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho V_{max}) = 0 \\ \partial_t \eta + \partial_x (\eta V_{max}) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

cuya representación matricial es

$$\begin{pmatrix} \partial_t \rho \\ \partial_t \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{max} & 0 \\ 0 & V_{max} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \rho \\ \partial_x \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

donde

$$A \doteq Df = \begin{pmatrix} V_{max} & 0 \\ 0 & V_{max} \end{pmatrix}, \quad \lambda = V_{max}. \quad (3.6)$$

Luego, para probar que la función

$$u \doteq (\rho, \eta)(t, x) = \begin{cases} (\rho^l, \eta^l) & \text{si } x < V_{max}t \\ (\rho^r, \eta^r) & \text{si } x > V_{max}t, \end{cases} \quad (3.7)$$

es solución del sistema (3.4), sea $\phi = \phi(t, x)$ una función continuamente diferenciable con soporte compacto. Sea Ω un disco abierto que contiene el soporte de ϕ y consideremos los dominios

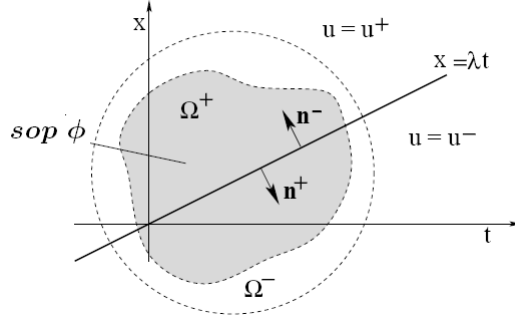


Figura 3.1: Estableciendo las condiciones geométricas para aplicar el teorema de la divergencia en el plano.

$$\Omega^+ \doteq \Omega \cap \{x > \lambda t\} \quad \Omega^- \doteq \Omega \cap \{x < \lambda t\},$$

como en la figura 3.1. Introduciendo en campo vectorial $\Phi = (u\phi, f(u)\phi)$ y recordando que u es constante separadamente tanto en Ω^+ como en Ω^- , tenemos que

$$\iint_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \{u\phi_t + f(u)\phi_x\} dxdt = \iint_{\Omega^+} \nabla \cdot \Phi dxdt + \iint_{\Omega^-} \nabla \cdot \Phi dxdt, \quad (3.8)$$

donde $\nabla \cdot \Phi$ denota la divergencia del campo vectorial Φ . Notamos que la única porción en las fronteras $\partial\Omega^+$, $\partial\Omega^-$ donde Φ no se anula, es la línea $x = \lambda t$. Además, podemos definir los vectores normales a tal recta como $n^+ = (\lambda, -1)$, $n^- = (-\lambda, 1)$ y aplicar el teorema de la divergencia en el plano para (3.8). Así,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega^+} \nabla \cdot \Phi \, dxdt + \iint_{\Omega^-} \nabla \cdot \Phi \, dxdt = \int_{\Omega^+} n^+ \cdot \Phi \, ds + \int_{\Omega^-} n^- \cdot \Phi \, ds \\ & = \int_{t>0} (\lambda, -1) (u^r \phi, f(u^r) \phi) \, dt + \int_{t>0} (-\lambda, 1) (u^l \phi, f(u^l) \phi) \, dt \\ & = \int_{t>0} [\lambda (u^r - u^l) - f(u^r) + f(u^l)] \phi(t, \lambda t) \, dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & = \int_{t>0} [\lambda (\rho^r - \rho^l, \eta^r - \eta^l) - (\lambda \rho^r, \lambda \eta^r) + (\lambda \rho^l, \lambda \eta^l)] \phi(t, \lambda t) \, dt \\ & = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Más aún, de (3.9)-(3.10) se tiene que $\lambda (u^r - u^l) = f(u^r) - f(u^l)$ es decir, u satisface las ecuaciones de *Rankine-Hugoniot*.

Caso II

Aquí $(\rho^l, \eta^l), (\rho^r, \eta^r) \in C$, $v(\rho, \eta) = \frac{\eta}{\rho} \psi(\rho)$ y se tiene el sistema de leyes de conservación

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\eta \psi(\rho)) = 0 \\ \partial_t \eta + \partial_x \left(\frac{\eta^2}{\rho} \psi(\rho) \right) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Mostremos que C es una región invariante con respecto a este sistema. Para este objetivo, calculemos sus valores propios λ_1, λ_2 , sus vectores propios derechos r_1, r_2 , y sus curvas R_1, R_2, S_1, S_2 .

El sistema (3.11) se representa en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \partial_t \rho \\ \partial_t \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \psi' & \psi \\ \eta^2 \frac{\rho \psi' - \psi}{\rho^2} & \frac{2\eta}{\rho} \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \rho \\ \partial_x \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

con

$$A \doteq Df = \begin{pmatrix} \eta \psi' & \psi \\ \eta^2 \frac{\rho \psi' - \psi}{\rho^2} & \frac{2\eta}{\rho} \psi \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Para calcular sus valores propios obtenemos que el polinomio característico asociado resulta ser

$$\lambda^2 - \left(\eta \psi' + \frac{2\eta}{\rho} \psi \right) \lambda + \frac{\eta^2}{\rho} \psi \left(2\psi' - \frac{\rho \psi' - \psi}{\rho} \right) = 0 \quad (3.14)$$

con raíces $\lambda_1 = \eta \psi' + v$, $\lambda_2 = v$.

Nota: Si $\eta \psi' \neq 0$ entonces el sistema es estrictamente hiperbólico. Como $w = \frac{\eta}{\rho} > 0$, entonces $\eta \neq 0$ y por el lema 4 $\psi' < 0$. Luego, el sistema es estrictamente hiperbólico.

Sus respectivos valores propios derechos son

$$r_1(\rho, \eta) = - \begin{pmatrix} \rho \\ \eta \end{pmatrix}, \quad r_2(\rho, \eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\psi'}{\psi} \right) \end{pmatrix}.$$

Ahora verifiquemos que $\nabla \lambda_1 \cdot r_1 > 0$, $\nabla \lambda_2 \cdot r_2 = 0$ es decir, que el primer campo característico es genuinamente no lineal, mientras que el segundo campo es linealmente degenerado.

Como $\lambda_1 = \eta \psi' + v = \eta \psi' + \eta \frac{\psi}{\rho}$,

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 \cdot r_1 &= \left(\eta \psi'' + \eta \frac{\rho \psi' - \psi}{\rho^2}, \psi' + \frac{\psi}{\rho} \right) \cdot (-\rho, -\eta) \\ &= -\eta (\rho \psi'' + 2\psi') \\ &= -\eta \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho \psi(\rho)), \end{aligned}$$

por hipótesis $\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho\psi(\rho))$, $\eta > 0$ por tanto, $\nabla\lambda_1 \cdot r_1 > 0$.

Luego

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_2 \cdot r_2 &= \left(\eta \frac{\rho\psi' - \psi\psi}{\rho^2} \frac{1}{\rho} \right) \cdot \left(1, \eta \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\psi'}{\psi} \right) \right) \\ &= \frac{\eta\psi'}{\rho} - \frac{\eta\psi}{\rho^2} + \frac{\eta\psi}{\rho^2} - \frac{\eta\psi'}{\rho} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Calculemos sus curvas de rarefacción R_1 y R_2 . Solucionando para R_1 el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{d\rho}{d\sigma} \\ \frac{d\sigma}{d\eta} \\ \frac{d\sigma}{d\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \\ -\eta \end{pmatrix}, \quad \eta(\rho_0) = \eta_0,$$

encontramos que R_1 es

$$\eta(\rho) = \frac{\eta_0}{\rho_0} \rho, \quad (3.15)$$

llamada 1-rarefacción. Análogamente para R_2 el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{d\rho}{d\sigma} \\ \frac{d\sigma}{d\eta} \\ \frac{d\sigma}{d\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\psi'}{\psi} \right) \end{pmatrix}, \quad \eta(\rho_0) = \eta_0,$$

se obtiene que R_2 es

$$\eta(\rho) = \frac{\rho}{\psi(\rho)} v(\rho_0, \eta_0), \quad \rho_0 < R, \quad (3.16)$$

llamada 2-discontinuidad de contacto, pues el segundo campo característico es linealmente degenerado. Resaltamos que si $\rho_0 = R$ entonces R_1 es la recta vertical $\rho = R$ del plano (ρ, η) ver figura 3.2. En efecto, $\lim_{\rho \rightarrow R} \eta = \infty$ en (3.16) ya que $\lim_{\rho \rightarrow R} \psi(\rho) = 0$.

Ahora calculemos sus curvas de choque S_1, S_2 a partir de las ecuaciones de Rankine-Hugoniot esto es, encontrar los estados u que satisfacen

$$\lambda(u - u_0) = f(u) - f(u_0), \quad (3.17)$$

para $u = (\rho, \eta)$, $u_0 = (\rho_0, \eta_0)$, $f = (f_1, f_2) = \left(\eta\psi(\rho), \frac{\eta^2}{\rho}\psi(\rho) \right)$. Es decir, solucionemos las ecuaciones

$$\lambda(\rho - \rho_0) = \eta\psi(\rho) - \eta_0\psi(\rho_0), \quad \lambda(\eta - \eta_0) = \frac{\eta^2}{\rho}\psi(\rho) - \frac{\eta_0^2}{\rho}\psi(\rho_0). \quad (3.18)$$

Eliminando λ e igualando tenemos que

$$\frac{\eta\psi(\rho) - \eta_0\psi(\rho_0)}{\rho - \rho_0} = \frac{\rho_0\eta^2\psi(\rho) - \rho\eta_0^2\psi(\rho_0)}{\rho\rho_0(\eta - \eta_0)}, \quad (3.19)$$

de esta forma obtenemos la ecuación cuadrática para η

$$\rho_0^2\psi(\rho)\eta^2 - (\rho\rho_0\eta_0(\psi(\rho) + \psi(\rho_0)))\eta + \rho^2\psi(\rho_0)\eta_0^2 = 0, \quad (3.20)$$

con soluciones

$$\eta_1 = \frac{\eta_0}{\rho_0}\rho, \quad \eta_2 = \frac{\rho}{\psi(\rho)}\frac{\eta_0}{\rho_0}\psi(\rho_0), \quad (3.21)$$

las cuales podemos escribir como

$$S_1 \equiv \eta(\rho) = \frac{\eta_0}{\rho_0}\rho, \quad S_2 \equiv \eta(\rho) = \frac{\rho}{\psi(\rho)}v(\rho_0, \eta_0). \quad (3.22)$$

Si comparamos las curvas de choque S_1, S_2 con las curvas de rarefracción R_1, R_2 estas coinciden, esto es $R_1 \equiv S_1$ y $R_2 \equiv S_2$.

Con los anteriores elementos, podemos tener una representación gráfica de las fases de estado en el plano (ρ, η) y sus curvas de choque o curvas de rarefracción R_1, R_2 . Para esto, la gráfica de la figura (2.3) en el plano (ρ, w) puede ser vista en el plano (ρ, η) como lo muestra la gráfica 3.2. Veamos ahora que la frontera de la región C , está formada precisamente por sus curvas de choque y rarefracción:

a) Tomando $(\rho_0, \eta_0) = (\rho_{min}, \check{w})$ en (3.15) se tiene que

$$R_1 \equiv \eta(\rho) = \check{w}\rho, \quad R_2 \equiv \eta(\rho) = V_{max}\frac{\rho}{\psi(\rho)} \quad (3.23)$$

b) Tomando $(\rho_0, \eta_0) = (R, \hat{w}R)$ en (3.16) se tiene que

$$R_1 \equiv \eta(\rho) = \hat{w}\rho, \quad R_2 \equiv R. \quad (3.24)$$

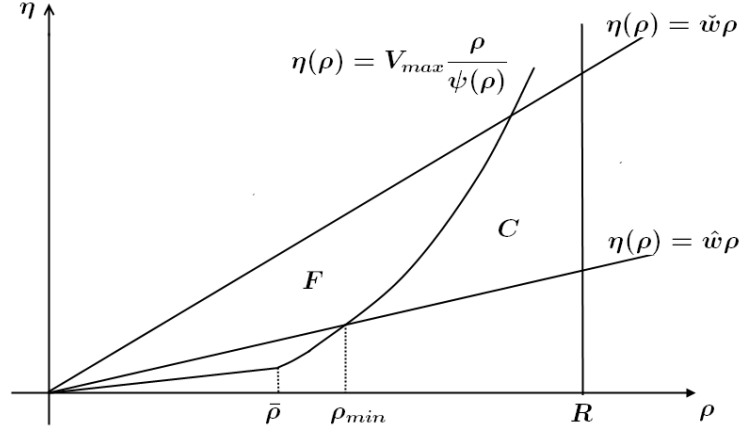


Figura 3.2: Las regiones F y C vistas ahora en el plano (ρ, η) .

De esta forma, ahora sabemos que la frontera de la región C denotada por ∂C , está conformada por sus curvas de choque y sus curvas de rarefacción (que en este caso coinciden).

Por el teorema 3 se tiene que la región C es invariante con respecto al sistema (3.11) en efecto, la condición (a) se verifica ya para cada punto $u_0 \in \partial C$ en vista de (1.12), los vectores $l_1(u_0)$ y $r_1(u_0)$ son perpendiculares, también se tiene que $r_1(u_0)$ y el vector normal son perpendiculares, por tanto $l_1(u_0)$ es paralelo al vector normal en u_0 . La condición (b) se satisface gracias a que la frontera de C está formada por sus curvas de rarefacción y sus curvas de choque $R_1 = S_1$ y $R_2 = S_2$ así, en cada $u_0 \in \partial S$ se tiene que $S_i(u_0)(\sigma) \in S$ para todo $\sigma < 0$.

Esto último asegura que si $(\rho^l, \eta^l), (\rho^r, \eta^r) \in C$ el estado intermedio (ρ^m, η^m) está en C .

En resumen: Si $(\rho^l, \eta^l), (\rho^r, \eta^r) \in C$ entonces existe un estado intermedio (ρ^m, η^m) en C , tal que (ρ^l, η^l) y (ρ^m, η^m) pueden ser conectados por una 1-onda elemental (choque o rarefacción), seguida por una 2-discontinuidad

Por el corolario 1 existe un único $\rho^m \in [\rho_{min}, R)$ tal que $(\rho^m, \eta^m) \in F \cap C$ donde $\eta^m = V_{max} \frac{\rho^m}{\psi(\rho^m)}$ y (ρ^m, η^m) esté sobre la recta que une a (ρ^l, η^l) con el origen es decir, $\frac{\rho^m}{\eta^m} = \frac{\rho^l}{\eta^l}$.

De esta forma, la recta $\eta(\rho) = \frac{\eta^l}{\rho^l} \rho$ que une a (ρ^l, η^l) con (ρ^m, η^m) es precisamente la onda elemental 1-rarefracción del sistema (3.11) construida en el caso II. Ver figura 3.4.

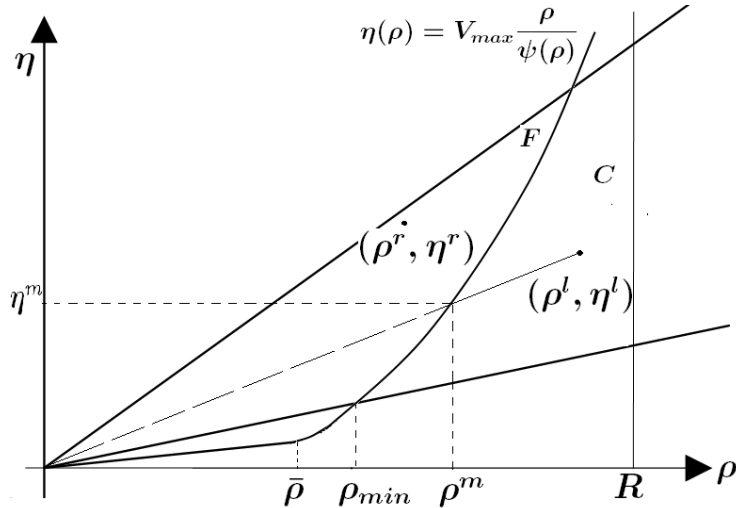


Figura 3.4: Solución al problema de Riemann (3.11), formada por una 1-onda elemental choque o rarefracción, seguida por una 2-discontinuidad de contacto.

De otro lado, para $(\rho^m, \eta^m), (\rho^r, \eta^r) \in F$ el sistema (3.4) tiene como solución la onda de choque

$$(\rho, \eta)(t, x) = \begin{cases} (\rho^m, \eta^m) & \text{si } x < V_{max}t \\ (\rho^r, \eta^r) & \text{si } x > V_{max}t, \end{cases} \quad (3.25)$$

cuya prueba es idéntica al caso I.

En resumen: Para $(\rho^l, \eta^l) \in C$ y $(\rho^r, \eta^r) \in F$ la solución $(\rho, \eta)(t, x)$ es ob-

tenida por la superposición de la onda 1-rarefracción entre (ρ^l, η^l) y (ρ^m, η^m) con la onda de choque (3.25) entre (ρ^m, η^m) y (ρ^r, η^r) .

Además, como $(\rho^m, \eta^m) \in F \cap C$ entonces $v(\rho^m, \eta^m) = V_{max}$.

Caso IV

La prueba se basa en algunos hechos verificados y elementos obtenidos de los casos I, II, III.

Sea $\eta(\rho) = \frac{\eta^l}{\rho^l}\rho$ la recta en el plano (ρ, η) que parte del origen, pasa a través de $(\rho^l, \eta^l) \in F$, $(\rho^*, \eta^*) \in F \cap C$ y se extiende sobre la región C . Tal recta representa precisamente la onda elemental 1-choque del sistema (3.11) obtenida en el caso II, que contiene y une al punto $(\rho^*, \eta^*) \in F \cap C$ con algún punto $(\rho^m, \eta^m) \in C$, ver gráfica 3.5. La existencia del punto $(\rho^m, \eta^m) \in C$ es

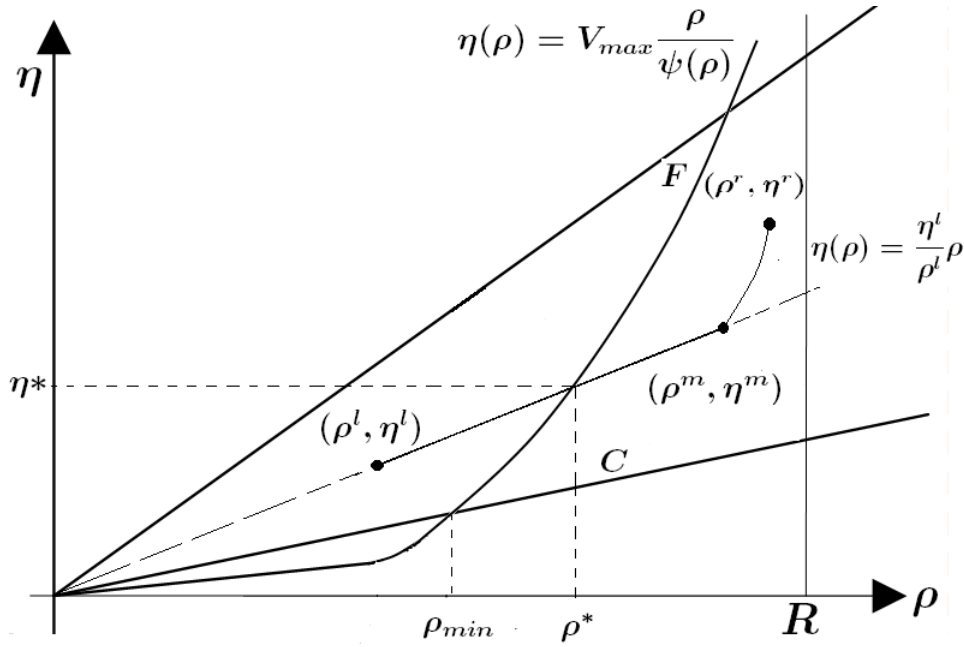


Figura 3.5: Solución al problema de Riemann (3.11), formada por una 1-onda elemental choque o rarefracción, seguida por una 2-discontinuidad de contacto.

garantizada por la invarianza de la región C con respecto al sistema (3.11)

verificada en el caso II. Además, la prueba de existencia y unicidad del punto $(\rho^*, \eta^*) \in F \cap C$ es análoga a la prueba realizada en el caso III para el estado intermedio. También se tiene que $\eta^* = V_{max} \frac{\rho^*}{\psi(\rho^*)}$ pues $w = \frac{\eta}{\rho} = \frac{V_{max}}{\psi(\rho)}$.

Ahora, consideremos la onda elemental 2-discontinuidad de contacto del sistema (3.11) que pasa a través de (ρ^m, η^m) y se une con $(\rho^r, \eta^r) \in C$ es decir, la curva $\eta(\rho) = v(\rho^m, \eta^m) \frac{\rho}{\psi(\rho)}$, con $\rho^m < R$. (Si $\rho^m = R$ entonces debemos considerar la recta $\rho = R$).

En resumen:

i) Para $(\rho^l, \eta^l) \in F$ y $\left(\rho^*, V_{max} \frac{\rho^*}{\psi(\rho^*)}\right) \in F \cap C$ se tiene que

$$(\rho, \eta)(t, x) = \begin{cases} (\rho^l, \eta^l) & \text{si } x < V_{max}t \\ \left(\rho^*, V_{max} \frac{\rho^*}{\psi(\rho^*)}\right) & \text{si } x > V_{max}t, \end{cases} \quad (3.26)$$

es la solución para el sistema (3.4).

ii) Para $\left(\rho^*, V_{max} \frac{\rho^*}{\psi(\rho^*)}\right) \in F \cap C$ y $(\rho^r, \eta^r) \in C$, se tiene que la solución del sistema (3.11) es una onda 1-choque que une a $\left(\rho^*, V_{max} \frac{\rho^*}{\psi(\rho^*)}\right)$ con (ρ^m, η^m) , seguida por una onda elemental 2-discontinuidad de contacto que une a (ρ^m, η^m) con (ρ^r, η^r) .

Así, para todo $(\rho^l, \eta^l) \in F$ y $(\rho^r, \eta^r) \in C$ la solución del problema de Riemann (3.1)-(3.2) se obtiene como superposición de las soluciones construidas en i) y ii). \square

CONCLUSIONES

- Es posible aplicar la teoría de los sistemas de leyes hiperbólicas al modelamiento de flujos de tráfico.
- El modelo de tráfico (3.1) introducido en [6] es más próximo a los fenómenos reales que el modelo LWR, por tanto es de esperar que la solución al problema de Riemann sea mucho más dispendiosa de encontrar.
- Los modelos de tráfico que incluyen transición de fases, son los modelos que consideran dos fenómenos importantes en los flujos de tráfico; el congestionamiento de las vías y su liberamiento con respecto a otros vehículos.
- En el presente modelo de tráfico, consideramos una cota superior para la velocidad general del tráfico V_{max} , sin embargo desde un punto de vista analítico más general, es posible considerar tal cota como una función de la densidad ρ es decir, $V_{max}(\rho)$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 20, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [2] A. Bressan, *Hyperbolic conservation laws: an illustrated tutorial*, Notes for a summer course, Cetraro 2009.
- [3] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), 537-566.
- [5] R. M. Colombo, *Hyperbolic phase transitions in traffic flow*, SIAM J. Appl. Math., 63 (2002), pp. 708-721.
- [6] R. M. Colombo, F. Marcellin, And M. Rascle *A 2-Phase Traffic Model Based on a Speed Bound*, SIAM J. Appl. Math. 70 (2010) pp. 2652-2666.
- [7] D. Hoff, *Invariant regions for systems of conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc., 289 (1985), pp. 591-610.

- [8] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 229 (1955), pp. 317-345.
- [9] P. I. Richards, *Shock waves on the highway*, Oper. Res., 4 (1956), pp. 42-51.
- [10] B. S. Kerner. *Phase transitions in traffic flow*. In D. Helbing, H. Hermann, M. Schreckenberg, and D. Wolf, editors, Traffic and Granular Flow 99, pages 253-283. Springer Verlag, 2000.
- [11] C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer-Verlag, 1999.
- [12] B. Temple, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 280 (1983), pp. 781-795.
- [13] P. Bagnerini, R. M. Colombo, and A. Corli, *On the role of source terms in continuum traffic flow models*, Math. Comput. Modelling, 44 (2006), pp. 917-930.
- [14] F. Asakura, *Admissibility of Shock Waves and Uniqueness of the Riemann Problem*, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.