

*Una aplicación del método de aproximación de flujo para
sistemas de ecuaciones diferenciales hiperbólicas*

ANGELA ROCÍO FUQUEN TIBATÁ
MATEMÁTICO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

*Una aplicación del método de aproximación de flujo para
sistemas de ecuaciones diferenciales hiperbólicas*

ANGELA ROCÍO FUQUEN TIBATÁ
MATEMÁTICO

DISERTACIÓN PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
MATEMÁTICO

DIRECTOR
LEONARDO RENDÓN ARBELÁES, PH.D.
DOCTOR EN MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

Título en español

Una aplicación del método de aproximación de flujo para sistemas de ecuaciones diferenciales hiperbólicas.

Title in English

An Application of the Flux Approximation Method on Hyperbolic Differential Equations Systems.

Resumen: En este trabajo se presentan y se resumen los métodos de viscosidad nula y *front tracking*. Además, se muestra una aplicación del método de aproximación de flujo para probar la existencia de soluciones débiles globales de dos sistemas del tipo de Temple.

Abstract: In this paper, I introduce and summarize the Vanishing Viscosity Method, as well as the Front Tracking Method. Moreover, I present an application of the Flux Approximation Method in order to prove the existence of global weak solutions for two systems of Temple's type.

Palabras clave: Leyes de conservación hiperbólicas, soluciones débiles, aproximación de flujo, medidas de Young, método de viscosidad nula, método de *front tracking*, método de compacidad compensada.

Keywords: Hyperbolic Conservation Laws, Weak Solutions, Flux Approximation, Young Measures, Vanishing Viscosity Method, Front Tracking Method, Compensated Compactness Method.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Aprobado

Jurado

Juan Carlos Hernandez Rincón

Director

Leonardo Rendón Arbeláez

Bogotá, D.C.,

Dedicado a

A mis padres: María Eugenia Tibatá Benítez y Jairo Alberto Fuquen Joya.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a Dios por darme la oportunidad de culminar esta nueva etapa de mi formación académica.

A mis padres que son mi motor, mi ejemplo y mi alegría más grande, a mis hermanos cascarrabias Diego y Natalia que siempre están a mi lado cuando los necesito, a mi sobrino que me enamora con cada sonrisa y a toda mi familia por estar tan pendientes de mi, para ellos todo mi amor y gratitud.

Al profesor Leonardo Rendón por su paciencia, dedicación y motivación para continuar adelante.

A mis amigos, que han sido incondicionales, gracias por el apoyo, los consejos y sobretodo por las risas, pues hicieron todo mas llevadero.

A todos mis profesores, quienes estuvieron atentos a guiarme en todos los aspectos, más que profesores fueron amigos, los recordaré siempre y para ellos mi eterna gratitud.

Índice general

Índice general	I
Introducción.	II
1. Preliminares.	1
1.1. Sistemas 2x2 de Leyes de conservación estrictamente hiperbólicos.	3
1.2. Método de Front Tracking o Aproximación de Flujo	5
1.2.1. Problema de Riemann para sistemas.	6
1.2.2. Algoritmo de Front Tracking para sistemas.	10
1.3. Compacidad compensada.	16
2. Aplicación del método de aproximación de flujo a dos sistemas del tipo de Temple.	33
2.1. Existencia de soluciones viscosas.	35
2.1.1. Pares de e-f.	37
2.1.2. Compacidad de $\eta_t + q_x$ en H_{loc}^{-1}	41
2.2. Método de aproximación de flujo aplicado a los sistemas del tipo de Temple (2.1),(2.2).	43
Bibliografía	46

Introducción.

Los sistemas de leyes de conservación hiperbólicos son modelos matemáticos de gran importancia, dado que aparecen en gran variedad de fenómenos físicos como dinámica de fluidos, dinámica de gases, teoría de elasticidad, entre otros. El sistema hiperbólico de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

donde el dato inicial es acotado y medible, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$ y $f(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))^T$ es una función vectorial que denota el término conservativo, en general no posee soluciones globalmente definidas en el sentido clásico, aún si el dato inicial es suave, pues en un tiempo suficientemente grande, pueden aparecer ondas de choque y la solución se vuelve discontinua, (en [7] se muestra este hecho para la ecuación con término conservativo $f(u) = \frac{u^2}{2}$ conocida como ecuación de Burger) por lo que es necesario debilitar las soluciones, de tal manera que se puedan admitir soluciones discontinuas. En el caso escalar, si se considera $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, multiplicando (1) por φ , integrando sobre $t > 0$ y usando la fórmula de Green, se tiene que,

$$\iint_{t>0} (u(x, t)\varphi_t(x, t) + f(u)\varphi_x(x, t)) dx dt + \int_{t=0} u_0(x, 0)\varphi(x, 0) dx = 0, \quad (2)$$

nótese que si u es una solución clásica del problema de Cauchy (1), la igualdad anterior se cumple para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Se define solución débil del sistema (1) en el siguiente sentido.

Definición .1. Una función $u(x, t) \in L^p, 1 < p \leq \infty$, es llamada solución débil del problema de valor inicial (1), con dato inicial $u_0 \in L^p$, si (2) se cumple para todo $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Para encontrar soluciones débiles de sistemas hiperbólicos como (1) existen varios métodos. Uno de los métodos usados es el conocido método de viscosidad nula, en el cual se suma un pequeño término de perturbación y se considera el sistema parabólico,

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}, \quad (3)$$

donde $\epsilon > 0$ es una constante. Para cada ϵ fijo, el problema de Cauchy (3) con dato inicial acotado y medible $u(x, 0) = u_0(x)$ siempre posee una solución suave local $u^\epsilon(x, t)$ para un tiempo pequeño, además dicha solución puede ser definida de manera global si u^ϵ tiene

una estimativa a priori en L^∞ . En el método de viscosidad nula se trata de probar que cuando ϵ va a cero, el límite u de la sucesión $\{u^\epsilon\}$ es solución del problema de Cauchy (1). La dificultad está en mostrar que $f(u^\epsilon) \rightharpoonup f(u)$ cuando $u^\epsilon \rightharpoonup u$, pues, en general, para funciones no lineales esta afirmación no es válida. En [8] Tartar muestra que para una sucesión $\{u^\epsilon\}$ uniformemente acotada en $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, existen medidas de probabilidad $\nu_x, x \in \Omega$, de tal manera que si $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$, la sucesión $f(u^\epsilon(x, t))$ converge a,

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \langle \nu_x, f(\lambda) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) d\nu_x(\lambda).\end{aligned}$$

Así, dependiendo de la información que se tenga sobre el soporte de las medidas ν_x , será posible garantizar la convergencia de las compuestas $f(u^\epsilon) \rightharpoonup f(u)$, para una función f particular, cuando $u^\epsilon \rightharpoonup u$.

Un segundo método es el de front tracking, en el cual la función de flujo $f(u)$ y el dato inicial u_0 , son aproximadas por funciones simples $f^\delta(u)$ y u_0^δ , suponiendo el dato inicial de variación total pequeña, al considerar el problema de Riemann asociado a las nuevas funciones, se obtiene una sucesión de soluciones aproximadas u^δ y por argumentos de compacidad, se muestra que el límite de dicha sucesión cuando δ tiende a cero es solución débil del problema inicial (1).

En el presente trabajo se estudian los sistemas de leyes de conservación 2×2 del tipo de Temple,

$$\begin{cases} u_t + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x = 0 \\ v_t - \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

y

$$\begin{cases} u_t + (u^2 + v)_x = 0 \\ v_t + (uv)_x = 0, \end{cases} \quad (5)$$

el segundo sistema fué derivado por primera vez por Le Roux, como un modelo matemático en dinámica de gases, por lo que es llamado sistema de tipo Le Roux, dicho sistema ha sido estudiado antes en [[14], [9], [10]]. Acá se muestra que la solución débil global de los sistemas hiperbólicos (4), (5), puede ser obtenida como el límite de la combinación lineal de los dos, donde las constantes de dicha de combinación son perturbaciones de flujo positivas.

CAPÍTULO 1

Preliminares.

Al considerar soluciones débiles del problema de valor inicial;

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{1.2}$$

se admiten funciones que presentan discontinuidades, pero no todo tipo de discontinuidad es admisible. Considere $u(x, t)$ una solución del problema de valor inicial (1.1), (1.2), que presenta una discontinuidad de salto a través de una curva suave Γ , es decir, u tiene límites bien definidos en ambos lados de Γ y es suave fuera de dicha curva: Sea B una bola centrada en un punto de Γ y suponga que Γ esta dada por $x = x(t)$ dentro de B .

Si u_l y u_r denotan los límites de u cuando x se acerca a la curva de discontinuidad por izquierda y por derecha respectivamente, se debe satisfacer:

$$s[u] = [f(u)], \tag{1.3}$$

para cada punto de Γ , donde $s = dx/dt$ es la velocidad de la discontinuidad, $[u] = u_l - u_r$ y $[f(u)] = f(u_l) - f(u_r)$; la relación anterior es conocida como condición de salto o condición de *Rankine-Hugoniot*, llamada así en dinámica de gases. Así, para que una solución discontinua del problema de Cauchy sea admisible esta debe satisfacer la condición (1.3).

Al admitir soluciones débiles para el sistema (1.1), hay pérdida de unicidad en la solución, sin embargo, no en todas las soluciones la entropía incrementa a través de un choque, esta condición es conocida como la condición de entropía y debe satisfacerse para que la solución tenga validez en sentido físico, esto permite reducir el conjunto de posibles soluciones. En el caso escalar, para $f'' > 0$, la condición de entropía es dada por:

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t},$$

donde a es una constante positiva, $t > 0$ y $E > 0$ es independiente de x, t y a . Esto implica que el salto de la discontinuidad debe ser hacia abajo, a medida que x incrementa, es decir, $u_r < u_l$. Además, la condición anterior junto con la condición (1.3) implican la

desigualdad:

$$f'(u_r) < s < f'(u_l),$$

lo cual muestra que la velocidad de choque debe ser intermedia a las velocidades características en ambos lados del choque.

Para sistemas, la condición de entropía es dada de la siguiente manera: Sean ∇f la matriz Jacobiana de la función f en (1.1) y $\lambda_i(u)$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ los valores propios de ∇f , suponga que $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_k(u) < s < \lambda_{k+1}(u) < \dots < \lambda_n(u)$, entonces para algún índice m , $1 \leq m \leq n$ debe cumplirse:

$$\lambda_m(u_r) < s < \lambda_m(u_l), \quad (1.4)$$

$$\lambda_{m-1}(u_l) < s < \lambda_{m+1}(u_r), \quad (1.5)$$

estas desigualdades son llamadas *condiciones de choque de Lax* o *desigualdades de entropía de Lax*, y dicha discontinuidad es llamada un *k-choque*.

Uno de los métodos usados para encontrar soluciones débiles de sistemas de leyes de conservación (1.1) es el método de viscosidad nula, en el cual, se agrega una pequeña perturbación al sistema inicial, obteniendo el sistema parabólico,

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}, \quad (1.6)$$

donde $\epsilon > 0$ es una constante. Para cada ϵ , el problema de Cauchy (1.6), (1.2) tiene una solución suave u^ϵ , la cual es garantizada por el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Sea $\epsilon > 0$ fijo, considere el problema de Cauchy (1.6), con dato inicial acotado y medible $u(x, 0) = u_0(x)$, entonces se tienen las siguientes afirmaciones;*

- i.) El problema de Cauchy siempre tiene una solución suave local $u^\epsilon(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \tau))$, para un tiempo τ pequeño, el cual depende solo de la norma L^∞ del dato inicial $u_0(x)$.*
- ii.) Si la solución u^ϵ tiene una estimativa L^∞ a priori $|u^\epsilon(\cdot, t)|_\infty \leq M(\epsilon, T)$, para cualquier $t \in [0, T]$, entonces la solución existe en $\mathbb{R} \times [0, T]$.*
- iii.) La solución u^ϵ satisface,*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u^\epsilon(x, t) = 0, \quad \text{si} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = 0.$$

- iv.) Si una de las ecuaciones del sistema (1.6) es de la forma,*

$$w_t + (wg(u))_x = \epsilon w_{xx},$$

donde $g(u)$ es una función continua de $u \in \mathbb{R}^n$, entonces,

$$w^\epsilon \geq c(t, c_0, \epsilon) > 0, \quad \text{si} \quad w_0(x) \geq c_0 > 0$$

donde c_0 es una constante positiva y $c(t, c_0, \epsilon)$ puede tender a cero cuando t tiende a infinito o ϵ tiende a cero.

La pruerba del teorema anterior puede encontrarse en [14]. El método de viscosidad consiste en tomar la sucesión de soluciones $\{u^\epsilon\}$ y estudiar la convergencia de estas a la solución del sistema original, haciendo tender ϵ a cero. Para esto debe garantizarse que el límite de la sucesión de soluciones existe y que además satisface el sistema (1.1). En la sección 1.3 se muestran condiciones que garantizan esta convergencia.

1.1. Sistemas 2x2 de Leyes de conservación estrictamente hiperbólicos.

En esta sección se estudian sistemas de leyes de conservación 2×2 estrictamente hiperbólicos. A continuación se darán algunas definiciones.

Considere el sistema :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (1.7)$$

con $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, donde $u = (u_1, u_2)$ y $f = (f_1(u), f_2(u))$ es una función en $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, y suponga que es un sistema estrictamente hiperbólico, es decir, la matriz 2×2 , $\nabla f(u)$ tiene auto-valores reales distintos $\lambda_1(u) < \lambda_2(u)$.

Sea $r_i(u)$ un auto-vector a derecha asociado a $\lambda_i(u)$, es decir,

$$\nabla f(u) r_i(u) = \lambda_i(u) r_i(u),$$

$i = 1, 2, u \in \mathbb{R}^2$. Se dice que el sistema es genuinamente no lineal si,

$$\nabla \lambda_i(u) \cdot r_i(u) \neq 0,$$

para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$.

Una entropía η para (1.7) y su flujo de entropía asociado q , son funciones diferenciables en \mathbb{R}^2 , que satisfacen,

$$\nabla q(u) = \nabla \eta(u) \nabla f(u), \quad (1.8)$$

el par (η, q) se denomina par de entropía- flujo, abreviadamente par e-f.

Los sistemas 2×2 estrictamente hiperbólicos son dotados de funciones diferenciables z, w definidas en \mathbb{R}^2 , cuyos gradientes son auto-vectores a izquierda de f , es decir,

$$\nabla z \nabla f = \lambda_1 \nabla z,$$

$$\nabla w \nabla f = \lambda_2 \nabla w,$$

dichas funciones se denominan invariantes de Riemann y para estos sistemas están globalmente definidas, además r_1 y r_2 pueden ser normalizados de modo que se tenga:

$$\begin{cases} \nabla z \cdot r_1 = 1, & \nabla z \cdot r_2 = 0 \\ \nabla w \cdot r_1 = 0, & \nabla w \cdot r_2 = 1. \end{cases}$$

Por lo anterior, para cualquier función ψ diferenciable en \mathbb{R}^2 , vale:

$$\psi_z = \nabla \psi \cdot r_1,$$

$$\psi_w = \nabla \psi \cdot r_2.$$

Si se tiene dicha normalización para los vectores r_1 , r_2 , al multiplicar (1.8), por $r_1(u)$, y $r_2(u)$, respectivamente, se llega a las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial q}{\partial w} = \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial w}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Eliminando q ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial w} \eta_z - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \eta_w + \lambda_1 \eta_{zw} - \lambda_2 \eta_{wz} \\ &= \eta_{zw} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial w} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial w} \right). \end{aligned}$$

De las relaciones (1.9) se pueden obtener formalmente pares de entropía-flujo (η_k, q_k) , para $k \in \mathbb{R}$, de la forma:

$$\begin{aligned} \eta_k &= e^{kz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{k^n}, \\ q_k &= e^{kz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{k^n}, \end{aligned}$$

lo mismo se tiene cambiando w por z . También por (1.9),

$$\begin{cases} a.) \quad \lambda_1 V_0 - H_0 = 0 \\ b.) \quad \frac{\partial H_{n-1}}{\partial w} - \lambda_2 \frac{\partial V_{n-1}}{\partial w} = 0 \\ c.) \quad \lambda_1 V_n - H_n = \frac{\partial H_{n-1}}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial V_{n-1}}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Para las ecuaciones anteriores, Lax construyó soluciones exactas y probó que para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, en una vecindad de K , existen soluciones (η_k, q_k) que satisfacen,

$$\eta_k = e^{k\phi} \left(\sum_{n=0}^N \frac{V_n}{k^n} + O\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right) \right), \quad (1.11)$$

$$q_k = e^{k\phi} \left(\sum_{n=0}^N \frac{H_n}{k^n} + O\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right) \right), \quad (1.12)$$

para k suficientemente grande, donde ϕ representa a z , w o cualquier otro invariante de Riemann.

Derivando respecto a z la expresión del numeral a.) en (1.10),

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} V_0 + \lambda_1 \frac{\partial V_0}{\partial z} - \frac{\partial H_0}{\partial z} = 0,$$

reemplazando en c.),

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} V_0 - \lambda_1 V_1 + H_1 = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} V_0 = \lambda_1 V_1 - H_1. \quad (1.13)$$

De igual forma,

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial w} V_0 = \lambda_2 V_1 - H_1, \quad (1.14)$$

entonces, para $\phi = z$,

$$q_k = e^{kz} \left(\lambda_1 V_0 + \frac{\lambda_1 V_1}{k} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \frac{V_0}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right),$$

por lo tanto,

$$\frac{q_k}{\eta_k} = \lambda_1 - \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (1.15)$$

y para $\phi = w$,

$$\frac{q_k}{\eta_k} = \lambda_2 - \frac{\partial \lambda_2}{\partial w} \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (1.16)$$

1.2. Método de Front Tracking o Aproximación de Flujo

Otro de los métodos usados para obtener soluciones de sistemas hiperbólicos, como (1.1) con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$, es el método de Front Tracking también llamado método de aproximación de flujo. Fue introducido por primera vez para el caso escalar en [4], por Dafermos, donde $f(u)$ es una función continua localmente Lipschitz, el método consiste en construir una sucesión de funciones lineales a trozos $f^\delta(u)$ que se aproximen a $f(u)$, y una sucesión de funciones paso $u_0^\delta(x)$ que se aproximen a $u_0(x)$, y resolver el problema de valor inicial formado por la aproximaciones,

$$u_t + f^\delta(u) = 0,$$

con dato inicial,

$$u(x,0) = u_0^\delta(x),$$

dado que la función aproximada $u_0(x)$ es una función simple, la solución de este problema de valor inicial consiste en resolver una serie de problemas de Riemann en cada discontinuidad de $u_0(x)$. Las soluciones de dichos problemas serán independientes entre si, hasta que las ondas de las soluciones vecinas interactúen, entonces se debe resolver la interacción, (la cual establece un nuevo problema de Riemann) para propagar la solución a tiempos mas prolongados, obteniéndose para cada δ soluciones globalmente definidas $u^\delta(x,t)$ del problema de Riemann, estas soluciones son funciones discontinuas a trozos. Finalmente, la solución de (1.1),(1.2), puede ser obtenida como el límite de u^δ cuando $\delta \rightarrow 0$.

Para el caso escalar, si $u_0^\delta(x)$ para δ fijo es una función constante a trozos tomando valores en $\{u_i\}$, con $i = 1, \dots, n$, deben resolverse $n - 1$ problemas de Riemann, lo cual es posible haciendo uso de la condición de Rankine-Hugoniot. En la solución obtenida, si dos ondas vecinas interactúan, la solución no estará bien definida, por lo tanto, se debe resolver dicha interacción, para lo cual se considera un nuevo problema de Riemann dado por dicha discontinuidad. Así, para que el algoritmo de front tracking se detenga, debe garantizarse que el número de interacciones entre las ondas vecinas es finito, lo cual es cierto en este caso, la prueba del resultado puede encontrarse en [11].

En el caso de sistemas, también deben ser resueltos los problemas de Riemann definidos por

cada discontinuidad del dato inicial aproximado u_0^δ , solo que en este caso, en el algoritmo de Front Tracking son consideradas aproximaciones de dichas soluciones.

1.2.1. Problema de Riemann para sistemas.

En esta sección se muestra el problema de Riemann para sistemas, se toma como base el desarrollo dado en [11]. Considere el sistema estrictamente hiperbólico:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.17)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{para } x < 0 \\ u_r & \text{para } x \geq 0, \end{cases}$$

si se suponen soluciones suaves para dicho sistema, las soluciones deben ser invariantes ante cambios de escala, por lo tanto las soluciones buscadas son de la forma:

$$u(x, t) = w(x/t),$$

sea $\zeta = x/t$, reemplazando $w(\zeta)$ en (1.17),

$$-\frac{x}{t^2}w'(\zeta) + \frac{1}{t}\nabla f(w)w'(\zeta) = 0,$$

por lo que,

$$\nabla f(w)w'(\zeta) = \zeta w'(\zeta),$$

es decir, w' es un autovector de la matriz Jacobiana ∇f y su respectivo autovalor es ζ , dado que el sistema es considerado estrictamente hiperbólico, este tiene n vectores propios distintos r_1, r_2, \dots, r_n , con respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, por lo tanto, para algún j ,

$$w'(\zeta) = r_j(w(\zeta)) \quad (1.18)$$

$$\lambda_j(w(\zeta)) = \zeta, \quad (1.19)$$

si además se supone, $w(\lambda_j(u_l)) = u_l$ y $w(\lambda_j(u_r)) = u_r$, para un tiempo fijo, $w(x/t)$ conectará continuamente los estados u_l y u_r , así ζ es creciente y una solución para el sistema está dada por:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{si } x \leq \lambda_j(u_l)t, \\ w(x/t) & \text{si } \lambda_j(u_l)t \leq x \leq \lambda_j(u_r)t, \\ u_r & \text{si } x \geq \lambda_j(u_r)t. \end{cases}$$

Por otro lado, observe que de (1.19) el sistema es genuinamente no lineal en la j -ésima familia de autovectores.

Teorema 1.2. *Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n . Considere la ecuación estrictamente hiperbólica $u_t + f(u)_x = 0$ en Ω y asuma que la ecuación es genuinamente no lineal en el j -ésimo campo característico, es decir, $\nabla \lambda_j \cdot r_j \neq 0$. Sea $r_j(u)$ el j -ésimo autovector de ∇f con correspondiente autovalor $\lambda_j(u)$, normalizado de tal manera que $\nabla \lambda_j(u) \cdot r_j(u) = 1$ en Ω . Sea $u_l \in \Omega$, entonces existe una curva $R_j(u_l)$ en Ω saliendo de u_l , tal que para cada u_r*

sobre la curva, el problema de Cauchy,

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (1.20)$$

con dato inicial,

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{para } x < 0, \\ u_r & \text{para } x \geq 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

tiene solución débil,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{si } x \leq \lambda_j(u_l)t, \\ w(x/t) & \text{si } \lambda_j(u_l)t \leq x \leq \lambda_j(u_r)t, \\ u_r & \text{si } x \geq \lambda_j(u_r)t, \end{cases} \quad (1.22)$$

donde w satisface, $w'(\zeta) = r_j(w(\zeta))$, $\lambda_j(w(\zeta)) = \zeta$, $w(\lambda_j(u_l)) = u_l$ y $w(\lambda_j(u_r)) = u_r$.

Demostración. Dadas las hipótesis, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$w'(\zeta) = r_j(w(\zeta)); \quad w(\lambda_j(u_l)) = u_l, \quad (1.23)$$

tiene solución para todo $\zeta \in [\lambda_j(u_l), \lambda_j(u_l) + \eta)$, para algún $\eta > 0$, para esta solución, se tiene;

$$\frac{d}{d\zeta} \lambda_j(w(\zeta)) = \nabla \lambda_j(w(\zeta)) \cdot w'(\zeta) = 1.$$

La órbita de (1.23) es denotada por $R_j(u_l)$, además, la solución $u(x, t)$ definida por (1.22) satisface la ecuación hiperbólica y el dato inicial para $u_r \in R_j(u_l)$, por lo tanto es solución. Dicha solución es continua, pero no necesariamente diferenciable, por lo que es una solución débil del sistema. \square

Las soluciones de la forma (1.22) son llamadas ondas de rarefacción. En el teorema anterior se consideró solamente el caso de sistemas que son genuinamente no lineales en la j -ésima familia de autovectores, en tal caso, debido a la normalización de r_j , $\lambda_j(u)$ es creciente a lo largo de $R_j(u_l)$, y es posible definir el parámetro $\epsilon := \zeta - \zeta_l = \lambda_j(u) - \lambda_j(u_l)$. Se denota la solución correspondiente a ϵ por $u_{j,\epsilon}$, es decir $u_{j,\epsilon} = w(\zeta) = w(\lambda_j(u)) = w(\epsilon + \lambda_j(u_l))$, y se tiene,

$$\left. \frac{du_{j,\epsilon}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = r_j(u_l).$$

Suponga ahora que el sistema es linealmente degenerado, en la familia j , es decir, $\nabla \lambda_j(u) \cdot r_j(u) \equiv 0$ y considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias;

$$\frac{du}{d\epsilon} = r_j(u), \quad u|_{\epsilon=0} = u_l,$$

el sistema posee solución $u = u_{j,\epsilon}$, para $\epsilon \in (-\eta, \eta)$, y $\eta > 0$, denote la órbita de la solución por $C_j(u_l)$, a lo largo de esta $\lambda_j(u_{j,\epsilon})$ es constante, pues el campo es linealmente degenerado en la familia j . Además, para dicha órbita se cumple:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}(f(u_{j,\epsilon}) - \lambda_j(u_l)u_{j,\epsilon}) &= \nabla f(u_{j,\epsilon}) \frac{du_{j,\epsilon}}{d\epsilon} - \lambda_j(u_l) \frac{du_{j,\epsilon}}{d\epsilon} \\
&= (\nabla f(u_{j,\epsilon}) - \lambda_j(u_l))r_j(u_{j,\epsilon}) \\
&= (\nabla f(u_{j,\epsilon}) - \lambda_j(u_{j,\epsilon}))r_j(u_{j,\epsilon}) = 0,
\end{aligned}$$

de donde, $f(u_{j,\epsilon}) - \lambda_j(u_l)u_{j,\epsilon} = f(u_l) - \lambda_j(u_l)u_l$, es decir, sobre la curva $C_j(u_l)$ se satisface la condición de Rankine-Hugoniot, con velocidad $\lambda_j(u_l)$.

Ahora, para $u_r \in C_j(u_l)$ existe ϵ_0 tal que $u_r = u_{j,\epsilon_0}$ y,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{para } x < \lambda_j(u_l)t, \\ u_r & \text{para } x \geq \lambda_j(u_l)t, \end{cases}$$

es una solución débil de (1.17). En este caso la solución se llama discontinuidad de contacto, el resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n . Considere la ecuación estrictamente hiperbólica $u_t + f(u)_x = 0$ en Ω . Suponga que la ecuación es linealmente degenerada en el j -ésimo campo característico, es decir, $\nabla \lambda_j(u) \cdot r_j(u) = 0$ en Ω , donde $r_j(u)$ es el j -ésimo autovector de ∇f con correspondiente autovalor $\lambda_j(u)$. Sea $u_l \in \Omega$, entonces existe una curva $C_j(u_l)$ en Ω pasando a través de u_l , tal que para cada u_r sobre la curva el problema de valor inicial, (1.20), (1.21) tiene solución débil,*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{para } x \leq \lambda_j(u_l)t, \\ u_r & \text{para } x \geq \lambda_j(u_l)t, \end{cases} \quad (1.24)$$

donde u_r es determinado como sigue: Se considera la función $\epsilon \rightarrow u_\epsilon$, tal que $\frac{du}{d\epsilon} = r_j(u)$, $u|_{\epsilon=0} = u_l$, entonces $u_r = u_{\epsilon_0}$ para algún ϵ_0 .

Si se fija el estado izquierdo u_l es posible construir el conjunto de todos los estados derechos u que satisfacen la condición de Rankine-Hugoniot,

$$s(u - u_l) = f(u) - f(u_l),$$

para alguna velocidad s , a dicho conjunto se le denomina conjunto de Hugoniot y se denota por $\mathbf{H}(u_l)$, es decir,

$$\mathbf{H}(u_l) := \{u | \exists s \in \mathbb{R} \text{ tal que } s(u - u_l) = f(u) - f(u_l)\}.$$

Note que si el estado izquierdo es fijo, para encontrar el conjunto de Hugoniot del sistema, es necesario resolver implícitamente el sistema de n ecuaciones:

$$\mathcal{H}(s, u, u_l) := s(u - u_l) - (f(u) - f(u_l)) = 0, \quad (1.25)$$

con $n + 1$ incógnitas, u_1, \dots, u_n y s para u cercano a u_l .

Teorema 1.4. *Considere la ecuación estrictamente hiperbólica $u_t + f(u)_x = 0$ en un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\nabla \lambda_j \cdot r_j = 1$ y sea $u_l \in \Omega$. Un estado $u_{j,\epsilon} \in \mathbf{H}_j(u_l)$ es un*

j - choque de Lax cercano a u_l si $|\epsilon|$ es suficientemente pequeño y ϵ es negativo. Si ϵ es positivo, el choque no es un choque de Lax.

De acuerdo a lo anterior, si la j -ésima familia de autovectores es genuinamente no lineal, la solución del problema de Riemann (1.17) estará dada por una onda de rarefacción, si $\epsilon > 0$, o por un choque de Lax cuando $\epsilon < 0$ y si la j -ésima familia es linealmente degenerada, la solución estará dada por una discontinuidad de contacto.

Sea S_j el subconjunto de $\mathbf{H}(u_l)$, donde la j -ésima condición de entropía de Lax (1.4) se satisfice. Si la j -ésima familia de ondas es genuinamente no lineal, se define la onda,

$$\mathbf{W}_j(u_l) := R_j(u_l) \cup S_j(u_l),$$

y si la j -ésima familia es linealmente degenerada,

$$\mathbf{W}_j(u_l) := C_j(u_l).$$

Las ondas definidas anteriormente son de gran importancia, para mostrar la existencia de la solución del problema de Riemann. La onda $\mathbf{W}_j(u_l)$ tiene segunda derivada continua a través de u_l y en particular se tiene:

$$u_{j,\epsilon} = u_l + \epsilon r_j(u_l) + \frac{1}{2}\epsilon^2 D_{r_j} r_j(u_l) + O(\epsilon^3), \quad (1.26)$$

donde $D_{r_j} r_j(u_l)$ denota la derivada direccional de $r_j(u_l)$ en la dirección r_j , la demostración de este hecho puede encontrarse en [11].

Para resolver el problema de Riemann, primero se considera el estado izquierdo u_l , el cual se conecta a un estado cercano $u_{m_1} = u_{1,\epsilon_1} \in W_1(u_l)$, bien sea por una onda de rarefacción, ($\epsilon > 0$) o por una onda de choque ($\epsilon < 0$), si la primera familia es genuinamente no lineal y en el caso que la primera familia sea linealmente degenerada por una discontinuidad de contacto. Partiendo ahora del nuevo estado, se encuentra otro $u_{m_2} = u_{2,\epsilon_2} \in W_2(u_{m_1})$, continuando el proceso se llega a un estado intermedio $u_{m_{n-1}}$ tal que $u_r = u_{n,\epsilon_n} \in W_n(u_{m_{n-1}})$, para obtener dicha construcción, es necesario mostrar que existe una única n -nupla $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, de tal manera que se pueda unir el estado izquierdo u_l al estado derecho u_r .

En cada familia de ondas, se denotan las velocidades menor y mayor por σ_j^- , σ_j^+ respectivamente. En el caso que la j -ésima familia de ondas sea genuinamente no lineal,

$$\sigma_j^+ = \sigma_j^- = s_{j,\epsilon_j},$$

si $\epsilon < 0$ y,

$$\begin{aligned} \sigma_j^- &= \lambda_j(u_{m_{j-1}}), \\ \sigma_j^+ &= \lambda_j(u_{m_j}), \end{aligned}$$

si $\epsilon > 0$.

Si la j -ésima familia es linealmente degenerada se denota,

$$\sigma_j^+ = \sigma_j^- = \lambda_j(u_{m_j}).$$

En adelante se denota $u_{i,\epsilon_i}(x/t; u_{m_i}, u_{m_{i-1}})$ a la curva en $W_j(u_{m_{i-1}})$ que une los estados $u_{m_{i-1}}$ y u_{m_i} .

Teorema 1.5. *Asuma que $f_j \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n y considere la ecuación estrictamente hiperbólica $u_t + f(u)_x = 0$ en Ω . Asuma que cada familia de ondas es o genuinamente no lineal o linealmente degenerada. Entonces, para $u_l \in \Omega$ existe una vecindad $U \subset \Omega$ de u_l , tal que para todo $u_r \in U$, el problema de Riemann,*

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{para } x < 0, \\ u_r & \text{para } x \geq 0, \end{cases}$$

tiene una única solución en U consistiendo de hasta n ondas elementales, es decir, ondas de rarefacción, choques satisfaciendo la condición de entropía de Lax o discontinuidades de contacto. La solución es dada por:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{para } x \leq \sigma_1^- t, \\ u_{1,\epsilon_1}(x/t; u_{m_1}, u_l) & \text{para } \sigma_1^- t \leq x \leq \sigma_1^+ t, \\ u_{m_1} & \text{para } \sigma_1^+ t \leq x \leq \sigma_2^- t, \\ u_{2,\epsilon_2}(x/t; u_{m_2}, u_{m_1}) & \text{para } \sigma_2^- t \leq x \leq \sigma_2^+ t, \\ \vdots & \\ u_{n,\epsilon_n}(x/t; u_r, u_{m_{n-1}}) & \text{para } \sigma_n^- t \leq x \leq \sigma_n^+ t, \\ u_r & \text{para } x \leq \sigma_n^+ t. \end{cases} \quad (1.27)$$

Demostración. Defínense las transformaciones lineales, $F_{j,\epsilon}$, por $F_{j,\epsilon}(u) = u_{j,\epsilon} \in \mathbf{W}_j(u)$ y considere las compuestas,

$$F_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)} = F_{n,\epsilon_n} \circ \dots \circ F_{1,\epsilon_1},$$

la solución del problema de Riemann puede escribirse usando la composición:

$$F_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)} = F_{n,\epsilon_n} \circ \dots \circ F_{1,\epsilon_1},$$

con,

$$F_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)} u_l = u_r,$$

la idea de la demostración es probar la existencia de una única n -upla $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ cercana al origen, de tal manera que la condición anterior se cumple para $|u_l - u_r|$ pequeño.

Sea $u_l \in \Omega$, defina $L(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, u_l) = F_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)} u_l - u$.

Dicha aplicación satisface, $L(0, \dots, 0, u_l) = 0$ y $\nabla_\epsilon L(0, \dots, 0, u_l) = (r_1(u_l), \dots, r_n(u_l))$, donde la matriz ∇L tiene los autovectores derechos r_j evaluados en u_l como columnas, esta matriz es no singular pues el sistema se supuso estrictamente hiperbólico. Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, existe una vecindad U alrededor de u_l y una única función diferenciable $(\epsilon_1(u), \dots, \epsilon_n(u)) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ tal que, $L(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, u) = 0$.

Si $u_r \in U$, entonces existe una única $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ con $F_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)} u_l = u_r$, lo cual prueba el teorema. □

1.2.2. Algoritmo de Front Tracking para sistemas.

Para el caso de sistemas, el algoritmo de Front Tracking también consiste en solucionar problemas de Riemann, aunque en este caso se toman soluciones aproximadas del problema

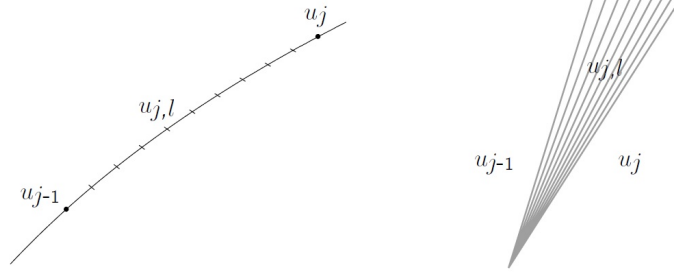


FIGURA 1.1. Onda de rarefacción aproximada

de Riemann.

El primer paso en el algoritmo es aproximar la función inicial $u_0(x)$ por una función constante a trozos u_0^δ , tal que,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_0^\delta - u_0\|_1 = 0.$$

Luego se resuelven los problemas de Riemann definidos por las discontinuidades de u_0^δ . En el caso escalar las soluciones del problema de Riemann son funciones constantes a trozos, para el caso de sistemas solo se tienen funciones a trozos cuando la solución consiste de un choque de Lax o una discontinuidad de contacto, cuando la solución es una onda de rarefacción la solución une de forma continua los estados izquierdo y derecho, por lo tanto se deben aproximar las partes continuas de la solución por constantes a trozos.

De esta forma, si la j -ésima onda es un choque o una discontinuidad de contacto, se toma la solución,

$$u_{j,\epsilon_j}^\delta(x, t) = u_{j,\epsilon_j}(x, t), \quad t\sigma_j^+ < x < \sigma_{j+1}^-.$$

Cuando la solución es dada por una onda de rarefacción, se debe reemplazar esta onda por una función paso, donde los pasos son de longitud máxima δ y están dentro de la onda de rarefacción R_j , la discontinuidad entre dos pasos se toma con velocidad igual a la velocidad característica para el estado izquierdo, (figura 1.1). La aproximación es tomada de la siguiente manera: sea (1.27) la solución del problema de Riemann, suponga que la j -ésima onda es una onda de rarefacción, entonces la solución u y u_{m_j} , están en la j -ésima onda de rarefacción $R_j(u_{m_{j-1}})$, y se tiene,

$$u(x, t) = u_{j,\epsilon_j}(x, t; u_{m_j}, u_{m_{j-1}}), \quad \text{para } t\sigma_j^- \leq x \leq t\sigma_j^+.$$

Sea k el entero más cercano a ϵ_j/δ y sea $\widehat{\delta} = \epsilon_j/k$, los valores de cada escalón de la aproximación son definidos como:

$$u_{j,l} = R_j\left(l\widehat{\delta}; u_{m_{j-1}}\right), \quad \text{para } l = 0, \dots, k.$$

En la igualdad anterior, se tiene, $u_{j,0} = u_{m_{j-1}}$ y $u_{j,k} = u_{m_j}$. Si se fija la velocidad de la discontinuidad como la velocidad característica a la izquierda del paso, entonces la solución aproximada de la onda de rarefacción puede escribirse como:

$$u_{j,\epsilon_j}^\delta := u_{j,0} + \sum_{l=1}^k (u_{j,l} - u_{j,l-1})H(x - \lambda_j(u_{j,l-1})t),$$

donde H denota la función de Heaviside. Así la solución aproximada del problema de Riemann es:

$$u^\delta(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{para } x \leq \sigma_1^- t, \\ u_{1,\epsilon_1}^\delta(x/t; u_{m_1}, u_l) & \text{para } \sigma_1^- t \leq x \leq \sigma_1^+ t, \\ u_{m_1} & \text{para } \sigma_1^+ t \leq x \leq \sigma_2^- t, \\ u_{2,\epsilon_2}^\delta(x/t; u_{m_2}, u_{m_1}) & \text{para } \sigma_2^- t \leq x \leq \sigma_2^+ t, \\ u_{m_2} & \text{para } \sigma_2^+ t \leq x \leq \sigma_3^- t, \\ \vdots & \\ u_{n,\epsilon_n}^\delta(x/t; u_r, u_{m_{n-1}}) & \text{para } \sigma_n^- t \leq x \leq \sigma_n^+ t, \\ u_r & \text{para } x \geq \sigma_n^+ t. \end{cases} \quad (1.28)$$

Además u^δ converge puntualmente a la solución exacta, (1.27) y,

$$|u^\delta(x, t) - u(x, t)| = O(\delta),$$

Para poder encontrar la solución del problema de Riemann, debe suponerse que tanto el dato inicial como el dato inicial aproximado, están en alguna vecindad pequeña Ω de una constante \tilde{u} , sin pérdida de generalidad dicha constante puede ser tomada como cero. En la aproximación obtenida en el algoritmo de front tracking (1.28), para un tiempo posterior las discontinuidades iniciales pueden interactuar, entonces deben ser resueltos nuevos problemas de Riemann, definidos por los estados izquierdo y derecho de cada colisión, nuevamente dichas soluciones son reemplazadas por aproximaciones, este proceso debe continuar hasta la siguiente interacción.

En el caso escalar es posible garantizar que el número de interacciones entre las ondas vecinas de la solución del problema de Riemann es finito. Para el caso de sistemas, cuando se presenta una colisión generalmente se obtienen $n - 2$ nuevas discontinuidades y si $n > 2$, el número de discontinuidades crece sin cota cuando t incrementa. Para solucionar este inconveniente deben eliminarse de la solución algunas ondas débiles que se obtienen en la solución del problema de Riemann, sin embargo, entre más ondas sean eliminadas, es menos probable que el límite de (1.28) sea una solución del problema hiperbólico.

Cada discontinuidad obtenida en la construcción del front tracking se denomina *frente*. La solución del problema de Riemann consiste de n ondas. Para las ondas de rarefacción, la aproximación dada constituye una onda que está compuesta por varios frentes, los cuales tendrán un estado izquierdo I y un estado derecho R , respectivamente, además a cada uno se le asocia una familia. La familia asociada a un frente, separando los estados izquierdo I y derecho R es el único número j tal que $R \in W_j(I)$. Se define la longitud de un frente por $|\epsilon|$ donde $R = u_{j,\epsilon}(I)$. Cuando el frente proviene de la aproximación de una onda de rarefacción en la j -ésima familia, la longitud se toma como $\hat{\delta} = \epsilon_j/k$.

Suponga que se tienen N frentes, $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ interactuando en un solo punto, sean, \hat{i} la familia del frente γ_i y β_1, \dots, β_n las ondas resultantes de la colisión, sea $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, y $\alpha = (\sum_{\hat{i}=1} \gamma_i, \sum_{\hat{i}=2} \gamma_i, \dots, \sum_{\hat{i}=n} \gamma_i)$, β es una función que depende del valor de los frentes

γ_i . Se define para $i < j$,

$$\beta_{i,j}(\sigma, \tau) := \frac{\partial^2 \beta}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \sigma \gamma_i, 0, \dots, 0, \tau \gamma_j, 0, \dots, 0),$$

entonces,

$$\begin{aligned} \gamma_i \gamma_j \int_0^1 \int_0^1 \beta_{i,j}(\sigma \tau) d\sigma d\tau &= \beta(\gamma_1, \dots, \gamma_i, 0, \dots, 0, \gamma_j, 0, \dots, 0) + \beta(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 0, \dots, 0) \\ &\quad - \beta(\gamma_1, \dots, \gamma_i, 0, \dots, 0) - \beta(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 0, \dots, 0, \gamma_j, 0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Por la definición de β , si no hay colisión en los frentes,

$$\beta(0, \dots, 0, \gamma_k, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, \gamma_k, 0, \dots, 0),$$

donde en el lado derecho, γ_k se encuentra en la posición \widehat{k} . Si se suman los valores de (1.29) sobre $i < j$,

$$\sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j \int_0^1 \int_0^1 \beta_{i,j}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau = \beta(\gamma_1, \dots, \gamma_N) - \sum_{i=1}^N \beta(0, \dots, 0, \gamma_i, 0, \dots, 0) = \beta - \alpha.$$

Debido a la continuidad de la segunda derivada de las ondas solución para el problema de Riemann, $\beta_{i,j}$ es acotado, y así,

$$|\beta - \alpha| \leq O(1) \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^N |\gamma_i \gamma_j|, \quad (1.30)$$

o

$$\beta = \alpha + O(1) \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^N |\gamma_i \gamma_j|.$$

Al aplicar el algoritmo de front tracking, se obtiene como resultado una función constante a trozos $u^\delta(x, t)$ que tiene al menos N frentes, donde el j -ésimo frente tendrá una longitud $|\epsilon_j|$ y estados izquierdo y derecho I_j, R_j respectivamente. La posición del frente será denotada por $x_j(t)$, sea s_j la velocidad del j -ésimo frente y (x_j, t_j) la posición y tiempo en el que se origina, entonces,

$$x_j(t) = x_j + s_j(t - t_j),$$

con lo anterior, u^δ puede escribirse como:

$$u^\delta(x, t) = I_1 + \sum_{j=1}^N (R_j - I_j) H(x - x_j(t)).$$

Se dice que dos frentes están próximos, si el frente de la izquierda tiene una familia más grande que el frente de la derecha o si los dos son de la misma familia y al menos uno de estos es una onda de choque. Sea \mathfrak{A} la colección de todos los pares de frentes que se

aproximan, por simplicidad se denota cada frente con su respectiva longitud ϵ_j , entonces,

$$\mathfrak{A} := \{(\epsilon_i, \epsilon_j) \text{ tal que } \epsilon_i \text{ se aproxima a } \epsilon_j\}.$$

Se define la interacción potencial Q , por:

$$Q = \sum_{\mathfrak{A}} |\epsilon_i \epsilon_j|. \quad (1.31)$$

Sea t_1 el primer tiempo en el cual dos frentes colisionan, entonces para dicho tiempo puede resolverse un nuevo problema de Riemann, hasta la siguiente colisión en el tiempo t_2 , y así sucesivamente. De esta forma se obtiene una sucesión creciente de los tiempos de colisión t_i , en el caso escalar dicha sucesión es finita, en el caso de sistemas no necesariamente se cumple.

Sea t_c un tiempo fijo y suponga que en el punto (x_c, t_c) ocurre la colisión de N frentes $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$, originando n ondas $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n$ en la solución exacta. Sea U un intervalo pequeño conteniendo a x_c y J su complemento.

Es posible escribir $Q = Q(U) + Q(J) + Q(U, J)$, donde $Q(U)$ y $Q(J)$ indican la suma (1.31) restringida a los pares de frentes pertenecientes a U y J respectivamente y $Q(U, J)$ indica la suma restringida a los pares de frentes donde uno esta en U y el otro en J . Sean $\tau_1 < t_c < \tau_2$ dos tiempos para los cuales se cumple: no ocurren otras interacciones en el intervalo $[\tau_1, \tau_2]$; los únicos frentes que cruzan el intervalo U en el tiempo τ_1 son $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$ y las únicas ondas producidas en la colisión que cruzan U en el tiempo τ_2 son $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n$.

Defina el funcional lineal,

$$T := \sum_{i=1}^N |\epsilon_i|,$$

donde N es el número de frentes y sean Q_i, T_i los valores de Q y T , en el tiempo τ_i , se tiene,

$$Q_2 - Q_1 = Q_2(U, J) - Q_1(U, J) - Q_1(U), \quad (1.32)$$

además,

$$Q_2(U, J) \leq Q_1(U, J) + O(Q_1(U)T_1(J)), \quad (1.33)$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se tiene el siguiente lema.

Lema 1.6. *Si $T_1 \leq 1/(2K)$ donde K reemplaza el símbolo de orden en (1.33), entonces,*

$$Q_2 - Q_1 \leq \frac{1}{2}Q_1(U).$$

Lema 1.7. *Si T es suficientemente pequeño en $t = 0$, entonces hay alguna constante c independiente de δ , tal que*

$$G = T + cQ,$$

es no creciente. G se denomina funcional de Glimm.

Demostración. La demostración se realiza por inducción, considere la sucesión creciente de los tiempos de colisión t_i y sean T_n y Q_n los valores de T y Q antes de la n -ésima

colisión de los frentes en el tiempo t_n , de (1.30),

$$T_{n+1} = \sum_j |\epsilon'_j| \leq T_n + KQ_n(R), \quad (1.34)$$

sea $c \geq 2K$. Suponga $T_1 + cT_1^2 \leq \frac{1}{2K}$, $T_n \leq \frac{1}{2K}$ y que para todo t menor que t_n , $T + cQ$ es no creciente, entonces por el lema anterior y (1.34),

$$\begin{aligned} T_{n+1} + cQ_{n+1} &\leq T_n + KQ_n(U) + cQ_n - \frac{c}{2}Q_n(U) \\ &= T_n + cQ_n + \left(K - \frac{c}{2}\right)Q_n(U) \\ &\leq T_n + cQ_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene,

$$T_{n+1} \leq T_{n+1} + cQ_{n+1} \leq \cdots \leq T_1 + cQ_1 \leq T_1 + cT_1^2 \leq \frac{1}{2K}.$$

□

Note que del lema anterior se tiene que tanto T como $V.T.(u^\delta)$ son acotados y su cota es independiente de δ . Como se dijo anteriormente si $n > 2$, el número de discontinuidades crece sin control y el algoritmo de front tracking podría no parar, sin embargo existen algunas ondas en la solución que pueden ser eliminadas, de tal manera que la sucesión u^δ converja a la solución del problema hiperbólico, para saber qué ondas seleccionar es necesario conocer la generación de un frente.

Se dice que cada frente comenzando el $t = 0$ es de primera generación. Considérense dos frentes de primera generación de familias l y r respectivamente, que chocan, los frentes resultantes de familias l y r , también se denominan de primera generación, al resto de frentes resultantes se les denomina frentes de segunda generación. En general, si se tiene un frente de generación m de la familia l que interactúa con un frente de la familia r y de generación n , los frentes resultantes de la colisión pertenecientes a la familia l serán frentes de generación m , los que pertenezcan a la familia r serán de generación n , y el resto de frentes generados en la interacción se dirán de generación $n + m$. Los frentes de generación muy grande serán frentes débiles.

Si δ es el parámetro de aproximación para el front tracking, los frentes de generación mayor a N , donde N es el valor del entero más cercano a $|\ln_{4KT}(\delta)|$, serán removidos de la solución, si el frente removido no se encuentra muy a la derecha, la función u^δ toma el valor que tiene a la izquierda del frente removido, si el frente que se quita es el frente a la derecha, el valor de u^δ será igual al valor que tenía a la derecha del frente removido.

Teorema 1.8. *Sea $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n)$, con $j = 1 \cdots, n$. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n y considere la ecuación estrictamente hiperbólica $u_t + f(u)_x = 0$ en Ω . Suponga que f es tal que la familia de ondas es genuinamente no lineal o linealmente degenerado. Suponga también que la función $u_0(x)$ tiene variación total suficientemente pequeña. Entonces, la aproximación construida en el algoritmo de front tracking, definida por (1.28) está bien definida. Además, el algoritmo requiere solo un número finito de iteraciones para definir $u^\delta(x, t)$ en todo tiempo. La variación total de u^δ es uniformemente acotada, y hay una constante finita C ,*

tal que,

$$V.T.(u^\delta(.,t)) \leq C,$$

para todo $t > 0$ y todo $\delta > 0$

La prueba consiste en ver que el número de frentes de generación menor que N es finito, para los detalles de la misma se puede consultar [11].

Teorema 1.9. *Considere el sistema estrictamente hiperbólico de ecuaciones (1.1), con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ y suponga que $f \in C^2$ es tal que la familia de ondas características es o linealmente degenerada o genuinamente no lineal. Si la variación total de u_0 $T.V.(u_0)$ es suficientemente pequeña, existe una solución débil global $u(x, t)$ para este problema de valor inicial. La solución puede ser construida por el algoritmo de front tracking. Además, si u tiene una discontinuidad de salto aislada en el punto (x, t) , entonces, la condición de entropía de Lax se cumple.*

El teorema anterior afirma que las soluciones $u^\delta(x, t)$ convergen a la solución del sistema hiperbólico (1.1), con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. La prueba consiste en ver que la sucesión es compacta y que su límite es solución débil del problema (1.1), la demostración de este teorema puede encontrarse en [11].

1.3. Compacidad compensada.

Anteriormente se mencionó que la dificultad de mostrar la convergencia de las soluciones del problema parabólico $u^\epsilon(x, t)$ a la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy (1.1),(1.2) es obtener la convergencia de las compuestas $f(u^\epsilon) \rightarrow f(u)$. Para esto, primero se debe ver que la solución $f(u^\epsilon)$ converge, lo cual es garantizado por la existencia de las medidas de Young, en el teorema 1.11, este teorema es debido a Tartar y fue dado a conocer en [8]. En esta sección se trabajan resultados claves para el estudio de la compacidad compensada, este desarrollo es seguido de [6].

Proposición 1.10. *Sea μ una medida de Radon finita y sea $\sigma = \text{Proy}_\Omega \mu$. Entonces para $x \in \Omega$, σ -c.t.p. existe una medida $\nu_x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$, el conjunto de medidas de probabilidad sobre \mathbb{R}^m , tal que la aplicación:*

$$x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\nu_x,$$

es σ -medible y

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^m} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\nu_x(y) \right) d\sigma(x),$$

para cada función f continua y acotada.

La demostración de esta proposición puede verse en [6].

Teorema 1.11. *Suponga que K es acotado en \mathbb{R}^m y Ω es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n . Sea $\{u^\epsilon\}$ una sucesión de funciones medibles, con $u^\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $u^\epsilon(x) \in K$ para*

casi todo $x \in \Omega$. Entonces, existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$ y una familia de medidas de probabilidad ν_x , $x \in \Omega$, sobre \mathbb{R}^m con $\text{Supp}\nu_x \subset \overline{K}$, tal que si f es una función continua en \mathbb{R}^m y,

$$\bar{f}(x) = \langle \nu_x, f(\lambda) \rangle \text{ c.t.p.},$$

entonces,

$$f(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \bar{f} \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ débil}^*.$$

Demostración. Considérense las medidas de Radon:

$$\mu^\epsilon(E) = \int_{\Omega} \chi_E(x, u^\epsilon(x)) dx,$$

con E boreliano en $\Omega \times \mathbb{R}^m$.

Para cada compacto $K = K_1 \times K_2 \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$, $\mu^\epsilon(K) \leq \mu^\epsilon(K_1 \times \mathbb{R}^m) = L^n(K_1 \cap \Omega) = c$, donde c es una constante y L^n es la medida de Lebesgue n -dimensional, por lo tanto, existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$ y una medida de Radon μ , tal que $\mu^{\epsilon_k} \rightharpoonup \mu$ en $\mathcal{M}(\Omega \times \mathbb{R}^m)$, el espacio de medidas de Radon sobre $\Omega \times \mathbb{R}^m$.

Sea $\sigma = \text{Proy}_\Omega \mu$, es posible probar que $\sigma = L^n|_\Omega$. Entonces, por la proposición anterior, para casi todo $x \in \Omega$, existe una medida $\nu_x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$, tal que,

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^m} g(x, y) d\mu(x, y) = \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x, y) d\nu_x(y) \right) dx,$$

para cada función g continua y acotada. Sea $g(x, y) = \zeta(x)f(y)$, donde $\zeta \in C_0(\Omega)$ y $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta(x) f(u^{\epsilon_k}(x)) dx &= \int_{\Omega} g(x, u^{\epsilon_k}(x)) dx \\ &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}^m} g(x, y) d\mu^{\epsilon_k}(x, y), \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \zeta(x) f(u^{\epsilon_k}(x)) dx &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}^m} g(x, y) d\mu(x, y) \\ &= \int_{\Omega} \zeta(x) \int_{\mathbb{R}^m} f(y) d\nu_x(y) dx \\ &= \int_{\Omega} \zeta(x) \bar{f}(x) dx, \end{aligned}$$

es decir, $f(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \bar{f}$ en $L^\infty(\Omega)$ débil estrella. Finalmente, si f se anula en \overline{K} , se tiene que $f(u^{\epsilon_k}) \equiv 0$ por lo tanto, $\langle \nu_x, f(\lambda) \rangle = 0$, lo que muestra que $\text{Supp}\nu_x \subset \overline{K}$. \square

Si la medida ν_x es una medida de Dirac para casi todo $x \in \Omega$, la convergencia anterior pasa a ser convergencia en casi toda parte, de hecho, si $u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} y d\nu_x(y)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |y|^2 d\nu_x(y) \right) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u^{\epsilon_k}(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

de manera que la convergencia se vuelve fuerte, luego $u^{\epsilon_k} \rightarrow u$ en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Definición 1.12. A la familia ν_x , $x \in \Omega$ se le denomina medida parametrizada de Young o función generalizada de Young.

Es posible generalizar el teorema anterior cuando los $u^\epsilon \in L^p(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ para $p > 1$, imponiendo una condición en la función f , de la siguiente manera.

Teorema 1.13. Sea $\{u^\epsilon\}$ una sucesión uniformemente acotada en $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, para algún $p > 1$. Entonces, existe una subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$ y una familia de medidas de probabilidad $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ sobre \mathbb{R}^m , tal que si $f \in C(\mathbb{R}^m)$ y satisface $f(u) = o(|u|^p)$ cuando $|u| \rightarrow \infty$, entonces,

$$f(u^{\epsilon_k}) \rightharpoonup \langle \nu_x, f(\lambda) \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) d\nu_x(\lambda),$$

en el sentido de distribuciones.

Demostración. Considere la función $\Gamma_M^\epsilon(x)$ definida por:

$$\Gamma_M^\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |u^\epsilon(x)| \leq M \\ 0 & \text{si } |u^\epsilon(x)| > M, \end{cases}$$

y,

$$v_M^\epsilon(x) := \Gamma_M^\epsilon(x) u^\epsilon(x),$$

entonces, se tiene que $v_M^\epsilon(x) \subset K = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : |\lambda| \leq M\}$. Por el teorema 1.11 para cada M , existe una familia de medidas de probabilidad $\{\nu_x^M\}_{x \in \Omega}$ con soporte en \bar{K} tal que para cualquier $f \in C(\mathbb{R}^m)$,

$$f(v_M^\epsilon) \rightharpoonup \langle \nu_x^M, f(\lambda) \rangle,$$

en $L^\infty(\Omega)$ débil estrella.

Sean $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ y $\varphi \in C_0(\Omega)$ arbitrarias, entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nu_x^M, \phi \rangle \varphi(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi(v_M^\epsilon(x)) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \langle \nu_x^{M_0}, \phi \rangle \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

para todo $M \geq M_0$ donde M_0 , es tal que $\text{Supp } \phi \subset B(0; M_0)$. Por lo tanto, puede definirse,

$$\langle \nu_x, \phi \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \nu_x^M, \phi \rangle,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Sea $f \in C(\mathbb{R}^m)$ satisfaciendo la condición de crecimiento,

$$f(\lambda) = o(|\lambda|^p),$$

cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$ y considérese $\{f^N\}$ la sucesión de funciones que satisfacen:

$$f^N(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & \text{si } |\lambda| \leq N \\ 0 & \text{si } |\lambda| \geq N + 1, \end{cases}$$

y $|f^N(\lambda)| \leq |f(\lambda)|$, nótese que dicha sucesión se aproxima a f . Ahora, sea ν_x la medida definida por:

$$\langle \nu_x, f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \nu_x, f^N \rangle, \quad (1.35)$$

para casi todo x , dicho límite está bien definido, pues $\langle \nu_x, f^N \rangle$ es una sucesión de Cauchy para casi todo $x \in \Omega$. Para completar la prueba, falta ver que el límite de $f(u^{\epsilon_k})$ existe y es igual a $\langle \nu_x, f(\lambda) \rangle$ en el sentido de las distribuciones, para alguna subsucesión $\{u^{\epsilon_k}\}$. Sin pérdida de generalidad supongase que $f(0) = 0$. Por el teorema anterior, para cada N existe una subsucesión ϵ_k^N tal que para toda $f \in C(\mathbb{R}^m)$ vale:

$$f(v_N^{\epsilon_k^N}) \rightarrow \langle \nu_x^N, f(\lambda) \rangle, \quad (1.36)$$

en $L^\infty(\Omega)$ débil *. Para M entero positivo sea $\epsilon_k = \epsilon_k^M$, por conveniencia se denota, $u^{\epsilon_k} = u^\epsilon$ y $v_M^{\epsilon_k} = v_M^\epsilon$, sea $\phi \in C_0(\Omega)$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f(u^\epsilon) - \langle \nu_x, f(\lambda) \rangle] \phi(x) dx &\leq \int_{\Omega} [f(u^\epsilon) - f(v_M^\epsilon)] \phi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} [f(v_M^\epsilon) - \langle \nu_x^M, f(\lambda) \rangle] \phi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} [\langle \nu_x^M, f(\lambda) \rangle - \langle \nu_x^M, f^N(\lambda) \rangle] \phi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} [\langle \nu_x^M, f^N(\lambda) \rangle - \langle \nu_x^M, f^S(\lambda) \rangle] \phi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} [\langle \nu_x, f^S(\lambda) \rangle - \langle \nu_x, f(\lambda) \rangle] \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Por (1.35), (1.36) y el hecho de que $\langle \nu_x, f^N \rangle$ es una sucesión de Cauchy, las cuatro últimas integrales pueden hacerse arbitrariamente pequeñas si N es suficientemente grande o ϵ tiende a cero. Para la primera integral, usando el orden de crecimiento, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f(u^\epsilon) - f(v_M^\epsilon)] \phi(x) dx &\leq \rho(M^{-1}) \int_{\Omega_M^{\epsilon}} |u^\epsilon|^p |\phi(x)| dx \\ &\leq \rho(M^{-1}) \|u^\epsilon\|_p^p \|\phi\|_\infty, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_0(\Omega)$ donde ρ tiende a cero si M tiende a infinito, con lo que se tiene el límite buscado. \square

Teorema 1.14 (Lema de DIV-ROT.). Sean $\{v^\epsilon\}$, $\{w^\epsilon\}$ dos sucesiones acotadas en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, tales que :

i.) $\text{Div}v^\epsilon$ es pre-compacto en $W^{-1,2}(\Omega)$.

ii.) $\text{Rot}w^\epsilon$ es pre-compacto en $W^{-1,2}(\Omega; M_{n \times n})$, donde $M_{n \times n}$ es el espacio de matrices de tamaño $n \times n$, y $(\text{Rot}w)_{ij} = \frac{\partial w^i}{\partial x_j} - \frac{\partial w^j}{\partial x_i}$, para $1 \leq i, j \leq n$.

Suponga además que $v^\epsilon \rightharpoonup v$ y $w^\epsilon \rightharpoonup w$ en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, entonces,

$$v^\epsilon \cdot w^\epsilon \rightharpoonup v \cdot w,$$

en el sentido de las distribuciones.

Demostración. Considérense los campos vectoriales $u^\epsilon \in W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, soluciones de:

$$\begin{cases} -\Delta u^\epsilon = w^\epsilon & \text{en } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.37)$$

en el sentido débil. Como $\{w^\epsilon\}$ es acotada en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\{u^\epsilon\}$ es acotada en $W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sea $z^\epsilon = -\text{Div}u^\epsilon$ y $y^\epsilon = w^\epsilon - \nabla z^\epsilon$, entonces, $\{z^\epsilon\}$ es acotada en $W^{-1,2}(\Omega)$, además, si $1 \leq i \leq n$,

$$y_i^\epsilon = w_i^\epsilon - (z^\epsilon)_{x_i} \quad (1.38)$$

$$= -\sum_{j=1}^n (u_i^\epsilon)_{x_j} x_j + \sum_{j=1}^n (u_j^\epsilon)_{x_j} x_i \quad (1.39)$$

$$= \sum_{j=1}^n [(u_j^\epsilon)_{x_i} - (u_i^\epsilon)_{x_j}] x_j. \quad (1.40)$$

Como $\text{Rot}w^\epsilon$ es pre-compacto en $W^{-1,2}(\Omega, M_{n \times n})$, y ya que u^ϵ es solución de la ecuación (1.37), se tiene que $\{\text{Rot}u^\epsilon\}$ es un subconjunto compacto de $W^{1,2}(\Omega, M_{n \times n})$. Por lo tanto, por la igualdad anterior, $\{y^\epsilon\}$ está contenida en un subconjunto compacto en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Pasando a una subsucesión, si es necesario, se puede suponer que:

$$\begin{aligned} z^\epsilon &\rightharpoonup z && \text{en } && W^{1,2}(\Omega), \\ y^\epsilon &\longrightarrow y && \text{fuertemente en } && L^2(\Omega; \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

donde $z = \text{Div}u$ y $y = w - \nabla z$, para $u \in W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u = w & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Así, si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, se tiene,

$$\int_{\Omega} v^\epsilon \cdot y^\epsilon \phi dx \longrightarrow \int_{\Omega} v \cdot y \phi dx.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v^{\epsilon} \cdot \nabla z^{\epsilon} \phi dx &= \int_{\Omega} \nabla(v^{\epsilon} \cdot z^{\epsilon}) \phi dx - \int_{\Omega} \nabla v^{\epsilon} \cdot z^{\epsilon} \phi dx \\
&= - \int_{\Omega} (v^{\epsilon} \cdot \nabla \phi) z^{\epsilon} dx - \int_{\Omega} \text{Div} v^{\epsilon} z^{\epsilon} \phi dx \\
&= - \int_{\Omega} (v^{\epsilon} \cdot \nabla \phi) z^{\epsilon} dx - \langle \text{Div} v^{\epsilon}, z^{\epsilon} \phi \rangle,
\end{aligned}$$

donde, \langle, \rangle denota el parámetro de dualidad en $W^{-1,2}(\Omega)$ y $W^{1,2}(\Omega)$. Como $\text{Div} v^{\epsilon}$ es precompacto en $W^{-1,2}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v^{\epsilon} \cdot \nabla z^{\epsilon} \phi dx &\longrightarrow - \int_{\Omega} (v \cdot \nabla \phi) z dx - \langle \text{Div} v, z \phi \rangle \\
&= \int_{\Omega} (v \cdot \nabla z) \phi dx.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (v^{\epsilon} \cdot w^{\epsilon}) \phi dx &\longrightarrow \int_{\Omega} v \cdot (y + \nabla z) \phi dx \\
&= \int_{\Omega} v \cdot w \phi dx,
\end{aligned}$$

lo cual concluye el teorema. \square

El teorema anterior admite una generalización la cual es dada en el siguiente teorema, para su demostración se usa el siguiente lema:

Lema 1.15. *Sea M una matriz simétrica y $f(u) = \langle Mu, u \rangle$, con $u \in \mathbb{R}^m$, suponga que $f(\lambda) \geq 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$, donde,*

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^m : \exists \zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \text{ tal que } \sum_{jk} a_{ijk} \lambda_j \zeta_k = 0, i = 1 \cdots, q \}, \quad (1.41)$$

considere la extensión de f de \mathbb{R}^m a \mathbb{C}^m dada por, $\tilde{f}(u) = \langle Mu, \bar{u} \rangle$, entonces para todo $\alpha > 0$, existe una constante C_{α} tal que ,

$$\text{Re} \tilde{f}(\lambda) \geq -\alpha |\lambda|^2 - c_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^q \left| \sum_{jk} a_{ijk} \lambda_j \eta_k \right|^2 \right), \quad (1.42)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}^m$ y para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ con $|\eta| = 1$.

Demostración. Para probar la desigualdad, se procede por contradicción. Suponga que existen α_0 , tal que para todo $c_{\alpha} = \nu$, existen $\lambda^{\nu} \in \mathbb{C}^m$ con $|\lambda^{\nu}| = 1$ y $\eta^{\nu} \in \mathbb{R}^n$ con $|\eta^{\nu}| = 1$,

tales que,

$$\operatorname{Re} \tilde{f}(\lambda^\nu) < -\alpha_0 |\lambda^\nu|^2 - \nu \left(\sum_i \left| \sum_{jk} a_{ijk} \lambda_j^\nu \eta_k^\nu \right|^2 \right), \quad (1.43)$$

entonces, es posible extraer subsucesiones convergentes, λ^ν y η^ν , de modo que, $\lambda^\nu \rightarrow \lambda^\infty$, $\eta^\nu \rightarrow \eta^\infty$,

por lo tanto, cuando $\nu \rightarrow \infty$, en (1.43),

$$\sum_{i=1} \left| \sum_{jk} a_{ijk} \lambda_j^\nu \eta_k^\nu \right|^2 \rightarrow 0,$$

así,

$$\sum_{jk} a_{ijk} \lambda_j^\infty \eta_k^\infty = 0$$

es decir, $\lambda^\infty \in \Lambda + i\Lambda$. Usando la hipótesis sobre \tilde{f} , $\operatorname{Re} \tilde{f}(\lambda^\infty) \geq 0$, pero tomando el límite en (1.43), tenemos $\operatorname{Re} \tilde{f}(\lambda^\infty) \leq -\alpha_0 \leq 0$, lo cual es una contradicción, luego vale (1.42). \square

Teorema 1.16. *Sea M una matriz simétrica y sea $f(u) = \langle Mu, u \rangle$, donde $u \in \mathbb{R}^m$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar de \mathbb{R}^m , suponga que:*

$$\begin{cases} u^\epsilon \rightarrow u & \text{en } L^2(\Omega, \mathbb{R}^m), \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ f(u^\epsilon) \rightarrow l & \text{en el sentido de distribuciones,} \\ (Au^\epsilon)_i = \sum_{j,k} a_{ijk} \frac{\partial u_j^\epsilon}{\partial x_k} & \text{es pre-compacto en } W^{-1,2}(\Omega), \text{ para } i = 1, \dots, q, \end{cases} \quad (1.44)$$

se tiene,

i.) Si $f(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $l \geq f(u)$.

ii.) Si $f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $l = f(u)$.

Demostración. i.) Sea $v^\epsilon = u^\epsilon - u$, y para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, defina, $w^\epsilon = \phi v^\epsilon$, entonces el problema (1.44) se transforma en mostrar que si:

$$\begin{cases} w^\epsilon \rightarrow 0 & \text{en } L^2(\Omega, \mathbb{R}^m), \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \sum_{jk} a_{ijk} \frac{\partial w_j^\epsilon}{\partial x_k} \rightarrow 0 & \text{en } W^{-1,2}(\Omega), \quad i = 1, \dots, q, \\ w^\epsilon & \text{tiene soporte en un compacto fijo } K \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.45)$$

entonces,

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \langle Mw^\epsilon, w^\epsilon \rangle dx \geq 0.$$

Aplicando la transformada de Fourier a w^ϵ ,

$$\widehat{w}^\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} w^\epsilon(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx.$$

De (1.45) y dado que $e^{-2\pi i \cdot x} \in L^2(K)$,

$$\begin{cases} \widehat{w^\epsilon}(\xi) \rightarrow 0 & \text{c.t.p} \\ |\widehat{w^\epsilon}(\xi)| \leq \sigma, & \sigma = \text{cte.} \end{cases}$$

de donde,

$$\widehat{w^\epsilon}(\xi) \rightarrow 0 \text{ fuertemente en } L^2_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Además, de la hipótesis en (1.45) sobre las derivadas de w^ϵ ,

$$\frac{1}{1+|\xi|} \sum_{jk} a_{ijk} \widehat{w^\epsilon_j}(\xi) \xi_k \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, q, \quad (1.46)$$

considere la extensión de $f(w)$ a \mathbb{C}^m , $\tilde{f}(w) = \langle Mw, \bar{w} \rangle$, si $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \Lambda + i\Lambda$,

$$\begin{aligned} \text{Re} \tilde{f}(\lambda) &= \text{Re} \langle M\lambda, \bar{\lambda} \rangle \\ &= \langle M\lambda_1, \lambda_1 \rangle + \langle M\lambda_2, \lambda_2 \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

pues por hipótesis $f(\lambda) \geq 0$, para $\lambda \in \Lambda$, ahora, por Plancherel y la relación de Parseval,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(w^\epsilon(x)) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(w^\epsilon(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle Mw, \bar{w} \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\xi)) d\xi \\ &= \int_{\Omega} \text{Re} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

ya que las entradas de M son reales, se tiene $\tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\xi)) = \text{Re} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\xi))$. Por lo tanto, basta probar que,

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \text{Re} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\xi)) d\xi \geq 0.$$

Ahora,

$$\int_{\mathbb{R}} \text{Re} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\zeta)) d\zeta = \int_{|\zeta| \leq 1} \text{Re} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\zeta)) d\zeta + \int_{|\zeta| > 1} \text{Re} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\zeta)) d\zeta,$$

como $\widehat{w^\epsilon} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene:

$$\int_{|\zeta| \leq 1} \text{Re} \tilde{f}(\widehat{w^\epsilon}(\zeta)) d\zeta \rightarrow 0,$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$. De (1.42),

$$\operatorname{Re} \tilde{f}(\widehat{w}^\epsilon(\zeta)) \geq -\alpha |\widehat{w}^\epsilon(\zeta)|^2 - c_\alpha \sum_i \left| \sum_{jk} a_{ijk} \widehat{w}_j^\epsilon(\zeta) \frac{\zeta_k}{|\zeta|} \right|^2,$$

integrando sobre $|\zeta| > 1$,

$$\int_{|\zeta|>1} \operatorname{Re} \tilde{f}(\widehat{w}^\epsilon(\zeta)) d\zeta \geq -\alpha \int_{|\zeta|>1} |\widehat{w}^\epsilon(\zeta)|^2 d\zeta - c_\alpha \int_{|\zeta|>1} \sum_i \left| \sum_{jk} a_{ijk} \widehat{w}_j^\epsilon(\zeta) \frac{\zeta_k}{|\zeta|} \right|^2 d\zeta,$$

también por, (1.46),

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta|>1} \operatorname{Re} \tilde{f}(\widehat{w}^\epsilon(\zeta)) d\zeta \geq -\alpha \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta|>1} |\widehat{w}^\epsilon(\zeta)|^2 d\zeta, \quad (1.47)$$

como α es arbitrario y $\int_{|\zeta|>1} |\widehat{w}^\epsilon(\zeta)|^2 d\zeta$ es acotada, se obtiene,

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta|>1} \operatorname{Re} \tilde{f}(\widehat{w}^\epsilon(\zeta)) d\zeta \geq 0,$$

que es lo que se quería probar.

ii.) Si $f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, aplicando el ítem anterior a f y $-f$, se tiene $l = f(u)$. □

El teorema anterior, implica el teorema de divergencia-rotacional, en este caso, $u^\epsilon = (v_1^\epsilon, \dots, v_n^\epsilon, w_1^\epsilon, \dots, w_n^\epsilon)$ y Au^ϵ , es dado por:

$$\begin{cases} \operatorname{Div} v^\epsilon = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i^\epsilon}{\partial x_i} \\ (\operatorname{Rot} w^\epsilon)_{ij} = \frac{\partial w_i^\epsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j^\epsilon}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

El conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$, es el conjunto de vectores (λ, μ) para los cuales existe $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \neq 0$, tal que,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i = 0 \\ \mu_j \zeta_i - \mu_i \zeta_j = 0, \end{cases}$$

es decir,

$$\Lambda = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{2n} : \lambda \perp \mu\}.$$

Tomando $f(u, v) = \langle u, v \rangle$, $f((\lambda, \mu)) = 0$ para todo $(\lambda, \mu) \in \Lambda$, así, por el teorema anterior, se tiene el resultado. Otra consecuencia de este teorema es la siguiente.

Corolario 1.17. *Sea $u^\epsilon(x_1, x_2) = (v^\epsilon(x_1, x_2), w^\epsilon(x_1, x_2)) \rightharpoonup (v, w)$ en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ y suponga que $\{\frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_1}\}$ y $\{\frac{\partial w^\epsilon}{\partial x_2}\}$ son pre-compactos en $W^{-1,2}(\Omega)$. Entonces, $v^\epsilon w^\epsilon \rightharpoonup vw$ en el sentido de las distribuciones.*

Demostración. En este caso, $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto de los $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tal que existe $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\zeta \neq 0$ con $\zeta_1 \lambda = 0$, $\zeta_2 \mu = 0$, es decir,

$$\Lambda = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda = 0 \text{ o } \mu = 0\},$$

y $f(v, w) = vw$ por lo tanto $f(\lambda, \mu) = 0$ para todo $(\lambda, \mu) \in \Lambda$ y por el teorema anterior se tiene el resultado. \square

Un resultado clave para el estudio de la compacidad de la sucesión de soluciones del sistema parabólico (1.6), a la solución de (1.1) es el lema de Murat. A continuación se dan unos resultados preliminares para su prueba.

Teorema 1.18. *Para cada $1 \leq q < 1^* := \frac{n}{n-1}$,*

$$M(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega),$$

como una inclusión compacta.

Demostración. Sea $\{\mu_k\}$ una sucesión limitada en $M(\Omega)$. Entonces, existe una subsucesión $\{\mu_{k_j}\}$ tal que $\mu_{k_j} \rightharpoonup \mu$ en $M(\Omega)$.

Sea $q' = \frac{q}{q-1}$ y denote por B la bola unitaria cerrada de $W_0^{1,q'}(\Omega)$, como $1 \leq q < 1^*$, $\frac{1}{q-1} > n-1$, por lo que $q' > n$. Así, por el teorema de Rellich-Kondrachov, B es compacta en $C_b(\Omega)$. Por lo tanto, si $\phi \in B$ es arbitraria, dado $\epsilon > 0$, existen funciones $\{\phi_i\}_{i=1}^{N(\epsilon)} \subset C_b(\Omega)$, tal que,

$$\min_{1 \leq i \leq N(\epsilon)} \|\phi - \phi_i\|_\infty < \epsilon.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \phi d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi d\mu \right| &\leq \left| \int_\Omega (\phi - \phi_i) d\mu_{k_j} \right| + \left| \int_\Omega \phi_i d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi_i d\mu \right| + \left| \int_\Omega (\phi - \phi_i) d\mu \right| \\ &= \leq \epsilon \left(\sup_j |\mu_{k_j}|(\Omega) + |\mu|(\Omega) \right) + \left| \int_\Omega \phi_i d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi_i d\mu \right|, \end{aligned}$$

para $\phi \in B$ y algún índice $i \in \{1, \dots, N(\epsilon)\}$. Así,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{\phi \in B} \left| \int_\Omega \phi d\mu_{k_j} - \int_\Omega \phi d\mu \right| = 0,$$

es decir, $\mu_{k_j} \rightarrow \mu$ en $W^{-1,q}(\Omega)$. \square

Lema 1.19. *Sea N una solución fundamental del Laplaciano en \mathbb{R}^m , es decir,*

$$N(y) = \begin{cases} c_n |y|^{2-n} & \text{si } n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \log |y| & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

donde,

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(2-n)2\pi^{\frac{n}{2}}}.$$

Para cualquier $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ con $\text{Supp} f \subset\subset \Omega$ y $1 < p < \infty$, se tiene,

$$u = N * f \in W^{1,p}(\Omega),$$

y

$$\|u\|_{1,p} \leq c \|f\|_{-1,p}.$$

Demostración. Sea q el exponente conjugado de p . Para obtener el resultado, basta probar que:

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq c \|f\|_{-1,p} \|\phi\|_q, \quad (1.48)$$

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle \right| \leq c \|f\|_{-1,p} \|\phi\|_q, \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad (1.49)$$

donde,

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(x)h(x)dx.$$

Como $\text{Supp} f \subset\subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \langle u, \phi \rangle &= \langle N * f, \phi \rangle \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} N(x-y)f(y)\phi(x)dydx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} N(x)f(y)\tilde{\phi}(y-x)dx dy \\ &= \langle f, N * \tilde{\phi} \rangle, \end{aligned}$$

con $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$, luego,

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq \|f\|_{-1,p} \|N * \tilde{\phi}\|_{1,q},$$

y como N pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $\frac{\partial N}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \|N * \tilde{\phi}\|_{1,q} &\leq \|N * \tilde{\phi}\|_q + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial N}{\partial x_j} * \tilde{\phi} \right\|_q \\ &\leq \|N\|_1 \|\tilde{\phi}\|_q + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\|_1 \|\tilde{\phi}\|_q \\ &\leq C \|\tilde{\phi}\|_q \\ &= C \|\phi\|_q, \end{aligned}$$

de donde sigue (1.48). Para demostrar (1.49) se procede de manera análoga, y se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle \right| &\leq \|f\|_{-1,p} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (N * \tilde{\phi}) \right\|_{1,q} \\ &\leq \|f\|_{-1,p} \|N * \tilde{\phi}\|_{2,q}. \end{aligned}$$

Además,

$$\|N * \tilde{\phi}\|_{2,q} \leq \|N * \tilde{\phi}\|_q + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial N}{\partial x_j} * \tilde{\phi} \right\|_q + \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial y_j} * \tilde{\phi} \right\|_q,$$

Por lo tanto, para obtener la desigualdad, se debe probar,

$$\left\| \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial y_j} \right) * \tilde{\phi} \right\|_q \leq c \|\tilde{\phi}\|_q,$$

para algún $c > 0$, esta desigualdad se conoce como *Desigualdad de Calderón-Zigmund*. Para demostrarla, considere R_k , la k -ésima transformada de Riez definida por:

$$R_k(g)(x) = a_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_k}{|y|^{n+1}} g(x-y) dy,$$

con $a_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})/\pi^{(n+1)/2}$, la transformada de Riez es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, se tiene siguiente relación,

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial y_j} \right) * \tilde{\phi} = -(2\pi)^{-n} R_i R_j \tilde{\phi}, \quad (1.50)$$

$i, j = 1, \dots, n$, para demostrar la igualdad anterior se prueba que las transformadas de Fourier en ambos lados de la igualdad coinciden. Aplicando la transformada de Fourier en ambos lados de (1.50), se tiene, para el miembro de la izquierda,

$$\begin{aligned} \widehat{\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial y_j} \right) * \tilde{\phi}} &= \widehat{\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial y_j}} \widehat{\tilde{\phi}} \\ &= -\frac{\zeta_i \zeta_j}{|\zeta|^2} \widehat{\Delta N} \widehat{\tilde{\phi}} \\ &= -\frac{\zeta_i \zeta_j}{|\zeta|^2} \widehat{\delta_0} \widehat{\tilde{\phi}} \\ &= (2\pi)^{-n} \frac{\zeta_i \zeta_j}{|\zeta|^2} \widehat{\tilde{\phi}}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\widehat{R_k(g)}(\zeta) = i \frac{\zeta_k}{|\zeta|} \widehat{g}(\zeta)$, la transformada del lado derecho de (1.50) es:

$$\begin{aligned} -(2\pi)^{-n} R_i R_j \tilde{\phi} &= -(2\pi)^{-n} i \frac{\zeta_i}{|\zeta|} \widehat{R_j(\tilde{\phi})} \\ &= (2\pi)^{-n} \frac{\zeta_i}{|\zeta|} \frac{\zeta_j}{|\zeta|} \widehat{\tilde{\phi}}. \end{aligned}$$

Luego, las transformadas coinciden. Así,

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial y_j} \right) * \tilde{\phi} \right\|_q &= \left\| -(2\pi)^{-n} R_i R_j \tilde{\phi} \right\|_q \\ &\leq c \|\tilde{\phi}\|_q \\ &= c \|\phi\|_q. \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

Teorema 1.20. *Sea $1 < q \leq p < r \leq \infty$. Entonces,*

$$\{\text{compacto de } W_{loc}^{-1,q}(\Omega)\} \cap \{\text{acotado de } W_{loc}^{-1,r}(\Omega)\} \subset \{\text{compacto de } W_{loc}^{-1,p}(\Omega)\}.$$

Demostración. Sea $\{f_i\}$ una sucesión en,

$$S = \{\text{compacto de } W_{loc}^{-1,q}(\Omega)\} \cap \{\text{acotado de } W_{loc}^{-1,r}(\Omega)\},$$

entonces, existe una subsucesión denotada $\{f_i\}$ que es de Cauchy en $W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$. Para ver que $\{f_i\}$ pertenece a un compacto en $W_{loc}^{-1,p}(\Omega)$ basta probar que,

$$\|\phi f_i - \phi f_j\|_{-1,p} \rightarrow 0, i, j \rightarrow \infty, \quad (1.51)$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Ahora, nótese que si $u \in L^p$, aplicando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha p} |u|^{(1-\alpha)p} dx \\ &\leq \|u\|_q^{\alpha p} \|u\|_r^{(1-\alpha)p}, \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} = \alpha \frac{1}{q} + (1-\alpha) \frac{1}{r}$.

Sean $\bar{f}_i = \phi f_i$, $u_i = N * \bar{f}_i$. Como el operador Laplaciano de $W^{1,s}(\Omega)$ en $W^{-1,s}(\Omega)$, $1 \leq s \leq \infty$ es continuo, usando el lema anterior, y el hecho de que $\{f_i\}$ es acotado en $W_{loc}^{-1,r}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|\phi f_i - \phi f_j\|_{-1,p} &= \|\delta_0 * \bar{f}_i - \delta_0 * \bar{f}_j\|_{-1,p} \\ &= \|\Delta u_i - \Delta u_j\|_{-1,p} \\ &\leq C \|u_i - u_j\|_{1,p} \\ &\leq C \|u_i - u_j\|_{1,q}^\alpha \|u_i - u_j\|_{1,r}^{1-\alpha} \\ &\leq C \|\bar{f}_i - \bar{f}_j\|_{-1,q}^\alpha \|\bar{f}_i - \bar{f}_j\|_{-1,r}^{1-\alpha} \\ &\leq C \|\bar{f}_i - \bar{f}_j\|_{-1,q}^\alpha, \end{aligned}$$

donde C denota cualquier constante positiva y por (1.51), el último término del lado derecho tiende a cero cuando $i, j \rightarrow \infty$. \square

Corolario 1.21 (Lema de Murat). *Sea $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión acotada en $W_{loc}^{-1,r}(\Omega)$, para algún r con $2 < r \leq \infty$, tal que $f_k = g_k + h_k$, para $k = 1, 2, \dots$, donde $\{g_k\}$ es una sucesión pre-compacta en $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$ y $\{h_k\}$ es una sucesión acotada en $M(\Omega)$. Entonces, $\{f_k\}$ es pre-compacta en $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$.*

Demostración. Por el teorema 1.18 $\{h_k\}$ es pre-compacta en $W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$, $1 \leq q < 1^*$.

Como $1^* < 2$, se tiene que $W_{loc}^{-1,2}(\Omega) \subset W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$, como una inclusión continua, por lo tanto, $\{f_k\}$ es pre-compacta en $W_{loc}^{-1,q}(\Omega)$ y como $\{f_k\}$ es acotada en $W_{loc}^{-1,r}(\Omega)$ y $q < 2 < r$, por el teorema anterior, $\{f_k\}$ es pre-compacta en $W_{loc}^{-1,2}(\Omega)$. \square

Considere el sistema de leyes conservación 2×2 estrictamente hiperbólico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (1.52)$$

Una sucesión $\{u^\epsilon\}$ es una sucesión de soluciones aproximadas de (1.52), si $\{u^\epsilon\}$ satisface:

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(u^\epsilon)}{\partial x} = R^\epsilon,$$

donde $R^\epsilon \rightarrow 0$ cuando ϵ tiende a cero, en el sentido de distribuciones.

Teorema 1.22 (DiPerna). *Sea $\{u^\epsilon\}$ una sucesión de soluciones aproximadas de (1.52), uniformemente acotada, y $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, tal que $u^\epsilon \rightharpoonup u$ en $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ débil*. Suponga que para todo Ω abierto y acotado en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ y todo par de e-f $(\eta, q) \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ vale:*

$$\frac{\partial \eta(u^\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial q(u^\epsilon)}{\partial x} \in \{ \text{compacto de } W^{-1,2}(\Omega) \}. \quad (1.53)$$

Entonces u es solución en los siguientes casos:

- i.) *el sistema es estrictamente hiperbólico y genuinamente no lineal.*
- ii.) *el sistema es estrictamente hiperbólico y existe una curva en el espacio de las invariantes de Riemann, $w = g(z)$, con g estrictamente monótona, fuera de la cual el sistema es genuinamente no lineal.*

Demostración. Pasando a una subsucesión si es necesario, considere las medidas de Young $\nu_{x,t}$ asociadas a la sucesión u^ϵ . Dados dos pares e-f, suaves, por (1.53), es posible aplicar el lema de Div-Rot a los campos $(\eta_1(u^\epsilon), q_1(u^\epsilon)), (q_2(u^\epsilon), -\eta_2(u^\epsilon))$, denótese $\nu = \nu_{x,t}$,

$$\langle \nu, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1 \rangle = \langle \nu, \eta_1 \rangle \langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \nu, q_1 \rangle. \quad (1.54)$$

La idea de la demostración es probar que en los dos casos, i.) y ii.), ν es una medida de Dirac. Sea R el menor rectángulo en el plano de invariantes de Riemann (z, w) con lados paralelos a los ejes coordenados,

$$R = \{(z, w) | z_- \leq z \leq z_+, w_- \leq w \leq w_+\},$$

conteniendo el soporte de ν . Sean $(\eta_{\pm k}, q_{\pm k})$ pares de e-f como en (1.11) y (1.12), definidos en una bola conteniendo R . Para $\phi = \pm z$:

$$\eta_{\pm k} = e^{\pm kz} \left(V_0 + \frac{V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right), \quad (1.55)$$

$$q_{\pm k} = e^{\pm kz} \left(H_0 + \frac{H_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right), \quad (1.56)$$

usando estos pares se proba que $z_+ = z_-$. Un análisis idéntico se puede realizar con $\phi = \pm w$ para mostrar $w_+ = w_-$. Sean μ_k^\pm las medidas de probabilidad en R definidas por

$$\langle \mu_k^\pm, h \rangle = \frac{\langle \nu, h \eta_{\pm k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{\pm k} \rangle},$$

para toda función continua $h(z, w)$ definida en R . Como $\{\mu_k^\pm\}$ forma un subconjunto acotado de $M(\mathbb{R})$, existen medidas de probabilidad μ^\pm sobre \mathbb{R} , tal que,

$$\langle \mu^\pm, h \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_k^\pm, h \rangle,$$

para alguna subsucesión adecuada. Además,

$$\text{Supp}\mu^+ \subset R \cap \{(z, w) | z = z_+\}; \quad \text{Supp}\mu^- \subset R \cap \{(z, w) | z = z_-\}.$$

Para ver esto, sea h una función continua no negativa en R y $\text{Supp}h \subset \{(z, w) | z_- \leq z \leq z_+ - \epsilon\}$, para algún $\epsilon > 0$, entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mu^+, h \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_k^+, h \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle \nu, h\eta_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle \nu, he^{kz} (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) \rangle}{\langle \nu, e^{kz} (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) \rangle}. \end{aligned}$$

Si $V_0 > 0$, $(V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) > 0$, entonces para k suficientemente grande, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\langle \nu, he^{kz} (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) \rangle}{\langle \nu, e^{kz} (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) \rangle} \\ &= \frac{\int he^{kz} (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) d\nu}{\int e^{kz} (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) d\nu} \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty e^{k(z_+ - \epsilon)} \int (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) d\nu}{e^{k(z_+ - \epsilon/2)} \int_{\{z \geq z_+ - \epsilon/2\} \cap R} (V_0 + \frac{V_1}{k} + O(\frac{1}{k^2})) d\nu} \\ &\leq Ce^{-k\epsilon/2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\text{Supp}\mu^+ \subset R \cap \{(z, w) | z = z_+\}$. Análogamente se muestra que $\text{Supp}\mu^- \subset R \cap \{(z, w) | z = z_-\}$.

Aplicando la relación (1.54) a los campos, (η_{+k}, q_{+k}) y $(q, -\eta)$,

$$\langle \nu, \eta_{+k}q - q_{+k}\eta \rangle = \langle \nu, \eta_{+k} \rangle \langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, q_{+k} \rangle,$$

dividiendo en $\langle \nu, \eta_{+k} \rangle$,

$$\frac{\langle \nu, \eta_{+k}q - q_{+k}\eta \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle} = \langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \frac{\langle \nu, q_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle},$$

además, por (1.15)

$$q_{+k} = \left(\lambda_1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) \eta_{+k},$$

reemplazando en la igualdad anterior,

$$\frac{\langle \nu, (q - (\lambda_1 + O(\frac{1}{k}))\eta) \eta_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle} = \langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \frac{\langle \nu, (\lambda_1 + O(\frac{1}{k})) \eta_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle},$$

de donde, tomando límite cuando $k \rightarrow +\infty$,

$$\langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \langle \mu^+, \lambda_1 \rangle = \langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle,$$

es decir,

$$\langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \nu, q - \lambda_1^+ \eta \rangle,$$

realizando el mismo procedimiento con los campos $(\eta_{-k}, q_{-k}), (q, -\eta)$ se llega a la igualdad,

$$\langle \mu^-, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \nu, q - \lambda_1^- \eta \rangle,$$

donde $\lambda_1^\pm = \langle \mu^\pm, \lambda_1 \rangle$. Veamos que $\lambda_1^+ = \lambda_1^-$, y por tanto $\langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_1 \eta \rangle$. Aplicando (1.54) a los campos (η_{+k}, q_{+k}) y $(q_{-k}, -\eta_{-k})$,

$$\langle \nu, \eta_{+k} q_{-k} - \eta_{-k} q_{+k} \rangle = \langle \nu, \eta_{+k} \rangle \langle \nu, q_{-k} \rangle - \langle \nu, \eta_{-k} \rangle \langle \nu, q_{+k} \rangle,$$

dividiendo ambos lados por $\langle \nu, \eta_{+k} \rangle \langle \nu, \eta_{-k} \rangle$,

$$\frac{\langle \nu, q_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle} - \frac{\langle \nu, q_{-k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{-k} \rangle} = \frac{\langle \nu, q_{+k} \eta_{-k} - q_{-k} \eta_{+k} \rangle}{\langle \nu, \eta_{+k} \rangle \langle \nu, \eta_{-k} \rangle}. \quad (1.57)$$

Si $z_+ = z_-$, se tiene la igualdad $\lambda_1^+ = \lambda_1^-$, si $z_+ \neq z_-$, para $\epsilon < \frac{z_+ - z_-}{2}$, suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} \langle \nu, \eta_{+k} \rangle &= \int e^{kz} \left(V_0 + \frac{V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) d\nu \\ &\geq e^{k(z_+ - \epsilon)} \int_{\{z \geq z_+ - \epsilon\} \cap R} \left(V_0 + \frac{V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) d\nu \\ &\geq C e^{k(z_+ - \epsilon)}, \end{aligned}$$

de igual forma,

$$\langle \nu, \eta_{-k} \rangle \geq C e^{-k(z_- + \epsilon)},$$

para $k > 0$ suficientemente grande, por lo tanto, el denominador de la derecha de (1.57) tiende a infinito y el numerador es en general $O(1/k)$, así, el miembro de la derecha tiende a cero, mientras que el miembro de la izquierda tiende a $\lambda_1^+ - \lambda_1^-$. Ahora, por (1.11) y (1.12),

$$\begin{aligned} \langle \mu^+, q_{+k} - \lambda_1 \eta_{+k} \rangle &= e^{kz_+} \left\langle \mu^+, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle, \\ \langle \mu^-, q_{+k} - \lambda_1 \eta_{+k} \rangle &= e^{kz_-} \left\langle \mu^-, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle, \end{aligned}$$

y como $\langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_1 \eta \rangle$,

$$\langle \mu^+, H_1 - \lambda_1 V_1 \rangle = 0.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \langle \mu^+, q_{-k} - \lambda_1 \eta_{-k} \rangle &= e^{-kz_+} \left\langle \mu^+, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle, \\ \langle \mu^-, q_{-k} - \lambda_1 \eta_{-k} \rangle &= e^{-kz_-} \left\langle \mu^-, \frac{H_1 - \lambda_1 V_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\rangle, \end{aligned}$$

de donde,

$$\langle \mu^-, H_1 - \lambda_1 V_1 \rangle = 0,$$

usando (1.13) en la ecuación anterior,

$$\langle \mu^\pm, \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \rangle = 0.$$

En el caso *i.*) del enunciado del teorema, la igualdad anterior contradice el hecho de que μ^\pm son medidas de probabilidad y $\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} V_0 \neq 0$, luego debe tenerse $z_+ = z_-$, y así ν es una medida de Dirac, por lo tanto, u es solución del sistema (1.52).

En el caso *ii.*) cada lado vertical y horizontal del rectángulo R debe poseer intersección con la línea $w = g(z)$. Por lo tanto, la línea debe ir de un vértice P de R , a su vértice opuesto Q . Así, μ^+ y μ^- deben ser medidas de Dirac concentradas en esos puntos, y como $\langle \mu^+, q - \lambda_1 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_1 \eta \rangle$ se tiene,

$$q(Q) - \lambda_1(Q)\eta(Q) = q(P) - \lambda_1(P)\eta(P), \quad (1.58)$$

para todo par e-f. De igual manera, cambiando z por w ,

$$q(Q) - \lambda_2(Q)\eta(Q) = q(P) - \lambda_2(P)\eta(P), \quad (1.59)$$

restando (1.59) de (1.58),

$$(\lambda_2(Q) - \lambda_1(Q))\eta(Q) = (\lambda_2(P) - \lambda_1(P))\eta(P),$$

para toda entropía η . De esta manera, si η es una función afín que se anula en Q , $(\lambda_2(P) - \lambda_1(P))\eta(P) = 0$ lo cual es una contradicción si $P \neq Q$, pues se supone que el sistema es estrictamente hiperbólico, así $P = Q$ y en el caso *ii.*) ν es una medida de Dirac y u es solución del sistema (1.52). \square

El teorema anterior garantiza entonces, en qué casos se tiene la convergencia de las soluciones aproximadas u^ϵ del sistema perturbado (1.6), al sistema hiperbólico (1.7).

CAPÍTULO 2

Aplicación del método de aproximación de flujo a dos sistemas del tipo de Temple.

En este capítulo se pretende mostrar la existencia de una solución débil global de los sistemas de leyes de conservación:

$$\begin{cases} u_t + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x = 0 \\ v_t - \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

y,

$$\begin{cases} u_t + (u^2 + v)_x = 0 \\ v_t + (uv)_x = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

aplicando el método de aproximación de flujo.

Se muestra la existencia de una solución débil global para cada sistema, por el método de viscosidad nula y luego se muestra que la solución puede ser obtenida por el límite de una combinación lineal de los dos sistemas.

Considérese primero el sistema (2.1),

$$f(u, v) = \left(\frac{2}{\sqrt{u^2 + 4v}}, \frac{-u}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right),$$

luego,

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{-2u}{D^3} & \frac{-4}{D^3} \\ \frac{-1}{D} + \frac{u^2}{D^3} & \frac{2u}{D^3} \end{bmatrix}$$

donde $D = \sqrt{u^2 + 4v}$, el polinomio característico para ∇f es $\lambda^2 - \frac{4}{D^4} = 0$, luego los auto-valores para el sistema (2.1) son $\lambda_1 = \frac{2}{D^2}$ y $\lambda_2 = -\frac{2}{D^2}$, por lo tanto, el sistema es estrictamente hiperbólico. Un auto-vector a derecha para λ_1 es $r_1 = (-1, \frac{u+D}{2})$, para λ_2 un auto-vector es $r_2 = (1, \frac{D-u}{2})$.

Además

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_1 \cdot r_1 &= \left(\frac{-4u}{D^4}, \frac{-8}{D^4}\right) \cdot \left(-1, \frac{u+D}{2}\right) \\ &= \frac{-4}{D^3} \neq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\lambda_2 \cdot r_2 &= \left(\frac{4u}{D^4}, \frac{8}{D^4}\right) \cdot \left(1, \frac{D-u}{2}\right) \\ &= \frac{4}{D^3} \neq 0,\end{aligned}$$

por lo que el sistema es genuinamente no lineal. Las invariantes de Riemann para el sistema (2.1) son las soluciones de las ecuaciones:

$$\nabla z \cdot r_2 = z_u + \frac{D-u}{2}z_v = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla w \cdot r_1 = -w_u + \frac{u+D}{2}w_v = 0. \quad (2.4)$$

al solucionar por el método de las características, se llega a que las invariantes de Riemann son,

$$z = u - D, \quad w = u + D. \quad (2.5)$$

Para la ecuación (2.2),

$$g(u, v) = (u^2 + v, uv),$$

luego,

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2u & 1 \\ v & u \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico para ∇g es $\lambda^2 - 3\lambda u - v + 2u^2 = 0$, así, los auto-valores para el sistema (2.2) son $\lambda'_1 = \frac{3u-D}{2}$ y $\lambda'_2 = -\frac{3u+D}{2}$, por lo tanto el sistema es estrictamente hiperbólico para $(u, v) \neq (0, 0)$, donde $D = \sqrt{u^2 + 4v}$. Un auto-vector a derecha para λ'_1 es $r'_1 = \left(-1, \frac{D+u}{2}\right)$ y un autovector a derecha para λ'_2 es $r'_2 = \left(1, \frac{D-u}{2}\right)$. Para estos se cumple,

$$\begin{aligned}\nabla\lambda'_1 \cdot r_1 &= \left(\frac{3u}{2} - \frac{u}{2D}, \frac{-1}{D}\right) \cdot \left(-1, \frac{u+D}{2}\right) \\ &= -2 \neq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\lambda'_2 \cdot r_2 &= \left(\frac{3u}{2} + \frac{u}{2D}, \frac{1}{D}\right) \cdot \left(1, \frac{D-u}{2}\right) \\ &= 2 \neq 0,\end{aligned}$$

luego, el sistema es genuinamente no lineal. Las invariantes de Riemann para el sistema (2.2) son las mismas que para el sistema (2.1), $z = u - D$, $w = u + D$.

2.1. Existencia de soluciones viscosas.

En esta sección se estudia la existencia de soluciones viscosas para el sistema hiperbólico (2.2), el segundo también es conocido como sistema de tipo LeRoux, las soluciones viscosas de este sistema han sido estudiadas antes en [14], de donde se seguirá parte del desarrollo. Para el sistema (2.2), considérese el dato inicial $(u_0(x), v_0(x))$ acotado y medible, y el sistema parabólico:

$$\begin{cases} u_t + (u^2 + v)_x &= \epsilon u_{xx} \\ v_t + (uv)_x &= \epsilon v_{xx}, \end{cases} \quad (2.6)$$

con dato inicial,

$$(u^\epsilon(x, 0), v^\epsilon(x, 0)) = (u^\epsilon(x), v_0^\epsilon(x)), \quad (2.7)$$

donde,

$$(u_0^\epsilon(x), v_0^\epsilon(x)) = (u_0(x), v_0(x) + \epsilon) * G^\epsilon,$$

y G^ϵ es un mollifier, entonces,

$$(u_0^\epsilon(x), v_0^\epsilon(x)) \in C^\infty \times C^\infty,$$

y

$$(u_0^\epsilon(x), v_0^\epsilon(x)) \longrightarrow (u_0(x), v_0(x)),$$

en casi toda parte cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Teorema 2.1. *Si el dato inicial $(u_0(x), v_0(x))$ es acotado y medible y $v_0(x) \geq 0$, entonces para $\epsilon > 0$ fijo, la solución viscosa $(u^\epsilon(x, t), v^\epsilon(x, t))$ del problema de Cauchy (2.6), (2.7), existe y satisface,*

$$\| u^\epsilon(x, t) \| \leq M_2, \quad 0 < c(\epsilon, t) \leq v^\epsilon(x, t) \leq M_2,$$

donde M_2 es una constante positiva independiente de ϵ y $c(\epsilon, t)$ es una función positiva, la cual podría tender a cero cuando ϵ tiende a cero o t a infinito.

Además, existe una subsucesión notada $(u^\epsilon(x, t), v^\epsilon(x, t))$, tal que,

$$(u^\epsilon(x, t), v^\epsilon(x, t)) \longrightarrow (u(x, t), v(x, t)), \quad \text{casi toda parte en } \Omega,$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ es un conjunto abierto y acotado y la función $\mathbf{u} = (u(x, t), v(x, t))$ es una solución de el problema de Cauchy (2.2) con dato inicial,

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)), \quad (v_0(x) \geq 0).$$

Demostración. Para las invariantes de Riemann (2.5),

$$\begin{aligned} w_u &= 1 + \frac{u}{D}, & w_v &= \frac{2}{D}, & w_{uu} &= \frac{4v}{D^3}, & w_{uv} &= \frac{-2u}{D^3}, & w_{vv} &= \frac{-4}{D^3}, \\ z_u &= 1 - \frac{u}{D}, & z_v &= \frac{-2}{D}, & z_{uu} &= \frac{-4v}{D^3}, & z_{uv} &= \frac{2u}{D^3}, & z_{vv} &= \frac{4}{D^3}. \end{aligned}$$

Entonces, multiplicando el sistema (2.6) por ∇w ,

$$w_u u_t + w_v v_t + w_u (2uu_x + v_x) + w_v (u_x v + uv_x) = \epsilon (w_u u_{xx} + w_v v_{xx}), \quad (2.8)$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 w(u, v)_t + \lambda_2 w(u, v)_x &= \epsilon(w(u, v)_{xx} - (w_{uu}u_x^2 + 2w_{uv}u_xv_x + w_{vv}v_x^2)) \\
 &= \epsilon w(u, v)_{xx} - \epsilon \left(\frac{4v}{D^3} u_x^2 - \frac{4u}{D^3} u_x v_x - \frac{4}{D^3} v_x^2 \right) \\
 &= \epsilon w(u, v)_{xx} - \frac{\epsilon}{D^3} ((D+u)u_x + 2v_x)((D-u)u_x - 2v_x) \\
 &= \epsilon w(u, v)_{xx} - \frac{\epsilon}{D} w(u, v)_x z(u, v)_x.
 \end{aligned}$$

De igual manera, multiplicando (2.6) por ∇z ,

$$z_u u_t + z_v v_t + z_u(2uu_x + v_x) + z_v(u_x v + uv_x) = \epsilon(z_u u_{xx} + z_v v_{xx}), \quad (2.9)$$

de donde,

$$\begin{aligned}
 z(u, v)_t + \lambda_1 z(u, v)_x &= \epsilon(z(u, v)_{xx} - (z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_xv_x + z_{vv}v_x^2)) \\
 &= \epsilon z(u, v)_{xx} + \epsilon \left(\frac{4v}{D^3} u_x^2 - \frac{4u}{D^3} u_x v_x - \frac{4}{D^3} v_x^2 \right) \\
 &= \epsilon z(u, v)_{xx} + \frac{\epsilon}{D^3} ((D+u)u_x + 2v_x)((D-u)u_x - 2v_x) \\
 &= \epsilon z(u, v)_{xx} + \frac{\epsilon}{D} w(u, v)_x z(u, v)_x.
 \end{aligned}$$

Si se considera (2.8) como una ecuación en la variable w y (2.9) como una ecuación en la variable z , se tiene,

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \epsilon w_{xx},$$

y,

$$z_t + \lambda_1 z_x \geq \epsilon z_{xx}.$$

Además, si el dato inicial satisface $w(u_0^\epsilon(x), v_0^\epsilon(x)) \leq M$ y $z(u_0^\epsilon, v_0^\epsilon) \geq -M$, aplicando el principio del máximo a cada una, se tiene $w(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq M$, $z(u^\epsilon, v^\epsilon) \geq -M$. Así,

$$\Sigma = \{(u, v) : w(u, v) \leq M, z(u, v) \geq -M, v \geq 0\},$$

es una región invariante para una constante M suficientemente grande y se tienen las estimativas en L^∞ ,

$$\|u^\epsilon(x, t)\| \leq M_2, \quad \|v^\epsilon(x, t)\| \leq M_2,$$

donde M_2 es una constante independiente de ϵ , además, por el teorema 1.1 $v^\epsilon \geq c(t, c_0, \epsilon) > 0$ si $v_0(x) \geq c_0 > 0$, donde c_0 es una constante positiva y $c(t, c_0, \epsilon)$ es una función que puede tender a cero cuando t tiende a infinito o ϵ tiende a cero.

La segunda parte del teorema, es consecuencia del teorema de DiPerna 1.22, para esto se necesita probar que los pares de entropía-flujo cumplen la propiedad (1.53), por lo cual primero se construyen los pares de entropía flujo, y luego se prueba su compacidad. \square

2.1.1. Pares de e-f.

Sean $\rho = D^3$, y $\theta = \frac{3}{2}u$, entonces para soluciones suaves, el sistema (2.2) es equivalente al sistema,

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho\theta)_x = 0 \\ \theta_t + \left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{3}{8}\rho^{\frac{2}{3}}\right)_x = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

La nueva función que denota el término conservativo en términos de ρ y θ es $g(\rho, \theta) = \left(\rho\theta, \frac{\theta^2}{2} + \frac{3}{8}\rho^{\frac{2}{3}}\right)$, y,

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \theta & \rho \\ \frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{3}} & \theta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

el par de e-f para este sistema debe satisfacer,

$$\begin{aligned} (q_\rho, q_\theta) &= (\eta_\rho, \eta_\theta) \begin{bmatrix} \theta & \rho \\ \frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{3}} & \theta \end{bmatrix} \\ &= (\theta\eta_\rho + \frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{3}}\eta_\theta, \rho\eta_\rho + \theta\eta_\theta), \end{aligned}$$

luego, eliminando q de las ecuaciones,

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{1}{4}\rho^{-\frac{4}{3}}\eta_{\theta\theta}. \quad (2.12)$$

Sea k una constante, considere $\eta = h(\rho)e^{k\theta}$, entonces, η resuelve la ecuación (2.12) si:

$$h''(\rho) = \frac{1}{4}k^2\rho^{-\frac{4}{3}}h(\rho).$$

Suponga $h(\rho) = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)$, con $s = \frac{3}{2}k\rho^{\frac{1}{3}}$. Entonces debe tenerse,

$$\phi'' - \left(1 + \frac{2}{s^2}\right)\phi = 0 \quad (2.13)$$

es decir, ϕ debe ser solución de la ecuación Fuchsiana (2.13). Aplicando el método de Frobenius una solución de la ecuación es,

$$\phi_1 = s^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}s^{2n} = s^2 g(s),$$

donde,

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}s^{2n}, \quad c_{2n} = \frac{c_{2(n-1)}}{(2+2n)(1+2n)-2}, \quad (2.14)$$

y c_0 es una constante positiva arbitraria. Sea ϕ_2 otra solución de (2.13) independiente de ϕ_1 , satisfaciendo $\phi_2 = \phi_1 P$. Entonces, P debe resolver,

$$P''\phi_1 + 2\phi_1'P' = 0,$$

así, $P' = (\phi_1)^{-2} = (s^4 g^2(s))^{-1}$, una función especial P que satisface dicha igualdad es dada por,

$$P = \int_s^\infty (\tau^4 g^2(\tau))^{-1} d\tau.$$

Por lo tanto,

$$\phi_2 = s^2 g(s) \int_s^\infty (\tau^4 g^2(\tau))^{-1} d\tau,$$

de lo anterior, $\phi_1(s) > 0$, $\phi_1'(s) > 0$ y $\phi_2(s) > 0$ para todo $s \geq 0$, además $\phi_2''(s) > 0$ y

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_2(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_2'(s) = 0,$$

por lo que $\phi_2'(s) < 0$.

Para las soluciones de la ecuación (2.13) se tiene el siguiente lema:

Lema 2.2. Sean $\phi_1(r), \phi_2(r)$ soluciones de la ecuación Fuchsiana,

$$\phi''(r) - \left(1 + \frac{c}{r^2}\right) \phi(r) = 0.$$

donde c es una constante.

Si $\phi_1(r) > 0, \phi_1'(r) > 0$ para $r > 0$, entonces,

$$\begin{cases} \frac{\phi_1'(r)}{\phi_1(r)} = 1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ c_1 \phi_1(r) e^{-r} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right), \end{cases}$$

cuando r se aproxima a infinito.

Si $\phi_2(r) > 0, \phi_2'(r) < 0$ para $r > 0$, entonces,

$$\begin{cases} \frac{\phi_2'(r)}{\phi_2(r)} = -1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \\ c_2 \phi_2(r) e^r = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right), \end{cases}$$

cuando r se aproxima a infinito, donde c_1, c_2 son dos constantes positivas adecuadas.

La demostración de este resultado puede verse en [14].

Para construir el par de entropía flujo considérense los autovalores para el sistema (2.10),

$$\lambda_1 = \theta - \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2}, \quad \lambda_2 = \theta + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2} \quad (2.15)$$

con respectivos autovectores derechos, $r_1 = \left(1, -\frac{\rho^{-\frac{2}{3}}}{2}\right)$ y $r_2 = \left(1, \frac{\rho^{-\frac{2}{3}}}{2}\right)$ las invariantes de Riemann satisfacen,

$$z_\rho + \frac{\rho^{-\frac{2}{3}}}{2} z_\theta = 0, \quad (2.16)$$

$$w_\rho - \frac{\rho^{-\frac{2}{3}}}{2} w_\theta = 0. \quad (2.17)$$

Aplicando el método de características, las invariantes de Riemann para (2.10) son,

$$z = \theta - \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}}, \quad w = \theta + \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}}, \quad (2.18)$$

Considérense el par de e-f (η, q) como funciones de (w, z) , entonces,

$$\begin{aligned} (q_\rho, q_\theta) &= q_w \nabla w(\rho, \theta) + q_z \nabla z(\rho, \theta) \\ &= \nabla \eta(\rho, \theta) \nabla f(\rho, \theta) \\ &= (\eta_w \nabla w(\rho, \theta) + \eta_z \nabla z(\rho, \theta)) \nabla f(\rho, \theta), \end{aligned}$$

como los gradientes de las invariantes de Riemann son auto-vectores a izquierda,

$$q_w \nabla w(\rho, \theta) + q_z \nabla z(\rho, \theta) = \lambda_2 \eta_w \nabla w(\rho, \theta) + \lambda_1 \eta_z \nabla z(\rho, \theta),$$

multiplicando por $r_1(\rho, \theta)$ y $r_2(\rho, \theta)$, se tienen las respectivas ecuaciones,

$$q_w = \lambda_2 \eta_w, \quad q_z = \lambda_1 \eta_z. \quad (2.19)$$

Por(2.18),

$$z + w = 2\theta \quad (2.20)$$

$$z - w = -3\rho^{\frac{1}{3}}, \quad (2.21)$$

de donde, $\theta_w = \frac{1}{2} = \theta_z$, $\rho_w = \rho^{\frac{2}{3}} = -\rho_z$. Entonces,

$$\begin{cases} q_w = \frac{1}{2}q_\theta + \rho^{\frac{1}{3}}q_\rho, & q_z = \frac{1}{2}q_\theta - \rho^{\frac{2}{3}}q_\rho \\ \eta_w = \frac{1}{2}\eta_\theta + \rho^{\frac{2}{3}}\eta_\rho & \eta_z = \frac{1}{2}\eta_\theta - \rho^{\frac{2}{3}}\eta_\rho, \end{cases}$$

de la ecuación anterior, junto con (2.19) y (2.20),

$$q_\theta = q_w + q_z = \theta \eta_\theta + \rho \eta_\rho. \quad (2.22)$$

Suponga $\eta_k = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)e^{k\theta}$, $\eta_{-k} = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)e^{-k\theta}$ entonces, por (2.22),

$$\begin{aligned} (q_k)_\theta &= \theta(\eta_k)_\theta + \rho(\eta_k)_\rho \\ &= \theta k \eta_k + \frac{1}{3}\eta_k + \frac{k\rho^{\frac{1}{3}}\phi'(s)\eta_k}{2\phi(s)}, \end{aligned}$$

de donde,

$$q_k = \eta_k \left(\theta - \frac{2}{3k} + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}\phi'(s)}{2\phi(s)} \right),$$

análogamente,

$$q_{-k} = \eta_{-k} \left(\theta + \frac{2}{3k} - \frac{\rho^{\frac{1}{3}}\phi'(s)}{2\phi(s)} \right).$$

Sea $\eta_k^i = \rho^{\frac{1}{3}} \phi_i(s) e^{k\theta}$, para $i = 1, 2$. Como $\phi_1'(s) > 0$, $\phi_1 > 0$ para $s \geq 0$, del lema 2.2 se sigue que,

$$\begin{aligned} \eta_k^1 &= \rho^{\frac{1}{3}} \phi_1(s) e^{k\theta} \\ &= \rho^{\frac{1}{3}} \phi_1(s) e^{k(w - \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}})} \\ &= \rho^{\frac{1}{3}} e^{kw} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right), \end{aligned}$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$, su flujo asociado es,

$$q_k^1 = \eta_k^1 \left(\theta - \frac{2}{3k} + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2} \left(\frac{\phi_1'(s)}{\phi_1(s)} - 1 \right) + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2} \right) = \eta_k^1 \left(\lambda_2 - \frac{2}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right),$$

en cualquier subconjunto compacto $s > 0$. Similarmente,

$$\begin{aligned} \eta_k^2 &= \rho^{\frac{1}{3}} \phi_2(s) e^{k\theta} \\ &= \rho^{\frac{1}{3}} \phi_2(s) e^{k(z + \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}})} \\ &= \rho^{\frac{1}{3}} e^{kz} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right), \end{aligned}$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$, con flujo asociado,

$$q_k^2 = \eta_k^2 \left(\lambda_1 - \frac{2}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right).$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$.

$$\eta_{-k}^1 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{-kw} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right),$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$, y su flujo asociado,

$$q_{-k}^1 = \eta_{-k}^1 \left(\lambda_1 + \frac{2}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right).$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$. Por último,

$$\eta_{-k}^2 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{-kw} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right),$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$, y su flujo asociado es,

$$q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2 \left(\lambda_2 + \frac{2}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right),$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$. De esta manera quedan construidos los pares de entropía-flujo para el sistema de ecuaciones (2.2).

2.1.2. Compacidad de $\eta_t + q_x$ en H_{loc}^{-1} .

El objetivo principal de esta sección es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Para los pares de entropía-flujo del tipo de Lax construidos en la sección anterior,*

$$\eta(u^\epsilon, v^\epsilon)_t + q(u^\epsilon, v^\epsilon)_x,$$

es compacto en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ con respecto a las soluciones viscosas (u^ϵ, v^ϵ) de (2.6).

Demostración. El sistema (2.2) tiene una entropía convexa $\eta^*(u, v) = \frac{u^2}{2} + \int_0^v \log \tau d\tau$, con flujo correspondiente, $q^*(u, v) = \frac{2u^3}{3} + uv \log v$. Multiplicando la primera ecuación en (2.6) por u y la segunda por $\log v$ y sumando ambos resultados,

$$\eta_t + q_x = \epsilon \eta_{xx} - \epsilon \left(u_x^2 + \frac{v_x}{v} \right).$$

Sea K un conjunto compacto, y sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ una función test, con $\phi|_K = 1$, $0 \leq \phi \leq 1$, $S = \text{Supp} \phi$ y $K \subset S \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon \left((u_x^\epsilon)^2 + \frac{v_x^\epsilon}{v^\epsilon} \right) \phi dx dt &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\epsilon \eta_{xx} - \eta_t - q_x) \phi dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon \eta \phi_{xx} + \eta \phi_t + q \phi_x dx dt \\ &\leq M(\phi), \end{aligned}$$

así, $\epsilon^{\frac{1}{2}} u_x^\epsilon$ y $\sqrt{\epsilon \frac{v_x^\epsilon}{v^\epsilon}}$ son uniformemente acotadas en $L_{loc}^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, solo se probará el teorema anterior para los pares de e-f (η_k^2, q_k^2) . Un método similar es usado para (η_k^1, q_k^1) , (η_{-k}^1, q_{-k}^1) , (η_{-k}^2, q_{-k}^2) .

Multiplicando (2.6) por $\nabla \eta(u, v)$ se tiene,

$$\eta_t + q_x = \epsilon \eta_{xx} - \epsilon (\eta_{uu} u_x^2 + 2\eta_{uv} u_x v_x + \eta_{vv} v_x^2), \quad (2.23)$$

Como

$$\int_s^\infty \frac{d\tau}{\tau^4 g^2(\tau)} = O\left(\frac{1}{s^3}\right),$$

cuando s se aproxima a cero, para cualquier $k > 0$ fijo, se tiene que

$$\eta_k^2 = \frac{2}{3k} s^3 g(s) \int_s^\infty \frac{d\tau}{\tau^4 g^2(\tau)} e^{k\theta},$$

y q_k^2 son uniformemente acotadas en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Así $(\eta_k^2(u, v))_t + (q_k^2(u, v))_x$ es acotado en $W^{-1, \infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Para η_k^2 se tiene,

$$\eta_k^2 = \frac{2e^{k\theta}}{9k} \left(\frac{1}{g(s)} - 2s^3 g(s) \int_s^\infty \frac{g'(\tau) d\tau}{\tau^3 g^3(\tau)} \right),$$

y como $\frac{g'(s)}{s} \leq g(s)$,

$$\int_s^\infty \frac{g'(\tau)d\tau}{\tau^3 g^3(\tau)} = O\left(\frac{1}{s}\right),$$

cuando s tiende a cero. Así, $(\eta_k^2)_s$ y $(\eta_k^2)_\theta$, son acotadas en $\mathbb{R} \times [0, T]$ para $T > 0$, y $(\eta_k^2)_s = O(s)$, cuando s se aproxima a cero. Ahora,

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{3ku}{2(u^2 + 4v)^{1/2}}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = 3k(u^2 + 4v)^{-1/2},$$

entonces, $\epsilon(\eta_k^2)_x = O(\epsilon(|u_x| + |v_x|))$. Como $\epsilon^{\frac{1}{2}}u_x^\epsilon$ y $\sqrt{\epsilon \frac{v_x^\epsilon}{v^\epsilon}}$ son uniformemente acotadas en $L_{loc}^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, $\epsilon(\eta_k^2)_{xx}$ es compacto en $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. La prueba quedará completa debido al lema de Murat, si se muestra que la parte derecha de (2.23) es acotada en $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Sean $I = s^3 g(s) \int_s^\infty \frac{g'(\tau)d\tau}{\tau^3 g^3(\tau)}$ e $I_1 = \frac{2e^{k\theta}}{kg(s)}$, la cual es uniformemente acotada en C^2 , entonces,

$$\eta_k^2 = I_1 - \frac{4}{k}e^{k\theta}I,$$

y el final de la prueba del teorema equivale a mostrar que,

$$L = \epsilon(I_{uu}(u_x)^2 + 2I_{uv}u_x v_x + I_{vv}(v_x)^2)$$

es acotada en $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Sea $L = L_1 + L_2$, donde,

$$\begin{cases} L_1 = \epsilon I_{ss}((s_u)^2 u_x^2 + 2s_u s_v u_x v_x + (s_v)^2 v_x^2) \\ L_2 = \epsilon I_s(s_{uu}u_x^2 + 2s_{uv}u_x v_x + s_{vv}v_x^2). \end{cases}$$

como $g'(s)/s \leq g(s)$, $I_s = O(s)$ cuando s se aproxima a cero y I_{ss} es acotado, L_1, L_2 son controlados por $\epsilon \left(O\left(\frac{v_x^2}{|v|}\right) + O(u_x^2) \right)$, por lo tanto son acotados en $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. \square

Con esta demostración también se termina la prueba del teorema 2.1, debido al teorema de DiPerna 1.22.

Ahora, al igual que para la ecuación (2.2), para soluciones suaves el sistema (2.1) es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \rho_t - 4\theta_x = 0 \\ \theta_t + 3\left(\rho^{\frac{-1}{3}}\right)_x = 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

donde, $\rho = D^3$, $\theta = \frac{3}{2}u$, la nueva función que denota el término conservativo en términos de ρ y θ es $f(\rho, \theta) = \left(-4\theta, 3\rho^{\frac{-1}{3}}\right)$, y,

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -\rho^{\frac{-4}{3}} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

el par de e-f para este sistema debe satisfacer,

$$\begin{aligned} (q_\rho, q_\theta) &= (\eta_\rho, \eta_\theta) \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -\rho^{-\frac{4}{3}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-\eta_\theta \rho^{-\frac{4}{3}}, -4\eta_\rho), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} q_{\rho\theta} &= -\eta_{\theta\theta} \rho^{-\frac{4}{3}} \\ q_{\theta\rho} &= -4\eta_{\rho\rho}, \end{aligned}$$

así,

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{1}{4} \rho^{-\frac{4}{3}} \eta_{\theta\theta},$$

por lo tanto los dos sistemas (2.1) y (2.2) tienen las mismas entropías. Aplicando compacidad compensada (teorema 1.22), se obtiene la existencia de soluciones débiles globales para el problema de Cauchy (2.2), (2.7) en el plano superior ($v \geq 0$) y el problema de Cauchy (2.1),(2.7) en la región $v \geq v_0 > 0$, para una constante adecuada v_0 .

2.2. Método de aproximación de flujo aplicado a los sistemas del tipo de Temple (2.1),(2.2).

En esta sección se muestra la existencia de solución débil global para los sistemas 2.1, 2.2 por medio de la aproximación de flujo, para lo cual se utiliza una combinación lineal de los dos sistemas, este método fue estudiado en [15]. Considérese la combinación lineal de los sistemas, (2.1) y (2.2):

$$\begin{cases} u_t + 2\delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x + \delta_2 (u^2 + v)_x = 0, \\ v_t - \delta_1 \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x + \delta_2 (uv)_x = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

donde δ_1, δ_2 son dos perturbaciones positivas de aproximación de flujo. La función que denota el término conservativo para dicho sistema es,

$$f(u, v) = \left(\frac{2\delta_1}{D} + \delta_2(u^2 + v), -\frac{\delta_1 u}{D} + \delta_2 uv \right),$$

por lo tanto,

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{-2u\delta_1}{D^3} + 2u\delta_2 & \frac{-4\delta_1}{D^3} + \delta_2 \\ \frac{-\delta_1}{D} + \frac{u^2\delta_1}{D^3} + v\delta_2 & \frac{2u\delta_1}{D^3} + u\delta_2 \end{bmatrix}$$

Los auto-valores del sistema (2.26) son soluciones de la ecuación característica,

$$\lambda^2 - 3u\delta_2\lambda - \frac{4(\delta_1)^2}{D^4} + \frac{2\delta_1\delta_2}{D} + (\delta_2)^2(2u^2 - v) = 0, \quad (2.27)$$

así, los auto-valores del sistema son,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2\delta_1}{D^2} + \delta_2 \left(\frac{3u}{2} - \frac{D}{2} \right), \\ \lambda_2 = -\frac{2\delta_1}{D^2} + \delta_2 \left(\frac{3u}{2} + \frac{D}{2} \right), \end{cases}$$

es decir, el sistema es estrictamente hiperbólico, los correspondientes auto-vectores son,

$$\begin{cases} r_1 = \left(-1, \frac{u+D}{2} \right), \\ r_2 = \left(1, \frac{D-u}{2} \right). \end{cases} \quad (2.28)$$

para estos autovectores,

$$\begin{cases} \nabla \lambda_1 \cdot r_1 = \left(\frac{-4u\delta_1}{D^4} + \frac{3\delta_2}{2} - \frac{u\delta_2}{2D}, \frac{-8\delta_1}{D^4} - \frac{\delta_2}{D} \right) \cdot \left(-1, \frac{u+D}{2} \right) = -\frac{4\delta_1}{D^3} - 2\delta_2, \\ \nabla \lambda_2 \cdot r_2 = \left(\frac{4u\delta_1}{D^4} + \frac{3\delta_2}{2} + \frac{u\delta_2}{2D}, \frac{8\delta_1}{D^4} + \frac{\delta_2}{D} \right) \cdot \left(1, \frac{D-u}{2} \right) = \frac{4\delta_1}{D^3} + 2\delta_2 \end{cases}$$

luego, el sistema es genuinamente no lineal en la región $v \geq v_0 > 0$. Ahora,

Teorema 2.4. *Considere el sistema (2.26) con dato inicial,*

$$(u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad (2.29)$$

acotado y medible y $v_0(x) \geq v_0 > 0$, para una constante apropiada v_0 . Entonces, para cualquier δ_1, δ_2 fijos, la solución débil global $(u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2})$ de el problema de Cauchy (2.26), (2.29) existe. Además, para δ_1 fijo (o δ_2), existe una subsucesión $(u^{\delta_{2n}}, v^{\delta_{2n}})$ (o $(u^{\delta_{1n}}, v^{\delta_{1n}})$) de $(u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2})$, que converge puntualmente cuando δ_{2n} (o δ_{1n}) tiende a cero a la solución de el problema de Cauchy (2.1) (o (2.2)) con dato inicial (2.29).

Demostración. Para la prueba del teorema se utiliza el método de viscosidad nula junto con el argumento de compacidad compensada dado por DiPerna.

Considérese el sistema parabólico de (2.26), sumando a la derecha un término de viscosidad,

$$\begin{cases} u_t + 2\delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x + \delta_2 (u^2 + v)_x = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t - \delta_1 \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x + \delta_2 (uv)_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \quad (2.30)$$

con dato inicial (2.29) por los cálculos realizados anteriormente, se sabe que los dos auto-valores del sistema son,

$$\lambda_1 = \frac{2\delta_1}{D^2} + \delta_2 \left(\frac{3u-D}{2} \right), \quad \lambda_2 = -\frac{2\delta_1}{D^2} + \delta_2 \left(\frac{3u+D}{2} \right),$$

con correspondientes auto-vectores, (2.28) e invariantes de Riemann (2.5).

Para cualquier constante c las curvas $w = c$ o $z = c$ son líneas rectas en el plano (u, v) , entonces, es posible encontrar constantes adecuadas c_i, d_i con $i = 1, 2$, tales que, $\Sigma = \{(u, v) : c_1 \leq w \leq c_2, d_1 \leq z \leq d_2\}$ forma una región acotada, invariante. Además, en

esta región $v \geq v_1 > 0$ para una constante adecuada $v_1 \leq v_0$.

El sistema (2.26) es estrictamente hiperbólico y genuinamente no lineal, y las soluciones del sistema parabólico (2.30) $(u^{\epsilon, \delta_1, \delta_2}, v^{\epsilon, \delta_1, \delta_2})$ son uniformemente acotadas, entonces por el teorema (1.22) se tiene la convergencia,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u^{\epsilon, \delta_1, \delta_2}, v^{\epsilon, \delta_1, \delta_2}) = (u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2}),$$

en casi toda parte en cualquier conjunto compacto en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, donde el límite $(u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2})$ es una solución débil del sistema (2.26).

Fije δ_1 (o δ_2). Para las funciones generalizadas $(u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2})$, es posible reescribir el sistema (2.26) como;

$$\begin{cases} u_t + 2\delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x = -\delta_2(u^2 + v)_x, \\ v_t - \delta_1 \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x = -\delta_2(uv)_x. \end{cases} \quad (2.31)$$

El lado izquierdo de (2.31) (sistema (2.1)) es estrictamente hiperbólico, y genuinamente no lineal y las funciones $(u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2})$ son uniformemente acotadas, independientemente de δ_1, δ_2 , por lo tanto, nuevamente por el teorema de DiPerna 1.22,

$$\lim_{\delta_2 \rightarrow 0} (u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2}) = (u^{\delta_1}, v^{\delta_1}),$$

en casi toda parte para cualquier conjunto compacto en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, donde el límite $(u^{\delta_1}, v^{\delta_1})$ es una solución débil del sistema (2.1). Para encontrar la solución del sistema (2.2) se considera el sistema (2.26) escrito en la forma,

$$\begin{cases} u_t + \delta_2(u^2 + v)_x = -2\delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x, \\ v_t + \delta_2(uv)_x = \delta_1 \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 4v}} \right)_x. \end{cases} \quad (2.32)$$

y de igual forma se tiene que,

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} (u^{\delta_1, \delta_2}, v^{\delta_1, \delta_2}) = (u^{\delta_2}, v^{\delta_2}),$$

es una solución débil de (2.2). □

Bibliografía

- [1] A. Heibig, *Existence and Uniqueness of Solutions for some Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. **126** (1994), 79–101.
- [2] B. Dacorogna, *Weak continuity and weak lower semicontinuity of non-linear functionals*, Lecture notes in math, 922, Springer- Velarg, NY, 1982.
- [3] B. Temple, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds*, Trans. of Am. Math. Soc. **280** (1983), 781–795.
- [4] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Grundlehren der mathematischen wissenschaften, Vol. 325, Springer Velarg, NY, 2001.
- [5] F. Murat, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **5** (1978), 489–507.
- [6] H. Frid, *Compacidade compensada aplicada às leis de conservação*, 1991.
- [7] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer- Velarg, NY, 1983.
- [8] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt symposium, Vol. 4, ed. R. J. Knops, Pitman Press, London., 1979.
- [9] M. Tao, J. Yan, Z. Cheng, *Conservation laws i: Viscosity solution*, Revista Colombiana de Matemáticas. **41** (2001), 81–90.
- [10] ———, *Conservation laws ii: Weak solution*, Revista Colombiana de Matemáticas. **41** (2001), 91–106.
- [11] H. Holden , N.H. Risebro, *Front tracking for hyperbolic conservation laws*, Springer-Velarg, N.Y., 2002.
- [12] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537–566.
- [13] ———, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [14] Y. G. Lu, *Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method*, Chapman & Hall CRC, NY, 2003.

-
- [15] Y. G. Lu , I. Mantilla , L. Rendón , D. Zheng, *A new application of the flux approximation method on hyperbolic conservation systems* , Advances in Pure Mathematics **3** (2013), 689–702.