

**UTILIZACIÓN DEL ANÁLISIS ENVOLVENTE DE DATOS (DEA) EN EL
DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA PARA EL ESTABLECIMIENTO
DE COSTOS EFICIENTES DE REMUNERACIÓN, EN LA
ADMINISTRACIÓN, OPERACIÓN Y MANTENIMIENTO DE LOS SISTEMAS
DE DISTRIBUCIÓN ELÉCTRICA.**

ROBINSON ALEXANDER GONZÁLEZ PARRA
Ingeniero Electricista



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
BOGOTÁ
2010

ROBINSON ALEXANDER GONZÁLEZ PARRA
Ingeniero Electricista

Trabajo presentado para optar
Por el título de Magíster en Ingeniería Eléctrica

Director
HENRY NAVARRO SANCHEZ
I.E.,M.Sc.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
BOGOTÁ
2010

NOTA DE ACEPTACIÓN

Director del Proyecto

Jurado

Jurado

1 Contenido

Capítulo 1.....	5
Introducción	5
1.1 Planteamiento del problema.....	5
1.2 Solución propuesta.....	6
1.3 Contenido de la tesis	8
Capítulo 2.....	9
2 Análisis factorial y metodología DEA	9
2.1 Características del análisis factorial	9
2.2 Adecuación de la información	11
2.3 Análisis de adecuación muestral	12
2.3.1 Matriz de correlaciones.....	12
2.3.2 Determinante de la matriz de correlaciones.....	12
2.3.3 Índice Kaiser-Meyer-Olkin (KMO).....	13
2.3.4 Análisis de adecuación muestral para el caso de las empresas de distribución colombianas	14
2.4 Extracción de factores.....	16
2.4.1 Análisis de componentes principales.....	16
2.5 Rotación de factores.....	38
2.6 Interpretación de factores.....	39
Capítulo 3.....	41
3 Concepto general de eficiencia y productividad	41
3.1 Eficiencia técnica	41
3.2 Eficiencia de precio.....	43
3.3 Eficiencia global.....	43
Capítulo 4.....	45
4 Análisis envolvente de datos.....	45
4.1 Caracterización de los modelos DEA	46
4.1.1 Orientación de los modelos.....	46
4.1.2 Tipología de retornos a escala.....	47
Capítulo 5.....	48
5 Modelos DEA	48
5.1 Modelo DEA-CCR.....	48
5.2 Conceptos de eficiencia fuerte y débil	52
5.3 Modelo DEA de dos etapas.....	53
5.4 Modelo DEA-BCC.....	55
5.4.1 Formulación del modelo BCC	55
5.5 Modelo NIRS	56
5.6 Inclusión de variables no controlables en los modelos DEA.....	56
Capítulo 6.....	59
6 Índice de productividad de Malmquist.....	59
6.1 Descomposición del índice de productividad de Malmquist	62
6.1.1 Descomposición del índice de Malmquist al considerar rendimientos variables a escala.....	65
Capítulo 7.....	69
7 Propuesta de remuneración de AOM a partir de la metodología desarrollada	69
Capítulo 8.....	70

8	Aplicación de la metodología desarrollada para el caso de las empresas de distribución colombianas	70
8.1	Selección de variables de entrada y salida	70
8.2	Caracterización del modelo DEA adecuado	70
8.2.1	Orientación del modelo	70
8.2.2	Evaluación de retornos a escala	71
8.3	Evaluaciones de eficiencia	72
8.4	Utilización del índice de productividad de Malmquist.	75
8.5	Estimación de costos a remunerar por concepto de AOM.	77
Capítulo 9	79
9	Conclusiones y trabajo futuro	79
9.1	Resumen.....	79
9.2	Conclusiones	79
9.3	Aportes originales.	79
9.4	Trabajo futuro.....	80
BIBLIOGRAFIA	81
ANEXOS	82
	<i>A Índice de correlación lineal.....</i>	<i>82</i>
	<i>B. Resultados de los análisis factoriales de primera fase.....</i>	<i>84</i>

Capítulo 1

Introducción

1.1 Planteamiento del problema

En el actual esquema tarifario la etapa de distribución eléctrica es la que más peso tiene en el valor de las facturas, y teniendo en cuenta las características de monopolio natural que presenta esta actividad, es claro que la adecuada estimación de costos de remuneración a los operadores de red, es un tema de gran importancia. Al respecto, se han realizado numerosas investigaciones con el fin de encontrar mecanismos alternativos de remuneración, que garanticen tarifas justas para los usuarios, pero que a su vez, permitan un apropiado margen de rentabilidad a las empresas.

En Colombia las tarifas son establecidas siguiendo un esquema económico del tipo price cap¹, con el cual, se espera que las empresas asuman de forma autónoma las medidas necesarias para reducir sus costos operativos, y de esta forma, obtener los máximos ingresos permitidos por el regulador.

Uno de los ítems que compone el costo total de remuneración a las empresas distribuidoras, corresponde a los gastos de Administración, Operación y Mantenimiento (AOM) de las redes. Con la resolución CREG 097 de 2008, se estableció la metodología para calcular este valor. En esencia, se definió que la cuantía a remunerar por concepto de gastos AOM, correspondería a un porcentaje del valor de los activos eléctricos propiedad de las empresas, más un ajuste² por concepto de confiabilidad.

Aunque este esquema de remuneración parece en principio adecuado, tiene un elemento discutible que es necesario considerar. Si bien la confiabilidad es un factor muy importante en la prestación de cualquier servicio público, y utilizarlo como elemento de ajuste económico es apropiado, bajo el nuevo esquema³ de remuneración que fue implantado a partir de este año, podría tener efectos bastantes nocivos sobre los intereses de las empresas distribuidoras.

El nuevo esquema plantea un escenario diferente para la remuneración por concepto de gastos AOM. Hasta el año pasado, cada grupo⁴ de calidad era remunerado de forma independiente considerando exclusivamente los índices de confiabilidad correspondientes a ese grupo. A partir del primero de enero de este año, los AOM son remunerados de forma global, calculando el promedio aritmético de los cuatro grupos.

Aunque este esquema de remuneración parece apropiado con el fin de garantizar la mejora en la calidad del servicio para todos los clientes, tiene un punto discutible.

¹ En este esquema las tarifas son fijadas por un determinado periodo de tiempo sin que se realice ningún tipo de ajuste.

² Este ajuste puede ser a favor ó en contra de los intereses de las empresas, según los indicadores de confiabilidad.

³ Resolución CREG 097 de 2010

⁴ Grupo 1: Población de 100.000 habitantes ó más

Grupo 2: Población mayor ó igual a 50.000 y menor a 100000 habitantes

Grupo 3: Población menor a 50000 habitantes

Grupo 4: Zona rural con menos de 1000 habitantes

Debido a factores de tipo ambiental, geográfico, demográfico y económico, este tipo de evaluación podría no ser justo con el real desempeño de las empresas. Para aclarar este punto, es necesario entender que no todas las empresas atienden a todos los grupos, y que existen grupos que presentan una mayor problemática para su atención. Un ejemplo de esto son los clientes pertenecientes al grupo 4, caracterizados por estar en zonas rurales, las cuales, presentan difíciles condiciones de acceso y por tener características especiales que dificultan su atención.

Por lo anterior, las empresas que atiendan el grupo 4 de calidad deberán realizar grandes esfuerzos económicos con el fin de lograr mejorar los índices de calidad.

Con este panorama, las empresas más afectadas serán aquellas que no tengan los recursos suficientes, para adelantar los programas de inversión necesarios para garantizar la mejora en la calidad del servicio. Debido a esto, se hace necesaria la realización de investigaciones enfocadas a encontrar metodologías alternativas de remuneración de AOM, que estén fundamentadas en la búsqueda de la eficiencia y calidad en la prestación del servicio, pero que además, sean capaces de reconocer el esfuerzo de las empresas por lograr lo exigido por el regulador, teniendo en cuenta los recursos disponibles para ello.

Este enfoque es sin duda alguna bajo el cual deberían ser evaluadas las empresas distribuidoras, ya que garantiza un real esfuerzo por la optimización de los recursos. Fomenta la competencia en un mercado monopólico y establece las condiciones para reducir las tarifas y aumentar los índices de rentabilidad de las empresas. Sin embargo, debido a las características propias del negocio de distribución y a las diferencias de tamaño, ubicación y entorno operativo, no es una meta fácil de alcanzar.

En Colombia se han realizado algunas investigaciones⁵ encaminadas a introducir el concepto de eficiencia, en el establecimiento de costos a remunerar por concepto AOM a las empresas de distribución y transmisión. Estos trabajos han dado los primeros pasos en el uso de técnicas de medición de eficiencia, con el fin de establecer nuevos esquemas de remuneración.

1.2 Solución propuesta

En esta investigación las empresas han sido abordadas desde un enfoque netamente productivo, con el fin de establecer índices de productividad que finalmente permitirán encontrar valores de eficiencia.

La metodología propuesta permite establecer escalas de remuneración por concepto de gastos AOM, utilizando el análisis envolvente de datos (DEA) como herramienta de medición de eficiencia.

El proceso completo está resumido en dos etapas principales:

1. **Identificación de variables de entrada y salida:** Debido a las características propias de la metodología DEA, fue necesario incluir una etapa de identificación de las variables que serían utilizadas en los modelos matemáticos. Para esto, se utilizaron técnicas factoriales que permitieron

⁵ A. García [4], D. Benavides [5]

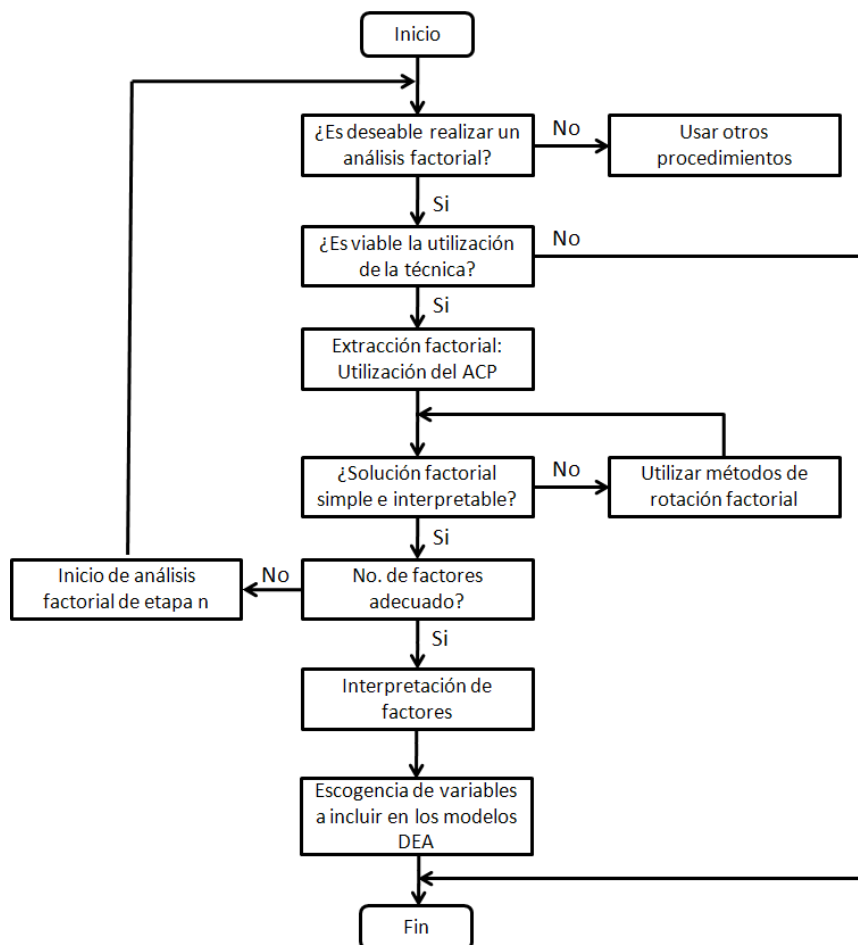
identificar variables características de la etapa de distribución, y que sirvieron como parámetros de comparación entre las empresas distribuidoras.

2. **Evaluaciones de eficiencia:** Se realizaron evaluaciones de eficiencia mediante el uso del análisis envolvente de datos (DEA), y se encontraron índices de eficiencia⁶ para cada una de las empresas distribuidoras; con base en los resultados obtenidos, fue posible establecer rangos de compensación por concepto de gastos AO&M.

Las etapas enumeradas anteriormente permitieron que la metodología propuesta fuera más robusta, y que los resultados obtenidos tuvieran una adecuada sustentación desde el punto de vista teórico y matemático. Al respecto, es importante resaltar el hecho de que el uso de técnicas factoriales, es uno de los aportes más importantes realizados por esta investigación, ya que en ningún trabajo realizado en Colombia, relacionado con el tema, se había utilizado un enfoque similar en la selección del número y tipo de variables a incluir en los modelos DEA.

Este aporte es una extensión del trabajo realizado por el Doctor Raúl Edgardo Sanhueza Hormazábal, en su tesis doctoral "*Fronteras de eficiencia, metodología para la determinación del valor agregado de distribución*" [1]

A continuación se presentan los pasos principales en el desarrollo del análisis factorial.



⁶ Los índices de eficiencia encontrados mediante el uso del análisis Envolvente de Datos son relativos tal y como se verá más adelante en este mismo documento.

De esta manera, se ha desarrollado una metodología lógica y secuencial, cuyos resultados están fundamentados en la teoría, y que por lo tanto, pueden ser apropiadamente sustentados.

1.3 Contenido de la tesis

Los resultados obtenidos en esta investigación están fundamentados en el uso de técnicas factoriales y de la implementación de la metodología DEA. La información que sirvió como base para el desarrollo de los análisis, fue extraída del sistema único de información (SUI) de la Superintendencia de Servicios Públicos Domiciliarios (SSPD).

En el capítulo dos de este documento se presenta el procedimiento correspondiente al análisis factorial, realizado como paso previo a la utilización de la metodología DEA. Se muestran los pasos que componen este tipo de análisis, y se presentan los resultados obtenidos después de su implementación.

A partir del capítulo tres y hasta el capítulo seis, se presenta la teoría elemental que describe la metodología DEA. Se muestran los modelos básicos y se profundiza en algunas de sus variaciones principales.

En el capítulo siete se presentan los resultados obtenidos, al implementar la metodología propuesta a 24 empresas distribuidoras de energía eléctrica.

Finalmente en el capítulo ocho, se dan las conclusiones y realizan observaciones con base en los resultados obtenidos en esta investigación.

Capítulo 2

2 Análisis factorial y metodología DEA

En la totalidad de trabajos realizados en Colombia y que sirvieron como referente temático en el desarrollo de esta investigación, no se encontraron procedimientos suficientemente robustos desde el punto de vista teórico que explicaran de forma satisfactoria la escogencia del número y tipo de variables utilizadas en los modelos DEA. La selección de las variables estaba fundamentada principalmente en análisis cualitativos, basados en hechos claramente subjetivos. Por tal razón, se evaluaron alternativas de análisis que permitieran dar sustento teórico a la escogencia de las variables, y que además, pudieran ser respaldados por índices cuantitativos (puntajes, porcentajes etc).

Se decidió entonces utilizar el análisis factorial en esta investigación, ya que ofrecía una novedosa forma de simplificación del problema, y como se verá más adelante, este aspecto es esencial para la óptima implementación de la metodología DEA.

2.1 Características del análisis factorial

En el estudio de fenómenos en los cuales intervienen un gran número de variables, es complicado interpretar el significado de la información, más aún, cuando dichas variables están representadas por una gran cantidad de datos. Con el uso de técnicas de análisis multivariado como el análisis factorial, se busca reducir el número de dimensiones en la que está inmersa la información.

Este tipo de análisis se aprovecha de la alta correlación existente entre diversas variables, para crear grupos homogéneos de información denominados factores⁷. Dichos factores son un nuevo conjunto de variables sintéticas, las cuales explican aspectos concretos del fenómeno estudiado.

El uso de técnicas factoriales está recomendado para dos situaciones específicas:

1. Cuando se quiera reducir⁸ el número de variables involucradas en un determinado fenómeno.
2. Cuando se busca encontrar información extra de tipo cualitativo, que debido al gran número de datos no es posible identificar de forma simple.

Los orígenes del análisis factorial se encuentran en las técnicas de regresión lineal desarrolladas por Dalton (1890), las cuales fueron extendidas por Pearson (1901) con el desarrollo del análisis de componentes principales; paso esencial en el desarrollo del análisis factorial. Sin embargo, el análisis factorial propiamente dicho, es atribuido a Sperman (1904) por ser el primero en integrar en un solo procedimiento el conjunto de etapas que componen el análisis factorial.

⁷ Este conjunto de factores constituye la solución factorial, y con ella, se busca explicar la variabilidad existente entre un conjunto de variables.

⁸ Más adelante se verá que debido a las características propias de la metodología DEA, la reducción en el número de variables es algo esencial para que los resultados obtenidos sean adecuados.

Thurstone (1947) Introdujo el concepto de estructura simple y desarrolló los métodos de rotación factorial, con el fin de obtener soluciones más simples e interpretables.

Otro elemento importante de esta técnica, es que puede ser de carácter exploratorio o confirmatorio de acuerdo al enfoque dado al estudio. En el primer caso, no se conoce de antemano el número y características de los factores; es durante el análisis que se determinan estos aspectos. Por el contrario, para el caso del análisis factorial confirmatorio, los factores han sido establecidos previamente y lo que se busca con el análisis, es corroborar hipótesis ya establecidas.

En esta investigación se utilizó el análisis factorial exploratorio, ya que en Colombia no existe trabajo alguno que haya abordado de forma similar el estudio de los sistemas de distribución. Por tal razón, no existen hipótesis preestablecidas que expliquen el comportamiento de las diferentes actividades que componen a esta etapa.

Aunque inicialmente las técnicas factoriales se basaron en el uso de la lógica y la suposición, con el aumento en la capacidad computacional se desarrollaron técnicas más sofisticadas; algunas de ellas apoyadas en el uso de la estadística y los métodos numéricos para su implementación.

En síntesis el análisis factorial es una técnica multivariable basada en sofisticados principios matemáticos y estadísticos. Tiene como objetivo principal, reducir un conjunto de variables aleatorias altamente correlacionadas, en un número inferior de variables independientes no correlacionadas (factores). Cada factor encontrado, es en esencia, la explicación por la cual las variables que lo componen presentan un determinado comportamiento.

La expresión general que define matemáticamente el modelo factorial es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 X_{i1} &= w_{1A}F_{iA} + w_{1B}F_{iB} + w_{1C}F_{iC} + \dots + w_{1F}F_{iF} \\
 X_{i2} &= w_{2A}F_{2iA} + w_{2B}F_{2iB} + w_{2C}F_{2iC} + \dots + w_{2F}F_{2iF} \\
 X_{i3} &= w_{3A}F_{iA} + w_{3B}F_{3B} + w_{3C}F_{3C} + \dots + w_{3F}F_{iF} \\
 &\vdots \\
 X_{iv} &= w_{vA}F_{iA} + w_{vB}F_{iB} + w_{vC}F_{3C} + \dots + w_{vF}F_{iF}
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

donde:

X_{iv} es la respuesta de la empresa i respecto a la variable v

w_{vA} es el peso de la variable v para el factor A

F_{iA} es el peso del factor A para la empresa i

Como se puede apreciar, la expresión que resume los resultados del análisis factorial es bastante simple. La verdadera complejidad del análisis surge en el desarrollo de las etapas que lo componen.

En la siguiente tabla se muestran las cuatro etapas que conforman el análisis factorial, así como algunos de los procedimientos que permiten el desarrollo de las etapas enunciadas.

ETAPA	DESCRIPCIÓN	MÉTODOS
1. Construcción de la matriz de correlaciones y análisis de adecuación muestral.	Se busca determinar el nivel de asociación lineal entre las variables analizadas, y de esta forma establecer la conveniencia de utilizar técnicas factoriales.	<ol style="list-style-type: none"> 1. El determinante. 2. Test de esfericidad de Barlett. 3. Índice KMO de Kaiser-Meyer-Olkin 4. Correlación anti-imagen. 5. Medida de adecuación de la muestra (MSA). 6. Coeficiente de correlación múltiple.
2. Extracción de factores.	El objetivo de esta etapa es resumir el conjunto de variables inicial, en un conjunto más pequeño de factores que ofrezcan el mismo nivel de información.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Método del centroide. 2. Análisis de Componentes principales. 3. Factor principal. 4. Factorización de ejes principales. 5. Factorización alpha. 6. Factorización de imagen. 7. Máxima verosimilitud. 8. Mínimos cuadrados no ponderados. 9. Mínimos cuadrados generalizados. 10. Mínres. 11. Segunda generación de Kaiser
3. Rotación de factores.	Se busca seleccionar la solución factorial más sencilla e interpretable.	<p>I-Ortogonales.</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Quartimax. b. Ecuamax. c. Ortomax. d. Varimax. <p>II- Oblicuas.</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Cuartimín. b. Oblimax. c. Oblimin. d. Ortoblicua.
4. Puntuaciones factoriales	Permite determinar en que medida los factores seleccionados, se presentan en los individuos o en otras Unidades de análisis.	

Tabla 1. Etapas en el desarrollo del análisis factorial

2.2 Adecuación de la información

Como se mencionó anteriormente, la información utilizada para el desarrollo de esta investigación fue extraída del Sistema Único de Información (SUI). Dicha información está representada por 199 variables que describen cuatro aspectos relacionados con las empresas distribuidoras. Dichos aspectos son:

- Técnicos-operativos
- Financieros
- Comerciales
- Administrativos

Debido a que la base de datos utilizada como fuente de información presentaba un número significativo de datos faltantes, fue necesario realizar un proceso de adecuación a la información; esto con el fin de limitar al máximo los efectos negativos que pudiera tener este hecho en etapas posteriores del análisis.

Este aspecto adquiere mayor importancia si se tiene en cuenta que para el desarrollo del análisis factorial, se requiere de una gran cantidad de operaciones de tipo matricial, las cuales, debido a la falta de datos (ceros en las matrices), podrían no ser posibles como consecuencia de la aparición de matrices singulares. Para evitar esto, fue necesaria la eliminación directa de 44 de las variables originales. Este paso se hizo de forma cuidadosa, teniendo en cuenta el efecto que podría tener la desaparición de cada variable en el análisis. Además, algunos de los datos faltantes se completaron mediante el uso de técnicas de interpolación.

2.3 Análisis de adecuación muestral

La primera etapa en el análisis factorial corresponde a un estudio de factibilidad de aplicación de la técnica. En últimas, busca determinar la conveniencia de utilizar técnicas factoriales de acuerdo al número y comportamiento de las variables.

Con el fin de lograr este objetivo, se utilizaron dos de los índices de adecuación muestral señalados en la tabla 1. Dichos métodos fueron: el cálculo del determinante y el índice Kaiser-Meyer-Olkin (KMO); ambos métodos parten del estudio de la matriz de correlaciones, por lo que es claro que el primer paso en esta etapa del análisis es la construcción de dicha matriz.

2.3.1 Matriz de correlaciones.

La matriz de correlaciones presenta de forma conjunta, el grado de correlación que tiene cada variable con el resto de variables incluidas en el análisis. Permite identificar la existencia de grupos de variables con un alto nivel de asociación, lo cual es requisito indispensable para que los resultados del análisis factorial sean óptimos.

La estructura de la matriz de correlaciones es la siguiente.

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,j} & \dots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,j} & \dots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i,1} & r_{i,2} & \dots & r_{i,j} & \dots & r_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \dots & r_{n,3} & \dots & r_{n,n} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

donde:

r_{ij} : Es el coeficiente de correlación entre las variables i y j .

2.3.2 Determinante de la matriz de correlaciones

Como se mencionó anteriormente, el determinante de la matriz de correlaciones permite establecer la conveniencia de utilizar técnicas factoriales. Un valor cercano⁹ a

⁹ Este valor nunca deberá ser igual a cero ya que significaría que las variables son linealmente dependientes, lo cual impediría la realización de cálculos matemáticos necesarios para el desarrollo del análisis factorial.

cero indicará que el conjunto de datos es apropiado para utilizar este tipo de técnicas; caso contrario ocurrirá si este valor es alto.

La forma general para el cálculo del determinante en matrices de dimensión $n \times n$ es la siguiente.

$$\det R = |R| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} \quad (2-3)$$

donde:

a es el valor del elemento i_k de la matriz de correlaciones

A es el cofactor asociado al elemento i_k

Una desventaja inherente de este método radica en el hecho de que no es posible definir de forma concreta la calidad del análisis, ya que el cálculo del determinante no permite crear una clasificación jerárquica de los resultados. Debido a esto, resulta difícil definir cuál de los grupos de variables será mejor representado por un modelo factorial.

Teniendo en cuenta este último aspecto, se utilizó un método adicional que además de determinar la conveniencia de implementar técnicas factoriales, brinda la posibilidad de definir la calidad del análisis.

2.3.3 Índice Kaiser-Meyer-Olkin (KMO)

El índice KMO tiene como característica particular, el establecer rangos de evaluación que definen de forma específica la eficacia del análisis. Esto se hace con base en el número y nivel de correlación de las variables involucradas, mediante la comparación de la magnitud de los coeficientes de correlación simple, con los coeficientes de correlación parcial.

La expresión que permite calcular este índice es la siguiente:

$$KMO = \frac{\sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} r_{ji}^2}{\sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} r_{ji}^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} a_{ji}^2} \quad (2-4)$$

donde

r_{ij} : es el coeficiente de correlación simple entre las variables i y j

a_{ij} : es el coeficiente de correlación parcial entre las variables i y j

Debido a que la correlación parcial entre dos variables debe ser pequeña cuando el modelo factorial es apropiado, se espera que el denominador de la expresión anterior aumente poco respecto al denominador. De esta forma, el índice KMO tenderá a 1 y la realización del análisis factorial será algo viable. Por otra parte, si el índice KMO calculado resulta ser pequeño, significará entonces que la utilización de técnicas factoriales no es una alternativa aconsejable.

A continuación se presentan los rangos que definen la calidad del análisis factorial, en función del valor obtenido por el índice KMO.

- $0,9 < KMO \leq 1,0 \Rightarrow$ Nivel de adecuación muestral excelente
- $0,8 < KMO \leq 0,9 \Rightarrow$ Nivel de adecuación muestral muy bueno
- $0,7 < KMO \leq 0,8 \Rightarrow$ Nivel de adecuación muestral bueno
- $0,6 < KMO \leq 0,7 \Rightarrow$ Nivel de adecuación muestral aceptable
- $0,5 < KMO \leq 0,6 \Rightarrow$ Nivel de adecuación muestral bajo
- Si $KMO \leq 0,5 \Rightarrow$ Nivel de adecuación muestral muy bajo

En términos prácticos, la realización del análisis factorial es conveniente cuando el valor del índice KMO es igual ó superior 0,6.

2.3.4 Análisis de adecuación muestral para el caso de las empresas de distribución colombianas

A continuación se presentan los resultados obtenidos en los análisis de adecuación muestral, realizados con base en la información disponible para los años comprendidos entre el 2004 y el 2007.

Análisis del determinante.

En la siguiente tabla se presentan los determinantes de las matrices de correlación, correspondientes a los grupos de variables que conforman las cuatro áreas de la etapa de distribución eléctrica.

AREA	GRUPO	2004	2005	2006	2007
		DETERMINANTE	DETERMINANTE	DETERMINANTE	DETERMINANTE
TÉCNICA OPERATIVA	INFRAESTRUCTURA	-1,50E-10	1,50E-12	-5,47E-11	-5,30E-11
	CONFIABILIDAD	4,30E-01	3,20E-01	3,18E-01	5,40E-01
FINANCIERA	ACTIVOS	1,20E-02	2,20E-03	-3,21E-04	-4,50E-04
	PASIVOS	1,60E-03	1,60E-03	1,99E-01	1,80E+00
	BALANCE GENERAL	-8,20E-07	-3,70E-07	1,68E-07	-2,40E-07
	ESTADO DE RESULTADOS	-2,70E-05	-3,70E-04	-6,75E-04	-1,20E-05
COMERCIAL	CONSUMO PROMEDIO	-5,90E-10	5,40E-07	5,06E-08	1,30E-07
	CONSUMOS	2,30E-20	-1,10E-16	8,02E-18	-6,70E-18
	FACTURA MEDIA	1,00E-14	9,80E-12	3,48E-16	-1,00E-11
	FACTURA PROMEDIO	-3,80E-08	1,30E-05	2,07E-06	1,20E-05
	SUSCRIPTORES	3,80E-20	3,80E-07	-4,61E-14	-1,20E-15
	TOTAL FACTURADO	-8,20E-22	-2,40E-14	4,17E-16	-1,30E-14
	VALOR CONSUMO	-8,20E-22	-2,40E-14	4,17E-16	-1,30E-14
	FACTURACIÓN Y RECAUDO	-	1,10E-30	9,39E-32	-
	SUBSIDIOS Y CONTRIBUCIONES	-6,70E-11	-5,50E-11	-1,33E-10	-3,10E-12
ADMINISTRATIVA	ADMINISTRACIÓN	1,80E-01	2,50E-02	8,13E-01	1,70E-02

Tabla 2. Determinantes de las matrices de correlaciones para los años 2004 al 2007

Los resultados obtenidos en los análisis muestran que la utilización de técnicas factoriales es en principio viable, ya que como se ve en la tabla 2 los valores calculados son cercanos a cero.

Índice KMO

A continuación se presentan los resultados de las evaluaciones de adecuación muestral realizadas mediante el uso del índice KMO.

AREA	GRUPO	No. De variables	2004	2005	2006	2007
			INDICE KMO	INDICE KMO	INDICE KMO	INDICE KMO
TÉCNICA OPERATIVA	INFRAESTRUCTURA	10	0,80	0,72	0,71	0,80
	CONFIABILIDAD	3	0,50	0,51	0,52	0,61
FINANCIERA	ACTIVOS	7	0,70	0,67	0,63	0,53
	PASIVOS	6	0,84	0,69	0,81	0,82
	BALANCE GENERAL	7	0,77	0,79	0,62	0,71
	ESTADO DE RESULTADOS	7	0,78	0,77	0,65	0,68
COMERCIAL	CONSUMO PROMEDIO	12	0,25	0,50	0,50	0,57
	CONSUMOS	12	0,65	0,66	0,90	0,90
	FACTURA MEDIA	12	0,28	0,61	0,66	0,50
	FACTURA PROMEDIO	12	0,15	0,60	0,27	0,60
	SUSCRIPTORES	12	0,65	0,40	0,90	0,90
	TOTAL FACTURADO	12	0,65	0,6	0,58	0,6
	VALOR CONSUMO	12	0,65	0,6	0,6	0,6
	FACTURACIÓN Y RECAUDO	18	-	0,50	0,90	-
	SUBSIDIOS Y CONTRIBUCIONES	10	0,55	0,57	0,51	0,53
ADMINISTRATIVA	ADMINISTRACIÓN	6	0,60	0,60	0,57	0,79

Tabla 3. Valores de los índices KMO calculados para los grupos de variables correspondientes a los años 2004 al 2007

Con el fin de facilitar la visualización y análisis de los resultados, en la tabla 3 se han sombreado los índices que presentaron un valor superior a 0,6. Como se ve, los resultados obtenidos son lo suficientemente buenos como para asegurar que el uso de técnicas factoriales es aconsejable.

En esta etapa del análisis los grupos que mayores problemas presentaron fueron los correspondientes al área comercial, debido principalmente al número de variables y a la dinámica propia de esta actividad, la cual, varía¹⁰ de forma importante de una empresa a otra. Sin embargo, este aspecto no afectó de forma significativa los análisis, puesto que de un total de 64 grupos de variables evaluados, solo 20 presentaron bajos índices de adecuación muestral KMO.

¹⁰ Esto se debe esencialmente a factores operativos y regulatorios.

Es importante aclarar que este hecho no descalifica totalmente la utilización de la técnica, simplemente, indica que la reducción del número de variables en estos grupos no será la mejor¹¹.

Otro elemento importante y que es necesario tener en cuenta al momento de interpretar los resultados, es que debido a la manipulación que sufrió la base de datos con el fin de limitar la pérdida de información, es posible que variables que pudieran haber tenido un impacto importante en el análisis, tal vez no hayan sido consideradas.

Sin embargo, y como se mencionó anteriormente, se tomaron diversas medidas con el fin de garantizar, en lo posible, que las variables escogidas para los análisis representaran de forma adecuada al total de la información.

2.4 Extracción de factores.

Una vez se estableció la conveniencia de utilizar el análisis factorial, se continuó con los pasos subsecuentes del análisis; se revisó la literatura y se realizaron diversas pruebas, con el fin de establecer cual de las técnicas propuestas en la tabla 1 sería la más adecuada en la extracción de los factores.

Con base en los resultados obtenidos se decidió utilizar el análisis de componentes principales (ACP), debido a que demostró ser la técnica más simple de implementar y porque los resultados obtenidos fueron satisfactorios.

2.4.1 Análisis de componentes principales.

El análisis de componentes principales es la técnica más utilizada en la extracción de los factores que harán parte de la solución factorial. Aunque algunos autores consideran que el ACP es en si mismo el análisis factorial, realmente son técnicas complementarias. El ACP busca identificar cuantas y cuales son las variables que resumen la diversidad de los datos, en tanto que el análisis factorial explica las componentes (factores) que resumen la información; en otras palabras, el análisis factorial brinda características cualitativas a cada uno de los factores encontrados mediante el uso del ACP.

Con el fin de presentar de forma clara la esencia del ACP, se dejará de lado la componente matemática y se dará una explicación eminentemente conceptual.

Partiendo de una situación hipotética en la cual se han considerado dos variables altamente correlacionadas, al dibujarse en un plano bidimensional el comportamiento de una variable en función de la otra, se obtendría un gráfica similar a la que se muestra a continuación.

¹¹ Este aspecto se verá compensado en la siguiente fase del análisis factorial, ya que como se verá mas adelante, el resultado de integrar todas las áreas evaluadas en un solo análisis factorial, permitió que el número de variables disminuyera aún más.

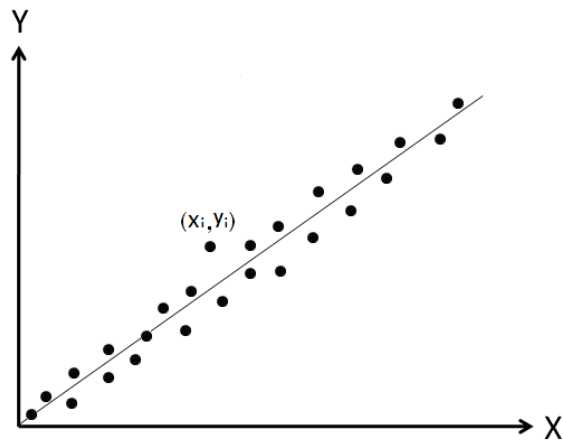


Figura 1. Comportamiento de dos variables altamente correlacionadas.

Las parejas de puntos (x_i, y_i) conforman las medidas de la i -ésima muestra del análisis, las cuales, al ser ubicadas en el plano, constituyen lo que se denomina como nube muestral.

Como se verá a continuación, el estudio de las características de dicha nube es clave para la óptima implementación del ACP.

2.4.1.1 ACP normado y ponderación de datos

El primer paso en el análisis de componentes principales, es la ubicación del punto de referencia del sistema coordenado que representará la solución factorial.

En varias de las técnicas utilizadas en la extracción de los factores, no es necesario que este punto esté ubicado en algún sitio en particular. Sin embargo, para el caso específico del ACP, se hace necesario que este punto se encuentre exactamente en el centro de gravedad de la nube muestral. Por tal motivo, es obligatorio “desplazar” cada uno de los puntos de la nube respecto al punto de referencia del nuevo sistema coordenado tal y como se muestra en la siguiente figura.

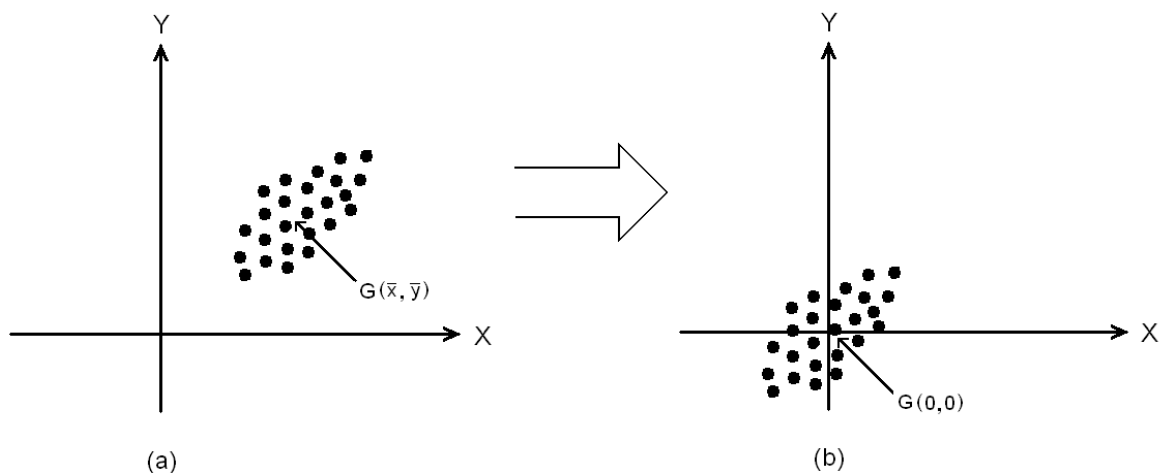


Figura 2. Desplazamiento de la nube muestral como parte del ACP

Uno de los elementos de ajuste previo al desarrollo del ACP es la ponderación de las variables. Este proceso es realizado cuando con base en la experiencia, se ha establecido que alguna(s) variable(s) tiene(n) un mayor “peso” para el análisis; en este caso se habla de un ACP ponderado¹².

Debido al elevado número de variables consideradas, y al desconocimiento del efecto de cada una ellas en el área de la distribución eléctrica, se optó por utilizar un ACP no ponderado en el desarrollo de esta investigación.

Otro elemento de ajuste previo al análisis corresponde a la estandarización¹³ de la información. Este paso es realizado cuando las variables presentan diferentes unidades de medida, lo que ocasionaría que las componentes extraídas fueran difíciles de explicar desde el punto de vista físico; de esta manera, la varianza de todas las variables es la misma, y por lo tanto su importancia también.

Con base en lo anterior, se plantean dos tipos generales de ACP.

- ACP no normado: En el cual se realiza únicamente el proceso de centrado de los datos, garantizando simplemente que el centro de gravedad de la nube muestral coincida con el origen del nuevo sistema coordenado.
- ACP normado: En este caso además de centrarse los datos, es necesario la realización del proceso de estandarización de la información. Esto permite dar una interpretación más clara al análisis, ya que la integración de variables con diferentes unidades de medida hace que los factores no tengan un sentido “físico” claro.

A continuación se presentan las expresiones matemáticas necesarias para estandarizar la información, como paso previo al desarrollo del ACP.

El punto de partida es la matriz de datos iniciales (K), los cuales se encuentran sin ningún tipo de ajuste. Esta matriz de n filas y p columnas, recoge las muestras correspondientes a n individuos para un conjunto de p variables.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nj} & \cdots & k_{np} \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

Dado que se decidió utilizar un ACP normado, el primer paso es la tipificación¹⁴ de la información; este proceso incluye simultáneamente las tareas de centrado y estandarización de los datos.

¹² Este tipo de ACP es recomendado únicamente cuando se tiene un conocimiento absoluto de la importancia que tiene cada variable en la situación estudiada.

¹³ Este procedimiento se realiza con el fin de eliminar el efecto que tiene la presencia de diferentes unidades de medida, en las variables incluidas en los análisis. Este aspecto se resume en la utilización de la matriz de correlaciones como punto de partida en el análisis.

¹⁴ Esto significa que cada variable tendrá una varianza igual a 0 y una desviación estándar igual 1.

Las siguientes expresiones permiten realizar este paso.

$$x_{ij} = \left[\frac{k_{ij} - \bar{k}_j}{\sigma_j} \right] \quad (2-6)$$

Con

$$\bar{k}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_{ij} \quad (2-7)$$

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_{ij} - \bar{k}_j)^2}{n}} \quad (2-8)$$

Los nuevos datos obtenidos tras el proceso de tipificación conformarán la matriz de datos (X), los cuales serán finalmente los utilizados en el ACP. Esta matriz tendrá tantas columnas como variables y tantas filas como individuos incluidos en el análisis.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Es fácil comprobar que mediante el uso de las expresiones anteriormente presentadas, se llega a la matriz de correlaciones (R) de la siguiente forma:

$$R = \frac{X^T \cdot X}{n} \quad (2-10)$$

Ejemplo 1

A partir de la matriz de datos que se presenta a continuación, llegar a la matriz de datos tipificados y calcular la matriz de correlaciones.

	K1	K2	K3
Individuo 1	2	5	3
Individuo 2	3	5	4
Individuo 3	2	3	3
Individuo 4	1	2	2
Individuo 5	6	1	6

Rta/

En primera instancia es necesario calcular la media y desviación estándar de los vectores columna de la matriz de datos inicial.

	K1	K2	K3
Media	2,8	3,2	3,6
Desviación estándar	1,720465053	1,6	1,356466

Con esta información y mediante la ecuación (2-6) se calculó la matriz de datos tipificados (X).

	X1	X2	X3
Individuo 1	-0,464990	1,125	-0,442325
Individuo 2	0,1162476	1,125	0,2948839
Individuo 3	-0,464990	-0,125	-0,442325
Individuo 4	-1,046228	-0,75	-1,179535
Individuo 5	1,859962	-1,375	1,7693034

Los valores de la media aritmética y desviación estándar demuestran que todas las variables tienen ahora la misma importancia en el análisis.

	X1	X2	X3
Media	0	0	0
Desviación estándar	1	1	1

Con la información disponible fue posible calcular la matriz de correlaciones (R).

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -0,42139769 & 0,9941072 \\ -0,42139769 & 1 & -0,3317444 \\ 0,9941072 & -0,3317444 & 1 \end{vmatrix}$$

En las siguientes graficas se ha trazado el comportamiento de la variable X3 en función de la variable X1. Como se puede, el efecto de la tipificación ha hecho que la nube muestral haya sido desplazada en el espacio.

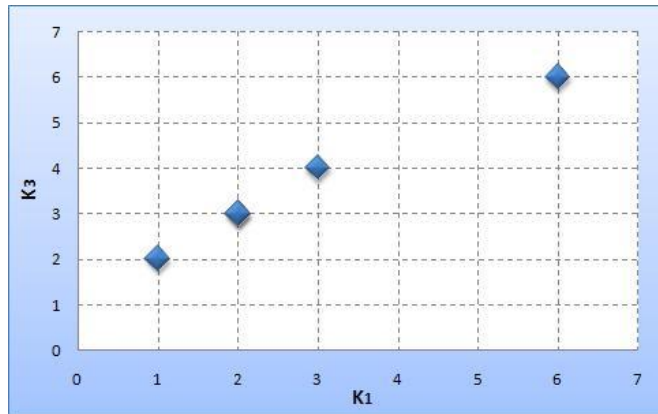


Figura 3. Nube muestral inicial

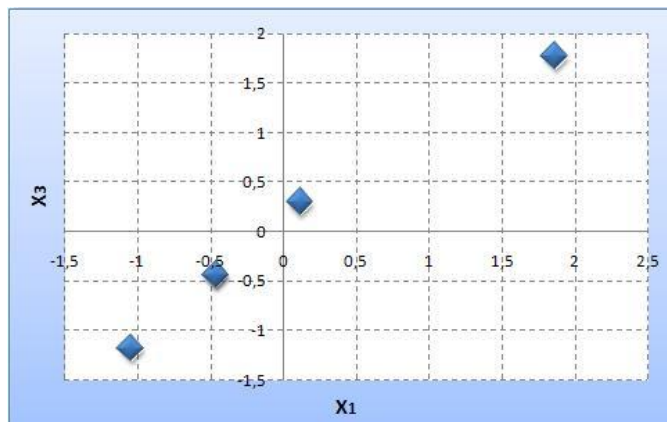


Figura 4. Nube muestral normalizada

2.4.1.2 Ubicación de los ejes coordenados.

Una vez se ha establecido el punto de referencia del nuevo sistema coordenado y se ha reubicado la nube muestral, el siguiente paso es el trazado de los ejes¹⁵ que representarán la solución factorial. Cada uno de estos ejes estará ubicado de forma perpendicular al resto, y cada uno explicará un porcentaje del total de la variabilidad presente en la información.

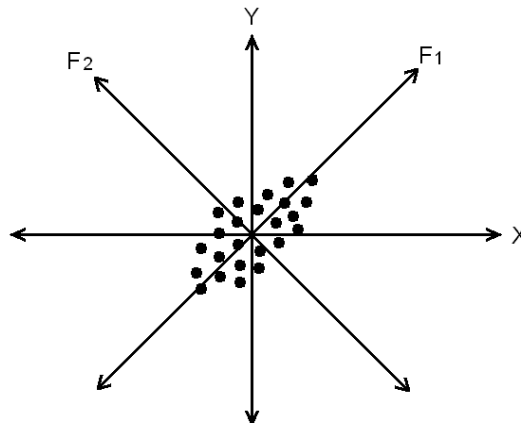


Figura 5. Trazado de componentes principales.

¹⁵ Cada uno de los ejes representa uno de los factores que componen la solución factorial.

El primer eje será ubicado en la dirección en la cual se observe la mayor dispersión de datos, es decir, hacia donde exista el mayor alargamiento de la nube muestral.

El segundo eje se ubicará de forma ortogonal al primero, y con el se buscará recoger la mayor cantidad de la varianza que no fue tomada en cuenta por la primera componente. Posteriormente y de forma secuencial, se ubicarán el resto de ejes hasta explicar un porcentaje aceptable de la varianza total. De esta forma, las sucesivas componentes irán perdiendo importancia explicativa, por lo que en algún punto del análisis podrán ser descartadas.

Si la nube muestral fuera lo suficientemente regular de tal forma que pudiera ser representada por una elipse, el tamaño de las componentes extraídas sería similar a la que se muestra en la siguiente figura.

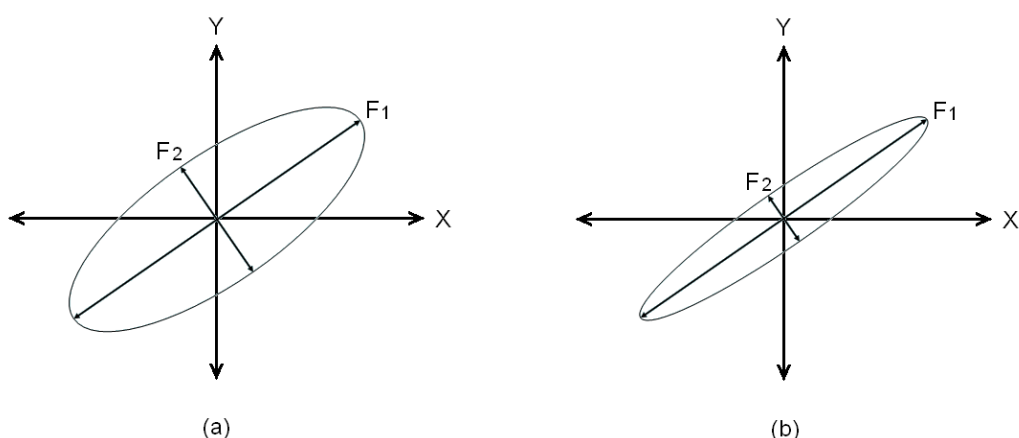


Figura 6. Importancia de las componentes extraídas para dos situaciones diferentes

Como se puede ver en la figura anterior, en ambos casos es posible representar el comportamiento de la nube muestral mediante la extracción de dos componentes. Sin embargo, la importancia explicativa de la segunda componente es diferente para cada caso. En el primero, dicha componente es claramente necesaria para representar la nube muestral, en tanto que en el segundo tiene una importancia mucho menor.

2.4.1.3 Regla de Kaiser

Con el fin de establecer el número óptimo de componentes que conformarán la solución factorial, se han desarrollado diversos criterios de selección basados en el estudio de los valores propios de la matriz de correlaciones.

Uno de los métodos más comunes es el criterio de la raíz latente también conocida como regla de Kaiser (1958). Este criterio basa la escogencia del número de componentes, en el valor alcanzado por cada una de las raíces¹⁶ (λ) de la matriz de correlaciones. Se resume en seleccionar aquellas componentes cuya raíz característica alcance un valor superior a 1,0.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos al utilizar este criterio, en el grupo de variables que componen la infraestructura eléctrica de las empresas

¹⁶ Las raíces de la matriz de correlaciones son también conocidas como los valores propios de la matriz

distribuidoras. Se presentan los resultados para los años comprendidos entre el 2004 y el 2007.

Factor	Magnitud valor propio (λ)			
	2004	2005	2006	2007
1	7,71	7,75	7,72	7,89
2	1,27	1,24	1,21	1,07
3	0,64	0,65	0,69	0,64
4	0,27	0,25	0,27	0,29
5	0,07	0,07	0,08	0,07
6	0,02	0,02	0,03	0,03
7	0,01	0,02	0,01	0,01
8	0,00	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 4. Magnitud de los valores propios de la matriz de correlaciones correspondiente a las variables de la infraestructura eléctrica de las empresas.

Como se puede deducir de los resultados obtenidos, el grupo de variables representativas de la infraestructura eléctrica puede ser explicado principalmente por dos factores. De esta forma, se comienza a plantear la posible reducción en el número de variables.

2.4.1.4 Criterio de la varianza explicada.

Debido a que los valores propios de la matriz de correlaciones representan el 100% de la varianza contenida en la información, la escogencia del número de factores busca preservar un alto porcentaje¹⁷ de este valor. De esta manera, la varianza total (VT) esta representada por la suma de los valores propios de la matriz de correlaciones, es decir.

$$VT = \sum_{i=1}^r \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r \quad (2-11)$$

donde

λ_i : Son las magnitudes de los valores propios de la matriz de correlaciones.

VT: Es el valor de la varianza total

Como se deduce de la expresión anterior, la varianza total puede ser descompuesta en un número finito de partes, con lo cual se crea un mecanismo de selección ideal para reducir la dimensionalidad del problema.

El criterio de la varianza explicada consiste en acumular el porcentaje de varianza aportada por cada valor propio, hasta llegar a un valor aceptable de varianza explicada por el modelo factorial

¹⁷ En el ACP se considera apropiado escoger un número de componentes que permita explicar un valor cercano al 70% de la varianza total.

En las siguientes tablas se presentan los resultados obtenidos al utilizar este criterio, en los grupos de variables que componen la infraestructura eléctrica de las empresas. Los resultados corresponden a los años 2004 a 2007.

Factor	valor propio (λ)	Varianza explicada (%)	Varianza acumulada (%)
1	13,167	50,641	50,641
2	4,169	16,034	66,674
3	2,545	9,790	76,464
4	1,859	7,151	83,615
5	1,485	5,711	89,327
6	1,076	4,139	93,466

Tabla 5. Varianza explicada por los factores escogidos para el año 2004

Factor	valor propio (λ)	Varianza explicada (%)	Varianza acumulada (%)
1	15,394	59,208	59,208
2	2,663	10,241	69,449
3	1,807	6,951	76,401
4	1,478	5,683	82,084
5	1,264	4,861	86,945
6	1,078	4,147	91,092

Tabla 6. Varianza explicada por los factores escogidos para el año 2005

Factor	valor propio (λ)	Varianza explicada (%)	Varianza acumulada (%)
1	16,588	63,801	63,801
2	2,704	10,400	74,202
3	2,063	7,934	82,136
4	1,428	5,491	87,626
5	1,191	4,580	92,206

Tabla 7. Varianza explicada por los factores escogidos para el año 2006

Factor	valor propio (λ)	Varianza explicada (%)	Varianza acumulada (%)
1	15,427	59,336	59,336
2	2,785	10,712	70,048
3	2,207	8,487	78,535
4	1,771	6,812	85,347
5	1,407	5,413	90,760

Tabla 8. Varianza explicada por los factores escogidos para el año 2007

Los resultados indican que dos factores son suficientes para explicar entre el 66,67% y el 74,20% de la varianza total.

Ya que los resultados fueron consistentes para todos los años, y teniendo en cuenta que la diferencia porcentual entre ellos fue pequeña, la escogencia de dos factores se considera adecuada. Sin embargo, con el fin de crear modelos factoriales más completos se decidió incluir un tercer factor¹⁸.

En general, los resultados obtenidos para los demás grupos de variables fueron similares, presentándose divergencias únicamente en los grupos de variables pertenecientes al área comercial¹⁹.

2.4.1.5 Diagramas de sedimentación.

Una tercera forma de establecer el número óptimo de factores a extraer, es mediante la construcción de diagramas de sedimentación. Este método fue desarrollado por Catell (1965) y consiste en presentar de forma gráfica, el tamaño de los valores propios de la matriz de correlaciones. En el eje de las abscisas están ubicados los factores, en tanto que en el eje de las ordenadas se encuentran las magnitudes de los valores propios.

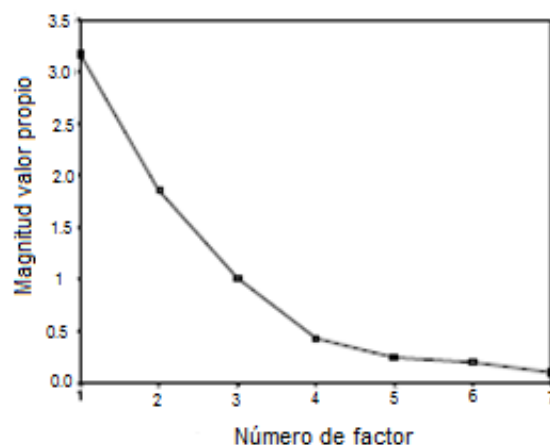


Figura 7. Diagrama de sedimentación.

El número apropiado de factores habrá sido encontrado cuando la curva de sedimentación adquiera una pendiente cercana a cero.

A continuación se presentan las curvas de sedimentación para los grupos de variables incluidos en los análisis del año 2007.

¹⁸ De esta forma todos los modelos lograron explicar más del 70% de la varianza total.

¹⁹ Esto se debió a que la falta de información en algunas de las empresas afectó la varianza de los conjuntos de variables.

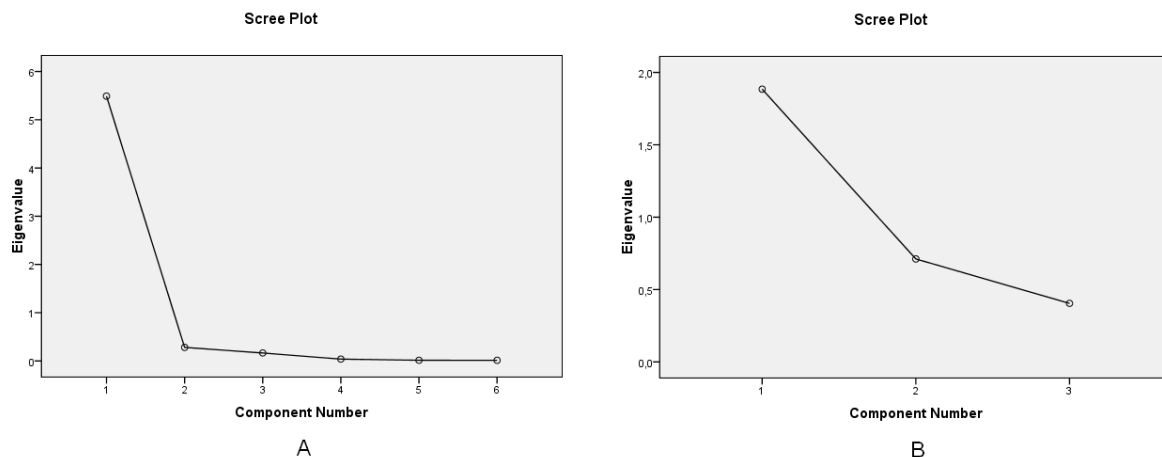


Figura 8. Diagramas de sedimentación para los grupos de variables pertenecientes a la infraestructura e índices de confiabilidad.

Los gráficos de sedimentación A y B corresponden a los grupos de variables que conforman la infraestructura de las empresas, y sus índices de confiabilidad respectivamente.

Para el caso de las variables correspondientes a la infraestructura de las empresas, el análisis factorial brinda excelentes resultados ya que como se ve, después de dos factores la curva de sedimentación adquiere un comportamiento estable; señal de que la varianza aportada por los demás factores es mínima. Por otra parte, para el caso de las variables correspondientes a los índices de confiabilidad, los resultados no fueron buenos. La curva de sedimentación no presenta un comportamiento estable en ningún punto de la gráfica, por lo que es necesario incluir la totalidad de factores para lograr explicar un porcentaje adecuado de la varianza total. En este caso, los resultados del análisis factorial fueron nulos ya que la reducción del número de variables no fue posible.

En las siguientes gráficas se muestran los resultados obtenidos para los demás grupos de variables. Es evidente que los resultados en general son muy buenos, ya que en la mayoría de casos los gráficos de sedimentación alcanzaron un valor casi constante después de algunos pocos factores.

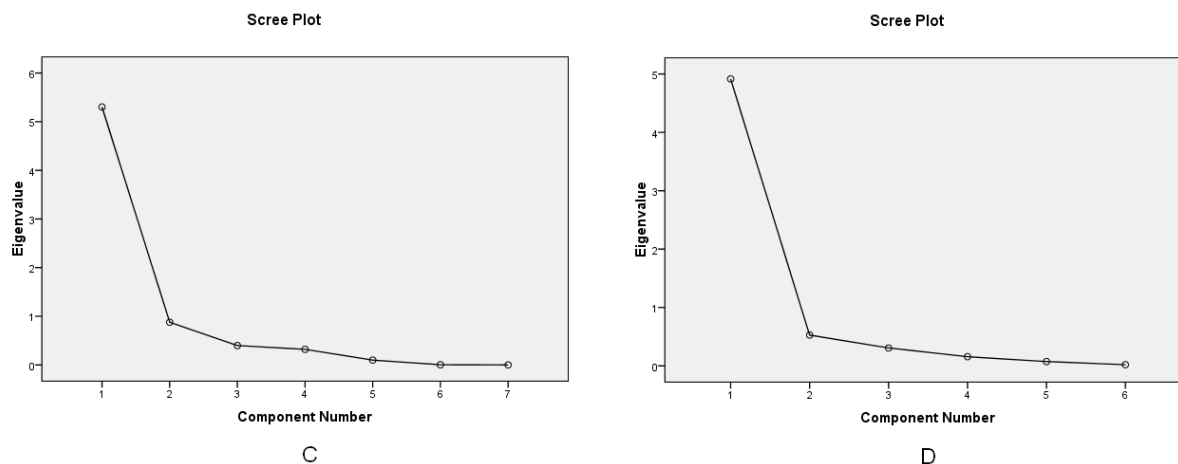


Figura 9. Diagramas de sedimentación para los grupos de variables correspondientes a los activos y pasivos de las empresas.

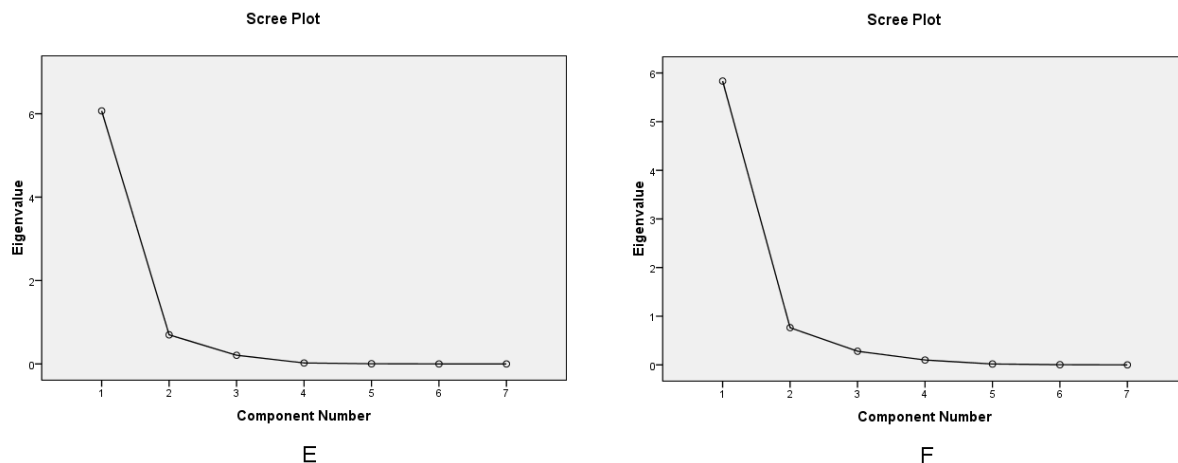


Figura 10. Diagramas de sedimentación para los grupos de variables correspondientes a los balances generales y estados de resultados de las empresas

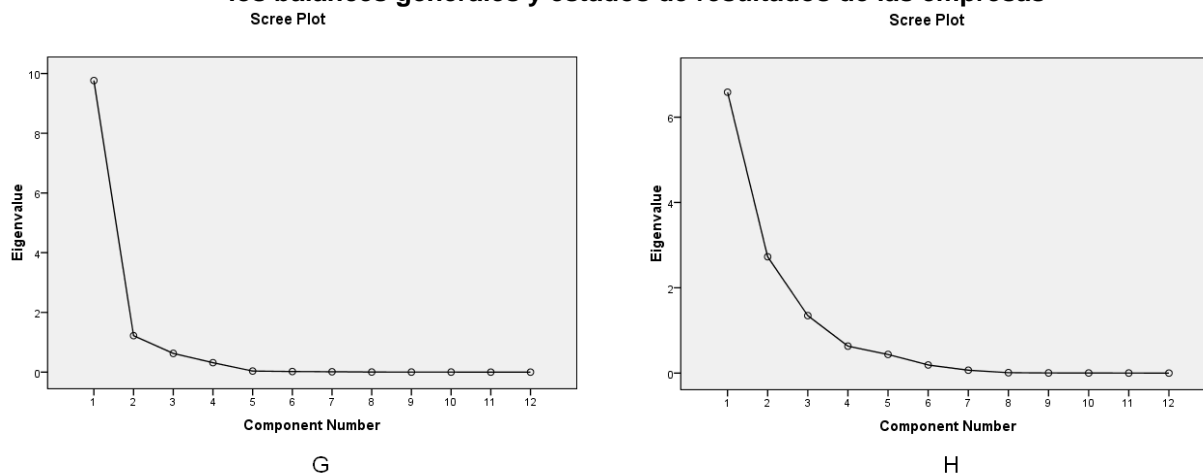


Figura 11. Diagramas de sedimentación para los grupos de variables correspondientes a los consumos promedios y factura media de los usuarios

Los resultados indicaron que cada conjunto de variables podía ser representado mediante el uso de modelos factoriales, además, que la reducción en el número de variables sería considerablemente alta.

2.4.1.6 Cargas factoriales

Las cargas factoriales son los indicadores más importantes en el análisis factorial, ya que establecen el nivel de correlación que tiene cada variable con cada uno de los factores que componen la solución factorial. Idealmente, dicha solución debe reunir las siguientes características según Thurstone (1935).

1. Cada factor debe tener un conjunto de variables con altas puntuaciones factoriales.
2. Una variable no debe puntuar alto en más de un factor.
3. No deben existir factores con la misma distribución, es decir, dos factores distintos deben presentar distribuciones diferentes de cargas altas y bajas.

Para el cálculo de las cargas factoriales se requiere el conocimiento de los valores y vectores propios de la matriz de correlaciones, por tal razón, es evidente que el primer

paso es el cálculo de los vectores propios de dicha matriz. Para esto, se hace necesario resolver el siguiente sistema:

$$R \cdot U = \lambda \cdot U \quad (2-12)$$

donde

R es la matriz de correlaciones

λ es el vector de valores propios de la matriz de correlaciones

U es la matriz de vectores propios de la matriz de correlaciones

Ahora es posible calcular el nivel de correlación de cada variable con cada uno de los factores extraídos, mediante el uso de la siguiente expresión:

$$\rho_{X1,U1} = \frac{U_{x1} \cdot \sqrt{\lambda_1}}{\sigma_{x1}} F_{X1,U1} = \frac{U_{x1} \cdot \sqrt{\lambda_1}}{\sigma_{x1}} \quad (2-13)$$

donde

R es la matriz de correlaciones

λ es el vector de valores propios de la matriz de correlaciones

U es la matriz de vectores propios de la matriz de correlaciones

Ejemplo 2

Encontrar los vectores propios de la matriz de correlaciones del ejemplo 1 y establecer el valor de las cargas factoriales.

Rta/

Retomando la matriz de correlaciones del ejemplo anterior y mediante la solución de la expresión (2-13) se encontraron los respectivos vectores propios.

	U1	U2	U3
X1	0,65641	0,22845	-0,71899
X2	-0,39894	0,914	-0,073806
X3	0,64029	0,33528	0,69109

	X1	X2	X3
Media	0	0	0
Desviación estándar	1	1	1

Con base en la información suministrada por los vectores propios y teniendo en cuenta la desviación estándar²⁰ para cada variable, se calcularon las cargas factoriales.

²⁰ La desviación calculada corresponde al de las variables de la matriz de datos tipificados.

$$\rho_{X1,U1} = \frac{U_{x1} \cdot \sqrt{\lambda_1}}{\sigma_{x1}} = \frac{0,65641 \cdot \sqrt{2,2258}}{1} = 0,979$$

De esta forma se completó la matriz factorial que se muestra a continuación.

	C1	C2	C3
X1	0,979	0,201	-0,025
X2	-0,595	0,804	-0,003
X3	0,955	0,295	0,024

Con el fin de presentar de forma simplificada las variables que fueron incluidas en los análisis, se realizó la codificación de las variables pertenecientes a las áreas financiera y comercial.

Variable	Código
Consumo promedio	CP
Consumos	CON
Factura media	FM
Factura promedio	FP
Suscriptores	SUS
Total Facturado	TF
Valor Consumo	VC
Alumbrado Público - COMERCIALIZACION	AP_COM
Comercial - COMERCIALIZACION	COM_COM
Empresas del Sector - COMERCIALIZACION	ES_COM
Industrial - COMERCIALIZACION	IND_COM
Ingreso Regulado - OPERADOR RED	IR_OR
Oficial - COMERCIALIZACION	OF_COM
Otros - COMERCIALIZACION	O_COM
Otros - OPERADOR DE RED	O_OR
Residencial Estrato 1 - COMERCIALIZACION	RE1_COM
Residencial Estrato 2 - COMERCIALIZACION	RE2_COM
Residencial Estrato 3 - COMERCIALIZACION	RE3_COM
Residencial Estrato 4 - COMERCIALIZACION	RE4_COM
Residencial Estrato 5 - COMERCIALIZACION	RE5_COM
Residencial Estrato 6 - COMERCIALIZACION	RE6_COM
SUBSIDIOS Y CONTRIBUCIONES	SyC
ACTIVOS CORRIENTES	AC
ACTIVOS NO CORRIENTES	ANC
PASIVO CORRIENTE	PC
PASIVO NO CORRIENTE	PNC
BALANCE GENERAL	BG
ESTADO DE RESULTADOS	ER

Tabla 9. Códigos para las variables correspondientes a las áreas financiera y comercial.

En las siguientes tablas se muestran las cargas factoriales para todas las variables incluidas en los análisis; los resultados presentados corresponden a los años 2004 al 2007.

Con el fin de facilitar la observación de los patrones de comportamiento que motivaron la elección de las variables, se han sombreado los pesos factoriales considerados altos (mayores o iguales a 0,7).

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados ²¹		Factores no rotados		Factores rotados		Factores rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
1. Subestaciones	0,34	0,76	0,40	0,73	0,21	0,77	0,44	0,56
2. Alimentadores de nivel 2	0,98	0,08	0,98	0,08	0,97	0,16	0,96	0,20
3. Alimentadores de nivel 3	0,89	-0,12	0,89	-0,11	0,83	0,36	0,83	0,34
4. Total Alimentadores	0,99	0,06	0,99	0,06	0,97	0,19	0,97	0,22
5. Alimentadores Propios	0,99	0,06	0,99	0,06	0,97	0,19	0,97	0,22
6. Alimentadores Aéreos	0,99	0,07	0,98	0,08	0,97	0,16	0,96	0,20
7. Alimentadores Radiales	0,97	0,12	0,97	0,13	0,97	0,12	0,97	0,13
8. Longitud de Red KMS	0,98	0,02	0,98	0,03	0,95	0,22	0,95	0,20
9. Transformadores	0,97	0,18	0,96	0,19	0,98	0,04	0,98	0,07
10. Numero de Transformadores por Alimentadores	-0,27	0,78	-0,29	0,79	-0,06	0,83	-0,02	0,94

Tabla 10. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes a la infraestructura de las empresas.

La selección de las variables características de cada grupo se hizo teniendo en cuenta las cargas factoriales y los niveles de correlación entre las variables del mismo grupo. Se escogieron aquellas variables que además de tener un alto puntaje factorial, tuvieran una alta correlación con el resto de variables, y que además, presentaran un comportamiento constante durante los cuatro años evaluados.

Como se puede comprobar en la tabla 10, los resultados obtenidos muestran un patrón de comportamiento definido a lo largo de los años evaluados. En este caso, se puede ver que sin importar la empresa, existe un par de características propias de la etapa de distribución que se manifiestan en la infraestructura de todas las empresas distribuidoras. Dichas características están representadas por dos factores; el primero explicativo del tamaño de la infraestructura de las empresas y el segundo de su capacidad de transformación.

De la misma forma que para el caso de los grupos de variables del área técnico-operativa, se realizaron los correspondientes análisis para el resto de áreas. En los anexos se presentan el resto de resultados obtenidos en esta etapa del análisis.

2.4.1.7 Identificación de componentes y selección de variables.

²¹ En esta tabla y en algunas otras se ha indicado si la solución factorial ha sido rotada o no. Este aspecto no es relevante para entender los resultados obtenidos en este punto. Sin embargo, la rotación de las soluciones factoriales es un tema que se explica más adelante.

Después de encontrar las cargas factoriales para cada uno de los grupos evaluados, se identificaron los factores más relevantes para cada caso, y de esta forma, se determinó el número de factores que conformarían las soluciones factoriales. Con esta información más la suministrada por los índices de correlación, se extrajeron aquellas variables que preservaran la mayor cantidad de información.

En la siguiente tabla se muestran las variables extraídas después de realizados los análisis factoriales.

AREA	GRUPO	VARIABLE
TECNICO-OPERATIVO	INFRAESTRUCTURA	1. Total Alimentadores
		2. Longitud de Red KMS
		3. Numero de Transformadores por Alimentadores
	CONFIABILIDAD	4. DES PROM
		5. Número de circuitos
FINANCIEROS	ACTIVOS CORRIENTES Y NO CORRIENTES	6. Propiedad Planta y Equipo ANC
		7. Deudores AC
	PASIVO CORRIENTE	8. Cuentas Por Pagar PC
	BALANCE GENERAL	9. Total Activo BG
	ESTADO DE RESULTADOS	10. Provisiones Agotamientos Depreciaciones y Amortizaciones ER
		11. Gastos de Administración ER
		12. Ingresos Operacionales ER
COMERCIAL	CONSUMO PROMEDIO	13. Total Residencial CP
		14. Otros CP
	CONSUMOS	15. Comercial CON
	FACTURA MEDIA	16. Total No Residencial FM
		17. Total Residencial FM
	FACTURA PROMEDIO	18. Total Residencial FP
		19. Total No Residencial FP
	SUSCRIPTORES	20. Total No Residencial SUS
		21. Comercial SUS
	TOTAL FACTURADO	22. Total Residencial TF
	VALOR CONSUMO	23. Total Residencial VC
	FACTURACIÓN Y RECAUDO	24. Recaudo COM COM
	SUBSIDIOS Y CONTRIBUCIONES	25. Comercial SyC
ADMINISTRATIVO	ADMINISTRACIÓN	26. Salarios más Prestaciones

Tabla 11. Listado de cargas resultantes de los análisis factoriales de fase uno

Después de realizados los análisis factoriales se llegó a un total de 26 variables, lo cual es un resultado muy bueno si se tiene en cuenta que el análisis partió de 166. Sin embargo, se consideró que debido a los requerimientos propios de la metodología DEA, este era un número aún muy elevado. Por tal razón, se decidió realizar análisis

factoriales de segunda fase²² con el fin de reducir aún más el número de variables; en estos análisis se utilizaron todas las variables resultantes de los análisis factoriales previos.

En las siguientes tablas se presentan los resultados obtenidos en los análisis factoriales de segunda fase.

Índices de adecuación muestral

Año	No. de variables	Determinante	Índice KMO
2004	26	4,26E-39	0,59
2005	26	5,99E-38	0,71
2006	26	1,56E-42	0,92
2007	26	6,27E-41	0,72

Tabla 12. Valores de los índices de adecuación muestral para los análisis factoriales de segunda fase.

Los resultados obtenidos en las pruebas de adecuación muestral indicaron que la realización de análisis factoriales de segunda fase era algo factible.

Número de factores a extraer mediante el uso de la regla de Kaiser

Factor	Magnitud valor propio (λ)			
	2004	2005	2006	2007
1	13,2	15,4	16,6	15,4
2	4,17	2,66	2,70	2,79
3	2,55	1,81	2,06	2,21
4	1,86	1,48	1,43	1,77
5	1,48	1,26	1,19	1,41
6	1,08	1,08	0,73	0,81
7	0,52	0,76	0,50	0,70
8	0,51	0,49	0,46	0,38
9	0,30	0,47	0,16	0,25
10	0,21	0,36	0,11	0,18

Tabla 13. Magnitud de los valores propios para los 10 primeros factores extraídos en cada uno de los análisis factoriales de segunda fase.

La diferencia en el número de factores explicativos para cada uno de los años evaluados, puede deberse a la pérdida de información en algunas de las variables. Sin embargo, estos resultados no son preocupantes ya que como se verá a continuación, tres factores son suficientes para explicar la mayor parte de la información.

²² Los análisis factoriales de segunda fase son realizados con el fin de encontrar características aún más específicas que las encontradas en los análisis factoriales de primera fase.

Varianza explicada para todos los años

Factor	Varianza explicada por la solución no rotada			Varianza explicada por la solución rotada		
	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %
1	13,167	50,641	50,641	8,897	34,220	34,220
2	4,169	16,034	66,674	7,039	27,072	61,291
3	2,545	9,790	76,464	3,114	11,979	73,270
4	1,859	7,151	83,615	1,983	7,627	80,897
5	1,485	5,711	89,327	1,760	6,769	87,665
6	1,076	4,139	93,466	1,508	5,800	93,466

Tabla 14. Varianza explicada por el modelo factorial de segunda fase para el año 2004

Factor	Varianza explicada por la solución no rotada			Varianza explicada por la solución rotada		
	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %
1	15,394	59,208	59,208	14,536	55,909	55,909
2	2,663	10,241	69,449	2,632	10,123	66,032
3	1,807	6,951	76,401	1,882	7,238	73,270
4	1,478	5,683	82,084	1,739	6,689	79,960
5	1,264	4,861	86,945	1,613	6,205	86,164
6	1,078	4,147	91,092	1,281	4,928	91,092

Tabla 15. Varianza explicada por el modelo factorial de segunda fase para el año 2005

Factor	Varianza explicada por la solución no rotada			Varianza explicada por la solución rotada		
	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %
1	16,588	63,801	63,801	12,833	49,358	49,358
2	2,704	10,400	74,202	4,797	18,451	67,809
3	2,063	7,934	82,136	2,694	10,363	78,172
4	1,428	5,491	87,626	1,915	7,366	85,537
5	1,191	4,580	92,206	1,734	6,669	92,206

Tabla 16. Varianza explicada por el modelo factorial de segunda fase para el año 2006

Factor	Varianza explicada por la solución no rotada			Varianza explicada por la solución rotada		
	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %	Total	Porcentaje de varianza	Varianza acumulada %
1	15,427	59,336	59,336	8,585	33,018	33,018
2	2,785	10,712	70,048	8,244	31,709	64,726
3	2,207	8,487	78,535	2,822	10,853	75,579
4	1,771	6,812	85,347	2,273	8,742	84,322
5	1,407	5,413	90,760	1,674	6,438	90,760

Tabla 17. Varianza explicada por el modelo factorial de segunda fase para el año 2007

Diagramas de sedimentación para los análisis factoriales de segunda fase

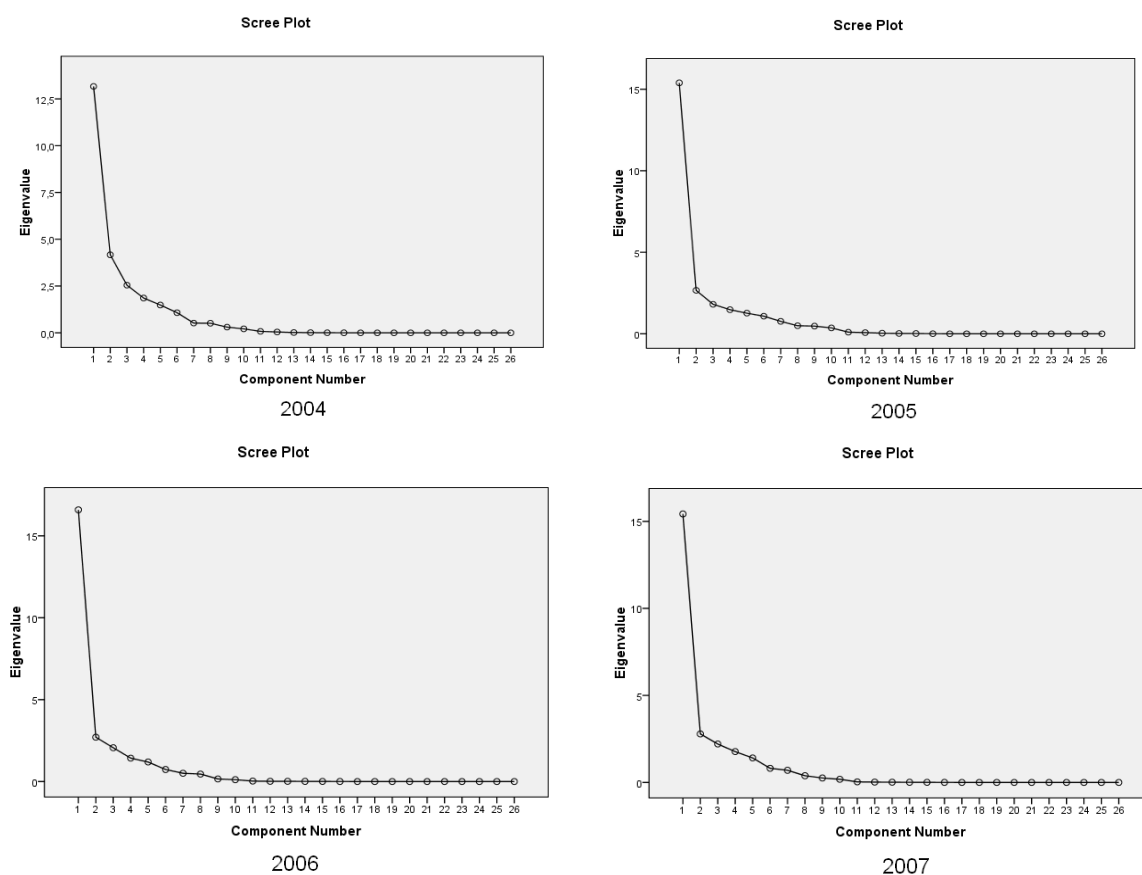


Figura 12. Diagramas de sedimentación para los análisis factoriales de segunda fase

Los gráficos de sedimentación muestran que 6 factores son capaces de representar la mayor parte de la varianza total. Pero como se pudo comprobar con la prueba de varianza explicada, tres factores²³ son suficientes para explicar más del 70% de la varianza total.

²³ En la sección 2.6 se explica el significado de los factores extraídos.

Cargas factoriales

De la misma forma que para el caso de los análisis factoriales de primera fase, se encontraron las cargas factoriales de cada variable. Como se ve en la tabla 18, una vez más los resultados presentaron patrones de comportamiento constantes para los años evaluados, lo que facilitó la identificación de las estructuras factoriales finales.

Variable	2004			2005			2006			2007		
	Factores rotados			Factores rotados			Factores rotados			Factores rotados		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Total Alimentadores	0,73	0,64	0,07	0,96	0,13	-0,10	0,94	0,28	0,09	0,51	0,83	0,13
Longitud de la red (Km)	0,70	0,54	0,21	0,93	0,26	0,01	0,92	0,27	0,23	0,47	0,79	0,34
Numero de Transformadores por Alimentadores	-0,10	-0,23	0,15	-0,19	0,11	-0,05	-0,27	-0,02	0,27	0,07	-0,47	0,36
Número de circuitos	0,72	0,65	0,08	0,96	0,12	-0,09	0,94	0,28	0,08	0,50	0,84	0,12
DES PROM	-0,27	-0,19	0,67	-0,13	-0,06	-0,06	-0,11	-0,16	-0,14	-0,13	-0,22	0,22
Deudores AC	0,79	0,24	0,16	0,89	0,10	0,08	0,84	0,21	0,07	0,49	0,61	0,21
Propiedad Planta y Equipo	0,92	0,34	0,11	0,92	0,09	0,24	0,70	0,69	0,12	0,89	0,42	0,08
Cuentas Por Pagar PC	0,53	0,28	0,37	0,83	0,26	0,37	0,92	0,36	0,09	0,84	0,42	0,23
Total Activo BG	0,97	0,18	0,04	0,85	0,04	0,30	0,48	0,85	0,13	0,94	0,26	-0,04
Ingresos Operacionales ER	0,91	0,35	0,14	0,97	0,09	0,19	0,79	0,57	0,14	0,81	0,51	0,13
Gastos de Administración ER	0,92	-0,05	-0,05	0,79	-0,01	0,23	0,27	0,88	0,17	0,93	0,01	-0,04
Provisiones Agotamientos Depreciaciones y Amortizaciones ER	0,96	0,22	0,00	0,87	0,02	0,25	0,74	0,62	0,13	0,83	0,51	0,11
Total Residencial CP	0,51	-0,04	0,70	0,30	0,86	0,25	0,39	0,23	0,78	0,11	0,21	0,90
Otros CP	-0,15	0,05	0,07	-0,02	0,04	0,06	0,14	0,08	0,10	-0,07	0,04	0,13
Comercial CON	0,23	0,97	-0,02	0,94	0,22	0,21	0,85	0,45	0,19	0,65	0,68	0,14
Total Residencial FM	0,01	0,09	0,92	-0,13	-0,84	0,10	-0,22	-0,07	-0,74	-0,17	-0,14	-0,33
Total No Residencial FM	-0,32	0,37	0,20	0,05	-0,54	0,03	0,15	-0,07	-0,83	-0,16	0,24	-0,67
Total Residencial FP	0,41	-0,01	0,88	0,12	0,20	0,58	0,38	0,20	0,74	0,01	0,16	0,89
Total No Residencial FP	0,01	-0,02	-0,01	0,18	0,07	0,93	0,14	0,70	0,02	0,37	0,02	-0,03
Comercial SUS	0,19	0,97	0,03	0,73	-0,14	0,19	0,97	0,09	-0,03	0,46	0,86	0,00
Total Residencial SUS	0,19	0,97	0,04	0,33	0,77	0,10	0,09	0,97	-0,06	0,47	0,86	-0,02
Total Residencial TF	0,24	0,96	0,00	0,90	0,06	0,35	0,80	0,49	0,03	0,65	0,67	-0,04
Total Residencial VC	0,68	0,58	0,28	0,92	0,23	0,00	0,92	0,25	0,20	0,53	0,76	0,32
Recaudo COM COM	0,20	0,41	-0,02	0,93	0,19	-0,09	0,97	0,15	0,12	0,01	0,94	-0,10
Comercial SyC	0,21	0,96	-0,08	0,95	0,22	0,02	0,91	0,35	0,15	0,60	0,75	0,14
Salarios más Prestaciones	0,84	0,22	0,39	0,83	-0,06	0,21	0,59	0,67	0,24	0,93	0,23	0,19

Tabla 18. Cargas factoriales de las variables incluidas en los análisis factoriales de fase 2

La selección de las variables que finalmente serían utilizados en los modelos DEA, se hizo teniendo en cuenta los puntajes factoriales y el comportamiento de cada variable durante los años evaluados; en total se extrajeron 14 variables.

FACTOR	VARIABLE	Unidad	Descripción
1	1. Total alimentadores	Unidad	Número de circuitos alimentadores con los que cuentan las empresas.
	2. Longitud de Red KMS	Km	Corresponde a la longitud de las redes de distribución.
	3. Número de circuitos	Unidad	Es el número de circuitos que componen a los sistemas de distribución para cada empresa
	4. Propiedad Planta y Equipo	Pesos	Corresponde al valor económico que tienen los activos físicos de las empresas.
	5. Cuentas Por Pagar PC	Pesos	Es el valor correspondiente a los pasivos monetarios que tienen las empresas.
	6. Total Activo BG	Pesos	Son los activos totales con los que cuentan las empresas
	7. Ingresos Operacionales ER	Pesos	Corresponden a los ingresos operacionales de las empresas de distribución.
	8. Gastos de Administración ER	Pesos	Corresponde a los gastos asociados a la administración de los sistemas de distribución.
	9. Provisiones Agotamientos Depreciaciones y Amortizaciones ER	Pesos	Son los agotamientos, depreciaciones y amortizaciones asociados a las actividades financieras de las empresas.
	10. Salarios mas Prestaciones	Pesos	Corresponde a la componente salarial de las empresas.
2	11. Comercial SUS	Unidad	Es el número de suscriptores comerciales con los que cuentan las empresas.
	12. Total Residencial SUS	Unidad	Es el total de suscriptores residenciales con los que cuentan las empresas.
3	13. Total Residencial CP	Pesos	Es el costo promedio facturado a los usuarios.
	14. Total Residencial FP	Pesos	Es el promedio facturado a los usuarios.

Tabla 19. Variables extraídas después de realizados los análisis factoriales de fase 2

2.4.1.8 Estimación de comunalidades

Con el fin de establecer que tan acertada es la representación de cada variable en las soluciones factoriales, es común que se realicen pruebas de comunalidad.

La comunalidad representa la proporción de la varianza de cada variable, que ha sido preservada por la solución factorial. A partir de ella, es posible valorar cuáles de las variables son peor explicadas por el modelo factorial, y de esta forma, plantear su posible eliminación.

El cálculo de las comunalidades es realizado con base en la información suministrada por la matriz factorial, ya que como se muestra en la siguiente expresión, son función de las cargas factoriales.

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2 = \lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 + \lambda_{i3}^2 + \dots + \lambda_{im}^2 \quad (2-14)$$

h_i^2 : Es la comunalidad de la variable i

λ_{ij} : Es la carga factorial de la variable i respecto al factor j

Cuando las comunalidades adquieren valores cercanos a 1.0, es señal de que las variables están apropiadamente representadas por el modelo factorial; caso contrario ocurrirá si este valor es próximo a 0.

A continuación se presentan los valores de las comunalidades para las variables incluidas en los análisis factoriales de segunda fase.

VARIABLE	Comunalidad				
	Inicial	2004	2005	2006	2007
		Extracción	Extracción	Extracción	Extracción
Total Alimentadores	1	0,99	0,99	0,99	0,99
Longitud de Red KMS	1	0,97	0,97	0,97	0,97
Numero de Transformadores por Alimentadores	1	0,75	0,77	0,62	0,36
Número de circuitos	1	0,99	0,98	0,99	0,99
DES PROM	1	0,89	0,81	0,77	0,85
Deudores AC	1	0,96	0,90	0,98	0,94
Propiedad Planta y Equipo	1	0,99	0,97	0,98	0,97
Cuentas Por Pagar PC	1	0,79	0,94	1,00	0,94
Total Activo BG	1	0,99	0,97	0,98	0,98
Ingresos Operacionales ER	1	0,99	0,99	0,99	0,97
Gastos de Administración ER	1	0,95	0,96	0,94	0,94
Provisiones Agotamientos Depreciaciones y Amortizaciones ER	1	0,98	0,97	0,95	0,97
Total Residencial CP	1	0,83	0,93	0,91	0,93
Otros CP	1	0,78	0,79	0,89	0,82
Comercial CON	1	0,99	0,78	0,99	0,98
Total Residencial FM	1	0,93	0,80	0,77	0,72
Total No Residencial FM	1	0,88	0,66	0,71	0,73
Total Residencial FP	1	0,99	0,98	0,91	0,91
Total No Residencial FP	1	0,93	0,93	0,91	0,87
Comercial SUS	1	0,99	0,97	0,99	0,99
Total Residencial SUS	1	0,99	0,93	0,99	0,99
Total No Residencial TF	1	0,99	0,98	0,78	0,97
Total Residencial VC	1	0,99	0,97	0,97	0,97
Recaudo COM COM	1	0,70	0,98	1,00	0,90
Comercial SyC	1	0,99	0,97	0,79	0,99
Salarios más Prestaciones	1	0,93	0,94	0,88	0,96

Tabla 20. Valor de las comunalidades para todas las variables incluidas en el análisis factorial de fase 2.

Los resultados muestran que las variables seleccionadas para ser incluidas en los modelos DEA, presentan altos valores de comunalidad; este comportamiento es

consistente para los cuatro años evaluados, lo que significa que su elección es apropiada.

2.5 Rotación de factores

Una de las críticas que recibe el análisis de componentes principales, respecto a la forma en la que realiza la extracción factorial, es el hecho de que los primeros factores tienden a acaparar²⁴ la información contenida en la matriz de correlaciones; esto puede hacer que los primeros factores acumulen más información de la que realmente les corresponde²⁵.

Con el fin de evitar esta situación, se han desarrollado técnicas de rotación factorial que buscan facilitar el análisis de los resultados, permitiendo encontrar soluciones más significativas y menos ambiguas. En la práctica, consiste en hacer girar los ejes coordenados de la solución factorial, hasta lograr que cada uno de ellos se ajuste de mejor manera a la nube muestral.

Las técnicas de rotación factorial están divididas en dos grupos principales: ortogonales y oblicuas. En el primer caso, los factores que componen la solución factorial no están relacionados de ninguna forma, en tanto que para el caso de soluciones oblicuas, es posible encontrar factores correlacionados entre sí.

En esta investigación se decidió utilizar métodos de rotación ortogonal, ya que el objetivo del análisis era encontrar factores no correlacionados, con el fin de establecer elementos de comparación entre las empresas distribuidoras. Por tal motivo, a continuación se presenta la descripción general de cada uno de los métodos de rotación ortogonal existentes.

Rotación Varimax: Busca reducir el número de variables que presentan saturaciones altas en cada factor.

Rotación Quartimax: Busca reducir el número de factores que componen la solución factorial.

Rotación Equamax: Este método de rotación es la combinación de los métodos Varimax y Quartimax; con él, se busca reducir tanto el número de variables como el número de factores.

Con base en los resultados obtenidos en diferentes pruebas realizadas, se determinó que el método Varimax era suficiente para obtener resultados satisfactorios; los otros métodos de rotación no presentaron cambios significativos en los resultados obtenidos.

²⁴ Esto sucede cuando las variables saturan alto en más de un factor ó cuando existe un factor general que domina la solución factorial.

²⁵ Si la estructura factorial es clara, es decir, si cada variable satura alto únicamente en uno de los factores, este aspecto no afecta de ninguna forma el análisis.

2.6 Interpretación de factores

Esta es una de las etapas más complejas en el análisis factorial, ya que consiste en dar una explicación cualitativa a cada uno de los factores extraídos. Se trata entonces, de interpretar cada factor en función de las variables que lo componen.

En la siguiente tabla se muestran las variables que conforman el primer factor extraído en los análisis factoriales de segunda fase.

FACTOR	VARIABLE	UNIDAD
1	Total alimentadores	Unidad
	Longitud de Red KMS	Km
	Número de circuitos	Unidad
	Propiedad Planta y Equipo	Pesos
	Cuentas Por Pagar	Pesos
	Total Activo	Pesos
	Ingresos Operacionales	Pesos
	Gastos de Administración	Pesos
	Provisiones Agotamientos Depreciaciones y Amortizaciones	Pesos
	Salarios más Prestaciones	Pesos

Tabla 21. Variables correspondientes al primer factor extraído

Las variables que componen el primer factor son indicadores del tamaño de las empresas. Con este factor, se explica en promedio un 42% de la información para cada uno de los años evaluados.

FACTOR	VARIABLE	UNIDAD
2	Suscriptores comerciales	Unidad
	Total suscriptores residenciales	Unidad

Tabla 22. Variables correspondientes al segundo factor extraído

El segundo factor lo constituyen dos variables correspondientes al número de usuarios con los que cuentan las empresas, por lo que su explicación es evidente y no es necesario ir más lejos para encontrar otro significado.

En los análisis factoriales de segunda fase, este factor fue responsable de explicar entre el 10% y el 31% de la información para cada uno de los años evaluados.

Finalmente, el tercer factor esta constituido por dos variables del área comercial. Este factor indica que el consumo es un elemento diferenciador entre las empresas distribuidoras.

FACTOR	VARIABLE	UNIDAD
3	Consumo promedio Residencial Total	Pesos
	Factura promedio Residencial Total	Pesos

Tabla 23. Variables correspondientes al segundo factor extraído

Los resultados obtenidos mostraron que las empresas de distribución eléctrica que operan en Colombia, tienen tres características esenciales que permiten diferenciarlas: el tamaño²⁶, el número de usuarios y el valor de la energía transportada.

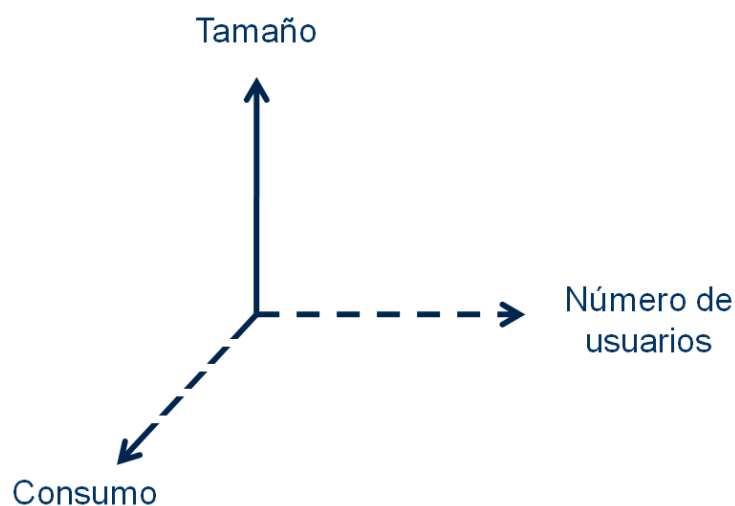


Figura 13. Factores característicos del negocio de distribución eléctrica.

Ya que el objetivo principal de esta investigación fue el establecer una forma alternativa de establecer valores de remuneración por concepto de AO&M, es claro que las variables adecuadas para ser incluidas en las evaluaciones DEA, corresponden a las representativas del tamaño de las empresas.

En general los resultados obtenidos en esta etapa de la investigación fueron claros, lo que permitió alcanzar los objetivos propuestos inicialmente; se identificaron los factores esenciales de la etapa de distribución y se definieron las variables que serían utilizadas en los análisis DEA.

²⁶ Tanto de su infraestructura física como de su estructura organizacional.

Capítulo 3

3 Concepto general de eficiencia y productividad

En la teoría de producción la eficiencia²⁷ es entendida como la capacidad que tiene una unidad de producción, para lograr el máximo nivel de producto a partir del óptimo uso de los recursos disponibles. Apoyados en esta definición, se han desarrollado diversas teorías basadas en la medición de productividad, que sustentadas en el uso de modelos matemáticos²⁸ han permitido la creación de diversos índices de productividad.

Varias de estas técnicas han sido apoyadas en el uso del Benchmarking para su desarrollo. Bajo este enfoque, se parte de la idea general de que aquella unidad²⁹ que presenta el mayor índice de productividad, puede ser utilizada como referente para medir el desempeño de las otras unidades.

El índice de productividad más simple y que resume de forma general el desempeño de una unidad de producción, es la siguiente:

$$Productividad = \frac{Cantidad\ de\ Producto}{Cantidad\ de\ insumo} \quad (3-1)$$

Esta expresión es la base en el cálculo de estimaciones de productividad, y por ello, ha sido utilizada en la creación de técnicas de medición de eficiencia tal y como se verá más adelante.

Es importante aclarar que previamente a la realización de este tipo de análisis, es necesario establecer el enfoque que tendrán las mediciones de productividad; esto debido a que como se verá a continuación existen tres tipos de eficiencia que pueden ser medidas.

- Eficiencia técnica
- Eficiencia de precio
- Eficiencia global

3.1 Eficiencia técnica

La eficiencia técnica (ET) está definida como la capacidad que tiene una unidad de producción, para obtener el máximo nivel de producto (Output) a partir del óptimo uso en las cantidades de insumos (Inputs).

Con el fin de presentar conceptualmente esta idea, a continuación se han graficado las propuestas de producción para cuatro unidades diferentes. Como se puede ver, en el

²⁷ La eficiencia es un concepto diferente al concepto de productividad aunque erróneamente suele confundírselas.

²⁸ Algunos de estos modelos han sido de carácter determinista mientras otros han sido esencialmente de tipo estocástico.

²⁹ En este documento unidad se refiere a la entidad que hace uso de algún insumo con el fin de obtener un producto.

proceso se busca obtener un producto (Y) a partir de la utilización de dos insumos (X1 y X2).

En la misma figura se ha graficado la frontera eficiente de producción, la cual está definida por la isocuenta II'. Esta línea está construida a partir de las diferentes combinaciones posibles en las cantidades de insumos, que permitiría obtener una determinada cantidad de producto.

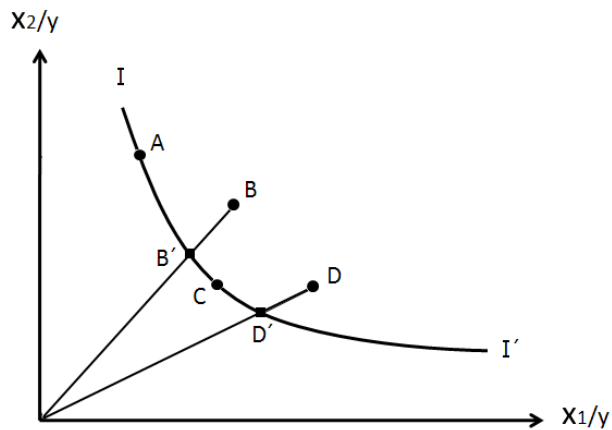


Figura 14. Isocuenta de producción y eficiencia técnica.

Puesto que las unidades B y D se encuentran por fuera de la frontera de producción, se considera entonces que son técnicamente ineficientes. Esto significa que estas unidades podrían obtener la misma cantidad de producto, aún cuando redujeran las cantidades de insumos³⁰ utilizados.

La ineficiencia técnica para cada una de estas unidades está dada por las distancias B'B y D'D, respectivamente.

Por su parte, las unidades A y C son técnicamente eficientes, ya que se encuentran ubicadas en la frontera eficiente de producción.

Tomando como ejemplo el caso de la unidad B, la eficiencia técnica estará dada por la siguiente expresión:

$$ET_B = \frac{OB'}{OB} \quad (3-2)$$

donde:

OB' es la distancia del origen al punto de producción de la unidad B proyectado sobre la frontera de eficiencia.

OB es la distancia del origen al punto de operación real de la Unidad B

Es claro que el valor numérico de la eficiencia técnica está en el rango de 0 a 1, siendo 0 el peor caso de eficiencia, mientras 1 el valor ideal.

³⁰ Obviamente esta reducción debe hacerse en las cantidades adecuadas para cada insumo, y no necesariamente de forma proporcional.

3.2 Eficiencia de precio

Hasta el momento se ha planteado que la utilización en las cantidades óptimas de insumos, dado un nivel de producto, permitirá que el proceso productivo sea considerado eficiente. Sin embargo, la existencia de diferencias de precio entre los insumos utilizados, podría alterar de forma no deseada el valor de producción del producto.

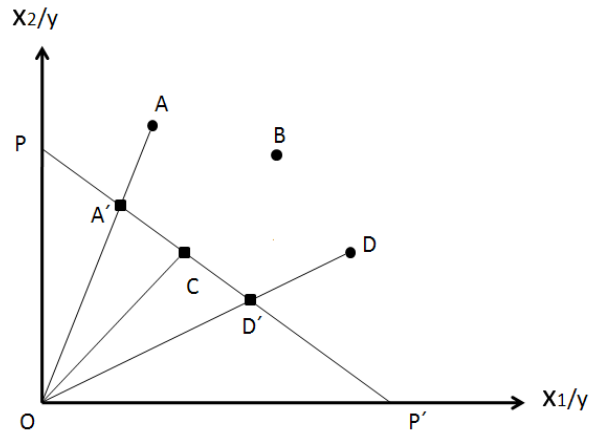


Figura 15. Línea de isocoste y eficiencia de precio

La eficiencia de precio (EP) permite encontrar la combinación óptima de insumos en función de sus precios relativos, y no en función de sus cantidades. De esta forma, aunque no se garantiza la máxima productividad, si se garantiza el mínimo costo de producción.

Con el fin de incluir el aspecto económico en los análisis, en la figura 15 se ha dibujado la línea de isocoste PP'. Esta línea representa la frontera eficiente económica de producción, y su pendiente está dada por la relación de precios entre los insumos X1 y X2.

De acuerdo al enfoque dado por la eficiencia de precio, será considerada como eficiente toda unidad que esté en capacidad de mantener los costos de producción sobre la línea de Isocoste. Como se puede ver en la figura 15, solo la unidad C cumple con esta condición por lo que es la única que se considera eficiente.

Utilizando como ejemplo a la unidad A, la eficiencia de precio estará dada de la siguiente manera.

$$EP_A = \frac{OA'}{OA} \quad (3-3)$$

Tal y como se presentó para el caso de la eficiencia técnica, el valor de la eficiencia de precio tomará valores entre 0 y 1.

3.3 Eficiencia global

Con la eficiencia global (EG) se busca integrar tanto la eficiencia técnica como la eficiencia de precio. Se trata entonces de encontrar la combinación óptima de

insumos, que garantice tanto el nivel máximo de productividad como el mínimo costo de producción.

Este tipo de eficiencia junto con la eficiencia de precio es de difícil estimación, debido a la dificultad extra que implica establecer el valor económico de los insumos. Este aspecto es más visible en aquellas variables de carácter no cuantitativo que hacen parte del proceso productivo.

Debido a lo anterior, las evaluaciones de eficiencia realizadas en esta investigación se realizaron únicamente teniendo en cuenta la eficiencia técnica de las empresas.

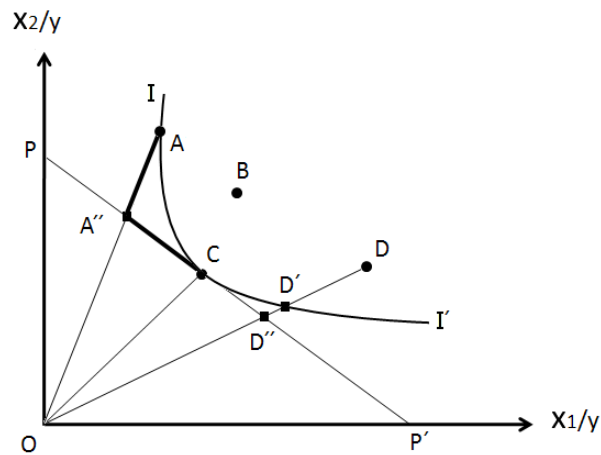


Figura 16. Isocuantas de producción e isocoste y la eficiencia global.

En la figura 16 se presentan de forma conjunta las fronteras de eficiencia técnica y económica. Como se puede apreciar, debido a que la unidad C se encuentra ubicada simultáneamente sobre ambas fronteras, es la única que presenta eficiencia global. Para el caso de la unidad A, por ejemplo, sería necesario que el punto de operación dado por las cantidades de insumos, se desplazara a través de la trayectoria señalada para que esta unidad también mostrara eficiencia global.

Matemáticamente hablando, la eficiencia global se entiende como el producto entre la eficiencia técnica y la eficiencia de precio, es decir

$$EG = ET \times EP \tag{3-4}$$

Tomando como referencia a la unidad D la eficiencia global estará expresada de la siguiente manera:

$$EG_D = \frac{OD'}{OD} \times \frac{OD''}{OD'} = \frac{OD''}{OD} \tag{3-5}$$

donde:

$\frac{OD'}{OD}$ es la eficiencia técnica de la unidad D

$\frac{OD''}{OD'}$ es la eficiencia económica de la unidad D

Capítulo 4

4 Análisis envolvente de datos

El Análisis Envolvente de Datos (DEA) es una técnica no paramétrica utilizada en el establecimiento de índices de eficiencia³¹. Está fundamentada en la programación lineal, y con ella, se busca encontrar diferencias de desempeño entre un conjunto de unidades³².

Es el resultado de más de 50 años de investigación en el área de la teoría de producción, y sus orígenes se encuentran en el trabajo realizado por Farrell (1957). En dicho trabajo, se plantea una metodología para establecer medidas de eficiencia productiva, a partir de las relaciones existentes entre insumos y productos. Sin embargo, fueron Charnes, Cooper y Rhodes (1978), los que en su trabajo "Measuring the efficiency of decision making units" desarrollaron propiamente el análisis envolvente de datos.

Debido a la simplicidad en el uso de esta técnica, además de sus buenos resultados, han sido muchas sus aplicaciones y avances. Se han desarrollado variaciones de los modelos básicos, y su uso ha sido cada vez más frecuente en diversas áreas. Sin embargo, aún cuando esta técnica ofrece muchos elementos positivos, también cuenta con algunas debilidades que deben ser tenidas en cuenta.

A continuación se presentan algunas de las ventajas y desventajas de la metodología DEA.

Ventajas

- Caracteriza cada unidad mediante una única puntuación de eficiencia.
- No es necesario el conocimiento de una función matemática que relacione los insumos con los productos.
- Permite la incorporación de diferentes unidades de medida en las evaluaciones de eficiencia.
- Permite incluir de forma simultánea tanto los insumos como los productos.
- Establece el conjunto de unidades que pueden ser utilizadas como referencia para la mejora.
- Permite establecer los valores óptimos de insumos y/o productos, con el fin de lograr que cada una de las unidades evaluadas sea eficiente.

Desventajas

- Es un análisis determinista que no considera el efecto de posibles errores en la información utilizada.
- Deben solucionarse tantos problemas de programación lineal como número de unidades evaluadas, por lo que pueden presentarse problemas de tipo computacional.

³¹ Los valores de eficiencia obtenidos mediante la metodología DEA son de carácter relativo como se verá más adelante.

³² Estas Unidades deben estar operando bajo condiciones homogéneas en lo que a insumos y entorno se refiere.

- La utilización de un elevado número de variables en los análisis, puede ocasionar que algunas empresas sean consideradas erróneamente eficientes; de forma general, es deseable que la suma de inputs y outputs sea pequeña en relación con el número de unidades evaluadas.
- No permite el establecimiento de valores de eficiencia absolutos, en otras palabras, no es posible establecer si los valores de eficiencia calculados para cada unidad, son efectivamente el límite al cual podría llevarse dicha unidad.

En las siguientes páginas se presentarán los modelos básicos de esta técnica, así como algunas de sus variaciones más importantes.

4.1 Caracterización de los modelos DEA

4.1.1 Orientación de los modelos

El término “orientación del modelo” en la metodología DEA, se refiere a la forma en la cual se buscará mejorar los índices de productividad. Si el interés del análisis está basado en la necesidad de disminuir las cantidades de insumos, mientras se mantiene constante la cantidad de producto, entonces el modelo ideal en este caso será un modelo Input orientado. Por otra parte, si el interés radica en la necesidad de aumentar la cantidad de producto manteniendo constantes las cantidades de insumos, se hablará entonces de un modelo Output orientado.

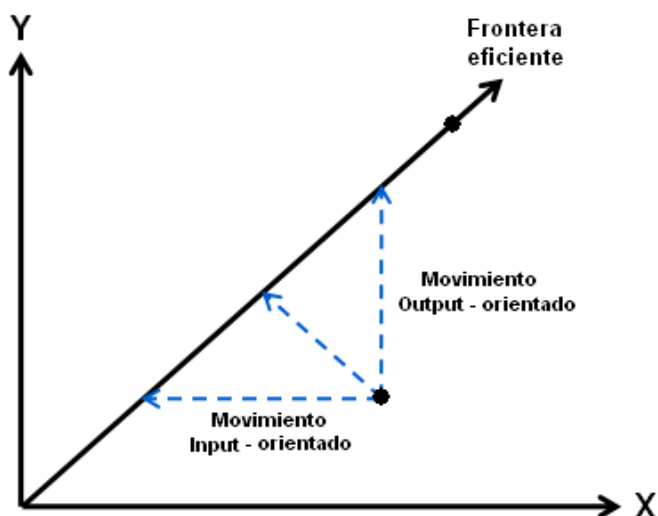


Figura 17. Isocanta de producción y eficiencia técnica.

En la figura 17 se presenta una situación en la cual dos unidades de producción, obtienen un producto a partir de la utilización de un insumo. Como se puede ver, la frontera eficiente de producción ha sido definida por la unidad B, por lo que la unidad A es considerada técnicamente ineficiente.

Con el fin de aumentar el índice de eficiencia de la unidad A, se han planteado tres alternativas diferentes que podrían ubicarla sobre la frontera eficiente de producción. Como se puede ver, si el interés de la unidad es el de aumentar su productividad manteniendo constantes los niveles de producto, entonces el único camino es la

reducción en los niveles de insumo utilizado (Minimización). Por otra parte, si el objetivo es aumentar la productividad manteniendo constante el nivel de insumo, entonces se deberá procurar aumentar la cantidad de producto (Maximización).

Existe una tercera alternativa que consistiría en modificar simultáneamente los niveles de insumo y producto. Sin embargo, en la práctica este tipo de enfoque es de difícil aplicación ya que no siempre es posible controlar de forma simultánea las cantidades de insumos (inputs) y productos (Outputs).

De acuerdo a la orientación del modelo, *“una unidad será considerada eficiente, si y solo si, no es posible incrementar las cantidades de Output manteniendo fijas las cantidades de Inputs utilizadas, ni es posible disminuir las cantidades de inputs empleadas sin alterar las cantidades de Outputs obtenidas”* (Charnes, Cooper y Rhodes, 1981).

4.1.2 Tipología de retornos a escala

Antes de realizar cualquier tipo de evaluación de eficiencia mediante el uso de la metodología DEA, es necesario establecer el tipo de retornos a escala que caracteriza la tecnología de producción.

Los rendimientos a escala brindan información acerca de la forma en la que la productividad aumenta, en función de la variación porcentual de los factores de producción (Inputs y Outputs). De forma general, los retornos a escala pueden ser de tres tipos: constantes, crecientes o decrecientes.

- **Rendimientos constantes a escala:** El incremento porcentual del Output es igual al incremento porcentual del Input.
- **Rendimientos crecientes a escala:** El incremento porcentual del Output es mayor que el incremento porcentual del Input.
- **Rendimientos decrecientes a escala:** El incremento porcentual del Output es menor que el incremento porcentual del Input.

Más adelante se verá que la valoración de los retornos a escala para cada una de las unidades evaluadas, es un aspecto que influye de forma importante en la correcta selección del modelo DEA.

Capítulo 5

5 Modelos DEA

5.1 Modelo DEA-CCR

El primero de los modelos DEA desarrollados fue denominado DEA-CCR en honor a sus desarrolladores, Charnes, Cooper y Rhodes (1978). Este modelo proporciona medidas de eficiencia radial, tanto para modelos Input como para modelos Output orientados. Es utilizado cuando las unidades evaluadas presentan rendimientos constantes a escala.

A continuación se presenta la forma básica de este modelo para el caso input orientado, en su forma fraccional³³.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{u, v} h_0 &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \\ \text{Sujeto a} \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ u_r, v_i &\geq \varepsilon \end{aligned}$$

(5-1)

donde:

u_r, v_i : son los pesos ponderados de los Inputs y Outputs, respectivamente.

n : es el número de Unidades evaluadas.

x_{ij} representan las cantidades de Input i ($i = 1, 2, \dots, m$) consumidos por la j – ésima Unidad.

y_{ij} representan las cantidades de Output r ($r = 1, 2, \dots, s$) producidos por la j – ésima Unidad.

x_{i0} : es la cantidad de Input i consumido por la Unidad evaluada, Unidad₀.

y_{i0} : es la cantidad de Output r producido por la Unidad evaluada, Unidad₀.

ε : es un número cercano a cero, normalmente establecido como 1×10^{-6} .

La constante ε está definida como una restricción de no negatividad, que además de garantizar que ninguno de los inputs ó outputs sea eliminado del análisis, evita que se presenten problemas de convergencia debido a la posible existencia de divisiones por cero.

³³ En la forma fraccional los modelos DEA no están definidos como problemas de programación lineal

Como se puede ver, la expresión 5-1 es idéntica a la ecuación 3-1 con la cual se buscaba establecer el índice de productividad de una unidad. La diferencia esencial, es la ponderación³⁴ que se realiza a las cantidades de input y output para el caso de la metodología DEA.

Un elemento poco deseable y que es inherente al modelo 5-1, es el hecho de que proporciona un número infinito de soluciones; ya que si u y v son soluciones de 5-1, entonces también lo serán $u\gamma$ y $v\gamma$, para cualquier $\gamma > 0$.

Con el fin de solucionar los inconvenientes planteados anteriormente, Charnes, Cooper y Rhodes plantearon una forma alternativa de solucionar el modelo 5-1. Valiéndose de las parametrizaciones que se presentan a continuación, lograron linealizar el modelo y de esta forma hacer más simple su solución.

$$\mu_r = t \cdot u_r$$

$$\delta_i = t \cdot v_i \quad \text{Para } t \leq 0$$

$$t_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_i \cdot x_{i0}}$$

De esta forma es posible llegar a la versión multiplicativa del modelo DEA-CCR, el cual está expresado de la siguiente manera.

$$\text{Max}_{\mu, \delta} w_0 = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0}$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^m \delta_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} - \sum_{i=1}^m \delta_i x_{i0} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0$$

(5-2)

donde:

μ_r, δ_i : son los pesos ponderados de los Inputs y Outputs, respectivamente.

El modelo 5-2 puede ser reescrito matricialmente de la siguiente manera.

³⁴ Esta ponderación muestra la importancia que tiene para cada una de las unidades evaluadas, tanto los inputs como los outputs.

$$\text{Max}_{\mu, \delta} w_0 = \mu^T y_0$$

Sujeto a :

$$\delta^T x_0 = 1$$

$$\mu^T Y - \delta^T X \leq 0$$

$$\mu^T, \delta^T \geq I\varepsilon$$

(5-3)

donde:

Y es la matriz de Outputs de dimensión $s \times n$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & & & \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{in} \\ \vdots & & & \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{bmatrix}$$

- y_0 es el vector Outputs de la unidad evaluada.
- X es la matriz de Inputs de orden $(m \times n)$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{s2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

- x_0 es el vector de Inputs de la unidad evaluada.
- μ es el vector de pesos para los Outputs $(s \times 1)$.
- δ es le vector de pesos para los Inputs $(m \times 1)$.
- I es el vector identidad $(n \times 1)$

Como se mencionó anteriormente, debido a la necesidad de resolver tantos problemas de optimización, como número de unidades se tenga, es posible que se presenten dificultades de tipo computacional. Para evitar este inconveniente, es usual utilizar la versión dual³⁵ del modelo 5-3.

Es por esta razón que la mayoría de los programas comerciales desarrollados para realizar evaluaciones DEA, utilicen la forma envolvente³⁶ de los modelos de optimización lineal.

A continuación se muestra la forma envolvente del modelo DEA-CCR input orientado.

$$\text{Min}_{\theta, \lambda} z_0 = \theta$$

Sujeto a :

$$Y\lambda \geq y_0$$

$$\theta x_0 \geq X\lambda$$

$$\lambda \geq 0$$

(5-4)

donde:

- λ es el vector de intensidades (nx1) .
- θ es la eficiencia técnica de la Unidad₀

Ejemplo 3

Partiendo de un conjunto de 3 unidades, cada una de las cuales produce un único producto (Y) a partir de la utilización de un único insumo (X), encontrar los valores de eficiencia relativa para cada una de las unidades evaluadas.

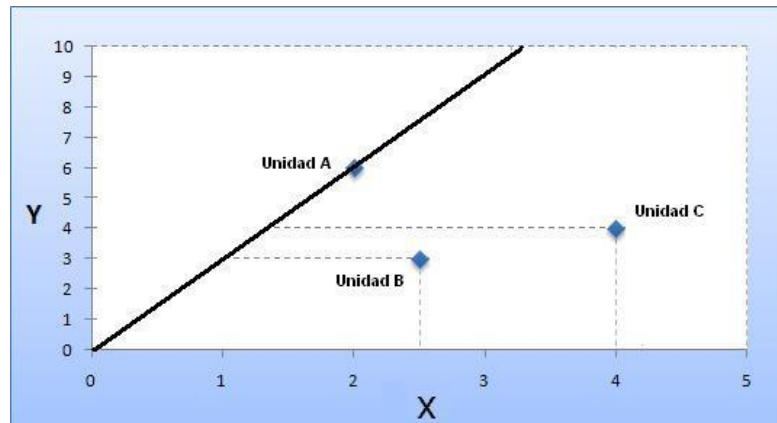
Unidad evaluada	Entrada (X)	Salida (Y)
Unidad A	2	6
Unidad B	2,5	3
Unidad C	4	4

³⁵ La forma envolvente de un problema de optimización lineal, es simplemente la versión dual del problema original (primal). De esta manera, al encontrar la solución del problema dual, se podrá llegar a la solución del problema original.

³⁶ De ahora en adelante todos los modelos presentados en este documento estarán de esta forma.

Rta/

Al graficarse los puntos de operación para cada una de las unidades evaluadas, se observa que la unidad A está definiendo la frontera eficiente de producción. Esto significa que esta empresa es la que presenta el mayor nivel de eficiencia relativa. Ahora, ya que la unidad B es la siguiente en estar más cerca de la frontera eficiente, entonces es la que presenta el segundo valor más alto. Finalmente, la unidad C es la que presenta el peor índice de eficiencia relativa.



Con el fin de confirmar numéricamente lo mostrado en la figura anterior, se resolvió el problema de optimización (5-4), y se obtuvo lo siguiente:

Unidad evaluada	Eficiencia relativa
Unidad A	1,0000
Unidad B	0,4000
Unidad C	0,3333

Como se ve, se confirmó que la unidad A es la empresa que presenta el mayor valor de eficiencia relativa.

5.2 Conceptos de eficiencia fuerte y débil

Con la utilización de cualquiera de las formas del modelo DEA-CCR presentadas hasta el momento, es posible identificar aquellas unidades que son consideradas técnicamente eficientes; para el caso de la forma envolvente, esto sucederá si $\theta^* = 1$.

Sin embargo, debido a que la medición de eficiencia es realizada de forma radial respecto a la frontera de producción, existe la posibilidad de que empresas consideradas técnicamente eficientes, admitan una disminución extra en sus inputs, o bien, un aumento en las cantidades de outputs.

En la figura 18 se han graficado las propuestas de producción para cuatro unidades diferentes. Ya que las unidades A y C son técnicamente eficientes, la frontera eficiente de producción está definida por el segmento de línea \overline{AC} .

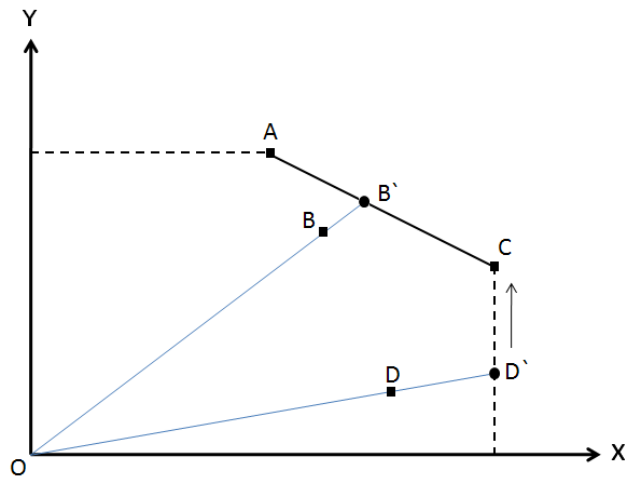


Figura 18. Fronteras de eficiencia y de posibilidades de producción

Proyectando los puntos extremos de la frontera de producción hacia los ejes coordenados, se obtendrá la denominada frontera de posibilidades de producción (FPP), en otras palabras, el límite entre el nivel de producción alcanzable e inalcanzable. Todas las unidades que se encuentren por debajo de dicha frontera, serán consideradas técnicamente ineficientes.

Como se puede ver, se han planteado las trayectorias que permitirían a las unidades B y D ser eficientes. Para el caso de la unidad B, el punto proyectado sobre la frontera de posibilidades de producción, también hace parte de la frontera eficiente; en este caso se habla de eficiencia fuerte³⁷, ya que no es posible reducir la cantidad de input sin que se vea disminuido el nivel de output.

Cosa diferente ocurre para el caso de la empresa D, ya que el punto proyectado solo hace parte de la frontera de posibilidades de producción. Debido a esto, es posible aumentar el nivel de output mientras se mantiene constante el nivel de input. En este caso se habla de eficiencia débil³⁸ y el valor extra en el input es conocido como valor de holgura.

5.3 Modelo DEA de dos etapas

Ya que existe la posibilidad de que alguna de las unidades evaluadas pueda exhibir eficiencia débil, Ali y Seiford (1993) plantean la resolución de una segunda etapa en el proceso de optimización. Con dicha etapa se busca maximizar la suma de las holguras mientras se mantiene constante el valor de eficiencia θ , logrado en la primera etapa (modelo 5-4).

La segunda etapa corresponde a un nuevo problema de programación lineal, el cual está definido de la siguiente forma:

³⁷ La eficiencia fuerte también es conocida como eficiencia de Pareto-Koopmans

³⁸ La eficiencia débil también es conocida como eficiencia de Farrell. Esto ocurre cuando existen holguras en los Inputs (s^-) o en los Outputs (s^+) de acuerdo a la orientación del modelo

$$\text{Min}_{\lambda, s^+, s^-} -(Is^+ + Is^-)$$

Sujeto a :

$$\lambda Y = y_0 + s^+$$

$$\lambda X = \theta^* x_0 - s^-$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0$$

(5-5)

donde:

s^- es el vector de holguras de Inputs

s^+ es el vector de holguras de Outputs

Las dos etapas del análisis pueden ser integradas en un solo programa de optimización lineal, tal y como se muestra a continuación.

$$\text{Min}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \theta - \varepsilon (Is^+ + Is^-)$$

Sujeto a :

$$\lambda Y = y_0 + s^+$$

$$\lambda X = \theta x_0 - s^-$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0$$

(5-6) Modelo DEA-CCR Input orientado en dos etapas

La versión output orientada del modelo 5-6 es la siguiente.

$$\text{Max}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \varphi + \varepsilon (Is^+ + Is^-)$$

Sujeto a :

$$\lambda Y = \varphi y_0 + s^+$$

$$\lambda X = x_0 - s^-$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0$$

(5-7) Modelo DEA-CCR Output orientado en dos etapas

donde:

φ es el inverso de la eficiencia técnica

5.4 Modelo DEA-BCC

Como se mencionó anteriormente, el modelo DEA-CCR parte de la existencia de rendimientos a escala constante en el proceso productivo. Sin embargo, esta es una condición bastante restrictiva que difícilmente se podrá encontrar en una situación real de aplicación. Por tal motivo, Banker, Charnes y Cooper (1989), desarrollaron una variación del modelo DEA-CCR con la cual es posible considerar la presencia de rendimientos a escala variable. Este modelo es conocido como DEA-BCC³⁹ y en este numeral se presentan sus características más relevantes.

5.4.1 Formulación del modelo BCC

Ya que el modelo DEA-BCC es una extensión del modelo DEA-CCR, su formulación es similar. La diferencia entre ellos radica en la inclusión de una restricción extra para el caso del modelo DEA-BCC. Dicha restricción se conoce como restricción de convexidad: $\vec{1}\lambda = 1$ ⁴⁰.

De acuerdo con la definición de Pareto-Koopmans, la unidad evaluada será eficiente si en la solución óptima $\theta^* = 1$, los valores de holgura son iguales a cero, es decir, si $s^{+*} = 0$ y $s^{-*} = 0$; bajo esta definición, la forma Input orientada del modelo DEA-BCC es la siguiente.

$$\text{Min}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \theta - \varepsilon (Is^+ + Is^-)$$

Sujeto a:

$$\lambda Y = y_0 + s^+$$

$$\lambda X = \theta x_0 - s^-$$

$$\vec{1} \cdot \lambda = 1$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0$$

(5-8) Modelo DEA-BCC Input orientado en dos etapas

La versión output orientada del modelo 5-8 estará entonces expresada de la siguiente manera:

³⁹ Este modelo es llamado así por sus desarrolladores Banker, Charnes y Cooper.

⁴⁰ "La restricción $\vec{1}\lambda = 1$ restringe el rango de valores que pueden tomar las componentes del vector de intensidad de manera que sumen 1. De esta forma, se impone únicamente la propiedad de convexidad, pero no la de rendimientos a escala. Por tanto, el nuevo estimador del CCP (Conjunto de Posibilidades de Producción) incluye todas las combinaciones lineales convexas de Unidades observadas (por esta razón deben sumar 1 las componentes del vector de intensidad) pero no se permite reescalar arbitrariamente la actividad de ningún proceso observado".

$$\text{Max}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \varphi + \varepsilon (Is^+ + Is^-)$$

Sujeto a :

$$\lambda Y = \varphi y_0 + s^+$$

$$\lambda X = x_0 - s^-$$

$$\vec{1} \cdot \lambda = 1$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0$$

(5-9) Modelo DEA-BCC Output orientado en dos etapas

5.5 Modelo NIRS

El modelo NIRS⁴¹ es una variación del modelo DEA-BCC, en la cual se ha excluido el efecto de las intensidades correspondientes a las unidades de producción que presentan rendimientos a escala decreciente. Debido a esto la sumatoria de las intensidades en este caso no es necesariamente igual a 1; es decir.

$$\vec{1} \cdot \lambda \leq 1$$

Bajo esta condición el modelo (5-8) queda expresado de la siguiente manera.

$$\text{Min}_{\theta, \lambda, s^+, s^-} z_0 = \theta - \varepsilon (Is^+ + Is^-)$$

Sujeto a :

$$\lambda_i Y = y_0 + s^+$$

$$\lambda_i X = \theta x_0 - s^-$$

$$\vec{1} \cdot \lambda \leq 1$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0$$

(5-10) Modelo DEA-NIRS input orientado en dos etapas

5.6 Inclusión de variables no controlables en los modelos DEA

En los modelos DEA que se han presentado hasta el momento, se ha supuesto que las cantidades de insumos y productos han sido de alguna forma controlables. Sin embargo, es posible que debido a factores propios del proceso productivo, existan circunstancias en las cuales no sea posible variar de forma discrecional alguna de

⁴¹ *Non-Increasing Returns-to-Scale*

estas variables (Banker y Morey, 1986). Por tal razón, se hace necesario realizar una clasificación entre variables controlables (C) y no controlables (NC) de tal forma que:

$$X = X_C \cup X_{NC}, X_C \cap X_{NC} = \emptyset \text{ (Inputs)}$$

$$Y = Y_C \cup Y_{NC}, Y_C \cap Y_{NC} = \emptyset \text{ (Outputs)}$$

Incluyendo el efecto de las variables no controlables en los análisis, algunos de los modelos vistos hasta el momento quedarán de la siguiente forma:

$$\text{Min}_{\theta, \lambda, S^+, S^-} z_0 = \theta - \varepsilon(S^+ + S^-)$$

S.A

$$Y\lambda = y_0 + S^+$$

$$X\lambda = \theta x_{0,D} - S_D^-$$

$$X\lambda = x_{0,ND} - S_{ND}^-$$

$$\lambda, S^+, S_D^-, S_{ND}^- \geq 0$$

(5-11) Modelo DEA-CCR Input orientado con variables no controlables

$$\text{Max}_{\varphi, \lambda, S^+, S^-} z_0 = \varphi + \varepsilon(S^+ + S^-)$$

S.A

$$X\lambda = y_0 + S^+$$

$$Y\lambda = \varphi y_{0,D} + S_D^+$$

$$Y\lambda = y_{0,ND} + S_{ND}^+$$

$$\lambda, S^-, S_D^+, S_{ND}^+ \geq 0$$

(5-12) Modelo DEA-CCR Output orientado con variables no controlables

$$\text{Min}_{\theta, \lambda, S^+, S^-} z_0 = \theta - \varepsilon(S^+ + S^-)$$

S.A

$$Y\lambda = y_0 + S^+$$

$$X\lambda = \theta x_{0,D} - S_D^-$$

$$X\lambda = x_{0,ND} - S_{ND}^-$$

$$\vec{1} \lambda = 1$$

$$\lambda, S^+, S_D^-, S_{ND}^- \geq 0$$

(5-13) Modelo DEA-BCC Input orientado con variables no controlables

$$\text{Max}_{\varphi, \lambda, S^+, S^-} z_0 = \varphi + \varepsilon(S^+ + S^-)$$

S.A

$$X\lambda = y_0 + S^+$$

$$Y\lambda = \varphi y_{0,D} + S_D^+$$

$$Y\lambda = y_{0,ND} + S_{ND}^+$$

$$\vec{1} \lambda = 1$$

$$\lambda, S^-, S_D^+, S_{ND}^+ \geq 0$$

(5-14) Modelo DEA-BCC Output orientado con variables no controlables

Capítulo 6

6 Índice de productividad de Malmquist

Ya que en el marco regulatorio actual las tarifas son fijadas por un periodo de tiempo establecido, fue necesario establecer la forma en la que este aspecto sería incluido en la metodología propuesta. Una forma simple de hacerlo sería estableciendo el promedio aritmético de los valores de eficiencia, calculados para los años que componen el periodo tarifario anterior. Sin embargo, este método no tiene en cuenta la totalidad de componentes que determinan el desempeño de las empresas.

Hasta el momento se ha considerado que el único elemento influyente en el aumento de la productividad es el adecuado uso de los recursos. Sin embargo, existe otro elemento que influye de manera importante sobre esta variable.

El cambio tecnológico⁴² es un factor determinante en el aumento de la productividad, y por lo tanto, es necesario incluir su efecto en las evaluaciones DEA. Con este fin, fue desarrollada una variación de la metodología básica que permite distinguir entre mejora técnica y mejora tecnológica. De esta manera, es posible identificar elementos de carácter exclusivamente operativo que afectan de forma negativa los índices de eficiencia.

Esta nueva metodología permite establecer el nivel de evolución en los indicadores de eficiencia a través del tiempo, teniendo en cuenta el efecto del cambio tecnológico.

Con el fin de explicar esta idea de forma simple, se ha supuesto una situación en la cual dos unidades producen un producto a partir de la utilización de un solo insumo. Para este caso, se ha considerado que el proceso productivo está caracterizado por una relación de rendimientos a escala constante.

En la siguiente figura se presenta la frontera eficiente de producción para dos instantes de tiempo diferentes (t y $t+1$). En ambos casos, la frontera de eficiencia ha sido definida por la unidad B, y como se puede ver, esta frontera no ha cambiado de un instante al otro. Debido a esto, la variación en la productividad en cualquiera de las unidades evaluadas, se debe exclusivamente al cambio de la eficiencia técnica en el tiempo. En otras palabras, no se ha presentado ningún tipo de mejora tecnológica.

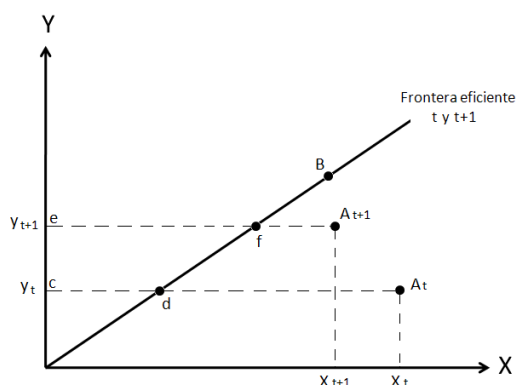


Figura 19. Frontera de retornos a escala constante para dos periodos de tiempo diferentes

⁴² El avance o progreso tecnológico para efectos de la situación estudiada en esta investigación, puede ser entendida como el desarrollo de nuevas y mejores formas para producir bienes y servicios.

Para este ejemplo en particular, el cambio productivo (CP) comprendido entre los instantes t y $t+1$ para la unidad A, está dado por la siguiente expresión:

$$CP_A = \frac{P_{A,t+1}}{P_{A,t}} = \frac{y_{A,t+1}/x_{A,t+1}}{y_{A,t}/x_{A,t}} = \frac{ET_{A,t+1}}{ET_{A,t}} = \frac{ef/eA_{t+1}}{cd/cA_t} \quad (6-1)$$

donde:

$P_{A,t}$ es la productividad de la unidad A en el instante t .

$P_{A,t+1}$ es la productividad de la unidad A en el instante $t + 1$.

$y_{A,t}$ es el valor del Output de la unidad A en el instante t .

$y_{A,t+1}$ es el valor del Output de la unidad A en el instante $t + 1$.

$x_{A,t}$ es el valor del Input de la unidad A en el instante t .

$x_{A,t+1}$ es el valor del Input de la unidad A en el instante $t + 1$.

$ET_{A,t}$ es el índice de eficiencia técnica de la unidad A en el instante t .

$ET_{A,t+1}$ es el índice de eficiencia técnica de la unidad A en el instante $t + 1$.

Ahora,

- Si $CP > 1$, entonces la unidad evaluada presenta una mejora en su nivel de productividad.
- Si $CP < 1$, entonces la unidad evaluada presenta un deterioro en su nivel de productividad.
- Si $CP=1$ el índice de productividad no habrá cambiado de un instante a otro.

El cambio en la tecnología de producción será visto gráficamente como un desplazamiento de la frontera eficiente, tal y como se ve en la figura 20.

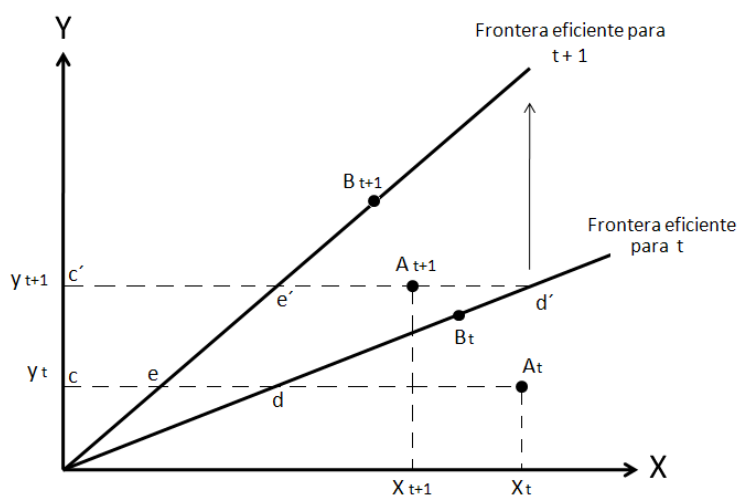


Figura 20. Desplazamiento de la frontera de producción para dos periodos de tiempo diferente.

Para este caso en particular, el cambio productivo de la unidad A tomando como referencia la tecnología del instante t^{43} , está dado por la siguiente expresión:

$$CP_A^t = \frac{E_{A,t+1}^t}{E_{A,t}^t} = \frac{c'd'/cA_{t+1}}{cd/cA_t} \quad (6-2)$$

donde:

- $E_{A,t}^t$ es el valor de la eficiencia técnica de la unidad A en el instante t, respecto a la frontera eficiente del mismo instante de tiempo.
- $E_{A,t+1}^t$ es la eficiencia técnica de la unidad A en el instante t+1 respecto a la frontera tecnológica del instante t.

La expresión anterior es la representación particular del índice de Malmquist para el caso input orientado, el cual de forma general, puede ser expresado de la siguiente manera de acuerdo a sus desarrolladores (Caves, Christensen y Diewert)

$$IPM_{CCD}^t = \frac{D_I^t(x_t, y_t)}{D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})}$$

(6-3) Índice de productividad de malmquist

donde:

- $D_I^t(x_t, y_t)$ es la distancia⁴⁴ input de la unidad evaluada en el instante t, respecto a la frontera eficiente del mismo instante de tiempo.
- $D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})$ es la distancia⁴⁵ input de la unidad evaluada en el instante t+1, respecto a la frontera eficiente del instante t.

De acuerdo al valor obtenido en el IPM es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- Si $IPM_{CCD}^t > 1$ se habrá presentado un incremento de productividad entre el instante t y el instante t+1.
- Si $IPM_{CCD}^t < 1$ existirá una disminución en el nivel de productividad de la unidad evaluada.
- Si $IPM_{CCD}^t = 1$ no se habrá presentado un cambio en los niveles de productividad de la empresa evaluada entre los instantes t y t+1.

⁴³ Asumiendo que de un instante a otro se ha presentado un cambio en la tecnología de producción, sería posible realizar las evaluaciones de eficiencia tomando como referencia la tecnología del instante t, o bien, la correspondiente al instante t+1.

⁴⁴ Con ella se establece el nivel de reducción en los niveles de inputs en el instante t, necesario para situar a la unidad evaluada sobre la frontera eficiente del mismo instante de tiempo. Si la unidad evaluada es técnicamente eficiente, entonces $D_I^t(x_t, y_t)$ será igual a 1, de lo contrario, tendrá un valor superior.

⁴⁵ De forma análoga que para el caso anterior, $D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})$ indica el valor de reducción de los inputs en el instante t, necesarios para que la unidad evaluada logre situarse sobre la frontera eficiente correspondiente al instante t+1. En este caso, $D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})$ si puede tomar valores inferiores a 1.

6.1 Descomposición del índice de productividad de Malmquist

Partiendo de un análisis similar al presentado anteriormente, pero tomando como referencia la tecnología del instante $t+1$, el índice de productividad de Malmquist está dado de la siguiente manera:

$$IPM_{CCD}^t = \frac{D_I^t(x_t, y_t)}{D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})} \quad (6-4)$$

Aplicando la expresión anterior a la situación planteada en la figura 20, y para el caso específico de la unidad A, se tiene lo siguiente:

$$CP_A^{t+1} = \frac{E_{A,t+1}^{t+1}}{E_{A,t}^{t+1}} = \frac{c'e'/cA_{t+1}}{ce/cA_t} \quad (6-5)$$

Teniendo en cuenta que la función de distancia Input (u output) es igual al inverso de la media de la eficiencia técnica, se tiene entonces que:

$$[D_I^t(x_t, y_t)]^{-1} = E_{A,t}^t \quad \text{y} \quad [D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})]^{-1} = E_{A,t+1}^t \quad (6-6)$$

El índice de Malmquist para cada uno de los instantes evaluados estará expresado de la siguiente forma:

$$IPM_{CCD}^t = \frac{D_I^t(x_t, y_t)}{D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})} = \frac{E_{A,t+1}^t}{E_{A,t}^t} = \frac{c'd'/cA_{t+1}}{cd/cA_t} = CP_A^t$$

$$IPM_{CCD}^{t+1} = \frac{D_I^{t+1}(x_t, y_t)}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})} = \frac{E_{A,t+1}^{t+1}}{E_{A,t}^{t+1}} = \frac{c'e'/cA_{t+1}}{ce/cA_t} = CP_A^{t+1}$$

Debido a que la selección de la frontera tecnológica generalmente es realizada de forma subjetiva, algunos autores han planteado la utilización de un IPM alternativo.

Esta variación fue planteada por Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos, y consiste en calcular la media geométrica de los IPM encontrados para cada instante de tiempo, es decir:

$$IPM_{FGLR} = (x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = [IPM_{CCD}^t * IPM_{CCD}^{t+1}]^{1/2} \quad (6-7)$$

O equivalentemente

$$IPM_{FGLR} = (x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = \left[\frac{D_I^t(x_t, y_t)}{D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})} \times \frac{D_I^{t+1}(x_t, y_t)}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})} \right]^{1/2} \quad (6-8)$$

Índice de Malmquist propuesto por Färe, Grosskopf, Lindgren y Roos

Para el caso del ejemplo de la figura 20, el índice de productividad de Malmquist calculado de esta forma estará entonces expresado de la siguiente manera.

$$IPM_{FGLR} = (x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = \left[\frac{E_{A,t+1}^t}{E_{A,t}^t} \times \frac{E_{A,t+1}^{t+1}}{E_{A,t}^{t+1}} \right]^{1/2} = \left[\frac{c'd'/cA_{t+1}}{cd/cA_t} \times \frac{c'e'/cA_{t+1}}{ce/cA_t} \right]^{1/2}$$

Con el fin de establecer el aporte hecho tanto por el progreso tecnológico como por el mejoramiento técnico, la expresión anterior puede ser descompuesta en dos partes de la siguiente forma:

$$IPM_{FGLR} = (x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = \frac{D_I^t(x_t, y_t)}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})} \times \left[\frac{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})} \times \frac{D_I^{t+1}(x_t, y_t)}{D_I^t(x_t, y_t)} \right]^{1/2} \quad (6-9)$$

donde:

$$\frac{D_I^t(x_t, y_t)}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})} \text{ mide el cambio en la eficiencia técnica entre los instantes } t \text{ y } t + 1$$

$$\left[\frac{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})} \times \frac{D_I^{t+1}(x_t, y_t)}{D_I^t(x_t, y_t)} \right]^{1/2} \text{ mide el cambio tecnológico (CT)}$$

Para el caso de la componente que mide el cambio tecnológico en el proceso productivo, valores superiores a 1 indicarán que se ha presentado un mejoramiento en la tecnología de producción. Por otra parte, si este valor es inferior a 1, se estará entonces frente a un retroceso en el proceso de modernización tecnológica.

Retomando el ejemplo de la figura 20, el cambio tecnológico y la variación en la eficiencia técnica para la unidad A, estarán expresados de la siguiente manera.

$$\frac{D_I^t(x_t, y_t)}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})} = \frac{E_{A,t+1}^t}{E_{A,t}^t} = \frac{c'e'/cA_{t+1}}{cd/cA_t}$$

$$\left[\frac{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_I^t(x_{t+1}, y_{t+1})} \times \frac{D_I^{t+1}(x_t, y_t)}{D_I^t(x_t, y_t)} \right]^{1/2} = \left[\frac{E_{A,t+1}^t}{E_{A,t}^t} \times \frac{E_{A,t+1}^{t+1}}{E_{A,t}^{t+1}} \right]^{1/2} = \left[\frac{c'd'}{c'e'} \times \frac{cd}{ce} \right]^{1/2}$$

Con el fin de incluir el índice de productividad de Malmquist en los análisis DEA, se hace necesario plantear y solucionar varios problemas de optimización lineal⁴⁶. Para el

⁴⁶ Para modelos DEA-CCR el IPM requiere la solución de cuatro problemas de optimización lineal, en tanto que para los modelos DEA-BCC es necesario la resolución de 6 problemas.

caso del modelo DEA-CCR input orientado, se requiere la solución de los siguientes problemas.

1. Cálculo de la medida de eficiencia técnica de la unidad evaluada, tomando como referencia la información del instante t respecto a la frontera tecnológica del mismo instante de tiempo.

$$\left[D_t^t(x_t, y_t) \right]^{-1} = E_{0,t}^t = \text{Min}_{\theta, \lambda} \theta$$

S.A

$$Y_t \lambda \geq y_{0,t}$$

$$\theta x_{0,t} \geq X_t \lambda$$

$$\lambda \geq 0$$

2. Cálculo de la medida de eficiencia técnica de la unidad evaluada, tomando como referencia la información del instante t+1 respecto a la frontera tecnológica del mismo instante de tiempo.

$$\left[D_t^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}) \right]^{-1} = E_{0,t+1}^{t+1} = \text{Min}_{\theta, \lambda} \theta$$

S.A

$$Y_{t+1} \lambda \geq y_{0,t+1}$$

$$\theta x_{0,t+1} \geq X_{t+1} \lambda$$

$$\lambda \geq 0$$

3. Cálculo de la medida de eficiencia técnica de la unidad evaluada, tomando como referencia la información del instante t+1 respecto a la frontera tecnológica del periodo t.

$$\left[D_t^t(x_{t+1}, y_{t+1}) \right]^{-1} = E_{0,t+1}^t = \text{Min}_{\theta, \lambda} \theta$$

S.A

$$Y_t \lambda \geq y_{0,t+1}$$

$$\theta x_{0,t+1} \geq X_t \lambda$$

$$\lambda \geq 0$$

4. Cálculo de la medida de eficiencia técnica de la unidad evaluada, utilizando como referencia la información del instante t respecto a la frontera tecnológica del instante t+1.

$$[D_t^{t+1}(x_t, y_t)]^{-1} = E_{0,t}^{t+1} = \text{Min}_{\theta, \lambda} \theta$$

S.A

$$Y_{t+1} \lambda \geq y_{0,t}$$

$$\theta x_{0,t} \geq X_{t+1} \lambda$$

$$\lambda \geq 0$$

En los trabajos realizados en Colombia y que sirvieron como referente temático en el desarrollo de esta investigación, solamente uno [4] utilizó el índice de productividad de Malmquist. Sin embargo, su aplicación fue parcial y se limitó al desarrollo de evaluaciones DEA con retornos a escala constante; lo cual, como se mencionó anteriormente, no es lo más apropiado. Por tal razón, y como parte del valor agregado de esta investigación, se decidió dar un paso adelante e incluir el IPM en las evaluaciones de modelos DEA con retornos a escala variable.

6.1.1 Descomposición del índice de Malmquist al considerar rendimientos variables a escala

Apoyados en la figura 21 y realizando un procedimiento similar al efectuado para el caso de los modelos DEA-CCR, se obtiene la versión equivalente del índice de Malmquist para modelos DEA-BCC.

En este caso al igual que para el caso anterior, el cambio de productividad se deberá tanto a la variación de la eficiencia técnica como a la variación de la tecnología de producción. Sin embargo, para el caso con retornos a escala variable, el cambio de la eficiencia técnica (ET) está definida por dos componentes: El cambio de la eficiencia técnica pura⁴⁷ (CETP) y el cambio de la eficiencia de escala⁴⁸ (CEE), es decir:

$$ET = CETP \times CEE \quad (6-10)$$

En la figura 21 se presenta una situación en la cual 5 unidades de producción presentan diferentes niveles de productividad para dos instantes de tiempo diferentes (t y t+1). Como se puede ver, se han incluido tanto las fronteras de producción a escala constante, como las correspondientes a las de escala variable.

⁴⁷ La eficiencia técnica pura señala en qué medida la unidad productiva analizada está obteniendo es capaz de obtener el máximo rendimiento a partir de los recursos físicos a su disposición.

⁴⁸ La eficiencia de escala es relevante únicamente cuando la tecnología de producción presenta rendimientos de escala variables

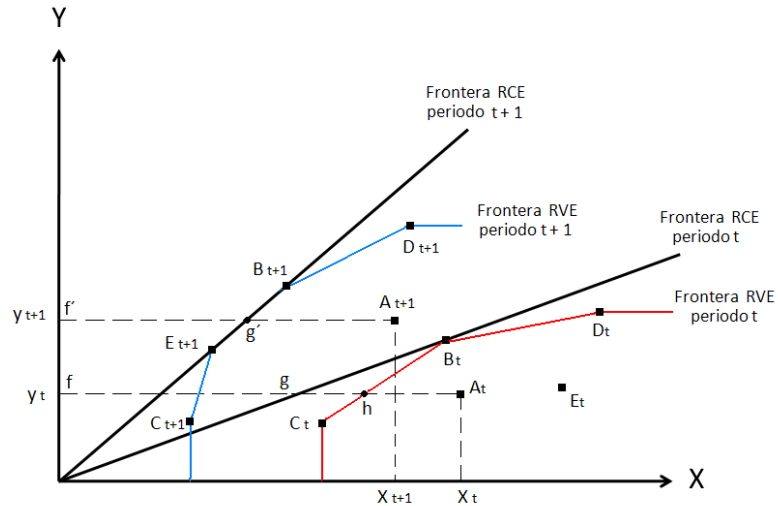


Figura 21. Fronteras de retornos a escala variable para dos periodos de tiempo diferentes

Después de realizado el correspondiente tratamiento matemático, la descomposición del índice de Malmquist queda expresada de la siguiente manera.

$$\frac{D_I^t(x_t, y_t)|_{RCE}}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RCE}} = \frac{D_I^t(x_t, y_t)|_{RVE}}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RVE}} \times \frac{\frac{D_I^t(x_t, y_t)|_{RCE}}{D_I^t(x_t, y_t)|_{RVE}}}{\frac{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RCE}}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RVE}}} \quad (6-11)$$

donde:

$\frac{D_I^t(x_t, y_t)|_{RCE}}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RCE}}$ es el cambio en la eficiencia técnica (CE)

Si $CE > 1$, existe un aumento en el nivel de eficiencia técnica.

Si $CE < 1$, se ha presentado una disminución en el nivel de eficiencia técnica.

Si $CE = 1$, no se ha presentado variación en el nivel de eficiencia técnica.

$\frac{D_I^t(x_t, y_t)|_{RVE}}{D_I^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RVE}}$ es el cambio de la eficiencia técnica pura (CETP)

Si $CETP > 1$, La unidad evaluada ha logrado acercarse en el periodo t+1 a la frontera tecnológica de rendimientos variables a escala, en otras palabras, existe un aumento en la eficiencia técnica pura.

$$\frac{\frac{D_i^t(x_t, y_t)|_{RCE}}{D_i^t(x_t, y_t)|_{RVE}}}{\frac{D_i^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RCE}}{D_i^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RVE}}} \quad \text{corresponde al cambio de la eficiencia a escala (CEE)}$$

Si $CEE > 1$ entonces la distancia entre la frontera eficiente de rendimientos a escala constante y la correspondiente a la de rendimientos a escala variable, se habrá reducido en el periodo $t+1$ respecto al periodo t .

Con base en lo anterior, el índice de productividad de Malmquist para modelos DEA-BCC Input orientados, quedará entonces de la siguiente manera de acuerdo a lo planteado por Färe, Grosskopf, Norris y Zhang.

$$IPM_{FGNZ}(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = \left[\frac{D_i^t(x_t, y_t)|_{RVE}}{D_i^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RVE}} \times \frac{\frac{D_i^t(x_t, y_t)|_{RCE}}{D_i^t(x_t, y_t)|_{RVE}}}{\frac{D_i^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RCE}}{D_i^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})|_{RVE}}} \right] \times \left[\frac{D_i^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_i^t(x_{t+1}, y_{t+1})} \times \frac{D_i^{t+1}(x_t, y_t)}{D_i^t(x_t, y_t)} \right]^{1/2}$$

(6-12)

La expresión anterior puede ser reescrita de forma simplificada como sigue.

$$IPM_{FGNZ}(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = CETP \times CEE \times CT \quad (6-13)$$

donde:

CETP es el cambio de la eficiencia técnica pura.

CEE es el cambio de la eficiencia a escala.

CT es el cambio tecnológico.

Con el fin de calcular el IPM para el caso de los modelos DEA-BCC, se hace necesario plantear otros dos problemas de optimización lineal. La solución de dichos problemas permitirá establecer el valor de la eficiencia técnica pura, para cada uno de los periodos evaluados.

$$\left[D_i^{t+1}(x_t, y_t)_{RVE} \right]^{-1} = ETP_{0,t}^{t+1} = \text{Min}_{\theta, \lambda} \theta$$

S.A

$$Y_{t+1} \lambda = y_{0,t}$$

$$\theta x_{0,t} = X_{t+1} \lambda$$

$$\vec{1} \lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

$$[D_t^{t+1}(x_t, y_t)]^{-1} = ETP_{0,t}^{t+1} = \text{Min}_{\theta, \lambda} \theta$$

S.A

$$Y_{t+1} \lambda = y_{0,t}$$

$$\theta x_{0,t} = X_{t+1} \lambda$$

$$\vec{1} \lambda = 1$$

$$\lambda \geq 0$$

Capítulo 7

7 Propuesta de remuneración de AOM a partir de la metodología desarrollada

En este capítulo se llega al objetivo esencial de esta investigación. Se presenta la forma en la cual los índices de eficiencia y cambio en la productividad (IPM), podrían ser utilizados como factores de ajuste para el pago de AOM a las empresas distribuidoras.

Hasta el momento, los AOM a remunerar son establecidos teniendo como base un porcentaje de los activos eléctricos de las empresas, más un ajuste que es establecido en función de los índices de confiabilidad.

Con la propuesta planteada en esta investigación, se busca incluir el efecto de la eficiencia en el uso de los recursos por parte de las empresas. En últimas, se quiere reconocer el esfuerzo de las empresas por ser eficientes, bien sea por su evolución tecnológica ó bien por la adecuada implementación de estrategias de optimización.

En la siguiente expresión se resumen los cuatro factores que se tendrían en cuenta, en el cálculo del valor a remunerar por concepto de AOM.

$$AOM \text{ remunerado} = AOM_{\% \text{ activos}} + AOM_{\text{max confiabilidad}} * B + AOM_{\text{max eficiencia}} * (C)$$

(7-11)

donde:

A es el porcentaje economico a remunerar por concepto de activos eléctricos

B es el factor de ajuste por concepto de confiabilidad

C es el factor de ajuste por concepto de eficiencia

Con esta nueva propuesta de remuneración, se estaría reconociendo el esfuerzo de las empresas por ser eficientes y por mejorar sus índices de confiabilidad.

Capítulo 8

8 Aplicación de la metodología desarrollada para el caso de las empresas de distribución colombianas

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al utilizar la metodología propuesta, en una situación real de evaluación. Se han aplicado todos los conceptos presentados en los capítulos anteriores y con esta prueba se busca validar la metodología desarrollada.

Es necesario aclarar que debido a la manipulación que sufrió la información como consecuencia de la falta de datos, es posible que exista un sesgo en los resultados obtenidos. Por tal razón, dichos resultados deben ser considerados en un contexto netamente académico y no necesariamente son reflejo de la realidad de las empresas evaluadas.

8.1 Selección de variables de entrada y salida

Como se recordará, el primer paso en la metodología propuesta es la adecuada selección del número de variables que harán parte del modelo de optimización. Este paso fue realizado previamente con la utilización del análisis factorial.

Se decidió utilizar 2 de las variables representativas de la infraestructura y activos eléctricos de las empresas, con el fin de contrastarlas con una variable perteneciente al área financiera.

En la siguiente tabla se presentan las variables escogidas para esta prueba.

Número de Unidades evaluadas.	24
VARIABLES DE ENTRADA	Gastos de administración
VARIABLES DE SALIDA	Longitud de las redes
	Propiedad Planta y equipo

Una vez se estableció cuales variables serían utilizadas en la evaluación de eficiencia, el siguiente paso fue determinar la orientación del modelo de DEA a implementar.

8.2 Caracterización del modelo DEA adecuado

8.2.1 Orientación del modelo

Con el fin de crear un indicador adecuado para medir el desempeño de las empresas, se decidió utilizar la variable correspondiente al gasto por administración, como elemento de comparación de eficiencia. De esta manera, se espera medir el desempeño de todas las empresas evaluadas, a partir de la variación presentada en esta variable. Para tal efecto, se implementó un modelo input orientado, en el cual los

gastos administrativos serán la variable de entrada del modelo, en tanto que las otras variables corresponderán a las salidas.

8.2.2 Evaluación de retornos a escala

El siguiente paso en el análisis fue realizar una evaluación del tipo de rendimientos a escala que caracteriza a cada una de las empresas evaluadas, con el fin de establecer el tipo de retornos a escala que deberá ser tenido en cuenta en la evaluación de eficiencia.

Empresa	CCR	BCC	NIRS	Retornos a escala	Tipo de retornos a escala
CENTRAL HIDROELECTRICA DE CALDAS S.A. E.S.P	0,44	0,64	0,64	0,69	NIRS
CENTRALES ELECTRICAS DE NARIÑO S.A. E.S.P.	0,71	0,83	0,83	0,85	NIRS
CENTRALES ELECTRICAS DEL CAUCA S.A. E.S.P	0,2	0,21	0,21	0,96	NIRS
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER S.A. E.S.P	0,29	0,35	0,35	0,84	NIRS
CODENSA S.A. ESP	0,75	1	1	0,75	NIRS
COMPAÑÍA DE ELECTRICIDAD DE TULUÁ S.A. E.S.P.	1	1	1	1	CRS
COMPAÑÍA ENERGÉTICA DEL TOLIMA S.A E.S.P	1	1	1	1	CRS
ELECTRIFICADORA DE LA COSTA ATLANTICA S.A. ESP	0,39	0,64	0,64	0,62	NIRS
ELECTRIFICADORA DE SANTANDER S.A. E.S.P.	0,45	0,65	0,65	0,69	NIRS
ELECTRIFICADORA DEL CAQUETA S.A. ESP	1	1	1	1	CRS
ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. ESP	0,54	0,76	0,76	0,71	NIRS
ELECTRIFICADORA DEL HUILA S.A. E.S.P.	0,56	0,75	0,75	0,75	NIRS
ELECTRIFICADORA DEL META S.A. E.S.P.	0,42	0,5	0,5	0,84	NIRS
EMPRESA DE ENERGIA DE ARAUCA	0,25	0,25	0,25	0,99	NIRS
EMPRESA DE ENERGIA DE BOYACA S.A. ESP	0,22	0,31	0,31	0,7	NIRS
EMPRESA DE ENERGIA DE CUNDINAMARCA S.A. ESP	0,4	0,43	0,43	0,93	NIRS
EMPRESA DE ENERGÍA DEL PACÍFICO S.A. E.S.P.	0,22	0,28	0,28	0,77	NIRS
EMPRESA DE ENERGIA DEL QUINDIO S.A.E.S.P.	0,76	0,84	0,84	0,91	NIRS
EMPRESA DE ENERGIA DEL VALLE DE SIBUNDOY S.A. E.S.P.	0,45	0,68	0,68	0,66	NIRS
EMPRESA DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO S.A. E.S.P	0,54	0,58	0,58	0,94	NIRS
EMPRESA MUNICIPAL DE ENERGÍA ELÉCTRICA S.A-E.S.P	0,12	1	1	0,12	NIRS
EMPRESAS MUNICIPALES DE CALI E.I.C.E E.S.P	0,31	0,36	0,36	0,87	NIRS
EMPRESAS PÚBLICAS DE MEDELLÍN E.S.P.	0,96	1	1	0,96	NIRS
RUITOQUE S.A. E.S.P.	1	1	1	1	CRS

Tabla 24. Evaluación de retornos a escala para las empresas evaluadas.

Los resultados muestran que las empresas evaluadas presentan rendimientos a escalas diferentes, por lo cual el modelo adecuado para este caso corresponde al de rendimientos variables a escala.

8.3 Evaluaciones de eficiencia

Debido a que la presencia de holguras es algo crítico al momento de plantear estrategias de mejora, en esta evaluación se optó por utilizar el modelo de optimización de dos etapas que se presentó en el numeral 5.3.

Se realizaron las evaluaciones correspondientes a los años 2004 y 2005, con el fin de utilizar estos resultados para validar los obtenidos más adelante, mediante el uso del índice de productividad de Malmquist.

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos en las evaluaciones de realizadas.

EMPRESA	Puntaje de eficiencia 2004	Puntaje de eficiencia 2005
CENTRAL HIDROELECTRICA DE CALDAS S.A. E.S.P	0,22121	0,38762
CENTRALES ELECTRICAS DE NARIÑO S.A. E.S.P.	0,21056	0,28067
CENTRALES ELECTRICAS DEL CAUCA S.A. E.S.P	0,70365	0,84021
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER S.A. E.S.P	0,41666	0,78133
CODENSA S.A. ESP	1,00000	1,00000
COMPAÑÍA DE ELECTRICIDAD DE TULUÁ S.A. E.S.P.	0,89434	0,72519
COMPAÑÍA ENERGÉTICA DEL TOLIMA S.A E.S.P	1,00000	1,00000
ELECTRIFICADORA DE LA COSTA ATLANTICA S.A. ESP	0,81886	1,00000
ELECTRIFICADORA DE SANTANDER S.A. E.S.P.	0,36552	0,39737
ELECTRIFICADORA DEL CAQUETA S.A. ESP	0,88902	0,78430
ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. ESP	0,58943	0,70923
ELECTRIFICADORA DEL HUILA S.A. E.S.P.	0,62875	0,52711
ELECTRIFICADORA DEL META S.A. E.S.P.	0,59596	0,64732
EMPRESA DE ENERGIA DE ARAUCA	0,39339	0,54118
EMPRESA DE ENERGIA DE BOYACA S.A. ESP	1,00000	1,00000
EMPRESA DE ENERGIA DE CUNDINAMARCA S.A. ESP	0,30353	0,29803
EMPRESA DE ENERGÍA DEL PACÍFICO S.A. E.S.P.	1,00000	1,00000
EMPRESA DE ENERGIA DEL QUINDIO S.A.E.S.P.	0,48121	0,50818
EMPRESA DE ENERGIA DEL VALLE DE SIBUNDOY S.A. E.S.P.	1,00000	1,00000
EMPRESA DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO S.A. E.S.P	1,00000	0,71609
EMPRESA MUNICIPAL DE ENERGÍA ELÉCTRICA S.A-E.S.P	0,46395	0,52660
EMPRESAS MUNICIPALES DE CALI E.I.C.E E.S.P	0,06490	0,06819
EMPRESAS PÚBLICAS DE MEDELLÍN E.S.P.	1,00000	1,00000
RUITOQUE S.A. E.S.P.	1,00000	1,00000

Tabla 25. Valores de eficiencia para las empresas evaluadas.

Los resultados son aparentemente coherentes con lo que se podría esperar intuitivamente. Las empresas consideradas grandes como CODENSA ó EPM, son técnicamente eficientes mientras que otras de menor tamaño no lo son. Además, ninguna de las empresas presentó eficiencia débil, por lo que no existen valores de holgura en las variables de salida.

Un elemento interesante de esta prueba, es el hecho de que la empresa distribuidora del pacifico fue eficiente durante el año 2004 pero no durante el 2005. Más adelante,

cuando se presenten los resultados del cálculo del índice de Malmquist, se darán las razones de este cambio.

En la propuesta desarrollada en esta investigación, las empresas que lograron ser eficientes tendrían el derecho a tener una mayor compensación por concepto de AOM, ya que fueron las que utilizaron de mejor manera los recursos destinados para la administración de las empresas. Al final se presentará la forma en la que se podría utilizar este aspecto como factor de ajuste del valor a compensar.

Con el fin de presentar la forma en que estos resultados pueden ser utilizados por las empresas en un contexto práctico, y aún cuando está más allá del alcance de esta investigación, a continuación se presenta la manera en la que estos resultados permitirán crear estrategias de mejora para cada una de las empresas ineficientes.

TABLA DE EMPRESAS REFERENCIA

En primera medida, los resultados obtenidos permiten establecer cuáles de las empresas consideradas eficientes, servirán de referencia para la mejora del resto de empresas. De esta manera, para cada empresa considerada ineficiente, se habrá establecido un conjunto de referencia que le permitirá saber, en teoría, la forma en la que podrá llegar a ser eficiente.

Los conjuntos de referencia encontrados para cada empresa ineficiente durante el año 2004 se presentan a continuación.

Empresas ineficientes 2004	Conjunto de empresas referencia								
	CODENSA	COMPANÍA ENERÉTICA DEL TOLIMA	EMPRESA DE ENERGIA DE BOYACA	EMPRESA DE ENERGIA DEL PACIFICO S.A.	EMPRESA DE ENERGIA DEL VALLE DE SIBUNDOY	EMPRESA DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO	EMPRESAS PÚBLICAS DE MEDELLÍN	RUITOQUE	
CENTRAL HIDROELECTRICA DE CALDAS S.A.	0	0,65	0,24	0,1	0	0	0	0	
CENTRALES ELECTRICAS DE NARIÑO S.A.	0	0,38	0	0,02	0	0,6	0	0	
CENTRALES ELECTRICAS DEL CAUCA S.A.	0	0,69	0,27	0,04	0	0	0	0	
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER	0	0,8	0,12	0,08	0	0	0	0	
COMPANÍA DE ELECTRICIDAD DE TULUÁ S.A.	0	0	0	0,04	0	0	0	0,96	
ELECTRIFICADORA DE LA COSTA ATLANTICA	0,18	0	0,71	0,11	0	0	0	0	
ELECTRIFICADORA DE SANTANDER S.A. E.S.P.	0	0,43	0,34	0,23	0	0	0	0	
ELECTRIFICADORA DEL CAQUETA S.A. ESP	0	0,23	0	0	0,52	0,25	0	0	
ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. ESP	0,02	0	0,28	0,7	0	0	0	0	
ELECTRIFICADORA DEL HUILA S.A. E.S.P.	0	0,71	0	0,05	0	0,24	0	0	
ELECTRIFICADORA DEL META S.A. E.S.P.	0	0,79	0	0,03	0	0,18	0	0	
EMPRESA DE ENERGIA DE ARAUCA	0	0,24	0	0	0,25	0,51	0	0	
EMPRESA DE ENERGIA DE CUNDINAMARCA	0	0,93	0	0,02	0	0,04	0	0	
EMPRESA DE ENERGIA DEL QUINDIO S.A.E.S.P.	0	0,31	0	0,01	0	0,68	0	0	
EMPRESA MUNICIPAL DE ENERGÍA ELÉCTRICA	0	0	0	0	0,16	0	0	0,84	
EMPRESAS MUNICIPALES DE CALI E.I.C.E E.S.P	0	0,11	0	0,11	0	0,77	0	0	

Tabla 26. Conjuntos de empresas referencia para las empresas ineficientes.

En la tabla anterior los valores numéricos corresponden al nivel de importancia que tiene cada empresa eficiente, en el conjunto de referencia de las empresas ineficientes. Como se ve, cada empresa ineficiente cuenta con mínimo 2 empresas que le servirán como “ejemplo” para crear estrategias de mejora.

La empresa energética del Tolima es la que más aparece en los conjuntos de referencia, lo que significa que dicha empresa es la que mejor comportamiento presenta, incluso, entre las empresas consideradas eficientes.

TABLA DE VALORES OBJETIVO Y VALORES OBSERVADOS PARA CADA UNA DE LAS EMPRESAS

En la siguiente tabla y teniendo en cuenta la información de los grupos de referencia, se establecieron los valores óptimos a los cuales debería llevarse la variable de entrada, con el fin de que las empresas ineficientes logren llegar a ser eficientes.

Empresa Ineficiente	Valores objetivo			Valores observados		
	X3	Y1	Y2	X3	Y1	Y2
CENTRAL HIDROELECTRICA DE CALDAS S.A. E.S.P	11,0001	80,0844	20,603	49,727	80,084	20,603
CENTRALES ELECTRICAS DE NARIÑO S.A. E.S.P.	3,4612	27,4185	7,4580	16,438	27,418	7,4580
CENTRALES ELECTRICAS DEL CAUCA S.A. E.S.P	10,2832	79,8589	10,951	14,614	79,858	10,951
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER S.A.	8,9592	68,6532	14,193	21,502	68,653	14,193
COMPAÑÍA DE ELECTRICIDAD DE TULUÁ S.A. E.S.P.	0,9529	3,5634	6,0765	1,0654	2,9275	6,0765
ELECTRIFICADORA DE LA COSTA ATLANTICA S.A. ESP	26,7089	142,615	87,348	32,617	142,61	87,348
ELECTRIFICADORA DE SANTANDER S.A. E.S.P.	14,2899	92,9795	41,735	39,094	92,979	41,735
ELECTRIFICADORA DEL CAQUETA S.A. ESP	1,8021	15,4470	1,7007	2,0270	15,447	1,7007
ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. ESP	22,4181	108,341	122,41	38,033	108,34	122,41
ELECTRIFICADORA DEL HUILA S.A. E.S.P.	5,6481	45,4396	8,8905	8,9831	45,439	8,8905
ELECTRIFICADORA DEL META S.A. E.S.P.	5,6791	47,7615	5,8002	9,5293	47,761	5,8002
EMPRESA DE ENERGIA DE ARAUCA	2,0815	17,5661	3,2595	5,2912	17,566	3,2595
EMPRESA DE ENERGIA DE CUNDINAMARCA S.A. ESP	6,3262	54,3490	4,3342	20,842	54,349	4,3342
EMPRESA DE ENERGIA DEL QUINDIO S.A.E.S.P.	2,7818	22,6040	5,8331	5,7809	22,604	5,8331
EMPRESA MUNICIPAL DE ENERGÍA ELÉCTRICA S.A-E.S.P	0,1344	0,3800	0,1037	0,2896	0,3800	0,0792
EMPRESAS MUNICIPALES DE CALI E.I.C.E E.S.P	4,0726	22,3172	23,122	62,748	22,317	23,122

Tabla 27. Valores objetivo y observados para las variables evaluadas.

Como se ve, en todos los casos sería posible disminuir la cantidad de recursos asignados para la administración de las empresas (X3), manteniendo constantes tanto la cantidad de la infraestructura (Y1) como los activos (Y2) de las empresas.

Ya que el modelo evaluado en esta prueba fue input orientado, las variables de salida no cambiaron de ninguna forma, por lo cual, los valores objetivos y observados son iguales. Por lo anterior, en teoría, todas las empresas están en capacidad de disminuir sus gastos de administración, mientras mantienen constantes los niveles de infraestructura y otros activos.

TABLA DE MEJORA POTENCIAL PARA INPUTS Y OUTPUTS

En la siguiente tabla se muestra la mejora potencial para cada una de las empresas evaluadas, con base en los resultados presentados en la tabla 27. Como se ve, la mejora potencial para cada empresa está compuesta por dos movimientos respecto a la frontera de producción, uno radial y otro a lo largo de la frontera (Holgura.)

Empresa ineficiente	Mejora potencial (%)			Movimiento radial (%)			Movimiento de holgura (%)		
	X3	Y1	Y2	X3	Y1	Y2	X3	Y1	Y2
CENTRAL HIDROELECTRICA DE CALDAS S.A. E.S.P	-38,727	0,000	0,000	-38,728	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
CENTRALES ELECTRICAS DE NARIÑO S.A. E.S.P.	-12,976	0,000	0,000	-12,977	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
CENTRALES ELECTRICAS DEL CAUCA S.A. E.S.P	-4,3310	0,000	0,000	-4,331	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER S.A.	-12,543	0,000	0,000	-12,543	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
COMPAÑÍA DE ELECTRICIDAD DE TULUÁ S.A. E.S.P.	-0,1126	0,000	0,000	-0,113	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
ELECTRIFICADORA DE LA COSTA ATLANTICA S.A.	-5,9083	0,000	0,000	-5,9083	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
ELECTRIFICADORA DE SANTANDER S.A. E.S.P.	-24,804	0,000	0,000	-24,804	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
ELECTRIFICADORA DEL CAQUETA S.A. ESP	-0,2250	0,000	0,000	-0,2250	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. ESP	-15,615	0,000	0,000	-15,615	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
ELECTRIFICADORA DEL HUILA S.A. E.S.P.	-3,3350	0,000	0,000	-3,3350	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
ELECTRIFICADORA DEL META S.A. E.S.P.	-3,8502	0,000	0,000	-3,8502	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
EMPRESA DE ENERGIA DE ARAUCA	-3,2097	0,000	0,000	-3,2097	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
EMPRESA DE ENERGIA DE CUNDINAMARCA S.A.	-14,515	0,000	0,000	-14,515	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
EMPRESA DE ENERGIA DEL QUINDIO S.A.E.S.P.	-2,9991	0,000	0,000	-2,9991	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
EMPRESA MUNICIPAL DE ENERGÍA ELÉCTRICA S.A	-0,1553	0,000	0,024	-0,1553	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000
EMPRESAS MUNICIPALES DE CALI E.I.C.E E.S.P	-58,676	0,000	0,000	-58,676	0,000	0,0000	0,000	0,000	0,000

Tabla 28. Valores de desplazamiento radial y de holgura para las variables incluidas en el análisis.

En la totalidad de los casos, la mejora potencial se debió únicamente a movimientos radiales respecto a la frontera eficiente. Esto significa que no fue posible reducir los valores de la variable de entrada, mediante movimientos de holgura a través de la frontera de producción. En otras palabras, si las empresas lograran llevar sus gastos de administración a los valores indicados, ostentarían eficiencia fuerte.

8.4 Utilización del índice de productividad de Malmquist.

Con el fin de establecer el efecto que pudo tener tanto el cambio tecnológico sobre los valores de eficiencia, se utilizó el índice de productividad de Malmquist. De esta manera, se buscó establecer la forma en la que las empresas aprovecharon los recursos disponibles, con el fin de aumentar su productividad.

En esta prueba se tuvo en cuenta la información disponible para los años 2004 y 2005.

Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Empresa	Cambio de eficiencia técnica (CE)	Progreso tecnológico (CT)	Índice de productividad de Malmquist (IPM)	Puntaje de eficiencia 2004	Puntaje de eficiencia 2005
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER	1,89	0,82	1,54	0,41666	0,78133
CENTRAL HIDROELECTRICA DE CALDAS S.A. E.S.P	1,79	0,81	1,45	0,22121	0,38762
ELECTRIFICADORA DE LA COSTA ATLANTICA S.A.	1,47	0,75	1,11	0,81886	1
CENTRALES ELECTRICAS DE NARIÑO S.A. E.S.P.	1,39	0,81	1,12	0,21056	0,28067
EMPRESA DE ENERGIA DE ARAUCA	1,38	0,82	1,12	0,39339	0,54118
ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. ESP	1,36	0,79	1,07	0,58943	0,70923
EMPRESAS MUNICIPALES DE CALI E.I.C.E E.S.P	1,19	0,76	0,91	0,0649	0,06819
CENTRALES ELECTRICAS DEL CAUCA S.A. E.S.P	1,17	0,83	0,97	0,70365	0,84021
ELECTRIFICADORA DE SANTANDER S.A. E.S.P.	1,17	0,78	0,91	0,36552	0,39737
EMPRESA DE ENERGIA DEL VALLE DE SIBUNDOY	1,15	0,84	0,97	1	1
CODENSA S.A. ESP	1,14	0,93	1,07	1	1
EMPRESA MUNICIPAL DE ENERGÍA ELÉCTRICA S.A-	1,13	0,82	0,93	0,46395	0,5266
ELECTRIFICADORA DEL META S.A. E.S.P.	1,12	0,83	0,93	0,59596	0,64732
EMPRESA DE ENERGIA DEL QUINDIO S.A.E.S.P.	1,07	0,80	0,86	0,48121	0,50818
EMPRESAS PÚBLICAS DE MEDELLÍN E.S.P.	1,02	0,93	0,95	1	1
EMPRESA DE ENERGIA DE CUNDINAMARCA S.A.	1,01	0,84	0,85	0,30353	0,29803
EMPRESA DE ENERGÍA DEL PACÍFICO S.A. E.S.P.	1,00	0,92	0,92	1	1
COMPAÑÍA ENERGÉTICA DEL TOLIMA S.A E.S.P	1,00	0,86	0,86	1	1
RUITOQUE S.A. E.S.P.	0,93	0,87	0,81	1	1
EMPRESA DE ENERGIA DE BOYACA S.A. ESP	0,91	0,83	0,76	1	1
ELECTRIFICADORA DEL CAQUETA S.A. ESP	0,89	0,83	0,74	0,88902	0,7843
ELECTRIFICADORA DEL HUILA S.A. E.S.P.	0,88	0,82	0,72	0,62875	0,52711
COMPAÑÍA DE ELECTRICIDAD DE TULUÁ S.A. E	0,80	0,93	0,74	0,89434	0,72519
EMPRESA DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO S.A.	0,70	0,75	0,53	1	0,71609

Tabla 30. Índices de productividad de Malmquist.

Como se puede ver en la tabla anterior, las Centrales Eléctricas del Norte de Santander fueron las que presentaron el mayor índice de productividad de Malquist (IPM), debido a que fue la empresa que logró utilizar de mejor manera los recursos disponibles, aún cuando tuvo un decrecimiento en su nivel tecnológico.

Por otra parte, la Empresa Distribuidora del Pacifico presentó el más bajo nivel IPM de todo el grupo evaluado. Esto debido a dos factores esenciales; por una parte, tuvo un decrecimiento en su nivel tecnológico, y por otra, utilizó de forma inadecuada sus recursos.

EMPRESA	Índice de productividad de Malmquist (IPM)	Puntaje de eficiencia 2004	Puntaje de eficiencia 2005
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER S.A. E.S.P	1,541	0,41666	0,78133
EMPRESA DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO S.A.	0,530	1,00000	0,71609

Como se puede ver, la variación en la productividad de Malmquist (IPM) incidió en los puntajes de eficiencia de las empresas durante los años evaluados.

Aún cuando las Centrales eléctricas del Norte de Santander no lograron estar en el grupo eficiente, si se acercaron en el año 2005; caso contrario al de la Empresa Distribuidora del Pacífico, la cual pasó de ser eficiente en el año 2004 a no serlo en el año 2005.

Este ejemplo deja en evidencia que una mejora tecnológica no implica necesariamente un aumento significativo en los índices de productividad, ya que varias empresas no tuvieron los mejores resultados, incluso, teniendo un buen nivel de avance tecnológico.

8.5 Estimación de costos a remunerar por concepto de AOM.

Con base en la información consignada en la tabla No. 30 se establecieron los factores de ajuste por concepto de eficiencia para el año 2005 y el correspondiente al cambio de productividad para el periodo 2004-2005. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

Empresa	Factor de compensación por concepto de IPM	Factor de compensación por puntuación de eficiencia - 2005
CENTRALES ELECTRICAS DEL NORTE DE SANTANDER	1	0,78133
CENTRAL HIDROELECTRICA DE CALDAS S.A. E.S.P	0,95	0,38762
ELECTRIFICADORA DE LA COSTA ATLANTICA S.A.	0,78	1
CENTRALES ELECTRICAS DE NARIÑO S.A. E.S.P.	0,73	0,28067
EMPRESA DE ENERGIA DE ARAUCA	0,73	0,54118
ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. ESP	0,72	0,70923
EMPRESAS MUNICIPALES DE CALI E.I.C.E E.S.P	0,63	0,06819
CENTRALES ELECTRICAS DEL CAUCA S.A. E.S.P	0,62	0,84021
ELECTRIFICADORA DE SANTANDER S.A. E.S.P.	0,62	0,39737
EMPRESA DE ENERGIA DEL VALLE DE SIBUNDOY S.A.	0,61	1
CODENSA S.A. ESP	0,61	1
EMPRESA MUNICIPAL DE ENERGÍA ELÉCTRICA S.A-	0,6	0,5266
ELECTRIFICADORA DEL META S.A. E.S.P.	0,59	0,64732
EMPRESA DE ENERGIA DEL QUINDIO S.A.E.S.P.	0,57	0,50818
EMPRESAS PÚBLICAS DE MEDELLÍN E.S.P.	0,54	1
EMPRESA DE ENERGIA DE CUNDINAMARCA S.A.	0,53	0,29803
EMPRESA DE ENERGÍA DEL PACÍFICO S.A. E.S.P.	0,53	1
COMPAÑÍA ENERGÉTICA DEL TOLIMA S.A E.S.P	0,53	1
RUITOQUE S.A. E.S.P.	0,49	1
EMPRESA DE ENERGIA DE BOYACA S.A. ESP	0,48	1
ELECTRIFICADORA DEL CAQUETA S.A. ESP	0,47	0,7843
ELECTRIFICADORA DEL HUILA S.A. E.S.P.	0,47	0,52711
COMPAÑÍA DE ELECTRICIDAD DE TULUÁ S.A. E	0,42	0,72519
EMPRESA DISTRIBUIDORA DEL PACIFICO S.A.	0,37	0,71609

Los resultados obtenidos indican que ninguna de las empresas estaría en condiciones de obtener el 100% del valor permitido a remunerar por concepto de eficiencia. Esto debido a que ninguna de las empresas evaluadas obtuvo de forma simultánea el máximo puntaje en los indicadores de eficiencia calculados. Sin embargo como se ve para el caso de las Centrales Eléctricas del Norte de Santander, empresas que no lograron ser eficientes en el año 2005, lograrían obtener algo de remuneración por haber logrado mejorar sus indicadores de eficiencia.

Como se pudo ver en este ejemplo de aplicación, la metodología desarrollada es coherente, integral y de aplicación general a cualquier empresa distribuidora.

Capítulo 9

9 Conclusiones y trabajo futuro

9.1 Resumen.

En este trabajo se presentó una metodología alternativa, innovadora y diferente a cualquier otra realizada en Colombia relacionada con el tema. La metodología propuesta está apoyada en el uso de técnicas factoriales y en el análisis envolvente de datos (DEA) para su implementación.

9.2 Conclusiones

A lo largo del desarrollo de esta investigación, las conclusiones más importantes a las que se llegaron fueron las siguientes:

- Es posible utilizar técnicas factoriales con el fin de sustentar teóricamente la selección de las variables incluidas en los análisis DEA.
- Se comprobó que a partir de la adecuada selección de las variables utilizadas en los análisis, es posible comparar de forma conjunta todas las empresas distribuidoras, independientemente de su tamaño y entorno operativo.
- Se identificaron tres características diferenciadoras inherentes a la etapa de distribución eléctrica, que se ven reflejadas en todas las empresas distribuidoras.
- La inclusión de los retornos a escala variable en el cálculo del índice de productividad de Malmquist, permitió que los resultados obtenidos estén fundamentados en un contexto real de aplicación.
- La metodología propuesta permite evaluar desde un enfoque netamente productivo, el desempeño de las empresas distribuidoras. De esta manera, se lograron crear índices de eficiencia con el fin de establecer el valor a remunerar por concepto de AOM.
- Fue posible crear una metodología lógica, secuencial y apropiadamente sustentada desde el punto de vista teórico.

9.3 Aportes originales.

Respecto a los trabajos realizados hasta la fecha en Colombia, relacionados con el tema, los aportes más relevantes hechos por esta investigación fueron los siguientes:

- Se utilizó el análisis factorial como herramienta en la selección de las variables a incluir en los análisis DEA. Este aspecto fue muy importante ya que ninguno de los trabajos revisados sustentó de forma adecuada este aspecto.
- En los modelos DEA evaluados se incluyó el efecto de los retornos a escala variable; elemento que no fue considerado en otras investigaciones a nivel de maestría, por considerarse algo complejo de implementar.
- Se incluyó el efecto de los retornos a escala variable en el cálculo del índice de productividad de Malmquist. Esto permitió que la metodología propuesta sea utilizable en un contexto real de análisis.

9.4 Trabajo futuro

Debido al carácter innovador que se desprende del uso de técnicas factoriales, se plantea la realización de investigaciones similares a ésta con el fin de validar los resultados obtenidos. Para esto, sería ideal implementar las técnicas factoriales alternativas que se presentan en la tabla 1 de este documento.

Por otra parte, los resultados obtenidos mediante la utilización del análisis envolvente de datos (DEA), podrían ser validados a partir del uso de otras técnicas como lo es por ejemplo el de fronteras estocásticas.

Debido a que las técnicas utilizadas en esta investigación dependen totalmente de la calidad de la información, y teniendo en cuenta que la metodología DEA es una técnica determinista, sería adecuado explorar técnicas de remuestreo que permitan incluir la componente estocástica a los análisis.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. E Sanhueza “Fronteras de eficiencia, Metodología para la determinación del valor agregado de distribución” Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica de Chile. (2003).
- [2] H. Gómez D “*Análisis factorial y de componentes principales en la investigación aplicada*” Universidad de los andes, 1972.
- [3] Laura E. “Análisis multivariado: método de componentes principales” *Editor:* Washington: OEA. Secretaria General, c1986. *Formato:* vi, 94 Universidad de los Andes. (1986).
- [4] A. García., “*Metodología para la remuneración de costos eficientes de administración, operación y mantenimiento de empresas de transmisión usando análisis envolvente de datos (DEA)*”. Tesis de Maestría. Universidad de los Andes. Ingeniería Industrial 2007. Asesores: Ing. Ángela Inés Cadena, Ing. Fernando Palacios Gómez.
- [5] D. Benavides., “*Evaluación de eficiencia relativa de costos AO&M en la actividad de distribución de energía eléctrica por medio de la metodología de análisis envolvente de datos (DEA)*”. Tesis de Maestría. Universidad de los Andes. Ingeniería eléctrica 2007. Asesores: Ing. Carmenza Chahín.
- [6] V. Coll., O. Serrano “*Evaluación de la eficiencia mediante el análisis envolvente de datos – Introducción a los modelos básicos*”. (2006).
- [7] R. Gorsuch “Factor análisis”; Second edition (1983). *Editor: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.*
- [8] Cooper, William W; Seiford, Lawrence M; Tone, Kaoru. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text With Models, Applications, Referentes, and DEA-Solver Software. Kluwer Academia. (1999).

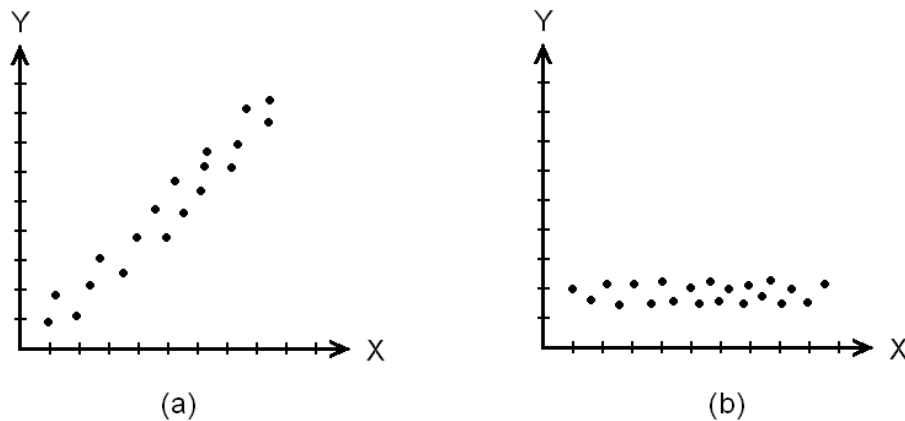
ANEXOS

A Índice de correlación lineal

La correlación entre dos variables está definida por la dirección y fuerza existente entre el comportamiento de dichas variables. Dos variables están correlacionadas linealmente, cuando los valores de una de ellas cambian sistemáticamente respecto a los valores de la otra variable.

Una forma simple de establecer la existencia de correlación entre dos variables, es mediante la observación de la nube muestral. Nubes de puntos inclinadas y con poca dispersión, serán señal de un alto nivel de correlación. Por otra parte, nubes paralelas a los ejes o con un alto nivel de dispersión, indicarán lo contrario.

Este aspecto aunque aparentemente básico, es uno de los principios fundamentales del análisis factorial.



Se han desarrollado diversos procedimientos que permiten medir el grado de correlación entre las variables en estudio, siendo uno de los más comunes el coeficiente de correlación de Pearson. Su cálculo se entiende matemáticamente, como el cociente entre la covarianza de las variables y el producto de sus respectivas desviaciones estándar, es decir:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sum (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot (y - \bar{y})^2}} \quad (2)$$

donde:

σ_{XY} : Covarianza entre las variables X y Y

σ_X : Desviación estándar de la variable X

σ_Y : Desviación estándar de la variable Y

\bar{X} : Media de la variable X

\bar{Y} : Media de la variable Y

Con base en el valor obtenido al calcularse este coeficiente, el nivel de correlación está definido de la siguiente manera.

Si $r = 0 \Rightarrow$ No existe correlación lineal

Si $r = 1 \Rightarrow$ Existe correlación lineal perfecta positiva

Si $r = -1 \Rightarrow$ Existe correlación lineal perfecta negativa

Si $0 < r < 1 \Rightarrow$ Existe correlación lineal parcial positiva

Si $-1 < r < 0 \Rightarrow$ Existe correlación lineal parcial negativa

B. Resultados de los análisis factoriales de primera fase

En las siguientes tablas se presentan los resultados de los análisis factoriales realizados al resto de grupos incluidos en los análisis de fase 1.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores rotados		Factores no rotados		Factores rotados		Factores rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
1. Número de circuitos	-0,12	0,98	-0,62	0,78	-0,17	0,98	-0,13	0,96
2. DES PROM	0,95	0,01	0,86	0,43	0,96	-0,05	0,95	-0,09
3. FES PROM	0,82	-0,43	0,94	0,12	0,88	-0,34	0,67	-0,55

Tabla 32. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes a los índices de confiabilidad de las empresas.

A continuación se presentan los resultados para los grupos que componen el área financiera de las empresas.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores rotados		Factores rotadas		Factores rotados		Factores rotadas	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Efectivo AC	0,18	0,97	0,69	0,62	0,71	0,58	0,74	0,51
Deudores AC	0,58	0,80	0,18	0,95	0,21	0,96	0,90	0,21
Inventarios AC	0,75	0,22	0,47	0,69	0,59	0,59	0,60	0,54
Total Activo Corriente AC	0,77	0,44	0,46	0,87	0,38	0,91	0,94	0,32
Propiedad Planta y Equipo ANC	0,94	0,25	0,75	0,61	0,75	0,56	0,62	0,74
Otros Activos ANC	0,83	0,26	0,96	0,21	0,96	0,19	0,20	0,96
Total Activo No Corriente ANC	0,92	0,29	0,91	0,40	0,93	0,33	0,40	0,91

Tabla 33. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes a los activos de las empresas.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores rotados		Factores rotadas		Factores rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Cuentas Por Pagar PC	0,96	0,19	0,83	0,47	0,87	0,48	0,97	-0,15
Obligaciones Laborales PC	0,18	0,95	0,78	0,32	0,30	0,89	0,77	0,60
Otros Pasivos PC	0,46	0,74	0,29	0,92	0,96	0,21	0,92	0,13
Total Pasivo Corriente PC	0,86	0,44	0,68	0,59	0,87	0,48	0,91	-0,34
Pasivo Estimado Pesos PNC	0,75	0,54	0,84	0,32	0,27	0,89	0,90	-0,04
Total Pasivo No Corriente Pesos PNC	0,58	0,73	0,87	0,23	0,48	0,84	0,95	-0,09

Tabla 34. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes a los pasivos de las empresas.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Activo Corriente BG	0,83	-0,17	0,83	-0,39	0,79	0,14	0,84	0,45
Activo No Corriente BG	0,96	-0,22	0,97	-0,11	0,97	-0,21	0,93	-0,35
Total Activo BG	0,97	-0,23	0,98	-0,15	0,98	-0,18	0,96	-0,27
Pasivo Corriente BG	0,81	0,55	0,82	0,16	0,59	0,80	0,90	0,30
Pasivo No Corriente BG	0,94	0,20	0,83	0,48	0,89	-0,28	0,99	0,11
Total Pasivo BG	0,94	0,33	0,92	0,39	0,88	0,43	0,98	0,19
Patrimonio BG	0,91	-0,40	0,92	-0,33	0,92	-0,36	0,92	-0,39

Tabla 35. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes al balance general de las empresas.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores rotados		Factores rotados		Factores rotados		Factores rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Ingresos Operacionales ER	0,97	0,24	0,96	-0,28	0,97	-0,14	0,98	-0,15
Costo de Ventas ER	0,89	0,45	0,85	-0,48	0,91	0,15	0,90	-0,29
Utilidad Bruta ER	0,95	-0,15	0,93	0,08	0,84	-0,52	0,96	0,09
Gastos de Administración ER	0,92	-0,15	0,93	0,06	0,86	-0,20	0,87	0,47
Provisiones Agotamientos Depreciaciones y Amortizaciones ER	0,97	0,00	0,96	0,00	0,96	-0,11	0,97	-0,17
Otros Ingresos ER	0,96	-0,24	0,84	0,48	0,72	0,37	0,87	0,48
Otros Gastos ER	0,93	-0,12	0,86	0,17	0,59	0,74	0,83	-0,41

Tabla 36. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes a los estados de resultados de las empresas.

Para el caso de los grupos de variables correspondientes al área financiera, los resultados fueron claros y de fácil interpretación. Es evidente que existen estructuras factoriales lo suficientemente claras, para que la reducción de variables en esta área sea considerable.

En este punto, el área que presentó más problemas fue la correspondiente a los aspectos comerciales de las empresas. Esto debido a que la falta de información en algunas de las variables afectó de forma negativa los índices de correlación⁴⁹. Aún así, los resultados en la mayoría de grupos fueron aceptables, por lo que fue posible extraer un apropiado número de variables.

⁴⁹ La manipulación de la información pudo haber generado algún tipo de "ruido" a los resultados finales, por lo que los resultados obtenidos en los análisis deben ser abordados desde una perspectiva netamente académica.

En las siguientes tablas se presentan los resultados correspondientes a los grupos de variables que componen el área comercial de las empresas distribuidoras.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores rotados		Factores no rotados		Factores rotados		Factores rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 CP	0,95	0,19	0,37	-0,44	0,90	0,22	0,90	0,27
Estrato 2 CP	0,90	0,18	0,95	-0,13	0,94	0,22	0,94	0,20
Estrato 3 CP	0,18	-0,18	0,92	-0,26	0,97	0,09	0,96	0,00
Estrato 4 CP	0,91	0,19	0,92	-0,24	0,97	0,02	0,95	-0,03
Estrato 5 CP	0,49	0,36	0,88	-0,10	0,92	0,07	0,90	0,04
Estrato 6 CP	0,88	0,14	0,92	-0,14	0,92	0,18	0,85	0,24
Total Residencial CP	0,84	0,11	0,86	-0,31	0,90	0,28	0,90	0,30
Industrial CP	0,30	0,91	0,71	0,64	0,10	0,93	-0,02	0,91
Comercial CP	0,70	0,61	0,69	0,25	0,65	0,46	0,71	0,60
Oficial CP	0,13	0,73	0,60	0,41	0,19	0,89	0,20	0,89
Otros CP	0,09	0,88	0,13	0,80	-0,01	0,91	0,02	0,89
Total No Residencial CP	0,74	0,61	0,65	0,39	0,36	0,74	0,34	0,76

Tabla 37. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes al consumo promedio de los usuarios.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 CON	0,96	0,15	0,45	0,56	0,41	0,77	0,46	0,72
Estrato 2 CON	0,99	0,03	0,97	0,14	0,96	0,22	0,97	0,16
Estrato 3 CON	0,99	-0,04	0,96	0,03	0,97	-0,01	0,97	-0,02
Estrato 4 CON	0,98	-0,05	0,95	0,08	0,96	0,02	0,95	0,05
Estrato 5 CON	0,99	-0,11	0,96	-0,06	0,97	-0,14	0,98	-0,12
Estrato 6 CON	0,99	-0,12	0,96	0,24	0,97	0,17	0,96	0,19
Total Residencial CON	0,99	-0,02	0,97	0,22	0,96	0,27	0,97	0,22
Industrial CON	0,95	-0,10	0,66	-0,68	0,66	-0,60	0,70	-0,55
Comercial CON	0,99	-0,10	0,97	-0,18	0,99	-0,08	0,99	-0,09
Oficial CON	0,98	-0,05	0,86	0,11	0,82	-0,11	0,83	-0,28
Otros CON	0,82	0,56	0,98	0,03	0,98	0,07	0,96	0,25
Total No Residencial CON	0,99	-0,06	0,88	-0,43	0,89	-0,38	0,91	-0,35

Tabla 38. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes al consumo de los usuarios.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores rotados		Factores rotados		Factores rotados		Factores rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 FM	0,24	0,96	0,05	0,93	0,97	0,18	0,95	-0,04
Estrato 2 FM	0,21	0,97	0,31	0,86	0,94	0,16	0,98	0,04
Estrato 3 FM	0,34	0,76	0,29	0,66	0,72	0,23	0,91	0,29
Estrato 4 FM	0,35	0,32	0,28	0,51	0,57	0,26	0,80	0,39
Estrato 5 FM	0,12	0,05	0,15	0,21	0,26	0,28	0,56	0,52
Estrato 6 FM	0,08	-0,05	0,14	0,19	0,25	0,28	-0,04	-0,05
Total Residencial FM	0,29	0,92	0,16	0,90	0,91	0,20	0,99	0,09
Industrial FM	0,93	0,01	0,85	-0,13	-0,28	0,70	-0,11	0,83
Comercial FM	0,89	0,39	0,94	0,22	0,20	0,96	0,08	0,95
Oficial FM	0,84	0,52	0,81	0,49	0,48	0,81	0,46	0,80
Otros FM	0,78	0,22	0,63	0,33	0,46	0,57	0,52	0,51
Total No Residencial FM	0,93	0,32	0,95	0,22	0,21	0,94	0,17	0,98

Tabla 39. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes a la factura media pagada por los usuarios.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores rotados		Factores rotados		Factores rotados		Factores rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 FP	0,35	0,90	0,93	0,12	0,95	0,11	0,83	0,00
Estrato 2 FP	0,22	0,94	0,91	0,29	0,94	0,05	0,92	-0,06
Estrato 3 FP	-0,48	0,69	0,70	0,05	0,74	-0,18	0,90	-0,30
Estrato 4 FP	0,18	0,26	0,44	0,09	0,48	-0,15	0,86	-0,26
Estrato 5 FP	0,00	-0,29	-0,02	0,22	0,11	-0,02	0,72	-0,08
Estrato 6 FP	0,48	0,06	0,47	0,11	0,46	0,05	0,87	0,07
Total Residencial FP	0,22	0,95	0,94	0,17	0,95	0,11	0,89	0,00
Industrial FP	0,92	0,01	0,43	0,69	0,10	0,91	0,01	0,91
Comercial FP	0,91	0,27	0,02	0,95	-0,33	0,67	0,20	0,78
Oficial FP	0,61	0,18	0,30	0,47	0,16	0,88	0,19	0,90
Otros FP	0,54	0,13	-0,08	-0,04	0,00	0,84	0,04	0,77
Total No Residencial FP	0,92	0,16	0,24	0,92	0,01	0,85	0,21	0,85

Tabla 40. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes a la factura promedio pagada por los usuarios.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 SUS	0,96	0,10	0,41	0,87	0,33	0,88	0,46	0,84
Estrato 2 SUS	0,99	0,00	0,68	-0,35	0,98	0,05	0,98	0,01
Estrato 3 SUS	0,99	-0,09	0,83	-0,01	0,98	-0,14	0,99	-0,13
Estrato 4 SUS	0,99	-0,06	0,80	0,14	0,97	-0,17	0,97	-0,19
Estrato 5 SUS	0,99	-0,16	0,57	0,05	0,88	-0,15	0,93	-0,07
Estrato 6 SUS	0,99	-0,14	0,51	-0,33	0,97	-0,04	0,98	-0,03
Total Residencial SUS	1,00	-0,04	0,82	0,35	0,98	0,15	0,99	0,12
Industrial SUS	0,99	-0,10	0,72	-0,49	0,94	-0,23	0,91	-0,29
Comercial SUS	0,99	-0,05	0,74	-0,22	0,99	-0,11	0,98	-0,16
Oficial SUS	0,85	0,50	0,56	-0,02	0,70	0,01	0,66	0,17
Otros SUS	0,91	0,17	0,50	0,75	0,65	0,63	0,76	0,46
Total No Residencial SUS	1,00	-0,04	0,91	-0,25	0,99	-0,11	0,98	-0,15

Tabla 41. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes al número de suscriptores.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 TF	0,94	0,22	0,40	0,88	0,35	0,90	0,40	0,86
Estrato 2 TF	0,99	0,08	0,97	0,16	0,95	0,23	0,96	0,17
Estrato 3 TF	1,00	-0,02	0,98	-0,09	0,99	-0,07	0,99	-0,06
Estrato 4 TF	0,98	-0,05	0,96	-0,06	0,97	-0,04	0,96	0,00
Estrato 5 TF	0,99	-0,13	0,94	-0,08	0,97	-0,12	0,98	-0,10
Estrato 6 TF	0,99	-0,14	0,96	0,12	0,98	0,11	0,97	0,14
Total Residencial TF	1,00	0,00	0,97	0,24	0,95	0,30	0,96	0,25
Industrial TF	0,97	-0,13	0,66	-0,31	0,65	-0,41	0,71	-0,38
Comercial TF	0,99	-0,12	0,95	-0,19	0,93	-0,18	0,94	-0,19
Oficial TF	0,99	-0,06	0,84	-0,14	0,81	-0,18	0,80	-0,31
Otros TF	0,83	0,53	0,97	0,10	0,98	0,15	0,95	0,24
Total No Residencial TF	0,99	-0,09	0,93	-0,24	0,94	-0,29	0,95	-0,28

Tabla 42. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes al total facturado por las empresas.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 VC	0,94	0,22	0,40	0,88	0,35	0,90	0,40	0,86
Estrato 2 VC	0,99	0,08	0,97	0,16	0,95	0,23	0,96	0,17
Estrato 3 VC	1,00	-0,02	0,98	-0,09	0,99	-0,07	0,99	-0,06
Estrato 4 VC	0,98	-0,05	0,96	-0,06	0,97	-0,04	0,96	0,00
Estrato 5 VC	0,99	-0,13	0,94	-0,08	0,97	-0,12	0,98	-0,10
Estrato 6 VC	0,99	-0,14	0,96	0,12	0,98	0,11	0,97	0,14
Total Residencial VC	1,00	0,00	0,97	0,24	0,95	0,30	0,96	0,25
Industrial VC	0,97	-0,13	0,66	-0,31	0,65	-0,41	0,71	-0,38
Comercial VC	0,99	-0,12	0,95	-0,19	0,93	-0,18	0,94	-0,19
Oficial VC	0,99	-0,06	0,84	-0,14	0,81	-0,18	0,80	-0,31
Otros VC	0,83	0,53	0,97	0,10	0,98	0,15	0,95	0,24
Total No Residencial VC	0,99	-0,09	0,93	-0,24	0,94	-0,29	0,95	-0,28

Tabla 43. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondientes al valor del consumo de los usuarios.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Facturación RE1 COM	-	-	0,49	0,84	0,46	0,88	-	-
Recaudo RE1 COM	-	-	0,65	0,74	0,68	0,71	-	-
Facturación RE2 COM	-	-	0,97	0,08	0,98	0,09	-	-
Recaudo RE2 COM	-	-	0,98	0,03	0,97	0,02	-	-
Facturación RE3 COM	-	-	0,98	-0,16	0,98	-0,14	-	-
Recaudo RE3 COM	-	-	0,98	-0,17	0,98	-0,14	-	-
Facturación RE4 COM	-	-	0,98	-0,16	0,98	-0,15	-	-
Recaudo RE4 COM	-	-	0,98	-0,17	0,98	-0,15	-	-
Facturación RE5 COM	-	-	0,93	-0,11	0,93	-0,08	-	-
Recaudo RE5 COM	-	-	0,94	-0,11	0,93	-0,07	-	-
Facturación RE6 COM	-	-	0,98	-0,02	0,98	0,01	-	-
Recaudo RE6 COM	-	-	0,98	-0,02	0,98	0,01	-	-
Facturación COM COM	-	-	0,99	-0,05	0,99	-0,02	-	-
Recaudo COM COM	-	-	0,99	-0,02	0,99	-0,03	-	-
Facturación IND COM	-	-	0,92	-0,27	0,93	-0,27	-	-
Recaudo IND COM	-	-	0,91	-0,28	0,92	-0,29	-	-
Facturación OF COM	-	-	0,93	0,11	0,93	0,15	-	-
Recaudo OF COM	-	-	0,80	0,45	0,92	0,14	-	-

Tabla 44. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondiente a la facturación y recaudo de las empresas.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Estrato 1 SyC	0,91	0,40	0,49	0,76	0,44	0,75	0,47	0,73
Estrato 2 SyC	0,98	0,16	0,96	0,01	0,95	0,08	0,96	0,05
Estrato 3 SyC	0,98	0,02	0,92	-0,22	0,93	-0,17	0,94	-0,19
Estrato 5 SyC	-	-	0,94	-0,20	0,95	-0,20	0,95	-0,18
Estrato 6 SyC	0,99	-0,06	0,95	0,05	0,96	0,08	0,95	0,10
Total Subsidios SyC	0,99	-0,07	0,92	0,34	0,87	0,42	0,89	0,39
Industrial SyC	0,97	-0,16	0,72	-0,48	0,65	-0,62	0,69	-0,59
Comercial SyC	0,99	-0,12	0,98	-0,13	0,99	-0,13	0,98	-0,16
Otros SyC	0,93	-0,03	0,68	0,60	0,61	0,60	0,71	0,57
Total Contribuciones SyC	0,99	-0,12	0,94	-0,29	0,91	-0,37	0,92	-0,36

Tabla 45. Cargas factoriales para el grupo de variables correspondiente a los subsidios y contribuciones dados por las empresas.

VARIABLES	2004		2005		2006		2007	
	Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados		Factores no rotados	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Número de Empleados	0,83	0,06	0,90	-0,03	0,86	-0,02	0,90	0,43
Sueldo	0,89	-0,15	0,91	-0,29	0,85	0,21	0,96	-0,13
Salario	0,92	-0,28	0,95	-0,15	0,94	0,10	0,98	-0,13
Prestaciones Legales	0,61	0,78	0,74	0,67	0,85	-0,07	0,95	0,13
Prestaciones Extra Legales	0,92	-0,09	0,95	-0,01	-0,30	0,94	0,98	-0,04
Salarios más Prestaciones	0,98	-0,06	0,98	-0,04	0,97	0,09	0,96	-0,21

Tabla 46. Cargas factoriales para el grupo de variables relacionadas con la administración de las empresas.