Infinitamente paradójico. La historia del infinito como recurso didáctico para entender y enseñar la relación entre matemáticas y filosofía.

David Miguel Suárez Ramírez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2024

Infinitamente paradójico.
La historia del infinito como recurso didáctico para entender y enseñar la relación entre matemáticas y filosofía.

David Miguel Suárez Ramírez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director (a):

Raúl Ernesto Meléndez Acuña

Doctor en Filosofía

Línea de Investigación:

Naturaleza de las Ciencias - Historia y Filosofía de las Ciencias

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2024

"El pensamiento no debe ser prisionero de fórmulas matemáticas. La intuición es más importante que el cálculo, porque nos lleva al verdadero conocimiento. El matemático no estudia objetos, sino las relaciones entre ellos; es por eso que su obra es eterna y siempre creativa, ya que está dedicada a lo infinito."

Henri Poincaré

"Somos el río que no tiene fin. Somos el ciego río, que embiste las márgenes y que ignora el hermoso reposo en la meta."

Jorge Luis Borges, Poema de los dones

En memoria de María Gladys Ramírez

Agradecimientos

Antes que nada, agradezco a mi alma máter, la Universidad Nacional de Colombia, por haber permitido mi desarrollo personal y vital tanto dentro como fuera de las aulas. Al Liceo Juan Ramón Jiménez por permitirme explorar la vocación docente desde las posibilidades que tiene el encuentro con el otro y la construcción colectiva. A Raúl Meléndez, director de este trabajo, por la confianza que tuvo en el proyecto desde el inicio, por sus consejos y lineamentos que ampliaron mi panorama y que constituyeron aportes supremamente valiosos para mi comprensión de estos temas.

Agradezco a mis amigos que son fuente de inspiración y motor de creatividad, de quienes aprendo cada día y en quienes siempre pude encontrar apoyo. A todos los estudiantes con los que he podido compartir un aula, en particular a los que han pasado por el énfasis, pues gracias a cada una de las intervenciones, ideas, discusiones y reflexiones que se desplegaron en las distintas clases es posible este proyecto.

Agradezco a mi familia. A mi papá, por encontrar en palabras serenas y tranquilas la manera de mostrarme su apoyo, además de haber sido el promotor en mi niñes del gusto que tengo por las matemáticas. A mi hermana, por ser un referente de trabajo constante, de organización y de compromiso con las causas que mueven el espíritu, por ser hermana y amiga. A mí mamá, a quien dedico este trabajo, por haberme permitido ser la persona que soy, por haber impulsado los sueños que tuve en mi niñez y en mi adolescencia. A quien recuerdo por sus enseñanzas sobre el esfuerzo, el trabajo, el cuidado del hogar, y de quien siempre recibí un cariño y un amor incondicional.

Por último, agradezco especialmente a Federico Jaramillo por haber conspirado junto a mí en la búsqueda de relaciones entre Matemáticas y Filosofía, por la compañía en la amplia exploración en la que nos hemos embarcado para tejer caminos hacia conocimientos aparentemente paradójicos, por la ayuda brindada desde la dedicación que lo caracteriza, por haber compartido conmigo sus saberes e ideas y por su amistad sincera.

Resumen

El presente trabajo muestra la construcción de una unidad didáctica enfocada en el reconocimiento de la relación entre matemáticas y filosofía a partir de un recorrido histórico por el concepto del infinito. Se señalan momentos históricos en los que, tanto la filosofía como las matemáticas, se enfrentaron a razonamientos y resultados paradójicos que permitieron el desarrollo de ambas disciplinas en la búsqueda de sus soluciones. Para finalizar se circunscribe el trabajo en un marco pedagógico basado en la resolución de problemas, el diálogo socrático, la pedagogía activa y el pensamiento crítico.

Palabras clave: Filosofía, matemáticas, infinito, paradoja, diálogo socrático, pensamiento crítico, posibilidad, historia de la relación entre matemáticas y filosofía.

Infinitely paradoxical. The history of infinity as a teaching resource for understanding and teaching the relationship between mathematics and philosophy.

Abstract

The present work showcases the construction of a didactic unit focused on recognizing the relationship between mathematics and philosophy through a historical exploration of the concept of infinity. It highlights key historical moments in which both philosophy and mathematics faced paradoxical reasoning and results, leading to the development of both disciplines in the search for solutions. Finally, the work is framed within a pedagogical approach based on problem-solving, Socratic dialogue, active pedagogy, and critical thinking.

Keywords: Philosophy, mathematics, infinity, paradox, Socratic dialogue, critical thinking, possibility, history of the relationship between mathematics and philosophy.

Contenido

Tabla de contenido

Introducción 1

Objetivo general: 3
Objetivos específicos: 3

1. Unidad didáctica: Un recorrido histórico sobre problemas filosófico-matemáticos. 5

1.1 Contexto histórico (Matemáticas antes del proceso demostrativo) 6
1.1.1 Aparición del primer filósofo y matemático 8
1.2 Problema de la inconmensurabilidad. 9
1.2.1 Antifairesis 10
1.2.2 Intuicionismo pitagórico 12
1.2.3 Inconmensurabilidad 14
1.2.4 Acercamiento desde la teoría musical 16
1.2.5 Reducción al absurdo 17
1.2.6 Acercamiento de lo discreto a lo continuo 19
1.3 Problema del movimiento (Paradojas de Zenón de Elea-convergencia de series geométricas) 22
1.3.1 Series geométricas 26
1.4 Principios lógicos de Aristóteles. Menciones a la lógica y al horror al infinito.... 29
1.4.1 Filosofía platónica 29
1.4.2 El espacio geométrico es real 31
1.4.3 ¿Existe el infinito? 32
1.4.4 Antinomias y principios lógicos 35
1.5 Los elementos de Euclides como primer intento de sistematizar el conocimiento geométrico. Aparición de las geometrías no euclidianas. 37
1.5.1 Los Elementos de Euclides 37
1.5.2 El quinto postulado de Euclides 37
1.5.3 ¿Demostración del quinto postulado? 42
1.5.4 Kant: ¿Sólo existe una forma de percibir el espacio? 45
1.6 La paradoja de Galileo (Consideraciones en la filosofía de Leibniz) 47
1.7 Aritmetización de la matemática. La crisis de la fundamentación matemática, paradoja de Rusell. 50
1.7.1 Teoría de conjuntos 53
1.7.2 Aparición de la paradoja de Rusell. 56
1.7.3 Propuestas para vencer la paradoja 56

2. Marco pedagógico o didádicto 61

2.1.1 Enfoques del liceo Juan Ramón Jiménez (tipos de pedagogía en las que se enmarca el trabajo) (Pedagogía activa- construccionismo social- pensamiento sistémico) 62
2.1.2 Población a la que está dirigida 63
2.1.3 ¿Quiénes son los estudiantes que participaron? 64
2.1.4 ¿Quiénes son los profesores que participaron? 64
2.2 Antecedentes pedagógicos 65
2.3 Contenidos de la Unidad didáctica: 71
2.3.1 Conceptuales: Aspectos disciplinares que se desean enseñar. 71
2.3.2 Habilidades: ¿Cómo la unidad didáctica les brinda herramientas que propendan por las apuestas pedagógicas del liceo? 71
2.4 Metodología de la unidad didáctica 72
2.4.1 Metodología de la clase de énfasis. 72
2.4.2 Exploración del concepto de infinito como introducción a la unidad 73
2.5 Materiales y Recursos. 74
2.5.1 Recursos que necesitan los estudiantes. 74
2.5.2 Recursos utilizados por los docentes. (Videos y lecturas propuestas) 74
2.6 Evaluación: Criterios e instrumentos. 75

3. Análisis y resultados. 77
3.1 Resultados 77
3.1.1 Preguntas del interés de los estudiantes que esperan responder en el espacio del énfasis y que fueron parte de las entrevistas que realizaron a la comunidad del Liceo: 77
3.1.2 Entrevistas finales a estudiantes: 78
3.2 Análisis de las entrevistas: 105

4. Conclusiones 111

Bibliografía 113

Anexo A: Ejemplo de diálogo en clase, "Descubrimiento de figuras inconmensurables y la sustracción sucesiva." **115**

Anexo B: Ejemplo de clase: diálogo sostenido con estudiantes a partir de un cuento de Jorge Luis Borges - *"La biblioteca de Babel"* **127**

Lista de figuras

Pág.

Figura 1-1: Unidad común 11

Figura 1-2: Antifairesis 12

Figura 1-3: Construcción inconmensurabilidad 14

Figura 1-4: Construcción inconmensurabilidad 15

Figura 1-5: Generación de cuadrados por sustracción sucesiva 15

Figura 1-6: Proceso iterativo (lado-diagonal) 20

Figura 1-7: Paradoja de Zenón (hecha por estudiantes) 23

Figura 1-8: Contradicción de la paradoja (hecha por estudiantes) 24

Figura 1-9: Aproximación a la circunferencia por polígonos regulares 33

Figura 1-10: Regresión al infinito 36

Figura 1-11: Quinto postulado de Euclides 39

Figura 1-12: Teorema 29 en los *Elementos* 40

Figura 1-13: Suma de ángulos internos de un triángulo 41

Figura 1-14: Cuadrilátero de Saccheri 43

Figura 1-15: Correspondencia biyectiva (paradoja de Galileo) 50

Figura 1-16: Correspondencia biyectiva entre naturales y enteros 54

Figura 1-17: Argumento diagonal de Cantor 55

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1-1: aproximación a $\sqrt{2}$ 21

Tabla 2-1: antecedentes pedagógicos 68

Tabla 2-2: antecedentes pedagógicos 70

Introducción

La concepción de la matemática como estructura ya acabada y en donde se encierran verdades rígidas e inmutables se muestra como una de las mayores dificultades a la hora de su enseñanza-aprendizaje. La perspectiva de estar en un edificio acabado y silencioso en donde se conoce lo que es dictado por los que ya han recorrido sus pasillos, se torna aburrida para las personas que quieren construir e imaginar cosas nuevas. Es allí donde el recorrido dentro del conocimiento matemático se vuelve plano y utilitario, y donde es necesario hacerle preguntas por fuera de los lineamientos que ya constituyen sus cimientos y que cuestionan lo que se da por sentado. Las preguntas: ¿Quiénes lo construyeron y qué camino recorrieron? ¿Qué problemas los motivaron? ¿Qué dificultades enfrentaron en su camino? o ¿Cuántos hicieron parte de dicha construcción? pueden desembocar en una discusión epistemológica alrededor de las verdades matemáticas que cuestiona la imagen del edificio ya terminado, y en una búsqueda histórica para desentrañar los misterios que pueden encerrar.

La historia de las matemáticas nos muestra no solamente su carácter tentativo y falible que nos brinda una imagen suya menos idealizada y dogmática, sino también sus importantes y fructíferas conexiones con otras disciplinas y actividades humanas, en particular con la filosofía. En este sentido podríamos plantear las siguientes cuestiones: ¿cuál puede ser la relación que guarda la matemática con la filosofía y la filosofía con la matemática? ¿Las matemáticas pueden suscitar problemas filosóficos? ¿La filosofía puede ayudar a comprender las creaciones y desarrollos matemáticos? ¿Dónde se encuentran los filamentos que unen a estas dos grandes disciplinas? ¿Qué relación guarda la historia con el desarrollo de ambas ramas del conocimiento? A primera vista, ambas disciplinas vehiculan una pregunta común: la pregunta por el fundamento. De un lado, el filósofo se pregunta por aquello que está a la base de todas las cosas, por aquello que cimenta y/o que justifica el conocimiento de lo real; de otro, el matemático necesita encontrar un piso firme para sus demostraciones, unos axiomas que sirvan como punto de partida para poner en marcha el ejercicio deductivo que lo caracteriza y para justificar la certeza que se busca al fundamentar el conocimiento matemático. Así, ambos emprenden la búsqueda de una verdad última, ambos quieren dar con ese fundamento que sienta las bases de su disciplina, del conocimiento y, finalmente, de lo real. Por otro lado, ambas disciplinas beben de la misma fuente: la lógica. Tanto el filósofo como el matemático se atienen a principios formales, a la hora de argumentar y razonar, que dictan de dónde es legítimo partir, qué camino se puede seguir y qué se puede concluir. Ahora bien, más allá de dicha pregunta común y de esta coincidencia formal, cada disciplina le plantea problemas a la otra. El filósofo le puede preguntar al matemático: ¿qué es eso que llamas número? ¿en qué parte de la realidad se inscriben y existen tus entidades? ¿cómo puedes estar seguro de que tus teoremas son verdaderos?; a su vez, el matemático le puede preguntar al filósofo: ¿no será que tu preocupación por el bien, por lo bello, por el ser, no es más que un malentendido del lenguaje, una contradicción lógica irresoluble que es preciso olvidar? ¿no crees que tus dudas sobre lo infinito y lo finito, sobre el espacio y el tiempo, son susceptibles de formalización y explicación?

La propuesta de este trabajo surge de una preocupación por el acercamiento de dos disciplinas que se muestran completamente desvinculadas en la educación media, acercamiento que permite una mejor comprensión de momentos del desarrollo histórico de ambas disciplinas, así como de sus conceptos, temas y problemas. Desde los tiempos de la compartimentación del conocimiento y sus necesidades de especialización, se ha hecho evidente el desafío de no promover una visión fragmentada del mismo. Por ello, el reconocimiento histórico de los cruces y problemas que han alimentado discusiones, debates y desarrollos en estas dos materias brinda la posibilidad de una educación más integral, centrada en la identificación de las distintas conexiones y fomentando la imaginación y la creatividad de los y las estudiantes.

Objetivos

Objetivo general:

Diseñar una unidad didáctica alrededor del concepto de infinito que permita a los y las estudiantes de 10 y 11 abordar problemas sobre este concepto desde la matemática y la filosofía. Un propósito central de la unidad didáctica es contribuir a que los estudiantes puedan ver y comprender relaciones entre las cuestiones matemáticas y filosóficas que suscita el concepto de infinito. Para lograrlo se explorará cómo en distintos momentos históricos la reflexión sobre el infinito ha solicitado una aproximación desde estas dos disciplinas. Luego del trabajo de la unidad didáctica los estudiantes deben reconocer que una comprensión cabal sobre el concepto de infinito no se puede obtener desde una sola perspectiva disciplinar.

Objetivos específicos:

- Diseñar actividades en el aula destinadas a que los estudiantes sean capaces de dar cuenta de los procesos que realizan a la hora de resolver problemas y que propicien su acercamiento a asuntos matemáticos, por medio de paradojas suscitadas por el trabajo con el infinito.
- Desarrollar un trabajo de aula, con carga horaria de tres horas a la semana, en el que se brinde un panorama histórico de los trabajos e ideas que se han tenido del infinito.
- Rastrear, explorar y discutir las dudas que han sido generadas en los estudiantes sobre el uso de la idea del infinito durante toda su vida académica, y darles el valor como preguntas filosóficas.

1. Unidad didáctica: Un recorrido histórico sobre problemas filosófico-matemáticos.

A continuación, se plantea un recorrido histórico por distintos momentos en donde la matemática y la filosofía se encuentran trabajando alrededor del concepto del infinito y sobre las paradojas que genera. Se abordarán 6 temas en los que se ha identificado al infinito como protagonista, y que, dentro de sí, albergan una riqueza teórica y conceptual tanto matemática como filosófica. Estos temas además permiten hacer una revisión completa de lo que hoy en día comprendemos como disciplina matemática y a su vez dejan ver nociones de el camino que ha recorrido el pensamiento filosófico sobre la naturaleza de la misma. No está de más agregar que estos momentos históricos son tan sólo algunos de los muchos puntos en los que se encuentran estas dos disciplinas, y que la elección de los mismos respondió a la observación de intereses y curiosidades que tienen los y las estudiantes con las que he podido compartir conversaciones y debates afines; y que se intentan ajustar a su vez a los conocimientos que estudiantes de grados 10 y 11 ya manejan.

Al principio se realiza un contexto histórico mencionando antecedentes históricos al proceso demostrativo de la matemática. En la primera lección se discute cómo el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables marcó un hito en la Grecia clásica, generando nociones contraintuitivas que desafiaban la comprensión de la época. En la segunda lección se trabaja sobre una de las paradojas más famosas de la historia, la paradoja de Zenón. En la tercera lección profundizamos en los principios lógicos propuestos por Aristóteles, y las consideraciones que tuvo sobre el infinito. En la cuarta lección se hace un recorrido por el nacimiento de la geometría euclidiana, las dudas generadas por el quinto postulado de Euclides, la posterior aparición de las geometrías no euclidianas y las consecuencias filosóficas que provocaron. En la quinta lección se realiza un recorrido por las nociones geométricas y filosóficas de Leibniz para luego exponer un punto de quiebre de su filosofía conocido como su época parisina por medio de la paradoja de Galileo. Y en la sexta lección se mencionan aspectos importantes dentro de movimientos como la aritmetización de la matemática y la búsqueda por sus fundamentos, mencionando personajes principales como Cantor, Rusell, Peano y Hilbert.

1.1 Contexto histórico (Matemáticas antes del proceso demostrativo)

Es sabido que es muy difícil rastrear el primer momento en el que se hizo matemática o en la que ella constituyó una nueva manera de aproximarse a los problemas para volverse parte de nuestra cotidianidad como sociedad humana. Sin embargo, podemos rastrear que la tradición matemática occidental tiene su cuna en dos grandes civilizaciones de la antigüedad como lo son Egipto y Babilonia (Mesopotamia), en donde los problemas de agrimensura y orientación espacial, dentro de sus vastos territorios, los impulsaron a estudiar figuras y cuantificarlas por a través de magnitudes representadas por medio de elaborados sistemas de numeración. Hoy en día a través de papiros y grabados en rocas y tabletas de arcilla, sabemos que ambas civilizaciones hicieron grandes hallazgos en campos que hoy conocemos como aritmética, álgebra y geometría tales como: cálculo de áreas de polígonos, primeras aproximaciones al cálculo de áreas circulares, resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, que tienen una fuerte aplicación en las increíbles obras que realizaron y que requerían de una ingeniería que hasta el día de hoy resulta asombrosa.

Se habla de una matemática primitiva cuando nos referimos a la manera de hacer matemática de estas dos grandes civilizaciones (entre otras razones) debido a que la manera en la que están enunciados los problemas siempre hace referencia a un problema particular y concreto. Hoy en día contamos con grabados en piedras y papiros como el conocido papiro Rhind, descubierto por Henry Rhind en el siglo XIX y atribuido al escriba egipcio Ahmes, para vislumbrar la manera en la que estas civilizaciones abordaban los problemas matemáticos:

> Por ejemplo, las reglas que ofrece Ahmes, por cuanto son de carácter concreto, nunca se refieren a números considerados en abstracto; no hay afirmaciones tales como “1200 más 800 es igual a 2000” sino otra del tipo “1200 soldados más 800 soldados son 2000 soldados” o bien “30 panes más 20 panes son 50 panes”. (Klimovsky, 2005, p. 33)

La matemática, en este momento, responde a problemas empíricos y prácticos y no hay una generalidad o una abstracción mayor que la de los números involucrados que acompañan los objetos en cada problema. Para estas culturas los objetos sobre los cuales se puede hacer matemática son los objetos del mundo, los objetos tangibles y fácticos, y junto con ello la matemática habla visiblemente del mundo empírico que los rodeaba. La astronomía, por ejemplo, tenía un papel protagónico en sus intereses por su cualidad cíclica. Hecho que utilizaron para la orientación marítima y la elaboración de calendarios, lo que les permitió comenzar a predecir eventos.

En cuanto a las ramas de las matemáticas que desarrollaban, podríamos hacer una lectura desde nuestros días, que la civilización Babilónica tuvo un carácter más numérico-algebraico mientras que los egipcios tuvieron un enfoque más geométrico. Esto, a causa de que uno de los sistemas de numeración babilónica fue un sistema de numeración posicional, lo que les permitió generar métodos más eficientes para realizar las operaciones básicas de la aritmética. En la antigua Sumeria se encuentran métodos de resolución de ecuaciones de grado dos.

Pese a todos los increíbles desarrollos matemáticos que podemos encontrar en esta época, se piensa que la manera en la que estas civilizaciones se acercaban a la matemática era sumamente inductiva y orientada a la solución de problemas prácticos. Se contemplaba un patrón, y, al observar que sucedía recurrentemente, se asumía. No hay registros de ese momento histórico, en el que haya habido una preocupación por realizar una demostración que se deslindara de las contingencias que podía tener cada problema para generalizarlo como una verdad. Es decir, no había diferencia entre las verdades fácticas, empíricas y las verdades matemáticas teóricas y abstractas.

Acá, podríamos detenernos y hacernos las preguntas: ¿Qué es el conocimiento matemático? o ¿De qué tratan las matemáticas? ¿Lo que hacían los egipcios podría ser considerado como matemáticas? Todas estas preguntas son preguntas que dependen del momento histórico. Hoy en día, cuando se habla de matemáticas se piensa en palabras como número, teorema, axioma o demostración. Y la palabra demostración tiene un lugar privilegiado en el ámbito matemático; casi que se ha vuelto la actividad por excelencia del matemático. ¿Qué hace el matemático? - en lo esencial, demuestra, justifica las verdades que afirma a partir de otras verdades. Pues bien, de esto era de lo que carecían las matemáticas de las antiguas civilizaciones egipcia y babilonia. Pareciese que, para estas, la matemática correspondía por completo al mundo empírico y fáctico, y no vieron necesario un cuestionamiento más profundo del por qué sus métodos funcionaban.

1.1.1 Aparición del primer filósofo y matemático

De Tales de Mileto, es del primero que se tienen indicios de que intentó justificar lo que para él eran verdades geométricas generales, partiendo de otras verdades geométricas más simples. A él se le atribuye la aparición en la historia de lo que se conoce como método deductivo, y también el ser el primero en pensar que todas las cosas en el mundo tenían una sustancia que las constituía y de la que se originaban. Para Tales la naturaleza era cognoscible, y además existía un principio, un arché, de donde venían todas las cosas y a lo que se reducían. Se conoce como el primero en buscar un principio material del mundo y a partir de él buscar una explicación racional a cada uno de los fenómenos de la naturaleza.

Se dice que Tales fue discípulo de sacerdotes en Egipto, donde aprendió geometría y astronomía. De ahí nace la historia de que pudo calcular la altura de una pirámide solo con la ayuda de un palo. Hoy en día esta historia está vinculada al aprendizaje de semejanza de triángulos en la educación media y en ella aparece como gran resultado el “teorema de Tales”. Si bien, es posible que Tales haya podido utilizar este teorema para calcular la altura de una pirámide, lo cierto es que él no propuso la demostración que hoy conocemos del teorema de Tales y que aparece en los Elementos de Euclides. Sin embargo, a Tales sí se le atribuyen las demostraciones de los siguientes tres enunciados:

- El diámetro divide al círculo en dos partes iguales.

- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.[1]
- Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Las demostraciones que hizo de estos teoremas, son demostraciones de carácter intuitivo y visual, y en las que probablemente se utilizó la superposición de figuras para argumentar que son de igual forma y tamaño. Debido a esto no constituyen lo que hoy por hoy llamamos una demostración formal, pero lo cierto es que sí se allana el camino de lo que será conocido más adelante como método deductivo.

Para Tales, el conocimiento matemático seguirá requiriendo de la experiencia sensible de los objetos y las figuras. Presumiblemente consideraba los términos matemáticos como denominaciones de elementos del mundo. También es probable que haya conjeturado la existencia de entidades límite, por ejemplo: la noción de punto, de recta y de circunferencia. Estas entidades no están por fuera de los objetos tangibles, sino que son el resultado de llevar las figuras que se perciben de estos objetos hasta el límite, derivando de ellos objetos sumamente finos como lo son el punto, las rectas, las curvas, los planos.

Sin duda, Tales de Mileto constituye uno de los puntos históricos que dan origen a lo que se puede denominar como la infancia del conocimiento filosófico y matemático. Y su influencia sobre la región Jónica, fue de gran importancia para figuras que se encargarán de seguirle los pasos, como Anaxímenes y Anaximandro en Mileto, Heráclito en Éfeso y Pitágoras en Samos.

1.2 Problema de la inconmensurabilidad.

En la búsqueda del arché, la escuela pitagórica sostuvo una tesis: “todo es número o relaciones entre ellos”, entendiendo relación de números como razones entre ellos, es decir como magnitudes conmensurables (magnitudes con una unidad común que las puede medir a ambas). La tesis puede, entonces, formularse así: “Todo es conmensurable”.

[1] El término igual en estos enunciados hace referencia a la congruencia entre figuras.

Fue a través de la investigación de los pitagóricos sobre las longitudes de ciertas diagonales que se encontraron con un problema aparentemente contraintuitivo: el lado de un cuadrado no es conmensurable con su diagonal. Este hallazgo conmocionó las bases matemáticas y filosóficas antiguas, y se llegó a pensar que la aritmética llevaba a contradicciones, causando una desconfianza enorme en lo ya descubierto. La denominada antifairesis o sustracción sucesiva fue el proceso que utilizaron para realizar este hallazgo. Esta consiste en la aproximación continua de la razón entre dos magnitudes inconmensurables, mediante procesos iterativos, un método utilizado para acercarse cada vez más, con valores aproximados, a este tipo de relaciones mediante sustracciones repetidas, revelando así su naturaleza inconmensurable en un proceso sin fin. Pero comencemos por explicar esto desde lo que significaban las máximas pitagóricas.

1.2.1 Antifairesis

Pitágoras es uno de los presocráticos que busca el arché, es decir, el principio material, originario o explicativo de todas las cosas, como ya lo harían Tales (agua), Anaxímenes (aire) y Heráclito (fuego), y se concentra en las características de la materia, de las medidas que se pueden hacer sobre la misma. Pitágoras manifiesta que el conocimiento se divide en cuatro disciplinas, la geometría, la aritmética (teoría de números), la astronomía y la música. Una de las grandes invenciones que se le atribuyen es la del monocordio, con el que estudió los tonos que se generaban al pulsar una cuerda dividida en dos partes, formando relaciones ½, ⅔, ¾ entre ellas. Estudió las armonías generadas por estas relaciones. Al descubrir relaciones entre las armonías y las razones entre las longitudes de las partes de la cuerda y haber estudiado mucha geometría su intuición le llevó a plantear que la naturaleza que lo rodeaba buscaba la armonía, y que en ese sentido las cosas y los fenómenos naturales se podían explicar mediante números o relaciones entre ellos.

Esta idea de que todo era una relación entre magnitudes, que se podían expresar como números, hizo que los pitagóricos se basaran en las llamadas magnitudes conmensurables. Dos magnitudes son conmensurables si existe una unidad común (alícuota) que mida a ambas magnitudes enteramente. Por tanto, la máxima pitagórica también era entendida como “todo es conmensurable”, lo que le daba mucha más fuerza a su teoría de la armonía de la naturaleza y el cosmos.

Para entender las magnitudes conmensurables usemos el siguiente ejemplo:

Supongamos que yo tengo el segmento $\overline{AB}$ que representa la altura de un árbol junto a un segmento $\overline{CD}$ que representa la altura de una persona. Para Pitágoras, como estas dos magnitudes son conmensurables, debe existir una unidad común representada por el segmento $\overline{EF}$ de tal forma que $n \cdot \overline{EF} = \overline{AB}$ y que $m \cdot \overline{EF} = \overline{CD}$ donde m, n son números naturales.

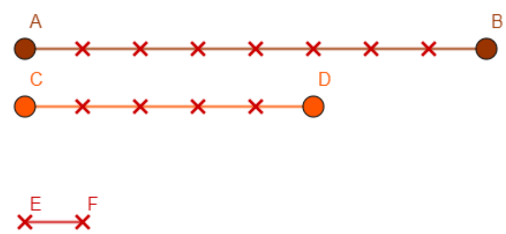


Figura 1

Ilustración del ejemplo de unidad común

En este caso $n = 8$ y $m = 5$

Si comparamos las magnitudes: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n \cdot \overline{EF}}{m \cdot \overline{EF}} = \frac{n}{m}$, obtenemos que toda relación entre dos magnitudes conmensurables se puede abstraer y expresar como una razón (relación) de números enteros positivos, o como lo que hoy en día se conoce como un número racional.

La pregunta natural que se le podría hacer a Pitágoras es ¿Cómo encontrar esa unidad alícuota? ¿Existe algún tipo de método para poder encontrarla siempre?

Un procedimiento que empleaban para encontrar esta unidad común es conocido como el método de la *antifairesis* o de la sustracción sucesiva, que encierra una idea simple pero certera. Lo primero es comprobar si la magnitud menor cabe un número entero de veces en la mayor, si es el caso, la magnitud menor es la unidad alícuota. Si no es el caso, habría que ver cuántas veces cabe enteramente la magnitud menor en la mayor y considerar ese resto como una nueva magnitud:

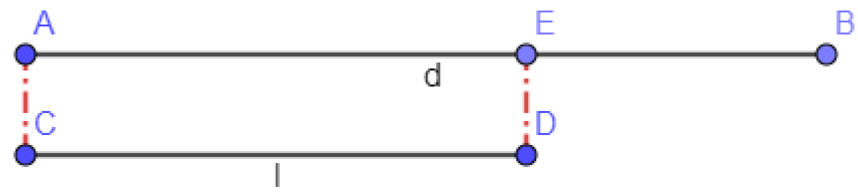


Figura 2

Luego podríamos hacer lo mismo y compara ese residuo con la magnitud menor, si el residuo cabe un número entero de veces en la magnitud menor entonces también lo hará en la mayor y será la unidad alícuota. Si no es el caso se repite el mismo procedimiento hasta encontrar la unidad común.[2]

1.2.2 Intuicionismo pitagórico

La escuela pitagórica encontró en los números enteros positivos una razón esencial para conocer la armonía del mundo, de la naturaleza, que nos hace ver el por qué también fueron una escuela de culto, esotérica y mística. Y hoy en día se sabe que la escuela pitagórica era una institución cerrada, en la que había conocimientos que se guardaban sólo para un grupo selecto de sus integrantes, los matemáticos. Para ellos, los objetos matemáticos, con los que se hacen matemáticas, no se encuentran en la realidad empírica, sino que son un género de objetos que pertenecen a otro mundo, el mundo de las entidades matemáticas. En palabras de Gregorio Klimovsky:

> "Dicho de otra manera, si llamamos "primer mundo" al de los objetos y hechos empíricos, habría ademá un "segundo mundo" que lo trasciende, no empírico, poblado en particular por las entidades matemáticas" (Klimovsky, 2005, p. 40)

[2] Este proceso resulta ser una etapa temprana del proceso que luego se va a conocer como el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor entre dos números naturales dados.

Su mismo carácter místico los hace creer en una realidad que no está mediada por nuestros sentidos, una realidad a la que podemos acceder por medio de la razón en donde viven los números, el punto, la recta, las figuras. Este puede ser el primer momento histórico en donde una corriente del pensamiento separa los sentidos empíricos y la razón. Para los pitagóricos existían dos maneras de obtener conocimientos inmediatos, por medio de la vía sensorial y por medio de la vía racional. Pero ¿Cómo conocemos por medio de nuestra razón? Para ellos existía una capacidad en el ser humano que era la intuición. Nosotros podemos conocer las figuras geométricas y los números por medio de nuestra intuición matemática.

> "Para el conocimiento de los objetos empíricos disponemos de los órganos de los sentidos; por el contrario, en lo que se refiere a los objetos matemáticos, el conocimiento de estos vendría de la intuición de aquellos objetos abstractos o formales del segundo mundo, en cuyo caso sería la mente la encargada de obtenerlos." (Klimovsky, 2005, p. 40)

La metodología pitagórica para conocer, habiendo explicado ya la existencia de un segundo mundo de objetos matemáticos, consistía en transformar un problema sensible en abstracciones matemáticas del "segundo mundo", trabajar con dichos objetos en esa realidad matemática y una vez solucionado devolver dicha solución al mundo empírico. Esto era posible porque para ellos existía un isomorfismo entre estos dos mundos, una correspondencia entre los objetos matemáticos y los objetos fácticos. Hoy por hoy heredamos algo de esta metodología como los modelos matemáticos que se utilizan para representar fenómenos físicos y comportamientos de la naturaleza.

Una de las consecuencias de creer que podíamos acceder a estos objetos por medio de nuestra intuición, fue la idea de que el punto tiene una extensión. El punto sin extensión, para los pitagóricos, estaba por fuera de toda percepción sensible ¿Cómo podían capturar la idea de un elemento que constituye las figuras extensas, pero que a su vez no posee extensión? Esta idea se vinculó a la idea de que el punto era además unidad común de todas las longitudes, y por lo tanto la idea del punto extenso también fundamentaba la máxima "todo es conmensurable", "todo es número".

1.2.3 Inconmensurabilidad

Se suele hablar de un famoso pitagórico llamado Hipaso de Metaponto, de quien se cuenta que descubrió o divulgó que el lado de un cuadrado y su diagonal eran inconmensurables. No se sabe si Hipaso fue quien hizo tal hallazgo o si su maestro Pitágoras lo ocultaba por las fuertes implicaciones que tenía en su filosofía, que se tocarán más adelante.

A continuación, se mostrará el método heurístico que emplearon los pitagóricos para llegar a la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado, por medio de la antifairesis explicada anteriormente. Se trabaja sobre un cuadrado $\square ABCD$ y se traza una de sus diagonales, en este caso particular la diagonal $\overline{BD}$.

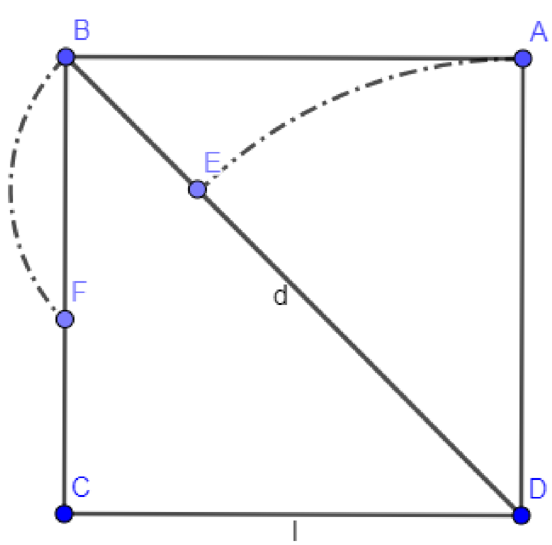


Figura 3

Ahora, si la diagonal y el lado fueran conmensurables debería existir una alícuota que las midiera enteramente a ambas. Por lo tanto, el proceso de sustracción sucesiva debería terminar. Geométricamente aplicar la antifairesis, sería llevar la longitud del lado sobre la diagonal por medio de un arco de circunferencia generando el punto E. Es claro que, $\overline{ED} \equiv \overline{AD}$ (son congruentes), es decir su longitud es la longitud del lado. Y que la longitud de $\overline{BE}$ es la diferencia entre la diagonal y el lado.

Para seguir con nuestro proceso de sustracción sucesiva deberíamos ver ahora esta magnitud de $\overline{BE}$ para restársela al lado. Para lo cuál se utiliza un artilugio geométrico: se genera un punto F por medio de un arco de circunferencia de radio $\overline{BE}$ y centro en E como se observa en la figura 3.

Con los puntos generados E y F se construyen los segmentos $\overline{CE}$ y $\overline{EF}$ que generan los triángulos $\triangle BEF$, $\triangle CEF$ y $\triangle CDE$. Los triángulos $\triangle BEF$ y $\triangle CDE$ son isósceles por construcción. Además, el triángulo $\triangle BEF$ es un triángulo rectángulo pues los ángulos que comprenden a su lado no congruente tienen como amplitud la mitad de un ángulo recto. Por lo cual los ángulos $\measuredangle FEC$ y $\measuredangle FCE$ son los complementarios de los dos ángulos congruentes del triángulo isósceles $\triangle CDE$, lo que implica que $\measuredangle FEC$ y $\measuredangle FCE$ son congruentes y demuestra que el triángulo $\triangle CEF$ es isósceles también.

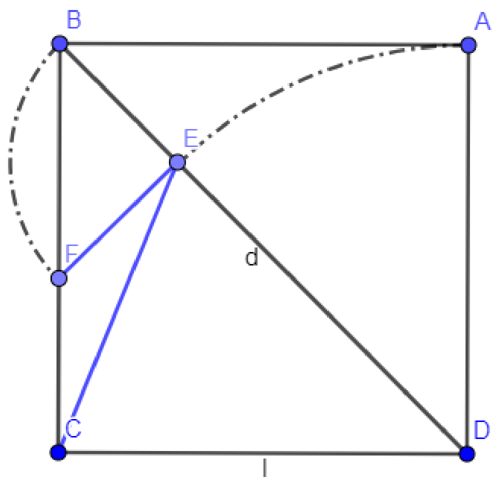


Figura 4

Como $\triangle CEF$ es un triángulo isósceles entonces se tiene que el segmento $\overline{CF}$ es congruente a $\overline{BE}$, es decir, representa la diferencia entre diagonal y lado. Ahora, si la sustraemos del lado obtenemos el segmento$\overline{BF}$. Y si detallamos estas dos nuevas medidas que resultan de la antifairesis $\overline{BE}$ y $\overline{BF}$ constituyen el lado y la diagonal de un nuevo cuadrado como se observa en la figura 5.

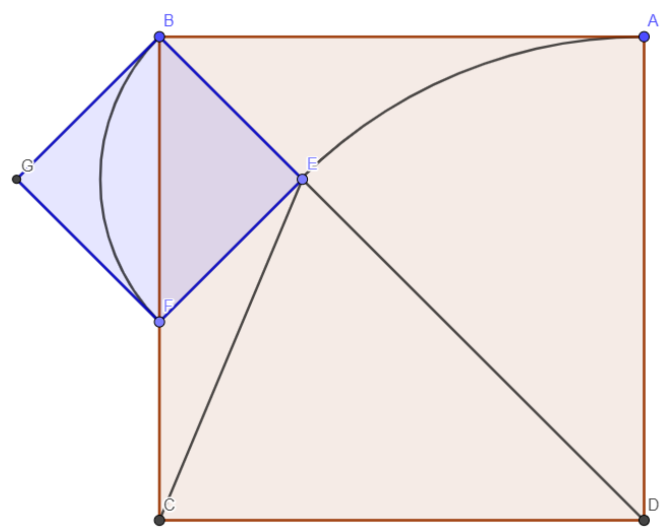


Figura 5

generación de cuadrados por sustracción sucesiva.

Como lo que se obtuvo es de nuevo la comparación entre el lado y la diagonal de un cuadrado se puede seguir repitiendo este mismo procedimiento e ir obteniendo cuadrados cada vez más pequeños. La pregunta natural al ver esto es ¿Cuándo termina dicho proceso? La intuición sensible, y el hecho de que por pequeño que sean los cuadrados obtenidos en las restas sucesivas tienen siempre su diagonal mayor que su lado, nos dice que el proceso de sustracción sucesiva nunca va a dar cero, pero ¿Es suficiente? Debería poder demostrarse.

1.2.4 Acercamiento desde la teoría musical

Como se mencionó anteriormente, uno de los grandes pilares de la filosofía pitagórica fue el de la música. Encontrar que las notas musicales dependían de la longitud de una cuerda que se hacía vibrar (monocordio) y de las relaciones entre las longitudes de las partes en que queda dividida la cuerda ratificó su mirada sobre la naturaleza e hizo que la música tuviera un papel destacado en sus rituales, ceremonias y hasta en la manera en la que los pitagóricos entendían a la medicina.

Lo curioso es que en la música se encuentra otro posible acercamiento heurístico a las magnitudes inconmensurables. Supongamos que una cuerda tensada genera una nota de Do, usando la nomenclatura moderna para que se entienda la idea. Los pitagóricos se dieron cuenta de que si yo hago vibrar una cuerda con la mitad de la longitud de la anterior obtengo la misma nota, pero más aguda. A esta relación entre notas la conocemos como la octava y es generada por una razón de $1:2$ o $\frac{1}{2}$. Luego exploraron la relación $2:3$ o $\frac{2}{3}$, qué es lo que hoy conocemos como la quinta y que se utiliza para construir el círculo de quintas y obtener las 12 notas de la escala cromática. Si la cuerda tensada genera la nota Do, $\frac{2}{3}$ de cuerda genera la nota Sol, y si repetimos el proceso sobre la nota sol, $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de cuerda generará la nota Re, y así podemos seguir generando notas con dicha relación. En el anterior caso Do y Re estarían en relación $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$, es decir, $\frac{4}{9}$.

Las notas musicales están estrechamente ligadas a proporciones de longitudes partes de una cuerda, y además empíricamente en ellas hay un orden y distancia tonal. Por ejemplo, si tuviéramos que preguntar qué nota está equidistante entre las notas de Do y Re, la respuesta sería la nota de Sol por la construcción de quintas que hicimos anteriormente. Si utilizamos lo anterior y asumimos que los pitagóricos intuyeron la noción de distancia tonal, cómo habrían podido ellos responder a las preguntas: ¿Qué nota equidista entre Do y su octava? ¿Qué relación representa la longitud que genera la nota equidistante entre una nota y su octava?

Como se sabe que la relación que genera la octava es de $\frac{1}{2}$, se debe hallar una relación que al efectuarse dos veces sobre una cuerda sea $\frac{1}{2}$. Cómo estas relaciones son multiplicativas, hoy en día se puede intuir lo que hay que buscar es un número que al multiplicarse por sí mismo fuese 2 y que la relación solicitada era de 1 con respecto a dicho número. Se sabe que esa nota existe, y si asumimos que en esa época alguien con un talento musical hubiera podido evocar la nota, su filosofía estaba por tambalear debido a un elemento de la naturaleza que no podía ser representado como una relación de números ya que el número 2 no hacía parte de sus estudiados números cuadrados.

1.2.5 Reducción al absurdo

Hipaso de Metaponto fue un pitagórico que se enfrentó ante estas magnitudes aparentemente inconmensurables, y de él se cuenta que brindó o divulgó una primera prueba de que el lado del cuadrado y su diagonal son magnitudes inconmensurables. Aplicando el conocido teorema de Pitágoras sobre el triángulo que forma la diagonal junto con dos de los lados del cuadrado nos volvemos a encontrar con un número que al elevarse al cuadrado es 2.

En matemáticas existe un método para demostrar llamado demostración por reducción al absurdo o por contradicción. La idea principal del método es negar el resultado que se quiere demostrar y por medio de pasos lógicos llegar a una contradicción para demostrar que lo que asumimos era falso y así demostrar el enunciado original. Se cree que Hipaso de Metaponto fue el responsable de ofrecer una de las primeras demostraciones por contradicción que se conocen a nivel histórico:

Llamemos a la magnitud de la diagonal del cuadrado de lado 1 como $\sqrt{2}$ (a causa del teorema de pitágoras, aunque los griegos no tenían esa notación), y asumamos que, $\sqrt{2}$ es una magnitud conmensurable. Es decir que se va a poder expresar como la razón entre dos números naturales a, b como $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Ahora, elevando al cuadrado tendríamos que $2 = \frac{a^2}{b^2}$, y por lo tanto $2b^2 = a^2$. De lo que podemos deducir que a^2 es el doble de b^2, es decir que a^2 es par. Como a^2 es par entonces a debe ser un número par también, pues si fuera impar, su cuadrado sería impar, por lo cual va a existir un entero positivo c tal que $2c = a$.

Si reemplazamos en la igualdad $2b^2 = a^2$, el valor de a obtenemos que $2b^2 = (2c)^2$. Es decir, $2b^2 = 4c^2$, que despejando b^2 queda como $b^2 = 2c^2$. De nuevo, tenemos que b^2 es el doble de c^2, es decir que b^2 es par. Como b^2 es par entonces b debe ser un número par también, por lo cual va a existir un entero positivo d tal que $2d = b$.

En ese caso si volvemos a la razón de $\sqrt{2}$ obtenemos $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$. Es decir que $\sqrt{2} = \frac{c}{d}$. Aplicando exactamente el mismo procedimiento para c y d podríamos conseguir otros dos enteros positivos e y f tales que $\sqrt{2} = \frac{e}{f}$ y así sucesivamente. El proceso, de nuevo, nunca acaba. ¿Pero cuál es la contradicción acá?

Tenemos dos sucesiones decrecientes de números enteros positivos y pares que no paran, por un lado $a > c > e > \ldots$ y por otro $b > d > f > \ldots$ Esto es una contradicción, pues existe un número positivo par menor que todos y en donde el proceso debería parar. Por lo tanto $\sqrt{2}$ no se puede expresar como una relación de números enteros positivos, es decir, es inconmensurable.

Es bastante clara la similitud entre el comportamiento de la antifairesis entre lado y diagonal con lo que se muestra en la demostración por contradicción. El hecho de suponer que existe una unidad alícuota en ambos casos nos encierra en un proceso cíclico que no acaba. Se cuentan muchas historias alrededor de este descubrimiento y lo que le significó a Hipaso dentro de la escuela pitagórica:

> Se dice que Hipaso habría sido condenado a perecer ahogado por haber revelado a los profanos, quizás tan sólo a los acusmáticos, que raíz cuadrada de dos no podía ser un número. Pero Proclo da una interpretación alegórica diciendo que al descubrir la irracionalidad Hipaso, se sumergió en el mar del devenir, es decir, perdió el juicio. (Gómez Pin, 2015, p. 111)

La anterior cita nos deja ver la debacle de una filosofía aparentemente sólida y de carácter sumamente racional. Con el descubrimiento de estas magnitudes inconmensurables Hipaso le quita el principio numérico a todas las cosas y pone en tela de juicio los resultados y creencias pitagóricas.

Como lo mencionamos antes, una de las consecuencias de que todo fuera conmensurable, era la extensión del punto. Los pitagóricos en este sentido habrían tenido una perspectiva discreta del universo. Al descubrir las magnitudes inconmensurables ya no tendría sentido el punto discreto y se vincula a la idea de punto una idea oscura de infinito que escandalizará a los griegos por los siguientes siglos.

1.2.6 Acercamiento de lo discreto a lo continuo

Si bien lo que conocemos como números irracionales no podía tener coherencia con el esquema discreto de los pitagóricos, la antifairesis nos permite acercarnos a la naturaleza de estas magnitudes vinculadas estrechamente con el infinito. Volvamos al problema de la diagonal y el lado de un cuadrado:

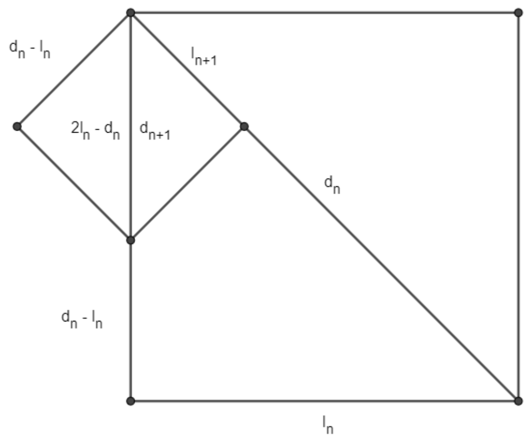


Figura 6

Podemos darnos cuenta que en este proceso iterativo, en el que vamos consiguiendo relaciones entre lados y diagonales de cuadrados cada vez más pequeños, podemos obtener una relación entre los lados y las diagonales de pasos inmediatamente siguientes. Como vemos en la figura 6, si asumimos que en el paso n-ésimo el lado del cuadrado es l_n y la diagonal es d_n entonces:

$$l_{n+1} = d_n - l_n$$
$$d_{n+1} = l_n - l_{n+1}$$

Ahora, si volteamos la relación y no construimos cuadrados cada vez más pequeños sino cuadrados cada vez más grandes y asumimos que en el paso k-ésimo el lado del cuadrado es l_k y la diagonal es d_k entonces:

$$l_k = d_{k+1} - l_{k+1} \Rightarrow d_{k+1} = l_k + l_{k+1}$$
$$d_k = l_{k+1} - l_k \Rightarrow l_{k+1} = d_k + l_k$$

Las ecuaciones se obtienen invirtiendo el orden en el que se realiza el proceso y despejando l_{k+1} y d_{k+1} en las ecuaciones anteriores.

Si asumimos, según la creencia de los pitagóricos, que este proceso termina, es decir que la unidad común existe, entonces tendríamos que en dicho proceso las magnitudes del lado y la diagonal tenderían a ser cada vez más pequeñas hasta ser prácticamente indistinguibles. Si pensáramos en la existencia del punto extenso y a su vez asumiéramos una aproximación burda a la relación de la diagonal y el lado (suficientemente pequeñas para ser indistinguibles), tendríamos una relación de 1 a 1 con lo cuál obtenemos la siguiente tabla:

k	l_k	d_k	$\frac{d_k}{l_k}$
0	1	1	$\frac{1}{1} = 1$
1	2	3	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
2	5	7	$\frac{7}{5} = 1{,}4$
3	12	17	$\frac{17}{12} = 1{,}41\underline{6}$
4	29	41	$\frac{41}{29} = 1{,}41379310..$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Tabla 1

Así que, persiguiendo este proceso de recurrencia y la relación entre las figuras geométricas que aparecían sucesivamente se podían aproximar a raíz de 2 utilizando relaciones discretas. De esta manera los primeros acercamientos griegos a la matemática dejan ver una puerta de entrada a la discusión entre lo discreto y lo continuo, además de una anticipación a la idea de una secuencia infinita de puntos que convergen, es decir a una idea anticipada de lo que hoy conocemos como límites, discusión que sólo se cerrará hasta el siglo XIX con la formalización de este concepto.

1.3 Problema del movimiento.

Las paradojas de Zenón son unas de las paradojas más conocidas de la historia. Esto por el gran espectro de problemas que se pueden abordar alrededor de las mismas. Zenón, fue discípulo de Parménides y perteneció a la escuela Eleática, en la que se fundó uno de los principios fundamentales que cimentará todo el conocimiento occidental, el principio de identidad: “Lo que es, es y lo que no es, no puede ser”. Por este principio, para Parménides, el ser deberá tener seis atributos: El ser debe ser uno (único), debe haber existido desde siempre (ingénito) y para siempre (eterno), debe ser perfecto, sin límites (infinito) y debe ser inmutable (inmóvil). Zenón planteó cuatro paradojas con el objetivo de seguir evidenciando las enseñanzas de su maestro, refutando el movimiento y poniendo un ojo agudo sobre su relación profunda con las nociones de espacio y tiempo. Además de esto Zenón, con sus paradojas, problematiza algo que ya había quedado en evidencia con las magnitudes inconmensurables, y es la idea del punto (unidad límite) como una entidad que posee extensión.

Por un lado, una de las paradojas planteadas fue la de la dicotomía, la cual expone que para recorrer una distancia primero se tiene que recorrer la mitad de esta, luego la mitad de la mitad restante, luego la mitad de la mitad restante, y así sucesivamente; pero como siempre puedo sacarle la mitad a una distancia entonces no se puede recorrer ninguna distancia porque se debe recorrer una cantidad infinita de mitades para llegar de un punto a otro. En matemáticas nos encontramos esta paradoja en el momento en el que nos preguntamos: ¿Es posible recorrer de manera creciente todos los números reales que existen entre 0 y 1? ¿Entre cualquier par de números racionales? ¿Existen dos números reales para los cuales sea posible?[3]. La relación entre estas preguntas y la paradoja se muestra en que si imaginamos un recorrido continuo sobre cualquier intervalo de la recta

[3] Haciendo un paréntesis histórico es necesario decir que la respuesta a la pregunta anterior fundamentó una de las propiedades que hoy se estudian en análisis y topología sobre los objetos matemáticos y qué aparece de manera natural al estudiar la estructura de los números racionales que es la propiedad de densidad. La propiedad de densidad de los números racionales dice “siempre existe un número racional entre dos números racionales dados” lo que implica que “existen infinitos números racionales entre dos números racionales cualesquiera”.

real siempre nos encontraremos con una infinitud de mitades por recorrer, lo que en apariencia hace imposible llegar de un punto a otro en un tiempo finito.

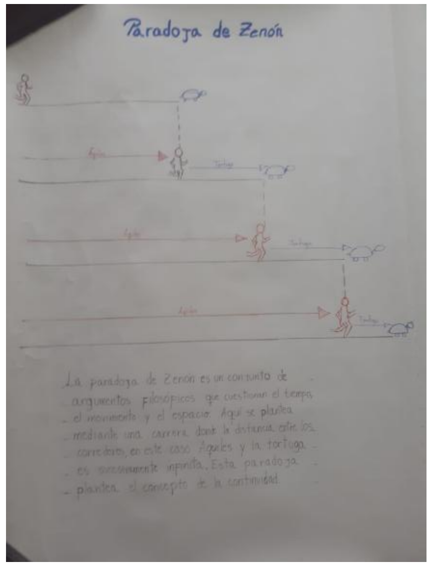


Figura 7
(hecha por estudiantes)

Por otro lado, la conocida paradoja de Aquiles y la tortuga (figura 7) plantea una carrera en la Grecia clásica entre ambos personajes, en donde Aquiles confiado en su velocidad decide darle ventaja a la tortuga y comenzar más lejos de la meta. La paradoja demuestra que, en este caso, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga pues, no importa qué tan rápido se desplace, cuando Aquiles llegue al punto donde comenzó la tortuga, la tortuga se habrá desplazado a otro punto, y cuando Aquiles llegue a ese otro punto, la tortuga llegará a un tercer punto más cercano a la meta, y así sucesivamente. El argumento vuelve a problematizar nuestra comprensión en términos espaciales y en términos temporales, en los instantes en los que Aquiles alcanza la ubicación anterior de la tortuga.

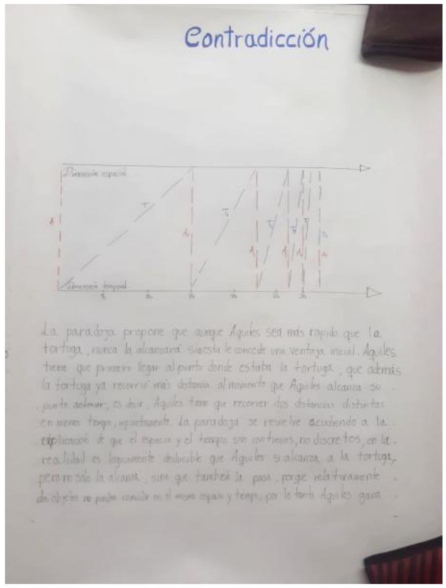


Figura 8

(Hecha por estudiantes)

En ambos casos se debe mencionar que el asunto del infinito está siendo puesto en juego en la discusión entre lo continuo y lo discreto. En matemáticas cuando hablamos de lo discreto nos referimos a un conjunto de elementos que se encuentran separados entre sí por elementos que no pertenecen al conjunto, como por ejemplo las sillas en las que se sientan los estudiantes en clase, o los colores que puedo tener en la cartuchera, y se asocian principalmente al sistema numérico natural. En contraposición a lo discreto hablamos de lo continuo cuando nos referimos a un conjunto en el cual no hay saltos entre sus elementos, cuando pese a las divisiones que se hagan sobre el conjunto las partes albergan la misma naturaleza de continuidad, ejemplos de continuidad son la línea, la recta, las superficies y se asocian con el sistema numérico real.

Habiendo hecho esta aclaración sobre la distinción entre lo continuo y lo discreto, la discusión que plantea Zenón en sus paradojas nos lleva a pensar en la relación que existe entre el infinito y estas dos nociones. Nos podemos preguntar en los problemas del movimiento planteados anteriormente si el espacio que se recorre es continuo o discreto, y a su vez si el tiempo en el que ocurre el desplazamiento tiene alguna de estas dos naturalezas. Si creyéramos que el tiempo o el espacio son continuos tendríamos que aceptar la noción de la infinita divisibilidad de las magnitudes extensas, entendiendo las magnitudes extensas del espacio como intervalos de distancia y las magnitudes extensas del tiempo como intervalos de instantes. Así podríamos traducir este problema a: ¿existen puntos extensos indivisibles en el espacio? ¿existen en el tiempo? Si la respuesta es afirmativa argumentaríamos una naturaleza discreta, si es negativa argumentaríamos que es continua.

Vamos a asumir, como lo harían los pitagóricos que el punto es extenso, es decir que tiene magnitud por muy ínfima que parezca, de ser así la longitud de la recta sería una reunión discreta de puntos, debido a que la longitud es una magnitud finita. En este caso, asumiendo que el punto es extenso, Zenón asumió que Aquiles alcanza a la tortuga en algún punto, con la intención de llegar a una contradicción. Si se asume que Aquiles partió desde un punto A, la tortuga partió desde un punto T y el punto en donde Aquiles alcanza a la tortuga se dio en el punto O, se sabe que la longitud AO es mayor que la longitud TO. Es más, se sabe que la longitud TO hace parte de la longitud AO. Ahora si se toma al tiempo que le tomó a Aquiles alcanzar a la tortuga como una reunión discreta de instantes (puntos temporales), lo que se estaría afirmando es que la cantidad de puntos temporales relacionarían cada uno de los puntos de AO y TO, es decir, si tomáramos los instantes indivisibles del tiempo y a ellos le asignamos la magnitud que tanto Aquiles como la tortuga recorre en ese tiempo, estaríamos encontrando una relación biunívoca entre los intervalos de distancia que recorre Aquiles y los que recorre la tortuga. Lo que demostraría que el todo AO puede ser igual a la parte TO, pues existe una correspondencia entre ambas longitudes, encontrando la contradicción. Este argumento va a ser retomado después por Galileo y posteriormente por Cantor, por lo cual más adelante lo volveremos a tratar. Por el momento se puede observar una representación gráfica de este hecho en la figura 8.

Por otro lado, si se asume que el punto no es extenso, pensaríamos en una línea recta continua infinitamente divisible y sucedería lo planteado en las paradojas de Zenón. Acá el problema sería pensar en la infinitud, pues podríamos pensar que el espacio que me separa del árbol al que quiero llegar tiene infinitos puntos e infinitos segmentos de recta cada vez más pequeños que debo recorrer antes de llegar a él (dicotomía). Es claro que para Zenón el problema de estos argumentos es que desembocan en un proceso infinito, lo que para los griegos resultaba inconcebible y contradictorio por lo cual lo descartaron.

Podríamos ignorar este horror a que las cosas sean infinitas de los griegos, e identificar como nuevo problema a la constitución infinita de un objeto visiblemente finito, como lo sería una distancia, un segmento de recta, o bien un lapso de tiempo. Resulta anti-intuitivo creer que una suma infinita de distancias constituye una distancia finita. Tanto el problema de la dicotomía, como el de si Aquiles alcanza o no a la tortuga derivan en la pregunta de ¿Si la acumulación infinita siempre deriva en algo infinito?[4]

$$¿\sum_{i=1}^{\infty} a_i \to \infty?$$

¿Sería paradójico pensar que una suma infinita puede tener un resultado finito?

Para resolver esta contradicción aparente fue necesario entrar en el terreno matemático mediante el análisis de la convergencia de series infinitas, específicamente las series geométricas. La noción de sumar infinitos términos se exploró rigurosamente en el siglo XVII con el desarrollo del cálculo infinitesimal, pero antes fue trabajada por un matemático medieval llamado Nicolás de Oresme en el siglo XIV. De Oresme se dedicó a estudiar el campo de las sucesiones y las sumas infinitas y demostró que, a pesar de su naturaleza aparentemente ilimitada, ciertas sumas infinitas pueden converger hacia un valor finito como se muestra enseguida.

1.3.1 Series geométricas

Retomemos la paradoja de la dicotomía y supongamos que se tiene que recorrer una distancia de longitud de 1 km, a una velocidad constante de 1 km/h. El argumento de Zenon diría que como debo recorrer infinitos segmentos (debido a la continuidad del espacio) no terminaría nunca de recorrer dicho espacio. Sin embargo, matemáticamente para recorrer la primera distancia se necesitaría de media hora, luego de un cuarto de hora, luego de un octavo de hora, y así sucesivamente. Por lo tanto se tendría:

$$\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h + \frac{1}{16}h + \frac{1}{32}h + \ldots$$

[4] Las paradojas de Zenón en realidad son cuatro, en el texto se exponen dos, la de “la dicotomía” y la de “Aquiles y la Tortuga” debido a su relación con la continuidad del espacio. Sin embargo, las otras dos paradojas la de “la flecha” y la de “el estadio” asumen una posición más pitagórica en la que el tiempo y el espacio se componen de elementos puntuales e indivisibles. Característica que ya problematizamos en el texto.

En matemáticas esto se puede expresar de manera sintética con el signo de sumatoria Σ :

$$\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h+\frac{1}{8}h+\frac{1}{16}h+\frac{1}{32}h+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h$$

Donde el subíndice k indica donde inicia el término de la sumatoria y el superíndice indica en este caso que no termina. La pregunta ahora es ¿El resultado de esta suma puede ser un resultado finito? ¿Hay un tiempo en el que se termina de recorrer ese km?

Nicolás de Oresme se dio cuenta de que si le sacaba el primer término a este tipo de series, como todos los términos están en una razón multiplicativa, la serie que queda respeta la razón de la distancia entre los términos de la serie.

$$\frac{1}{2}h+(\frac{1}{4}h+\frac{1}{8}h+\frac{1}{16}h+\frac{1}{32}h+\ldots)=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h$$

Si se dividen los términos de la sucesión restante por el factor que los separa

$$\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h+\frac{1}{8}h+\frac{1}{16}h+\ldots)=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h$$

De nuevo vuelvo a obtener la serie original. Lo que se relaciona con una propiedad que tienen algunos objetos especiales a la que se conoce como propiedad de auto semejanza.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h=\frac{1}{2}h$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,(1-\frac{1}{2})h=\frac{1}{2}h$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h=\frac{1}{2}h$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k}\,h=\frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}}=1h$$

Con lo cual se demuestra que, aunque haya infinitos puntos que recorrer entre dos puntos dados, el tiempo que se puede demorar algo o alguien en recorrerlo es finito.

Es justamente la propiedad de la auto semejanza la que permite establecer un camino deductivo (matemático) para establecer que no toda suma infinita de términos es infinita. A las series infinitas que tienen un resultado finito se las llama en matemáticas series convergentes. A estas series que tienen una relación constante (razón) entre los términos sucesivos de la serie se las llama series geométricas, para las cuales ya se han demostrado los criterios de su convergencia.

Para a que pertenece a los números reales

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + \sum_{k=1}^{\infty} ar^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + r\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k - r\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k\,(1-r) = a$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Converge cuando $1 > r > 0$

La capacidad de las series geométricas para converger hacia un valor finito fue fundamental para darle una solución plausible al desafío planteado por Zenón cuando consideramos que el espacio es continuo. Pero lo que queda en evidencia con estas paradojas es que más allá de las consideraciones y posibles soluciones que se le puedan dar, también significan la denuncia a una comprensión todavía inacabada de la relación entre lo continuo y lo discreto, y cómo dicha relación tiene un fuerte vínculo con el estudio del infinito.

1.4 Principios lógicos de Aristóteles. Menciones a la lógica y al horror al infinito.

1.4.1 Filosofía platónica

Para hacer una introducción adecuada a la lógica aristotélica es necesario primero hablar de quien fue su maestro. Platón fue discípulo de Sócrates quien desplazó las búsquedas de la filosofía de las preguntas por los principios materiales a preguntas con un carácter más social, sobre la ética, la moral, el amor, la valentía, la justicia y el modo de vivir del ser humano. En este sentido Platón estuvo muy influenciado por la filosofía de su maestro, tanto que lo convirtió en el protagonista de muchos de los diálogos que escribió. Sin embargo, cuando Sócrates fue condenado a beber cicuta, se dice que viajó por distintos lugares de Grecia, fue a Egipto y conoció también el sur de lo que hoy conocemos como Italia, en donde se encontró con Arquitas de Tarento quien era un pitagórico y un geómetra reconocido de la época. Se cree que la amistad con Arquitas influenció a Platón para adentrarse en el conocimiento geométrico y matemático y volverse un amante de estas disciplinas.

Una vez Platón vuelve a Atenas, funda una escuela que llama la Academia, en la que, gracias a las influencias de sus viajes, pone una máxima en la entrada que decía “nadie entre aquí si no sabe geometría”. Esta máxima puede tener relación con la fuerte conexión que tiene su filosofía con las concepciones pitagóricas, debido a que para Platón también hay una existencia de un segundo mundo en donde viven las entidades matemáticas, y además de ellas también van a ocupar ese mundo las ideas universales y generales, configurando así el famoso mundo de las ideas o formas platónicas.

Esta filosofía asume la existencia de este segundo mundo en el cual viven universales que describen cualidades y propiedades sobre el mundo fáctico de las entidades concretas, y que nos permiten desarrollar procesos de pensamiento para comprenderlas. La idea del isomorfismo de Pitágoras se transforma en las ideas platónicas en procesos de “participación”, así la flor azul participa en las ideas de flor y de azul, como una mesa particular participa en la idea de rectángulo. Con esto, para Platón el lenguaje juega un papel fundamental en el conocimiento debido a que nos permite percibir y relacionar las ideas con los objetos sensibles del primer mundo. Para él también existe una capacidad humana que llama “intuición” (nous), que nos permite acceder a las ideas perfectas del segundo mundo de manera certera e infalible. De esta manera, el proceso de conocer, lo relaciona con un proceso que llama anamnesis y que estará relacionado con el tema de la inmortalidad del alma humana, en el que Platón expone que todos los seres humanos somos capaces de acceder a todas las categorías universales del mundo de las ideas porque nuestra alma ya ha estado en contacto con ellas; solo tenemos que “recordar”. Los estudios geométrico-matemáticos sirven en la Academia como una preparación y una práctica de nuestra herramienta intuitiva para acceder a las verdades del mundo y como lo diría Platón mirar al mundo con los ojos de la inteligencia.

Para finalizar, pues el interés de este apartado no es explayarse sobre la filosofía de Platón, se mencionan dos críticas a esta concepción del conocimiento como introducción a las consideraciones de la filosofía Aristotélica. La primera, denominada “daltonismo de las esencias” se refiere a que, en el uso del lenguaje, dos personas pueden entender diferentes cosas (acceder a esencias distintas) con la misma palabra, es decir, si en una conversación se habla de línea, una persona podría entender que se refiere a una línea recta continua y la otra persona podría pensar en una curva punteada a lo que nos preguntaremos ¿Quién accede a la versión más auténtica de la idea?

Por otro lado, hay otra crítica mucho más moderna, a la idea rígida presentada por este mundo de las esencias que habitan el segundo mundo, que tiene que ver con la historia de las ciencias. Si la humanidad tuviese la capacidad de intuir y acceder a cada vez más universales e ideas perfectas, el conocimiento sería acumulativo y la ciencia progresaría de una manera más lineal a través del tiempo. Sin embargo, la historia de la ciencia muestra que esto no es así, la ciencia ha ido evolucionando a partir de teorías y conjeturas que se posan a veces unas sobre otras pero que en ocasiones acontecen en cambios de paradigmas que requieren una reestructuración y revisión de las bases que sostienen las teorías.

1.4.2 El espacio geométrico es real

La academia tuvo una influencia gigantesca en la antigua Grecia y acogió a grandes alumnos que desarrollaron importantes contribuciones a la geometría, como lo fueron Teeteto con su estudio de los sólidos platónicos y Eudoxo de Cnido con su teoría de las proporciones y la invención del método de exhaución. Sin embargo, el más ilustre de los alumnos de Platón no tuvo una fijación especial sobre los conocimientos geométricos y matemáticos; en cambio de eso, tomó una particular distancia de las ideas de su maestro y las cuestionó fundando una nueva corriente filosófica.

Aristóteles, es uno de los filósofos más conocidos de la historia, considerado precursor de muchas de las disciplinas que se estudian hoy en día como lo son la biología y la lógica. A menudo considerado como el primer científico debido a la caracterización que hace de la ciencia, formulando 10 postulados sobre el conocimiento científico que trataremos más adelante.

Lo primero que diremos de Aristóteles es que, a diferencia de Platón, no se encuadra en la visión pitagórica que dictamina la existencia de un segundo mundo en donde se encuentra el espacio geométrico y las entidades matemáticas como punto, recta y plano. A diferencia de su maestro él no cree en ese segundo mundo (en el mundo de las Ideas). Para Aristóteles los objetos que estudia la matemática derivan como abstracciones de objetos concretos del mundo, que están sujetos a nuestros sentidos, es decir, no es que la flor y el cielo participen de una idea perfecta e inmovil del azul, si no que a partir de la observación del cielo y la flor se puede abstraer su color azul, rechazando las particularidades y diferencias que tienen los objetos. De esta manera lo que propone es apartarnos de una filosofía trascendental en la que las cosas reales se encuentran por fuera de nuestros límites humanos, y acercarnos a un entendimiento más concreto y sensible de la realidad y de las cosas que están ahí, una filosofía inmanente.

En este sentido, Aristóteles es el primer autor en hablar del proceso de inducción, es decir, el proceso de observar un fenómeno aislado un número considerable de veces y a partir de ahí realizar una abstracción que permita hacer una generalización sobre el género al que pertenecen los elementos observados. Por ejemplo, la observación reiterada de la puesta del sol en la misma ubicación geográfica nos permite realizar una generalización y decir "todos los días, el sol se pone en el occidente". El conocimiento entonces está vinculado a la mediación que tenemos del mundo por medio de nuestros sentidos y lo que podemos pensar de él por medio de abstracciones.

Si bien Aristóteles le da primacía a una filosofía inmanente, en donde la esencia de un objeto está dentro del mismo objeto y no por fuera de él, esto también quiere decir que la esencia de las cosas puede ser trabajada por meras abstracciones y allí es donde introduce la importancia de unas herramientas deductivas que nos permitan razonar de manera correcta. Y es allí, donde vive la importancia de la lógica, la geometría y la matemática para Aristóteles. Aun cuando los elementos del espacio son meras abstracciones de objetos que constituyen la realidad, se trabaja con ellos para establecer relaciones que nos muestran verdades también del mundo real. La importancia del pensamiento geométrico para él sigue siendo la del buen razonar como lo era para su maestro, y así va a rastrear cómo constituir las bases de lo que hoy conocemos como lógica.

1.4.3 ¿Existe el infinito?

Aristóteles es uno de los filósofos que, en sus escritos, da testimonios de ideas de antiguos filósofos para discutirlas y comentarlas. Gracias a él, muchas ideas de pensadores presocráticos fueron recopiladas en sus libros y se conservan hasta el día de hoy. En esas discusiones, trabaja en su libro *Física* las preguntas: ¿El infinito existe? ¿De qué modos existe? y ¿En qué sentido hay que tomar esta relación?

Comienza esta exploración del concepto estudiando la palabra que utilizaban en esa época para referirse al infinito, el "á*peiron*". En griego, la raíz de la palabra "*peiron*" o "*pairon*" tiene relación con las ideas de "atravesar", "límite", "extremidad", "atadura". Y el prefijo "*a*" en griego se utilizaba para referirse a la negación de algo, entonces Aristóteles va a trabajar con la idea de que el "á*peiron*" tiene que ver con la idea de lo que no se puede atravesar, lo que no tiene límite, lo que carece de extremidades y lo que no posee atadura alguna. En este sentido, relaciona al infinito (á*peiron)* con la idea de la imposibilidad y con todas las palabras que refieren una suerte de imposibilidad, como la imposibilidad de ver, es decir lo invisible; la imposibilidad de imaginar, es decir lo inimaginable; la imposibilidad de expresar con palabras, es decir lo inefable; la imposibilidad de concebir una idea, es decir lo inconcebible; y la imposibilidad de encontrar una magnitud común a dos magnitudes dadas, la inconmensurabilidad. Todas y cada una de estas ideas son, para Aristóteles, formas y figuras que encierran dentro de su esencia al infinito.

Pero no para ahí, el infinito puede vivir en una combinación entre posibilidades e imposibilidades, se discute que el infinito también puede ser lo que se puede recorrer, pero a su vez no tener un fin. Por ejemplo, el recorrido que puede hacer una pequeña hormiga sobre una superficie esférica o sobre un anillo, o yendo a figuras más modernas el que se puede hacer sobre una cinta de Möebius o una botella de Klein. En todos estos espacios la hormiga puede hacer el recorrido, pero la naturaleza de estos hace que el camino no termine nunca. Este es un buen ejemplo de la relación que puede tener lo finito con lo infinito, así como las clásicas preguntas que salen en las clases de geometría: ¿el círculo es un polígono regular? ¿Si es así, el número de lados de un círculo es 0 o es infinito?

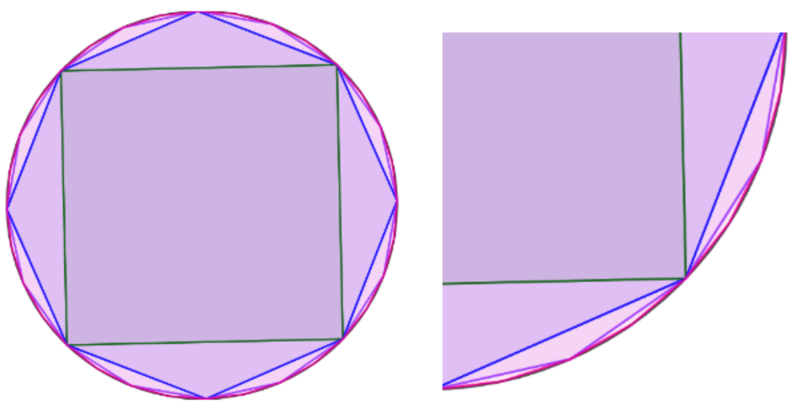


Figura 9

En la figura anterior se muestra el proceso de exhaución propuesto por Eudoxo para aproximarse a la circunferencia por medio de segmentos rectos que conforman los lados de un polígono regular.

Continuando con las consideraciones de Aristóteles alrededor de la idea de lo infinito, formula una serie de distinciones entre diferentes maneras de clasificar este concepto. La primera de estas distinciones que tiene en cuenta es la de que todo infinito lo es o por composición (adición) o por división. Es decir, un infinito tiene la potencia de seguirse constituyendo por agregaciones que no acaban nunca, por ejemplo, el tiempo temporizado en minutos que se suceden unos a otros como los números naturales. Y, por otro lado, un objeto o elemento que se pueda seguir dividiendo indefinidamente como lo que ocurre con el espacio en la ya expuesta carrera entre Aquiles y la tortuga y también en la paradoja de la dicotomía, y que está vinculada directamente con la noción que tenemos de continuidad.

La segunda distinción que realiza está mucho más enfocada a la pregunta sobre la manera en la que existe el infinito. En ese sentido, el infinito podría tener la cualidad de existir *per se*, es decir siendo algo que existe actualmente, en acto; y por otro lado dice que podríamos haber percibido la existencia del infinito de manera potencial, es decir, a partir de fenómenos que invitan a la ilusión de carecer de límites por su continua generación y/o deterioración. Para Aristóteles, el ejemplo más claro que tiene de las primeras intuiciones del infinito es el tiempo, pues es protagonista en el mundo de la naturaleza de “generaciones y corrupciones”, de posibilidades e imposibilidades.

Acá, es pertinente detenerse y discutir con cuál de las dos nociones identificamos la existencia del infinito, y resulta que también eso va a depender del tipo de filosofía en la que nos apoyemos. Para Platón la idea del infinito existiría en acto en el segundo mundo, como una idea perfecta, y las nociones del tiempo, el espacio, el cielo y el universo que se presentan ante nuestros sentidos sólo estarían participando de ella, en este caso Platón estaría de acuerdo con afirmar que el infinito es una substancia. Por otro lado, desde la perspectiva aristotélica, el infinito no puede ser substancia en cuanto no existe como una entidad total en el mundo, sobre la cual yo puedo afirmar cosas, observar o sentir; más bien es un atributo que yo puedo darle a lo no recorrible, a lo inefable, a lo inconmensurable, a lo imposible, a lo potencialmente infinito. La idea de potencia del infinito, no estaría significando para Aristóteles lo que puede llegar a ser en acto, como la piedra que potencialmente puede ser esculpida en estatua. En cambio, el ser en potencia del infinito estaría significando una existencia en pleno movimiento, en el devenir de las cosas, algo que siempre está siendo distinto, y por eso es que el tiempo resulta protagonista.

En este sentido, se hace una distinción entre número y magnitud. Un número, como mera abstracción del mundo, no puede ser nunca infinito, por grande que sea, pues la idea de enumerar alguna cantidad real se contradice con una cantidad innumerable, es decir, no le podemos asignar un número al infinito. Sin embargo, por otro lado, la idea de la magnitud sí estaría íntimamente ligada a la de ser potencialmente infinita por su cualidad de ser indefinidamente divisible (continuidad).

Nos encontramos con un problema sobre la existencia del infinito, pues negar la existencia del infinito parece igual de problemático que asumirla. Si el infinito existiera, entonces al dividirlo, toda parte de él también sería infinita, lo que contradeciría un principio que Aristóteles toma como cierto y que discutiremos más adelante: “El todo siempre es mayor que la parte”. Y, si negamos que el infinito existe, significa que el tiempo tendría límites, (comienzo y fin) y además negaría la existencia de las magnitudes inconmensurables que tratamos en capítulos anteriores.

En este sentido, para Aristóteles el infinito resulta ser un concepto que encierra dentro de sí una gran contradicción, y es en sí mismo una contradicción. Por esto se suele hablar del “horror al infinito” de los griegos, pues al estudiarlo siempre se encontrarán antinomias y para Aristóteles lo mejor será dejarlo por fuera de sus consideraciones para establecer el método demostrativo.

1.4.4 Antinomias y principios lógicos

Para terminar esta parte, quisiera mencionar un par de antinomias en términos argumentativos, que el mismo Aristóteles menciona que hay que evitar en todo tipo de razonamiento sobre una ciencia, por el mismo “horror al infinito”. Las va llamar petición de principio y regresión al infinito, y dirá de ellas que son razonamientos o deducciones que no son válidas.

La petición de principio es una figura en la que lo que se quiere concluir se asume y hace parte del argumento, y se forma un argumento circular. El más común de los ejemplos es cuando dentro de una discusión se asume como cierto lo que se desea probar. Por ejemplo:
“Sócrates no miente cuando habla

Sócrates está hablando

Por lo tanto, Sócrates está diciendo la verdad.”

Por otro lado, la regresión al infinito se trata de prolongar indefinidamente la justificación (deducción) de una afirmación por medio de proposiciones anteriores, una detrás de otra. Para imaginarlo, se puede recordar el ejercicio de los niños menores que preguntan el porqué de todas las cosas, y a la respuesta del interpelado siempre existirá de nuevo la pregunta de “¿por qué?”. Por ejemplo, en la siguiente figura se expone una prueba de que “1=2” siguiendo este tipo de razonamiento:

$$\text{"}1=2\text{"} \xleftarrow{-1} \text{"}2=3\text{"} \xleftarrow{-1} \text{"}3=4\text{"} \xleftarrow{-1} \text{"}4=5\text{"} \longleftarrow \cdots$$

Figura 10

Para evitar este tipo de antinomias Aristóteles propone que toda ciencia debe partir de un número finito de principios (axiomas) que no requieren de demostración con el fin de detener una regresión al infinito, como también de una colección finita de definiciones de los objetos que trabaja dicha ciencia. Estos principios deben tener la característica de ser evidentes ante nuestros sentidos para poder asumirse como verdaderos y para desde allí poder construir y argumentar otras verdades por medio de procesos deductivos.

Aristóteles además de ello, propone tres principios lógicos que son necesarios para el proceder en una ciencia que quiera ser lógica. A continuación, para finalizar este apartado, se enuncian los tres principios para ser discutidos más adelante.

1. Principio de identidad: El principio de identidad dice que todo objeto es idéntico a sí mismo y en una traducción simbólica se expresa como A=A para todo A.

2. Principio de no contradicción: El principio de no contradicción menciona que no puede pasar que una proposición sea verdadera al mismo tiempo que lo es su negación. Y se expresa simbólicamente como: para toda proposición p se tiene que $\neg(p \wedge \neg p)$.
3. Principio del tercero excluido: El principio del tercero excluido propone la inexistencia de una tercera opción además de la proposición p y su negación $\neg p$. Simbólicamente se expresa como: para toda proposición p se tiene que $p \vee \neg p$.

1.5 Los elementos de Euclides como primer intento de sistematizar el conocimiento geométrico. Aparición de las geometrías no euclidianas.

1.5.1 Los Elementos de Euclides

Históricamente Aristóteles y Euclides nacieron en el mismo siglo, Euclides (325 a.C) siendo por más de medio siglo más joven que Aristóteles (384 a.C). No se sabe con certeza si Euclides conoció la teoría Aristotélica o alcanzó a leer sus escritos como Física y Órganon, en los que toca temas antes mencionados sobre la lógica y la ciencia. Puede haber sucedido, como también puede que nos encontremos ante uno de esos escenarios históricos especiales en los que el conocimiento encuentra en dos personajes distintos las mismas apuestas teóricas.

Euclides es conocido como uno de los grandes geómetras de la antigüedad debido a la escritura del libro titulado Elementos, donde va a sistematizar toda la geometría conocida hasta ese momento en el mundo griego por medio de un número limitado de definiciones, nociones comunes y postulados (principios) con el objetivo de hallar razonamientos y argumentaciones válidas de los resultados más importantes de la geometría antigua.

Se dice que el libro de los Elementos es uno de los libros más famosos de la historia, de hecho, se suele afirmar que es el segundo libro más leído en los últimos dos milenios después de la Biblia. Esto ocurre debido a su alto valor pedagógico de la geometría plana, y a él le debemos que la educación en geometría que se tiene en la escuela básica y media sea justamente sobre la geometría del plano (triángulos, círculos, polígonos, paralelas, perpendiculares).

También, históricamente se ha trabajado sobre la pregunta acerca de la filosofía que encarna el trabajo expuesto en los Elementos, si Euclides se identificaba más con la filosofía de Platón o con la de Aristóteles. Esta discusión puede llegar a ser extensa e inútil, pues lo que se puede ver en su obra es que trabaja con objetos abstractos sin llegar a mostrar alguna aplicación concreta, lo que resonaría con las ideas platónicas; sin embargo, los movimientos y superposiciones que hace de las figuras en algunas demostraciones también estarían intuyendo un mundo real, además de que su método demostrativo a partir de axiomas, definiciones y teoremas responde a planteamientos también hechos por Aristóteles. Por lo que lo más acertado que se puede afirmar es que tiene una perspectiva que comparte ambas propuestas de pensamiento.

1.5.2 El quinto postulado de Euclides

Euclides llama postulados a algunos de sus principios, tratándolos como los axiomas que proponía Aristóteles que debe tener cada ciencia. A su vez, Euclides también intenta definir todos los elementos con los que va a trabajar y formula definiciones como que el punto es lo que no tiene partes, la recta es una longitud que carece de anchura y el plano es aquello que teniendo longitud y anchura carece de altura. Además, va a llamar nociones comunes a algunas herramientas de deducción como la de “Figuras iguales son iguales si se les agrega algo igual” o “Figuras iguales son iguales si se reducen en partes iguales”, lo que para nosotros hoy en día correspondería a propiedades de homogeneidad.

Con la anterior base, plantea los siguientes postulados:

1. Primer postulado: Dos puntos determinan una recta.
2. Segundo postulado: Todo segmento de recta es indefinidamente prolongable.
3. Tercer postulado: Existe una circunferencia de cualquier centro y cualquier radio.
4. Cuarto postulado: Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Quinto postulado: Dada una recta m transversal a otras dos rectas dadas l_1 y l_2, de manera que la suma de los ángulos α y β, generados al interior de

l_1 y l_2 y del mismo lado de m, es menor a la suma de dos ángulos rectos, entonces las rectas l_1 y l_2 se cortan de ese lado de la recta m.

Lo primero que podemos observar de los postulados propuestos por Euclides es que sigue persistiendo un miedo a asumir una recta en su totalidad; el segundo postulado demuestra que se asume como infinita en potencia. Lo segundo, que hay un postulado que resalta entre los otros 5 por su largo enunciado y su complejidad. A continuación, se presenta una versión gráfica del mismo:

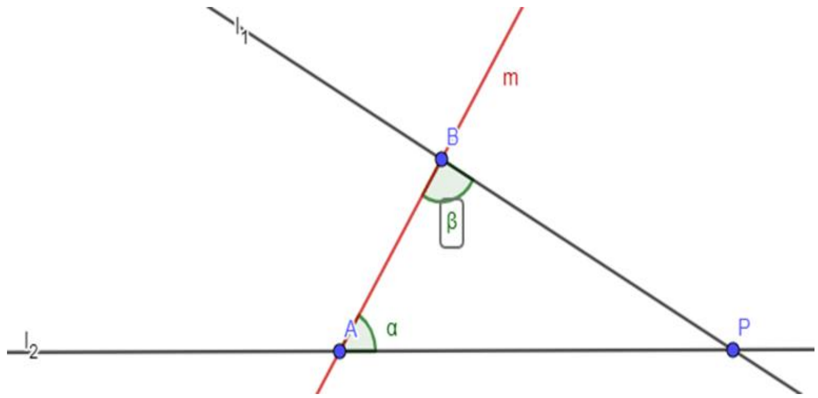


Figura 11

En donde los ángulos α y β son ángulos cuya suma debe ser menor a la de dos rectos, lo que hoy se podría traducir mediante $m(\alpha) + m(\beta) < 180°$.

Varios geómetras de distintos periodos históricos no sólo denunciaron la complejidad del quinto postulado, también lo cuestionaron por la manera en la que lo usó Euclides en sus demostraciones, pues de todos los problemas y teoremas que trabajó en el primer tomo de los *Elementos* no es sino hasta el teorema 29 que ve la necesidad de emplearlo. Para muchos este hecho resultaba de lo más extraño.

"Diríamos que todo sucede como si en una determinada religión encontráramos un dios de la lluvia, otro del fuego, un tercero de la tierra y un cuarto del mar, pero además un dios cuya única finalidad específica es la de curarle un particular resfrío a un determinado rey. Una divinidad destinada exclusivamente a ello parece un tanto excesiva." (Klimovsky, 2005, p. 90)

Un axioma para curar un procedimiento particular en una demostración, así lo intuyeron los críticos del quinto postulado.

El Teorema 29, siguiendo el orden que plantea el libro de los *Elementos,* es el recíproco del Teorema 28. Los anteriores además son resultados frecuentemente enseñados y conocidos por estudiantes y profesores en clase de geometría en educación media como congruencia de ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes (figura 14). A continuación, señalamos sus enunciados:

Teorema 28: Si la suma de los ángulos internos de un lado de la secante a dos rectas dadas es igual a la de dos ángulos rectos entonces las rectas son paralelas.

Teorema 29: Si dos rectas son paralelas entonces la suma de los ángulos internos de un lado de la secante a las dos rectas paralelas es igual a la de dos ángulos rectos.

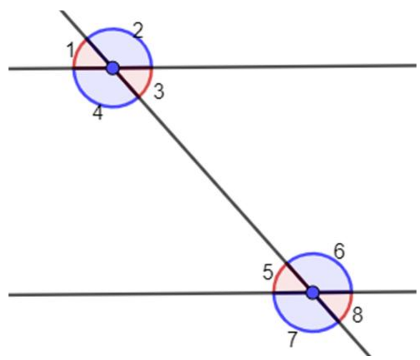


Figura 12

Muchos resultados posteriores que demostrará Euclides para trabajar sobre cuadriláteros (paralelogramos, trapecios) y circunferencias no utilizan directamente el postulado 5 de Euclides, en vez de eso utilizan el teorema 29. Si se hace un estudio detallado de lo que dicen los enunciados de ambos teoremas, se puede observar que están hablando de un caso límite del postulado de las paralelas, en el que la suma de ambos ángulos es justamente 180°. Por este motivo lo que se ha de denunciar es que el quinto postulado intenta señalar un “síntoma” de algo que sucede cuando dos rectas son paralelas.

Alberto Campos, en su libro Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática hace un recorrido detallado sobre pensadores, matemáticos y geómetras que estudiaron el problema del quinto postulado y propusieron reflexiones alrededor del mismo. Por el objetivo de este escrito, no hablaremos de todo el conocimiento y las hipótesis que generó este problema, pues fue estudiado por 20 siglos. Sin embargo, haré algunas menciones a algunos personajes por la propuesta que realizan.

Hasta el momento, no se ha propuesto una definición de rectas paralelas en este capítulo. Posidonio, astrónomo y filósofo griego, encontró en la definición de Euclides de rectas paralelas, "se dice que dos rectas son paralelas si al prolongarlas continuamente en ambas direcciones nunca se van a cruzar", que en ella se encerraba la noción de equidistancia, es decir, dos rectas que siempre van a guardar la misma distancia entre ellas y por eso nunca se van a encontrar. De este hecho parece que la versión va a quedar parcialmente viciada, lo que va a impedir una percepción distinta y creativa de rectas paralelas.[5]

También es importante mencionar que en los Elementos el teorema 32 se refiere también a uno de los célebres resultados que se enseñan en geometría hoy en día, "la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°". Esta afirmación aparece luego del teorema 29 porque también depende de la aceptación del quinto postulado de Euclides, y de hecho, históricamente, más adelante se menciona como una equivalencia lógica a él. A continuación se muestra una demostración gráfica del enunciado en la figura 13:

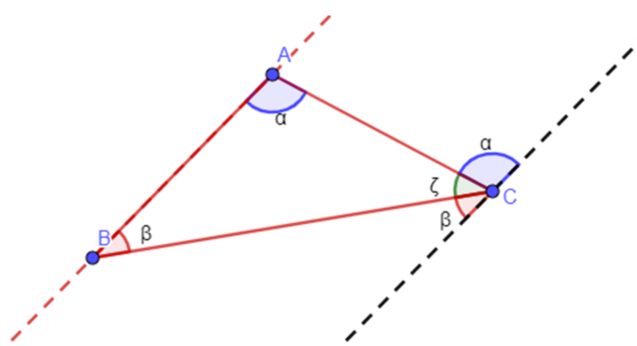


Figura 13

Si se traza una recta paralela al lado $\overline{AB}$ del triángulo $\triangle ABC$ que pase por el vértice C entonces aplicando el teorema 29 tendríamos que $\alpha + \beta + \zeta = 180°$.

---

[5] Es necesario mencionar que en la época de Posidonio (S. II a.C), ya se conocía el trabajo del famoso geómetra Apolonio sobre las llamadas secciones cónicas, en las que se incluye la hipérbola, figura constituida por dos líneas que no se cruzan y no son equidistantes.

1.5.3 ¿Demostración del quinto postulado?

Como ya lo hemos mencionado, el quinto postulado fue históricamente cuestionado por su complejidad con respecto a los otros 4, lo que ocasionó la creencia de que podía ser demostrado mediante el uso de los otros postulados. Son muchos los pensadores que se embarcaron en esta tarea por más de dos milenios, obteniendo en su mayoría una demostración en la que se tenía que asumir un resultado equivalentemente lógico al quinto postulado, es decir, sólo estaban cambiando el enunciado, pero no su valor lógico. Personajes como John Wallis (1616-1703) lo cambiaron por "la existencia de figuras semejantes de cualquier magnitud", pero finalmente John Playfair (1748-1819) enunció la manera en la que en la actualidad conocemos y utilizamos dicho enunciado: "Por un punto exterior a una recta dada, pasa una única paralela".

También el problema tuvo un especial interés en el mundo árabe que contribuyó fuertemente en materia de geometría y álgebra en la llamada edad media europea. Personajes importantes como Omar Jayam (1050-1123) y Nasir Al Din (1201-1274) trabajaron sobre la propuesta de entender el postulado por medio de los ángulos internos de un cuadrilátero de lados paralelos. Rescatando esta idea, el sacerdote y matemático Gerolamo Saccheri (1667-1733) propuso una prueba por contradicción del quinto postulado de Euclides utilizando el cuadrilátero que luego llevaría su nombre por el importante avance que consiguió. Sin embargo, luego fueron encontradas inconsistencias en uno de los casos que trabajó.

A continuación, se muestra el razonamiento que hizo Saccheri:
Lo primero para mencionar es que Saccheri asume las 23 definiciones de Euclides, los 4 primeros postulados, los primeros 28 teoremas de los Elementos y la negación del quinto postulado con el fin de realizar una demostración por reducción al absurdo.[6] Comienza por realizar la construcción del cuadrilátero mostrado en la figura 14:

[6] Saccheri también asume las hipótesis de la infinitud y continuidad de la recta, además del postulado de Eudoxo-Arquímedes que no se explican en este texto con el fin de no hacer más compleja la explicación.

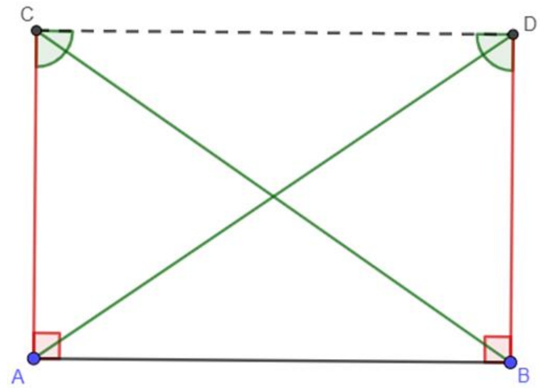


Figura 14

Toma un segmento $\overline{AB}$ y construye dos segmentos perpendiculares a él sobre los vértices A y B de tal modo que sean congruentes entre ellos (segmentos$\overline{AC}$ y$\overline{BD}$). Para finalizar construye el segmento $\overline{CD}$ y las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ del cuadrilátero generado. Sin la ayuda del quinto postulado, no puede hacer afirmaciones sobre los ángulos superiores del cuadrilátero, por lo cual realiza el siguiente razonamiento: Afirma que $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ debido al criterio de congruencia Lado-Ángulo- Lado, por lo cual las diagonales en el cuadrilátero resultan ser congruentes, y por último remata el procedimiento afirmando que por criterio Lado-Lado-Lado se tiene que $\triangle ACD \equiv \triangle CBD$, de lo cuál concluye que los ángulos superiores del cuadrilátero deben ser congruentes entre sí.

Después de haber demostrado la congruencia entre los ángulos superiores del cuadrilátero, Saccheri propone hacer una división del problema en tres casos. Existen tres posibilidades para los ángulos a estudiar: que los ángulos sean rectos, que sean obtusos o que sean ángulos agudos.

1. Primer caso: Si los ángulos son rectos Saccheri podría demostrar que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son equidistantes de donde obtendría que son paralelos y contradeciría la negación del quinto postulado. Absurdo.

2. Segundo caso: Si asume que los ángulos son obtusos llega a que no todo segmento es indefinidamente prolongable, contradiciendo así el segundo postulado. Absurdo.[7]
3. Tercer caso: En el tercer caso en el que se asume que los ángulos son agudos, Saccheri no pudo encontrar contradicción alguna, de hecho, desarrolló varios resultados con la base de los primeros 4 postulados y la negación del 5. Aunque no llegó a encontrar la contradicción que le permitiría cerrar su propuesta de forma exitosa si proclamó que esta asunción debía ser falsa, pues los resultados a los que había llegado desnaturalizaban a las líneas rectas.

El avance que hizo Saccheri llegando a las últimas consecuencias de asumir el quinto postulado como falso abrió nuevos caminos para abordar este problema y dejó el precedente de tres casos que serían de vital importancia en la posteridad. Al respecto de los aportes de Saccheri Alberto Campos menciona:

> “Pero con su proceder, comenzó a acostumbrar a los geómetras a no escandalizarse de la idea, y, en cierta manera, provocó posteriormente a éstos, a dar el paso al mundo de las posibilidades, desde el de la realidad, que era el que todos pensaban estar idealizando” (Campos, 2008, pág. 25)

Pasarían casi dos siglos para que apareciera por primera vez la mención de una nueva manera de hacer geometría de la mano de Janos Bolyai, Nikolai Lovachevsky y Carl Gauss. Los tres personajes parecen haber tenido la misma sospecha de que el quinto postulado no se podía demostrar por medio de los otros cuatro y llegaron a resultados tan extraños como a que “la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que la suma de dos ángulos rectos”. Este es un clásico ejemplo de la ciencia en donde distintas personalidades en distintas partes del mundo desarrollan la misma teoría. Por lo extravagante de los resultados que iban obteniendo la publicación de los trabajos sobre

[7] Esta demostración está expuesta en el libro de Alberto Campos *Introducción a la historia y a la filosofía de las matemáticas*.

esta geometría fue duramente criticada y censurada por el mundo científico y matemático ¿Cómo era posible creer en una geometría distinta de la que había acompañado a la humanidad por más de 2000 años? Para los críticos, dichos resultados por mucho tiempo no fueron más que juegos y artimañas lógicas sin sentido.[8]

1.5.4 Kant: ¿Sólo existe una forma de percibir el espacio?

Immanuel Kant (1724-1804) fue un filósofo alemán nacido en la ciudad de Königsberg, que hoy recibe el nombre de Kaliningrado (Rusia). Estudió matemáticas y ciencias naturales, y tras enseñar estas disciplinas, después de doctorarse, comenzó también a enseñar casi todas las ramas de la filosofía. Se le considera como uno de los grandes pensadores del mundo moderno, cuya propuesta sobre el conocimiento se encuentra en su libro más conocido Crítica de la razón pura. En este libro se cuestiona cuáles son los límites del conocimiento humano, y de allí teje la distinción entre el fenómeno (como se presentan los objetos) y el noúmeno (el objeto real, como es en sí mismo). Es decir, para Kant el vaso que está sobre la mesa no puede ser percibido en su totalidad por el sujeto que lo está percibiendo porque sólo tiene una versión parcial de él.

Por otro lado, Kant también introduce una distinción entre lo que podemos enunciar sobre el mundo que nos rodea: para él existen las proposiciones analíticas y las proposiciones sintéticas. Las proposiciones analíticas las define como proposiciones necesarias que no agregan mayor información y donde lo que se predica está contenido en la misma definición del objeto, por ejemplo, afirmar “los árboles son plantas”. Por otro lado, las proposiciones sintéticas son aquellas que responden a contingencias y tienen contenido fáctico que agrega conocimiento sobre el objeto que se enuncia, por ejemplo afirmar “el gato está en el tejado”.

Kant también hace una distinción sobre dos tipos de verdades, las verdades a priori que no necesitan ser mediadas por la experiencia, y las verdades a posteriori que se deben a

---

[8] Años más tarde que Bolyai, Lovachevsky y Gauss trabajaran sobre la geometría que posteriormente se llamaría geometría hiperbólica, el famoso matemático Bernhard Riemann (1826-1866) trabajaría sobre el caso de los ángulos obtusos y encontraría los primeros resultados de otra geometría no euclidiana que hoy conocemos como geometría elíptica.

la experiencia. Así pues, para Kant, uniendo ambas distinciones, las verdades podrían ser analíticas a priori, analíticas a posteriori, sintéticas a priori y sintéticas a posteriori. Sin embargo, las verdades analíticas a posteriori no tendrían sentido en cuanto a que un enunciado analítico no requiere de una comprobación por medio de la experiencia.

En este sentido, para Kant los objetos matemáticos, como los números y las figuras geométricas, estarían asociados a “aparatos psíquicos” que nos permiten estructurar, organizar y percibir los fenómenos del mundo. Es decir, que en el razonamiento humano ya están las entidades matemáticas, por lo cual las verdades matemáticas son verdades a priori.

“La matemática, que corresponde, por una parte, a nuestro sistema perceptual y a su modo peculiar de estructuración, y, por otra, a nuestro sistema de construcción de conceptos, el sistema categorial, estaría estrechamente vinculada con nuestra experiencia y con los objetos en sí”
(Klimovsky, 2005, p.99)

Sin embargo, aunque existen juicios a priori analíticos dentro de la matemática, como las definiciones, para Kant los enunciados matemáticos en su mayoría son verdades sintéticas a priori. Por ejemplo, en el enunciado “2 + 3 es igual a 5” se encierra un juicio sintético en cuanto ni en el concepto de 2 ni en el concepto de 3 se encierra el concepto de 5, más bien esa relación pasa por el vínculo que tienen estos objetos con la experiencia.[9]

Para finalizar, teniendo como marco que para Kant las matemáticas tienen que ver con el mecanismo psíquico con el que ordenamos el mundo, es importante mencionar que asocia al espacio con el pensamiento geométrico y al tiempo con el pensamiento numérico. Es decir, la forma en la que nosotros percibimos el espacio obedece a un orden geométrico pre impuesto (a priori) a nuestra experiencia del mundo, y para él la geometría que establece esa manera en la que nos relacionamos con el mundo era la que había reinado por más de 2000 años, la geometría euclidiana.

[9] Esta discusión, es una discusión todavía inacabada para los comentadores de Kant, algunos argumentaron que los juicios sintéticos a priori en realidad no pueden existir dentro de la filosofía kantiana.

Teniendo en cuenta que la filosofía de Kant era muy aceptada en la época en la que surgen los primeros artículos acerca de geometrías no euclidianas, que la geometría euclidiana había sido enseñada y yacía en las bases del conocimiento matemático por milenios y los resultados sin sentido a los que llegaban los intrépidos pensadores que trabajaron sobre estos temas (Bolyai, Lovachevsky, Gauss, Riemann), se hace entendible la fuerte resistencia que tuvieron por parte de la comunidad matemática y por la sociedad en general estas nuevas maneras de entender el conocimiento geométrico.

1.6 La paradoja de Galileo (Consideraciones en la filosofía de Leibniz)

Godofredo Leibniz (1646-1716) fue un matemático, filósofo y abogado alemán y es conocido por ser uno de los dos precursores del cálculo infinitesimal junto con Newton. A diferencia de Newton, Leibniz tuvo una posición más filosófica y geométrica en el estudio de estos conceptos, como el de curva y el diferencial, y a él debemos la notación que se utiliza hoy en día en los cursos de cálculo. Así, su teoría de las mónadas y los indivisibles se alimentaba de su noción de diferencial y de la creencia en que el infinito existía como actualidad, visión contraría a la de Aristóteles para quien, como ya hemos discutido en secciones anteriores, el infinito era potencial.

Antes de adentrarnos en la filosofía de Leibniz, es importante recordar y tener en cuenta las siguientes definiciones sobre cantidades continuas y discretas: una cantidad continua es aquella que se compone de partes o unidades no separadas entre sí, permitiendo que su magnitud pueda asumir infinitos valores dentro de cualquier intervalo finito. Por otro lado, una cantidad discreta consta de partes o unidades separadas entre sí, y su magnitud, al ser numerable, no puede tener infinitos valores dentro de un intervalo finito.

Leibniz propone en su primera etapa, que llamaremos etapa juvenil, que para comprender la naturaleza fundamental de los cuerpos, es esencial abordar la cuestión de si la extensión es una cualidad inherente y propia de los cuerpos o si, por el contrario, es un atributo derivado de propiedades más básicas.

En sus escritos de juventud, Leibniz plantea una conexión directa y actual entre el cuerpo, la extensión y el espacio. Considera al cuerpo como aquello que ocupa un lugar en el espacio, es decir, algo co-extenso al espacio. Por su parte, entiende la extensión como la cantidad y la figura del continuo, una característica que describe el espacio que ocupan los cuerpos y que se extiende en tres dimensiones largo, ancho y alto. Además, Leibniz afirma la existencia de cantidades infinitas actuales, que serían cantidades determinadas y realmente existentes en la naturaleza, planteando así la posibilidad de que lo infinito no solo sea una abstracción matemática, sino también una realidad tangible en el mundo físico. Así, si los objetos extensos son infinitamente divisibles (no existen partes a las que no se les pueda seguir dividiendo en más partes), y el cuerpo es extenso, se concluye que el cuerpo tiene partes que son infinitamente divisibles.

El problema de lo que compone al continuo plantea cuestiones fundamentales sobre la naturaleza de las cantidades infinitamente divisibles. En primer lugar, surge la interrogante acerca de la naturaleza de las partes que componen estas cantidades continuas: ¿son siempre divisibles o existen partes indivisibles en la base de este continuo? En segundo lugar, se plantea la pregunta sobre la cantidad de esas partes: ¿son finitas o verdaderamente infinitas?

Leibniz, en su periodo juvenil, acepta la existencia de un infinito actual de partes de un cuerpo, y al mismo tiempo sostiene que existen indivisibles que constituyen límites de la infinita divisibilidad. Aunque a primera vista pueda parecer contradictorio, él explica que estos indivisibles no forman parte del continuo, es decir no son partes de los cuerpos que se obtienen por medio de la infinita división. También postula que toda cantidad continua es infinitamente divisible y consta de infinitas partes en acto, en oposición a la noción aristotélica. Para él, el todo del cuerpo depende de estas partes infinitas que existen realmente y sostiene que todo objeto extenso, incluyendo los cuerpos, es infinito precisamente porque posee infinitas partes en acto.

En 1672 Leibniz es invitado a ser profesor de geometría en la universidad de París, en donde va a cambiar por completo su filosofía sobre los indivisibles y la creencia de magnitudes infinitas en acto. En su estancia en París comienza a leer un texto de Galileo y se encuentra una paradoja planteada en el texto, que cuestiona los números infinitos y que se presenta a continuación:

Paradoja de Galileo o de las cantidades infinitas:

I. Los números infinitos son totalidades, es decir, contienen infinitas partes en acto.
II. El todo es mayor que las partes (Axioma de Euclides)
III. Tres números infinitos: A) el número de todos los números naturales; B) el número de todos los números cuadrados; C) el número de todas las raíces
IV. B es una parte de A, en tanto que A contiene todos los números cuadrados y todos los números no cuadrados
V. B = A en tanto que, primero, cada número cuadrado tiene una raíz y cada raíz tiene un número cuadrado (relación biyectiva) y, segundo, hay tantas raíces como números.
VI. B es una parte y, a la vez, es igual a A. La parte es igual al todo.
VII. Hay una contradicción entre II y VI.

La paradoja asume los dos primeros enunciados como verdaderos, el primero correspondiente el pensamiento juvenil de Leibniz, otorgándole un carácter actual al infinito, y el segundo trayendo a colación un axioma de la lógica y la geometría que ya ha sido discutido en anteriores lecciones. En los pasos III y V establece una correspondencia entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de todos los cuadrados de los naturales, hoy en día se hablaría de que Galileo establece una función biyectiva entre ambos conjuntos. En el paso IV establece que el conjunto de los números cuadrados claramente es una parte del conjunto de los números naturales y en el pasó V menciona que por existir esta correspondencia entre conjuntos, ambos conjuntos deben ser iguales. En el último paso, menciona que este procedimiento contradice el hecho de que el todo es mayor que la parte, pues se concluye que el conjunto de los números cuadrados es igual al conjunto de los números naturales. A continuación, se muestra una figura de la correspondencia mencionada por la paradoja.

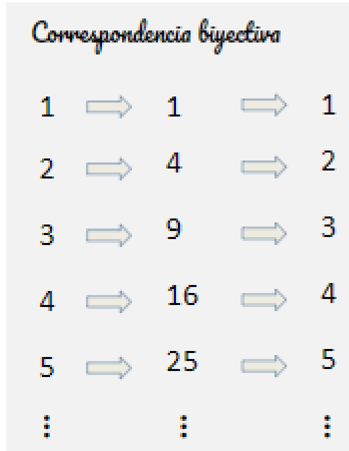


Figura 15

Aunque Leibniz conoce la paradoja de mano de un escrito de Galileo, encuentra una manera distinta de abordarla que la del propio Galileo. Galileo sugiere que, para resolver la paradoja, es necesario no aplicar el axioma de comparación, según el cual una cantidad es mayor, menor o igual que otra, en los números o cantidades infinitas, pues para él este axioma solo es consistente cuando se trata de magnitudes finitas. Leibniz, por su parte, considera que los números infinitos son inconsistentes, ya que suponen una contradicción: un número infinito no puede concebirse como una unidad o un todo. La salida de esta paradoja parece exigir el rechazo de una de dos premisas fundamentales: o bien negamos la existencia de los números infinitos como totalidades, o bien abandonamos la idea de que el todo debe ser mayor que sus partes.

Se dice que Leibniz, al estar enseñando geometría, no pudo asumir la idea de que un axioma de los elementos de Euclides fuera inconsistente, por lo cual concluyó que asumir la existencia de un infinito actual era lo que provocaba la contradicción. Además, los números infinitos también contradicen el principio de identidad, que sostiene que cada objeto es idéntico a sí mismo. Para Leibniz, estas inconsistencias subrayan la imposibilidad de considerar el infinito como un número, ya que conduce a contradicciones insalvables dentro de la estructura lógica y matemática.

1.7 Aritmetización de la matemática. La crisis de la fundamentación matemática, paradoja de Russell.

La aparición de nuevas geometrías como las no euclidianas (elíptica e hiperbólica) evidenciaron un problema sobre las bases en las que se construyen los resultados y teoremas matemáticos, dejando grandes preguntas sobre los principios lógicos y la aplicabilidad que tiene el “juego” deductivo dentro del mundo real. Desde ese momento se hablará de la distinción entre la matemática aplicada, encargada de modelar los fenómenos que suceden por medio de mecanismos matemáticos, y por otro lado la matemática pura, concentrada en llevar a sus últimas consecuencias lógicas resultados que aún no encuentran una aplicación fáctica en el mundo.[10]

Por otro lado, la aparición del cálculo de la mano de Newton y Leibniz en el siglo XVII generó un movimiento que se denomina históricamente como la aritmetización del análisis, cuyo objetivo fue perseguir la definición de límite (vinculada a la de número real) y encargarse de demostrar que todo sistema numérico (naturales, enteros, racionales, reales) puede reducirse al estudio del sistema de los números naturales. De allí, la famosa frase pronunciada por el matemático Leopold Kronecker “Dios hizo los números naturales, el resto es obra del hombre”.

De mano del matemático David Hilbert, hacia finales del siglo XIX nació la corriente denominada formalista, que buscaba establecer las bases sólidas de la aritmética, después de que Cantor, Dedekind y Weierstrass formalizaran el concepto de número real, superando las nociones antiguas de magnitud y construyendo el concepto de número real a partir del sistema de los números racionales.

Uno de los intentos más conocidos fue el del matemático Giuseppe Peano, quien propuso una axiomática para la construcción de los números naturales y que se conocen como los axiomas de Peano.

---

[10] Es importante mencionar que, si bien las geometrías no euclidianas nacen como cascarones vacíos sin ningún tipo de aplicación, en el siglo XX físicos, geólogos, geógrafos, arquitectos, artistas encuentran aplicaciones de geometría elíptica e hiperbólica. Una aplicación famosa es la de la geometría diferencial que aplicó Einstein para plantear su teoría de la relatividad.

1) $0 \epsilon \mathbb{N}$.[11]
2) Para todo $n \epsilon \mathbb{N}$ existe $n^{+} \epsilon \mathbb{N}$ al cual llamamos sucesor de n.
3) Para todo número $n \epsilon \mathbb{N}$ se tiene que $n^{+} \neq 0$.
4) Si $m, n \epsilon \mathbb{N}$ de tal forma que $n^{+} = m^{+}$ entonces $n = m$.
5) Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:
    a. $0 \epsilon S$.
    b. Si $n^{+} \epsilon\ S$ siempre que $n \epsilon S$.

   Entonces $S = \mathbb{N}$.

Los primeros cuatro axiomas hablan en esencia de las propiedades más básicas de los números naturales, y encierran muy en el fondo la noción de sucesión que en el siglo XIX estuvo fuertemente relacionada a dicho sistema numérico. El primer axioma menciona que el conjunto de los números naturales es no vacío (hay un elemento, el cero), el segundo axioma menciona como construirlos y le da el carácter de sucesión (cada número natural sucede a otro), el tercer axioma menciona que esa sucesión tiene un elemento inicial que es el 0, y el cuarto axioma garantiza la linealidad de la secuencia. Por último, el axioma 5 es el que Peano sugiere para realizar demostraciones y afirmar propiedades del conjunto de los números naturales, es conocido como principio de inducción matemática y es una herramienta demostrativa que va a ser de mucha utilidad para la teoría de números.

Aunque el sistema propuesto por Peano permitía demostrar las propiedades ya conocidas de los números naturales (conmutativa, clausura, …) y bebía de la intuición de sucesión que tenemos sobre los mismos, no podía justificar por medio de sus axiomas su propia consistencia. Y la consistencia era uno de los objetivos propuestos por Hilbert para todo sistema formal. Acá nos referimos a que un sistema formal es consistente cuando es imposible que por medio de los axiomas yo pueda demostrar que un enunciado y su negación son verdaderos al mismo tiempo, es decir, es imposible una contradicción dentro del mismo.

[11] La discusión sobre si 0 es un número natural o no cuestiona la validez de este axioma, sin embargo, el cero acá solo juego el papel de ser el primer número natural, si se cambia al 0 por el 1 la construcción de Peano sigue teniendo la misma estructura y sería equivalentemente lógica.

1.7.1 Teoría de conjuntos

Por otro lado Georg Cantor (1845-1918) trabajó e impulsó una nueva teoría, la teoría de conjuntos. Para Cantor todo podía ser expresado como conjuntos, los números, las relaciones y hasta las funciones, los conjuntos estaban en la base de la estructura. Dentro de su teoría propuso el concepto de cardinal como el número de elementos que tiene un conjunto, y comenzó a estudiar la cardinalidad de los diferentes sistemas numéricos.

Para estudiar la cardinalidad de un conjunto utilizó la noción de la coordinabilidad que se podía establecer entre un par de conjuntos por medio de una función. Diremos que dos conjuntos son coordinables si existe una función biyectiva entre ambos conjuntos, es decir, que haya una correspondencia uno a uno entre los elementos de los dos conjuntos (inyectiva) y además que no quede ningún elemento del codominio sin relación (sobreyectiva). Por ejemplo, el conjunto de las vocales en español es coordinable con los números naturales de 1 a 5, asignando a cada vocal el número correspondiente al orden en el que aparece en el abecedario, así pues, la “a” estaría relacionada con el 1, la “e” con el 2, la “i” con el 3, la “o” con el 4 y la “u” con el 5. Así mismo, el número de letras del abecedario podría ser coordinable con los números naturales del 1 al 27. Por lo tanto, el cardinal del conjunto de las vocales sería 5 y el del abecedario sería 27.

La pregunta que se hizo después Cantor es si es posible coordinar conjuntos que no sean finitos, como por ejemplo los números naturales $\mathbb{N}$. Si recordamos lo discutido con la paradoja de Galileo pareciera que comenzar a coordinar conjuntos infinitos nos llevaría a contradicciones con el principio “el todo es mayor que la parte”. Sin embargo, para Cantor una parte de un conjunto si podía tener el mismo número de elementos que todo el conjunto, y la utilizó para definir a los conjuntos infinitos.

“Decimos que un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio $B \subseteq A$ de tal forma que $|A| = |B|$ (son coordinables).”

De esta manera, el número de elementos de los números naturales era igual al número de elementos de los naturales pares o de los números cuadrados o de los múltiplos de 3. Para demostrarlo sólo bastaría realizar un procedimiento similar al elaborado por Galileo en su paradoja, definiendo funciones como $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 3x$, y probando que las tres son funciones biyectivas sobre los conjuntos mencionados.

A continuación, lo que hizo Cantor fue buscar la función que permitiera coordinar los demás sistemas numéricos con el sistema de los números naturales. El cardinal de los números naturales no era ningún número por su carácter infinito, por lo tanto, para referirse al número de elementos de los números naturales introdujo la primera letra del alfabeto hebreo "Aleph" cuyo símbolo es ℵ. Cantor tenía la fiel creencia de que "todos los conjuntos infinitos debían ser coordinables con $\mathbb{N}$, es decir ℵ debía ser el cardinal de todos los conjuntos infinitos.

Encontró una función que iba de los naturales a los enteros y demostró que era una función biyectiva. La función coge a todos los números pares y los manda a los números positivos, y a todos los números impares los manda a los números negativos. $f(n) = k \ si \ k = 2n$ y $f(n) = -k \ si \ k = 2n + 1$. A continuación, se muestra una representación gráfica de la función en la figura 16:

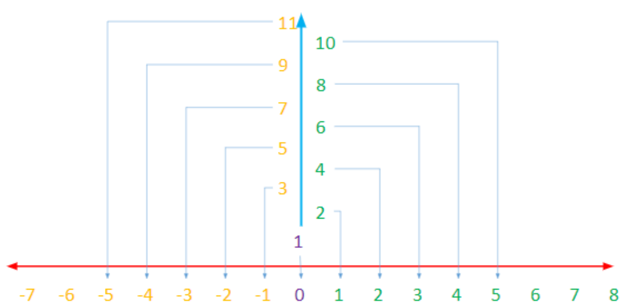


Figura 16

Por lo cual $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ El cardinal de los números naturales es igual al cardinal de los números enteros.

Luego para demostrar que los números racionales $\mathbb{Q}$ también eran coordinables con los naturales decidió primero probar que las parejas ordenadas generadas por el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son coordinables con los números naturales por medio de la función

$f(m,n) = m(2^{n-1} - 1)$. Y con el isomorfismo $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0\}/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por $(a,b) \sim (c,d) \ \Leftrightarrow \ a \cdot d = b \cdot c$.[12]

Así, Cantor demostró que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph$, sólo le quedaba lograr coordinar el sistema de los números reales. En esta empresa estuvo trabajando por encontrar la función sin logro alguno, hasta que se le ocurrió trabajar sobre las consecuencias que tendría la existencia de dicha función. Si existe una función biyectiva entre un conjunto y el conjunto de los números naturales eso quiere decir que se puede establecer un orden en el cual yo voy enumerando los elementos de dicho conjunto, ya que habrá un elemento que se relaciona con el 1, otro con el 2, otro con el 3, y así sucesivamente; por lo cual a todos los conjuntos que tuvieran el mismo cardinal que los naturales los denominó conjuntos contables.

Cantor trabajó sobre el intervalo real de 0 hasta 1 $(0\,,1)$. Asume que dicho conjunto era un conjunto contable, es decir se puede generar un orden de enumeración de los elementos del intervalo. Como además son elementos entre el 0 y el 1, tienen una expresión decimal donde el dígito que ocupa la posición de las unidades es siempre 0. Un ejemplo de la enumeración se plantea en la figura 17:

$$\begin{array}{l}
f(0) = a_0^{(0)}, a_1^{(0)} a_2^{(0)} a_3^{(0)} a_4^{(0)} \ldots a_i^{(0)} \ldots \\
f(1) = a_0^{(1)}, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} a_4^{(1)} \ldots a_i^{(1)} \ldots \\
f(2) = a_0^{(2)}, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} a_4^{(2)} \ldots a_i^{(2)} \ldots \\
f(3) = a_0^{(3)}, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} a_4^{(3)} \ldots a_i^{(3)} \ldots \\
f(4) = a_0^{(4)}, a_1^{(4)} a_2^{(4)} a_3^{(4)} a_4^{(4)} \ldots a_i^{(4)} \ldots \\
f(5) = a_0^{(5)}, a_1^{(5)} a_2^{(5)} a_3^{(5)} a_4^{(5)} \ldots a_i^{(5)} \ldots \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
f(i) = a_0^{(i)}, a_1^{(i)} a_2^{(i)} a_3^{(i)} a_4^{(i)} \ldots a_i^{(i)} \ldots
\end{array}$$

Figura 17

[12] No se hacen las demostraciones de que estas funciones resultan biyectivas debido a que no hace parte del objetivo de este trabajo.

En la figura se muestra la numeración para cada número expresado en su forma decimal, en el super índice se indica la numeración y en el subíndice la posición decimal de cada dígito. Ahora, si se construye un número real $b = 0, b_1\, b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots$ de tal manera que los dígitos $b_k = {a_k}^k + 1$ si ${a_k}^k \epsilon \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ y $b_k = {a_k}^k - 1$ si ${a_k}^k \epsilon \{8,9\}$, ese número b será distinto a todo número en las lista por lo menos en el elemento ${a_k}^k$ que hace parte de la diagonal, es decir, si asumimos que dicho conjunto es contable conseguimos construir siempre un número dentro del conjunto que no hace parte de la enumeración, contradicción. Al anterior argumento se lo conoce como el argumento diagonal de Cantor.

Entonces, si el conjunto de los números reales es infinito, no se deja numerar y además contiene al conjunto de los naturales, se deduce que su cardinal debe ser mayor que el cardinal de los números naturales, enteros y racionales. Lo que a su vez quiere decir que existen conjuntos infinitos con un número de elementos más grandes que otros.

Las consecuencias de estos resultados conseguidos por Cantor alarmaron a la comunidad académica de la época, que se resistió a admitir que existieran infinitos más grandes que otros y la trataron como una abominación. Uno de los detractores más fuertes ante este resultado fue el mismo Leopold Kronecker, quien tachó a Cantor de haber ensuciado la naturaleza misma de las matemáticas e influyó en sus círculos académicos para marginar su obra y sus resultados. Uno de sus argumentos más fuertes era que el manejo que Cantor hizo de los conjuntos y las funciones asume que el infinito se puede manipular como si fuera un objeto en acto, lo que le resultaba una aberración.

1.7.2 Aparición de la paradoja de Russell

Bertrand Russell (1872-1970), filósofo y matemático, conoce sobre los trabajos de Cantor y Gottlob Frege (logicismo) y plantea una conocida paradoja que pone en aprietos la teoría de conjuntos propuesta por Cantor y el proyecto logicista emprendido por Frege.

La paradoja encierra un problema de enunciados que resultan autorreferentes, como el que afirma la existencia del conjunto de todos los conjuntos. Russell asume que existen dos tipos de conjuntos, los conjuntos normales y los conjuntos singulares. Los conjuntos normales son aquellos conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, como el conjunto de las vocales o el de los colores. Por otro lado, los conjuntos singulares son aquellos conjuntos que sí se contienen a sí mismos como elementos, como el conjunto de las cosas que no son tangibles o el conjunto de los objetos matemáticos.

Ahora, es claro que si un conjunto es singular no puede ser normal y viceversa, al igual que si llamamos S al conjunto de todos los conjuntos singulares y N al conjunto de todos los conjuntos normales se puede afirmar que S y N son mutuamente disjuntos, es decir $S \cap N = \emptyset$. Si asumimos la existencia del conjunto de todos los conjuntos entonces sería la unión entre S y N. Observemos qué tipo de conjuntos son S y N. S al ser el conjunto de todos los conjuntos que se contienen a sí mismos como elementos es también singular. Con N se presentan dificultades, pues si N es un conjunto normal no podría contenerse a sí mismo por lo cuál tendría que ser un conjunto singular, pero si N es singular debería contenerse a sí mismo por lo cual N debería ser un conjunto normal. Es decir que el conjunto de todos los conjuntos normales no puede ser ni singular, ni normal, lo cual negaría su existencia.

El problema, como lo plantea Russell, es asumir que existe un conjunto que contiene todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, porque siempre llegaremos al círculo vicioso de decidir si pertenece a sí mismo o no. De aquí la crítica profunda es hacia uno de los axiomas que Cantor y Frege utilizan para la construcción de sus teorías, el axioma de existencia, que dice que toda propiedad define un conjunto, es decir, cualquier propiedad que pueda ser enunciada define el conjunto de todos los elementos que la cumplen.

1.7.3 Propuestas para vencer la paradoja

En el siglo XIX la propuesta formalista de David Hilbert no fue la única que intentó fundamentar las matemáticas; paralelamente surgió la propuesta logicista de mano de personajes como Frege y Russell cuya idea era reducir las matemáticas a un juego de signos lógicos, y también surgió la corriente intuicionista con personajes como Brouwer y Kronecker quienes argumentaban que la matemática como ejercicio humano debía mostrar sus verdades por medio de construcciones evitando conceptos idealizados como los de infinito actual.

Cada una de estas tres corrientes filosóficas propuso a su vez una solución a la paradoja planteada por Russell:

1. Salida intuicionista: Para los intuicionistas la teoría de conjuntos planteada por Cantor tenía profundas violaciones a la naturaleza de las matemáticas, pues para ellos la matemática debía ser una construcción del pensamiento humano, por lo cual manipular un concepto como el infinito como si este tuviera una existencia actual, y más allá, afirmar la existencia de conjuntos infinitos más grandes que otros, resultaba una aberración. Por otro lado, además de aceptar sólo la concepción potencial del infinito, hicieron una fuerte crítica al principio del tercero excluido, pues este principio permitía realizar demostraciones por medio de la reducción al absurdo, que para ellos no significaba mostrar y hacer la construcción de una verdad en matemáticas.

2. Salida formalista: La salida formalista ocurre con una conocida axiomatización que realizan Zermelo y Fraenkel entrado el siglo XX en la que proponen una axiomatización que evite la paradoja. La solución que encuentran es intercambiar el axioma de existencia por una versión de él más débil, lo que llamarán el axioma de especificación, que dice: "dado un conjunto A y una propiedad $P(x)$ sobre el conjunto, existe un conjunto que reúne todos los elementos de A que cumplen la propiedad P(x)". Así, impedían la existencia de un conjunto universal que contuviera todos los conjuntos.

3. Salida logicista: La salida logicista la planteó el mismo Bertrand Russell, desarrollando una teoría que llamó la teoría de tipos, en la que impuso restricciones para las afirmaciones que pueden formar conjuntos, evitando proposiciones que se refieran a sí mismas (auto-referencia)

Estas tres corrientes tuvieron discusiones acaloradas a lo largo de la primera mitad del siglo XX, y si bien en todas las corrientes se debían realizar grandes sacrificios en la herencia del conocimiento matemático, hoy podemos afirmar que cada una de las corrientes mencionadas contribuyó grandemente al desarrollo que tuvo la matemática desde el siglo pasado.

Para finalizar, es necesario mencionar que Hilbert propuso en un congreso comenzando el siglo 20 la búsqueda de tres condiciones para que un sistema axiomático pudiera considerarse un sistema formal:

1. El sistema tiene que ser completo, es decir, para cualquier afirmación que yo pueda formular dentro del sistema es posible demostrar si es verdadera o falsa.
2. El sistema debe ser decidible, es decir, para cualquier afirmación formulada dentro del sistema existe un procedimiento con un número de pasos finitos que permite decidir si es verdadera o falsa.
3. El sistema tiene que ser consistente, es decir, en el sistema no se debe poder llegar a una contradicción a partir de los axiomas.

Estas tres necesidades de todo sistema formal fueron planteadas porque Hilbert imaginaba que era posible axiomatizar la aritmética y a partir de ahí toda la matemática. Sin embargo, años más tarde apareció Kurt Gödel (1906-1978) con sus teoremas de incompletitud, demostrando que toda axiomática de la aritmética era incompleta. Por si fuera poco, posteriormente Alan Turing (1912-1954) argumentó, con la ayuda de sus máquinas de Turing, que todo sistema axiomático además era indecidible, lo que terminó de derrumbar toda la apuesta formalista de Hilbert.

2. Marco pedagógico o didádicto

El proyecto fue formulado y ejecutado en una clase de Énfasis en el Liceo Juan Ramón Jiménez, destinada para estudiantes de grados 10 y 11. Este espacio brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar y profundizar en temas de su interés de cara a su pronta elección de carrera. El énfasis llevó por nombre “infinitamente paradójico” y junto a un profesor de filosofía lo dictamos por cuarta vez. Se deseaba recoger y dejar registro de la hermosa experiencia que nos ha significado a ambos la búsqueda de conexiones entre nuestras disciplinas y el buen recibimiento que ha tenido por parte de los y las estudiantes que se han interesado por estos temas.

La propuesta, enmarcada en el sistema pedagógico del Liceo Juan Ramón Jiménez, que le apuesta al desarrollo de pensamiento crítico y formación de ciudadanía, quiso enfatizar el papel de la enseñanza de la historia de las matemáticas en la perspectiva pedagógica de las "Matemáticas Culturales". Esta perspectiva reconoce la importancia de integrar el contexto cultural e histórico en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

También se buscó que la propuesta encontrara un eco importante en la didáctica de las ciencias, estimulando la conexión permanente entre los conocimientos disciplinares, históricos y filosóficos acerca de la naturaleza de las matemáticas con las herramientas pedagógicas propias de la institución. Así, se motivó que mediante el diálogo y la construcción conjunta del conocimiento los estudiantes lograran vivir en el aula los cambios de paradigmas propuestos como propios.

Por otro lado, se quiso implementar la adopción de una pedagogía basada en proyectos para el énfasis, ofreciendo una oportunidad a los estudiantes de explorar la evolución de esta disciplina como un entorno no acabado, en constante evolución, construcción y revisión a lo largo del tiempo, en consonancia con lo expuesto en la introducción. Emprender proyectos que abarquen desde los primeros descubrimientos matemáticos hasta avances contemporáneos, brindó a los estudiantes la oportunidad de comprender la matemática como un proceso en constante desarrollo. Promoviendo la investigación activa y la curiosidad, e invitando a los estudiantes a explorar no solo los grandes momentos históricos de la matemática, sino también a cuestionar, analizar y, sobre todo, imaginar posibles alternativas de comprender un problema dentro de este campo del conocimiento. La historia de la matemática, y en particular del infinito, se convirtió así en un escenario fértil para el florecimiento de la imaginación y la creatividad.

2.1.1 Enfoques del liceo Juan Ramón Jiménez (tipos de pedagogía en las que se enmarca el trabajo) (Pedagogía activa- construccionismo social- pensamiento sistémico)

El Liceo Juan Ramón Jiménez es un colegio que está ubicado en el kilómetro 4 de la vía Suba-Cota, haciendo parte de la reserva Van der Hammen y siendo vecino del humedal de la conejera y el Bosque de las Mercedes (bosque nativo de la sabana de Bogotá). Como queda a las afueras de la ciudad sus estudiantes vienen de diversas zonas urbanas.

El liceo nace en 1962 fundado por Marta Bonilla (Filósofa) y Manuel Vinent (Matemático) como una apuesta alternativa a los sistemas educativos tradicionales de la época, vislumbrando una sociedad que padecía la educación católica y conservadora que predominaba en los años 60. Así, la posición del colegio se plantea sobre unos principios rectores: el trabajo colaborativo, la no discriminación, la autonomía moral entendida como una mirada reflexiva sobre las acciones y sus efectos, la evaluación por procesos, el pensamiento crítico a partir de preguntas generadoras y la valoración de las experiencias artísticas.

En el colegio el trabajo en el aula se vuelve fundamental, pues es allí donde el encuentro con los otros le permite a los estudiantes apropiarse de y generar conocimiento, poniendo en diálogo posturas propias junto a posturas externas que alimentan las discusiones y entablan nuevas relaciones que les permiten a los y las estudiantes ampliar su visión sobre los temas que se trabajan. Allí es donde se encuentra la apuesta del colegio, en el encuentro con el otro, con las ideas y posturas que son diferentes a las mías, en el trato respetuoso que tengo tanto para aceptarlas y vincularlas a las mías como para discernir y debatirlas. Así, a su vez se busca la construcción de una ciudadanía enmarcada en el respeto y el pensamiento crítico.

Se entiende a los y las estudiantes no como contenedores vacíos que tienen que ser llenados de conocimientos disciplinares que deben aprender y utilizar por medio de la memoria, sino se los entiende ya como sujetos participativos en la construcción de su propio proceso de aprendizaje, capaces de ser agentes en las aulas de clase, proponiendo y poniendo en juego los conocimientos que van consolidando en su proceso. Por lo tanto, el papel del profesor en el Liceo Juan Ramón Jiménez es más el de un acompañante, un guía y un inspirador de las diferentes materias, donde los contenidos se vuelven solo excusas para explorar mundos temáticos y encontrarse con los otros.

Como el conocimiento es una construcción colectiva, no existe una jerarquía entre las distintas asignaturas que se proponen para los grados. En cambio, se trata de encontrar un sentido que permita hacerle ver al estudiante o la estudiante que las perspectivas, aunque puedan ser distintas, enriquecen nuestra visión del mundo y favorecen una comprensión más compleja del mismo.

2.1.2 Población a la que está dirigida

La propuesta de énfasis en el colegio comienza con la intención de aproximar a los y las estudiantes de grado décimo y once a espacios académicos distintos a los habituales, que les abran las puertas a conocer con mayor profundidad temas y problemas de su interés. La propuesta se inscribe entonces en un espacio de exploración personal, en el que se espera que el estudiante vea enriquecido su proceso de aprendizaje y vaya encontrando posibles enfoques de cara a la elección próxima de una carrera universitaria o de un oficio.

De esta manera, el colegio convoca tanto profesores externos como profesores internos al colegio para ofrecer una gama amplia de propuestas que comprenden áreas como: historia, ciencias políticas, derecho, economía, arquitectura, robótica, artes, astronomía, matemáticas, entre otras. Con lo cual los estudiantes tienen un espectro grande de posibilidades para explorar sus intereses. La decisión por cual énfasis toma cada estudiante es propia y como cada propuesta se da de manera semestral, si no repiten una propuesta, pueden estar en 8 espacios diferentes en su transcurso por grado décimo y grado once.

En estas propuestas se encuentra la propuesta de nuestro énfasis titulado “infinitamente paradójico”, que es presentado para toda y todo estudiante que encuentre interesante o llamativo rastrear problemas y cuestiones filosóficas e históricas dentro del conocimiento matemático, y se ofrece como una apuesta de ver las relaciones existentes entre filosofía y matemáticas.

2.1.3 ¿Quiénes son los estudiantes que participaron?

Para el semestre en el que se ejecuta este proyecto (2024-1). fueron pocos los estudiantes en inscribirse al énfasis y curiosamente todos los que se interesaron fueron estudiantes de décimo grado. Cuando conocimos a los estudiantes y les preguntamos por su decisión de acompañarnos a estudiar estos temas nos encontramos con estudiantes muy afines al conocimiento matemático y, aunque contaban con una vaga idea de lo que significaba la filosofía, pues hasta el momento no habían tenido esa asignatura, les pareció muy llamativa la relación entre ciencias sociales y matemáticas. Los inscritos al énfasis fueron cuatro estudiantes de grado décimo, tres estudiantes de sexo masculino y una estudiante de sexo femenino.

2.1.4 ¿Quiénes son los profesores que participaron?

Los profesores del énfasis fueron dos, Federico Jaramillo (filósofo con maestría en geografía) y David Suárez (matemático), quienes somos exalumnos y habitamos como estudiantes las mismas aulas en donde ahora somos profesores. El interés en este tema surgió a través de discusiones que tuvimos en encuentros como estudiantes de estas carreras (filosofía y matemáticas), y en donde encontrábamos siempre cuestiones que aparecían tanto en el estudio de la filosofía como en el de las matemáticas. Apenas tuvimos la oportunidad de explorar esta relación y dar un curso que vincula nuestros saberes lo hicimos. Esta resultó ser la génesis del énfasis que propusimos, el cual se ha venido transformando y renombrando conforme nos hemos ido adentrando con estudiantes de distintas generaciones en estos temas.

2.2 Antecedentes pedagógicos

El autor sobre el que reposan los antecedentes que mostraré más adelante es el matemático George Polya, quien con su libro "How to solve it" (1945) propuso una manera en la que se pueden abordar problemas en las aulas de matemáticas. Como lo menciona en la introducción de su libro, Polya dirige este libro tanto a estudiantes como a profesores de matemáticas, contribuyendo a lo que fue en su época una nueva manera de entender las clases y las aulas de matemáticas.

En las páginas de su libro plantea que la educación en matemáticas no solo debe someterse y limitarse a la memorización de fórmulas y procedimientos que las utilicen, sino que debe enfocarse en desarrollar habilidades fundamentales para pensar como matemáticos. Es decir, Polya privilegia el desarrollo de habilidades sobre el acceso a los distintos contenidos que puede ofrecer la academia y busca promover la creatividad. Este enfoque se basa en la idea de que los estudiantes, al enfrentarse a problemas en su vida, aprenden a analizar, razonar y argumentar, para en última instancia, resolver problemas por sí mismos, de manera autónoma. Habla de habilidades que son esenciales no solo en las clases de matemáticas sino en cualquier área del conocimiento.

Uno de los pilares de su enfoque es la enseñanza mediante la resolución de problemas, donde los estudiantes van ganando experiencia en sus habilidades al abordar desafíos que no tienen una solución inmediata o evidente. Para esto, propone un método basado en cuatro pasos fundamentales: entender el problema, crear un plan, ejecutar el plan, y revisar la solución para ver si es correcta y se puede mejorar. Estos pasos guían a los estudiantes en la búsqueda de una solución propia de problemas específicos, y además les proporcionan una orientación que pueden aplicar a cualquier tipo de problema que enfrenten.

En este contexto, el diálogo socrático tiene un papel privilegiado; está inspirado por el método que Sócrates tenía para discutir con sus interlocutores en los diálogos tempranos que Platón escribió en su memoria. Esta estrategia pedagógica se basa en el uso de preguntas y respuestas para guiar a los estudiantes hacia la comprensión y la solución de problemas. Pólya valora el diálogo socrático en el aula porque permite al maestro no solo transmitir conocimientos, sino también le permite fomentar un pensamiento crítico y autónomo en los estudiantes. A través de preguntas cuidadosamente formuladas, el maestro puede dirigir la atención de los estudiantes hacia los aspectos más importantes del problema, ayudándolos a descubrir por sí mismos los pasos necesarios para resolverlo.

El diálogo socrático no solo guía a los estudiantes hacia la solución de un problema específico, sino que también los alienta a reflexionar sobre su propio proceso de pensamiento. Esta reflexión es esencial para el desarrollo del pensamiento crítico, ya que los estudiantes aprenden a cuestionar sus suposiciones, a evaluar sus métodos y a considerar diferentes enfoques para resolver un problema. Además, al participar activamente en este proceso de indagación, los estudiantes se convierten en aprendices más independientes y autónomos, capaces de aplicar habilidades de argumentación e interpretación para cuestionar y debatir ideas que se ponen en clase y que promueven un desplazamiento del aula hacia situaciones nuevas y desconocidas.

El objetivo central de esta pedagogía propuesta por George Pólya, que se centra en la resolución de problemas y se encuentra apoyada por el diálogo socrático, es desarrollar en los estudiantes no solo la capacidad de resolver problemas matemáticos, sino también su creatividad, originalidad, pensamiento crítico y reflexión autónoma. El diálogo socrático, al guiar a los estudiantes en su proceso de reflexión y descubrimiento, se convierte en una herramienta esencial para fomentar una educación que va más allá de la mera transmisión de contenidos, más bien, promueve un análisis profundo y un aprendizaje significativo.

A continuación, presento de manera resumida diferentes referentes teóricos que contribuyeron al desarrollo del marco pedagógico de este trabajo:

	Nombre	Revista	Autor(es)	Aporte
Artículo	Enseñanza de la matemática por la mayéutica.	Revista electrónica de la Red Durango de Investigadores Educativos, Vol. 9, Nº. 17, 2017, págs. 53-60	Enrique de la Fuente Morales	En la lectura se expone un método de clase que corresponde a la mayéutica griega. El texto se cuestiona si es posible por medio de preguntas y cuestionamientos reflexivos hacer que nazcan las ideas para consolidar el conocimiento. También expone cómo la enseñanza de la matemática ha sido víctima de modelos rígidos de aprendizaje donde se privilegia más la memoria que el aprender a pensar.
Artículo	El diálogo como recurso en la construcción del saber matemático en el aula.	Universidad Nacional de Mar del plata. 2009	María Cristina Rocerau, Silvia Vilanova, Mercedes Astiz, María Susana Vecino, Guillermo Valdez, María Isabel Oliver, Perla Medina	En este artículo se exponen los distintos enfoques que puede tener un diálogo como herramienta didáctica para evidenciar bien sea una metodología, una forma de solucionar un problema, una denuncia a un sistema educativo o el nacimiento de ideas complejas. Toca autores como Polya, Kline, Renyi, Mason, Burton y Stacey.

Artículo	GEORGE PÓLYA & PROBLEM SOLVING. . . AN APPRECIATION	Disponible en la página de investigación científica: Researchgate 2014	SHAILESH A SHIRALI	En este ensayo el autor rememora el papel sobresaliente de George Polya para la enseñanza de las matemáticas y lo relevante que fueron sus cuestionamientos sobre cómo se puede enseñar a resolver un problema. En él resalta la importancia del diálogo en el aula y los 10 mandamientos que Polya tenía para todos los docentes del aula. Hace una comparación muy interesante entre el papel del profesor y el de un actor en una obra teatral.

Tabla 2

	Nombre	Revista	Autor(es)	Aporte
Artículo	COMPLEJIDAD Y CIENCIAS SOCIALES DESDE EL APORTE DE LAS MATEMÁTICAS CUALITATIVAS	**Cinta moebio n.33 Santiago dic. 2008**	Carlos E. Maldonado	El artículo hace una introducción a lo que se debe llamar matemática cualitativa. Desde un enfoque complejo, el estudio de la matemática en fenómenos evolutivos, indeterminados, caóticos,

				temporales, irreversibles. Resaltando la importancia de tecnologías computacionales para comprender fenómenos dinámicos, y los filamentos en los que se encuentra lo indefinido en la matemática.
Artículo	La pregunta socrática como herramienta para la enseñanza de la matemática, en estudiantes de secundaria.	Eco Matemático, 13(2), 83-98.	Cantillo-Correa, J. J., Viloria-Cabrera, K. A., Conde-Carmona, R. J., Tovar-Ortega T.	En este proyecto se expone un estudio de caso mixto sobre la enseñanza de los números enteros para niños de grado sexto por medio de una metodología que utiliza la pregunta socrática en el aula. En el estudio concluyen que el método basado en la pregunta socrática promueve el pensamiento crítico y argumentativo.

Artículo	El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas	Educación Matemática, vol. 26, núm. 1, abril de 2014	Solange Roa Fuentes y Asuman Oktaç	A lo largo de la historia la pregunta sobre el infinito ha suscitado diversas discusiones acerca de su existencia; si hay algún objeto o ente infinito; si lo infinito puede presentarse como una multiplicidad, o si se presenta como elemento único. Para tratar estas preguntas, es necesario estudiar lo que es la existencia como actualidad y la existencia como potencia, de donde luego se desprenden discusiones sobre el uso aritmético que se le puede dar a este concepto.

Tabla 3

Dos palabras claves en el enfoque pedagógico del diálogo socrático y la resolución de problemas son la mayéutica y la heurística. La Mayéutica en la antigua Grecia tenía que ver con el acto de ayudar a dar a luz a las mujeres, y significaba “arte de partear”. En los diálogos socráticos se transforma su uso. Para Sócrates el diálogo tiene la cualidad de ayudar a parir ideas a partir de preguntas que a través de un pensamiento crítico y reflexivo encuentran respuestas en el mismo interlocutor. Por otro lado, la heurística, cuyo significado tiene que ver con el descubrimiento y la inventiva, está relacionada en este enfoque pedagógico con la manera de llegar a la solución de un problema de manera original y propia. Así la relación de estas dos palabras encuentra un potente eco en la propuesta de Polya.

2.3 Contenidos de la Unidad didáctica:

2.3.1 Conceptuales: Aspectos disciplinares que se desean enseñar.

- Momentos históricos en los que surgieron discusiones y conexiones entre filosofía y matemáticas, tales como: la antigüedad griega con Tales de Mileto, Pitágoras, Zenon, Platón, Aristóteles y Euclides; el renacimiento con Fermat, Descartes y Galileo; y la modernidad con Leibniz, Kant, Cantor, Frege, Peano, entre otros.
- Magnitudes conmensurables e inconmensurables y su relación con los números racionales e irracionales. (algoritmo de la división, sustracción sucesiva, máximo común divisor).
- Sumatorias y series de la mano de las paradojas de Zenón. Convergencia de series geométricas.
- La sistematización del conocimiento matemático en una presentación axiomática-deductiva.
- Los postulados de Euclides y la existencia de geometrías no euclidianas.
- Coordinabilidad por medio de funciones biyectivas.
- Construcción de los números por medio de clases de equivalencias.
- Construcción axiomática de los números naturales (Peano).
- Paradoja de Rusell y paradoja de Cantor.
- Construcción de conjuntos infinitos más grandes que otros.

2.3.2 Habilidades: ¿Cómo la unidad didáctica les brinda herramientas que propendan por las apuestas pedagógicas del liceo?

- Reconocimiento de un marco histórico amplio y complejo para el abordaje de los problemas en matemáticas.
- Desarrollar pensamiento crítico y reflexivo sobre verdades matemáticas aparentemente incuestionables.
- Argumentación de ideas en discusiones y debates.
- Respeto por las opiniones, procedimientos y argumentaciones ajenas y diferentes a la propia.
- Despliegue de herramientas y procedimientos que permitan abordar problemas.
- Desarrollo de sentido crítico y constructivo en las intervenciones de clase.
- Despertar interés y curiosidad por problemas en matemáticas y en filosofía.

2.4 Metodología de la unidad didáctica

2.4.1 Metodología de la clase de énfasis.

En las clases de énfasis, la metodología que empleamos consistía en presentar un tema, explicarlo detalladamente y luego generar un debate activo entre los participantes. Los temas los dictamos entre los dos profesores que hacíamos parte del énfasis, uno se encargaba de la parte matemática, exponiendo el problema en su forma disciplinar e histórica, y el otro abordaba las implicaciones filosóficas que surgían a partir de dicho problema. Frecuentemente dejábamos como tarea lecturas o videos relacionados, que servían como base para las discusiones posteriores, permitiendo que, desde el análisis conjunto, construyéramos una posible solución o incluso profundizáramos en la problematización del tema en cuestión.

La manera como fuimos presentando los temas fue siguiendo una línea histórica para ir abordando los contenidos filosóficos y matemáticos enmarcados en unos momentos particulares de la misma. Si bien en algunos momentos, como en las geometrías no euclidianas, tuvimos que dar saltos grandes, nuestra idea era dotar de sentido los problemas que íbamos proponiendo por medio de la complejidad histórica que los caracteriza, los personajes que los trabajaron, las cuestiones de época que los atravesaron y las implicaciones que tuvieron en cada uno de los periodos en los que estuvieron presentes.

Resulta importante mencionar la importancia que tuvo el diálogo socrático en nuestras clases. Evidenciamos dos cualidades importantes en la utilización de este tipo de pedagogía: la más evidente y explícita en el libro y propuesta de Polya es la de realizar una construcción colectiva a partir de preguntas a los y las estudiantes, haciendo que ellos y ellas fueran quienes descubrieran y propusieran los caminos y las ideas para abordar los problemas que íbamos viendo en clase. Pero, por otro lado, también evidenciamos la importancia que tienen este tipo de metodologías para desarmar ideas y creencias rígidas sobre los conocimientos que se tienen o que se creen tener, promoviendo el pensamiento crítico. Así, se le puede dar sentido también al diálogo socrático para cuestionar verdades que parecen estar ancladas en el desarrollo de las clases y que merecen de un análisis más profundo y crítico.

Nuestro objetivo también contempló desde el principio que los y la estudiante fueran bebiendo de los temas que fuimos exponiendo en las clases para que escogieran un tema de su interés y lo abordaran con profundidad para trabajarlo como proyecto para ser presentado al final del énfasis. En este sentido se dedicaron varios espacios de trabajo autónomo en los que tuvieron la oportunidad de desarrollar y plantear las ideas que tenían como proyecto.

2.4.2 Exploración del concepto de infinito como introducción a la unidad

Es importante mencionar que, como introducción a la unidad, propusimos una exploración del concepto del infinito. Las primeras clases las dedicamos a discutir ideas que ya traían los estudiantes sobre la idea del infinito, ayudados por el documental titulado “Un viaje hacia el infinito”. Estos primeros acercamientos a los preconceptos de los y la estudiante resultaron enriquecedores para despertar curiosidad y entusiasmo para comenzar el recorrido histórico que propuso el énfasis. Así, también les pedimos que, de nuestras primeras discusiones, desprendieran preguntas que les resultaran interesantes para realizar encuestas a personas que hicieran parte de la comunidad. Esta parte del énfasis resultó bastante gratificante para los y la estudiante pues estuvimos embarcados en la exploración de las concepciones que se tienen de este concepto en la vida cotidiana, y pudimos realizar discusiones previas a la teoría y elucubrar hipótesis alrededor de las cualidades del infinito.

2.5 Materiales y Recursos.

2.5.1 Recursos que necesitan los estudiantes.

Los recursos que necesita un estudiante para abordar esta propuesta de clase son muy elementales; necesita tener un cuaderno, lápiz, esfero, colores para la toma de apuntes y materiales para realizar construcciones geométricas, tales como transportador, compás y regla. También, en algún momento se necesitó de cartulinas y marcadores para desarrollar algunas carteleras que quisimos elaborar como clase para exponerlas a la comunidad.

2.5.2 Recursos utilizados por los docentes. (Videos y lecturas propuestas)

Por el lado de los docentes fue necesario contar con un salón que tuviera acceso a un televisor para proyectar algunos videos y presentaciones que resultaban pertinentes para exponer algunos temas. Para ello también es necesario que el salón cuente con un tablero y marcadores de colores.

Los recursos utilizados fueron:

Videos:

El documental “*Un viaje hacia el infinito*” dirigido por Jon Halperin y Drew Takahashi que está disponible en la plataforma Netflix.

El video “*Las matemáticas tienen una terrible falla*” del canal de youtube Veritasium.

Lecturas:

La colección de cuentos titulada *Ficciones* de Jorge Luis Borges.

El libro Las desventuras del conocimiento matemático escrito por Gregorio Klimovsky y Guillermo Boido.

2.6 Evaluación: Criterios e instrumentos.

La evaluación de los y la estudiante estuvo enmarcada en las búsquedas del Liceo Juan Ramón Jiménez, es decir, fue una evaluación por procesos. Esto quiere decir que nos centramos en analizar y valorar el desarrollo que tenían los estudiantes a lo largo del semestre en cuanto a posturas propias, manejo de los conceptos presentados, participación constante y compromiso con la entrega de trabajos y con las lecturas, más allá de resultados finales que pudieran mostrar en una prueba de conocimientos. Nos enfocamos en el seguimiento continuo de las fases de aprendizaje, considerando aspectos como la reflexión, la autoevaluación, la colaboración y la resolución de problemas. La evaluación por procesos nos permitió identificar fortalezas para vislumbrar caminos que dotaran de sentido las propuestas de clases en el aula y que respondieran a intereses propios que se fueran generando en los que integramos el espacio, además de ser completamente coherente con la investigación cualitativa propuesta en el presente trabajo.

Así mismo, la participación de los estudiantes en las distintas clases resultó ser clave a la hora de evaluar el proceso propio que llevó cada uno a lo largo del énfasis. Esto, debido a que a través de sus participaciones pudimos evidenciar que los temas estaban quedando claros y cómo se iban apropiando de los conceptos presentados utilizándolos en intervenciones que iban ganando en complejidad.

Por último, se evaluó el trabajo que tuvo cada uno de los integrantes en cuanto al proyecto que desarrolló a partir de sus intereses. El proyecto tuvo varias fases: la primera fue las entrevistas que hicieron para traer a la clase preconceptos sobre la idea del infinito, luego desarrollaron un anteproyecto a la mitad del énfasis para ser ejecutado en la segunda parte del mismo y ser presentado al finalizar las clases a estudiantes de otros grados. Los proyectos materiales quedaron únicamente formulados por falta de tiempo y la exposición final, que fue dirigida a estudiantes de grado noveno y grado sexto, estuvo soportada por una discusión sobre los temas que los integrantes del énfasis encontraban interesantes y sobre los cuales guiaron una conversación intentando implementar el diálogo socrático.

3. Análisis y resultados.

3.1 Resultados

3.1.1 Preguntas del interés de los estudiantes que esperan responder en el espacio del énfasis y que fueron parte de las entrevistas que realizaron a la comunidad del Liceo:

Estudiante 1:

Intereses en los temas relacionados con la existencia física del infinito. Las preguntas que planteó para realizar sus entrevistas fueron:

1. ¿Existe la nada?
2. ¿El tiempo nunca acaba?
3. ¿Cómo pueden existir infinitos con límites?

Estudiante 2:

Interesado por los asuntos del cosmos y los agujeros negros, le gustan los artificios matemáticos que hemos visto para aproximarnos a las ideas del infinito. Las preguntas que planteó para realizar sus entrevistas fueron:

1. ¿Qué es para ti el infinito?
2. ¿Crees que un ser finito puede descubrir el infinito?
3. ¿Qué pasaría si se descubriera algo infinito?
4. ¿Te parece que el tiempo es infinito?
5. ¿Algo que tiene inicio puede ser infinito?

Estudiante 3:

Más interesada en estudiar el infinito como una idea matemática y las implicaciones que puede tener sobre el conocimiento. Las preguntas que planteó para realizar sus entrevistas fueron:

1. ¿Qué consideras que es el infinito?
2. ¿Hay infinitos físicos?
3. ¿Cómo diferenciar cuando un infinito es actual a cuando es potencial?
4. ¿El espacio y el tiempo son continuos? / ¿Es el infinito continuo?
5. ¿Es verdad que somos dueños de nuestro futuro, y existen las realidades o posibilidades infinitas según el camino propio que construimos a partir de nuestras decisiones; o tenemos un destino predeterminado, ¿y nuestra vida es solo un insignificante segmento de la recta "única y verdadera" que ya es infinita y ya tiene rumbo fijo?
6. ¿Realmente existe la nada? / ¿Qué relación sostiene con el infinito? / ¿Qué crees que es la nada?

Estudiante 4:

Se le ve mucho interés y apertura a las ideas que vamos exponiendo en clase: es un estudiante inquisitivo en sus apuntes y curioso por los temas por venir. Las preguntas que planteó para realizar sus entrevistas fueron:

1. Si existen infinitos con límites, ¿cuál es el último número?
2. Si existen infinitos números naturales y entre ellos existen infinitos números reales ¿Un infinito puede contener infinitos infinitos?
3. ¿Todos los infinitos son potenciales?
4. Si un infinito sigue creciendo ¿Es potencial o actual?

3.1.2 Entrevistas finales a estudiantes:

ENTREVISTA 1

Profesor:

Estoy haciendo una entrevista en la que te haré una serie de preguntas de lo que significó para ti el énfasis, que tratará de qué cosas y qué conceptos te resultaron más enriquecedores. Entonces, la primera pregunta es: ¿cómo cambió tu idea del infinito a lo largo del énfasis? ¿Cómo crees que cambia esa idea?

Estudiante 1:

Mmm pues, al principio del énfasis, creo que en general todos los integrantes teníamos como una idea muy ¿cómo decirlo? muy pues, no ignorante, pero sí muy cerrada. Pensábamos que el infinito era algo que simplemente sigue hasta el más allá y nunca termina. Como no sé, lo de los números naturales. Pero cuando lo estudiamos, como que abre mucho el pensamiento darse cuenta de que hay distintos tipos de infinito y cada uno tiene propiedades y cosas como lo discreto, lo no discreto y cosas así. Y pues, eso me parece muy interesante, como saber que de una idea básica uno puede explorar mucho más.

Profesor:

Ahora que comentas esa idea, me das paso a la siguiente pregunta ¿Qué crees que le aporta a esa construcción de la idea del infinito, la parte matemática y que crees que le aporta la parte filosófica?

Estudiante 1:

Pues sí. O sea, son esenciales. Yo digo que la matemática sí es muy importante para explicar todas las sucesiones y todos los procesos que llevan a esas conclusiones de distintos tipos de de infinito, de temas, de si es discreto o no, si se llega como una igualdad o algo así. Y pues, la filosofía también es importante pues se relaciona con otros temas y con otros personajes importantes como lo vimos de presocráticos, Platón y personajes así.

Profesor:

Listo, y ahora que mencionas a Platón y a los presocráticos. ¿Tú, tú dónde crees que reposa el valor histórico de la relación entre matemáticas y filosofía?

Estudiante 1:

Sí, yo creo que, en esa civilización europea antigua, más que todo Grecia, pues ahí empiezan Sócrates, Platón y pues que son, no sé, si calificarlos como filósofos o matemáticos, porque exploran las dos áreas y pues sí, lo que digo una complementa la otra y desde ahí como que muchas aplicaciones necesitan de la otra.

Profesor:

Vale, y para ti, dentro del énfasis ¿hubo algún problema matemático que recuerdes, especialmente por sus consecuencias filosóficas? O sea, un problema matemático que desemboca al final en una reflexión filosófica.

Estudiante 1:

Recuerdo el problema del que hablamos bastante, que era el hotel infinito, que tiene como muchas repercusiones en lo que uno puede llegar a concluir sobre el infinito, como el número de habitaciones pares es igual al número total de habitaciones. También me parece muy importante que en el problema pues matemático entra el factor del tiempo, que también, pues es algo que afecta mucho la percepción que tiene uno de esos problemas y las conclusiones a las que puede llegar, como como decir que la recepcionista, ¿cómo era? tardada cada vez menos en recorrer el hotel y al final se demoraba un minuto en recorrer todo el hotel.

Profesor:

Listo. Bien. Ahora pues vamos a algo, digamos más metodológico del asunto. Y es: ¿qué virtudes y que falencias encontraste en la metodología de clase? ¿Qué rescatarías de la metodología que sostuvimos en clase? ¿Y qué sientes que también representa cosas a mejorar dentro de las clases que tuvimos?

Estudiante 1:

Cuando empezamos a ver ya como problemas matemáticos y cosas así, sí me di cuenta que realmente no era un énfasis, como tan fácil, era pesado, y pues son cosas, o sea, son problemas que, si uno no tiene las bases como tan claras, pues sí, le pasan una factura y pues también son problemas que son adelantados a lo que nosotros hemos visto hasta ahora en el colegio.

Y pues no sé, además eh, sí también me di cuenta que era una clase de mucha teoría y casi nunca práctica, pero pues me parece que no es un problema porque realmente no hay una forma de hacer, de enseñar prácticamente el conocimiento que se está viendo, porque pues son cosas no tan tangibles, pues los números no son tangibles y pues la filosofía yo creo que también no tanto y ya se es más abstracto.

Profesor:

Vale, gracias ¿Cual podría ser un tema o una pregunta además del infinito que tú sientes que respondiste dentro del énfasis a la que le dedicamos tiempo o que se haya trabajado dentro del énfasis, pero que no tiene nada que ver con el infinito? Bueno, no, nada que ver, pero si un tema diferente.

Estudiante 1

Pues no, si nos fuimos por las ramas, pero así como que no, no se. No, no, nada que ver como otros problemas y que hayamos tocado aparte del infinito. En cierto punto creo que abordamos el lado más común de nuestra existencia y del planeta y eso como de las galaxias. Pero pues eso, pues al fin y al cabo tiene una relación sólida con el finito y con los secretos y todos esos asuntos.

Profesor:

Muchas gracias.

ENTREVISTA 2

Profesor:

Bueno, primera pregunta: ¿Cómo cambió tu idea del infinito a lo largo del énfasis?

Estudiante 2:

¡Mmm pues yo siempre pensé, o sea, antes de entrar al énfasis, siempre pensé que el infinito existía en principio y después del énfasis pues no! O sea, siendo que ya no existe, o sea, ya no concibo un infinito como actual. Entendí como más conceptos del infinito, como el potencial y el actual que son dos, pero pues sí, me ayudó como a saber como entender mejor ese concepto que la verdad nunca se había explorado en clases que tenemos habitualmente en el colegio.

Profesor:

Bueno, y ahí, en ese caso, ¿cuál crees que es el valor de pensar la idea del infinito de la mano de las matemáticas y de la filosofía?

Estudiante 2:

Me parece, no sé si valioso, pero me parece interesante más que todo. O sea, me parece como algo que no sé si es tan valioso, porque si es algo que la gente solo usa si se va a centrar mucho por otros lados, como si quieres, no sé, estudiar física, matemática. Yo no sé, si quieres estudiar filosofía en algún punto donde la Filosofía trata sobre el infinito.

Sí, sí, bueno, siento que es muy específico. ¿No sé si le daría un valor como aprender cosas más básicas como sumas, restas, eh? Pero siento que me parece más interesante que muchos temas incluso que se ven en bachillerato, que tampoco veo como tanta necesidad. ¿Y me repites la pregunta?

Profesor:

¿Cuál crees que es el valor de pensar la idea del infinito de la mano de las matemáticas y de la filosofía?

Estudiante 2:

Me parece que investigar un tema a partir de dos áreas se me hace incluso más interesante que investigar lo netamente como el infinito matemático o el infinito filosófico. Se me hace más valioso investigar la ciencia como parte de la historia. Y desde esas dos perspectivas, la filosofía y la matemática que mezclan las perspectivas, porque nuestras clases son muy centralizadas, muy focalizadas, como no, si vemos algo de sociales es pura historia. Pero entonces como un poco el contexto, todo lo que estaba pasando en el resto de áreas no se ve tanto o si vemos filosofía porque esas dos áreas que están muy relacionadas. Yo siento que deberían ser una misma clase como historia y filosofía porque van muy de la mano.

También me queda una relación más marcada, entre filosofía y matemáticas, pero yo siempre lo he pensado un poco porque las matemáticas, bueno, como lo vimos en el énfasis, simplemente son como una convención, ¿no? Y realmente no es como que existan los números, no es que existan las sumas, o sea, se pueden encontrar ejemplos en la vida real, en la realidad, pero al fin y al cabo las matemáticas solo son como una herramienta que nos facilita la vida y siento que la filosofía y la matemática están relacionadas en tanto conciben algo que nos ayuda, como una herramienta imaginaria. Si necesito que esto tenga unas reglas específicas, como un orden, algo que sea lógico, pues eso necesita filosofía y así, para lograr una comprensión.

Profesor:

Aprovechando que tú trajiste la historia a la discusión ¿Dónde crees tú que reposa el valor histórico de esa relación entre filosofía y matemáticas?

Estudiante 2:

Pues yo siento que la filosofía y la matemática, pues históricamente han avanzado muy juntas. Entonces, Pues por ponerte el ejemplo más sencillo, en la época pitagórica que Pitágoras decía como no todos los números son racionales, no todo se puede explicar como A sobre B. Entonces ¿sí era así?, - sí, conmensurables- más bien sí. Siento que esa era su filosofía, su manera de ver el mundo. Entonces eso les marcaba en qué podían pensar ya filosóficamente. Entonces, si todo era conmensurable, entonces debía haber una partícula única, como que no se pudiera dividir, O sea, como que no estamos hechos de partículas cada vez más pequeñas, sino que debe haber una última partícula de la que todos debemos estar hechos. Y eso ya es más por la filosofía. Y pues al fin y al cabo ellos incluso terminaron matando gente como para guardar sus secretos, digamos. Pero sí es.

O sea, como la matemática siempre está obligada, como la manera de pensar de la época y como los avances en general del pensamiento humano.

Profesor:

Eh, listo. ¿Y hay algún problema matemático que recuerdes, especialmente por sus consecuencias filosóficas?

Estudiante 2:

Sí. Eh, Hay un problema que a mí me dejó pensando en que los números simplemente… ¿O sea que la matemática no tiene sentido? Básicamente, que es el de “Hay más números reales entre cero y uno que números naturales entre uno e infinito”. Y eso a mí me deja un poco loco, la verdad. O sea, como porque sí, como es ilógico. O sea, mi cerebro, todo lo que yo comprendo me dice que no tiene sentido, pero pues la demostración fue una cachetada. Pues sí, pues me dejó pensando un rato y ese problema lo recuerdo mucho.

Profesor:

¿Y recuerdas las consecuencias filosóficas ahí? ¿Cuáles son las consecuencias filosóficas?

Estudiante 2:

No sabría decirte, pues como que el infinito no se puede llegar a conocer del todo y que simplemente el infinito es ilógico. O sea, siento que como que es una consecuencia de eso. Puede ser que, no podemos comprender el infinito dentro de nuestra lógica humana, sino que toca ir más allá. Toca decir otras cosas para comprender eso.

Profesor:

Bueno, vamos ahora a algo más metodológico del énfasis, y es: ¿qué virtudes y falencias encontraste tú, o pudiste sentir tú, en la metodología que llevamos de la clase?

Estudiante 2:

¿Qué virtudes? Bueno, las virtudes ya las mencioné antes, me parece que lo más interesante, lo que encuentro más valioso, es como ustedes pueden relacionar dos materias que comúnmente no son tan asociadas, porque uno suele dividir a ciencias y humanidades y cosas así, pero poder unir esas dos materias a mí me parece una gran virtud y muy difícil de hacer. O sea, poder unir una ciencia social con una ciencia exacta a mí me parece muy difícil y por eso en principio me llamó la atención el énfasis. ¿Yo dije filosofía y matemática, como van a hacer eso? Me pareció una gran virtud y la verdad siento que les salió muy bien. Me parece que ustedes dos se complementaron muy bien.

¿Y qué falencias te podría decir? No lo sabría explicar. Siento que lo del proyecto, como el proyecto final, se dejó un poco, no sé si de lado, sino como a la deriva en algún momento y no se entendió un poco del todo. Como ¿Qué buscábamos hacer? ¿Qué se buscaba en el énfasis como proyecto final?, pero, así como de metodología de la clase, yo siento que no, no hay como una falencia específica del proyecto, porque sí siento que, pues al final quedó muy muy a la deriva, como tú lo acabas de decir, porque también creo que no contamos con el tiempo suficiente.

<u>Profesor:</u>

¿Bueno, ahora en lo temático, cuál podría ser un tema o una pregunta además del infinito que tú sientes que estuvo presente siempre en el énfasis?

<u>Estudiante 2:</u>

¿Siempre?

<u>Profesor:</u>

Bueno, no siempre, a lo largo del énfasis.

<u>Estudiante 2:</u>

No sé si fue justo por la dinámica de las personas que hacían parte del énfasis y no sé si se volvería a repetir con otras personas que vean este énfasis. Pero yo siento que un poco la pregunta filosófica de ¿qué es un número?, o sea, todo el rato estábamos bromeando, y no, los números no existen y haciendo chistes como un poco de la matemática no tiene sentido ¿Y la verdad, pues dentro de chiste y chiste era un poco cierto, ¿no? Como que siempre estuvo la pregunta y que al final se respondió pues hasta donde se puede, porque, al fin y al cabo, para mí, es una convención.

Pero, si siento que la pregunta más cercana, aparte de la de ¿qué es el infinito?, fue ¿qué es un número? como tanto desde la filosofía, como desde la matemática ¿qué peso recae en que existan ese tipo de conceptos, como los números?

Profesor:

Ahora que mencionas a los números, tiene que ver con la siguiente pregunta, qué es: ¿tú ahora habiendo pasado por el énfasis, qué problemas te suscita la idea de número y por otro lado, qué problemas te suscita la idea de infinito?

Estudiante 2:

¿Qué puede suscitar la idea de número? Si te soy muy sincero, siento que antes del énfasis podía llegar a suscitar, en mí, más problemas.

Pero como. O sea, porque ahorita yo tengo la concepción de que los números simplemente son una convención que está hecha para ayudarnos y para facilitarnos un poco las tareas tanto en el mundo real como después en la teoría, pero, porque siempre tuve el problema de bueno y ¿quién se inventó esto? que 1 vaya antes que 2 y 3 después que 2. Eso siempre a mi me causaba “pues yo lo aprendo porque es así” pero nunca supe bien cómo era, y siento que el énfasis más que darme preguntas sobre los números en general, siento que me respondió bastantes, pero sobre el infinito si me dejó más dudas, porque como te digo, yo siempre pensé que el infinito podía existir, como el universo es infinito, y llegué al énfasis y se me cayó. Me quedé con la pregunta de ¿será que si hay algo infinito?, si el universo se expande parece que podría ser infinito potencialmente pero nunca va a ser infinito, pero entonces ¿si los infinitos potenciales nunca llegan a ser infinito de dónde sacó el infinito actual?

Porque lo que me quedó del énfasis es que todos los infinitos que nosotros percibimos como infinitos son potenciales. Pero entonces si no existe un infinito actual, me queda la pregunta de ¿por qué existe la idea de infinito? Es decir, la pregunta del comienzo del énfasis de ¿qué es el infinito? me va a quedar para toda la vida.

Profesor:

Bueno, hablando con otro estudiante me comentó que, entre los dos, después de haber visto el énfasis, habían ido discutiendo sobre el sentido de la clase de matemáticas, y que la conclusión a la que habían llegado era que carecía de sentido. Cuéntame al respecto.

Estudiante 2:

Esa conversación la tuvimos después de una clase en la que vimos un video y en el que la conclusión de la clase es que la matemática es ilógica, irreal, incompletable y algo más.

Profesor:

Inconsistente, incompleta e indecidible.

Estudiante 2:

Pero, no eso nos generó el dilema de ¿para qué sirven? yo ya sé todo lo que puede representar en el mundo, el resto ¿para qué? y desde ese punto ahora veo las clases de matemáticas como un juego lógico.

Profesor:

Muchas gracias.

ENTREVISTA 3

Profesor:

Bueno, comencemos con las preguntas. ¿Cómo crees que cambió tu idea del infinito a lo largo del énfasis?

Estudiante 3:

Es que como vimos tantas perspectivas. O sea, empezamos con la visión del infinito como desde Grecia. Algo así, algo muy antiguo hasta prácticamente el actual. Entonces creo que mi visión cambió mucho conforme iba pasando el énfasis, porque claro, veíamos como pensadores de la época y cada uno como que tenía una visión diferente, especial y algunas me terminaban convenciendo y llamaban mi atención. Entonces siento que varía mucho y es algo que me mantuvo enganchada al énfasis, porque si fuera algo como muy constante pues uno se aburriría. Pero ahí fue como abrirse a muchas ideas nuevas que tal vez nunca habría pensado si no me hubieran adentrado en ese mundo, entonces sí fue algo con cambios significativos.

Profesor:

¿Cuál crees que es el valor de pensar las matemáticas de la mano de la filosofía y la filosofía desde una perspectiva matemática?

Estudiante 3:

Supongo que las matemáticas serían como solo números y cosas así, un poco más vacías. Entonces, con la filosofía es como darles más bien un sentido o un significado a esos números y apropiarnos de diferentes cuestiones, como lo que veíamos de que a veces relacionaban al infinito con Dios. Y me acuerdo del genio maligno de Descartes y esas cosas.

¿Y un problema filosófico? Tal vez. A veces lo que quiere la filosofía es como pruebas, porque en algunas ocasiones es como muy de lanzar ideas, pero que no hay manera de comprobarlas o de tener alguna certeza, sino que más bien es como ingeniárselas para creer o tener fe en alguna cosa. Entonces tal vez las matemáticas en la filosofía ayudarían a intentar tener pruebas contundentes y así, números exactos de por qué pasa tal cosa o tal otra.

Y si siento que son cosas como que se complementan mucho por lo opuestas que son. Porque la matemática es como una ciencia pura y exacta. Y la filosofía es más bien… yo la veo como un poco más imaginativa, Y como más de… cosas cualitativas y no tan cuantitativas, que son como una relación muy curiosa, la verdad. Y que así se complementan. Supongo.

Profesor:

Ahora ya viendo que tienes una noción de la relación que hay entre filosofía y matemáticas, ¿tú dónde crees que reposa el valor histórico de la relación entre ellas, entre la matemática y la filosofía? Ahorita me hablabas de que hicimos un recorrido largo entre filosofía y matemáticas tratando la idea del infinito. ¿Dónde crees tú que reposa el valor histórico?

Estudiante 3:

Siento que está ligado a lo que creo que respondí en la primera pregunta, y es que, como había perspectivas tan diferentes y como cambios tan abruptos en el pensamiento, es como una manera de abrirse a un conocimiento que no es que esté bien ni esté mal, sino que es como a nuevas oportunidades y a nuevas ideas, que me parece algo muy interesante como no tener una idea única y pensar que una cosa es como es y ya, sino que puede ser como muchas cosas a la vez.

Hay una frase, es así, la recuerdo más o menos, la podría medio parafrasear. Es de una escritora que dice "la verdad es una joya de múltiples facetas" y creo que me di cuenta muy, no sé cómo llamarlo, muy contundente de eso en esto, porque al comienzo yo tenía pensado que no pues… uno más uno es dos y ya, pero después hay muchas cosas locas que se desprenden y que tienen su lógica, entonces tiene como una magia, no sé. Y el valor como de estudiar todas estas perspectivas es como un poco nutrirse y si hubo algún error, toca conocerlo y después aprender de ese error; y si hubo pues aciertos en el pasado, pues, aprender más y seguir a partir de esos aciertos, pues por la ruta del conocimiento.

Profesor:

Que linda reflexión ¿cómo se llama la autora?

Estudiante 3:

La autora, eh, es la del Bestiario de Halfling…Me leí en los tres libros. ¡Se llama Laura Gallego!

Profesor:

Listo ¿Hay algún problema matemático que tú recuerdes, especialmente por sus consecuencias filosóficas?

Estudiante 3:

¿Eh? Esto de Cantor, el trabajo de Cantor sobre los conjuntos me dejó muy impresionada. Esta idea de infinitos más grandes que otros. Lo tuve que pensar mucho con la almohada, me quitó el sueño, de todo, de todo. Eh. Hubo muchas cosas que me dejaron muy impresionada, supongo que, si a mí me dejaron así impresionada ya estando como en el siglo XXI, no me imagino cómo habría sido, como en el tiempo en el que se descubrieron esas cosas, me imagino que fue muy loco. Y me gustó una clase, intercalamos clases, y una clase vimos cómo las cosas matemáticas y en otra con sus consecuencias en la filosofía y la interpretación como filosófica. Sobre todo, como el trabajo de Cantor, el de la Diagonal y los conjuntos. También algo que estuvimos viendo, no me acuerdo de cuál matemático era, o si era un filósofo, pero era ese de conformar todo el grupo de los números naturales, eh, a partir del conjunto vacío. Eso también me parece muy loco. Eso yo creo.

Profesor:

Vale, vamos a ir a algo de lo que tú ya hablaste, que es, un poco la metodología que tuvimos en clase y es la pregunta de ¿qué virtudes y falencias, encontraste o recuerdas del énfasis?

Estudiante 3:

Pues parecido a lo que dije antes o bueno, más bien lo que dije hace un momento, me parecía como una muy buena idea ir intercalando las clases, como para tener un descanso entre una y otra. Entonces me parecía como una buena forma de no dejar atrás la filosofía si estábamos en una clase de matemáticas, sino retomarla en la próxima. Y así con matemáticas también. Entonces eso me pareció como algo muy chévere. Me gustó también que tú a veces hablaras de filosofía y que Federico también a veces hablara de matemáticas, como que se mezclaban era chévere.

Esto está un poco salido, pero me gustó que fuéramos poquitos porque así todos podíamos como contribuir con las ideas y llegar a lugares más profundos y explorarlos mejor. Y cada quien brindaba… ósea, me gustó como que no fuera como una clase, como de cátedra, así, ustedes hablando solos, sino que me gustó mucho los debates que teníamos, que planteáramos paradojas y nos volviéramos locos, pero todos juntos así, hablándolo.

Y cosas que no me gustaron, yo creo que ninguna, solo a veces terminar como con las neuronas mal, pero después se reponían y era chévere, o sea era chévere como retarse de esa forma. Me pareció un énfasis en algunas cosas, como sencillo, pues no dejaban muchas tareas y eso hoy lo agradezco mucho, pero como complejo. Y me gustó mucho, a mí me gusta retarme con desafíos, entonces lo disfruté mucho.

Profesor:

Listo. Ahora, en cuanto a lo temático, ¿cuál podría ser un tema y/o pregunta además del infinito que tú sientes que estuvo presente durante el énfasis o que estuvo presente para ti?

Estudiante 3:

Siento que también estuvo un poco presente el tema de la física, o de la relación entre la filosofía, las matemáticas y la física, sobre todo en esto del concepto de la nada, el espacio, las distancias entre diferentes cosas. También cuestiones religiosas, como la relación del infinito con dios, que ya lo había mencionado. Y también como la matemática, como discreta también, pues es parecido a lo del infinito, pero en ese es más bien como la extensión así y la agrupación grande. Entonces la Matemática discreta también. Supongo que la geometría. Y me parecía curioso relacionar como alturas o conceptos más bien geométricos, y llevarlos a temas que tenían que ver con el infinito. Eso, creo.

Profesor:

Última pregunta ¿Qué problemas particulares te suscita ahora la idea del infinito, y cuáles la idea de número?

Estudiante 3:

Había una definición de número que me gustó de uno de los personajes que vimos, alguno de los últimos, pero no recuerdo quién. Me cambió la idea de número con el concepto de las sucesiones, en este momento no lo recuerdo muy bien, antes veía a los números de una manera muy básica, como un símbolo, pero me sirvió para ver al número más allá del símbolo sino verlo … no sé cómo que cosas exactamente pero, no sé, tengo como un nuevo punto de vista, no sólo pensándolo como una cantidad exacta sino como una posibilidad, un elemento constituyente a un grupo, no sé, es raro. Lo curioso de este énfasis es que yo entré esperando tener respuestas así claras y exactas, y creo que salí un poco más desubicada de lo que entre, pero con más conocimiento, entonces es un poco paradójico porque me llené mucho más de conocimiento en sí pero al mismo tiempo eso me hizo salir con más preguntas y al comienzo lo pensaba como un poco frustrada diciendo "ay no tengo un número exacto", pero después me gustó más, por esto de que me abrí a nuevos problemas a nuevas incógnitas, que si bien no se resolvieron totalmente porque vimos cosas muy complejas, fue como una experiencia mágica.

Profesor:

¿Y la idea de infinito?

Estudiante 3:

La idea de infinito me pone a pensar como en la constancia y en la permanencia de algo. Estos pensamientos que todo el mundo ha tenido alguna vez, de "bueno quien me prueba que existo o me van a recordar en tanto tiempo", en algún lado ví que la diferencia entre un gugol y un uno comparado con el infinito era ínfima e insignificante. También me abrí a nuevos infinitos, porque antes tenía la noción del infinito de los naturales y el de los enteros, conocía el de los reales, pero no conocía otras maneras de entender este concepto.

Profesor

Muchas gracias.

ENTREVISTA 4

Estudiante 4:

Entonces, lo que te decía era que como que tenemos una impresión rara de las matemáticas después del énfasis y sobre todo por la prueba de la construcción del conjunto de los números naturales a partir del conjunto vacío.

Profesor

Ah, sí, claro.

Estudiante 4:

O sea, por eso y por otras cosas, también por todas las pruebas de que la matemática está incompleta, que es, es indecidible y todas estas cosas, como que quedamos con la sensación de que la matemática es como… algo que no sale de ningún lado. Pero yo me acuerdo que al final del énfasis no decías que esa era la magia de las matemáticas, que al no salir de ningún lado, como al poderse construir a partir del conjunto de vacío y al tener como tantas incógnitas en sí, pues te da cabida para la exploración y pues sí.

Profesor

Si, yo creo que ese es el objetivo en últimas, es ver que la matemática no es un edificio así, súper estructurado, que no tiene salidas, sino que sí, justamente se puede seguir construyendo. Pero bueno, chévere esas inquietudes. Continuemos. ¿Para tí cómo cambió la idea del infinito a lo largo del énfasis?

Estudiante 4:

Bueno, yo entré con una noción del infinito muy básica. Pues no había ahondado mucho en el tema, pero ya cuando empezamos a ver todas las perspectivas del infinito a partir de varios autores pues, quedé igual a lo que sabía antes del infinito, pero pude enriquecer visión con otras visiones. Y lo que más me sirvió sobre todo fueron las pruebas como de sucesiones infinitas o las figuras que van creciendo hacia el infinito. También entender lo de continuo y discreto, es esa conversación de que si los números pueden ser continuos o discretos o si el espacio era continuo o discreto. Todo eso me ayudó a ver el infinito de otra forma. Tal vez no entenderlo, pero sí a poder verlo de muchas otras formas que antes no contemplaba. Entonces eso yo creo que es lo más interesante.

Profesor

Listo, ahora, ¿cuál crees que es el valor de pensar las matemáticas de la mano de la filosofía y la filosofía desde una perspectiva matemática? O ¿dónde crees que reposa esa relación entre matemáticas y filosofía?

Estudiante 4:

Pues a ver, no sé si se relacionan como disciplinas, pero pues como vimos muchos filósofos que intentan tratar, más que todo la física, pero también la matemática y sobre todo el concepto del infinito en sus filosofías. ¿Entonces, pues yo creo que ahí es donde se relacionan, no? Porque de alguna manera para comprender el mundo y para formular una tesis acerca de cómo funciona el mundo en filosofía, yo creo que también tenemos que tocar las matemáticas porque es una manera moderna de explicar el mundo y el infinito, porque pues es una noción ahí que está en las matemáticas y que es un poco incómoda para algunos filósofos. Entonces, me parece que ahí reside la relación entre las dos.

Profesor

Vale, tocaste sobre todo la relación desde la filosofía hacia las matemáticas. Ahora en la matemática, por ejemplo, tú encontrándote en clase de matemáticas puedes vislumbrar alguna discusión filosófica.

Estudiante 4:

Sí. Pues sí. A ver, pues, por ejemplo, ya para el otro lado, como con conceptos matemáticos como el infinito, que yo diría que es matemático, ya nos podemos preguntar cosas en varias disciplinas. Incluso me acuerdo que discutíamos sobre Dios y sobre si Dios era infinito y la infinitud también es perfección. Entonces pues me acuerdo mucho de esos debates que teníamos acerca de cuestiones religiosas. Y también es que como ya dijimos, la matemática no es 100% acertada en algunas partes y también tenemos muchos misterios y enigmas, y yo creo que ahí es donde la filosofía entra en juego, ¿no? ¿No hay como una rama de la matemática que es como algo así, que estudia la estructura de las matemáticas desde un punto filosófico?

Profesor:

¿La lógica?

Estudiante 4:

Desde la lógica, sí. Yo creo que ahí se relacionan.

Profesor:

Listo. ¿Ahora, cuál crees que es el valor histórico que tiene la relación entre filosofía y matemáticas?

Estudiante 4:

El valor histórico. Pues eh, nosotros vimos desde Grecia, desde la antigua Grecia, y vimos hasta que, como hasta el siglo XX, casi. Entonces, me parece que poder ver un espectro tan grande de pensadores en unas épocas tan diferentes pero tocando el mismo tema, me parece que ese es el valor histórico de la relación entre la filosofía y las matemáticas, que es como atemporal, de cierta manera, porque a pesar de que la filosofía y las matemáticas casi que siempre se preguntan por las mismas cosas o por cosas similares, a mí me pareció interesante ver cómo a partir del tiempo en el que se estaba se llegaba a conclusiones bien diferentes, o se aproximaban a la pregunta del infinito, por ejemplo, de maneras diferentes como eh, tal vez con relación a Dios, tal vez no, a veces con relación a la matemática. Ese es el valor para mí, sí.

Profesor:

¿Hay algún problema matemático que recuerdes ahí, en esa línea histórica que trazamos, que recuerdes especialmente por sus consecuencias filosóficas?

Estudiante 4:

¿Un problema matemático? Pues, me acuerdo de la paradoja de Zenón, que pues tenía un planteamiento matemático, que pues no sé si cuando se planteó se planteó matemáticamente como lo vimos se planteó con una sumatoria, porque pues eso se inventó después, pero, tiene repercusiones filosóficas acerca del movimiento, quizá ya no es una cosa tan, tan matemática, sino más, más filosófica y también acerca del tiempo, del espacio, de lo que ya hablamos ahorita, de que si es continuo o discreto. Recuerdo especialmente eso.

Profesor:

Bueno, ahora vamos más como a lo a lo crítico del énfasis. Y es ¿qué virtudes y falencias puedes encontrar en la metodología que tuvimos en clase, es decir, en el desarrolló del énfasis?

Estudiante 4:

Bueno, pues de virtudes, yo creo que tengo más virtudes que falencias realmente. Me gustó mucho que, al principio, las primeras clases, me acuerdo muy bien, que eran de conversación, más que todo ver como que nociones teníamos del infinito, que preguntas teníamos y sí, como ver nuestras inquietudes.

También me gustó que Federico y tú fueran alimentándose mutuamente las intervenciones del otro, el más desde la filosofía y tú más desde las matemáticas. Y también me gustó mucho que lo viéramos con autores como con filósofos y matemáticos, como en específico, y que lo fuéramos tratando a lo largo del tiempo.

También me gustó que a veces resolviéramos estos problemas, que me acuerdo una vez que hicimos una cosa como de una matriz grande, que teníamos que buscar regularidades. Eso me gustó, me gustó que pudimos, pues generar debate. Eso fue lo que más me gustó, que pues sí, había a veces mucha cátedra, claro, pero cuando se generaba el debate todos teníamos como elementos para aportar y para discutir. Eso para mí fue lo más valioso, que todos pudimos aportar de alguna manera a la construcción del énfasis.

Y cosas negativas. ¿Falencias? no, pues en este momento no se me ocurre ninguna. No sé, pues el calor que había en el salón porque las clases eran en la tarde.

Profesor:

Tal vez debimos gestionar un mejor espacio, si. Listo, ahora. ¿Cuál podría ser un tema y pregunta además del infinito que tú sientes que siempre estuvo presente en clase?

Estudiante 4:

Pues yo siento que siempre tuvimos discusiones que iban y venían. Sí, siempre, teníamos el infinito como pretexto, digamos, pero, por ejemplo, la paradoja de Zenon aparecía de vez en cuando. Y, por ejemplo, la discusión entre lo continuo y lo discreto también siempre iba apareciendo de vez en cuando, depende de qué autor estuviéramos viendo.

Y también la discusión, que apareció más que todo al final, de cómo podemos experimentar o más bien de cómo podemos deducir el infinito si estamos seguros de que no lo podemos experimentar. Me acuerdo que eso salió como ya más al final, pero recuerdo que lo discutimos bastante y pues sí, de todo eso me acuerdo.

Profesor:

Y para finalizar. ¿Qué problemas particulares te suscita ahora la idea de infinito, y cuales la idea de número?

Estudiante 4:

Voy a empezar con el número. Lo que te dije, después de la prueba del conjunto de vacío, me quedó como una sensación rara del concepto de número, porque, el concepto de número es una invención humana, pero también lo podemos ver en las cosas. Entonces como esa abstracción del mundo real a algo tan extraño como son los números, y que se vayan construyendo entre ellos mismos, me parece lo más extraño, como que se van construyendo desde la mente, desde la nada, desde el vacío, y se van construyendo hasta ser un conjunto gigantesco de números, de relaciones. Al principio quedé confundido, porque le perdí el valor a una cosa que está construida de la nada, pero, le encontré, esto que tu dijiste, que esa es la magia de las matemáticas, que no son un edificio que tiene una salida y una entrada, sino que pues puede haber muchas salidas e incluso lo que vimos de que de un axioma se desprenden otras cosas y si se encuentra una contradicción todo se derrumba. Entonces, eso también me parece interesante de los números y de las matemáticas, que, pues es una investigación constante como por la verdad, digamos.

Y con respecto al infinito. ¿Qué problemas? Yo creo que antes de entrar al énfasis no tenía tantos problemas con el infinito, y ahora después de haberlo visto me dejó con más problemas y cuestionamientos, lo cual no me parece malo sino bueno. Me enriqueció la mirada con conceptos que Federico y tú nos dieron para poder abordar el infinito. ¿Qué problemas? pues está el del principio del movimiento que lo abordé en la charla que hicimos con los estudiantes de noveno y de sexto, y que me quedó sonando mucho sobre la regresión en el espacio y en el movimiento, como un enfoque físico, como ¿Dónde empieza todo si lo devolvemos infinitamente? También el problema de si el tiempo es continuo o discreto, sobre todo el tiempo, ese me quedó sonando bastante.

Profesor:

Con respecto al tema del tiempo ¿Cómo te imaginas tú un tiempo continuo y cómo te imaginas un tiempo discreto?

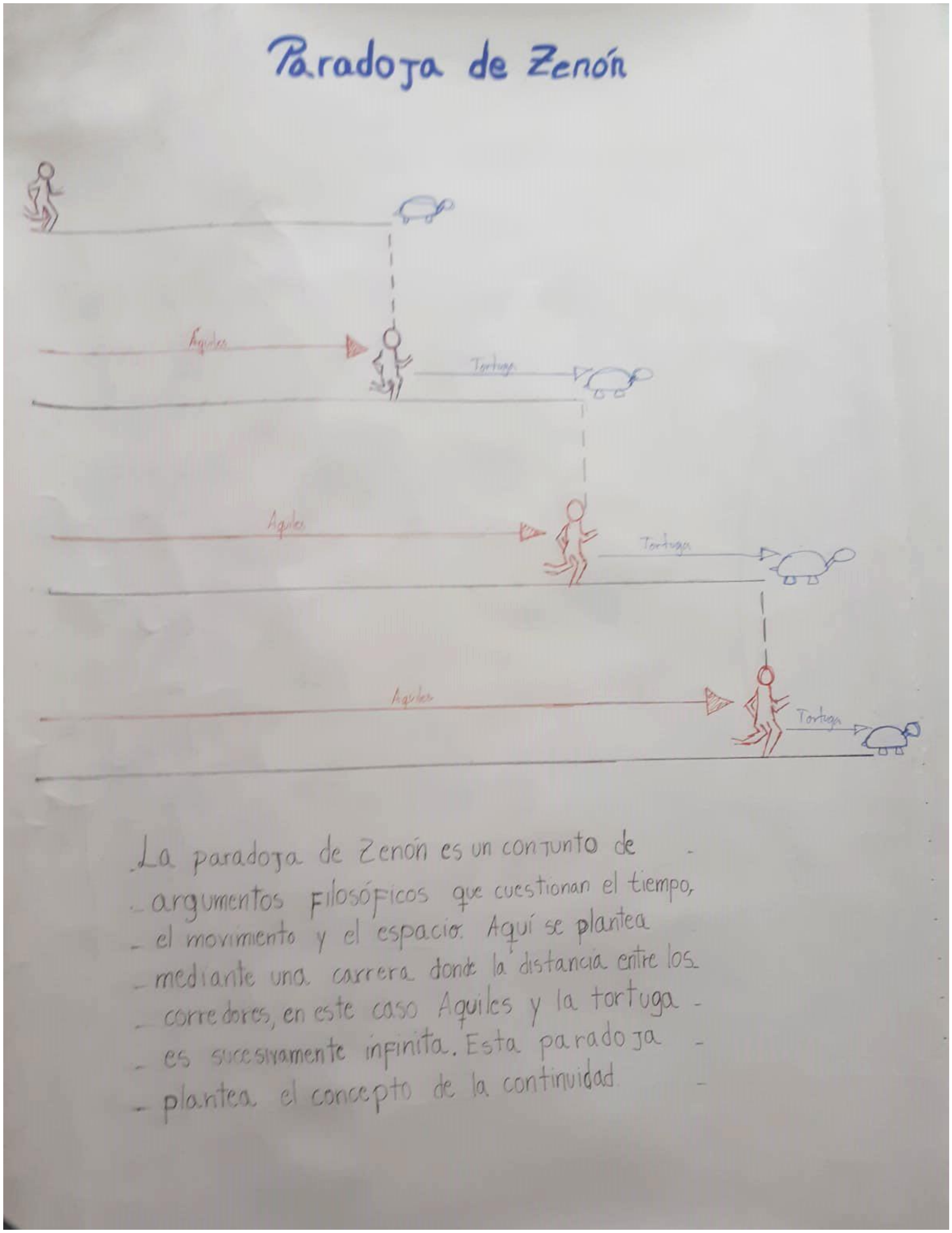
Estudiante 4:

Yo la primera pregunta que me hago es si uno puede hacer cosas ya, es decir, cuando uno dice “ahora” se está imaginando un tiempo discreto, porque tiene que haber un ahora luego otro ahora y así. Entonces, yo me imagino un tiempo discreto como eso, como momentos tras momentos que uno puede mencionar, pero entonces el problema es que entre esos momentos no habría tiempo ¿Si?, entonces para mí, lo que me parece más lógico es que el tiempo sea continuo, que no haya momentos exactos en los que uno pueda decir “ahora mismo”. Por qué si vas entrando en ese “ahora mismo” siempre va a haber unidades de tiempo más pequeñas y más pequeñas y no vas a parar nunca.

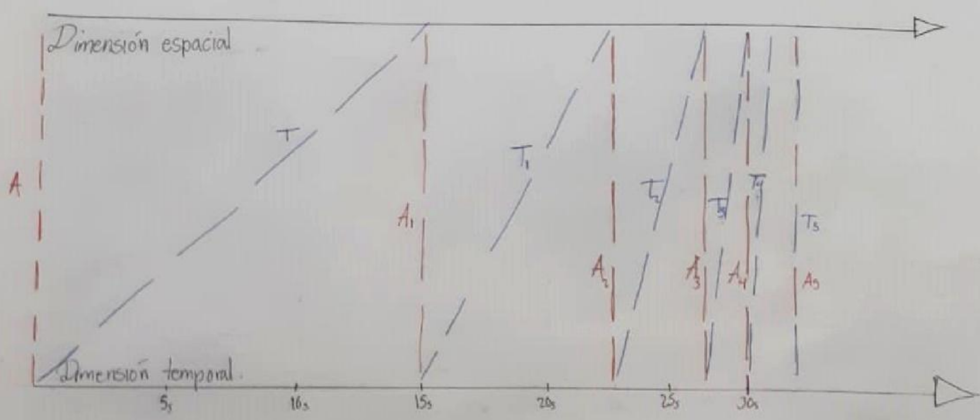
Profesor:

Muchas gracias.

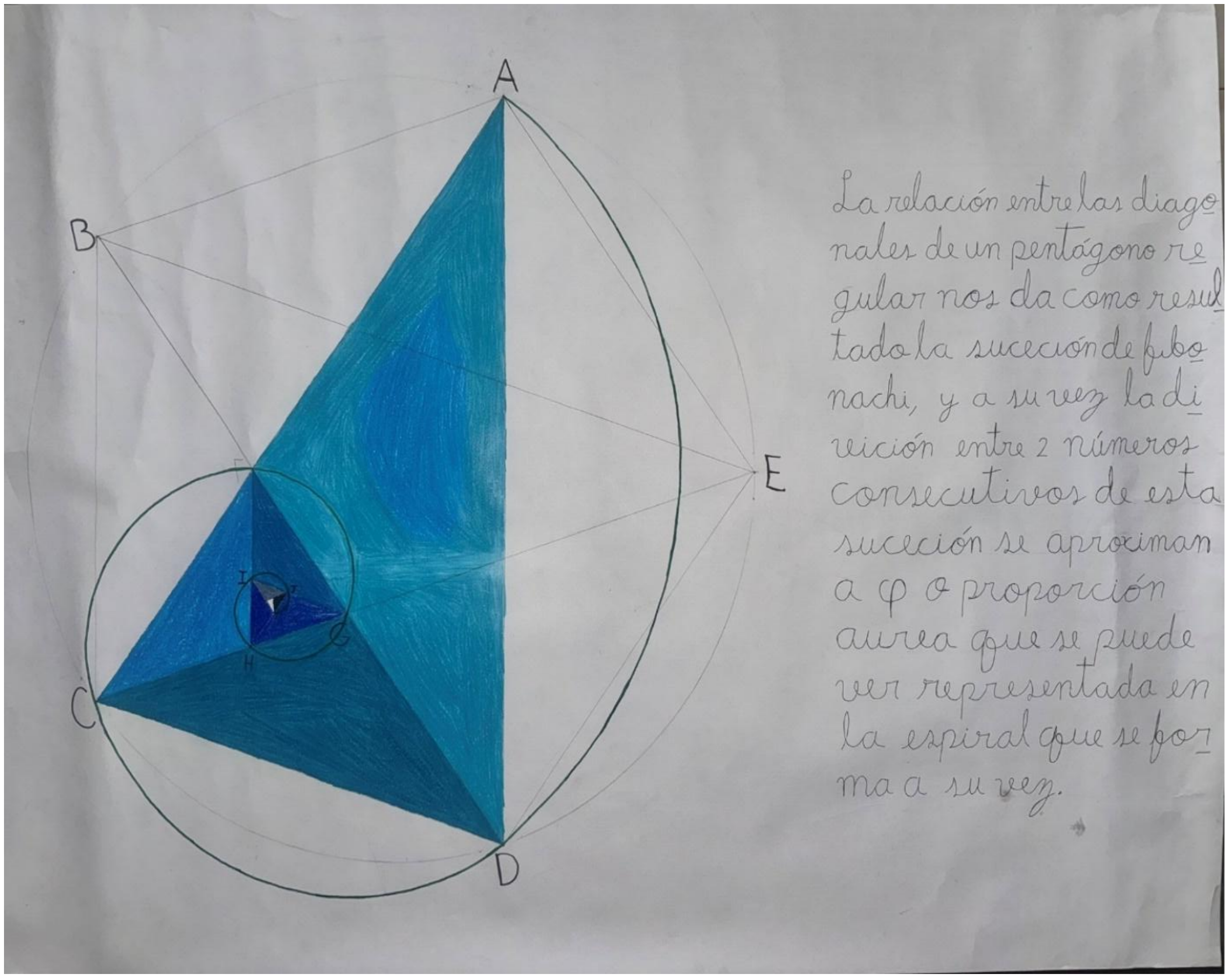
Imágenes de trabajos hechos por estudiantes

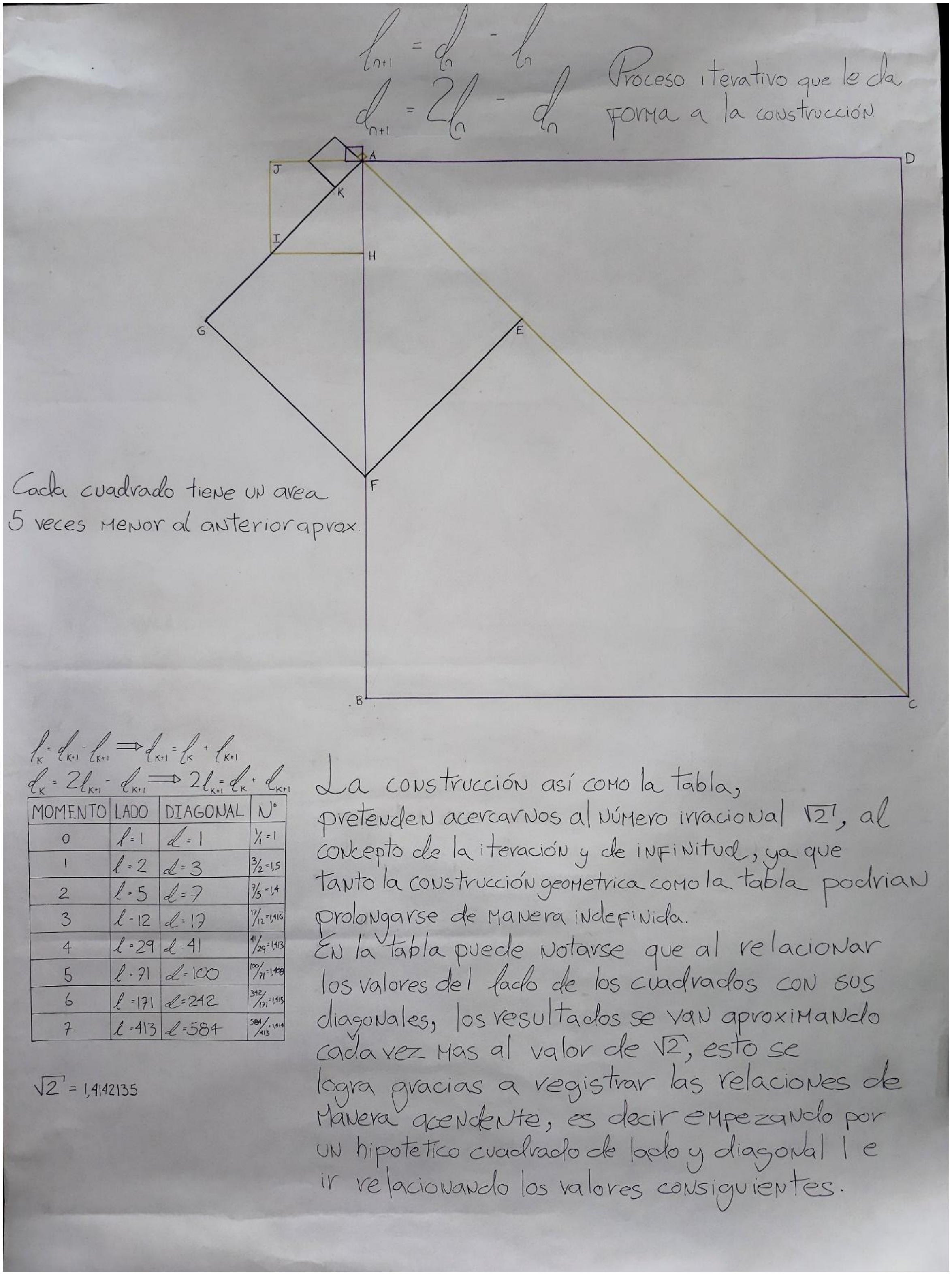


Contradicción



La paradoja propone que aunque Aquiles sea más rapido que la tortuga, nunca la alcanzará si a esta le concede una ventaja inicial. Aquiles tiene que primero llegar al punto donde estaba la tortuga, que además la tortuga ya recorrió más distancia al momento que Aquiles alcanza su punto anterior, es decir, Aquiles tiene que recorrer dos distancias distintas en menos tiempo, infinitamente. La paradoja se resuelve acudiendo a la explicación de que el espacio y el tiempo son continuos, no discretos, en la realidad es logicamente deducible que Aquiles si alcanza a la tortuga, pero no solo la alcanza, sino que también la pasa, porque relativamente dos objetos no pueden coincidir en el mismo espacio y tiempo, por lo tanto Aquiles gana.


A
B
C
D
E
G
H
I
La relación entre las diago-
nales de un pentágono re-
gular nos da como resul-
tado la suceción de fibo-
nachi, y a su vez la di-
vición entre 2 números
consecutivos de esta
suceción se aproximan
a φ o proporción
aurea que se puede
ver representada en
la espiral que se for-
ma a su vez.



$$\ell_{n+1} = d_n - \ell_n$$
$$d_{n+1} = 2\ell_n - d_n$$

Proceso iterativo que le da forma a la construcción.

Cada cuadrado tiene un area 5 veces menor al anterior aprox.

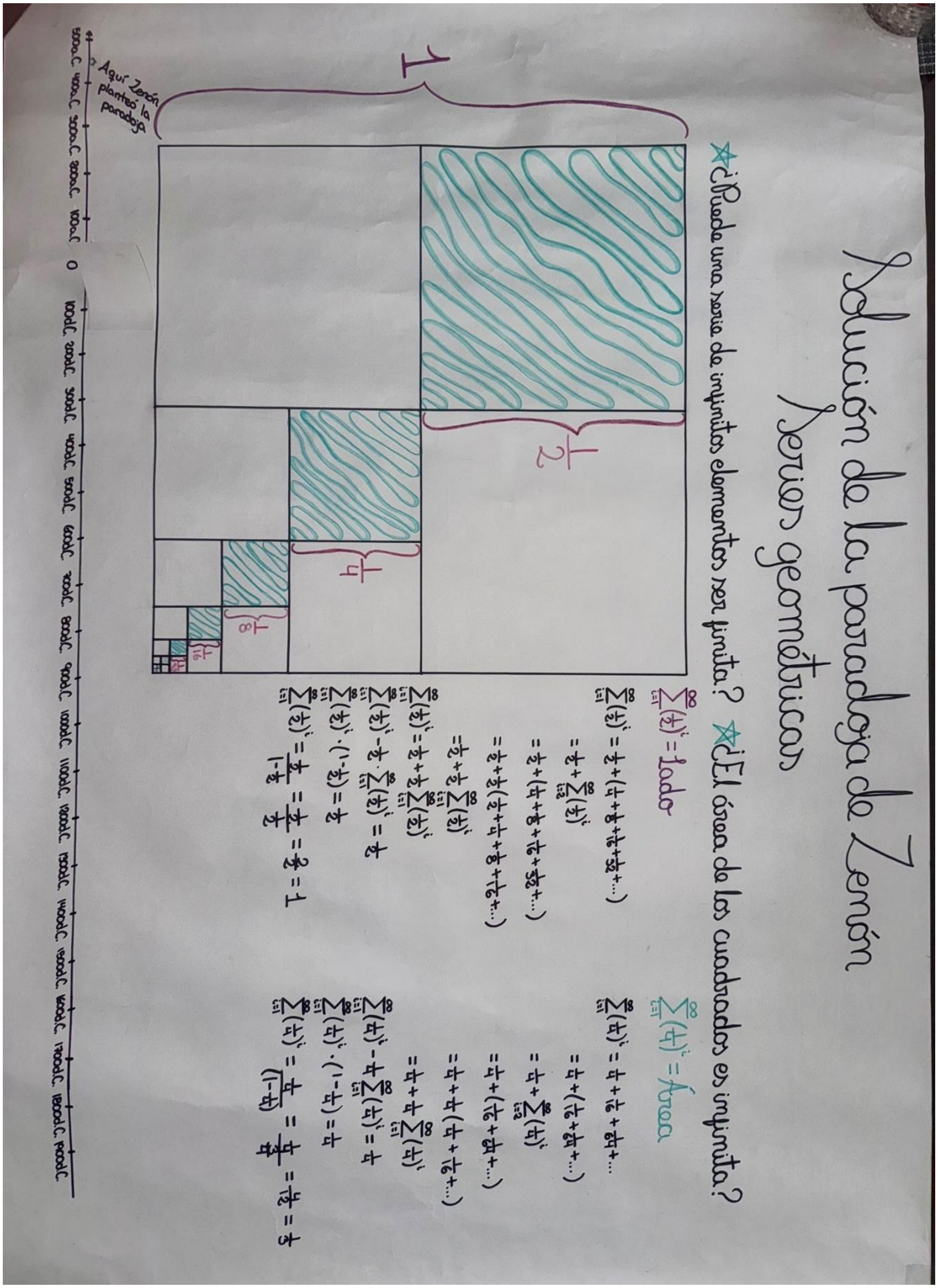
$$\ell_K = d_{K+1} - \ell_{K+1} \Longrightarrow d_{K+1} = \ell_K + \ell_{K+1}$$
$$d_K = 2\ell_{K+1} - d_{K+1} \Longrightarrow 2\ell_{K+1} = d_K + d_{K+1}$$

MOMENTO	LADO	DIAGONAL	N°
0	$\ell = 1$	$d = 1$	$1/1 = 1$
1	$\ell = 2$	$d = 3$	$3/2 = 1{,}5$
2	$\ell = 5$	$d = 7$	$7/5 = 1{,}4$
3	$\ell = 12$	$d = 17$	$17/12 = 1{,}41\bar{6}$
4	$\ell = 29$	$d = 41$	$41/29 = 1{,}413$
5	$\ell = 71$	$d = 100$	$100/71 = 1{,}408$
6	$\ell = 171$	$d = 242$	$342/171 = 1{,}415$
7	$\ell = 413$	$d = 584$	$584/413 = 1{,}414$

$\sqrt{2} = 1{,}4142135$

La construcción así como la tabla, pretenden acercarnos al número irracional $\sqrt{2}$, al concepto de la iteración y de infinitud, ya que tanto la construcción geometrica como la tabla podrian prolongarse de manera indefinida.
En la tabla puede notarse que al relacionar los valores del lado de los cuadrados con sus diagonales, los resultados se van aproximando cada vez mas al valor de $\sqrt{2}$, esto se logra gracias a registrar las relaciones de manera acendente, es decir empezando por un hipotetico cuadrado de lado y diagonal 1 e ir relacionando los valores consiguientes.

.


Solución de la paradoja de Zenón
Series geométricas
¿Puede una serie de infinitos elementos ser finita?
¿El área de los cuadrados es infinita?
$\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^i =$ Lado
$\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^i =$ Área
Aquí Zenón planteó la paradoja
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{16}$

3.2 Análisis de las entrevistas:

A continuación, se realizan los análisis de las entrevistas realizadas a los estudiantes y la estudiante al finalizar el énfasis. Es importante mencionar que estas entrevistas se realizaron un mes después de haber finalizado el curso, después de las vacaciones escolares de mitad de año. Para realizar el análisis se sigue el orden en el que se realizaron las preguntas en cada una de las entrevistas, con el fin de comparar las diferentes maneras de abordarlas que tuvo cada uno de los entrevistados.

1. **¿Cómo cambió tu idea del infinito a lo largo del énfasis?**

El objetivo de esta pregunta era ver cómo los estudiantes habían madurado su idea del infinito a lo largo del énfasis, y en ella se buscaba que expresaran cómo habían sentido el antes y el después de su paso por el énfasis.

Lo que se puede ver de las distintas respuestas es que los cuatro estudiantes coinciden en el hecho de creer que antes de su paso por el énfasis tenían una noción muy básica del concepto del infinito. Aparentemente, el uso que le daban tanto en la vida cotidiana como en las clases de matemática era un uso muy ligero y superficial. Dicen de la propuesta que valoran el recorrido histórico que se hace alrededor de este concepto debido a que sienten que se abrieron a nuevas perspectivas de abordar los problemas y a nuevas formas de entender el infinito. En suma, las cuatro voces de los entrevistados manifiestan sentirse enriquecidos en conocimientos que les permiten ahora profundizar más cuando se habla no sólo de la noción del infinito sino de otros temas que se abordaron en el transcurso del énfasis. Llamó mi atención, que en esta pregunta el estudiante 2 problematice la existencia del infinito, manifestando que antes del énfasis creía que el infinito existía y lo relaciona de inmediato con los conceptos de acto y potencia. A su vez, en las distintas respuestas algunos mencionan el problema de la existencia actual o potencial del infinito y otros mencionan el problema de la continuidad o lo discreto de los elementos. Lo que permite concluir que en efecto, sus herramientas para discutir sobre estos temas aumentaron en profundidad y conocimiento.

2. **¿Cuál crees que es el valor de pensar las matemáticas de la mano de la filosofía y la filosofía desde una perspectiva matemática?**

La segunda pregunta tenía la pretensión de ver si el énfasis les permitió encontrar relaciones entre el quehacer matemático y el quehacer filosófico. Y si en efecto la propuesta les reveló algún vínculo que pueden tener estas dos disciplinas, bien sea en la forma en la que se cuestionan, en la que se enfrentan a los problemas o en la que construyen conocimiento.

Las respuestas a esta pregunta resultaron ser mucho más diversas, pero se observa que coinciden en una noción separada de lo que le compete a cada una de las dos disciplinas mencionadas. En el fondo lo que mencionan los estudiantes con respecto a la relación filosofía-matemáticas es que ofrece una mirada múltiple sobre los problemas, que permite trabajar las cuestiones de una manera más integral. Y lo que les brindó el énfasis fue la evidencia de una relación más marcada, que tiene que ver con la profundidad con la que podemos acercarnos al conocimiento para acceder a una comprensión de los distintos problemas, en los que en ocasiones se encuentra un sentido y en otras ocasiones se lo pierde. La estudiante 3 además hace una mención al carácter complementario que esta relación puede tener, de donde menciona un conocimiento cualitativo relacionado con uno cuantitativo, lo que en el fondo corresponde a la relación entre una disciplina encargada de resolver problemas y otra encargada de cuestionar las soluciones.

3. **Para ti ¿Dónde reposa el valor histórico de la relación entre matemáticas y filosofía?**

Esta pregunta tenía el objetivo de reconocer si los estudiantes encontraron valor en el recorrido histórico que se propuso en el énfasis. Además de resaltar el papel que tiene el contexto histórico en el surgimiento de cuestiones y problemas que competen tanto a la filosofía como a la matemática.

Las respuestas a esta pregunta apuntan a una comprensión de que la matemática y la filosofía están íntimamente ligadas desde la antigüedad, haciendo referencia al mundo griego en el que muchos de los filósofos eran también matemáticos o discutían ideas matemáticas. También se evidencia en lo que comentan los estudiantes que históricamente los problemas que han tocado a las puertas de la matemática y la filosofía han tenido que ver con momentos históricos particulares que dotan a cada momento trabajado de distintas búsquedas, lo que genera un espectro más amplio para entender las cuestiones que han estado en el centro de esta relación; es decir, cómo los distintos momentos históricos también han evidenciado nuevos problemas y propuesto nuevos caminos que han permitido que ambas, Filosofía y Matemáticas, avancen juntas.

4. **¿Hay algún problema matemático que recuerdes especialmente por sus consecuencias filosóficas?**

La pregunta cuatro tenía el objetivo de rastrear qué problemas matemáticos habían resultado más significativos durante el transcurso del énfasis y que a su vez les hubieran permitido pensar en las consecuencias que un resultado en matemáticas puede tener en filosofía.

Es natural que a esta pregunta todos los integrantes del énfasis hayan respondido un problema distinto, que para cada quien tuvo repercusiones distintas en su manera de entender los problemas que rodean al infinito. Sin embargo, se resaltan dos problemas particulares, la paradoja de Zenón, en un caso expresada por medio del hotel infinito de Hilbert, en la que una suma infinita es finita relacionándola con sumas y series, y por otro lado el resultado obtenido por Cantor a partir de su argumento diagonal sobre la existencia de conjuntos infinitos más grandes que otros. Ambos problemas tienen una repercusión filosófica sobre la manera de existir del infinito, o al menos la cuestionan. Por un lado la teoría de conjuntos de Cantor asume la existencia de un infinito en acto y el trabajo que se puede realizar con esta premisa, y resulta cautivante este problema porque antes de verlo en las matemáticas de la educación media sólo se menciona un infinito. Por otro lado, el problema de Zenón denuncia un problema sobre la consideración de si el espacio y el tiempo son continuos o son discretos, y las consecuencias que ello puede tener sobre nuestra percepción de la física. Se puede concluir que los problemas matemáticos mencionados resultan significativos para ellos debido a que responden a preguntas que ya se han hecho y que pueden seguir puliendo en los distintos espacios académicos.

5. **¿Qué virtudes y falencias encontraste en la metodología de la clase?**

La quinta pregunta buscaba realizar una retroalimentación de la clase, en la que los estudiantes pudieran realizar comentarios alrededor de las dinámicas y la metodología que se implementó en las clases.

Se observa en las respuestas que los comentarios que se señalan como falencias responden más a la complejidad que pueden presentar estos temas y los retos teóricos a los que un interesado en ver la clase se debe exponer, pues sí son necesarios los espacios en los que la cátedra se apodere de las dinámicas del aula para dotar de herramientas conceptuales a los estudiantes para luego poder generar debates sobre temas, lecturas, videos o preguntas que también hicieron parte de estos espacios. Por otro lado, hay una mención a que en ocasiones se dejó el proyecto de lado y se privilegiaron los espacios de clase teórica, lo que respondió a una asignación insuficiente de clases para trabajar en el proyecto por parte de los docentes y que aparecerá como recomendación y cosas a mejorar para futuras ocasiones.

Por otro lado, se observan también comentarios bastante positivos alrededor de la metodología y la propuesta de clase que se ejecutó. Se resaltan los turnos intercalados en los que tratábamos sobre problemas matemáticos para posteriormente ir a sus consecuencias filosóficas; el valor que tiene para los estudiantes el haberse podido aproximar al espacio de énfasis manifestando las nociones, curiosidades e inquietudes que tenían; el haber permitido los debates en clase alrededor de preguntas que surgían en el espacio los hizo sentirse partícipes de la construcción del énfasis; y lo mencionado con anterioridad del valor que tiene trabajar sobre un tema desde distintas perspectivas, tanto históricas, como matemáticas, como filosóficas. Algo importante a tener en cuenta, que también es mencionado en la entrevista es la facilidad de mantener estos espacios de debate constante y construcción colectiva al haber sido un número reducido de personas las que constituían el énfasis. Por lo que, en conclusión, el balance en términos metodológicos es bastante positivo.

6. **¿Cuál podría ser un tema y/o pregunta, además del infinito, que estuvo presente a lo largo de la clase?**

El objetivo de esta quinta pregunta era identificar qué temas además del infinito le resultaron significativos a los estudiantes. Buscando reconocer los alcances temáticos que tiene la propuesta, y los intereses y curiosidades que despertaron en los participantes.

En la variedad de respuestas se pueden observar temas como: discusiones sobre el mundo físico, sobre el espacio y el tiempo, lo discreto y lo continuo, y la pregunta de ¿Qué es un número? Tres de los cuatro participantes mencionan ideas relacionadas con la física que hacían parte de los debates que teníamos alrededor de la idea del movimiento, el tiempo y el espacio (Zenón) y las consecuencias que podría tener que se entendieran estas magnitudes como discretas por un lado o como continuas por otro. Vinculo mucho estas respuestas a intereses particulares del grupo de estudiantes por la física y las discusiones que se generan alrededor del universo.

Por otro lado, se observa que uno de los estudiantes también notó que las discusiones sobre qué es un número estuvieron siempre vinculadas a la idea del infinito (lo que no se puede numerar). La identificación de este tema paralelo me hace concluir que en las clases sí se mostró de manera explícita la relación entre el número e infinito, cómo ambas ideas pueden estar sujetas a cuestionamientos desde la perspectiva filosófica y responden a necesidades en la fundamentación de la matemática.

7. **¿Qué problemas particulares te suscita ahora la idea de infinito? ¿Cuáles la idea de número?**

El objetivo de esta pregunta fue profundizar sobre dos de los problemas centrales que proponía el énfasis, por un lado, la idea paradójica del infinito y por otro la definición de número. Esto con el fin de conocer las perspectivas con las que se quedaron los estudiantes al respecto de estas dos ideas.

Las respuestas dejan ver que lo que ocasionó el énfasis alrededor de este par de conceptos fue más incertidumbre por la diversidad de perspectivas que se plantearon en el énfasis a través de personajes históricos. Cuando escuchaba las respuestas en vivo pensaba en el objetivo que tenía Sócrates en el que comenzaba a dialogar y a cuestionar a interlocutores que creían poseer un conocimiento específico, y que terminaban por reconocer que ignoraban algunas cosas o no se habían planteado algunas de las preguntas formuladas por Sócrates. Así, las respuestas de los estudiantes encuentran eco en el diálogo que se mantuvo en clase por medio de debates y discusiones, lo que les brinda, más que posiciones de angustias por el no saber todas las respuestas, una sensación de posibilidad de abrirse a nuevos horizontes y alternativas para pensar y abordar estos problemas, y una motivación para indagar más.

4. Conclusiones

El trabajo realizado muestra que es posible llevar a cabo un diseño didáctico que permita el acercamiento a problemas y paradojas planteadas sobre el infinito con estudiantes de grado 10° y 11° de bachillerato. Y que este acercamiento permite a los y las estudiantes comprender y vivenciar la relación entre cuestiones matemáticas y filosóficas que suscita este concepto, y reconocer que la aproximación desde distintas perspectivas disciplinares enriquece los procesos de aprendizaje.

Por otro lado, el recorrido histórico brinda a los estudiantes un contexto claro y hace que se empapen de los hechos que fueron necesarios para el desarrollo de las matemáticas, lo que contribuye a la comprensión de los temas y problemas abordados. Además, brinda un panorama amplio de las cuestiones que rodearon el problema de las paradojas suscitadas por el infinito, jugando un papel importante en la relación entre matemática y filosofía. Por lo tanto, se concluye que la implementación de la historia en la enseñanza de la relación entre matemáticas y filosofía enriquece la experiencia educativa al proporcionar contexto, motivación y múltiples perspectivas, fomentando habilidades de pensamiento crítico y constructivo lo que contribuye a una enseñanza más profunda y significativa de las matemáticas.

También se concluye que se puede enseñar la relación entre la matemática y la filosofía a partir de paradojas generadas por discusiones y problemáticas sugeridas por el estudio de temas como el infinito, la realidad de los objetos matemáticos como los números y la lógica.

Mostrando una cara de las matemáticas menos idealizada, cuya construcción es inacabada y ha estado acompañada, al igual que otras ramas del conocimiento, por tropiezos, errores y callejones que aparentemente no tienen salida.

El trabajo también permite ver que es posible hacer un diseño de una clase de matemáticas que parta de las curiosidades, inquietudes y preguntas que tienen los estudiantes, guiando las conversaciones y dándoles el valor de preguntas filosóficas. También quisiera comentar al respecto que la metodología propuesta por Polya, de resolución de problemas mezclada con el diálogo socrático, se enmarca y alinea con las búsquedas pedagógicas del Liceo Juan Ramón Jiménez.

Bibliografía

1. Klimovsky, G., & Boido, R. A. (1994). Las Desventuras del Conocimiento Matemático. Aique Grupo Editor.
2. Campos, A. (2008). Introducción a la historia y la filosofía de la matemática. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.
3. Collete, J.P. (1985). Historia de las matemáticas. Siglo veintiuno editores.
4. Nuñez, A. (2019). Series y sucesiones: Los límites del infinito. Bonalletra Alcompas, S. L.
5. Gómez Pin, V. (2015). Pitágoras: La infancia de la filosofía. Bonalletra Alcompas, S. L.
6. Maldonado, C. E. (2008). Complejidad y ciencias sociales desde el aporte de las matemáticas cualitativas. Cinta de Moebio, (33).
7. Roa Fuentes, S., & Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. Educación Matemática, 26(1).
8. Pólya, G. (1973). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method (2nd ed.). Princeton University Press.
9. Byers, W. (2007). How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics. Princeton University Press.
10. Trigo, V. (2001). El quinto postulado de Euclides... y la geometría del universo, Asociación de Autores Científico-Técnicos y Académicos (ACTA).
11. Wedberg, A. (1955). Plato's philosophy of mathematics. Almquist & Wiksells.
12. Pareja Heredia, D. (2020). El tortuoso tránsito de lo discreto a lo continuo: Apuntes sobre el origen de los números reales. Universidad del Quindío.

13. Fazio, R. (2016). La crítica de Leibniz a los números infinitos y su repercusión en la metafísica de los cuerpos. Universidad del País Vasco.

14. Ávila del Palacio, A. (1992). La definición de número en Gotilob Frege. Universidad Juárez.

15. Ruiz, Á. (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. EUNED

16. Mora Ramírez, R. F. (2016). La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell (Tesis de maestría). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Letras y Ciencias Humanas

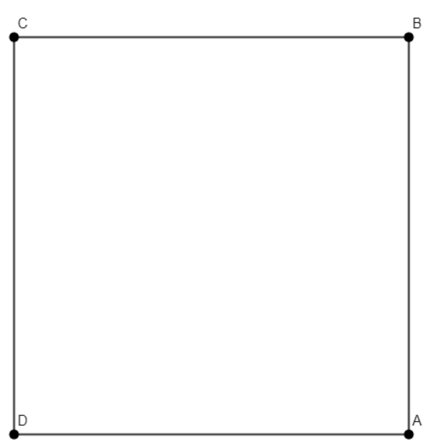
Anexo A: Ejemplo de diálogo en clase
“Descubrimiento de figuras inconmensurables y la sustracción sucesiva”

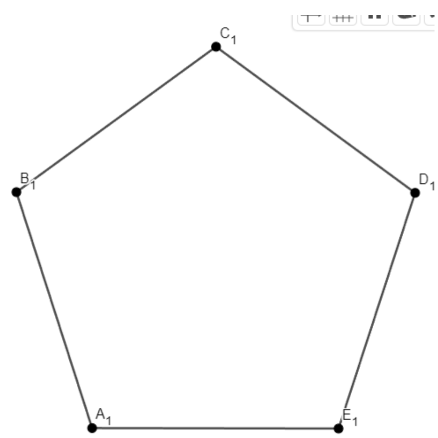
Anexo A: Ejemplo de diálogo en clase - “Descubrimiento de figuras inconmensurables y la sustracción sucesiva.”

En curso de álgebra un profesor se encuentra pensando en la manera de introducir el concepto de número irracional sin la necesidad de recurrir a la definición conocida. En su investigación descubre que las primeras relaciones no conmensurables aparecen en el siglo VI a.C en las relaciones que se dan entre las magnitudes de la diagonal y el lado tanto en el cuadrado como en el pentágono regular.

Para ello el profesor necesita que los estudiantes tengan muy presentes los contenidos de congruencia y semejanza de triángulos. Por eso la siguiente actividad la propone para estudiantes de grado noveno en adelante. A continuación, se presenta el diálogo generado en clase:

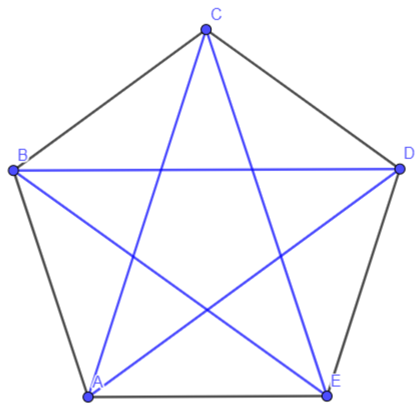
D: ¿Sobre cuál de estas dos figuras prefieren trabajar?





Sobre el Pentágono.

D: Está bien, tracen todas sus diagonales.



D: ¿Qué figuras encuentran en el pentágono regular y el trazo de todas sus diagonales?

Estrellas, triángulos, pentágonos, trapecios, paralelogramos.

D: ¿Cuál es la figura más predominante en número?

El triángulo.

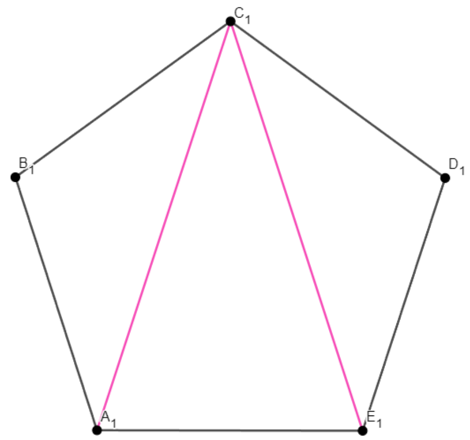
D: ¿Qué clase de triángulos aparecen en la figura?

De los que tienen dos lados congruentes.

D: ¿Cómo se llaman esos triángulos?

Isósceles.

D: ¿Cómo podemos garantizar que en efecto son triángulos isósceles? ¿Por ejemplo estos?



Porque si trazamos un eje de simetría por el vértice C1 perpendicular al segmento A1E1 dividimos el triángulo ACE en dos partes congruentes.

D: ¿Y cómo sabes eso?

porque los triángulos están conformados por diagonales y lados. Como estamos trabajando en un pentágono regular sus ángulos y lados son congruentes entre sí, al igual que sus diagonales. Por lo tanto, los triángulos CDE y ABC, además de ser congruentes, son isósceles pues están conformados por dos lados y una diagonal. Y el triángulo ACE es isósceles porque está conformado por un lado y dos diagonales.

D: ¿y qué propiedades tienen los triángulos isósceles además de tener un par de lados congruentes?

Tienen un par de ángulos congruentes.

D: En ese sentido ¿Cuál es la amplitud de los ángulos que aparecen en el triángulo ABC?

El ángulo ABC debe ser la quinta parte de la suma de los ángulos internos del pentágono, pues el pentágono es regular.

D: Bien, es decir que si la suma de los ángulos internos de un pentágono es 180° por 3, es decir, 540° ¿Cuál es la amplitud de los ángulos de un pentágono regular?

540°/5, lo que es 108°.

D: Con este dato, y sabiendo que los triángulos que aparecen en la figura son isósceles ¿Podemos conocer los otros ángulos?

Si, los ángulos BAC y BCA deben sumar 180° - 108° = 72°. Al ser ambos congruentes, ambos deben tener una amplitud de 36°. Con un proceso análogo sobre el triángulo EDC se comprueba que DEC y DCE también deben tener amplitud de 36°.

D: ¿Y los ángulos del triángulo ACE?
Podríamos restarle a la medida del ángulo BAE la medida del ángulo CAE para obtener la medida del ángulo CAE, es decir 108°- 36° = 72°. Y proceder con el hecho de que es un triángulo isósceles para obtener la medida del ángulo ACE, cuya amplitud sería de 36°.

D: Bien ahora con esa información, les voy a contar lo que significaba la conmensurabilidad para los pitagóricos. Los pitagóricos pensaban que el fundamento de todo lo existente vivía en los números o en las relaciones entre ellos. En este sentido, para ellos una relación entre dos magnitudes podía ser representada como un tipo de unidad de medida común a ambas magnitudes, por lo tanto, encontrando esa medida podrían representar la longitud de ambas magnitudes usando esta magnitud un cierto número de veces. Por lo tanto, diremos que la magnitud de dos objetos es conmensurable siempre que podamos encontrar esa medida común.
Teniendo esto en cuenta ¿Cuál creen ustedes que es la razón entre la diagonal y el lado del pentágono y cómo podemos llegar a ella?

*Los estudiantes tienen un espacio para pensar el problema en grupos y proponer posibles soluciones. *

Entre estas salen las siguientes observaciones:
La idea de los pitagóricos es encontrar una medida común para ambas magnitudes, en este caso diagonal y lado. Lo que hicimos en grupo fue ir dividiendo el segmento más

pequeño en partes iguales e ir tomando esa medida para ver si también puede medir el segmento más largo.
Nuestro grupo hizo algo muy similar al grupo anterior, pero considerando las divisiones sobre el segmento de mayor longitud y probando si media al segmento menor.

D: Bien. Nos surge un reto en este punto del problema ¿Cómo podemos hallar un método que garantice llegar a la medida en común sin necesidad de ir probando exhaustivamente que en efecto lo sea?

*Los estudiantes se quedan en silencio, e intentan comparar y relacionar las magnitudes de otras maneras.

¡Tengo una idea!

D: Compártela.

Podemos comenzar a medir a la diagonal (segmento largo) en términos del lado del pentágono (segmento corto). Luego el resto, es decir, la diferencia entre las dos longitudes puede ser una opción directa para ser la medida en común de ambos segmentos, pues si esa diferencia logra medir al lado del pentágono también debe medir a la diagonal.

D: Dices algo muy cierto. Pero ¿Si esta diferencia no logra medir a la longitud más pequeña?

*Los estudiantes vuelven a quedarse en silencio. Hasta que un estudiante levanta la mano tímidamente.

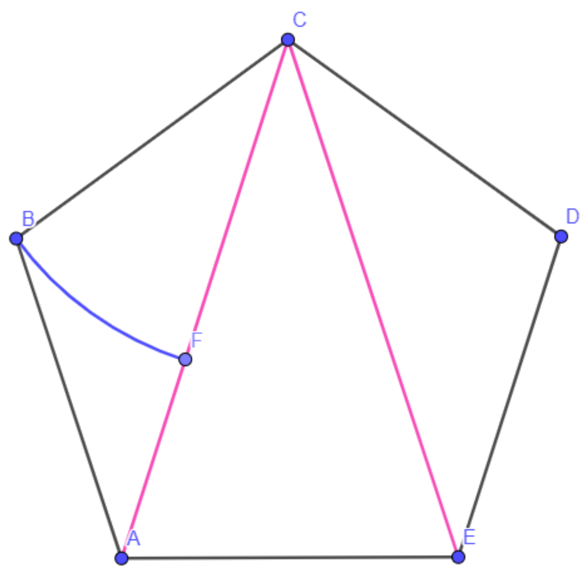
¿Pero en ese caso no estaríamos ante un problema parecido al anterior?

D: En efecto.

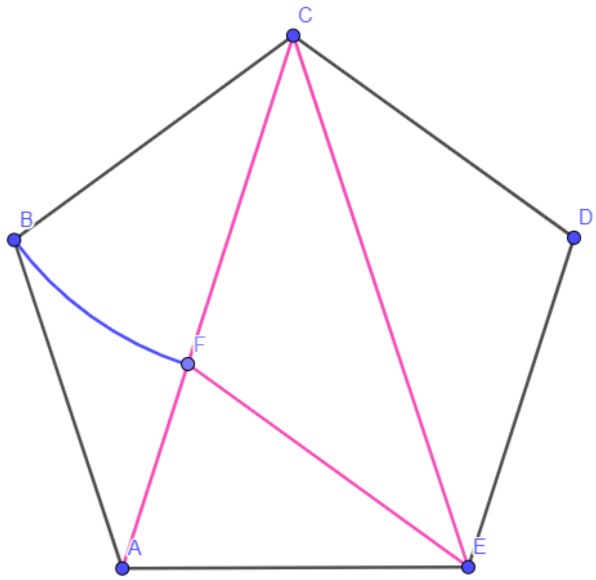
¿Entonces no podríamos aplicar el proceso sugerido a las nuevas dos magnitudes, hallando la diferencia hasta encontrar la medida en común que buscamos?

D: ¡Claro que sí! podemos aplicar el proceso repetidamente hasta obtener una magnitud común que será común a todas las consideradas, en particular al lado y a la diagonal del pentágono. ¿Cómo podemos ver cuál es la diferencia entre magnitudes?

Con un compás podemos rotar la magnitud del lado y hacerla coincidir con la diagonal.



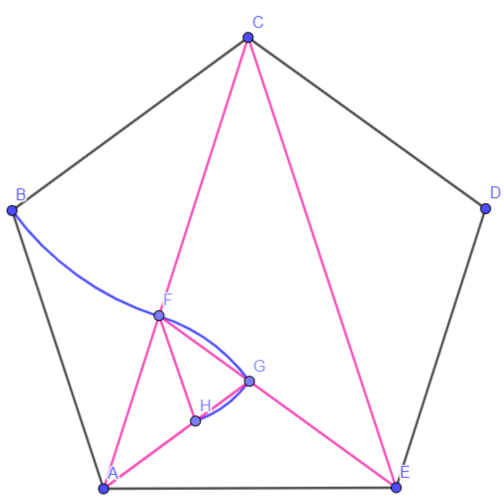
D: Bien, consideremos ahora la siguiente construcción: como en el triángulo ABE vive la relación de la diagonal y el lado, construyamos un nuevo triángulo entre la diferencia AF y el lado AE, trazando el segmento FE.



D: El triángulo CFE es congruente al triángulo CED por criterio LAL. De esta manera resulta que el triángulo FAE es isósceles, y además de ello es un triángulo semejante al triángulo ACE. ¿Qué significa decir que ambos triángulos son semejantes?

Que tienen la misma forma. Es decir, están comparten los mismos ángulos.

D: Bien, ahora apliquemos la construcción anterior para hacer la relación entre la diferencia y el lado del pentágono como habíamos acordado.



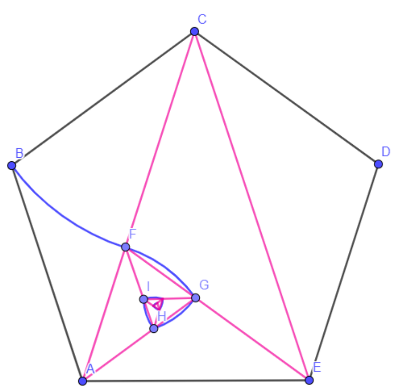
D: Ahora siguiendo un razonamiento similar al anterior llegamos a la construcción de un triángulo FGH semejante a FAE. ¿Qué creen ustedes que pasará si volvemos a aplicar el procedimiento?

Seguramente volveremos a construir triángulos semejantes.

D: Perfecto.

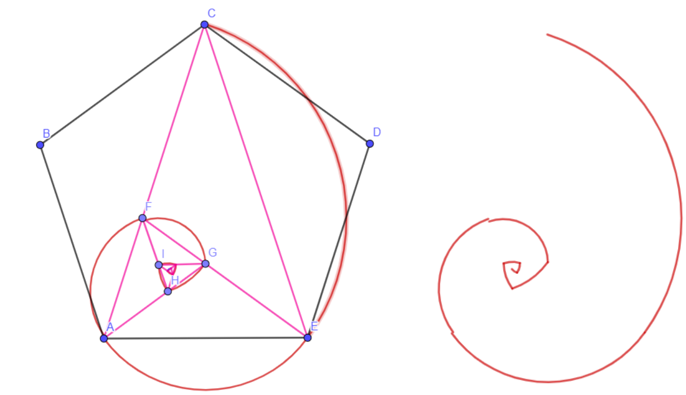
Pero en ese sentido la relación de los lados de esos triángulos siempre va a ser la misma por ser proporcionales al original. Por lo cual ¿Podríamos llegar en algún momento a una relación en donde uno de los lados mida al otro?

D: Precisamente, como siempre estamos construyendo figuras semejantes por su propiedad de proporcionalidad arrojaran siempre una relación equivalente a la inicial. Es decir este proceso de diferencias sucesivas que habíamos propuesto no va a llegar nunca a un final, pues siempre podremos encontrar un triángulo semejante.



¡Es un fractal!

D: En efecto, sin importar la escala estamos siempre encontrándonos con la misma figura. Y algo maravilloso que ocurre también es que desde aquí podemos construir una espiral utilizando los triángulos restantes de la siguiente manera, lo que evidencia el comportamiento fractal de nuestro problema.



¿Esa es la espiral aurea?¿Es decir que la relación es phi?

D: Buena pregunta. Por ahora sabemos que no podemos llegar a la medida común mediante un número de pasos finitos, es decir que el lado y la diagonal de un pentágono no son magnitudes conmensurables. Podríamos hacer un procedimiento inverso para tratar de aproximar esta razón. Si consideramos que las magnitudes iniciales son a_0 y b_0, y los pasos recursivos como la construcción de nuevas magnitudes tenemos:

$$a_0, b_0$$
$$\rightarrow a_1 = b_0$$
$$b_1 = a_0 - b_0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases} \Rightarrow a_n = b_{n+1} + a_{n+1}$$

Si invertimos el proceso obtenemos que:

$$a_n = b_{n+1} + a_{n+1} \rightsquigarrow a_{n+1} = b_n + a_n$$
$$\rightsquigarrow a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$$

Por lo cual si asumimos una aproximación burda de la relación entre la diagonal y el lado del pentágono como $a_0 = b_0 = 1$. Obtenemos las siguientes parejas:

n	a_n	b_n	$\frac{a_n}{b_n}$
1	1	1	$\frac{1}{1} = 1$
2	2	1	$\frac{2}{1} = 2$
3	3	2	$\frac{3}{2} = 1.5$
4	5	3	$\frac{5}{3} = 1.666..$
5	8	5	$\frac{8}{5} = 1.6$
6	13	8	$\frac{1}{1} = 1.625$
…	…	…	…

De esta manera podemos ver que esta sucesión va tendiendo a $1{,}61803\ldots = \varphi$, es decir que justamente en la relación del lado y la diagonal del pentágono vive la proporción áurea.

¿Cuál es el valor didáctico de este ejemplo?

La actividad propuesta por el profesor puede favorecer espacios de diálogo y una manera dinámica de acercarse a los números irracionales. Pues en ella se construye una relación entre el concepto de número irracional y la construcción de figuras fractales, resaltando el valor didáctico que tiene la historia en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, además de realizar un acercamiento muy interesante y completo a uno de los números más famosos de la historia de las matemáticas como lo es phi. También acerca a los estudiantes a una visión del concepto de divisibilidad, y por medio del acercamiento a la sustracción sucesiva unas buenas bases para posteriormente poder entender el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor. Por todas las nociones que se pueden abordar y el valor histórico que no solo se queda en una época específica, considero que este ejemplo tiene un gran potencial para utilizarse como insumo didáctico en una clase de álgebra o geometría.

Anexo B: Ejemplo de clase: diálogo sostenido con estudiantes a partir de un cuento de Jorge Luis Borges *La biblioteca de Babel*

El siguiente diálogo se da en una clase de matemáticas con estudiantes de bachillerato alrededor del concepto del infinito. Para generar la discusión en clase el profesor deja a los estudiantes la tarea de leer dos de tres cuentos de Borges previamente seleccionados por él: El libro de arena, El Aleph y La biblioteca de Babel. La indicación para la lectura de los cuentos es que es obligatorio que alguno de los dos cuentos sea "La biblioteca de babel" y que deben estar muy atentos a las menciones del infinito que realiza Borges en distintas presentaciones.

Clase:

El profesor entra al salón con un maletín en la mano izquierda con el brazo completamente extendido y con un tinto en la mano derecha que se recoge para sujetar el libro de Ficciones de Borges bajo su axila. Deja el maletín y el libro en la mesa que está al lado del tablero y mientras le da un sorbo al café, que casi quema sus labios, ve algunos estudiantes intentando terminar la lectura.

D: Buenos días ¿cómo se encuentran hoy?

Díganme cómo les fue con la lectura ¿Qué cosas les parecieron interesantes en especial del cuento de "*La biblioteca de Babel*"?

Un estudiante levanta la mano.

Me pareció un cuento confuso y complicado, pero definitivamente encierra algo de la relación que tenemos las personas con la idea del infinito. Me gustó que se hablara de las

distintas lenguas y libros llenos de códigos indescifrables pero posibles por la combinación de las letras.
D: Muy interesante, ya hablaremos de eso. ¿Alguien más?

Tres estudiantes más levantan la mano y el profesor les asigna turnos para que hablen.
A mí también me pareció confuso en algunas partes, hay partes que simplemente se tienen que volver a leer. A mí me gustó la idea de la escalera en espiral que se abismaba y ascendía de manera remota. Me gusta como Borges juega con las imágenes geométricas que se relacionan con el infinito.
Al igual que a mi compañera, me gustó el recurso del espacio geométrico comprendido por los bibliotecarios, el hecho de que cada uno de los pabellones de la biblioteca fueran hexágonos debe tener algo que ver, debe ser intencional. También me queda la sensación de incertidumbre alrededor de la forma de la biblioteca, porque es algo a lo que solo se tiene acceso desde dentro…
No había pensado lo de las figuras geométricas, pero tiene bastante sentido. Por otro lado, a mi me impactó mucho la imagen de la muerte que manifiesta Borges en su cuento, la de la caída infinita en la que su cuerpo se descompone por el rozamiento por el aire infinito. Siento que es una imagen que puede ser recurrente cuando se piensa en la muerte como un viaje sin retorno.

D: Muy interesante lo que están diciendo, han capturado varias de las ideas con las que Borges se refiere al infinito en el cuento. Les propongo hacer una reconstrucción del cuento para ir examinando los detalles del cuento. Pero primero debo contarles que hay dos nociones que podemos tener sobre el infinito, y que la discusión entre ambas ha generado grandes debates desde la antigüedad. La pregunta que se puede hacer intuitivamente para evidenciar esta diferencia es ¿El infinito existe en la realidad? y si no ¿Cómo llegamos a la idea de lo infinito?
En la antigua Grecia esta cuestión fue central en el trabajo de algunos filósofos y matemáticos; por ejemplo para Aristóteles el infinito no debía ser comprendido como algo que existía en la actualidad (Infinito actual) si no que llegábamos a la idea de lo infinito cuando contábamos con números naturales, es decir, no podíamos constatar la existencia del infinito pero sí tener la noción de un sistema que tenía la potencia de seguir creciendo

indefinidamente (infinito potencial). El rechazo de Aristóteles a la idea del infinito actual correspondía a que asumir su existencia puede generar argumentos contradictorios y paradojas, por lo cual algunos llaman a este hecho “el Horror al infinito de los griegos”.
Les cuento lo anterior para que podamos descifrar qué cualidad le damos nosotros al infinito y a cuál se refiere Borges en los diferentes pasajes de los cuentos.

Un estudiante levanta la mano tímidamente.

No entiendo la diferencia entre los dos infinitos que acaba de mencionar. ¿El infinito no se define como lo que no tiene fin?

D. Justamente. Pero lo distinto entre estas dos cualidades es que en una creemos que el infinito ya puede ser una construcción realizada en la que estamos inmersos y la otra en cambio argumenta que la noción de infinito es la capacidad para seguir construyendo. Por ejemplo los números naturales: Tu comienzas con el cero y la unidad, y para construir lo que haces es ir agregando unidad tras unidad, entonces 0, 1, 2, 3, 4, 5, … , 534, 535, … El conteo es la representación de que siempre podemos seguir encontrando y construyendo números cada vez más grandes, este sistema tiene la potencia de ser infinito, pero no lo es como tal. Cuando nos referimos a un infinito actual es cuando ya utilizamos símbolos para referirnos a conjuntos infinitos.

Entiendo, es como la pregunta que tiene el bibliotecario durante todo el relato. Cuando menciona que ningún bibliotecario tiene la certeza de la infinitud de la biblioteca pero que algunos tienen la intuición de que nunca termina.

D: Exactamente. Es un diálogo que plantea Borges durante toda la historia.
Bueno, comencemos con la reconstrucción para que estas ideas queden más claras ¿Al comienzo del cuento qué nos mencionan?

Varios estudiantes levantan su mano y el profesor decide por la que su vista capturó primero.
Mencionan la disposición de los pisos de la biblioteca, que hay hexágonos donde dos de sus 6 lados están destinados para los anaqueles de los libros y que cada bibliotecario está

asignado a un hexágono. También menciona lo de la escalera en espiral, que no tiene ni principio ni fin.

D: Bien, interesante. ¿Qué tendrán de especial el hexágono y la espiral para que sean utilizados por Borges?

Pues la espiral tiene un comportamiento fractal, es decir que sin importar lo pequeño ni grande de su escala se va a ver idéntica. Ahí se ve su relación con lo infinito.

D: ¡Bien! ¿Y el hexágono? ¿Qué características especiales tiene el hexágono regular?

Un estudiante espontáneamente irrumpe recordando sus clases de geometría.
Se puede dividir en 6 triángulos congruentes.

D: Correcto, pero ¿Qué relación puede tener con el infinito?

Un estudiante sin quitar sus ojos de las páginas del libro proclama:
De la manera en la que aparece en el texto es en su relación con el "espacio total". Es decir, parece la figura con la que se puede recubrir todo el espacio que ocupa la biblioteca. ¡Por lo menos en cada piso!

D: Perfecto. ¿Alguien recuerda cómo se llama esa disposición de en qué figuras poligonales hacen el recubrimiento de un plano?

¡Teselados! y si no mal recuerdo solo existe tres polígonos regulares con los que se puede construir un teselado formado exclusivamente por ellos: El triángulo, el cuadrado y el hexágono.

D: Así es, es probable que Borges estuviera pensando en la figura del hexágono con el objetivo de llevarnos a la imagen de un teselado dispuesto en cada piso. Aunque no necesariamente fuese un teselado perfecto en el que estuviera pensando. De hecho, en esa parte el narrador nos cuenta que existe algún grupo de místicos que creen en la existencia de una sala circular con un libro de lomo infinito

Una estudiante emocionada replica:
El Aleph.
El libro de arena - proclamó otro.

El profesor sonrió con los dos comentarios espontáneos y pidió a los involucrados desarrollarlos.

El Aleph fue el primer cuento que leí y me cautivó la idea de una esfera que ocupaba un lugar muy pequeño del espacio y a su vez contenía todos los lugares, momentos, perspectivas y posibilidades dentro de ella. Cuando leí la idea de un libro en una sala circular con lomo continuo vino inmediatamente la idea de la posibilidad de la existencia del Aleph en este otro mundo creado por Borges. Es como un infinito comprendido en otro. Muy acorde a lo que dice mi compañera, la idea de este libro de lomo continuo y páginas infinitas es la misma que se presenta en el cuento de El libro de arena, un libro infinito en donde no se puede llegar a ver la misma página dos veces. Y con la explicación del infinito como potencia o acto, pareciera que esta idea está íntimamente ligada a la presencia de un infinito actual en los cuentos.

D: Muy bien. En efecto diría que las tres ideas están relacionadas. Este cuento logra hacer un símil entre la biblioteca y nuestras formas de conocer, de preguntar y de resolver cuestiones en el mundo. Y algo con lo que permanentemente juega Borges en él es la tensión entre la idea de lo posiblemente infinito y lo existente como infinito. Infinito potencial e infinito actual. También nos presenta además unas últimas figuras geométricas íntimamente relacionadas con el infinito, la circunferencia y la esfera, superficies sin comienzo ni fin; pero cuyo comienzo y fin puede ser cualquier punto sobre ella.
Bueno, sigamos reconstruyendo la lectura. Una vez se nos presenta la disposición espacial de la biblioteca y algunas conjeturas sobre ella ¿Cómo avanza la historia?

Tres estudiantes son designados para esta tarea:

Habla de que existen dos reglas fundamentales en la biblioteca. La primera hace referencia a la existencia eterna de la biblioteca (ha existido siempre). Y la segunda es que cada uno de los libros está constituido solo por 25 símbolos.
En esa parte también nos dicen que cada libro tiene una disposición de páginas, renglones y letras por renglón específicas. Las tengo anotadas… Son: 5 anaqueles por pared, 32 libros por anaquel, cada libro 410 páginas, cuarenta renglones por página, y cada renglón 80 letras.
Si. Y ahí dicen que, si bien la biblioteca parece extenderse indefinidamente, el descubrimiento de que cada libro es la combinación de esos 25 símbolos hace que el número de posibles libros, si bien es muy grande, resulte finito.

D: Muy bien, si no recuerdo mal hablan de haber traducido uno de los libros cuyo contenido era sobre análisis combinatorio. ¿Cómo podríamos aproximarnos a la idea de la cantidad de libros que existen?

Si por cada renglón hay 80 símbolos, entonces por renglón hay 25 a las 80 posibilidades, pues en cada una de las 80 posiciones puede haber 25 posibilidades. Ahora, si por página hay 40 renglones y son 410 páginas, entonces la cantidad de posibilidades es $25^{80^{40^{419}}} = 25^{1´312.000}$. Es decir, un número que necesita muchas más de 1´312.000 de cifras para poder escribirse.

¡Es enorme!

D: Sí, en ese momento el escritor describe que la revelación de que la cantidad de libros posibles es finita genera un alivio existencial en la comunidad de bibliotecarios. Además, menciona que en el análisis de esas posibilidades debía existir un libro que fuese la vindicación de alguien pues todo libro posible ya estaba escrito, toda idea pensada se puede encontrar en las múltiples configuraciones de las letras para algún lenguaje.
Por lo tanto, se me ocurre preguntarles a ustedes ¿Si supieran que su vindicación está en un libro la buscarían? Levanten la mano los que la buscarían.

Algunas manos se levantaron, se intuyó que aproximadamente la mitad de los estudiantes buscarían su vindicación.

Una estudiante pensativa asumió con valentía la posición opuesta y tomó la palabra.
Pero en la biblioteca el hecho de que las personas vayan en busca de sus vindicaciones no termina nada bien. Los buscadores pierden la esperanza rápidamente tras darse cuenta de la magnitud enorme de libros y de posibilidades sin sentido en la biblioteca. Y al perder la esperanza, los bibliotecarios comienzan a destruir los libros y cometer atrocidades. Por lo tanto, si fuera mi caso, yo no la buscaría.

Un estudiante más idealista reafirmó la decisión de haber levantado la mano:
Pero, no es en efecto lo que buscamos todos los días, algún conocimiento, experiencia, persona, lugar que reafirme nuestra existencia.

D: Muy interesante. Las dos posiciones las muestra la narración. Por un lado, como existe un número finito de libros, y la biblioteca funciona como un sistema total, debe haber un libro que hable de todos los libros y que se puede rastrear haciendo uso de una cadena (infinita o finita) de libros que se refieren sucesivamente entre ellos hasta llegar al libro total.
O bien, como los libros son finitos, la cantidad es tan enorme que las capacidades finitas de los bibliotecarios pueden ser despreciables. De hecho, el mismo cuento nos dice que la probabilidad de que una persona encontrara el libro que contenía su vindicación es computable en 0. Es una aguja en un pajar.

Como los granos de arena de una playa. Sabemos que deben ser finitos pero el acto de contarlos es inconcebible para una persona.

D: Que buen ejemplo para representar la relación con cantidades inmensas. ¿Qué conjuntos de elementos en nuestra realidad son infinitos entonces? ¿Qué puede ser infinito?

El número de estrellas en el cielo.
El número de neuronas en el cerebro humano

Un estudiante dubitativo confronta los ejemplos de sus compañeros.
Yo creo que tanto el número de estrellas en el cielo como el de neuronas en el cerebro humano son enormes, pero no infinitos, porque había leído que el número de partículas en el universo es finito.

D: Bueno, si asumimos esa verdad científica ¿Qué del mundo físico podríamos decir que es infinito? ¿Cómo es que hacemos uso de las ideas del infinito para hacer matemática?

Los estudiantes se quedaron en silencio, pensativos sobre estas preguntas, pero también con el estómago rugiendo por el hambre. La clase estaba por acabar, y viendo como la taza de su café estaba ya casi vacía, el profesor hizo su último comentario.

D: ¿Es paradójico no? Siempre se puede llegar a argumentos aparentemente contradictorios cuando hablamos del infinito. Pero los matemáticos pensamos que es justamente allí donde el quehacer matemático necesita de las fuerzas creativas e imaginativas para trabajar sobre estos asuntos y superarlos. El estudio del infinito es necesario para que lo paradójico que se encierra en él siga dando luces artísticas a la solución de los problemas matemáticos.
Por lo mismo, la tarea para la próxima clase es averiguar sobre la paradoja de Galileo y qué implicaciones tiene. Ya pueden salir a tomar su descanso.