

$$\left. \frac{df'}{dn} \right|_{y=0} = f''(0) = \left. \frac{d(v_x/v_\infty)}{d\left[\frac{y}{x} (v_\infty/\Gamma x)^{1/2}\right]} \right|_{y=0} =$$

$$\frac{d\left[\frac{T - T_s}{T_w - T_s}\right]}{d\left[\frac{y}{x} (v_\infty x/\Gamma)^{1/2}\right]} \bigg|_{y=0} = 0.332$$

El gradiente de temperatura en la superficie:

$$\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = (T_w - T_s) \left[\frac{0.332}{x} (Re_x)^{1/2} \right]$$

$$q = h(T_s - T_w) = -k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}$$

$$Nu_x = (h_x x/k) = 0.332 Re_x^{1/2}$$

Polhausen en 1921 demostró que la relación entre las capas límites hidrodinámica y térmica está dada aproximadamente por:

$$\delta/\delta_T = Pr^{1/3}$$

Al tener en cuenta este hecho obtenemos una ecuación del coeficiente local válida para números de Prandtl diferentes de uno y

$$v_w = v_y|_{y=0} = 0$$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (7.103)$$

La siguiente tabla compara los valores calculados por la ecuación obtenida por el método integral o aproximado de Von Karmán suponiendo perfil de velocidades sinusoidal (7.102); y la solución mixta Blasius - Polhausen (7.103)

Pr	Re	β	$Nu_x(7.102)$	$Nu_x(7.103)$	% error
3	100	0.1078	4.94	4.79	+ 3.1
10	1000	0.0494	23.87	22.62	+ 5.5
100	10000	0.0108	165.02	154.10	+ 7.1

La ecuación (7.102) difiere de la solución dada por Welty, Wicks y Wilson (problema 19.15), la cual presenta porcentajes de error

elevados. Esto se debe a que probablemente estos autores utilizan en la solución la aproximación por series de la función coseno, lo que introduce error cuya magnitud depende del número de términos que se tomen.

TRANSFERENCIA DE MASA EN LA CAPA LIMITE TURBULENTO SOBRE UNA PLACA PLANA.

La ecuación integral de concentraciones para la capa límite sobre una placa plana horizontal es la misma ecuación (7.84) :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} (\int_{A_\infty} - \int_A) v \, dy = - n_{A_\infty} \quad (7.84)$$

Se puede obtener por balance alrededor de la figura 7.4 (o la 7.10 que en resumidas cuentas es la misma cuando el eje x se dispone horizontalmente) teniendo presente que el balance de la especie A es el mismo balance total, cambiando \int por \int_A que ahora es función de y.

Para el caso del flujo de cantidad de movimiento turbulento sobre una placa plana usamos la ecuación (7.3) :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v (v - v_\infty) \, dy = - \tau_w / \rho \quad (7.3)$$

Con la distribución de velocidades obedeciendo la ley de la potencia un séptimo (1/7):

$$\left(\frac{v}{v_\infty} \right) = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (7.23)$$

Y una expresión empírica para τ_w :

$$\tau_w = 0.0227 \rho v_\infty^2 (\mu / \rho v_\infty \delta)^{1/4} \quad (7.22)$$

Para resolver la capa límite de concentraciones para flujo en capa límite turbulenta podemos seleccionar un perfil de concentraciones similar al de velocidades:

$$\frac{[A] - [A_\infty]}{[A_w] - [A_\infty]} = \left(\frac{y}{\delta_c} \right)^{1/7} \quad (7.104)$$

o sea :

$$1 - \frac{[A] - [A_\infty]}{[A_w] - [A_\infty]} = \frac{[A_w] - [A]}{[A_w] - [A_\infty]} = 1 - \left(\frac{y}{\delta_c} \right)^{1/7}$$

Reemplazando en la ecuación (7.84) con

$$n_{A_\infty} = k \left(\int_{A_\infty} - \int_{A_w} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} \left(\int_{A_\infty} - \int_{A_w} \right) v \, dy = - k \left(\int_{A_\infty} - \int_{A_w} \right)$$



$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_0} \left[1 - (y/\delta_0)^{1/7} \right] \left[y/\delta \right]^{1/7} dy = (k_f/v_\infty)$$

Donde k_f es nuevamente un coeficiente de transferencia de masa convectiva que opera con diferencias de concentración expresadas en masa por unidad de volumen. Las dimensiones de k_f coinciden con las de una velocidad. La ecuación (7.25) nos da el espesor de la capa límite hidrodinámica turbulenta :

$$\delta = 0.376x Re_x^{-0.2} \quad (7.25)$$

Asumimos que $\delta = \delta_0$ para un x dado, o sea que Sc es la unidad. Esto nos limita a fluidos gaseosos.

$$k_f = v_\infty \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \left[1 - (y/\delta)^{1/7} \right] \left[y/\delta \right]^{1/7} d(y/\delta) \right]$$

ó :

$$k_f = \frac{7}{72} v_\infty \frac{d\delta}{dx} \quad (7.105)$$

Usando (7.25) para calcular $d\delta/dx$ y multiplicando a ambos miembros de (7.105) por $Re_x Sc$:

$$Sh_x = \frac{k_f x}{\Delta_{AB}} = 0.0292 Re_x^{0.8} \quad (7.105 a)$$

Si toda la placa se encontrara en régimen turbulento :

$$k_{fm} = \frac{1}{L} \int_0^L k_{fx} dx$$

$$Sh_m = \frac{(K L)/D}{\Delta_{AB}} = 0.0365 Re_L^{0.8} \quad (7.106)$$

En la práctica una parte de la placa se hallará en régimen laminar y la otra en régimen turbulento. Podemos encontrar un coeficiente promedio para este flujo en régimen mixto así :

$$k_{fm} = \frac{1}{L} \left[\int_0^{\delta_0} k_{lam} dx + \int_{x_0}^L k_{turb} dx \right]$$

Donde por analogía con la ecuación (7.103),

$$k_{lam} = 0.332 (D_{AB}/x) Re_x^{1/2} Sc^{1/3} \quad (7.107)$$

$$k_{\text{turb}} = 0.0292 (D_{AB} / x)^{0.8} Re_x^{1/3} Sc$$

Aquí la ecuación (7.105 a) ha sido modificada por el factor $Sc^{1/3}$ para que sea válida en el caso de Sc diferente de la unidad. De esta forma obtenemos.

$$Sh_m = [0.664 (Re_c)^{1/2} + 0.0365 (Re_L^{4/5} - Re_c^{4/5})] Sc^{1/3} \quad (7.108)$$

La extensión a transferencia de calor es obvia.

La expresión (7.107) tiene validez para $v_w = 0$, es decir, cuando la componente y de la velocidad en la superficie de la placa vale cero. Sin embargo si hay transferencia de masa, algún componente de velocidad habrá allí pues analizando la ley de Fick:

$$n_A = j_A + \int v_{As} = j_A + (n_A + n_B) w_A$$

Como $n_B = 0$

$$v_s = (n_A w_A / \int) = n_A / \int \quad (7.109)$$

Para tener en cuenta este componente y de la velocidad en la superficie la ecuación (7.107) se reescribe:

$$Sh_{xlam} = m_s Re_x^{1/2} Sc^{1/3} \quad (7.107 a)$$

y m_s se toma interpolada de la siguiente tabla:

v_B ---- (Re_x) v_w	0.60	0.50	0.25	0.00	-2.50
m_s	0.01	0.06	0.17	0.332	1.64

ANALISIS APROXIMADO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN METALES LIQUIDOS PARA FLUJO LAMINAR SOBRE PLACAS PLANAS.

El número aproximado de Prandtl para los metales líquidos es muy bajo debido a su alta conductividad térmica; por esto el espesor de la capa límite térmica es mucho mayor que el de la capa límite de velocidad ($\delta_T \gg \delta$). Por esta razón el análisis de la transferencia de calor en metales líquidos requiere consideraciones diferentes.

Consideremos el flujo de un metal líquido a una temperatura T_∞ con una velocidad v_∞ sobre una placa plana que se mantiene a temperatura uniforme T_s , como se ilustra en la figura 7.12 la capa límite térmica es mucho más gruesa que la capa límite de velocidad. La ecuación integral de la energía (7.96) tiene también validez en este caso.

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_T} v_x (1 - \theta) dy \right] = \alpha \frac{d\theta}{dy} \Big|_{y=0} \quad (7.96)$$

En donde

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$$

Como la capa límite de velocidad es muy delgada, entonces la velocidad de flujo sobre una gran parte de la capa térmica es uniforme e igual a v_∞ . Por lo tanto se puede tomar como una primera aproximación que $v_x = v_\infty$

Suponiendo que el perfil de temperatura en la capa límite térmica se puede aproximar por un polinomio cúbico de la forma:

$$T = ay^3 + by^2 + cy + d$$

Con las siguientes condiciones límite:

$$y = 0 \quad T = T_s \quad d^2T/dy^2 = 0$$

$$y = \delta_T \quad T = T_\infty \quad dT/dy = 0$$

Calculando los coeficientes obtenemos:

$$\theta = \frac{3}{2} (y/\delta_T) - \frac{1}{2} (y/\delta_T)^3 \quad (7.109)$$

Substituyendo en (7.96)

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_T} v_\infty \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} (y/\delta_T)^3 \right] dy \right] = \alpha \frac{3}{2\delta_T}$$

integrando:

$$v_\infty \frac{3}{8} (d\delta_T/dx) = (3/2)(\alpha/\delta_T)$$

Simplificando, separando variables e integrando con $\delta_T = 0$ en $x = 0$:

$$\delta_T = (8\alpha x/v_\infty) \quad (7.110)$$

$$q_s = -k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = h(T_s - T_\infty) = k(T_s - T_\infty) \left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=0}$$

de donde :

$$h_x = k \left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=0}$$

a partir de (7.109)

$$\left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=0} = \frac{3}{2\delta_T}$$

Por (7.110)

$$h_x = \frac{3k}{2\delta_T} = \frac{3}{(2\sqrt{8})} \frac{k}{x} (Re_x Pr)^{\frac{1}{2}}$$

$$Nu_x = 0.530 Pe_x^{\frac{1}{2}} \quad (7.111)$$

donde $Pe_x = (Re_x.Pr)$ es el número de Peclet local.

Polhausen da como valor exacto:

$$Nu_x = 0.564 Pe_x^{\frac{1}{2}} \quad (7.112)$$

CAPITULO 8. COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA EN CONDICIONES DIVERSAS

Los problemas de transferencia de calor que más frecuentemente se encuentran están relacionados con calentamiento y enfriamiento de fluidos en tuberías. Despreciaremos los efectos de entrada.

Para flujo isotérmico laminar desarrollado el perfil de velocidad es parabólico. Del balance de cantidad de movimiento (ecuación de Navier-Stokes) se puede obtener:

$$v_z = 2v_m \left[1 - (r/R)^2 \right] \quad (8.1)$$

Si el fluido se calienta o enfría, el perfil de velocidad puede alterarse bastante debido al efecto de la temperatura sobre la viscosidad. Las complicaciones que resultan hacen que sólo se obtengan soluciones aproximadas. Graetz (1883 y 1885) desarrolló soluciones para dos casos: uno en el que se supone despreciable la distorsión del perfil de velocidad y otra en la cual se supone que la distorsión es tan grande que el perfil de velocidad es plano para toda el área transversal de la tubería. Este último tipo de flujo se denomina flujo pistón.

PERFIL DE VELOCIDAD PARABOLICO CON TEMPERATURA UNIFORME DE PARED.

Suponemos que la temperatura del fluido a la entrada es constante para toda la sección de la tubería.

El balance de energía en coordenadas cilíndricas, aplicado al sistema en estado estable y con simetría axial es:

$$v_z \frac{\delta T}{\delta z} = \alpha \left[\frac{\delta^2 T}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta T}{\delta r} + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \right] \quad (8.2)$$

Si además asumimos el que la conducción en la dirección de flujo es despreciable en comparación con los otros términos de transporte, el último término puede suprimirse.

Reemplazando la ecuación para la distribución de velocidades y haciendo esta última simplificación:

$$\frac{\delta^2 T}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta T}{\delta r} = (2v_m/\alpha) \left[1 - (r/R)^2 \right] \frac{\delta T}{\delta z} \quad (8.2 a)$$

Esta ecuación diferencial parcial puede resolverse por la técnica de separación de variables, obteniéndose dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

La solución de la ecuación que relaciona T y z es una relación exponencial simple.

La solución de la ecuación que relaciona T y r es una serie. Su combinación da T como una función de z y r (ver ecuación 9.41).

Las condiciones límite son:

para $x = 0$ $T = T_0$ todo r

para $x > 0$ $T = T_s$ $r = R$

Detalles de la solución están dados en Jakob. Este lleva a ecuaciones complejas que expresan el grupo de Nusselt local como una función del número de Graetz:

$$\frac{m' C_p}{kx} = Pe (\pi/4)(D/x)$$

Aquí, $Pe = (Re.Pr)$ es el número de Peclet y D es el diámetro del conducto.

PERFIL DE VELOCIDAD PLANO

Si se supone flujo pistón, $v_z = v_m$ en todos los puntos y la ecuación combinada de masa, energía y cantidad de movimiento (8.2 a) se simplifica a :

$$\frac{\delta^2 T}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta T}{\delta r} = (v_m/\alpha) \frac{\delta T}{\delta z} \quad (8.3)$$

La solución de esta ecuación es algo más simple que la solución de la ecuación que involucra el perfil parabólico. Esto ocurre debido a que la ecuación diferencial parcial, al separar las variables nos da dos ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden resolverse por métodos estandar. Una solución es una ecuación exponencial simple y la otra involucra una función Bessel. Detallese nuevamente en Jakob.

FLUJO UNIFORME DE CALOR.

Los dos sistemas de flujo mencionados dan soluciones diferentes si la condición límite de temperatura constante en la pared se reemplaza por la condición de densidad de flujo de calor uniforme en la pared.

Hausen (1943) propuso la siguiente expresión para representar las diferentes soluciones obtenidas por Graetz:

$$Nu = Nu_{\infty} + \frac{K_1 \left[\frac{D}{z} Re Pr \right]}{1 + K_2 \left[\frac{D}{z} Re Pr \right]^n} \quad (8.4)$$

Condición en la superficie	Perfil de velocidad	Pr	Nu	Nu _∞	K ₁	K ₂	n
T _s constante	Parabólico	Todos	Medio	3.66	0.0668	0.04	2/3
T _s constante	Plano	0.7	Medio	3.66	0.1040	0.016	0.8
q _s constante	Parabólico	Todos	Local	4.36	0.023	0.0012	1.0
q _s constante	Plano	0.7	Local	4.36	0.036	0.0011	1.0

La extensión a transferencia de masa es sencilla si tenemos presente que $J_D = J_H$.

TRANSFERENCIA DE MASA CON FLUJO LAMINAR EN TUBOS CIRCULARES. SOLUCION DE LEVEQUE.

Una de las soluciones más sencillas para el coeficiente de transferencia de masa con flujo laminar en tubos circulares es la de L ev eque. Este análisis se aplica directamente a la transferencia de masa laminar sobre una placa plana, pero estos resultados pueden aplicarse fácilmente a tubos circulares. Esta solución se desarrolla matemáticamente asumiendo que la capa límite de concentraciones está confinada a una estrecha zona cercana a la pared del tubo, como en los casos donde el caudal másico es alto y la longitud del tubo no es grande, lo que ocurre para valores del número de Graetz ($m' / (DAB z)$) mayores de 400.

Consideremos un fluido fluyendo sobre una superficie bajo las siguientes condiciones:

- Las propiedades del fluido son constantes.
- La concentración en la superficie es uniforme $[A_s]$.
- La composición del fluido fuera de la capa límite es $[A_{\infty}]$ (igual a la concentración uniforme a la entrada del conducto).
- La transferencia en la dirección y (radial) ocurre por difusión exclusivamente.
- Se asume distribución lineal de velocidades o sea :

$v_x = \beta(R - r) = \beta y$, donde βy es el gradiente de velocidad en la pared.

La composición del fluido f_A es una función de z , y . Para valores pequeños de y ,

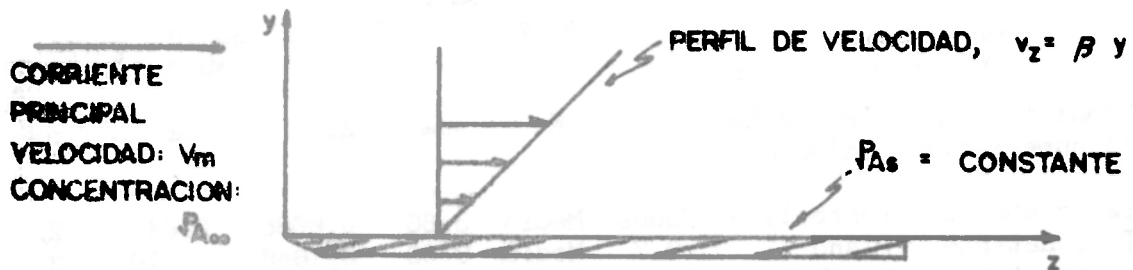


FIGURA 8.1.

$$\delta^2 f_A / \delta z^2 \ll \delta^2 f_A / \delta y^2$$

Además $\delta^2 f_A / \delta x^2$ es despreciable.

La ecuación para transferencia de masa en un conducto horizontal, despreciando los efectos térmicos debidos a la fricción viscosa es en estado estable :

$$v_x \frac{\delta f_A}{\delta x} + v_y \frac{\delta f_A}{\delta y} + v_z \frac{\delta f_A}{\delta z} = D_{AB} \left[\frac{\delta^2 f_A}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f_A}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 f_A}{\delta z^2} \right]$$

Esta expresión, en nuestro caso se reduce a :

$$\beta y \frac{\delta f_A}{\delta z} = D_{AB} \frac{\delta^2 f_A}{\delta y^2} \quad (8.5)$$

Con las siguientes condiciones límite :

$$\text{CL 1 : } \quad z = 0 \quad y > 0 \quad f_A = f_{A\infty}$$

$$\text{CL 2 : } \quad z > 0 \quad y = 0 \quad f_A = f_{As}$$

$$\text{CL 3 : } \quad \text{Todo } z \quad y \rightarrow \infty \quad f_A = f_{A\infty}$$

Esta ecuación puede transformarse a una ecuación diferencial ordinaria introduciendo la variable

$$\eta = y \left[\frac{\beta}{9D_{AB}z} \right]^{1/3}$$

Así :

$$\frac{\delta f_A}{\delta z} = \frac{\delta f}{\delta n} \frac{\delta n}{\delta z} ; \quad \frac{\delta n}{\delta z} = \frac{1}{3} \frac{n}{z}$$

y:

$$\frac{\delta f_A}{\delta y} = \frac{\delta f}{\delta n} \frac{\delta n}{\delta y} , \quad \frac{\delta^2 f_A}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 f}{\delta n^2} \left[\frac{\delta n}{\delta y} \right]^2$$

$$\frac{\delta n}{\delta y} = \frac{n}{y}$$

Reemplazando en (8.5) obtenemos :

$$-\frac{\beta y f' n}{3z} = D_{AB} f'' (n/y)^2$$

Observando que

$$y^3 \left[\frac{\beta}{3D_{AB}z} \right] = 3n^3$$

y reorganizando :

$$f'' + 3n^2 f' = 0 \quad (8.4 a)$$

donde

$$\frac{\delta f_A}{\delta n} = f' ; \quad \frac{\delta^2 f_A}{\delta n^2} = f''$$

Las tres condiciones límites originales se reducen a dos (la condición límite 1 y 3 se igualan):

$$\begin{aligned} \text{CL 1 :} & \quad n \rightarrow \infty & f_A &= f_{A\infty} \quad (z = 0 \text{ ó } y \rightarrow \infty) \\ \text{CL 2 :} & \quad n = 0 & f_A &= f_{A0} \quad (y = 0) \end{aligned}$$

Haciendo $f' = \theta$, $f'' = d\theta/dn$ la ecuación queda:

$$\frac{d\theta}{dn} + 3n^2\theta = 0$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = - 3n^2 dn \quad \text{entonces:} \quad \ln \theta = - n^3 + \ln C$$

$$\theta = C \exp (- n^3) ; \quad df_A/dn = C \exp (- n^3)$$

$$\int_{f_{A0}}^{f_A} df_A = C \int_0^n \exp (- n^3) dn \quad (8.6)$$

Para evaluar la constante de integración, C, usamos las condiciones límite así:

$$\int_{A_s}^{A_\infty} dA = C \int_0^\infty \exp(-n^3) dn \quad (8.6 a)$$

Llamemos $I = \int_0^\infty \exp(-n^3) dn$

sea $u = n^3$, entonces $n = u^{1/3}$ y así $dn = (1/3)u^{-2/3} du$

si $n = 0$, $u = 0$; si $n \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$; luego:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^\infty u^{-2/3} \exp(-u) du$$

Por definición:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} \exp(-u) du$$

En consecuencia:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^\infty u^{-1/3} \exp(-u) du = \frac{1}{3} \Gamma(1/3)$$

Utilizando integración por partes se demuestra la siguiente propiedad de la función gama: $\Gamma(p+1) = p \Gamma(p)$

por esto :

$$I = \frac{1}{3} \Gamma(1/3) = \Gamma(1/3 + 1) = \Gamma(4/3)$$

De una tabla: $\Gamma(4/3) \approx 0.8934$ (o por integración numérica)

Por esto, reemplazando en (8.6): $C = (A_\infty - A_s)/0.8934$

de donde, (8.6) se transforma en:

$$\frac{A - A_s}{A_\infty - A_s} = \frac{1}{0.8934} \int_0^n \exp(-n^3) dn \quad (8.7)$$

La integral de esta expresión puede evaluarse mediante el uso de series u otro método numérico y tiende rápidamente a su valor asintótico variando entre 0 y 0.8930 para n entre 0 y 2. (ver figura 8.2).

Podemos usar el perfil de concentraciones para determinar el coeficiente de transferencia de masa en función de z :

$$n_{As} = k \int_{As}^{A\infty} (f_{As} - f_{A\infty}) = -D_{AB} \left. \frac{df_A}{dy} \right|_{y=0}$$

para z constante :

$$\frac{\delta f_A}{\delta y} = \frac{\delta f_A}{\delta n} \frac{\delta n}{\delta y}$$

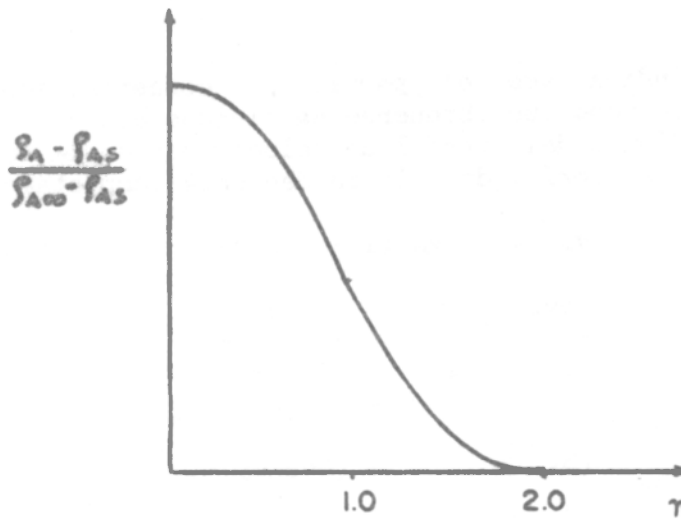


FIGURA 8.2.

$$\frac{\delta n}{\delta y} = \left[\frac{\beta}{9 D_{AB} z} \right]^{1/3}$$

$$\frac{\delta f_A}{\delta n} = \frac{f_{A\infty} - f_{As}}{0.8934} \exp(-\eta^3)$$

Pues la derivada de una integral con respecto al límite superior es el integrando.

$$\left. \frac{\delta f_A}{\delta y} \right|_{y=0} = \left[\frac{f_{A\infty} - f_{As}}{0.8934} \exp(-\eta^3) \right] \left[\frac{\beta}{9 D_{AB} z} \right]^{1/3} \bigg|_{y=0}$$

$$k|_z = \frac{D_{AB}}{0.8934} \left[\frac{\beta}{9 D_{AB} z} \right]^{1/3} \quad (8.8)$$

Este es el coeficiente convectivo de transferencia de masa a una distancia z del borde de ataque. Puede servirnos para dar el valor del coeficiente en la región de entrada de un tubo circular. Sabemos que el perfil de velocidad se halla completamente desarrollado a una distancia $(Le/D) \approx 0.05 Re$; el perfil de temperatura se

desarrolla completamente a $(L_{eT}/D) \approx 0.05 Re Pr$; y el perfil de concentraciones a $(L_{eC}/D) \approx 0.05 Re Sc$.

Consideramos, por ejemplo el caso de agua fluyendo a través de un tubo a $Re = 100$ y $68^\circ F$. A esta temperatura $Pr = 7$. El número de Schmidt para varios materiales en agua es substancialmente dependiente del soluto, pero un valor típico es del orden de 1200.

Entonces las longitudes de entrada de concentraciones, térmica e hidrodinámica son respectivamente:

$$\begin{aligned}(L_{eC}/D) &= 6000 \\(L_{eT}/D) &= 35 \\(L_e/D) &= 5\end{aligned}$$

Esto nos indica que el perfil de concentraciones completamente desarrollado puede no obtenerse en fluidos con Schmidt grande. Como β es la pendiente del perfil de velocidades en la superficie, podemos suponer que el perfil de velocidades está completamente desarrollado, o sea :

$$v_z = 2 v_m [1 - (r/R)^2] \quad (4.49)$$

$$\left. \frac{\delta v_z}{\delta r} \right|_{r=R} = - \frac{4v_m}{R}$$

con $r = R - y$:

$$(\delta v_z / \delta r) = - (\delta v_z / \delta y)$$

O sea :

$$k_f = \frac{D_{AB}}{0.8934} \left[\frac{8 v_m}{9D D_{AB} z} \right]^{1/3}$$

El número de Peclet para transferencia de masa :

$Pe_D = Re Sc = (v D / D_{AB})$; D : Diámetro del conducto.

$$Sh_z = 1.077 (D/z)^{1/3} (Pe_D)^{1/3} \quad (8.9)$$

$$100 < Pe < 5000$$

La suposición del gradiente de velocidad β constante no es válida en la inmediata entrada del tubo donde el gradiente es infinito; pero sin embargo, los gradientes de velocidad junto a la pared se desarrollan rápidamente y pronto se aproximan al utilizado en el desarrollo anterior. Este k_f debe usarse con $[A_s - [A_\infty \approx [A_s - [A_0$, siendo $[A_0$ la concentración promedio del fluido a la entrada del conducto.

El valor promedio para el coeficiente adimensional es :

$$Sh_{ma} = (k_f a D / D_{AB}) = 1.615 D \left[\frac{\beta}{8 D_{AB} L} \right]^{1/3}$$

$$Sh_{ma} = 1.615 (D/L)^{1/3} (Re Sc)^{1/3} \quad (8.9 a)$$

$m' / (D_{AB} z) > 400$

El coeficiente promedio $k_f a$ usado acá se define entre la entrada y la salida de la sección de transferencia de masa así :

$$([A_{mL} - A_{m0}](\pi D^2 v_m) / 4 = k_f a (\pi DL) [(A_m - A_{m0}) + (A_m - A_{mL})] / 2$$

donde A_{mL} y A_{m0} son respectivamente las concentraciones promedio en la corriente a la entrada y a la salida del conducto, o sea que $k_f a$ trabaja con el promedio aritmético de las fuerzas guías a la entrada y la salida.

La ecuación (8.9 a) es la base de la correlación de Sieder y Tate (1936) quienes, para transferencia de calor propusieron :

$$Num = 1.86 Re^{1/3} Pr^{1/3} (D/L)^{1/3} (\mu_b / \mu_m)^{0.14} \quad (8.10)$$

donde μ es la viscosidad del fluido a la temperatura promedio global y μ_m es la viscosidad a la temperatura de pared. El termino μ_b / μ_m es una corrección empírica para la distorsión del perfil de velocidad resultante del efecto de la temperatura en la viscosidad.

El coeficiente obtenido con esta ecuación, usa como fuerza guía el promedio logarítmico de de las diferencias de temperatura en los extremos. Es conservativa según McAdams por suponer perfil desarrollado en tubos cortos.

APLICACION DE ANALOGIAS.

Así como Churchill propuso una sola ecuación que correlaciona el factor de fricción con todas las relaciones de rugosidad para los regímenes de flujo: laminar, transición y turbulento en tubos, se puede obtener una sola ecuación que correlaciona el factor de Colburn con todos los números de Reynolds. Esta ecuación produce una curva continua y suave conveniente para utilizar en los análisis y diseños ayudados por computador o calculadora.

$$J_H = \left[\frac{1}{Re^{0.36}} + \frac{1}{\left[\frac{Re^{1.6}}{7.831 \times 10^{-14}} + \left[\frac{1.986 \times 10^8}{Re} \right]^8 \right]^{3/2}} \right]^{1/12} \left[\frac{\mu_b}{\mu_m} \right]^{0.14} \quad (8.11)$$

$$J_H = St Pr^{2/3} = \frac{h}{\rho C_p v_m} Pr^{2/3}$$

La extensión a transferencia de masa es obvia haciendo:

$$J_H = J_D = St Sc^{2/3}$$

La expresión presentada inicialmente por Pierce, trae un error de escritura en *Chemical Engineering* 86, 27, p 113, 1979.

TRANSFERENCIA DE MASA EN UNA PELICULA LIQUIDA DESCENDENTE.

La situación a analizarse consiste en una película líquida de propiedades constantes que desciende con flujo estacionario, por una superficie sólida plana y lisa. La superficie libre de la película que desciende es adyacente a una fase gaseosa. Puede ocurrir transferencia de masa, tanto entre la superficie sólida y la película como entre la película y la fase gaseosa. Cada posibilidad se examinará a su turno, para condiciones de baja concentración de soluto y bajas velocidades de transferencia de masa, en forma tal que la velocidad de arrastre debida a la difusión pueda despreciarse.

TRANSFERENCIA DE MASA ENTRE UNA PLACA INCLINADA Y UNA PELICULA DESCENDENTE.

Tenemos una placa plana de ancho H . Su superficie es insoluble para x menor que cero y para x mayor que cero la superficie de la placa está

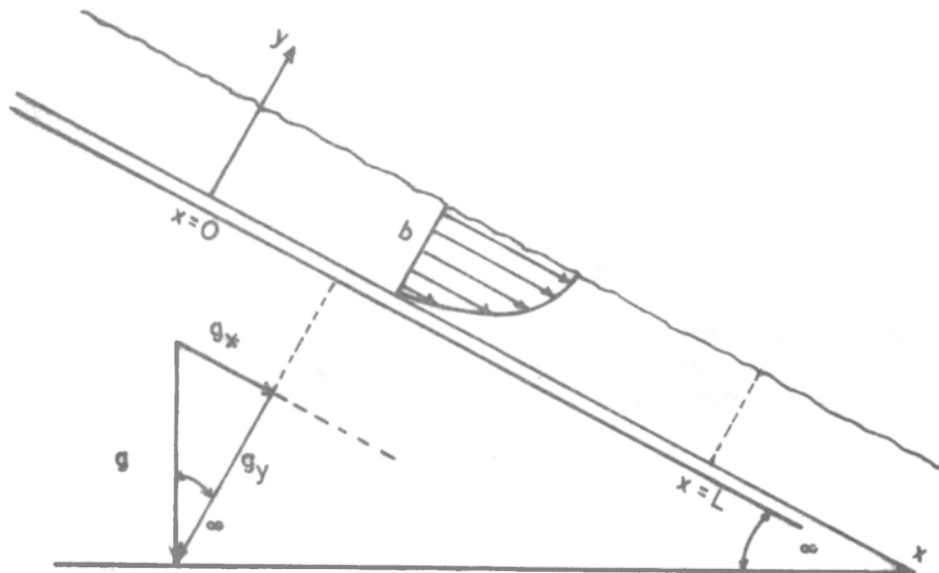


FIGURA 8.3..

hecha de un material A cuya solubilidad en el líquido que la cubre es $[A_s]$. El líquido la cubre en forma de una película que fluye en flujo

laminar estable en la dirección x, descendiendo a lo largo de la placa, la cual está inclinada un ángulo α con respecto a la horizontal tal como se esquematiza en la figura 8.3.

La solubilidad de A es pequeña y la longitud L no es muy grande de tal manera que la penetración del soluto en la película líquida no es muy grande. En esta condición podemos suponer que, desde el punto de vista del soluto, el gradiente de velocidad en la película es constante, e igual a βy , donde β es la pendiente del perfil de velocidad en la superficie.

Balace de la especie A :

$$\frac{\delta n_{Ax}}{\delta x} + \frac{\delta n_{Ay}}{\delta y} + \frac{\delta n_{Az}}{\delta z} + \frac{\delta f_A}{\delta t} = r_A \quad (9.12)$$

$$n_{Ax} = j_{Ax} + f_A v_x ; \quad n_{Ay} = j_{Ay} + f_A v_y$$

$n_{Az} = 0$ (no hay gradientes en la dirección z)

$\delta f_A / \delta t = 0$ (estado estable)

$r_A = 0$ (no hay reacción química homogénea)

$f_A v_y = 0$; Componente de velocidad y despreciable.

$j_{Ax} \ll f_A v_x$; El transporte convectivo de A en la dirección x es mucho mayor que el transporte difusional en tal dirección.

Reemplazando en (8.12) obtenemos :

$$v_x \frac{\delta f_A}{\delta x} - D_{AB} \frac{\delta^2 f_A}{\delta y^2} = 0$$

Y la ecuación diferencial que describe este proceso es :

$$\beta y \frac{\delta f_A}{\delta x} = D_{AB} \frac{\delta^2 f_A}{\delta y^2} \quad (8.12 a)$$

Con las siguientes condiciones límite :

$$x = 0 \quad y \geq 0 \quad f_A = f_{A0} ; \quad x > 0 \quad y = 0 \quad f_A = f_{As} ;$$

para todo x, y tiende a infinito, $f_A = f_{A0}$

El soluto no alcanza a penetrar en la película líquida o sea, desde su punto de vista esta tiene un espesor infinito.

Esta ecuación y sus condiciones límite son las mismas de la ecuación (8.5) que al resolverse nos da :

$$\left. \frac{\delta f_A}{\delta y} \right|_{y=0} = \frac{f_{A0} - f_{As}}{0.8934} \left[\frac{\beta}{9 D_{AB} x} \right]^{1/3} \quad (8.13)$$

Definimos un coeficiente de transferencia de masa :

$$n_{As} = k_f (f_{As} - f_{A0}) = - D_{AB} \left. \frac{\delta f}{\delta y} \right|_{y=0}$$

y el coeficiente promedio :

$$k_{fm} = \frac{\int_0^x k_f dx}{\int_0^x dx} = - \frac{D_{AB}}{x(f_{As} - f_{A0})} \int_0^x \left[\left. \frac{\delta f_A}{\delta y} \right|_{y=0} \right] dx \quad (8.14)$$

Reemplazando (8.13) en (8.14), sabiendo que β no es función de x :

$$\begin{aligned} Sh_m = (k_{fm} x / D_{AB}) &= \frac{(3x/2) [\beta / D_{AB} x]^{1/3}}{[(0.8934)(9)]^{1/3}} = \\ &= 0.8072 x [\beta / D_{AB} x]^{1/3} \end{aligned} \quad (8.15)$$

DETERMINACION DEL GRADIENTE DE VELOCIDAD.

La ecuación de Navier Stokes en la dirección x , para fluido newtoniano con densidad y viscosidad constantes:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \mu \operatorname{div}^2 v - \frac{\delta p}{\delta x} + \rho g_x$$

Sabiendo que el estado es estable, que sólo la componente x de la velocidad y que ésta es función de y , además sobre el elemento de volumen sólo actúan fuerzas gravitacionales:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \rho g_x = 0$$

con las condiciones límite :

$$y = 0 \quad v_x = 0 \quad (\text{no resbala en superficie sólida})$$

$y = b \quad dv_x/dy = 0 \quad (\text{superficie libre})$

Integrando

$$\frac{dv_x}{dy} = - \int g_x y / \mu + C$$

Aplicando la segunda de las condiciones límite : $C = \int g_x b / \mu$

$$v_x = (\int g_x / \mu)(by - y^2/2) \quad (8.15 a)$$

$$\beta = \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = \frac{\int g_x b}{\mu} \quad (8.16)$$

Donde $g_x = g \text{ sen } \alpha$ como se desprende de la figura 8.2.

El caudal líquido en la película será :

$$Q = H \int_0^b v_x dy = (H \int g_x b^3) / (3\mu)$$

O sea, que el espesor de la película es

$$b = \left[\frac{3\mu Q}{H \int g_x} \right]^{1/3} \quad (8.17)$$

La velocidad promedio en la película

$$v_m = \frac{Q}{bH} = (\int g_x b^2) / (3\mu) = (2/3) v_{max} \quad (8.18)$$

Definimos un número de Re para la película como :

$$Re_f = \int v_m D_{eq} / \mu \quad (8.19)$$

$$D_{eq} = 4R_H = \frac{4A}{P_H} \approx \frac{4bH}{H} = 4b$$

o sea :

$$Re_f = \frac{4 \int Q}{H \mu} = \frac{4 \Gamma}{\mu} \quad (9.19 a)$$

Donde Γ es el caudal másico por unidad de ancho de la película.

Reemplazando en la expresión para β , tenemos :

$$\beta = \left[\frac{3}{4} Re_f (\int g_x^2 / \mu) \right]^{1/3}$$

O sea :

$$Sh_m = 0.782 Re_f^{1/9} Sc^{1/3} \left[\frac{x^3 \rho^2 g \sin \alpha}{\mu^2} \right]^{2/9} \quad (8.19)$$

$$Re_f < 2000$$

Si las condiciones son tales que el soluto penetre la película líquida hasta más allá de la región donde $v_x = \beta y$, la ecuación diferencial es:

$$\frac{\rho g x}{\mu} \left[\beta y - \frac{y^2}{2} \right] \frac{\delta \rho_A}{\delta x} = D_{AB} \frac{\delta^2 \rho_A}{\delta y^2} \quad (8.20)$$

La solución a esta ecuación fué dada por Nusselt en 1923, y los resultados dados por Skelland para una placa vertical se pueden aproximar por :

$$\frac{\rho_{Am} - \rho_{A0}}{\rho_{As} - \rho_{A0}} = 6.4861 \left[\frac{D_{AB} \mu x}{\rho b^4 g} \right] - (17.8251) \left[\frac{D_{AB} \mu x}{\rho b^4 g} \right]^2 \quad (8.20 a)$$

$$\frac{D_{AB} \mu x}{\rho b^4 g} \leq 0.36$$

El uso de esta expresión (así como de la 8.19) usando difusividades moleculares da velocidades de transferencia sustancialmente menores que las observadas experimentalmente, debido probablemente a algún grado de turbulencia dentro de la película asociada con ondulaciones en la superficie libre.

Basándonos en los resultados experimentales obtenidos por Stirba y Hurt en 1955, es recomendable hacer los cálculos usando una difusividad efectiva dada por la siguiente expresión :

$$D_{AE} = 7.253 \times 10^{-12} Re_f^2 + 8.59 \times 10^{-8} Re_f + 8.919 \times 10^{-6} \quad (8.21)$$

$$200 \leq Re_f \leq 5000$$

Estas discrepancias con la teoría pueden esperarse también estén originadas en que el análisis no tiene en cuenta la presencia de la superficie libre, lo que haría depender el fenómeno de cantidades adimensionales adicionales como los números de Weber y Froude.

Las expresiones para películas líquidas descendiendo por el interior o exterior de tubos (columnas de pared húmeda), pueden tratarse con las mismas expresiones que la película líquida descendente plana,

cuando son hidrodinámicamente equivalentes, lo que ocurre para números de Goucher mayores que tres :

$$Go = R \left[\frac{\sigma}{2\sigma} \right]^{0.5} > 3 \quad (8.22)$$

Donde σ es la tensión superficial.

Para flujos turbulentos y cortos tiempos de contacto, las expresiones (8.12 a), (8.15 a), (8.16) mantienen su validez. Brotz, en 1954 halló que el espesor de la película sobre una pared vertical está dado por:

$$b = 0.172 \left[\frac{Q^2}{H^2 g} \right]^{1/3} \quad (8.23)$$

$$Re_f > 2360$$

Reemplazando en (8.15) :

$$Sh_m = (k_f m_x / D_{AB}) = 0.327 Re_f^{2/9} Sc^{1/3} \left[\frac{x^2 \bar{\rho} g}{\mu^2} \right]^{2/9} \quad (8.24)$$

Esta expresión requiere que el soluto no penetre más allá de la subcapa laminar o sea

$$y^+ \leq 5 = yv^*/\mu \quad ; \quad v^* = (\tau_w/\rho) \quad ; \quad \tau_w = \mu(dv_x/dy)|_{y=0} = \mu\beta$$

O sea que el flujo podrá ser laminar para $y \leq 5(\mu/\beta)^{1/2}$

Con β calculado a partir de (8.16) y (8.23) la ecuación (8.24) muestra buenos resultados para tiempos de exposición promedios menores que dos segundos, donde $t_{exp} = L/v_m$.

TRANSFERENCIA DE MASA ENTRE UNA FASE GASEOSA Y UNA PELICULA LIQUIDA DESCENDENTE.

Esta es una situación que se presenta por ejemplo en absorción gaseosa en una columna de pared húmeda, para un sistema en el cual la resistencia controlante se encuentra en la fase líquida. Para éste caso se puede asumir que la concentración de soluto en la superficie es constante en $\{A_s$. Se supone además que las concentraciones de A son bajas de tal forma que las velocidades difusionales perpendiculares a la pared son efectivamente cero, y que la difusión en la dirección x es despreciable comparada al transporte por movimiento convectivo. En consecuencia la ecuación diferencial (8.20 b) puede escribirse como:

$$v_{max} \left[1 - \left[\frac{(b-y)}{b} \right]^2 \right] \frac{\delta \{A\}}{\delta x} = D_{AB} \frac{\delta^2 \{A\}}{\delta [b-y]^2} \quad (8.25)$$

donde v_{max} es la velocidad de descenso de la superficie libre de la película

$$v_{max} = (g_x b^2) / 2\mu$$

La concentración del fluido a la entrada es constante a $\{A_0$. Johnstone y Pigford resolvieron la ecuación (8.25):

$$\frac{\{A_{msd} - \{A_s}{\{A_0 - \{A_s} = \sum_1^n \alpha_j \exp(-\beta_j \eta) \quad (8.26)$$

Donde las constantes para los primeros cuatro términos son:

j	α_j	β_j
1	0.78570	5.1213
2	0.10010	39.3180
3	0.03599	105.6400
4	0.01811	204.7500

$$\eta = \frac{D_{AB} x}{b^2 v_{max}} = 2.9351 \text{Re}^{-4/3} \text{Sc}^{-1} \left[\frac{x^3 \{2g\}}{L \mu^2} \right]^{1/3}$$

para bajos valores de η :

$$\frac{\{A_B - \{A_s}{\{A_0 - \{A_s} = 1 - 3(\eta/\pi)^{1/2}$$

Puesto que $\{A_m$ varía a lo largo de la película a medida que el soluto es absorbido, es preciso evaluar un coeficiente promedio de transferencia de masa así:

Para una distancia diferencial dentro de la película dx , la concentración promedio de la misma varía $d\{A_m$, o sea:

$$v_m H b d\{A_m = k_f (\{A_s - \{A_m) H dx$$

Integrando:

$$v_m b \int_{\{A_0}^{\{A_L} \frac{d\{A_m}{\{A_s - \{A_m} = \int_0^L k_f dx = k_f \int_0^L dx$$

$$k_f = v_m b / L \ln \left[\frac{\{A_s - \{A_0}{\{A_s - \{A_L} \right] \quad (8.27)$$

Este coeficiente debe operarse con una fuerza guía promedio ya que esta cambia desde $(f_{A0} - f_{A0})$ en $x = 0$ hasta $(f_{As} - f_{AL})$ en $x = L$.

De un balance global :

$$v_m(bH)(f_{AL} - f_{A0}) = k_f m (\Delta f_A)_{\text{promedio}} (LH)$$

Reemplazando la ecuación (8.27) ;

$$\begin{aligned}
 (\Delta f_A)_{\text{prom}} &= \frac{(1/L)(v_m b) (f_{AL} - f_{A0})}{\frac{v_m b}{L} \text{Ln} \left[\frac{f_{As} - f_{A0}}{f_{As} - f_{AL}} \right]} = \\
 &= \frac{(f_{As} - f_{A0}) - (f_{As} - f_{AL})}{\text{Ln} \left[\frac{f_{As} - f_{A0}}{f_{As} - f_{AL}} \right]}
 \end{aligned}$$

O sea $(\Delta f_A)_{\text{prom}} = (\Delta f_A)_{ML}$ (8.28)

Donde $(\Delta f_A)_{ML}$ es el promedio logarítmico de las fuerzas guías en los dos extremos de la película.

CORTOS TIEMPOS DE EXPOSICION.

Cuando el tiempo de exposición $t_{exp} = L/v_{max}$ es corto, la sustancia A penetrará poco en la película, y podemos asumir perfil de velocidad

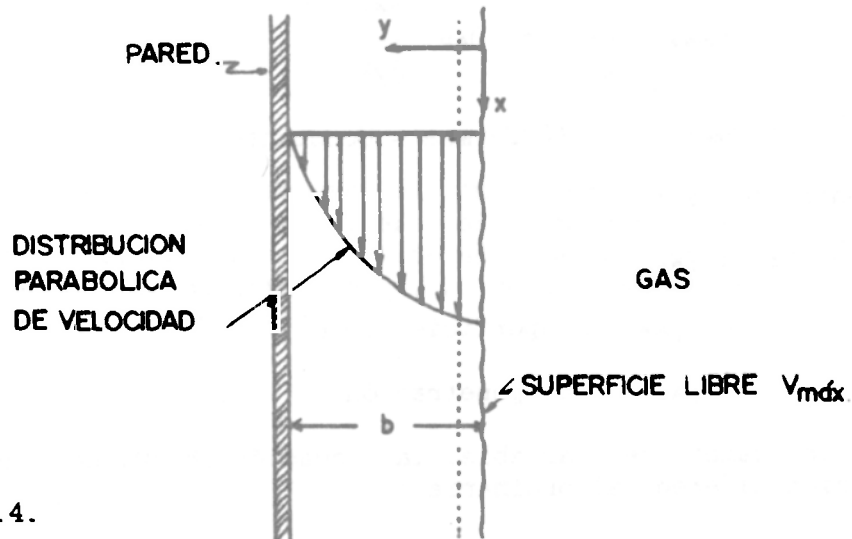


FIGURA 8.4.

uniforme e igual a v_{\max} . Además, como no alcanza a enterarse de la existencia de la pared, la película será, desde el punto de vista de A, de espesor infinito

Es conveniente reubicar el origen del sistema coordenado en la superficie de la película descendente como se indica en la figura 8.4.

Nuevamente a partir de Navier Stokes :

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \rho g_x = 0$$

CL 1 : $y = 0$; $dv_x/dy = 0$

CL 2 : $y = b$; $v_x = 0$

$$\frac{dv_x}{dy} = - \frac{\rho g_x y}{\mu} + C_1$$

CL 1 : $C_1 = 0$; $v_x = - (\rho g_x y^2)/2\mu + C_2$

CL 2 : $\rho g_x b^2/2\mu = C_2$

$$v_x = (\rho g_x/2\mu)(b^2 - y^2) = (\rho g_x b^2/2\mu)[1 - (y/b)^2] \quad (8.29)$$

El perfil de velocidad de la película líquida no ha variado, pero al variar el origen de los ejes coordenados la expresión que lo describe si. (comparar con la ecuación (8.15 a)).

De un balance para la especie A, con las mismas condiciones simplificadoras para (8.12) :

$$v_{\max} \frac{\delta f_A}{\delta x} = D_{AB} \frac{\delta^2 f_A}{\delta y^2} \quad (8.30)$$

$$v_x \approx v_{\max} = (\rho g_x b^2/2\mu) = (3/2)v_{\text{med}} = \text{Constante}$$

Condiciones límite :

$x \leq 0$ $f_A = f_{A0} = 0$

$y = 0$ $f_A = f_{As}$ Superficie libre.

$y \rightarrow \infty$ $f_A = f_{A0}$ Poca penetración.

Haciendo un cambio de variable, la ecuación (8.30) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria :

$$U = \frac{f_A - f_{A0}}{f_{A\infty} - f_{A0}} ; \quad \eta = y/2(D_{AB}t_0)^{0,5}$$

donde $t_0 = x/v_{max}$

En función de las nuevas variables :

$$\frac{\delta U}{\delta x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} f'(\eta)$$

$$\frac{\delta U}{\delta y} = \frac{\eta}{y} f'(\eta) ; \quad \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} = (\eta/y)^2 f''(\eta)$$

donde las comillas indican diferenciación con respecto a η .

La ecuación (8.30)

$$D_{AB}(\eta/y)^2 f''(\eta) + v_{max} (1/2) (\eta/x) f'(\eta) = 0$$

$$f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0 \quad (8.31)$$

Con las condiciones límite:

para $\eta = 0 \quad U = 1 \quad (y = 0 ; f_A = f_{A\infty})$

$\eta \rightarrow \infty \quad U = 0 \quad (y \rightarrow \infty ; x = 0 ; f_A = f_{A0})$

Substituyendo f' por α se llega a una ecuación de primer orden de variables separables que se puede resolver para dar:

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -2 \eta d\eta ; \quad \frac{dU}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2)$$

$$U = C_1 \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta + C_2$$

Aquí se elige arbitrariamente el límite inferior de la integral indefinida, que no puede resolverse en forma limitada. Si se cambiase el límite inferior por otro valor se alteraría simplemente el valor de las constantes de integración, no determinadas aún. Aplicando las condiciones límite se obtiene:

CL 1 : $C_2 = 1$

CL 2 : $C_1 = - \frac{1}{\int_0^\infty \exp(-\eta^2) d\eta}$

$$\int_0^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}-1} \exp(-u) du \quad (8.32)$$

Esto haciendo $u = \eta^2$; $d\eta = (1/2) u^{-1/2} du$, y por definición de la función Gama:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} \exp(-u) du$$

entonces:

$$\int_0^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = (1/2)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$$

Por tanto:

$$\frac{A - A_0}{A_{\infty} - A_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta$$

La relación:

$$\frac{\int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta}{\int_0^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta = \text{erf}(\eta)$$

Se denomina función error, y se abrevia erf (ver apéndice A.9.1)

La función complementaria de error es: $[1 - \text{erf}(\eta)] = \text{erfc}(\eta)$

Podemos expresar la solución como:

$$\frac{A - A_0}{A_{\infty} - A_0} = \text{erfc} \left[\frac{y}{2(D_{AB}x/v_{max})^{1/2}} \right] \quad (8.33)$$

La función de error es una función monótona creciente cuyo intervalo es de cero a uno y alcanza el valor de 0.99 cuando η vale 2. Podemos utilizar este hecho para definir una especie de profundidad de penetración del soluto, δ , como la distancia y para la cual $(A - A_0)$ ha disminuido hasta un valor de 0.005 $(A_{\infty} - A_0)$, es decir,

$$\delta = 4 \left[D_{AB}x/v_{max} \right]^{1/2}$$

Esta distancia es una medida de la cantidad de masa de A que ha penetrado en la película de fluido. Obsérvese que es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo de exposición.

Para valores típicos de tiempo de exposición de 2 segundos y de difusividades en líquidos del orden de 10^{-5} cm²/s, el soluto, en la parte inferior de la película habrá entrado hasta capas donde la velocidad del fluido es todavía el 99% de la velocidad máxima.

La densidad de flujo de materia en un punto x:

$$\begin{aligned} n_{Ay} \Big|_{y=0} &= -D_{AB} \frac{\delta f_A}{\delta y} \Big|_{y=0} \\ \frac{\delta f_A}{\delta y} \Big|_{y=0} &= \frac{\delta f_A}{\delta \eta} \frac{\delta \eta}{\delta y} = \left[\frac{-2(f_{AS} - f_{A0})}{\sqrt{\pi}} \right] \left[\frac{\exp(-\eta^2)}{2(D_{AB}x/v_{max})^{1/2}} \right] \Big|_{y=0} \\ n_{Ay} \Big|_{y=0} &= \left[D_{AB} v_{max}/\pi x \right]^{1/2} [f_{AS} - f_{A0}] \end{aligned} \quad (8.34)$$

La masa total de A, absorbida por la película será:

$$\begin{aligned} m_A' &= H \int_0^L n_{Ay} \Big|_{y=0} dx = H(f_{AS} - f_{A0}) \left[\frac{D_{AB} v_{max}}{\pi} \right]^{1/2} \int_0^L x^{-1/2} dx \\ &= H(f_{AS} - f_{A0}) \left[\frac{D_{AB} v_{max}}{\pi} \right]^{1/2} \int_0^L x^{-1/2} dx \\ m_A' &= H(f_{AS} - f_{A0}) \left[\frac{D_{AB} v_{max}}{\pi} \right]^{1/2} \left[\frac{L^{1/2}}{1/2} \right] = \\ &= HL(f_{AS} - f_{A0}) \left[\frac{4D_{AB} v_m}{\pi L} \right]^{1/2} = HL(f_{AS} - f_{A0}) 2 \left[\frac{D_{AB}}{\pi t_e} \right] \end{aligned} \quad (8.35)$$

La densidad de transferencia de materia promedio sería

$$n_{AS} = \frac{m_A'}{HL} = \left[\frac{6D_{AB} v_{med}}{\pi L} \right]^{1/2} (f_{AS} - f_{A0}) \quad (8.36)$$

ya que $v_{max} = (3/2)v_{med}$.

Aquí nos aparece definido un coeficiente de transferencia de materia que usa como fuerza guía un valor constante e igual a la máxima diferencia de concentraciones entre la superficie y el fluido y que además es proporcional a $D_{AB}^{1/2}$. Esto es característico de la "Teoría de la Penetración" propuesta por Higbie en 1935.

TRANSFERENCIA SIMULTANEA DE CALOR Y MASA.

La transferencia de masa afecta el mismo coeficiente de transferencia de materia (ecuación 7.107 a), el factor de fricción y los coeficientes de transferencia de calor. Veamos el efecto del flujo másico sobre el flujo de energía.

Generalmente, un proceso difusional está acompañado por transporte de energía aún dentro de un sistema isotérmico. Refiriéndonos a la figura 8.5, observamos que el flujo total de entalpía hacia un elemento de volumen de espesor dz consta de dos partes. Una es el calor que llega por conducción y gracias a una diferencia de temperaturas, $-k \, dT/dz$; el otro es el flujo de entalpía debido a la difusión :

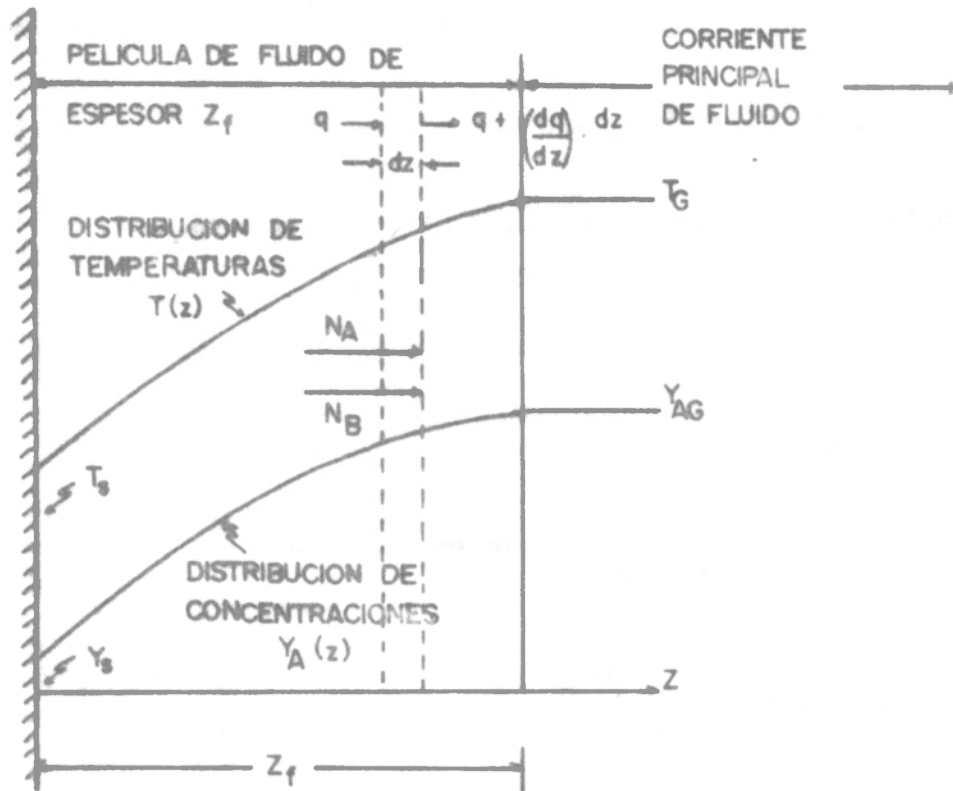


FIGURA 8.5. Diagrama de una película de vapor en la que ocurre difusión y conducción de calor desde (o hacia) una interfase.

$$N_A C_p (T - T_0) + N_B C_p (T - T_0)$$

donde T_0 es una temperatura de referencia que analizaremos luego. Aplicando el balance para estado estacionario, encontramos que la distribución de temperaturas debe satisfacer :

$$k \frac{d^2T}{dz^2} - (N_A C_{pA} + N_B C_{pB}) \frac{dT}{dz} = 0 \quad (8.37)$$

haciendo $dT/dz = \theta$:

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{1}{k} (N_A C_{pA} + N_B C_{pB}) dz = \frac{H dz}{k}$$

donde hemos abreviado haciendo $H = N_A C_{pA} + N_B C_{pB}$

$$\frac{dT}{dz} = C_1 \exp(Hz/k) ; \quad T = C_1 \frac{k}{H} \exp(Hz/k) + C_2$$

Con las condiciones límite a saber, $T = T_s$ para $z = 0$; $T = T_g$ para $z = z_F$, el límite de la película, obtenemos,

$T_s = C_1(k/H) + C_2$; $T_g = C_1 \exp(Hz_F/k) + C_2$; restando miembro a miembro y reorganizando:

$$C_1 = \frac{(T_s - T_g)}{(k/H)[1 - \exp(Hz_F/k)]}$$

$$C_2 = T_s - \frac{(T_s - T_g)}{[1 - \exp(Hz_F/k)]}$$

haciendo $h = k/z_F$; y $H z_F/k = H/h = Co$

$$\frac{T - T_s}{T_g - T_s} = \frac{\exp(Co \cdot z/z_F) - 1}{\exp(Co) - 1} \quad (8.38)$$

A partir de esta distribución de temperaturas hallamos la densidad de flujo de calor debido al gradiente de temperatura en la interfase:

$$q_s = -k \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = -k C_1 \exp(Hz/k) \Big|_{z=0}$$

$$q_s = - \frac{h Co}{1 - \exp(Co)} (T_s - T_g) \quad (8.38)$$

Observamos que q_s no es igual al flujo total de entalpía en la interfase, a menos que T_o sea igual a T_s . En general, la entalpía total, q_H , es igual a

$$q_s + (N_A C_{pA} + N_B C_{pB})(T_s - T_o)$$

Si las entalpías se calculan relativas a un estado de referencia tomado como la temperatura del gas, o sea haciendo $T_G = T_0$, el flujo de entalpía total desde la superficie es haciendo $H = h Co$:

$$\begin{aligned} q_H &= hCo(T_s - T_G) \left[\frac{1}{\exp(Co) - 1} + 1 \right] = \\ &= h Co(T_s - T_G) \left[\frac{\exp(Co)}{\exp(Co) - 1} \right] \\ q_H &= h (T_s - T_G) \left[\frac{Co}{1 - \exp(-Co)} \right] \quad (8.39) \end{aligned}$$

$Co/[1 - \exp(-Co)]$ se conoce como el factor de corrección de Ackerman, y corrige el coeficiente de transferencia de calor por la transferencia de masa simultánea. Será mayor que la unidad si la transferencia de masa se efectúa en el mismo sentido que la transferencia de calor y mas pequeño si las dos van en sentidos opuestos así, una superficie expuesta a un gas caliente puede protegerse parcialmente del calentamiento rápido si la superficie se mantiene húmeda con un líquido volátil, el cual se evapora creando una transferencia de masa opuesta (enfriamiento pelicular o por sudor). Puede aplicarse a la condensación de un componente A en presencia de un componente B incondensable ($N_B = 0$, Co negativo) o a mezclas de varios componentes para los cuales $(N_A C_{pA} + N_B C_{pB})$ se substituye por $\sum N_i C_{pi}$.

El calor total disipado en la interfase, q_T , incluirá adicionalmente, el efecto producido cuando la masa transferida pasa a través de la interfase. Dicho efecto puede ser un calor latente de vaporización, un calor de solución o ambos según las circunstancias.

Entonces :

$$q_T = q_H + \lambda_A N_A + \lambda_B N_B$$

donde λ_A y λ_B son los calores latentes a T_s .

En algunos casos, el calor liberado en la interfase sigue fluyendo hacia la izquierda en la figura 8.4, debido a una temperatura inferior de la fase adyacente. En otros casos el calor sensible transferido por conducción iguala al calor acarreado desde la interfase hasta el fluido, no entrando calor a la fase adyacente.

El caso de una pequeña gota evaporándose en una gran masa de gas no saturado es una situación en la cual, la energía necesaria para el paso de la fase líquida a la fase vapor inicialmente suministrado por las moléculas restantes en la fase líquida. Esta disminución de la energía cinética promedio se refleja en una disminución de temperatura, lo que origina transferencia de calor sensible desde los alrededores hacia la gota. Eventualmente la velocidad con que llega calor sensible a la superficie, iguala la velocidad con que se

consume calor latente para mantener la velocidad de evaporación causada por la diferencia de concentración entre la capa de gas adyacente al líquido (saturado) y las capas del gas más alejadas. En este caso el calor total vale cero, o sea :

$$h_G (T_G - T_S) \frac{C_o}{1 - \exp(-C_o)} = \lambda_{AS} F_G \ln \frac{1 - y_{AG}}{1 - y_{AS}} \quad (8.40)$$

Como esta ecuación contiene coeficientes de transferencia de masa y coeficientes de transferencia de calor, y existen correlaciones que nos los relacionan (Analogía de Chilton Colburn) podemos expresarla, ya sea en términos de uno u otro. Sabemos que :

$$J_D = \frac{F}{c v} Sc^{2/3} = \frac{h}{\sqrt{v C_p}} Pr^{2/3} = J_H \quad (8.41)$$

TEORIA DEL TERMOMETRO DE BULBO HUMEDO.

Una de las aplicaciones de la teoría del transporte simultáneo de entalpía y masa a través del fluido cercano a una interfase es el cálculo de la temperatura estable de un termómetro de bulbo húmedo. Este es un termómetro ordinario de mercurio y vidrio o una termocupla, cuyo elemento sensible a la temperatura está cubierto con una gaza porosa que se mantiene humedecida con líquido puro; el líquido es el mismo que el vapor condensable en el gas inerte, cuya concentración se desea medir.

La ecuación (8.40) se transforma con la ayuda de la (8.41) en :

$$(T_G - T_w) \frac{C_o}{1 - \exp(-C_o)} = \lambda_{AS} \frac{Le^{2/3}}{C_p} \ln \frac{1 - y_{AG}}{1 - y_{AS}} \quad (8.42)$$

donde T_w es la temperatura de equilibrio o temperatura de bulbo húmedo (medida directamente en el termómetro que tiene la gaza en su instrumento termosensor); y_{AS} es la concentración de saturación dependiente de T_G y la presión de vapor del líquido a T_w .

$Le = D_{AB}/\alpha = Pr/Sc = (\rho C_p D_{AB})/k$ es el número de Lewis.

Ordinariamente en el uso del termómetro de bulbo húmedo, la diferencia de temperaturas y la diferencia de presiones parciales son pequeñas permitiendo una simplificación considerable a la expresión (8.42).

$$T_G - T_w = \frac{\lambda_{AS}}{M C_s} Le^{2/3} (H_w - H_G)$$

donde H es la humedad : $H = M_{A YA} / M_B (1 - y_A)$, y c_s es la capacidad calorífica húmeda : $C_s = C_{PB} + H C_{PA}$.

CAPITULO 9. TRANSPORTE EN ESTADO TRANSITORIO.

TRANSPORTE DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO EN UNA PLACA PLANA.

Consideremos nuevamente la placa sólida de la figura 2.1. Ella tiene un espesor b y en el tiempo $t = 0$ está a temperatura uniforme T_2 . Para $t > 0$, la superficie inferior en $z = 0$ se mantiene a una temperatura constante T_1 mientras que la cara superior permanece a temperatura constante T_2 . En cualquier punto z el flujo de calor y la temperatura dentro de la placa dependerán del tiempo.

La ecuación 3.41 es la adecuada para este caso:

$$\left(C_p \frac{\delta T}{\delta t} = k \text{div}^2 T + \dot{Q}_H \right) \quad (3.41)$$

Aquí el término de acumulación no desaparece, pero si el de generación y los gradientes en x e y

$$\left(C_p \frac{\delta T}{\delta t} = k \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \right)$$

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \quad (9.1)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación unidimensional de difusión.

Para resolver ecuaciones diferenciales parciales generalmente es conveniente usar variables adimensionales definidas en forma tal que sean cero o la unidad en los límites del sistema (o en las condiciones iniciales). Así, al elegir

$$\theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \quad (9.2)$$

el valor de θ será uno en $z = 0$ y cero en $z = b$; también será cero para $t = 0$. Resultados comparables se obtendrían definiendo $\Omega = 1 - \theta$, pero la solución matemática es más sencilla si usamos θ pues el problema cae en una clase para la cual hay procedimientos generales de prueba y solución.

La primera etapa es transformar la ecuación diferencial de la variable T a la variable θ con $T = T_2 + \theta(T_1 - T_2)$

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \theta + \frac{\delta \theta}{\delta t} (T_1 - T_2); \quad \frac{\delta T}{\delta z} = \theta + \frac{\delta \theta}{\delta z} (T_1 - T_2)$$

$$\frac{\delta^2 T}{\delta z^2} = \frac{\delta^2 \theta}{\delta z^2} (T_1 - T_2)$$

Y de la ecuación 9.1:

$$\alpha(T_1 - T_2) \frac{\delta^2 \theta}{\delta z^2} = (T_1 - T_2) \frac{\delta \theta}{\delta t}$$

$$\alpha \frac{\delta^2 \theta}{\delta z^2} = \frac{\delta \theta}{\delta t} \quad (9.3)$$

Además recordamos que esta situación termina siendo de estado estable, y el perfil final está dado por la ecuación (4.1), que podemos escribir como

$$\theta_{\infty} = 1 - z/b \quad (4.1 a)$$

La solución general puede escribirse en la forma

$$\theta = \theta_{\infty} - \theta_t \quad (9.4)$$

Donde θ_t es la contribución transitoria a θ ; se hace cero cuando t tiende a infinito. La ecuación (9.4) se puede reescribir como

$$\theta_t = \theta_{\infty} - \theta \quad (9.4 a)$$

Donde observamos que θ_t es una medida del cambio de temperatura faltante. En la figura 9.1 vemos que θ_t es la diferencia entre las curvas para θ y θ_{∞} .

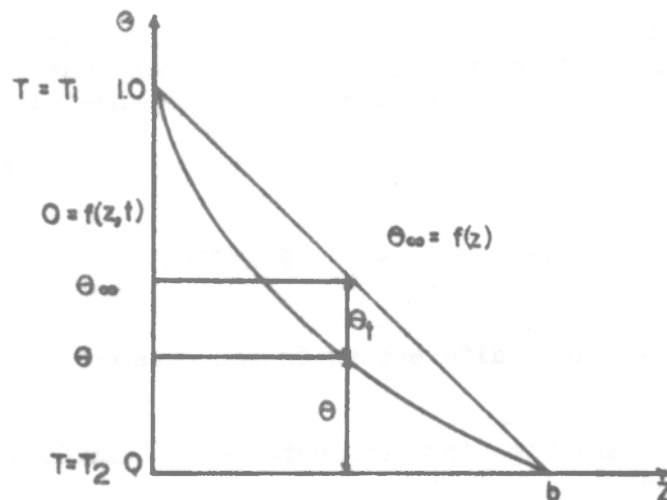


FIGURA 9.1 Temperatura Adimensional en una placa.

Condiciones límite:

Condición inicial: $t = 0 \quad T = T_2 \quad 0 < z \leq b$

$$\theta = 0 \quad \theta_t = \theta_{-}$$

Condición límite 1: $z = 0 \quad T = T_1 \quad t > 0 \quad \theta = 1 \quad \theta_t = 0$

Condición límite 2: $z = b \quad T = T_2 \quad t > 0 \quad \theta = 0 \quad \theta_t = 0$

Substituyendo (9.4) en (9.3):

$$\alpha \left[\frac{d^2\theta_{-}}{dz^2} - \frac{\delta^2\theta_t}{\delta z^2} \right] = 0 - \frac{\delta\theta_t}{\delta t} \quad (9.5)$$

En estado estable (9.3) se transforma en

$$\frac{d^2\theta_{-}}{dz^2} = 0 \quad (9.6)$$

Cuya solución es (4.1.a).

Restando (9.5) de (9.6) obtenemos

$$\alpha \frac{\delta^2\theta_t}{\delta z^2} = \frac{\delta\theta_t}{\delta t} \quad (9.7)$$

Podemos reducirlo a dos ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelven por los métodos usuales.

Para ello postulamos que una solución de la ecuación (9.7) puede escribirse como el producto de dos funciones, una de las cuales, $F(z)$, depende solo de z , y la otra, $G(t)$, depende sólo de t ;

$$\theta_t(z,t) = F(z).G(t) \quad (9.8)$$

$$\frac{\delta\theta_t}{\delta t} = F(z) \frac{dG(t)}{dt} = F(z)G'(t)$$

Donde la prima indica diferenciación con respecto a la variable independiente.

Como solo una variable independiente está involucrada, se usan derivadas totales.

Similarmenete

$$\frac{\delta^2 \theta_t}{\delta z^2} = \frac{d^2 F(z)}{dz^2} G(t) = F''(z)G(t)$$

Reemplazando en (9.7)

$$\alpha F''(z)G(t) = F(z)G'(t)$$

Al dividir por $\alpha F(z)G(t)$ el lado izquierdo será solo función de z y el derecho será solo función de t . Para que se mantenga la igualdad es necesario que los dos términos sean iguales a una misma constante, pues las variables z y t son independientes entre si:

$$\frac{F''(z)}{F(z)} = \frac{G'(t)}{\alpha G(t)} = \text{constante} = K \quad (9.9)$$

donde K es una constante por determinar.

Cada igualdad nos da una ecuación diferencial ordinaria:

$$G'(t) - \alpha K G(t) = 0 \quad (9.10)$$

$$F''(z) - K F(z) = 0 \quad (9.11)$$

Además, como $\theta_t(\theta, t) = 0$ entonces, $F(\theta) = 0$, pues de lo contrario se requeriría que $G(t) = 0$ lo que implica que $\theta_t(z, t) = 0$ para todo valor de z y t . En este caso $T_1 = T_2 = T_\theta$ no ocurriendo transferencia de calor. Sería una solución trivial. Por razones similares como $\theta_t(b, t) = 0 = F(b)G(t)$ entonces $F(b) = 0$.

La ecuación (9.11) con estas condiciones límite:

$$\begin{aligned} F''(z) - K F(z) &= 0 \\ F(\theta) &= 0 ; F(b) = 0 \end{aligned}$$

configura así un problema de valor propio o problema de Sturm Liouville que tendrá solución no trivial solamente para ciertos valores de un parámetro que llamamos λ_n , con $n = 1, 2, 3, \dots$ en donde los λ_n son los valores propios (o números característicos) y tiene soluciones triviales (esto es $F = 0$) cuando λ no es un valor propio. Las soluciones no triviales $F(\lambda_n, z)$ son las llamadas funciones propias. Si $F(\lambda_m, z)$ y $F(\lambda_n, z)$ representan las dos funciones propias diferentes correspondientes a los valores propios λ_m y λ_n respectivamente, se puede establecer la propiedad de ortogonalidad de las funciones propias en la región $0 \leq z \leq b$ por la relación

$$\int_0^b F(\lambda_m, z)F(\lambda_n, z)dz = \begin{cases} 0 & \text{cuando } \lambda_m \text{ diferente de } \lambda_n \\ N & \text{cuando } \lambda_m \text{ igual a } \lambda_n \end{cases}$$

donde N es la integral de normalización definida como

$$\int_0^b F^2(\lambda_m, z) dz = N$$

Analizamos a continuación el valor de K .

i) Suponemos $K = 0$

En ese caso $F'' = 0$; $F' = A$; $F(z) = Az + B$; $F(0) = 0 = B$
 entonces $F(z) = Az$; $F(1) = 0 = A$ y $F(z) \equiv 0$
 Por tanto $K = 0$ no es un valor propio de esta ecuación.

ii) Suponemos $K > 0$ $K = p^2$ p un número real

Ahora $F'' - p^2 F = 0$

$F = A \exp(pz) + B \exp(-pz) = C \cosh(pz) + D \sinh(pz)$

$F(0) = 0 = C$ pues $\cosh(0) = 1$ y $\sinh(0) = 0$;

entonces $F = D \sinh(\lambda z)$; $F(b) = 0 = D \sinh(\lambda b)$;

Como λb es diferente de cero por planteamiento, $\sinh(\lambda b)$ es diferente de cero y $D = 0$ lo que hace $F(z) \equiv 0$. No hay valores propios positivos para esta ecuación.

iii) Resta estudiar $K < 0$. $K = -(p^2)$ p un número real

$F'' + p^2 F = 0$

$F = A \exp(ipz) + B \exp(-ipz) = C \cos(pz) + D \sin(pz)$

(ver apéndice A.4.1)

$F(0) = 0 = C$ pues $\sin 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$.

$F(z) = D \sin(pz)$ $F(b) = 0 = D \sin(pb)$

D no puede ser cero pues θ_t varía con z . Por tanto $\sin(pb) = 0$.

Sabemos que la función seno es cero a intervalos de π y habrá un número infinito de estos puntos. La n ésima raíz es pnb donde $pnb = n\pi$; $n = 1, 2, 3, \dots$; y el conjunto de valores propios es:

$$\left[-n^2 \pi^2 / b^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots \right]$$

Las funciones propias:

$$\left[D \sin(n\pi z / b) \mid n = 1, 2, 3, \dots \right]$$

La ecuación (9.10) se resuelve con los mismos valores de $K_n = -p_n^2$:

$$G(t) = C \exp(-p_n^2 a t) \quad (9.12)$$

Observamos que el valor de K_n concuerda con la experiencia física de que θ_t tiende a cero (θ tiende a θ_∞) cuando el tiempo crece.

En conclusión hay una solución de la ecuación (9.7) para cada valor de n , la cual tiene la forma:

$$\theta_{tn} = \left[D \sin(p_n z) \right] \left[C \exp(-p_n^2 a t) \right] = A_n \left[\sin(p_n z) \right] \left[\exp(-p_n^2 a t) \right]$$

Donde $A_n = DC$.

Es propiedad de las ecuaciones diferenciales lineales el que cualquier combinación de soluciones es también una solución. Esta propiedad se mantiene para una suma infinita de todas las soluciones:

$$\theta = \sum_{t=1}^{\infty} \theta_{tn} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n G_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\text{sen}(p_n z) \right] \left[\exp(-p_n^2 \alpha t) \right] \quad (9.15)$$

Para encontrar la constante A_n usamos la condición inicial:

en $t = 0$. $\theta_t = \theta_{\infty} = 1 - z/b$ $G_n(\theta) = 1$; entonces:

$$\theta_t(z, \theta) = \theta_{\infty} = (1 - z/b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(p_n z) \quad (9.16)$$

Tenemos pues que $F(z)$ se puede expresar como una combinación lineal infinita de funciones $\text{sen}(n\pi z/b)$ las cuales, como ya se vió, son las funciones propias de un problema de Sturm Liouville y por tanto forman un sistema ortogonal en la región $0 \leq z \leq b$. La integral de normalización

$$N = \int_0^b \text{sen}^2(p_n z) dz = \frac{1}{p_n} \int_0^b \frac{1 - \cos(2p_n z)}{2} dz = b/2$$

La propiedad de ortogonalidad de estas funciones propias se expresa así

$$\int_0^b \text{sen}(p_n z) \text{sen}(p_m z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es diferente de } m \\ b/2 & \text{si } n \text{ es igual a } m \end{cases} \quad (9.17)$$

Para usarla multiplicamos ambos lados de la ecuación (9.16) por F_m e integramos de 0 a b :

$$\int_0^b (1 - z/b) F_m(z) dz = \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n F_m dz \quad (9.18)$$

Invirtiendo el orden de la suma y la integral en el lado derecho tenemos por (9.17)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^b F_n F_m dz = 0 + \dots + A_m \int_0^b F_m^2 dz + \dots + 0 = A_m (b/2) \quad (9.19)$$

La integral del lado izquierdo de (9.18) da, por procedimientos corrientes $(1/p_m)$.

$$\text{Por tanto } A_m = (1/N) \int_0^b \theta_{\infty} F_m dz = (2/b)(1/p_m) = (2/m\pi)$$

Para obtener A_n simplemente reemplazamos m con n : $A_n = (2/p_n b) = (2/n\pi)$

Así la solución de este problema de conducción de calor dependiente del tiempo es:

$$\theta_t = \sum_1^{\infty} A_n F_n G_n = \sum_1^{\infty} (2/n\pi) \left[\text{sen}(n\pi z/b) \right] \left[\exp(-n^2\pi^2\alpha t/b^2) \right] \quad (9.20)$$

Y la solución completa $\theta = \theta_{\infty} - \theta_t$:

$$\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = 1 - \frac{z}{b} - \sum_1^{\infty} (2/n\pi) \left[\text{sen}(n\pi z/b) \right] \left[\exp(-n^2\pi^2\alpha t/b^2) \right] \quad (9.21)$$

El método usado para determinar A_n es llamado una expansión de la función $\theta_{\infty}(z)$ en una serie de senos de Fourier con coeficientes A_n .

TRANSPORTE DE MASA Y/O CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Las ecuaciones diferenciales resultantes para el problema análogo de transferencia de materia. (Fig 2,7.a) a partir de la ecuación (3.42) o (3.44), sin reacción química homogénea, considerando gradiente de concentración solo en la dirección z , y despreciando el término de arrastre o flujo global de la ecuación (3.45) o (3.46),

$$\frac{\delta C_A}{\delta t} = D_{AB} \frac{\delta^2 C_A}{\delta z^2}$$

Denominada la segunda ley de Fick.

Para el caso de transferencia de cantidad de movimiento (fig 2.4.a), la ecuación (3.22) en su componente x , sabiendo que v_x es solo función de z , que no hay fuerzas de volumen sobre el fluido, y que $v_y = v_z = 0$, se obtiene

$$\left[\frac{\delta v_x}{\delta t} \right] = \Gamma \frac{\delta^2 v_x}{\delta z^2} \quad 9.23$$

Podemos distinguir entre los varios procesos de transporte usando las variables adimensionales:

$$\theta_H = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} ; \quad \theta_D = \frac{C_A - C_{A2}}{C_{A1} - C_{A2}} ; \quad \theta_M = \frac{v_x}{V}$$

V es la velocidad de la placa inferior.

$$\tau_H = \frac{\alpha t}{b^2} \quad \tau_D = \frac{D_{AB} t}{b^2} \quad \tau_M = \frac{\Gamma t}{b^2}$$

Este es un tiempo adimensional denominado número de Fourier (Fo).

La solución general, aplicable a los tres procesos es:

$$\theta(\eta, \tau) = 1 - \eta - \sum_{n=1}^{\infty} (2/n\pi) \left[\text{sen}(n\pi\eta) \right] \left[\exp(-n^2\pi^2\tau) \right] \quad (9.21 a)$$

Donde $\eta = z/b$.

TRANSPORTE INESTABLE CON RESISTENCIA EXTERNA.

En el problema anterior se usaron como condiciones límite el que la temperatura en cada caso era conocida y constante. Esta condición límite sin embargo se aplica solamente en el caso especial en el cual no hay resistencia en la superficie, es decir, cuando la temperatura en la superficie es igual a la temperatura del medio ambiente. En la práctica no es éste siempre el caso, y la resistencia de la película vecina al sólido debe considerarse. Por esto se usa la condición:

$$q_s = h(T_s - T_\infty)$$

Donde q_s es la densidad de flujo de calor en la superficie y h un coeficiente de transferencia de calor, cuyo recíproco es una medida de la resistencia a la transferencia de calor en la película externa. Así, si h tiende a infinito ($T_s - T_\infty$) tiende a cero o T_s tiende a T_∞ . Pero si h tiende a cero, q_s tiende a cero y estamos en el caso de un aislador perfecto.

La condición límite es pues, para $z = b$

$$-k \left. \frac{\delta T}{\delta z} \right|_{z=b} = h_b(T_b - T_\infty) \quad (9.24)$$

Podría hacerse otro tanto en la superficie $z = 0$.

Para adimensionalizar la condición límite debemos redefinir θ pues T_b no es constante:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

Donde T_0 es la temperatura inicial uniforme de la placa y T_∞ es la temperatura del medio adyacente a la cara en $z = b$. La ecuación (9.24) queda:

$$-k \frac{T_0 - T_\infty}{b} \left. \frac{\delta \theta}{\delta \eta} \right|_{\eta=1} = h(T_b - T_\infty)$$

6

$$- \left. \frac{\delta \theta}{\delta \eta} \right|_{\eta=1} = Bi \theta_b$$

donde $Bi = hL/k$; L es la longitud característica, en este caso b . Bi es el número de Biot.

Este es una relación entre la resistencia a la conducción en el sólido (L/k) y la resistencia a la convección en la película externa ($1/h$). Obsérvese que el número de Biot es aparentemente igual al número de Nusselt, pero difiere en forma fundamental pues Nusselt se basa en la conductividad del fluido en la película exterior y no en la conductividad del sólido. Aunque la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno no varía, su solución con el fenómeno convectivo será de la forma $\theta = \theta(\eta, \tau, Bi)$. Aunque pueda obtenerse analíticamente, es más conveniente usar las soluciones presentadas en forma gráfica, por Heisler para largos tiempos de contacto o por los de Boelter y Johnson para cortos tiempos de contacto.

El texto de Welty, Wilson y Wicks, en su apéndice F trae una buena recopilación de éstos gráficos incluyendo los tradicionales de Gurney Lurie, para diferentes formas geométricas. En general permiten hallar $\theta = \theta(\tau, Bi, \eta)$ para situaciones como las siguientes

- (i) Placa plana calentada o enfriada desde sus dos caras.
- (ii) Cilindro largo
- (iii) Esfera

DIFUSION TRANSITORIA EN UNA PLACA.

El problema de la difusión transitoria en una placa es de importancia, por ejemplo, en operaciones de secado de materiales coloidales o gelatinosos, donde es necesario conocer la distribución

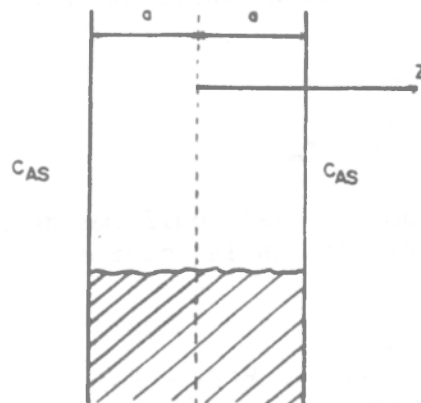


FIGURA 9.2 Placa plana en la que ocurre difusión en estado transitorio.

de la humedad en la placa como una función de la posición y el tiempo, o la relación entre el contenido promedio de humedad de la placa y la duración del secado. Para propósitos de análisis puede