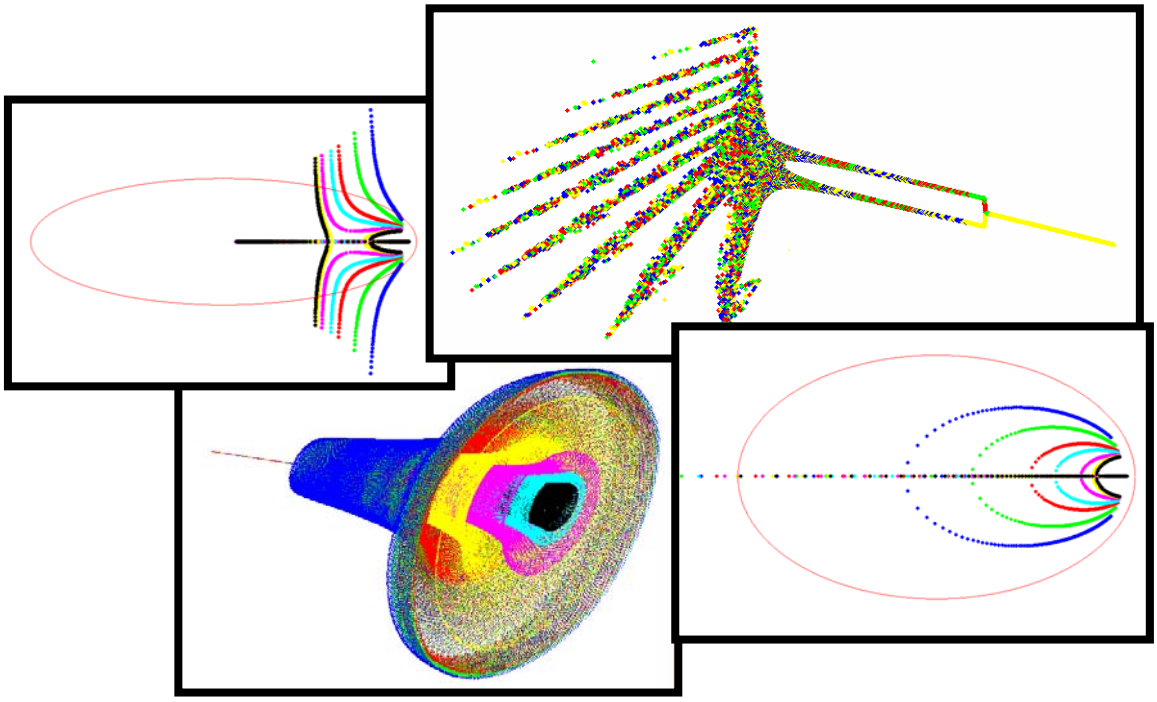
ANÁLISIS DE BIFURCACIONES EN SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN USANDO PWM Y PROMEDIADO CERO DE LA DINÁMICA DEL ERROR

John Alexander Taborda Giraldo

Directora: Dra. Fabiola Angulo García



Maestría en Ingeniería – Automatización Industrial
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Colombia
2006

Análisis de Bifurcaciones en Sistemas de Segundo Orden Usando PWM y Promediado Cero de la Dinámica del Error.

John Alexander Taborda Giraldo

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

Departamento de Electricidad, Electrónica y Computación

Manizales, Colombia

2006

Análisis de Bifurcaciones en Sistemas de Segundo Orden Usando PWM y Promediado Cero de la Dinámica del Error.

John Alexander Taborda Giraldo

Ingeniero Electrónico

Tesis presentada en cumplimiento a los requerimientos

para optar por el título de

Magíster en Ingeniería - Automatización Industrial

Directora

Dra. Fabiola Angulo Garcia

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales

Facultad de Ingeniería y Arquitectura

Departamento de Electricidad, Electrónica y Computación

Manizales, Colombia

2006

A mis padres Gladys y Henry por toda una vida llena de amor y dedicación hacia sus hijos.

A mi hermana Lina María por su compañía, ternura y comprensión.

Agradecimientos

AGRADEZCO A DIOS POR TODAS SUS BENDICIONES...

Gracias a Dios por unos padres maravillosos. Ellos me han dado mucho amor, me han enseñado valores y siempre me han brindado su respaldo. Los quiero mucho, les debo lo que soy y son mi motivación para salir adelante.

Gracias a Dios por una hermanita hermosa. Ella llena mi vida de amor y felicidad. Su amistad y confianza son muy importantes para mi.

Gracias a Dios por una directora inigualable. La profesora Fabiola se ha convertido en una persona muy especial en mi vida. Sus conocimientos y experiencia han enriquecido y facilitado el desarrollo del trabajo. Sus consejos me han servido mucho en mi vida personal y profesional. Su calidad humana, su voluntad de ayuda, su paciencia y dedicación me hacen admirarla, valorarla y respetarla. Su confianza y las oportunidades que me ha brindado me motivan cada día a realizar mejor mi trabajo y a estar por siempre agradecido con ella.

Gracias a Dios por personas como el profesor Gerard Olivar Tost. Su sencillez, tranquilidad y amabilidad lo hacen un gran ser humano y un gran ejemplo. Su pedagogía y sus asesorías fueron muy útiles en el desarrollo del trabajo. Es un orgullo y un privilegio tenerlo como profesor de la Universidad Nacional de Colombia.

Gracias a Dios por un entorno agradable, ameno y tranquilo, rodeado de familiares, compañeros, amigos y en general personas que me entienden, me respetan y

me animan a ser cada día mejor.

Por último, ***Gracias a Dios por la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales***. En ella he podido realizar mis estudios de pregrado y posgrado, con un buen nivel académico y con buenas facilidades de financiación. Además he tenido el respaldo de sus **grupos de trabajo académico PCI y ABC Dynamics** y la ayuda económica del proyecto de investigación: **Automatización y Control de Equipos en el Laboratorio de Procesos Productivos de la Universidad Nacional de Colombia**.

Índice general

Índice general I

Índice de figuras V

Índice de tablas XI

Resumen XIII

Abstract XIV

Notacion XV

Glosario XVII

1. Introducción 1

1.1. Motivación 2

1.2. Estado del Arte 4

1.3. Organización del Trabajo 6

2. Marco Conceptual General 8

2.1. Generalidades 8

2.2. Definición del Modelo 10

2.2.1. ELEMENTO NO LINEAL: Interruptor. 12

2.2.2. ALGORITMO DE CONTROL: Promediado cero de la dinámica del error o ZAD (Zero Average Dynamic). 13

2.2.3. ELEMENTO LINEAL: Sistema Adimensional de Segundo Orden con dos grados de libertad (γ, β) 14

2.3. Formulación del Problema 18
2.4. Desempeño del sistema con PWMCD y ZAD 21
2.4.1. Regulación o Estabilización 21
2.4.2. Rastreo o Seguimiento 24
2.5. Control de Caos 28
2.5.1. Control de caos con TDAS 29
2.5.2. Control de caos con FPIC 31
2.6. Disipación de energía en el sistema 34
2.7. Conclusiones y Observaciones 38

3. Análisis de Estabilidad de la Órbita 1T-Periódica 40

3.1. Análisis de Estabilidad Absoluta: Comportamiento del Sistema en Estado Estacionario 40
3.1.1. Puntos Fijos: Ciclo de Trabajo en Estado Estacionario 41
3.1.2. Estabilidad de los Puntos Fijos 44
3.2. Análisis de Estabilidad Relativa: Comportamiento del Sistema en Estado Transitorio 62
3.2.1. Modelos Linealizados PWMCD basado en ZAD y control FPIC 63
3.2.2. Lugar Geométrico de las Raíces del Sistema Linealizado 66
3.2.3. Análisis de Estabilidad Relativa en el Sistema Sin Tiempo de Atraso . . 67
3.2.4. Análisis de Estabilidad Relativa en el Sistema con un Periodo de Atraso 74
3.2.5. Análisis de Estabilidad Relativa con k_s variable 79
3.2.6. Análisis de Estabilidad Relativa con n variable 82
3.2.7. Análisis de Estabilidad Relativa con β variable 85
3.3. Conclusiones 85

4. Estabilidad y Existencia de Órbitas pT-Periódicas 90

4.1. Determinación de la estabilidad de órbitas pT-periódicas 90
4.2. Existencia de órbitas pT-periódicas 97
4.3. De la periodicidad al caos en sistemas de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error 98
4.3.1. Transición órbita $1T$-periódica a órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados 99

4.3.2. Transición órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados a órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado 103
4.3.3. Transición órbita $2T$-periódica ($d-T$) a órbita $4T$-periódica (d_1-T-d_2-T) 106
4.3.4. Transición órbita $4T$-periódica (d_1-T-d_2-T) a órbita $8T$-periódica ($d_1-T-d_2-T-d_3-T-d_4-T$) 109
4.3.5. Transición al caos 111
4.4. Control de órbitas pT-periódicas en sistemas de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error con control FPIC 112
4.5. Análisis Numérico de órbitas pT-periódicas en el sistema *PWMCD-ZAD* con tiempo de atraso ($n > 1$) 120
4.5.1. Existencia de órbitas pT-periódicas en el sistema *PWMCD-ZAD* con tiempo de atraso ($n \geq 1$) 121
4.5.2. Análisis de Órbitas pT-periódicas en el sistema con un periodo de atraso ($n = 1$) 123
4.5.3. Análisis de Órbitas pT-periódicas para ($n > 1$) 135
4.6. Conclusiones 137
4.7. Observaciones 139

5. Principales Conclusiones y Trabajo Futuro 141
5.1. Principales Conclusiones 141
5.1.1. Aportes en la Investigación 141
5.1.2. DISIPACIÓN DE ENERGÍA EN EL SISTEMA: Se determinó cuantitativamente la influencia de los elementos disipativos de energía en el sistema. 142
5.1.3. TIEMPO DE ATRASO: Se garantizó la estabilización de la órbita $1T$-periódica para cualquier periodo de atraso. 143
5.1.4. MODELOS LINEALIZADOS: Se estableció una relación directa entre los sistemas de estructura variable con los sistemas lineales. 144
5.1.5. ESTABILIDAD RELATIVA: Se estudió la evolución de las dinámicas transitorias a medida que se varían los parámetros de control del sistema. 145

5.1.6. TRANSICIÓN AL CAOS: Se reconstruyó la ruta al caos por doblamiento de periodo del sistema sin tiempo de atraso mediante el análisis de la estabilidad y existencia de órbitas pT-periódicas. 145
5.1.7. ÓRBITAS PERIÓDICAS: Se estudió el comportamiento dinámico del sistema con tiempo de atraso mediante el análisis de la existencia de órbitas pT-periódicas. 146
5.2. Trabajo Futuro 147
5.2.1. Modelado 147
5.2.2. Análisis 149
5.2.3. Control 168
5.2.4. Implementación 173

Bibliografía **175**

Índice de figuras

2.1. Diagrama de bloques generalizado. Descomposición del sistema dinámico en sus componentes lineal, no lineal y de control. 10
2.2. Sistema de segundo orden, γ y β son constantes, x_1 y x_2 son variables de estado y u es la entrada. 11
2.3. Elemento no lineal que modula la señal de entrada del sistema de segundo orden. 11
2.4. Diagrama de bloques especializado. Descomposición del sistema dinámico a analizar en sus componentes lineal, no lineal y de control específicas. 12
2.5. Diagrama de bloques elemento no lineal: Compuesto por un modulador de ancho de pulso centrado (PWMC) y de un elemento de atraso en el tiempo. . . 13
2.6. Señal del Modulador por Ancho de Pulso (PWM) y su valor promedio 14
2.7. Posibles configuraciones de la referencia y la señal de control en el bloque ZAD 15
2.8. Esquema generalizado 1 del elemento lineal (Primal) 17
2.9. Esquema generalizado 2 del elemento lineal (Dual) 18
2.10. Regulación. Comportamiento de la variable de estado x_1 x_1 para $n = 0$ y $n = 1$ 22
2.11. Regulación. Comportamiento de la variable de estado x_2 x_2 para $n = 0$ y $n = 1$ 23
2.12. Regulación. Comportamiento del ciclo de trabajo para $n = 0$ y $n = 1$ 24
2.13. Regulación. Comportamiento del sistema $n = 0$ y $n = 1$ (Error) 25
2.14. Rastreo. Comportamiento de la variable de estado x_2 para $n = 0$ y $n = 1$ . . . 26
2.15. Rastreo. Comportamiento del ciclo de trabajo ($d(\%)$) para $n = 0$ y $n = 1$ . . . 27
2.16. Error de Rastreo. Comportamiento del sistema $n = 0$ y $n = 1$ (Error) 28
2.17. Diagrama de bloques del sistema controlado con TDAS. 29
2.18. Comportamiento del ciclo de trabajo, en tareas de regulación y rastreo con $n = 0$, $k_s = 0{,}5$. Sin y con control TDAS 30

2.19. Diagrama de bloques del sistema controlado con FPIC. 32
2.20. Comportamiento del ciclo de trabajo, en tareas de regulación y rastreo con $n = 0$, $k_s = 0{,}5$. Sin y con control FPIC 33
2.21. Comportamiento del error de regulación y de rastreo del sistema $n = 1$ a $n = 6$, $k_s = 4{,}5$, con control FPIC 34
2.22. Error de regulación en el sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β, x_{1ref} . 36
2.23. Error de rastreo en el sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β, A_{1ref} . . . 37

3.1. Ciclo de trabajo en el sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$ (regulación). Variaciones en γ, β, x_{1ref} 43
3.2. Transformaciones: Exponentes de Floquet $< - >$ Multiplicadores Característicos $< - >$ Exponentes de Lyapunov. 45
3.3. Representación Gráfica de la discontinuidad PWMC en función de n. 49
3.4. Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema sin tiempo de atraso . . . 54
3.5. Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema con un periodo de atraso. 54
3.6. Variación de los exponentes de Floquet (n=1,2,3,...,6)- Parámetro de Bifurcación k_s 55
3.7. Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema sin tiempo de atraso con control FPIC (n=0, k_s=4.5, N:variable) 56
3.8. Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema sin tiempo de atraso con control FPIC (n=0, k_s=0.125, N:variable) 56
3.9. Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema con un periodo de atraso con control FPIC (n=1, k_s=4.5, N:variable) 57
3.10. Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema con un periodo de atraso con control FPIC (n=1, k_s=0.125, N:variable) 58
3.11. Variación de los exponentes de Floquet (n=1,2,3,...,6)- Parámetro de Bifurcación N ($k_s = 4{,}5$) 58
3.12. Valor crítico de estabilidad $n = 0$, $N = 0$, $\gamma = 0{,}35$, $x_{1ref} = 0{,}8$. Variaciones en β 61
3.13. Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema sin atraso y control FPIC. ($k_s = 4{,}5, n = 0$) 68

3.14. Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema sin atraso y control FPIC ($k_s = 4{,}5, n = 0$), y regiones de ζ constante y ω_n constante 69
3.15. Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema sin atraso y control FPIC) 70
3.16. Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema sin atraso y control FPIC), y regiones de ζ constante y ω_n constante 71
3.17. Respuestas al escalón unitario sistema linealizado en tiempo discreto PWMC-ZAD-FPIC (n=0, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=0,1,3,5,7,9,15). 73
3.18. Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema con un periodo de atraso y control FPIC. ($k_s = 4{,}5, n = 1$) 75
3.19. Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema con un periodo de atraso y control FPIC. ($k_s = 4{,}5, n = 1$) 75
3.20. Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema con un periodo de atraso y control FPIC) 76
3.21. Respuestas al escalón unitario sistema linealizado en tiempo discreto PWMCD-ZAD-FPIC (n=1, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=2,4,6,7,8,10,15). 78
3.22. Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema sin tiempo de atraso y control FPIC (k_s variable) 80
3.23. Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema con un periodo de atraso y control FPIC (k_s variable) 81
3.24. Análisis de Estabilidad Relativa: Sobreimpulso Máximo $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $\beta = 0$, n varios 83
3.25. Análisis de Estabilidad Relativa: Tiempo de establecimiento $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $\beta = 0$, n varios 83
3.26. Respuestas transitorias modelos linealizados (N=15, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, n=0,1,...,6)) 87
3.27. Comparación de las respuestas transitorias reales y de los modelos linealizados del sistema PWMC-ZAD-FPIC (N=25, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, n=0,1,...,6)) . . 88
3.28. Análisis de Estabilidad Relativa: Sobreimpulso Máximo $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $n = 0$, β varios 89

3.29. Análisis de Estabilidad Relativa: Tiempo de establecimiento $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $n = 0$, β varios 89

4.1. Superficie de deslizamiento (Órbita $1T$-periódica). 91
4.2. Superficie de deslizamiento (Órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados). 92
4.3. Superficie de deslizamiento (Órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado). 93
4.4. Evolución de la parte real del exponente de Floquet que pasa de estable a inestable de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados. 101
4.5. Existencia y estabilidad de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados. 102
4.6. Existencia y estabilidad de la órbita 2T-periódica con un ciclo saturado. 105
4.7. Evolución de la parte real de los exponentes de Floquet de la órbita 4T-periódica $T - d_1 - T - d_2$. 108
4.8. Existencia y estabilidad de la órbita 4T-periódica $T - d_1 - T - d_2$. 108
4.9. Evolución de la parte real de los exponentes de Floquet de la órbita 8T-periódica ($d_1 - T - d_2 - T - d_3 - T - d_4 - T$). 110
4.10. Existencia y estabilidad de la órbita $8T$-periódica ($d_1 - T - d_2 - T - d_3 - T - d_4 - T$). 111
4.11. Diagrama de bifurcación 3D del sistema de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error. 112
4.12. Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo del sistema de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error (vistas 1 y 2). 113
4.13. Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo del sistema de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error (vistas 3 y 4). 114
4.14. Control FPIC de la órbita 2T-periódica (Exponentes de Floquet) 115
4.15. Control FPIC de la órbita 2T-periódica (Diagramas de Bifurcación) 116
4.16. Control FPIC de la órbita 4T-periódica (Exponentes de Floquet) 117
4.17. Control FPIC de la órbita 4T-periódica (Diagramas de Bifurcación) 118
4.18. Control FPIC de la órbita $8T$-periódica y órbita 16T-periódica (Exponentes de Floquet) 119
4.19. Control FPIC de la órbita $8T$ y $16T$ (Diagramas de Bifurcación) 120
4.20. Órbita $6T$-periódica ($n = 1$) Diagrama de Bifurcación de la variable de estado x_2. 124

4.21. Órbita $6T$-periódica ($n = 1$) Diagrama de Bifurcación del ciclo de trabajo. . . . 126
4.22. Órbita $7T$-periódica ($n = 1$) Diagrama de Bifurcación de la variable de estado x_2. 127
4.23. Órbita $7T$-periódica ($n = 1$) Diagrama de Bifurcación del ciclo de trabajo. . . . 128
4.24. Órbitas $8T$,$9T$,$10T$,$11T$,$12T$-periódica ($n = 1$). Diagrama de Bifurcación de la variable de estado x_2. 129
4.25. Órbitas $8T$,$9T$,$10T$,$11T$,$12T$-periódica ($n = 1$). Diagrama de Bifurcación del ciclo de trabajo. 130
4.26. Órbita $13T$-periódica ($n = 1$). Diagrama de Bifurcación de la variable de estado x_2. 131
4.27. Órbita $13T$-periódica ($n = 1$). Diagrama de Bifurcación de la variable de estado x_2. 133
4.28. Órbita $25T$-periódica ($n = 3$) Diagrama de Bifurcación de la variable de estado x_2. 136
4.29. Órbita $25T$-periódica ($n = 3$) Diagrama de Bifurcación del ciclo de trabajo. . . 138

5.1. Espacio de control *ZAD-FPIC* (k_s, N) 151
5.2. Lugar geométrico de los multiplicadores carácterísticos: bifurcación Fold, Subespacio de control $k_s < 0, N > -1$, n varios 152
5.3. Lugar geométrico de los multiplicadores carácterísticos: bifurcación Fold, Subespacio de control $k_s > 0, N < -1$, n varios 153
5.4. Diagrama de Bifurcación: Fold, Subespacio de control $\{k_s < 0, N > -1\}$, n varios 154
5.5. Lugar geométrico de los multiplicadores carácterísticos: bifurcación Flip, Subespacio de control $k_s > 0, N > -1$, $n = 0$ 155
5.6. Diagrama de Bifurcación: Flip , Subespacio de control $(k_s > 0, N > -1)$, β varios 156
5.7. Lugar geométrico de los multiplicadores carácterísticos ($n = 0$): Neimark-Sacker, Subespacio de control $k_s < 0, N < -1$ 157
5.8. Lugar geométrico de los multiplicadores carácterísticos: Neimark-Sacker, Subespacio de control $(k_s > 0, N > -1)$, n varios 158

5.9. Diagrama de Bifurcación: Neimark-Sacker , Subespacio de control $(k_s < 0, N < -1)$, ($n = 1$, $k_s = -4{,}5$) β varios 159
5.10. Derivada Numérica Valor Medio x_2 ($n = 0$) 160
5.11. Dispersión x_2 ($n = 1$) 160
5.12. Covarianza ($n = 1$) 161
5.13. Evolución de atractores caóticos ($n = 0$, k_s varios) 162
5.14. Evolución de atractores caóticos ($n = 1$, k_s varios) 162
5.15. Evolución de atractores caóticos ($n = 2$, k_s varios) 163
5.16. Diagrama de Bifurcaciones del ciclo de trabajo ($n = 1$, $k_s \in [350, 500]$) 164
5.17. Diagrama de Bifurcaciones del ciclo de trabajo ($n = 1$, $k_s \in [350, 400]$) 164
5.18. Diagrama de Bifurcaciones del ciclo de trabajo ($n = 1$, $k_s \in [372, 394]$) 165
5.19. Atractor caótico a medida que se varía el parámetro de bifurcación k_s. ($n = 1$, $k_s \in [350, 400]$) 165
5.20. Comportamiento de la variable de estado x_1 166
5.21. Comportamiento del ciclo de trabajo ($n = 1, k_s = 400$) 166
5.22. Comportamiento del ciclo de trabajo ($n = 1, k_s = 400$) 167
5.23. Comportamiento del ciclo de trabajo ($n = 1, k_s = 400$) 167
5.24. Optimización por Mínimos Cuadrados (Respuesta al Escalón) 169
5.25. Optimización por Minimax (Respuesta al Escalón) 169
5.26. Optimización por Búsqueda Directa (Respuesta al Escalón) 171
5.27. Optimización por Algoritmos Genéticos (Respuesta al Escalón) 171
5.28. Control Difuso $ZAD - FPIC$ (Respuesta al Escalón) 172
5.29. Control Neuronal $ZAD - FPIC$ (Espacio de Características) 173

Índice de tablas

2.1. Error de regulación y de rastreo del sistema con control FPIC $k_s = 4{,}5$ ($n = 1$ hasta $n = 6$) . . 35

2.2. Error de regulación y de rastreo del sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β y la referencia 37

3.1. Ciclo de trabajo en estado estacionario del sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β y la referencia 43

3.2. Límites de estabilidad en el sistema PWMCD-ZAD-FPIC $k_s = 4{,}5$ y N variable ($n = 0$ hasta $n = 6$) 59

3.3. Límites de estabilidad en el sistema PWMCD-ZAD-FPIC k_s variable y N fijo ($n = 0$ hasta $n = 6$) 59

3.4. Valor crítico de estabilidad del sistema $n = 0$, $\gamma = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$. Variaciones en β 62

3.5. Comportamiento transitorio del sistema sin atraso PWMC-ZAD-FPIC (n=0, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, $T = 0{,}1767s$, N=0,1,3,5,7,9,15) 72

3.6. Comportamiento transitorio del sistema con un periodo de atraso PWMCD-ZAD-FPIC (n=1, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=2,4,6,7,8,10,15) 77

3.7. Comportamiento dinámico del sistema PWMC-ZAD-FPIC ($k_s = 0{,}125, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1{,}5, 3, 4{,}5$, $N = 1$, $x_{1ref} = 0{,}8$, $n = 0$) 80

3.8. Comportamiento dinámico del sistema PWMC-ZAD-FPIC ($k_s = 0{,}125, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1{,}5, 3, 4{,}5$, $N = 20$, $x_{1ref} = 0{,}8$, $n = 1$) 82

3.9. Comportamiento transitorio del sistema PWMC-ZAD-FPIC (n=0,1,...,6, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=15 y N=25) 84

4.1. Rango de existencia de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados 100

4.2. Estabilidad y existencia de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados 102

4.3. Estabilidad y existencia de la órbita 2T-periódica con un ciclo saturado (Td_1) 104

4.4. Valores de comprobación de existencia de la órbita 2T-periódica con un ciclo saturado (Td_1) . . 104

4.5. Rango de existencia de la órbita 4T-periódica $T - d_1 - T - d_2$. En $(*)$ la órbita $4T$-periódica pasa a un esquema $T - d_1 - d_2 - d_3$ como se comprueba en la tabla 4.6 107

4.6. Valores de comprobación de existencia de la órbita 4T-periódica $T - d_1 - T - d_2$ 107

4.7. Existencia de la órbita 6T-periódica $d_0 - 0 - d_2 - T - T - T$ 125

4.8. Existencia de la órbita 6T-periódica $d_0 - 0 - 0 - T - T - T$ 125

4.9. Existencia de la órbita 7T-periódica $d_0 - d_1 - d_2 - T - T - T - T$ 128

4.10. Existencia de la órbita 7T-periódica $d_0 - 0 - d_2 - T - T - T - T - T$ 129

4.11. Existencia de la órbita $8T$,$9T$,$10T$,$11T$,$12T$-periódica 132

4.12. Existencia de la órbita 13T-periódica $d_0 - d_1 - d_2 - T - T - T - T - d_7 - 0 - d_9 - T - T - T$ 134

4.13. Existencia de la órbita 13T-periódica $d_0 - 0 - d_2 - T - T - T - T - d_7 - 0 - d_9 - T - T - T$ 135

4.14. Existencia de la órbita 25T-periódica ($n = 3$) $d_0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - d_6 - T - T - T - T - T - T - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - d_{19} - T - T - T - T - T$ 137

4.15. Existencia de la órbita $25T$-periódica $d_0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - d_6 - T - T - T - T - T - T - T - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - T - T - T - T - T - T$ ($n = 3$) 138

5.1. Estudios relevantes para la investigación y principales aportes del trabajo 142

Resumen

El eje temático principal del trabajo es el estudio de fenómenos no lineales presentes en una clase especial de sistemas suaves a trozos. Específicamente, se estudia de forma analítica y/o numérica la existencia de bifurcaciones y caos en sistemas de segundo orden que operan en un esquema PWM de pulso centrado con y sin tiempo de atraso, cuando el ciclo de trabajo se calcula con la técnica de promediado cero de la dinámica del error (ZAD). Los principales resultados del trabajo se presentan a continuación. Determinación cuantitativa de la influencia de elementos disipativos de energía en el sistema. Estabilización de la órbita 1T-periódica para cualquier periodo de atraso usando control por inducción al punto fijo (FPIC) y verificación por medio del cálculo de los exponentes de Floquet. Formulación de modelos linealizados del sistema muestreado de lazo cerrado utilizados para estudiar la evolución de las dinámicas transitorias a medida que se varían los parámetros de control del sistema. Reconstrucción de la ruta al caos por doblamiento de periodo del sistema sin tiempo de atraso mediante el análisis de la estabilidad y la existencia de órbitas pT-periódicas. Estudio numérico del comportamiento dinámico del sistema con tiempo de atraso mediante el análisis de la existencia de órbitas pT-periódicas.

Abstract

The central thematic of this thesis is the study of nonlinear phenomena presents in a special class of piecewise linear systems. Specifically, the existence of bifurcations and chaos in systems of second order that operate in a scheme PWM of pulse centered with and without delay time when the duty cycle calculates with Zero Average Dynamic on error (ZAD) technique, is studied in an analytical and numerical form. The main results of this thesis are: Quantitative determination of the influence of dissipative elements of energy in the system. Stabilization of the 1T-periodic orbit for any delay period using Fixed Point Induced Control (FPIC) and verification by means of the calculation of Floquet exponents. Formulation of linear models of the close loop system used to study the evolution of the transitory dynamics when the control parameters are varied. Reconstruction of the period doubling route to chaos of the system without delay time by means of the existence and the stability analysis of pT-periodic orbits (p>1). Numerical study of the dynamic behavior of the system with delay time by means the existence analysis of pT-periodic orbits.

Notación

*: Asociado a valores de estado estacionario, o a la solución del sistema en el cálculo de los exponentes de Floquet.

β: Parámetro adimensional generalizado del elemento lineal.

δ: Función Delta de Dirac.

γ: Parámetro adimensional generalizado del elemento lineal.

η: Término del control TDAS.

λ: Variable compleja que representa la evolución de los exponentes de Lyapunov.

μ: Variable compleja que representa el comportamiento continuo del sistema linealizado, la cual es equivalente a la variable compleja de Laplace de sistemas lineales y a la evolución de los exponentes de Floquet en sistemas no lineales.

θ: Función escalón unitario.

ω: Frecuencia del sistema normalizado (Operación en Rastreo)

A: Matriz de estados de la representación en espacio de estados del elemento lineal.

$\mathbf{a}_e$: Función vectorial de tiempo utilizada para calcular los exponentes de Floquet.

b: Matriz de entrada de la representación en espacio de estados del elemento lineal.

C_A: Parámetro que mide la cantidad de energía almacenada por un elemento $tipo\ A$.

c_1,c_2,c_3: Constantes utilizadas para definir el ciclo de trabajo en función de las variables de estado.

d: Ciclo de trabajo.

d_{ss}: Ciclo de trabajo en estado estacionario.

I: Matriz identidad.

k: Variable temporal discreta

k_s: Constante de tiempo asociada a la dinámica de primer orden dada por la superficie de deslizamiento (parámetro de bifurcación).

L_T: Parámetro que mide la cantidad de energía almacenada por un elemento tipo T.

m: Variable compleja que describe la evolución discreta del sistema linealizado, equivalente a la variable compleja Z de sistemas lineales y a los multiplicadores característicos del sistema no lineal.

N: Término del control FPIC (parámetro de bifurcación)

n: Número de periodos de atraso considerados en el sistema.

R_D: Parámetro que mide la cantidad de energía disipada por un elemento tipo D.

s: superficie de deslizamiento (dinámica de primer orden del error)

$\dot{s}$: Pendiente de la superficie de deslizamiento.

$\dot{s}_-$: Pendiente de la dinámica del error en el tramo en que se aplica u_-.

$\dot{s}_+$: Pendiente de la dinámica del error en el tramo en que se aplica u_+.

T: Periodo de Muestreo normalizado.

t: Variable independiente temporal.

u: La señal de control que se aplica al dispositivo no lineal (PWMC).

u_-: Valor off de la señal de control u.

u_+: Valor on de la señal de control u.

x: El vector de estado del elemento lineal.

x_1: Variable de estado generalizada (corresponde con la salida del sistema).

x_2: Variable de estado generalizada.

x_{1ref}: El valor de referencia deseado en la variable de estado x_1.

y: Salida generalizada del sistema la cual es la primera variable de estado (x_1).

z: Variable compleja en la que se describe la ecuación variacional. Puede transformarse en las variables μ, λ y m

Glosario

Anticontrol: Técnica de control de caos que propone el camino inverso: transición de estabilidad al caos.

Bifurcación: Fenómenos de los sistemas no lineales, consistente en que a cambios cuantitativos en los parámetros del sistema, se producen cambios cualitativos en el comportamiento.

Bifurcación No Suave: Clase de bifurcaciones exclusiva de los sistemas no suaves, entre las que se encuentran las bifurcaciones border-collision, corner-collision, grazing, etc.

Buck, convertidor:Convertidor de Potencia reductor de energía.

Caos: Fenómeno no lineal caracterizado por un comportamiento aperiódico de larga duración (en un sistema determinístico) que exhibe dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

Ciclo: Es una órbita periódica también llamada órbita sin equilibrio. En el caso continuo un ciclo es una curva cerrada. En el caso discreto, es un conjunto de puntos finitos, cada punto del conjunto es un punto fijo de la i-ésima iteración del mapa.

Ciclo de Trabajo: Es el tiempo que la señal de entrada (fuente de energía) alimenta al sistema conmutado en cada periodo de muestreo.

Ciclo Límite: es un ciclo aislado de un sistema dinámico en tiempo continuo.

Colisión de Borde: Tipo de bifurcación no suave que ocurre cuando, bajo variación en los parámetros, un equilibrio o punto fijo del sistema cruza una de las regiones donde el sistema tiene una descomposición diferente.

Cuenca de Atracción: Es el conjunto de condiciones iniciales $\mathbf{x}_o$, tal que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Diagrama de Bifurcaciones: Es un diagrama que clasifica en una forma muy condensada todos los posible modos de comportamientos del sistema y las transiciones entre ellos (bifurcaciones) bajo la variación de parámetros.

Ecuación Variacional: es la parte lineal principal de un sistema , que gobierna la evolución

de las perturbaciones cercanas al ciclo. Relación entre los multiplicadores de un ciclo y las ecuaciones diferenciales que tiene este ciclo.

Flip: (o doblamiento de periodo) Bifurcación asociada con la aparición de un multiplicador negativo en el círculo unitario

FPIC:Control por Inducción al Punto Fijo

Fold:(también conocida como tangente, punto límite o punto silla) Bifurcación asociada con la aparición de un multiplicador positivo en el círculo unitario

Multiplicador: Valor propio de un punto fijo.

Neimark-Sacker: (o Hopf secundaria) Bifurcación correspondiente a la presencia de un par de multiplicadores complejos en el círculo unitario.

OGY: Técnica para controlar caos. Su nombre es debido a las iniciales de sus desarrolladores Ott-Grebogi-Yorke.

Órbita: (con frecuencia llamadas trayectorias) En un sistema de tiempo continuo, las órbitas son curvas en el espacio parametrizado $\mathbf{X}$ en el tiempo t y orientadas en la dirección de incremento. En un sistema en tiempo discreto, son secuencias de puntos en el espacio de estado $\mathbf{X}$ enumeradas por enteros en incremento. La órbita más simple es un equilibrio.

Punto de Equilibrio: Solución de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Equilibrio para un sistema en tiempo continuo. El sistema al alcanzar este punto permanece en él mientra no exista una fuerza externa que lo afecte.

Punto Fijo: Solución de la ecuación $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$. Equilibrio para un sistema en tiempo discreto. El sistema al alcanzar este punto permanece en él mientra no exista una fuerza externa que lo afecte.

Punto Hiperbólico: En un sistema dinámico en tiempo continuo, un equilibrio es llamado hiperbólico si no hay valores propios en el eje imaginario. En un sistema dinámico en tiempo discreto, un punto fijo es hiperbólico si no hay multiplicadores en el círculo unitario.

Poincaré, mapa: Mapa construído a partir de ecuaciones diferenciales, utilizados principalmente para estudiar sistemas dinámicos en tiempo continuo, o para definir un espacio dimensional más bajo que el sistema original.

PWM:Modulador por ancho de pulso

PWMC: Modulador por ancho de pulso centrado

PWMCD:Modulador por ancho de pulso centrado con tiempo de atraso

Rastreo: Problema de control en el cual el objetivo de diseño es construir un controlador llamado rastreador para que la salida del sistema siga una trayectoria variante en el tiempo.

Regulación: Tarea de control en la que un sistema de control (estabilizador o regulador) es diseñado para que un estado del sistema en lazo cerrado sea estable alrededor de un punto de equilibrio.

Retrato de Fase: (también llamado diagrama de fase) es una división del espacio de estados en órbitas. El retrato de fase contiene toda la información del comportamiento de un sistema dinámico.

Sistema Dinámico: Es la formalización de un proceso determinístico. Es el conjunto de posibles estados (espacio de estados) y una ley de evolución del estado en el tiempo.

TDAS:(Time Delayed Auto-Synchronization) Técnica para controlar sistemas caóticos

ZAD:Promediado cero de la dinámica del error.(Zero Average Dynamic)

Capítulo 1

Introducción

El estudio de fenómenos no lineales, como bifurcaciones y caos, se ha convertido durante los últimos años, en un campo independiente de investigación. Estos fenómenos han sido reportados virtualmente en toda disciplina científica: astronomía, biología, biofísica, química, ingeniería, geología, matemáticas, medicina, meteorología, plasma, e incluso en sociología. [1]
Al ser un tema recurrente de investigación, en el presente trabajo se pretende plantear el análisis de un sistema particular con aplicaciones en el campo de la ingeniería, en sistemas eléctricos, mecánicos, térmicos, de fluidos, de comunicaciones, etc.
Dependiendo de la aplicación del sistema, comportamientos caóticos pueden ser considerados algunas veces como dañinos y algunas veces como útiles, en consecuencia, el control del sistema puede hacerse para reducir, o por el contrario, incrementar el grado caótico en el desempeño del sistema.
Un análisis de bifurcaciones es importante, porque por medio de éste se pueden determinar los efectos de la variación de los parámetros en el comportamiento dinámico de un sistema. De este modo se puede establecer bajo qué condiciones el sistema presenta cambios en el comportamiento: órbitas periódicas, cuasi-periódicas, caos, etc.
El estudio del caos permite que sus características especiales puedan ser aprovechadas en muchos ámbitos diferentes. Algunas de las características del caos que tienen gran potencial de aplicación en ingeniería son [2]:

- **Oscilaciones erráticas acotadas**: El aparentemente aleatorio, pero acotado comportamiento del caos, sugiere la posibilidad de usarlo como un generador seudo-aleatorio, que puede tener diversas aplicaciones entre las que están: codificación de datos en esquemas de comunicaciones seguras, generación de vibraciones en sistemas mecánicos, o simulación de condiciones de turbulencia en sistemas de fluidos o térmicos.

- **Espectro de banda ancha**: Las señales caóticas son no periódicas y tienen ocupación de espectro continuo, que para muchos tipos de señales caóticas puede ser muy extenso. Las señales de banda ancha pueden ser usadas para suprimir distorsión en canales de comunicación, para mejorar la compatibilidad electromagnética de los circuitos eléctricos, o como atenuadores de ruido en sistemas conmutados [3].

- **Sensibilidad a perturbaciones**: La sensibilidad inherente de los sistemas caóticos a pequeñas perturbaciones puede ser aprovechada en tareas de sincronización, o también utilizada para explorar la posibilidad de que los sistemas caóticos estabilizados sean sistemas que respondan más rápidamente que otros.

En las próximas secciones, se explicarán las motivaciones principales y los objetivos que se trazaron en la realización de la investigación, también se hará una breve revisión del estado del arte del tema a desarrollar y finalmente se resumen los tópicos que se desarrollarán en cada capítulo .

1.1. Motivación

La tendencia mundial, actualmente da un enfoque multidisciplinario a las investigaciones y en general, al conocimiento. De forma particular, se piensa que desde el campo de acción e influencia de la electricidad y la electrónica, es posible contribuir en el estudio de dinámicas no lineales, en diferentes ramas de la ingeniería, basados en las siguientes consideraciones:

- Los resultados más complejos en caos han sido obtenidos en circuitos no lineales, porque las condiciones experimentales pueden ser fácilmente controladas y los circuitos pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias o mapas con solo unas cuantas variables [4]. Además, experimentalmente el osciloscopio permite visualizar atractores fractales y diagramas de bifurcación.

- Debido a que muchos fenómenos caóticos y de bifurcación han sido experimental y numéricamente simulados en circuitos electrónicos, existen muchos estudios especializados que en determinados casos podrían ser asimilados en otros contextos.

- Recientes avances tecnológicos han originado un aumento del empleo de hardware y software de alto desempeño en las aplicaciones de control, siendo cada vez más común

encontrar sistemas mecánicos, térmicos o de fluidos, con etapas de control basadas en circuitos electrónicos.

- La existencia de herramientas de análisis generalizadas y de principios como los de analogía y dualidad, que forman hilos conductores o puentes entre los diferentes sistemas dinámicos lineales en ingeniería, permite extrapolar los resultados y aplicarlos en diferentes ámbitos.

A continuación, se formulan dos razones principales para estudiar dinámicas no lineales en ingeniería:

1. Comprender los fenómenos no lineales que ocurren en los sistemas dinámicos, para de esta forma evitar sus efectos indeseables.
2. Lograr diseñar sistemas dinámicos que trabajen de forma controlada en zona de caos [1].

En cuanto a los sistemas con PWM y periodos de atraso, manejados con una dinámica de error con promedio cero (ZAD), eje temático del presente trabajo, se pueden realizar las siguientes consideraciones:

- Sobre la implementación se deben tener en cuenta dos aspectos. Por un lado, estos sistemas no requieren implementación en tiempo real, pero por otro lado, existe la necesidad de adicionar un controlador al esquema PWM basado en ZAD para tener respuestas estables. [5].
- La complejidad de las dinámicas puede ser sintonizada ajustando el atraso [6], por lo cual tienen potencialidad en la resolución del problema de sincronización del caos [7] y de encriptación de datos [8], sin embargo, al ser sistemas más susceptibles al caos, pueden no ser tan convenientes en otras aplicaciones.
- Muchos sistemas trabajan inherentemente con tiempos de atraso, como transmisores de datos en comunicaciones o controladores PID en control. La dificultad en el análisis de estos sistemas se incrementa a medida que aumenta el tiempo de atraso, esto debido en gran parte a que la dimensionalidad del sistema tiene una dependencia directa con el número de periodos en que se atrase el sistema.

En este trabajo se han estudiado determinar de forma analítica y/o numérica la presencia de fenómenos no lineales, bifurcaciones y caos, en sistemas adimensionales de segundo orden que operan en un esquema PWM de pulso centrado con tiempo de atraso basado en el promediado cero de la dinámica del error (ZAD).

1.2. Estado del Arte

Los sistemas de estructura variable, como los sistemas de segundo orden que operan en un esquema PWM, forman parte de un sector industrial de notable crecimiento y desarrollo tecnológico debido en gran parte a las aplicaciones que se derivan de su utilización [9]. Estos sistemas tienen un amplio potencial de aplicación en diversas áreas de la ingeniería, tales como comunicaciones, control y electrónica de potencia, lo cual ha sido la motivación principal para el estudio de sistemas suaves a trozos, por parte de investigadores de todo el mundo, que trabajan en áreas de ingeniería, física y matemáticas, y que buscan mejoras en los modelos, en las técnicas de control y de análisis , que conlleven a tener sistemas más confiables, eficientes, robustos, estables, precisos, versátiles y veloces.

Es así como la bibliografía relacionada con sistemas conmutados, sus fenómenos, su análisis y control, ha crecido rápidamente desde la década de los 80 hasta hoy, donde se destacan los últimos cinco años como los más fructíferos en cuanto a publicación de libros especializados se refiere, con temas como: control de caos y control de bifurcaciones [10], caos experimental [11], comportamiento complejo de sistemas conmutados [12], caos en circuitos y sistemas [13] [14], fenómenos no lineales en electrónica de potencia [15], entre otros.

La referencia principal de esta sinopsis fueron las publicaciones de la IEEE, las cuales permiten establecer cuáles son los aspectos que en la actualidad tienen un especial interés científico, y cuáles son los principales focos geográficos en los que se concentra el mayor número de artículos especializados en el tema. Es fácil identificar que la producción científica sobre sistemas suaves a trozos, se ha desarrollado fundamentalmente en tres regiones del mundo: Estados Unidos, La Unión Europea (principalmente en España, Italia e Inglaterra) y Asia (en especial en Japón, Hong Kong e India), todas ellas regiones con un alto crecimiento económico y tecnológico.

Los países en vía de desarrollo, como los latinoamericanos, en los últimos cinco años han empezado a investigar las dinámicas no lineales de los sistemas de estructura variable, logrando

algunos avances interesantes en países como Argentina, Brasil, México y Colombia.
En cuanto a los temas de estudio actual se puede observar que se trabaja en tres frentes principales: Análisis, Control y Aplicaciones.
Con respecto al problema de análisis en los sistemas conmutados, es decir, el concerniente al estudio de los fenómenos que en ellos se presentan, de sus causas y sus efectos, hoy en día se destacan las siguientes investigaciones:

- Estudio detección y predicción de diferentes tipos de bifurcaciones: como colisiones de borde [16] [17], cuasiperiodicidad, doblamiento de periodo, Hopf [18], etc.
- Existencia de mapas de herradura en sistemas DC-DC [19].
- Existencia de conexiones homoclínicas en sistemas conmutados [20].
- Movimiento de bordes periódicos [21] .
- Determinación y clasificación de las diferentes rutas al caos [22].

En cuanto al control de sistemas suaves a trozos, los hechos más relevantes para el tema de la propuesta que se han dado en los últimos años son los siguientes:

- Nuevas técnicas de control de caos al introducir variaciones a la técnica TDAS [23].
- En 2001, se propuso la técnica ZAD, la cual hace uso de una superficie de deslizamiento, definida como una combinación lineal del error y su derivada, que se obliga a que tenga promedio cero en cada periodo de muestreo [24].
- En 2002 y 2003, resultados numéricos y experimentales demuestran que la técnica ZAD presenta un excelente desempeño [25] [26] .
- En 2004, se logran resultados analíticos que demuestran que la técnica ZAD tiene las ventajas de: frecuencia fija de conmutación, robustez y error muy bajo [5].
- En 2004 y 2005, se desarrolló la técnica de control para sistemas caóticos FPIC o control por inducción al punto fijo [27] [28].

Por último, en relación a las aplicaciones se han implementado controladores en sistemas conmutados, como los convertidores de potencia, en sus topologías buck [29], boost [30] y

buck-boost, también en circuitos osciladores como el Collpits, en aplicaciones de generadores pseudo-aleatorios, en sistemas que mejoran la compatibilidad electromagnética [31], que corrigen el factor de potencia [32], o que cancelan el *ripple* en la entrada del sistema [33].
En particular en este trabajo se ha hecho uso de los resultados de [5], en el cual se trabajó con la técnica ZAD y PWM de pulso centrado. En ese trabajo se demostró numéricamente las bondades de la estrategia ZAD. Se obtuvo una expresión para el ciclo de trabajo en estado estacionario. Se determinó que la constante k_s era un parámetro de bifurcación. Se encontraron analíticamente y numéricamente los límites de estabilidad. En cuanto al análisis de bifurcaciones, se obtuvieron de manera análitica las tres primeras bifurcaciones y se demostró a través de una aproximación que la evolución al caos ocurría por la formación de una aplicación de la forma *tienda de campaña*. En lo concerniente al control de caos, se diseño la técnica de control por inducción al punto fijo (FPIC) y su aplicación a la estrategia ZAD. Sin embargo, algunos aspectos no fueron estudiados, estos son: efectos de elementos disipadoress de energía en el sistema, estabilidad para n periodos de atraso, comportamiento transitorio del sistema, existencia y estabilidad de órbitas periódicas. Por este motivo se presenta este trabajo como una continuación del ya realizado.

1.3. Organización del Trabajo

El informe está organizado de la siguiente manera. En el *Capítulo 2* se realiza la definición del modelo y se hace la formulación matemática del problema, así mismo se muestra el desempeño del sistema en las tareas de estabilización y seguimiento, tanto para el sistema operado en tiempo real, como para el que funciona con tiempos de atraso. Dado que el sistema con tiempo de atraso es inestable para cualquier valor del parámetro del controlador por modos deslizantes, se introducen y prueban dos técnicas de control de caos: la técnica TDAS (Time Delayed Auto-Synchronization) y la estrategia FPIC (Control por Inducción al Punto Fijo).
En el *Capítulo 3*, se realiza el análisis de estabilidad del sistema para cualquier tiempo de atraso. Además, se realizan diferentes consideraciones que permiten establecer el comportamiento en estado transitorio del sistema.
El *Capítulo 4* presenta un análisis de la existencia y estabilidad de órbitas pT-periódicas. El procedimiento que se presenta es usado para reconstruir la ruta al caos del sistema operado en tiempo real, mostrando las distintas transiciones de periodicidad ($1T - 2T - 4T$ y $8T$) , bandas

caóticas y caos. Para el sistema con tiempo de atraso, se combinan procedimientos analíticos y numéricos para explicar el comportamiento dinámico del sistema.

En el *Capitulo 5*, se presentan las principales conclusiones del trabajo, se establecen algunas pautas sobre el direccionamiento de la investigación y en algunos casos se presentan resultados preliminares sobre el trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco Conceptual General

En este capítulo se presentan los aspectos teóricos básicos que se utilizarán en el transcurso del trabajo. En primera instancia, se introduce una pequeña reseña sobre el origen de las técnicas utilizadas en la investigación. Posteriormente, se define el modelo del sistema dinámico que será caso de estudio y la formulación matemática del mismo. Finalmente, se realizan algunas consideraciones sobre el desempeño del sistema, en tareas de estabilización y seguimiento, y la necesidad de incluir técnicas de control de caos como la $TDAS$ (Time Delayed Auto-Synchronization) y la $FPIC$ (Fixed Point Induced Control).

2.1. Generalidades

A principios de la década de los 80, se determinó la presencia de caos en circuitos de potencia [34]. En 1987, Chua [35] hizo un estudio del fenómeno del caos en sistemas electrónicos, el cual fue posteriormente confirmado de manera experimental por Deane en un convertidor tipo buck [36]. Krein y Bass [37], en 1989 demostraron analítica y experimentalmente la presencia de múltiples ciclos límites, mientras que en los primeros años de los 90, se diseñaron técnicas para controlar el caos, como la TDAS (Time Delayed Auto-Synchronization) [38] y OGY (Ott-Grebogi-Yorke) [39].

Después de tener confirmados de forma experimental fenómenos no lineales presentes en los convertidores de potencia, como caos y múltiples ciclos límites, se tuvo la necesidad de profundizar el estudio de los sistemas de forma analítica. Se realizaron publicaciones de comportamientos cuasiperiódicos [40], subarmónicos [41], bifurcaciones [42], caos [43], etc. En particular se reportaron casos de presencia de caos un instante después de pérdida de estabilidad del ciclo límite [44], la presencia de atractores extraños en el conversor tipo buck [45],

se caracterizaron diversas maneras de llegar al caos [46], y los diferentes tipos de bifurcaciones [47].

Debido a que el caos se presenta de forma inherente en estos sistemas, a partir de variaciones en el valor de referencia, de los parámetros del sistema, o del ciclo de trabajo, muchos autores han examinado las bondades de las técnicas OGY y TDAS para controlar el caos, o introducir variaciones a estas técnicas para generar nuevas estrategias de control.

Por otro lado, aprovechando que los convertidores de potencia que operan con fuentes conmutadas pueden ser tratados como sistemas de estructura variable, y utilizando los avances alcanzados en controladores basados en modos deslizantes, cuya principal fortaleza radica en ser altamentes robustos, se han desarrollado muchos controladores de este tipo.

Los controladores desarrollados en la mayoría de los casos son robustos, estables y eficientes, sin embargo, ellos no garantizan frecuencia fija de conmutación. Para dar solución a este problema se originaron nuevas técnicas, como la que Borle [48] propuso en 1995, basada en un promedio de cero error de corriente en cada iteración, la cual llamó ZACE. Esta técnica brinda muchas ventajas entre las que se encuentra frecuencia fija de conmutación

Recientemente Fossas y sus colaboradores [24] han propuesto una técnica de control semejante a la de Borle, en la cual el promedio de cero se induce sobre la dinámica de la superficie deslizante (ZAD), definida en función del error del estado. Los resultados experimentales han demostrado que la técnica es eficiente y se puede presentar como una buena alternativa para sistemas de potencia que requieren conmutación de la fuente a frecuencia fija.

En el Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales de la Universidad Politécnica de Cataluña, se desarrollan en la actualidad estudios sobre el control de conversores de potencia manejados con ZAD, logrando resultados analíticos que demuestran las ventajas de esta técnica [5].

Al interior del grupo PCI (Percepción y Control Inteligente) de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, se ha continuado desarrollando esta área de estudio, así como la técnica de control para sistemas caóticos: Control por Inducción al Punto Fijo o FPIC [27], que a nivel de simulación ha mostrado buenos resultados. Así, esta tesis se enmarca dentro del trabajo que se desarrolla en la sede.

2.2. Definición del Modelo

En esta sección se describirá el problema de análisis partiendo de una concepción global, a la cual se le irán introduciendo restricciones y consideraciones que delimitarán el estudio a un tipo específico de sistemas dinámicos. Con este enfoque se desea encontrar el mayor grado de generalización posible en la definición del problema, logrando un planteamiento lo suficientemente acotado que tenga aplicación en varias áreas de estudio.

El punto de partida será el diagrama de bloques de la figura 2.1, el cual indica que es posible descomponer el sistema dinámico en cuestión en varias partes fundamentales, donde un elemento no lineal junto con uno lineal, interactúan con un algoritmo de control para cumplir con un objetivo determinado.

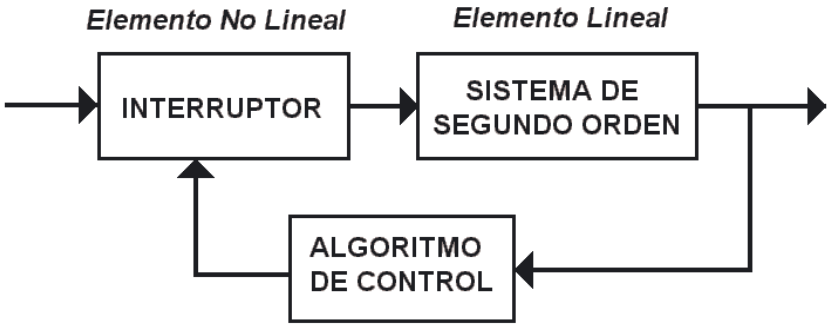


Figura 2.1: Diagrama de bloques generalizado. Descomposición del sistema dinámico en sus componentes lineal, no lineal y de control.

De los tres elementos (lineal, no lineal y algoritmo control), es la parte lineal la responsable de la flexibilidad del análisis, por una razón principal, en los sistemas lineales, a diferencia de los no lineales, existe la posibilidad de generalizar los comportamientos de los sistemas y sus correspondientes métodos de análisis.

En la parte no lineal, se concentra el mayor número de restricciones del problema, debido a la alta variabilidad de las respuestas ante diferentes entradas.

La parte de control, como una consecuencia directa de la dinámica no lineal, debe estar también altamente particularizada.

Ahora, considérese el diagrama de la figura 2.2. A este sistema, donde γ y β son constantes,

se quiere controlar el comportamiento de una de sus variables de estado (sin pérdida de generalidad, la variable de estado x_1), de tal manera que aunque los parámetros γ y β varíen, la respuesta de la variable de estado permanezca constante (para el caso de regulación) o siga a la sinusoide deseada (en caso de rastreo).

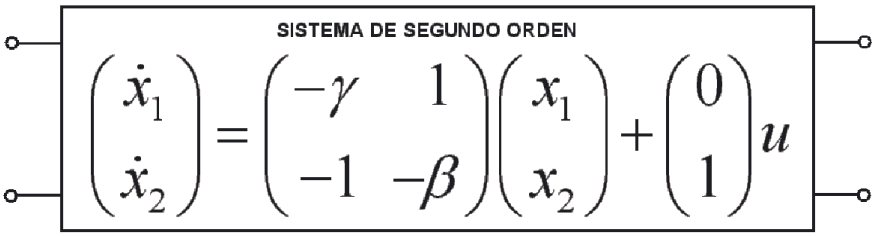


Figura 2.2: Sistema de segundo orden, γ y β son constantes, x_1 y x_2 son variables de estado y u es la entrada.

Como es típico en sistemas y con el ánimo de ahorrar energía, se puede usar un esquema de PWM, donde un valor de fuente de entrada se modula a través de un interruptor, de tal manera que la variable de estado controlada, en promedio, reciba el valor deseado (x_{1ref}). En este caso se tiene el sistema de la figura 2.3.

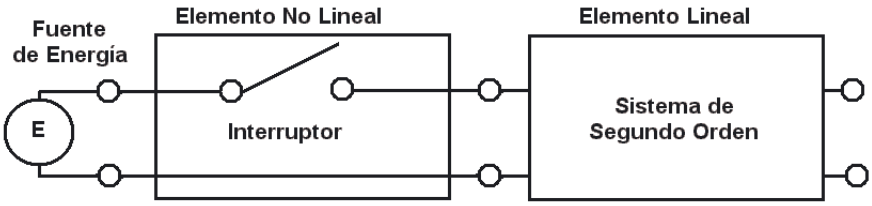


Figura 2.3: Elemento no lineal que modula la señal de entrada del sistema de segundo orden.

El problema a continuación es definir la estrategia por medio de la cual se hará la modulación.

Como se ha mencionado anteriormente, en este trabajo se usará la técnica ZAD. Con esta técnica se busca que la integral de la función $s(\mathbf{x}(t))$ sea cero en cada iteración, donde $s(\mathbf{x}(t))$ se define como: $s(\mathbf{x}(t)) = e + k_s\dot{e}$, con $e = x_1 - x_{1ref}$.
Asi pues, se obtiene un esquema general dado por la figura 2.4.

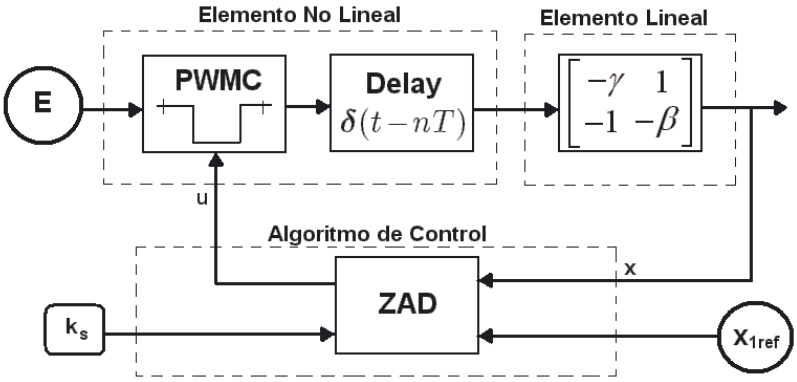


Figura 2.4: Diagrama de bloques especializado. Descomposición del sistema dinámico a analizar en sus componentes lineal, no lineal y de control específicas.

Nótese que con el objeto de generalizar en el PWM, se ha considerado la posibilidad de incluir periodos de atraso, dado que en sistemas reales, muchas veces se dispone de las señales con un cierto tiempo de retardo. A continuación se describirán con mayor detalle, cada uno de los componentes presentados en la figura 2.4.

2.2.1. ELEMENTO NO LINEAL: Interruptor.

Este elemento es el encargado de transmitir la energía al sistema. Junto con el algoritmo de control da lugar al PWM (Modulación por ancho de pulso). En el dispositivo no lineal (PWM), mostrado en la figura 2.5, es necesario realizar dos precisiones básicas:

- El pulso es de tipo centrado. Esto permite aplicar técnicas de linealización, ya que de esta forma no existe discontinuidad de campo vectorial en el momento de muestrear [49]. La mayoría de los análisis que se presentan en este documento se han obtenido con un pulso centrado que obedece a la secuencia $\{u_+, u_-, u_+\}$, con $u_+ = 1$ y $u_- = -1$. En caso contrario se dirá explícitamente la forma del pulso utilizada.

- El tiempo de atraso se analizará en unidades de T, y n será el número de periodos de

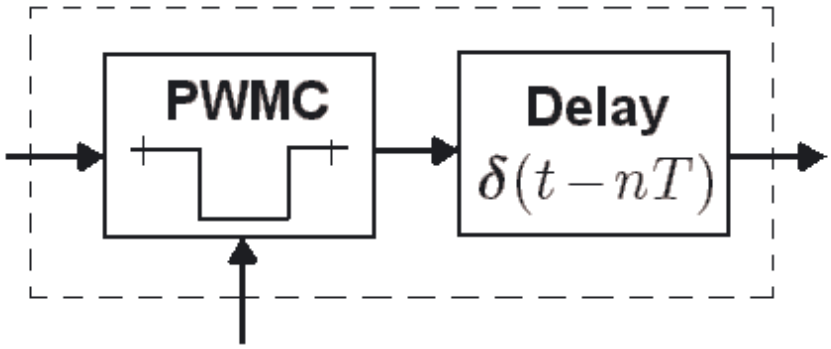


Figura 2.5: Diagrama de bloques elemento no lineal: Compuesto por un modulador de ancho de pulso centrado (PWMC) y de un elemento de atraso en el tiempo.

atraso a considerar, utilizando la siguiente notación:

$$n = 0, PWMCD\ de\ orden\ 0;$$
$$n = 1, PWMCD\ de\ orden\ 1;$$
$$...$$
$$n = i, PWMCD\ de\ orden\ i;$$

Se especifican 2 casos especiales: $PWMCD\ de\ orden\ 0$ es el sistema sin atraso o simplemente $PWMC$, y el $PWMCD\ de\ orden\ 1$ será el caso típico de análisis por lo cual se referenciará simplemente como $PWMCD$, para los otros casos sí se especificará el orden.
La filosofía de funcionamiento del PWM hace necesaria la inclusión de un algoritmo de control que se encargue de calcular el tiempo que la señal PWM (figura 2.6) debe permanecer en cada una de las dos posiciones posibles del dispositivo.

2.2.2. ALGORITMO DE CONTROL: Promediado cero de la dinámica del error o ZAD (Zero Average Dynamic).

El ciclo de trabajo, notado como d, se define como el tiempo que la fuente permanece activa durante un ciclo completo. Para denotar el valor de d se utilizan indistintamente dos representaciones, en el transcurso del trabajo. En gráficas y análisis de resultados se utiliza d en su representación porcentual o normalizada (valores entre $0\,\%$ y $100\,\%$), que es la más comunmente utilizada en la literatura, y se presenta en la ecuación (2.1). En algunos procedimientos

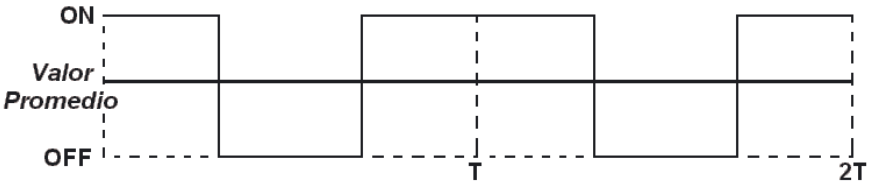


Figura 2.6: Señal del Modulador por Ancho de Pulso (PWM) y su valor promedio

analíticos se presenta una representación en función del periodo de muestreo o desnormalizada (valores entre 0 y T).

$$d = \frac{t_{ON}}{t_{ON} + t_{OFF}} 100\,\% \tag{2.1}$$

Se usa la estrategia ZAD que emplea una superficie de deslizamiento definida como una dinámica de primer orden del error, a la cual se obliga a tener promedio cero en cada periodo de muestreo.

Este algoritmo recibe como entradas: el vector de estado **x** del elemento lineal y el valor de referencia deseado en la variable de estado x_1 (x_{1ref}); y devuelve como salida el ciclo de trabajo a ejecutar en el próximo ciclo, aplicado al dispositivo no lineal. En la figura 2.7 se muestran las diferentes opciones para la entrada x_{1ref} y la salida u.

Las cualidades de la estrategia ZAD han sido comprobadas numérica y experimentalmente ([26] [50] [7]), y también de forma analítica [5].

Teóricamente ha sido demostrado que la técnica ZAD ofrece las ventajas de frecuencia fija de conmutación, robustez y error muy bajo.

2.2.3. ELEMENTO LINEAL: Sistema Adimensional de Segundo Orden con dos grados de libertad (γ, β)

El último elemento de la figura 2.4 que falta por describir, es la parte lineal, que como se dijo anteriormente es la que brinda flexibilidad al análisis, debido principalmente a los siguientes

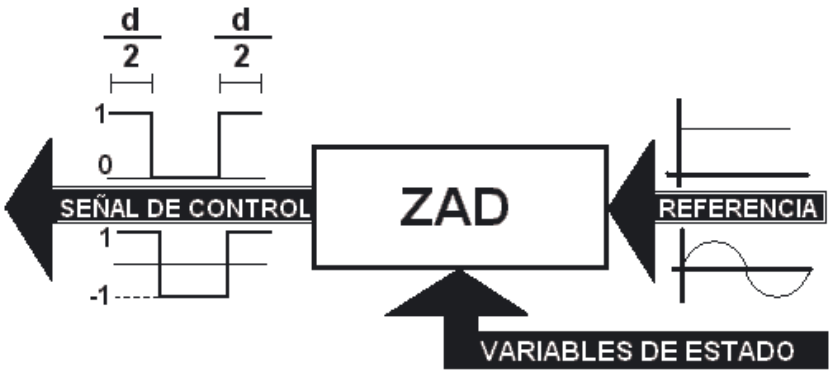


Figura 2.7: Posibles configuraciones de la referencia y la señal de control en el bloque ZAD

tres aspectos:

- **Orden del sistema**: Es bien conocido que los sistemas dinámicos lineales de segundo orden, además de ofrecer facilidades de resolución, representación geométrica y análisis, dan una visión considerable sobre el comportamiento de sistemas de orden superior.

- **Adimensionalidad del sistema**: Trabajar un modelo con una dinámica sin dimensiones posibilita desligar la física del problema del análisis del mismo, es decir, el procedimiento y los resultados obtenidos son aplicables a muchos tipos de sistemas (eléctricos, mecánicos, térmicos, etc) ya que se estudia un sistema con variables de estado y parámetros generalizados.

- **Grados de libertad del sistema**: Se entiende por el término $grado\ de\ libertad$, el número de parámetros asociados con las variables físicas del sistema dinámico que pueden ser modificados en el sistema de análisis. La inclusión de 2 parámetros o grados de libertad permite realizar análisis tanto a sistemas sin pérdidas de energía como a sistemas con pérdidas (disipación de energía en los componentes internos del sistema).

La ecuación (2.2) describe la dinámica del elemento lineal:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{2.2}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde, x_1 y x_2 son variables de estado generalizadas; γ y β son parámetros adimensionales generalizados; y y es la salida generalizada del sistema la cual es la primera variable de estado (x_1). El máximo valor de salida en estado estacionario está acotado por 1, por lo tanto la dinámica del sistema se trabaja adimensional y normalizada.
Por ser un sistema lineal de segundo orden, deben existir en él dos elementos almacenadores de energía, además al ser un sistema pasivo y reductor de energía, deben existir elementos que suministren energía al sistema y elementos disipadores de energía, por lo cual se distinguen 4 componentes principales en el sistema, los cuales se describen a continuación.

Elemento Almacenador de energía $Tipo\ A$

El parámetro que mide la cantidad de energía almacenada por un elemento $tipo\ A$, es C_A el cual puede tener diversos significados físicos dependiendo de las variables que esté relacionando; algunos de ellos pueden ser: masa traslacional (m), inercia (J), capacitancia eléctrica (C), capacitancia de fluido (C_f), capacitancia térmica (C_t).

Elemento Almacenador de energía $Tipo\ T$

Donde L_T es el parámetro que mide la cantidad de energía almacenada por el elemento tipo T, el cual físicamente puede ser relacionado con parámetros como: resorte traslacional $(1/k)$, resorte rotacional $(1/K)$, inductancia (L), inercia de fluido (I).

Elemento Disipador de energía $Tipo\ D$

El parámetro que mide la cantidad de energía disipada es R_D el cual dependiendo del contexto del problema puede ser: amortiguador traslacional $(1/b)$, amortiguador rotacional $(1/B)$, resistencia eléctrica (R), resistencia de fluido (R_f), resistencia térmica (R_t).
Tanto el parámetro R_D como su recíproco G_D , sirven para modelar las pérdidas o fugas de energía inherentes en los elementos almacenadores, o las que se originan por el deterioro de los componentes, o las debidas al entorno en que se desenvuelve el sistema.

Elemento Suministrador de energía

Se definen dos modelos de fuentes generalizadas: tipo A y tipo T. La fuente de energía $tipo\ A$ suministra: velocidad traslacional (v), velocidad angular (Ω), voltaje (v), presión (P), temperatura (θ). La fuente de energía $tipo\ T$ suministra: fuerza (F), torque (T), corriente (i), intensidad de flujo de fluido (Q), intensidad de flujo de calor (q).
La explicación de cada uno de los elementos que componen el sistema lineal realizada anteriormente, establecen una notación y una simbología común que permite formular dos esquemas generalizados para el sistema $\gamma\beta$.

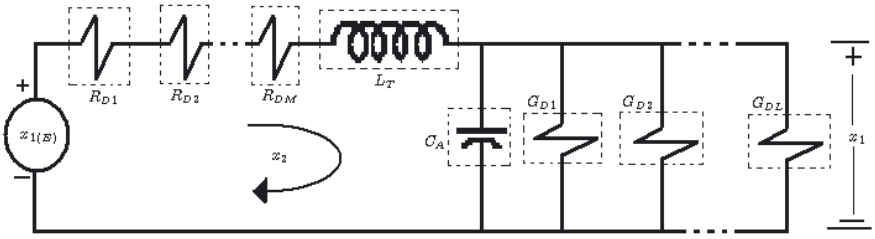


Figura 2.8: Esquema generalizado 1 del elemento lineal (Primal)

En la figura 2.8, observamos el primer esquema equivalente al sistema $\gamma\beta$ en el cual los parámetros adimensionales generalizados (γ, β) tienen los siguientes valores:

$$\gamma = \left(\sum_{i=0}^{L} G_{Di}\right)\sqrt{\frac{L_T}{C_A}} = G_{Dp}\sqrt{\frac{L_T}{C_A}} \tag{2.3}$$

$$\beta = \left(\sum_{i=0}^{M} R_{Di}\right)\sqrt{\frac{C_A}{L_T}} = R_{Ds}\sqrt{\frac{C_A}{L_T}} \tag{2.4}$$

En la figura 2.9, se presenta el segundo esquema equivalente al sistema $\gamma\beta$, donde los parámetros adimensionales generalizados (γ, β) tienen la siguiente correpondencia:

$$\gamma = \left(\sum_{i=0}^{L} R_{Di}\right)\sqrt{\frac{C_A}{L_T}} = R_{Ds}\sqrt{\frac{C_A}{L_T}} \tag{2.5}$$

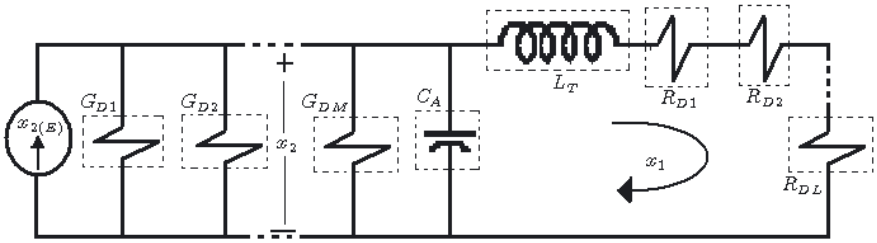


Figura 2.9: Esquema generalizado 2 del elemento lineal (Dual)

$$\beta = \left(\sum_{i=0}^{M} G_{Di}\right)\sqrt{\frac{L_T}{C_A}} = G_{Dp}\sqrt{\frac{L_T}{C_A}} \tag{2.6}$$

Note que el esquema de la figura 2.9 es el dual del esquema de la figura 2.8, así mismo sucede con las expresiones (2.5) y (2.6) que son las duales de las expresiones (2.3) y (2.4).
En el esquema anteriormente propuesto se pueden realizar dos tareas básicas de control:

- Regulación o estabilización: El sistema es diseñado para que el estado x_1 del sistema en lazo cerrado sea estabilizado alrededor de un punto de equilibrio.
- Rastreo o seguimiento: problema de control en el cual el objetivo de control es que la salida del sistema $(y = x_1)$ siga una trayectoria variante en el tiempo.

2.3. Formulación del Problema

A continuación se plantean los aspectos matemáticos básicos del método de análisis y control utilizado.
Partimos del sistema adimensional normalizado, expresado en su forma compacta en la ecuación (2.7).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad\qquad y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{2.7}$$

donde,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & -\beta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La inclusión del PWM permite que el sistema de la ecuación (2.7) pueda ser modelado por la ecuación (2.8) que representa a los sistemas de estructura variable, donde cambios en la función u representan cambios topológicos del sistema.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{B}_1 & si \quad u = u_+ \\ \mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{B}_2 & si \quad u = u_- \end{cases} \tag{2.8}$$

Para el caso específico del sistema con PWM de pulso centrado se tiene el sistema dado por la ecuación (2.9).

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u_+ & 0 \leq t \leq \frac{d}{2} \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u_- & \frac{d}{2} < t < (T - \frac{d}{2}) \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u_+ & (1 - \frac{d}{2}) \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.9}$$

donde d es el ciclo de trabajo y que se definió anteriormente.

Note que el sistema de la ecuación (2.9) puede presentar dos topologías diferentes dependiendo de si u es u_+ o u_- , además que en cada topología el sistema es lineal, por lo cual una solución analítica puede ser fácilmente computada.

Para el caso donde $u_+ = 1$ y $u_- = -1$, la solución del sistema (2.9) está dada por la ecuación (2.10). $\mathbf{x}((\mathbf{k}+\mathbf{1})\mathbf{T}) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(\mathbf{kT}) + (e^{\mathbf{A}(T-d/2)} + \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}d/2} - \mathbf{I})\mathbf{B} - e^{\mathbf{A}d/2}\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}(T-d)} - \mathbf{I})\mathbf{B}$

$$\mathbf{x}((\mathbf{k}+\mathbf{1})\mathbf{T}) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \left(e^{\mathbf{A}T} - 2e^{\mathbf{A}\left(T-\frac{d}{2}\right)} + 2e^{\mathbf{A}\left(\frac{d}{2}\right)} - \mathbf{I}\right)\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B} \tag{2.10}$$

El momento en que u cambia de un valor a otro, lo determina el algoritmo de contol (ZAD). La estrategia ZAD define que el sistema dado por la ecuación (2.7) va a ser controlado mediante un PWM de tal manera que el promedio de la variable llamada superficie de deslizamiento y notada como $s(x)$, en cada periodo de conmutación sea cero, lo cual a su vez garantiza que la salida x_1 siga la referencia x_{1ref}.

La superficie de deslizamiento $s(x)$ a utilizar fue definida por Carpita, y se muestra en la

ecuación (2.11). Esta variable consiste en una combinación lineal del error de salida y su derivada, a la cual por comodidad se le llamará la dinámica del error [51].

$$s(\mathbf{x}) = x_1 - x_{1ref} + k_s(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1ref}) \tag{2.11}$$

donde x_1 es la variable a controlar , x_{1ref} es la señal de referencia y k_s es la constante de tiempo de la dinámica del error.
El ciclo de trabajo d, o tiempo en que la señal de control permanece en u_+ se calcula de la ecuación (2.12).

$$\int_{kT}^{(k+1)T} s(\mathbf{x}(t))dt = 0 \tag{2.12}$$

El cálculo del ciclo de trabajo de manera exacta implica en cada iteración la resolución de una ecuación trascendente (ecuación (2.12)), lo cual puede ser un inconveniente en caso de una implementación en línea. Por ello se hacen las siguientes aproximaciones [5], [50], [24], [25] :

- La dinámica del error o superficie de deslizamiento se comporta como una recta a tramos.
- Las pendientes de la dinámica del error en cada tramo están determinadas por las pendientes calculadas al momento de la conmutación. Esto incluye suponer que la pendiente al inicio del periodo, notada por $\dot{s}_+$, es la misma que al final. Para obtener un valor aproximado de la pendiente $\dot{s}_-$, correspondiente al tramo intermedio, se toman los mismos datos que se han usado para calcular $\dot{s}_+(\mathbf{x}(kT))$ y se invierte el signo de la señal de control.

Con estas aproximaciones se obtiene la expresión para el cálculo de d, dada por la ecuación (2.13), para el esquema de pulso centrado generalizado.

$$d = \frac{2(s(\mathbf{x}((k-n)T)) + T\dot{s}_-(\mathbf{x}((k-n)T)))}{\dot{s}_-(\mathbf{x}((k-n)T)) - \dot{s}_+(\mathbf{x}((k-n)T))} \tag{2.13}$$

donde n corresponde al número de periodos de atraso considerados ($n \geqslant 0$ y $k \geq n$). Los valores de las variables de estado para $k < n$ deben ser conocidos, sin embargo, estos pueden ser seleccionados arbitrariamente.

2.4. Desempeño del sistema con PWMCD y ZAD

En esta sección se presentan los primeros resultados de operar el sistema basado en ZAD. Con base en el desempeño del sistema sin atraso y con un periodo de atraso, para varios casos particulares, se definen un conjunto de consideraciones básicas que serán objeto de estudio por el resto de la tesis.

Los casos particulares expuestos a continuación, se simularon con los siguientes parámetros fijos: $T = 0{,}1767$; $\gamma = 0{,}35$; $\beta = 0$; $u_+ = 1$; $u_- = -1$, se realizarán variaciones en k_s, n y x_{1ref}. El periodo de muestreo se encuentra normalizado por la frecuencia de resonancia del elemento lineal, de la siguiente forma:

$$T = \frac{T_c}{\omega_r} = \frac{T_c}{\sqrt{L_T C_A}}$$

Para el caso particular del convertidor *buck* el valor $T = 0{,}1767$ equivale a tener un periodo de muestreo $T_c = 50\mu s$ y parámetros: $L = 2mH$, $C = 40\mu F$.

2.4.1. Regulación o Estabilización

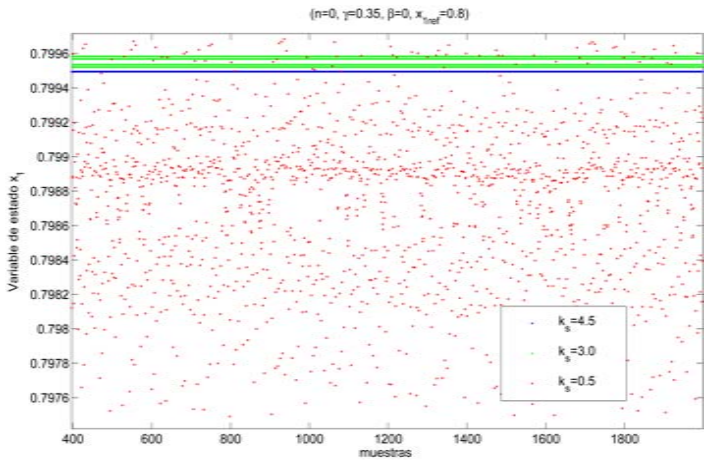
Para el caso de regulación, se define trabajar el sistema al $80\,\%$, es decir, $x_{1ref} = 0{,}8$.

En la figura 2.10, se presenta la respuesta de la variable de estado x_1 sin tiempo de atraso (figura 2.10(a)) y con un periodo de atraso (figura 2.10(b)), y en la figura 2.11, se presenta la respuesta de la variable de estado x_2 sin tiempo de atraso (figura 2.11(a)) y con un periodo de atraso (figura 2.11(b)), para tres valores de k_s: $4{,}5$; 3 y $0{,}5$, de las cuales se pueden hacer las siguientes consideraciones:

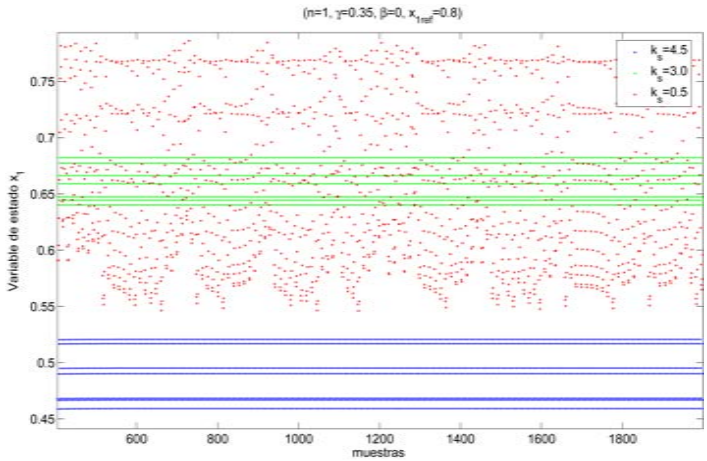
- Tanto en el sistema sin atraso, como en el sistema con un periodo de atraso, se puede presentar caos, sin embargo, cuando $n = 0$ nótese que el caos se encuentra acotado muy cerca del valor de referencia ($x_1 = 0{,}8$).

- De los casos presentados sólo $n = 0$ y $k_s = 4{,}5$ es estable. Sin embargo, todos los casos $n = 0$ satisfacen la tarea de regulación, con un error muy bajo.

- Se puede observar que incluir el periodo de atraso produce mal funcionamiento del sistema, ya que éste es inestable y pierde la capacidad de regular.



(a) $n = 0$



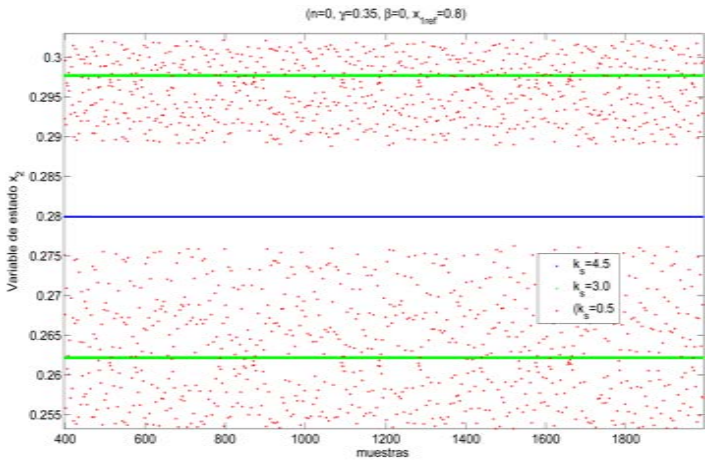
(b) $n = 1$

Figura 2.10: Regulación. Comportamiento de la variable de estado x_1 x_1 para $n = 0$ y $n = 1$

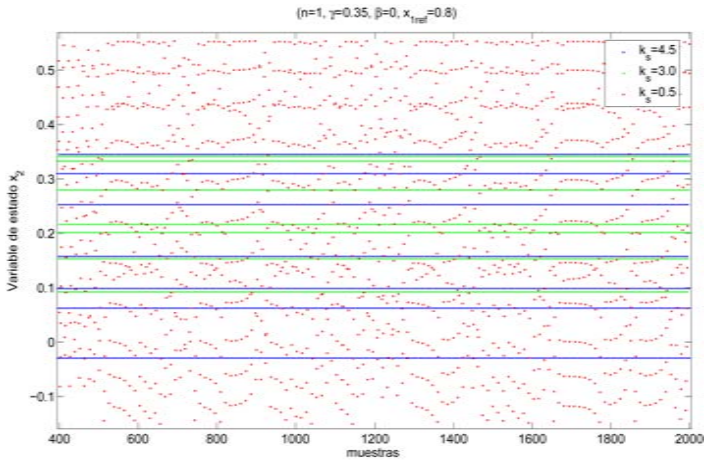
- Existe variedad de comportamientos al variar k_s, por medio de un análisis posterior se podrá determinar los valores de transición de cada comportamiento.

- Cuando $n = 1$ la dimensión del sistema es 4, en las figuras 2.10(b) y 2.11(b), se muestran las variables de estado actuales ($x_1(k)$ y $x_2(k)$). Las variables de estado atrasadas $x_3\ (k) =\ x_1\ (\ k\ -1\ )$ y $x_4(k) = x_2(k-1)$ presentan un comportamiento similar a las variables de estado actuales, por esta razón son omitidas.

En la figura 2.12 se puede observar el comportamiento del ciclo de trabajo, para los casos



(a) $n = 0$

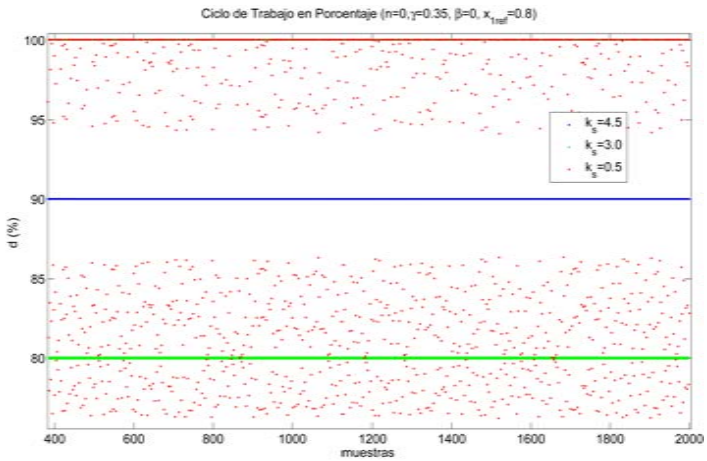


(b) $n = 1$

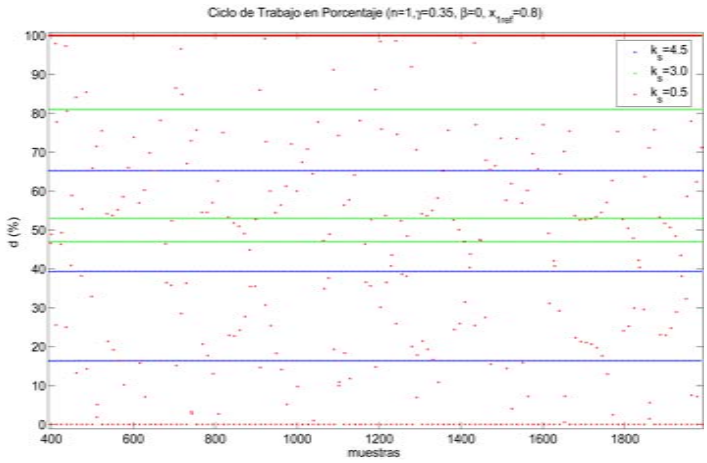
Figura 2.11: Regulación. Comportamiento de la variable de estado x_2 x_2 para $n = 0$ y $n = 1$

anteriormente presentados. En el sistema con un periodo de atraso el ciclo de trabajo toma valores dentro de todo el rango de operación ($0\,\%, 100\,\%$) (figura 2.12(b)). En contraste, cuando existe regulación ($n = 0$), el ciclo de trabajo se mantiene dentro de una región limitada del rango de operación (por ejemplo,($75\,\%, 100\,\%$)) (figura 2.12(b)).

Por último, en la figura 2.13 se muestra el comportamiento del error para el sistema en tiempo real ($n = 0$) y el sistema atrasado ($n = 1$). Si el sistema trabaja en tiempo real, se puede alcanzar un comportamiento satisfactorio en la tarea de regulación. Por otro lado, si el sistema



(a) n=0



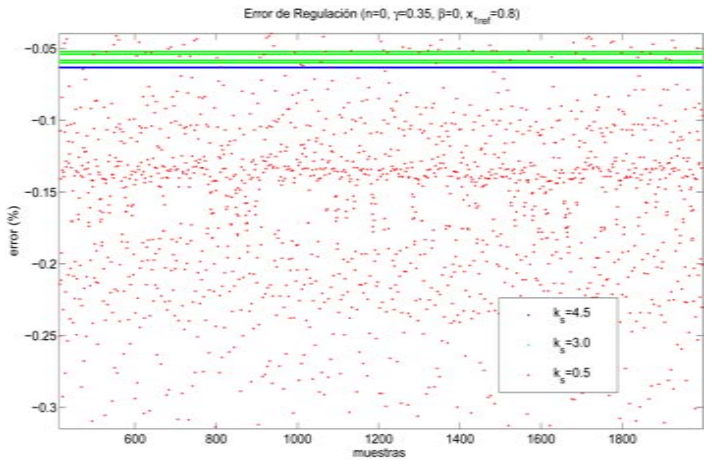
(b) n=1

Figura 2.12: Regulación. Comportamiento del ciclo de trabajo para $n = 0$ y $n = 1$

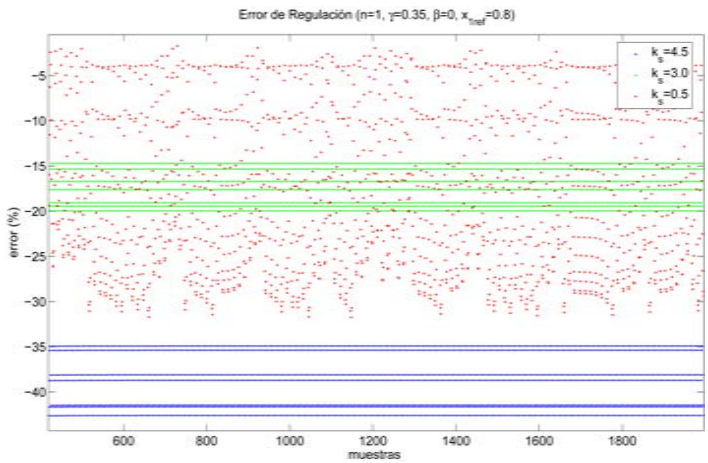
opera con tiempo de atraso, el error que se obtiene es intolerable para efectos prácticos.

2.4.2. Rastreo o Seguimiento

Para el caso de rastreo, se define la función a seguir como: $x_{1ref} = A_{1ref} sin(\omega t)$ donde A_{1ref} es la amplitud de la señal y ω es la frecuencia del sistema normalizado, se seleccionan $A_{1ref} = 0{,}8$ y $\omega = 0{,}0889$, la cual equivale a la normalización y adimensionalización de una frecuencia de $50Hz$.



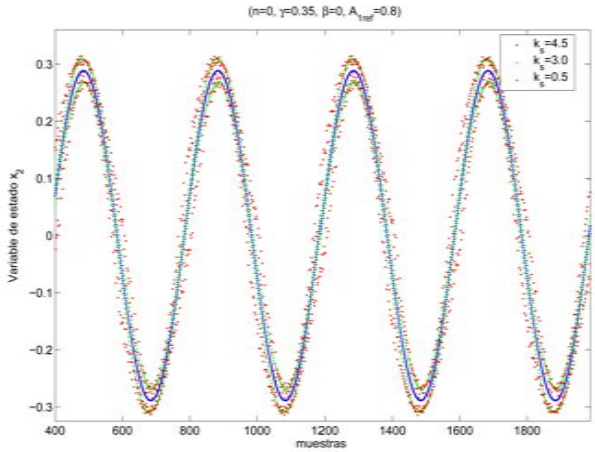
(a) $n = 0$



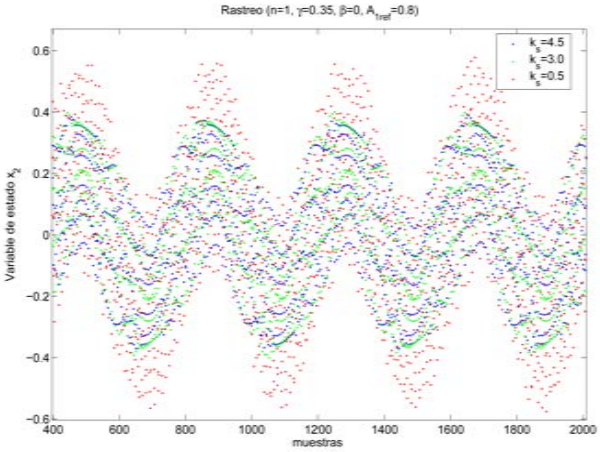
(b) $n = 1$

Figura 2.13: Regulación. Comportamiento del sistema $n = 0$ y $n = 1$ (Error)

Al evaluar el desempeño para tres valores de k_s diferentes ($k_s = 4{,}5; k_s = 3; k_s = 0{,}5$), en el sistema sin tiempo de atraso en los tres casos se alcanza el objetivo de controlar la salida ($y = x_1$) para que siga la señal sinusoidal, sin diferencias muy representativas en una escala entre $+A_{1ref}$ y $-A_{1ref}$. Sin embargo, el esfuerzo de control se ve reflejado en la variable de estado (x_2), la cual presenta fluctuaciones sobre una envolvente sinusoidal, como se observa en la figura 2.14(a). En el sistema con un periodo de atraso, en los tres casos de k_s existen notorias deficiencias en el seguimiento de la señal variante en el tiempo. En la figura 2.14(b), se muestra



(a) $n = 0$

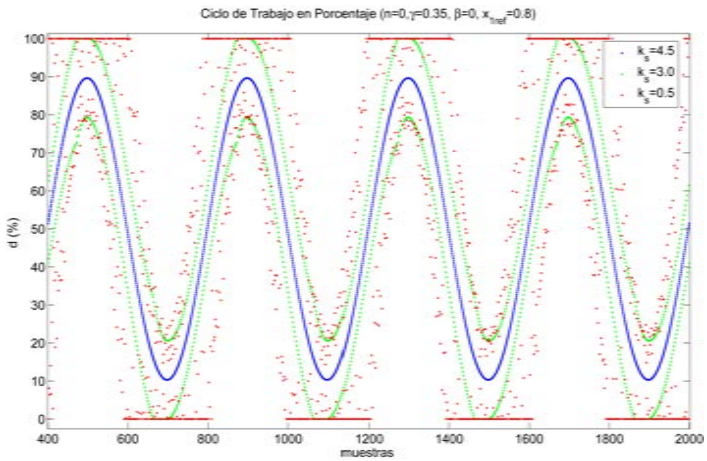


(b) $n = 1$

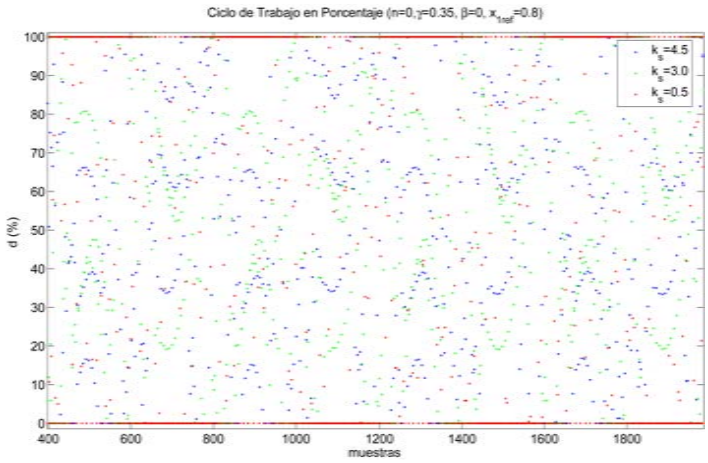
Figura 2.14: Rastreo. Comportamiento de la variable de estado x_2 para $n = 0$ y $n = 1$

el comportamiento de la variable de estado no controlada x_2.

En la figura 2.15 se puede observar el comportamiento del ciclo de trabajo, en los casos $n = 0$ y $n = 1$. Cuando $n = 0$, el ciclo de trabajo describe trayectorias variantes en el tiempo, asociadas a la señal de referencia, presentándose saturaciones a medida que el valor de k_s disminuye. Cuando $n = 1$ el ciclo de trabajo presenta sucesivas saturaciones que le impiden seguir adecuadamente la señal variante en el tiempo.



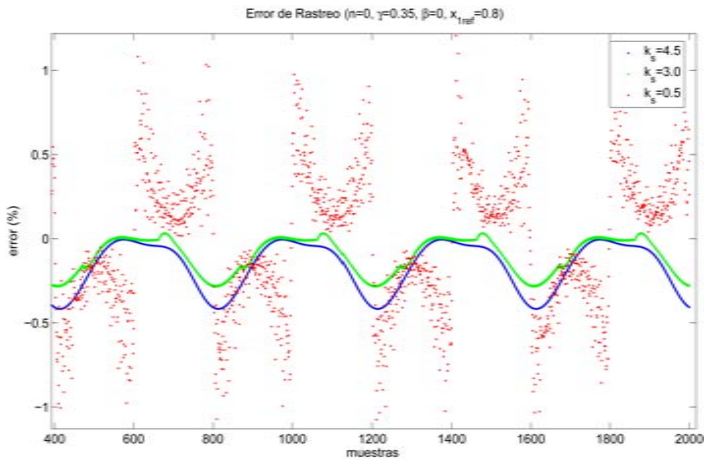
(a) $n = 0$



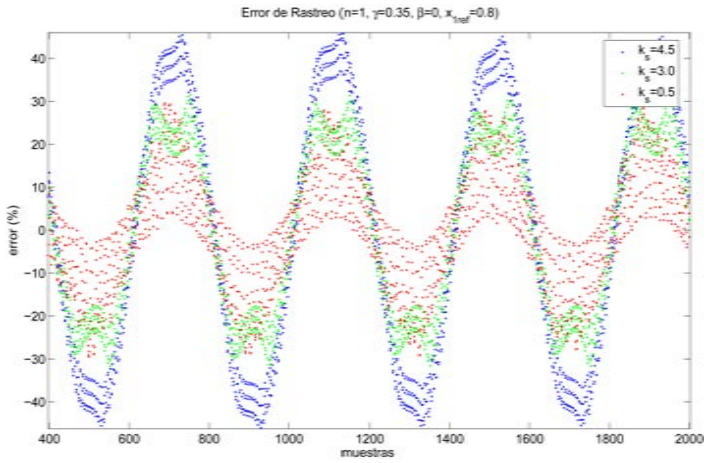
(b) $n = 1$

Figura 2.15: Rastreo. Comportamiento del ciclo de trabajo ($d(\,\%)$) para $n = 0$ y $n = 1$

El error de rastreo se puede observar en la fig.(2.16). Para $n = 1$ el error alcanza el $40\,\%$. Estos resultados, sumados a los obtenidos en la tarea de regulación, sugieren la necesidad de nuevos esquemas de control que mejoren el desempeño del sistema, en particular para el sistema con tiempo de atraso. En las próximas secciones se introducen dos técnicas de control de sistemas inestables y caóticos con las cuales se intenta mejorar la operación del sistema.



(a) $n = 0$



(b) $n = 1$

Figura 2.16: Error de Rastreo. Comportamiento del sistema $n = 0$ y $n = 1$ (Error)

2.5. Control de Caos

En [5] se demostró que el sistema que opera en un esquema PWMC basado en ZAD es susceptible de presentar respuestas caóticas, en la medida en que sus parámetros son variados, siendo el sistema más propenso en los casos en que se incluyen periodos de atraso en su funcionamiento, esto fue además mostrado gráficamente en las secciones anteriores.

En primera instancia, se presenta los fundamentos de la técnica TDAS y se muestran resultados

de su funcionamiento. Al evaluar el desempeño de esta técnica se encuentran dificultades para los casos en los que se trabaja con tiempo de atraso, por lo cual se recurre a una nueva opción, la técnica FPIC, que ha mostrado buenas características en esta clase de sistemas.

2.5.1. Control de caos con TDAS

La técnica TDAS llamada así de sus iniciales en inglés Time Delayed Auto-Synchronization, ha sido ampliamente utilizada en el control de sistemas caóticos, desde su diseño a principios de la década de los noventa.

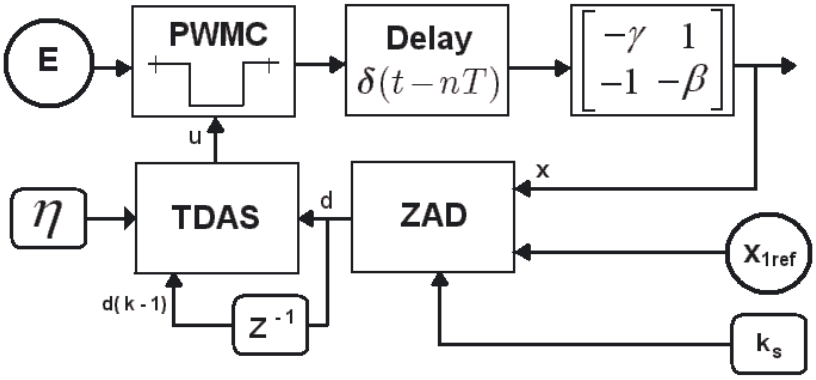


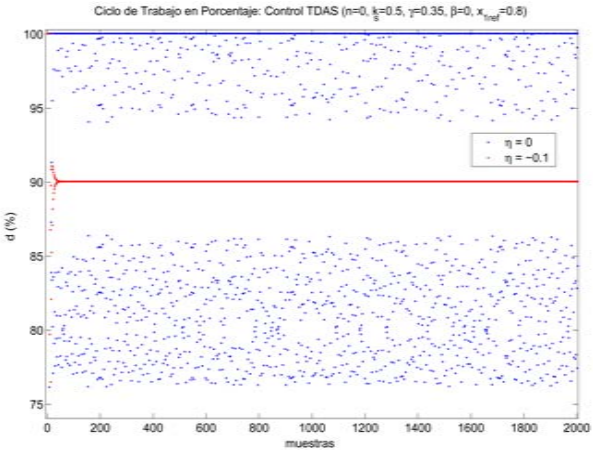
Figura 2.17: Diagrama de bloques del sistema controlado con TDAS.

El principio de funcionamiento de esta técnica se basa en la aplicación de realimentación de muestras retardadas de la variable a controlar, con el fin de disminuir el esfuerzo de control [38]. Para este caso particular, la ley de control TDAS se aplica al ciclo de trabajo, dado que el conjunto de variables que induce comportamientos inestables en el sistema pueden ser relacionadas y unificadas a esta variable. El diagrama de bloques del sistema controlado con TDAS se muestra en la figura 2.17, donde se usa la ley de control dada por la ecuación (2.14), que es tomada de [52].

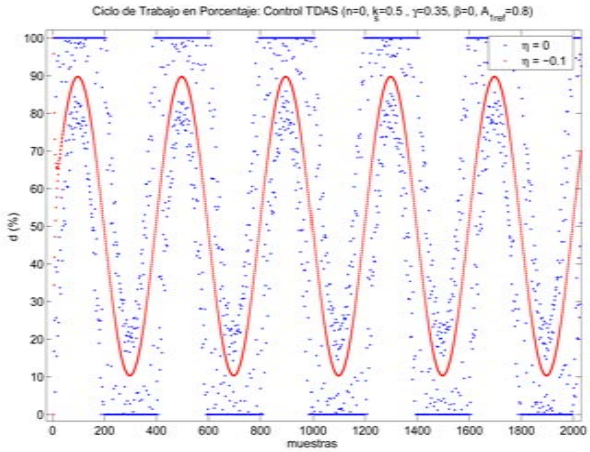
$$d(k) = d + \eta(d(k) - d(k-1)) \tag{2.14}$$

donde $d(k)$ es el ciclo que se va a aplicar, d es el valor obtenido con la ecuación (2.15), $d(k-1)$ es el ciclo de trabajo de la iteración anterior y η es el parámetro de control TDAS o factor de realimentación.

$$d = \frac{2(s(\mathbf{x}((k-n)T)) + T\dot{s_2}(\mathbf{x}((k-n)T)))}{\dot{s_2}(\mathbf{x}((k-n)T)) - \dot{s_1}(\mathbf{x}((k-n)T))} \tag{2.15}$$



(a) Regulación



(b) Rastreo

Figura 2.18: Comportamiento del ciclo de trabajo, en tareas de regulación y rastreo con $n = 0$, $k_s = 0{,}5$. Sin y con control TDAS

El controlador TDAS es capaz de estabilizar los comportamientos caóticos que el sistema en tiempo real ($n = 0$) experimenta con valores pequeños del parámetro k_s (como $k_s = 0{,}5$ mostrado sin control en la figura 2.10). En la figura 2.18 se comparan los ciclos de trabajo, en tareas de regulación y de rastreo, con $n = 0$ y $k_s = 0{,}5$, sin y con el control TDAS. El control TDAS para este caso muestra un correcto desempeño, tanto en regulación como en rastreo.

El sistema PWMC con el control TDAS presenta una alta sensibilidad a cambios en el parámetro de control η, lo cual ocasiona que el rango de control donde el sistema exhibe errores tolerables sea muy limitado. Por fuera de ese rango el ciclo de trabajo se satura y por ende se pierde la capacidad de regulación en el sistema.

Al incluir tiempo de atraso en el sistema la tarea de control se vuelve más exigente, y en consecuencia las dificultades e inconvenientes del control TDAS aumentan. Siendo el sistema más inestable con periodos de atraso, la sensibilidad del parámetro de control η crece y la estabilidad de la órbita 1T-periódica no se alcanza sin que el ciclo de trabajo se sature.

Una alternativa para solucionar estos problemas es definir otra ley de control en la cual se realimenten otras variables u otras muestras. Dado que no se pudo establecer un criterio para la escogencia de la ley de control a medida que se varían las condiciones de operación, como el tiempo de atraso, se optó por no trabajar más con esta técnica de control y utilizar otra que presente una buena solución al problema de operar el sistema con tiempo de atraso, eje temático de este trabajo.

En [5] los problemas antes expuestos fueron algunas de las motivaciones que tuvo la autora para explorar nuevas formas de control y diseñar la técnica FPIC o Control por Inducción al Punto Fijo, la cual muestra tener un comportamiento bueno que alienta a seguirla utilizando y analizando.

2.5.2. Control de caos con FPIC

Control por Inducción al Punto Fijo (FPIC) es una técnica de control diseñada en [27], [5], [28] que es usada especialmente en sistemas discretos, la cual se basa en el teorema de continuidad de los valores propios.

El control con FPIC ha mostrado ser una técnica versátil, en la medida que puede estabilizar órbitas de periodo uno y superior en sistemas inestables y/o caóticos de una manera simple y sin medición de las variables de estado, como sí requiere la técnica TDAS.

En términos generales, la técnica FPIC lo que hace es obligar al sistema a que evolucione al punto fijo. En este sentido se parte del conocimiento previo del punto fijo o el valor de estado estacionario de la señal de control, bien sea de manera analítica o numérica y con base en él se diseña la estrategia de control.

En [27], se encuentra una amplia explicación de las aplicaciones y estabilidad de este con-

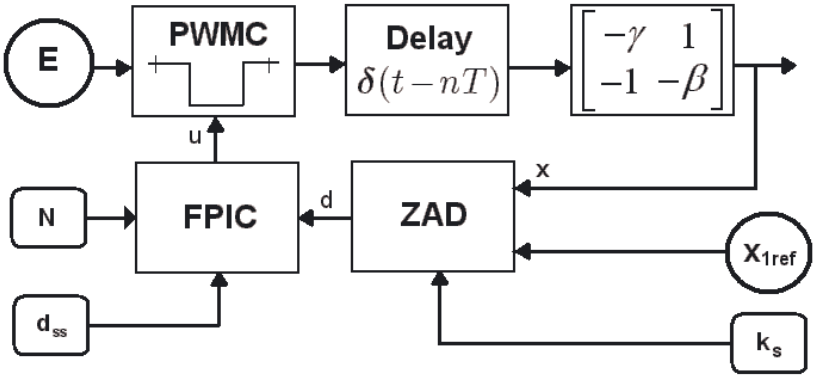


Figura 2.19: Diagrama de bloques del sistema controlado con FPIC.

trolador, que puede ser pensado como un control del tipo feed-forward, similar a un control con modelo de referencia, en el cual el modelo no corresponde al comportamiento deseado del estado, sino a un valor posible del controlador en estado estacionario.

El requisito primordial para aplicar esta técnica es conocer el punto de equilibrio, el cual se calcula de manera analítica en el próximo capítulo (para los casos de regulación y rastreo).

Con el punto fijo del sistema (el cual corresponde con el valor de regulación: $(x_1^*, x_2^*) = (0{,}8, 0{,}28)$ si el comportamiento deseado es trabajar al 80 %), la ley de control está dada por la ecuación (2.16).

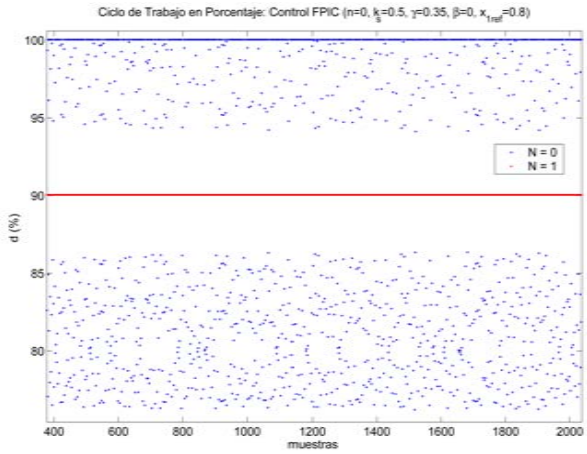
$$d(k) = \frac{d + N d_{ss}}{N + 1} \tag{2.16}$$

donde d se calcula de la ecuación (2.15), d_{ss} es el valor en estado estacionario del ciclo de trabajo y N es el parámetro de control de la técnica. El diagrama de bloques del sistema controlado con FPIC es presentado en la figura 2.19.

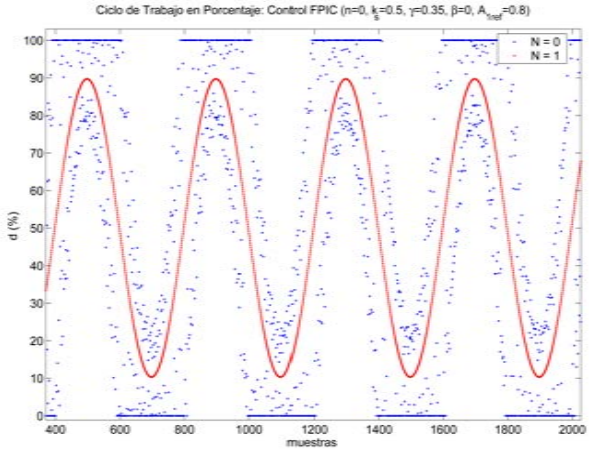
La ecuación (2.16) se aplica tanto al sistema operado en tiempo real como al sistema atrasado, dado que el punto fijo no se altera con el tiempo de atraso.

En la figura 2.20 se muestra el comportamiento del sistema PWMC que opera en zona de caos (el mismo caso mostrado en la figura 2.18 pero ahora con la técnica FPIC con un $N = 1$). Igual que la técnica TDAS, la estrategia FPIC controla efectivamente el sistema sin tiempo de atraso, en tareas de regulación y rastreo.

Ahora considerando tiempo de atraso ($n \geq 1$), casos donde no se pudo encontrar una ley de control TDAS que presentara un desempeño adecuado, el control FPIC responde satisfactoria-



(a) Regulación

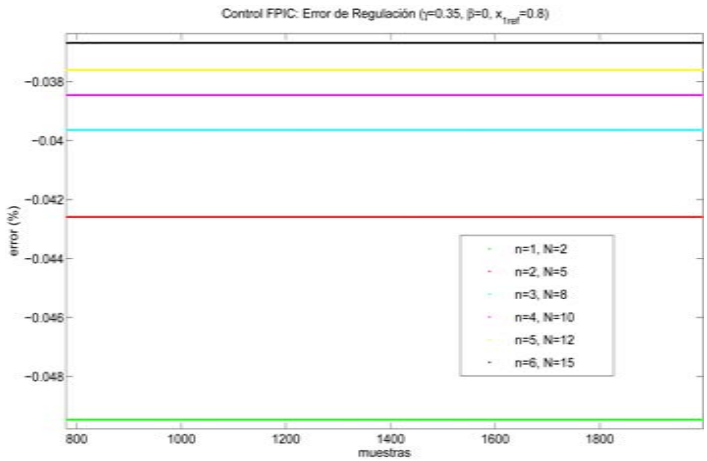


(b) Rastreo

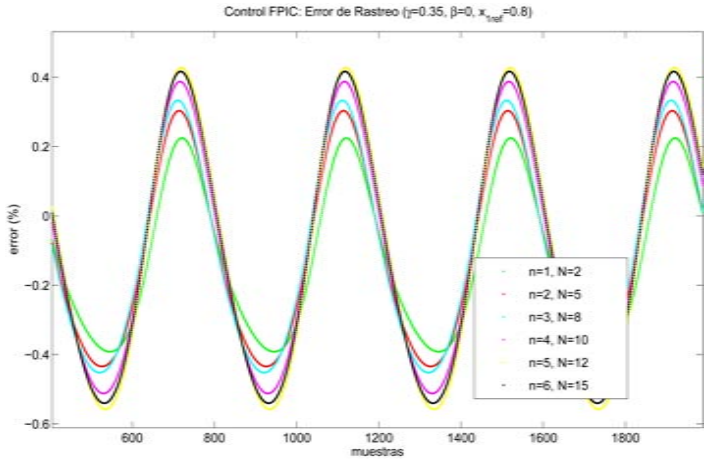
Figura 2.20: Comportamiento del ciclo de trabajo, en tareas de regulación y rastreo con $n = 0$, $k_s = 0{,}5$. Sin y con control FPIC

mente. Por ejemplo, en la figura 2.21 se presentan los errores de regulación y de rastreo para los casos $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con parámetros de FPIC: $N = \{2, 5, 8, 10, 12, 15\}$, respectivamente, y un valor del parámetro ZAD: $k_s = 4{,}5$.

En la tabla 2.1 se sintetizan los errores de regulación y rastreo para distintos casos de atraso, en todos se muestran errores tolerables que confirman la efectividad del control. Note que el sistema a valores altos de FPIC mejora su estabilidad absoluta (menor error de regulación), sin



(a) Regulación



(b) Rastreo

Figura 2.21: Comportamiento del error de regulación y de rastreo del sistema $n = 1$ a $n = 6$, $k_s = 4{,}5$, con control FPIC

embargo, el sistema pierde robustez ante perturbaciones, variaciones en los parámetros, etc.

2.6. Disipación de energía en el sistema

En esta sección, se establecen algunas consideraciones sobre los efectos que los elementos disipativos de energía tienen en el sistema.

Como se presentó anteriormente, los parámetros que miden la cantidad de energía disipa-

Condición de operación	Error de regulación máximo (%)	Error de rastreo máximo (%)
($n = 1$, $N = 2$)	0,0497	0,3920
($n = 2$, $N = 5$)	0,0428	0,4344
($n = 3$, $N = 8$)	0,0398	0,4520
($n = 4$, $N = 10$)	0,0386	0,5121
($n = 5$, $N = 12$)	0,0377	0,5576
($n = 6$, $N = 15$)	0,0368	0,5407

Tabla 2.1: Error de regulación y de rastreo del sistema con control FPIC $k_s = 4{,}5$ ($n = 1$ hasta $n = 6$)

da en el sistema están contenidos en los parámetros adimensionales γ y β, por lo tanto, se analizará cómo la variación en alguno de estos parámetros puede repercutir en el desempeño del sistema.

Inicialmente, se define el factor de disipación en el sistema, el cual se obtiene al relacionar las ecuaciones que definen γ y β en función de los parámetros físicos del sistema.

Relacionando las ecuaciones (2.3) y (2.4) del esquema primal (figura 2.8), o las ecuaciones (2.5) y (2.6) del esquema dual (figura 2.9), se encuentra la proporción dada por la ecuación (2.17).

$$\frac{\gamma}{R_{Ds}} = \frac{G_{Dp}}{\beta} \tag{2.17}$$

Por lo tanto, las pérdidas de energía en el sistema se pueden expresar por la ecuación (2.18), donde K_D es el factor de disipación de energía en el sistema.

$$K_D = \gamma\beta = R_{Ds}G_{Dp} = \frac{R_{Ds}}{R_{Dp}} \tag{2.18}$$

La ecuación (2.18) debe tenerse en cuenta a la hora de diseñar el sistema. Dependiendo de la aplicación puede ser tolerable o intolerable que exista disipación de energía. En las aplicaciones típicas de conversión de energía en electrónica de potencia, como la del convertidor tipo buck, se diseña el sistema para que se tengan las menores pérdidas de energía posible, haciendo que $K_D \rightarrow 0$, lo que físicamente implica que: $R_{Ds} \rightarrow 0$ ó que $R_{Dp} \rightarrow \infty$. En el esquema primal (figura 2.8), sólo se tiene control sobre la condición $R_{Ds} \rightarrow 0$, ya que la otra condición depende del valor que se tome como carga (R_L). En el esquema dual (figura 2.9), se trabaja

sobre la condición $R_{Dp} \to \infty$, porque la otra condición es la que se encuentra influenciada por la carga.

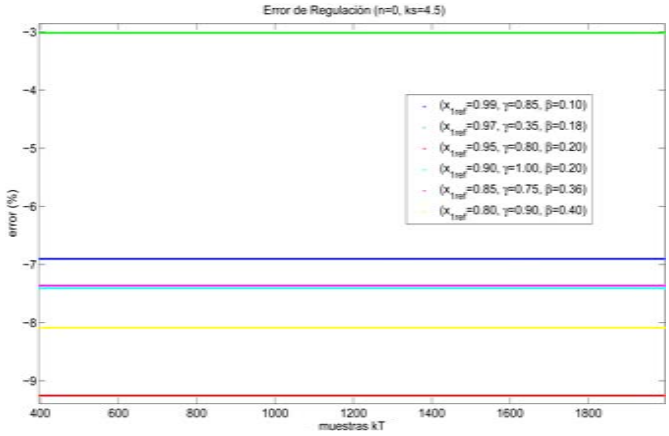


Figura 2.22: Error de regulación en el sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β, x_{1ref}

Para evaluar el desempeño del sistema ante un valor determinado de K_D, también debe considerarse el valor de referencia (x_{1ref} en el caso de regulación y A_{1ref} en el caso de rastreo), ya que este valor indica que porcentaje de energía de la señal de entrada se desea transferir a la salida. Si la referencia está al $100\,\%$ del valor de la fuente de energía, cualquier disipación de energía puede afectar el desempeño final del sistema. En cambio, si la referencia es inferior al valor de entrada, pérdidas moderadas de energía no afectan el desempeño del sistema, ya que existe un margen de tolerancia de disipación de energía en el sistema.

En consecuencia, las pérdidas de energía debidas a elementos disipativos en el sistema afectan el desempeño del sistema sólo en condiciones de operación extremas, en los demás casos sus efectos pueden ser despreciados. En las figuras 2.22 y 2.23 se presentan algunos casos donde los errores de regulación y rastreo, respectivamente, aumentan debido a variaciones en los parámetros γ, β y referencia.

Note que el sistema operado en tiempo real ($n = 0$) y un valor de la constante de tiempo de la dinámica del error de $k_s = 4{,}5$, no había presentado errores por encima del $1\,\%$, ya que hasta el momento se trabajaba con $\beta = 0$, es decir, $K_D = 0$ y con referencia al $80\,\%$ (este hecho se presenta en las figuras 2.13 y 2.16, y en la tabla 2.1).

Al trabajar con $\beta > 0$ y valores de referencia cercanos al $100\,\%$, es posible que el sistema exhiba errores superiores al $1\,\%$. En la tabla 2.2 se resumen los errores alcanzados para los 6

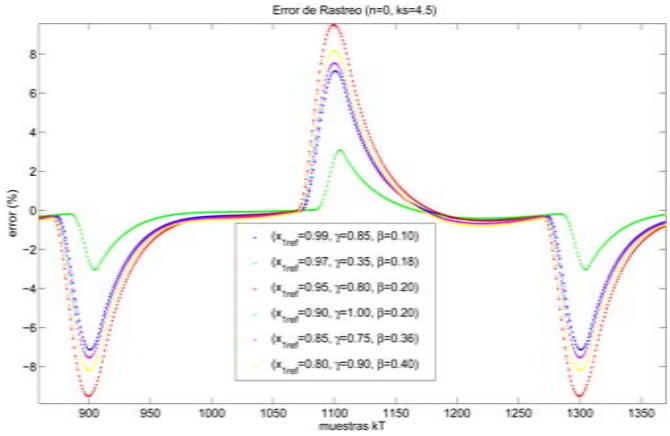


Figura 2.23: Error de rastreo en el sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β, A_{1ref}

casos analizados.

Observe en la tabla 2.2 que a medida que el valor de la referencia se hace menor a 1, se requiere un valor mayor en el factor de disipación de energía K_D, para tener un error considerable.

Condición de operación ($n = 0$, $k_s = 4{,}5$)	K_D	Error de regulación máximo ($ref = x_{1ref}$)	Error de rastreo máximo ($ref = A_{1ref}$)
($ref = 0{,}99$, $\gamma = 0{,}85$, $\beta = 0{,}10$)	0,085	6,9031 %	7,1382 %
($ref = 0{,}97$, $\gamma = 0{,}35$, $\beta = 0{,}18$)	0,063	3,0171 %	3,0888 %
($ref = 0{,}95$, $\gamma = 0{,}80$, $\beta = 0{,}20$)	0,160	9,2556 %	9,5002 %
($ref = 0{,}90$, $\gamma = 1{,}00$, $\beta = 0{,}20$)	0,200	7,4074 %	7,5152 %
($ref = 0{,}85$, $\gamma = 0{,}75$, $\beta = 0{,}36$)	0,270	7,3645 %	7,5455 %
($ref = 0{,}80$, $\gamma = 0{,}90$, $\beta = 0{,}40$)	0,360	8,0882 %	8,1849 %

Tabla 2.2: Error de regulación y de rastreo del sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β y la referencia

En la aplicación del convertidor buck, en el marco de la electrónica de potencia, los valores utilizados para K_D, presentados en la tabla 2.2, pueden llegar a ser poco probables de presentarse en la realidad, ya que como se mencionó anteriormente, en el diseño se procura hacer $K_D \to 0$. Sin embargo, factores como la calidad de los elementos o condiciones de operación adversas pueden ocasionar pérdidas de energía que influencien negativamente el funcionamiento del sistema.

2.7. Conclusiones y Observaciones

Los temas tratados en este capítulo son relevantes en la medida que brindan el soporte teórico y la guía necesaria para comprender los capítulos siguientes. Por ejemplo, en este capítulo se evidencia la intención de dar un enfoque general a los análisis que se realicen en la tesis, mediante la aplicación de los principios de dualidad y analogía de sistemas.

Además, la incorporación de un parámetro o grado de libertad adicional al modelo, es un cambio de fondo en la estructura tradicional del mismo, sustentado en el hecho de mantener la simplicidad del modelo, al no alterar su dimensión, y al mismo tiempo hacerlo más real, en el sentido de tener en cuenta una característica que por naturaleza se presenta en estos sistemas, como lo es la disipación de energía.

Sin embargo, con el objeto de ampliar los resultados mostrados en otros trabajos (como [5]), se decide trabajar en un mayor porcentaje con el mismo modelo (por ejemplo haciendo $\beta = 0$) y valores de parámetros para dar un soporte adicional a la tesis. Por lo anterior, las repercusiones de las modificaciones hechas al modelo como la inclusión de elementos disipadores inherentes a un sistema reductor de energía ($\beta \neq 0$), serán analizadas paulatinamente en el transcurso de la tesis.

También es importante resaltar la necesidad de trabajar con técnicas de control adicionales a la de promediado cero de la dinámica del error (ZAD) cuando el sistema se trabaja en un esquema de PWM centrado y con tiempo de atraso. Por este motivo se hizo una revisión de las técnicas TDAS y FPIC y se evaluaron sus desempeños. Con la técnica TDAS existieron grandes dificultades en la definición de la ley de control en el sistema con tiempo de atraso, mientras que con la técnica FPIC no se presentaron problemas al definir la ley de control para cualquier tiempo de atraso, logrando resultados satisfactorios, que llevaron a tomar la decisión de sólo utilizar en adelante la técnica FPIC, descartando el control TDAS para esta aplicación.

Los comportamientos tan disímiles que se presentan al variar los parámetros de control en el sistema , como lo son el parámetro k_s asociado con la estrategia ZAD y el parámetro N relacionado con el control FPIC, ambientan la importancia de realizar análisis de estabilidad y de bifurcaciones al sistema, para determinar las condiciones de operación en las cuales el sistema responde adecuadamente a los requerimientos de regulación o de rastreo, o bajo qué circunstancias el sistema puede entrar en zona de caos. Estos análisis se encuentran en los próxi-

mos capítulos, particularmente el análisis de estabilidad será el objeto de estudio del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Análisis de Estabilidad de la Órbita 1T-Periódica

En este capítulo se hace el estudio de la estabilidad del sistema controlado con *ZAD* y *PWM* centrado y con tiempo de atraso (*PWMCD de orden n*). Inicialmente se realiza el análisis del sistema en estado estacionario (estabilidad absoluta) y posteriormente se plantean las herramientas necesarias para analizar el sistema en estado transitorio (estabilidad relativa).

3.1. Análisis de Estabilidad Absoluta: Comportamiento del Sistema en Estado Estacionario

En esta parte del capítulo se investiga la estabilidad de los puntos de equilibrio, basados en la aplicación de Poincaré y en la ecuación variacional del sistema. El procedimiento que se sigue, en su mayoría es una adaptación del presentado en [5], con dos modificaciones principales: La inclusión del parámetro β (que está relacionado con las pérdidas de energía inherentes al sistema) y la del término n (asociado al tiempo de atraso del sistema).
En sistemas continuos los puntos de equilibrio están dados por:

$$\dot{\mathbf{x}} = 0$$

Cuando el análisis es hecho en tiempo discreto estos puntos se denominan puntos fijos y se definen como:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$$

Los puntos fijos de la solución $1T$-periódica son los mismos para el esquema sin atraso o con atraso, debido a que el atraso no tiene influencia en los puntos fijos del sistema. De tal forma,

las expresiones:

$$\mathbf{x}(k+i+1) = \mathbf{x}(k+i)$$

$$\mathbf{x}(k-i+1) = \mathbf{x}(k-i)$$

para $i = \{0, 1, 2, ...\}$, son equivalentes y conducen al mismo punto fijo.

3.1.1. Puntos Fijos: Ciclo de Trabajo en Estado Estacionario

Utilizando algunas aproximaciones es posible tener información del ciclo de trabajo en estado estacionario sin necesidad de resolver las ecuaciones. Partimos de la expresión dada en la ecuación (3.1) para el ciclo de trabajo, donde $s(0)$ es la superficie de deslizamiento al momento de muestrear y $\dot{s}_-$ y $\dot{s}_+$ son las pendientes de la dinámica del error cuando $u = u_-$ y $u = u_+$, respectivamente.

$$d = \frac{2s(0) + T\dot{s}_-}{\dot{s}_- - \dot{s}_+} \tag{3.1}$$

Al denominador de la ecuación (3.1): $\dot{s}_- - \dot{s}_+$, se le puede realizar el siguiente tratamiento matemático:

$$\dot{s}_- - \dot{s}_+ = \frac{\partial s_-}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial s_+}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_-\right) - \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_+\right) = -k_s(u_+ - u_-)$$

Ahora, en el numerador se pueden realizar varias consideraciones, basadas en la superficie deslizante:

$$\dot{s} = (1 - k_s\gamma)\,\dot{x}_1 + k_s\dot{x}_2 - \dot{x}_{1ref} - k_s\ddot{x}_{1ref}$$

Reemplazando $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ de las ecuaciones de estado se obtiene:

$$\dot{s}_- = \left(\gamma^2 k_s - \gamma - k_s\right)x_1 + (1 - \gamma k_s - \beta k_s)\,x_2 + k_s u_- - \dot{x}_{1ref} - k_s\ddot{x}_{1ref}$$

Es posible suponer que si el sistema se encuentra en estado estacionario $x_1 = x_{1ref}$ con lo cual $s(0) = 0$ y de la primera ecuación del sistema $\dot{x}_1 = -\gamma x_1 + x_2$, se tiene $x_2 = \dot{x}_{1ref} + \gamma x_{1ref}$. Por lo tanto, si hay seguimiento, en estado estacionario: $x_1^* = x_{1ref}$ y $x_2^* = \dot{x}_{1ref} + \gamma x_{1ref}$, con lo cual se obtiene:

$$d^* = T\frac{-k_s x_{1ref} - k_s\gamma\dot{x}_{1ref} - k_s\ddot{x}_{1ref} + k_s u_- - \gamma\beta k_s x_{1ref} - \gamma\beta\dot{x}_{1ref}}{-k_s(u_+ - u_-)}$$

donde * representa valor de estado estacionario. Para el caso de regulación, todas las derivadas de la referencia son cero, y por lo tanto el ciclo de trabajo de estado estacionario está dado por:

$$d^* = T\frac{(1+\gamma\beta)x_{1ref}-u_-}{u_+-u_-}$$

Si se toman $u_+ = 1$ y $u_- = -1$, el ciclo de trabajo en estado estacionario está dado por la ecuación (3.2), donde K_D es el factor de disipación de energía del sistema.

$$d^* = T\frac{1+(1+\gamma\beta)x_{1ref}}{2} = T\frac{1+(1+K_D)x_{1ref}}{2} \tag{3.2}$$

Este valor de ciclo de trabajo obedece a un sistema cuyo pulso se genera con la secuencia $\{+1,-1,+1\}$ (esta es la secuencia escogida para realizar los análisis). Si los cálculos se fueran efectuado con la secuencia $\{-1,+1,-1\}$ el valor del punto de equilibrio del ciclo de trabajo varía de la forma expresada por la ecuación (3.3).

$$d^* = T\frac{1-(1+\gamma\beta)x_{1ref}}{2} = T\frac{1-(1+K_D)x_{1ref}}{2} \tag{3.3}$$

El comportamiento de ambos ciclos de trabajo (ecuaciones (3.2) y (3.3)) es complementario, es decir, $d^*_+ + d^*_- = 1$, con $d^*_+ = d^*$ cuando la secuencia del pulso es $\{+1,-1,+1\}$, y $d^*_- = d^*$ cuando la secuencia del pulso es $\{-1,+1,-1\}$.

En [5] se muestra que las aproximaciones realizadas para llegar a la ecuación (3.2), conllevan a poco error (1,9 % si $x_{1ref} = 0{,}1$ y 0,033 % si $x_{1ref} = 0{,}9$), facilitando la solución de otros aspectos relacionados con la estabilidad del sistema.

Modificación del punto fijo debida a la disipación de energía en el sistema

En este apartado se complementan las consideraciones realizadas en el capítulo anterior sobre disipación de energía en el sistema, realizando un análisis basado en la ecuación (3.2).

En la ecuación (3.2) el punto de operación del sistema 1T-periódico (d^*) depende del periodo de muestreo T, de la referencia x_{1ref}, y del factor de energía disipada K_D.

En la tabla 3.1 se calculan los valores del ciclo de trabajo en estado estacionario para los seis casos presentados en la tabla 2.2 de la página 37, con el fin de aclarar las causas por las cuales se presentan errores de funcionamiento considerables.

En todos los casos presentados en la tabla 3.1 los puntos fijos no son alcanzables, ya que el sistema se satura en $d = T$. Al no poder lograr el valor deseado en estado estacionario el sistema exhibe los errores presentados en la tabla 2.2.

Condición de operación ($n = 0$, $k_s = 4{,}5$)	K_D	$d^*(T)$
($ref = 0{,}99$, $\gamma = 0{,}85$, $\beta = 0{,}10$)	$0{,}085$	$1{,}037T$
($ref = 0{,}97$, $\gamma = 0{,}35$, $\beta = 0{,}18$)	$0{,}063$	$1{,}016T$
($ref = 0{,}95$, $\gamma = 0{,}80$, $\beta = 0{,}20$)	$0{,}160$	$1{,}051T$
($ref = 0{,}90$, $\gamma = 1{,}00$, $\beta = 0{,}20$)	$0{,}200$	$1{,}040T$
($ref = 0{,}85$, $\gamma = 0{,}75$, $\beta = 0{,}36$)	$0{,}270$	$1{,}040T$
($ref = 0{,}80$, $\gamma = 0{,}90$, $\beta = 0{,}40$)	$0{,}360$	$1{,}044T$

Tabla 3.1: Ciclo de trabajo en estado estacionario del sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$. Variaciones en γ, β y la referencia

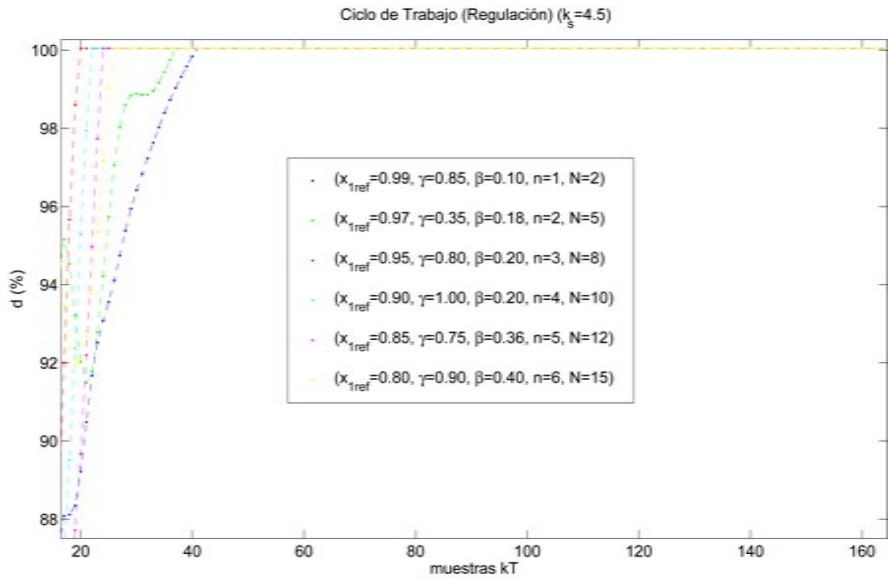


Figura 3.1: Ciclo de trabajo en el sistema $n = 0$, $k_s = 4{,}5$ (regulación). Variaciones en γ, β, x_{1ref}

En la figura 3.1 se presenta el comportamiento del ciclo de trabajo para los seis casos de la tabla 3.1, en la cual se puede observar la saturación abrupta del ciclo de trabajo en $d = T$.

En conclusión, el factor de disipación de energía K_D incide en el cálculo del punto de operación del sistema, lo cual en casos extremos como los mostrados en la tabla 3.1 puede llevar a saturaciones del ciclo de trabajo.

Aún cuando el factor K_D es un valor muy pequeño o no afecte considerablemente el desempeño del sistema, puede ser conveniente tenerlo en cuenta para calcular el punto de operación del sistema con mayor precisión, ya que muchas técnicas de análisis y de control requieren que el cálculo del punto de fijo del sistema sea lo más cercano a la realidad posible.

3.1.2. Estabilidad de los Puntos Fijos

En esta sección se determina la estabilidad absoluta de la órbita 1T-periódica para el caso de regulación. Para tal fin existen varias técnicas entre las que se encuentran:

- **Multiplicadores característicos**: Técnica en la que se evalúa el Jacobiano de la aplicación de Poincaré en el punto de equilibrio y se calculan los valores propios.
- **Exponentes de Lyapunov**: Es una técnica numérica que utiliza la definición de exponente de Lyapunov para determinar la velocidad de convergencia o divergencia de dos órbitas con condiciones iniciales muy próximas.
- **Exponentes de Floquet**: En esta técnica se resuelve de manera analítica la ecuación variacional asociada al sistema perturbado para determinar el valor límite del parámetro de bifurcación (k_s o N), a partir del cual la órbita de periodo 1T pierde su estabilidad.

A continuación se presenta una breve explicación de las dos primeras técnicas (Multiplicadores Característicos y Exponentes de Lyapunov) para los dos casos de operación en las que se utilizaron: sin tiempo de atraso ($n = 0$) y con un periodo de atraso ($n = 1$). Posteriormente se explica de forma detallada el procedimiento utilizado para calcular los Exponentes de Floquet de la órbita $1T$-periódica. Con esta técnica se pudo generalizar el cálculo de estabilidad para cualquier periodo de atraso, por lo tanto fue la escogida para realizar el análisis de estabilidad de la órbita $1T$-periódica del sistema.
No obstante, haciendo uso de apropiadas transformaciones es posible obtener cualquiera de las tres representaciones antes mencionadas, como se ilustra en la figura 3.2, donde λ representa los exponentes de Lyapunov, μ a los exponentes de Floquet y m a los multiplicadores característicos. Debido a la amplia utilización de los exponentes de Lyapunov en el análisis de estabilidad, y a las facilidades de visualización e interpretación que brindan los multiplicadores característicos en el análisis de bifurcaciones, será común encontrar referenciadas las diferentes técnicas en el transcurso de la tesis.

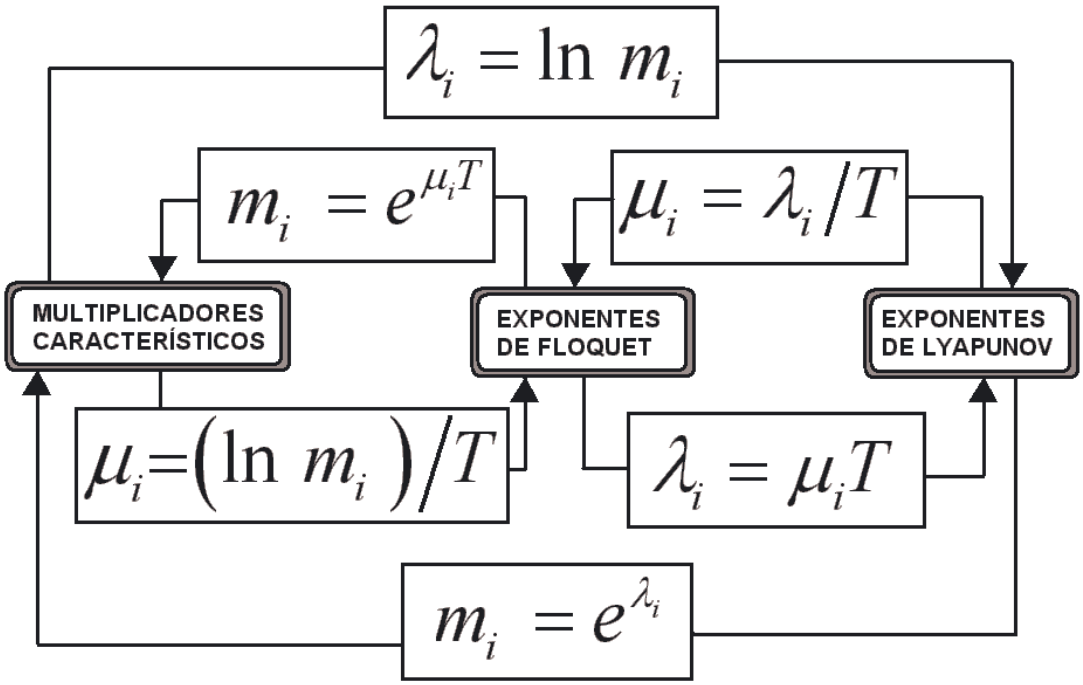


Figura 3.2: Transformaciones: Exponentes de Floquet $<->$ Multiplicadores Característicos $<->$ Exponentes de Lyapunov.

Las tres técnicas brindan la misma información de estabilidad de la órbita $1T$-periódica pero desde perspectivas diferentes. Los multiplicadores característicos tienen un enfoque de tiempo discreto, es decir, la condición de estabilidad es $|m_i| < 1$. En cambio, la condición de estabilidad cuando el análisis se realiza por exponentes de Floquet o por exponentes de Lyapunov es $Re(\mu) < 0$ y $Re(\lambda) < 0$, respectivamente, lo cual corresponde a una perspectiva de tiempo continuo.

Estabilidad de los Puntos Fijos: Multiplicadores Característicos

Partimos de la aplicación de Poincaré del sistema, para el estudio de los dos casos, $n = 0$ y $n = 1$, dada por la ecuación (3.4).

$$\mathbf{x}((\mathbf{k}+\mathbf{1})\mathbf{T}) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(\mathbf{kT}) + (e^{\mathbf{A}(T-d/2)} + \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}d/2} - \mathbf{I})\mathbf{B} - e^{\mathbf{A}d/2}\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}(T-d)} - \mathbf{I})\mathbf{B} \quad (3.4)$$

donde el ciclo de trabajo a ser aplicado en $(k+1)T$ es calculado con el valor de los estados en $(k-n)T$.

La relación entre los exponentes de Floquet y los multiplicadores característicos viene dada de acuerdo con el teorema del mapeo espectral [53] como se presenta en la ecuación (3.5), donde m representa los multiplicadores característicos y μ los exponentes de Floquet.

$$|m_i| = e^{\mu T} \tag{3.5}$$

*** Multiplicadores Característicos PWMC**

En el esquema de funcionamiento en tiempo real, se considera que el ciclo de trabajo se puede definir en función de los estados actuales, por lo tanto, la ecuación (2.10) se puede expresar de la forma dada por la ecuación (3.6) que en su forma compacta es: $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k)) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

El Jacobiano del sistema se puede calcular tal como se muestra en la ecuación (3.7).

$$\mathbf{A}_{n0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1(k)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2(k)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1(k)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2(k)} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Ahora, al evaluar la matriz Jacobiana en el punto fijo ($\mathbf{A}_{n0} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_i}\right)_{P.F.}$, tomando $P.F.$ como $(x_{1ref}, \gamma x_{1ref})$), se pueden calcular los valores propios de la solución del sistema, los cuales son equivalentes a los multiplicadores característicos del sistema. [54]

Este procedimiento basado en la linealización es posible porque no existe discontinuidad de campo vectorial en el momento de muestrear. [49] Con esto en claro, las características de los valores propios dados por: $|m\mathbf{I} - \mathbf{A}_{n0}| = 0$, definen la estabilidad de la órbita $1T$-periódica. Si $|m_i| < 1$, los valores propios se localizan dentro del círculo unitario, por lo cual la solución es estable. En cambio si algún multiplicador está por fuera del círculo unitario ($|m_i| > 1$), la órbita es inestable.

*** Multiplicadores Característicos *PWMCD de orden 1***

En el esquema de funcionamiento con un periodo de atraso ($n = 1$), el sistema presenta cuatro variables de estado (las dos actuales y las dos atrasadas), debido a que el ciclo de trabajo ahora

se calcula con las muestras tomadas en $(k-1)T$, como en la ecuación (3.8).

$$d = c_1 x_1(k-1) + c_2 x_2(k-1) + c_3 = c_1 x_3(k) + c_2 x_4(k) \tag{3.8}$$

Por lo tanto el sistema se puede expresar tal como se muestra en la ecuación (3.9).

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)) \\ x_3(k+1) &= x_1(k) \\ x_4(k+1) &= x_2(k) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Y el Jacobiano del sistema está dado por la ecuación (3.10).

$$\mathbf{A}_{n1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1(k)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2(k)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3(k)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4(k)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1(k)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2(k)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3(k)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4(k)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Como en el caso sin atraso, la estabilidad de la órbita $1T$-periódica está definida por los multiplicadores característicos (o valores propios de la solución del sistema). Para que la solución sea estable se debe garantizar que los cuatro multiplicadores característicos estén dentro del círculo unitario, de lo contrario el sistema es suceptible de presentar caos.

Estabilidad de los Puntos Fijos: Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son una técnica muy utilizada, por su efectiva ayuda en la determinación de la velocidad de convergencia o divergencia de dos órbitas de una ecuación diferencial cuyas condiciones iniciales difieren infinitesimalmente una de la otra.

Debido a que se requiere el conocimiento de las órbitas su cálculo analítico se hace muy complejo, por lo que generalmente se recurre a un procedimiento numérico para hallarlos. Si las trayectorias que inician muy cerca convergen una de la otra, los exponentes de Lyapunov asociados serán negativos. Si las trayectorias divergen existirá al menos un exponente de Lyapunov positivo.

Resolviendo la aplicación de Poincaré del sistema para cada periodo de muestreo (ecuación (3.4) se encuentran el valor alrededor del cual se linealiza el sistema para calcular los valores propios q_i en la iteración k correspondiente ($q_i\left(A_{nj}\left(x(k)\right)\right)$), siendo A_{nj} la matriz jacobiana

del sistema (ecuación (3.7) para el sistema sin atraso o ecuación (3.10) para el sistema con un periodo de atraso). La ecuación (3.11) sintetiza el procedimiento para calcular los exponentes de Lyapunov (λ_i).

$$\lambda_i = \underset{M\to\infty}{Lim} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M} \log \left| q_i \left(A_{nj} \left(x(k) \right) \right) \right| \right\} \tag{3.11}$$

Estabilidad de los Puntos Fijos: Exponentes de Floquet $PWMCD$ de orden n

El cálculo de los exponentes de Floquet del sistema está basado en la resolución de la ecuación variacional asociada al mismo. El procedimiento mostrado en este capítulo es útil para el análisis particular de la estabilidad de la órbita 1T periódica, con generalización del periodo de atraso considerado en el sistema ($n \geq 0$).

Básicamente lo que se hace es perturbar la solución periódica del sistema (x^*) con una función temporal exponencial ($e^{\mu t}$), para de esta forma analizar la estabilidad de la solución periódica mediante el estudio del comportamiento de la perturbación. Si la parte real del exponente μ es positiva, la perturbación crecerá y por lo tanto la solución periódica es inestable, mientras que si la parte real del exponente μ es negativa, la perturbación es decreciente y representativa de una solucón periódica estable.

Para hallar la ecuación variacional del sistema se parte de las ecuaciones dinámicas del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

donde u es la señal de control, que tienen el siguiente comportamiento:

$$u = \begin{cases} u_+ & 0 < t \leqslant \frac{d}{2} \\ u_- & \frac{d}{2} < t \leqslant \left(T - \frac{d}{2}\right) \\ u_+ & \left(T - \frac{d}{2}\right) < t \leqslant T \end{cases}$$

donde el ciclo de trabajo d depende del estado $t = (k-n)T$, siendo n el número de periodos de atraso $(n \geqq 0)$ y k es el instante de muestreo actual.

Las ecuaciones dinámicas se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & 1 \\ -1 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\theta\left(t - \left(nT + \frac{d}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\theta\left(t - \left((n+1)T - \frac{d}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\theta(t-\tau)$ corresponde al escalón unitario aplicado en $t = \tau$.

La figura 3.3 muestra de una forma más clara el por qué de la utilización de la función escalón en la anterior expresión.

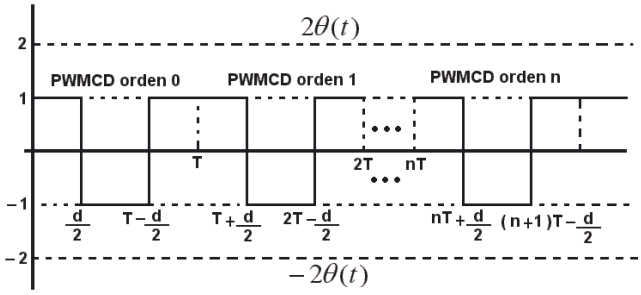


Figura 3.3: Representación Gráfica de la discontinuidad PWMC en función de n.

Debido a que el tiempo de atraso (nT) quedó incluido en las ecuaciones del sistema, el ciclo de trabajo se puede calcular como si dependiera del estado actual, utilizando la ecuación (3.1). Así pues, realizando el tratamiento matemático dado a la ecuación (3.1) en la página 41, el ciclo de trabajo puede ser escrito en función del estado al inicio de cada periodo de muestreo como:

$$\frac{d}{2} = c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) + c_3$$

donde las variables c_1, c_2 y c_3 están descritas por las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14), respectivamente.

$$c_1 = \frac{2 - \gamma(2k_s + T(1 - \gamma k_s)) - k_s T}{-2k_s(u_+ - u_-)} \tag{3.12}$$

$$c_2 = \frac{2k_s + T(1 - k_s(\gamma + \beta))}{-2k_s(u_+ - u_-)} \tag{3.13}$$

$$c_3 = \frac{-2x_{1ref} + k_s T u_-}{-2k_s(u_+ - u_-)} \tag{3.14}$$

Ahora considerando una solución perturbada de la órbita periódica dada por $x_1 = x_1^* + e^{\mu t} a_{e1}$ y $x_2 = x_2^* + e^{\mu t} a_{e2}$ donde * está asociado a la solución periódica del sistema, la exponencial a la perturbación y a_{e1} y a_{e2} son funciones de tiempo. Con la perturbación aplicada las ecuaciones del sistema se transforman en:

$$\dot{x}_1^* + \mu e^{\mu t} a_{e1} + e^{\mu t} \dot{a}_{e1} = -\gamma(x_1^* + e^{\mu t} a_{e1}) + (x_2^* + e^{\mu t} a_{e2})$$
$$\dot{x}_2^* + \mu e^{\mu t} a_{e2} + e^{\mu t} \dot{a}_{e2} = -(x_1^* + e^{\mu t} a_{e1}) - \beta(x_2^* + e^{\mu t} a_{e2}) + 1 - 2\theta\left(t - \left(nT + \tfrac{d}{2}\right)\right) + 2\theta\left(t - \left((n+1)T - \tfrac{d}{2}\right)\right)$$

Como,

$$\tfrac{d^*}{2} = c_1 x_1^*(0) + c_2 x_2^*(0) + c_3$$

entonces,

$$\theta\left(t - \left(nT + \tfrac{d^*}{2}\right)\right) = \theta\left(t - (nT + c_1 x_1^*(0) + c_2 x_2^*(0) + c_3)\right)$$

el escalón en $t = nT + \frac{d}{2}$ puede ser expresado en función de la solución perturbada como:

$$\theta\left(t - \left(nT + \tfrac{d}{2}\right)\right) = \theta\left(t - (nT + c_1(x_1^*(0) + a_{e1}(0)) + c_2(x_2^*(0) + a_{e2}(0)) + c_3)\right)$$

y haciendo una aproximación por series de Taylor a primer orden, se obtiene:

$$\theta\left(t - \left(nT + \tfrac{d}{2}\right)\right) = \theta\left(t - \left(nT + \tfrac{d^*}{2}\right)\right) - \delta\left(t - \left(nT + \tfrac{d^*}{2}\right)\right)(c_1 a_{e1}(0) + c_2 a_{e2}(0))$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac y se obtiene de $\delta(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$. De la misma forma para el escalón aplicado en $t = \left((n+1)T - \frac{d}{2}\right)$, se llega a:

$$\dot{x}_1^* + \mu e^{\mu t} a_{e1} + e^{\mu t} \dot{a}_{e1} = -\gamma x_1^* - \gamma e^{\mu t} a_{e1} + x_2^* + e^{\mu t} a_{e2}$$
$$\dot{x}_2^* + \mu e^{\mu t} a_{e2} + e^{\mu t} \dot{a}_{e2} = -x_1^* - e^{\mu t} a_{e1} - \beta x_2^* - \beta e^{\mu t} a_{e2} + 1 - 2\theta\left(t - \left(nT + \tfrac{d^*}{2}\right)\right) + 2\delta\left(t - \left(nT + \tfrac{d^*}{2}\right)\right)(c_1 a_{e1}(0) + c_2 a_{e2}(0)) + 2\theta\left(t - \left((n+1)T - \tfrac{d^*}{2}\right)\right) + 2\delta\left(t - \left((n+1)T - \tfrac{d^*}{2}\right)\right)(c_1 a_{e1}(0) + c_2 a_{e2}(0))$$

Anulando la solución * las ecuaciones se pueden expresar como:

$$\mu e^{\mu t} a_{e1} + e^{\mu t} \dot{a}_{e1} = -\gamma e^{\mu t} a_{e1} + e^{\mu t} a_{e2}$$
$$\mu e^{\mu t} a_{e2} + e^{\mu t} \dot{a}_{e2} = -e^{\mu t} a_{e1} - \beta e^{\mu t} a_{e2} + 2\delta\left(t - \left(nT + \tfrac{d^*}{2}\right)\right)(c_1 a_{e1}(0) + c_2 a_{e2}(0)) + 2\delta\left(t - \left((n+1)T - \tfrac{d^*}{2}\right)\right)(c_1 a_{e1}(0) + c_2 a_{e2}(0))$$

multiplicando por $e^{-\mu t}$, tenemos:

$$\dot{a}_{e1} = -\mu a_{e1} - \gamma a_{e1} + a_{e2}$$
$$\dot{a}_{e2} = -a_{e1} - \mu a_{e2} - \beta a_{e2} + 2e^{-\mu t}\delta\left(t - \left(nT + \tfrac{d^*}{2}\right)\right)(c_1 a_{e1}(0) + c_2 a_{e2}(0)) +$$
$$2e^{-\mu t}\delta\left(t - \left((n+1)T - \tfrac{d^*}{2}\right)\right)(c_1 a_{e1}(0) + c_2 a_{e2}(0))$$

expresando las ecuaciones en forma matricial, simplificando la notación haciendo $d^* = d$ y teniendo en cuenta que debido a la función delta de Dirac, $\delta(t-\tau)$, el termino $e^{-\mu t}$ solo tiene sentido en $t = \tau$, se tiene la ecuación variacional del sistema, dada por la ecuación (3.15).

$$\dot{\mathbf{a}}_e = \begin{pmatrix} -\gamma - \mu & 1 \\ -1 & -\beta - \mu \end{pmatrix} \mathbf{a}_e + e^{-\mu\left(nT + \frac{d}{2}\right)}\delta\left(t - \left(nT + \tfrac{d}{2}\right)\right)\mathbf{H}\mathbf{a}_e(0) +$$

$$e^{-\mu\left((n+1)T - \frac{d}{2}\right)}\delta\left(t - \left((n+1)T - \frac{d}{2}\right)\right)\mathbf{H}\mathbf{a}_e(0) \tag{3.15}$$

donde,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c_1 & 2c_2 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{a}}_e = \begin{pmatrix} \dot{a}_{e1} \\ \dot{a}_{e2} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_e = \begin{pmatrix} a_{e1} \\ a_{e2} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_e(0) = \begin{pmatrix} a_{e1}(0) \\ a_{e2}(0) \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación variacional, que rige la evolución de la perturbación, se procede de la siguiente forma:

* Primero se halla la matriz de transición de estados. Por simplicidad matemática, la matriz de transición de estados se calcula como el producto de las exponenciales de las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, las cuales cumplen las siguientes propiedades:

- $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ conmutan.
- $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, así se tiene que $e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}_1 t}e^{\mathbf{A}_2 t}$.

Con la selección particular de $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ dadas por las ecuaciones (3.16) y (3.17), respectivamente.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} - \mu & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} - \mu \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} & 1 \\ -1 & \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

se tiene la ventaja que los exponentes μ quedan relacionados con una matriz diagonal permitiendo una fácil manipulación debido a su posible factorización antes de la matriz, de la siguiente forma:

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = e^{-(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}+\mu)t}\mathbf{I}$$

y

$$e^{\mathbf{A}_2 t} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} sen(\alpha_2 t) + \cos(\alpha_2 t) & \frac{1}{\alpha_2} sen(\alpha_2 t) \\ -\frac{1}{\alpha_2} sen(\alpha_2 t) & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} sen(\alpha_2 t) + \cos(\alpha_2 t) \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_1 = \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$ y $\alpha_2 = \sqrt{1-\alpha_1^2}$.

* Segundo, la integral de las ecuaciones de la perturbación se debe hacer a tramos, y debido a la presencia de la función delta de Dirac se requiere también hacer la integración sobre las discontinuidades.

1). Inicialmente, se calcula la solución entre $t = 0$ y $t = \frac{d}{2}$

$$\mathbf{a}_e\left(\tfrac{d}{2}\right)_- = e^{\mathbf{A}_1 \frac{d}{2}} e^{\mathbf{A}_2 \frac{d}{2}} \mathbf{a}_e(0)$$

con este valor se halla $\mathbf{a}_e\left(\frac{d}{2}\right)_+$ al integrar sobre la discontinuidad de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_e\left(\tfrac{d}{2}\right)_+ = \mathbf{a}_e\left(\tfrac{d}{2}\right)_- + e^{-\mu\left(nT+\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H}\mathbf{a}_e$$

$$\mathbf{a}_e\left(\tfrac{d}{2}\right)_+ = \left(e^{\mathbf{A}_1 \frac{d}{2}} e^{\mathbf{A}_2 \frac{d}{2}} + e^{-\mu\left(nT+\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H}\right)\mathbf{a}_e(0)$$

2). Ahora en el intervalo entre $t = (\frac{d}{2})$ y $t = (T - \frac{d}{2})$, con la nueva condición inicial se tiene:

$$\mathbf{a}_e\left(T - \tfrac{d}{2}\right)_- = e^{\mathbf{A}_1(T-d)} e^{\mathbf{A}_2(T-d)} \mathbf{a}_e\left(\tfrac{d}{2}\right)_+$$

$$\mathbf{a}_e\left(T - \tfrac{d}{2}\right)_- = e^{\mathbf{A}_1(T-d)} e^{\mathbf{A}_2(T-d)} \left(e^{\mathbf{A}_1 \frac{d}{2}} e^{\mathbf{A}_2 \frac{d}{2}} + e^{-\mu\left(nT+\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H}\right)\mathbf{a}_e(0)$$

en la discontinuidad,

$$\mathbf{a}_e\left(T-\tfrac{d}{2}\right)_+ = \mathbf{a}_e\left(T-\tfrac{d}{2}\right)_- + e^{-\mu\left((n+1)T-\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H}\mathbf{a}_e\left(0\right)$$

$$\mathbf{a}_e\left(T-\tfrac{d}{2}\right)_+ = \left(e^{\mathbf{A}_1(T-d)}e^{\mathbf{A}_2(T-d)}e^{\mathbf{A}_1\frac{d}{2}}e^{\mathbf{A}_2\frac{d}{2}} + e^{\mathbf{A}_1(T-d)}e^{\mathbf{A}_2(T-d)}e^{-\mu\left((n+1)T-\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H}\right)\mathbf{a}_e\left(0\right)$$

3). Finalmente, se integra entre $t=(T-\frac{d}{2})$ y T.

$$\mathbf{a}_e\left(T\right) = e^{\mathbf{A}_1\frac{d}{2}}e^{\mathbf{A}_2\frac{d}{2}}\mathbf{a}_e\left(T-\tfrac{d}{2}\right)_+$$

$$\mathbf{a}_e\left(T-\tfrac{d}{2}\right)_+ = \Big(e^{\mathbf{A}_1(T-d)}e^{\mathbf{A}_2(T-d)}e^{\mathbf{A}_1\frac{d}{2}}e^{\mathbf{A}_2\frac{d}{2}} +$$

$$e^{\mathbf{A}_1(T-d)}e^{\mathbf{A}_2(T-d)}e^{-\mu\left((n+1)T-\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H}\Big)\mathbf{a}_e\left(0\right)$$

como $e^{\mathbf{A}_1 t} = e^{-(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}+\mu)t}\mathbf{I}$ y haciendo $z = e^{-\mu T}$ se obtiene que la solución de la ecuación variacional está dada por la ecuación (3.18).

$$\mathbf{a}_e\left(T\right) = \mathbf{Q}_1\mathbf{a}_e\left(0\right) \tag{3.18}$$

La matriz $\mathbf{Q}_1$ esta dada por la ecuación 3.19, donde $\alpha_3 = \frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}$.

$$\mathbf{Q}_1 = \left(ze^{-\alpha_3 T}e^{\mathbf{A}_2 T} + z^{(n+1)}e^{-\alpha_3\left(T-\frac{d}{2}\right)}e^{\mathbf{A}_2\left(T-\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H} + z^{(n+1)}e^{-\alpha_3\left(\frac{d}{2}\right)}e^{\mathbf{A}_2\left(\frac{d}{2}\right)}\mathbf{H}\right) \tag{3.19}$$

Para que la solución sea periódica se requiere que $\mathbf{a}_e\left(T\right) = \mathbf{a}_e\left(0\right)$, así se tiene la ecuación (3.20).

$$\left(\mathbf{Q}_1 - I\right)\mathbf{a}_e\left(0\right) = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Esta solución es estable si se garantiza que la parte real de los exponentes de Floquet μ, obtenidos de la solución de la ecuación variacional sea negativa. Si $\det\left(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{I}\right) = 0$ implica μ negativo. La siguiente es la representación para el caso específico dado por los valores de los parámetros: $\gamma = 0{,}35$; $\beta = 0$; $T = 0{,}1767$; $k_s = 4{,}5$; $x_{1ref} = 0{,}8$; $u_+ = 1$; $u_- = -1$, en función del número de periodos de atraso n.

$$0{,}1e-20z^{2(n+1)} - 1{,}867z^{(n+2)} + 1{,}911z^{(n+1)} + 0{,}93z^2 - 1{,}899z + 1 = 0$$

El grado de la ecuación es $2(n+1)$, siendo n el número de periodos de atraso.
Si en cambio dejamos la ecuación del determinante en función de k_s y hacemos $n=0$ se tiene la expresión dada por la ecuación (3.21).

$$\left(\frac{1e-10}{k_s^2} - \frac{0{,}00215387}{k_s} - 0{,}9466771\right)z^2 + \left(\frac{0{,}3443753}{k_s} - 0{,}0535075\right)z + 1 = 0 \tag{3.21}$$

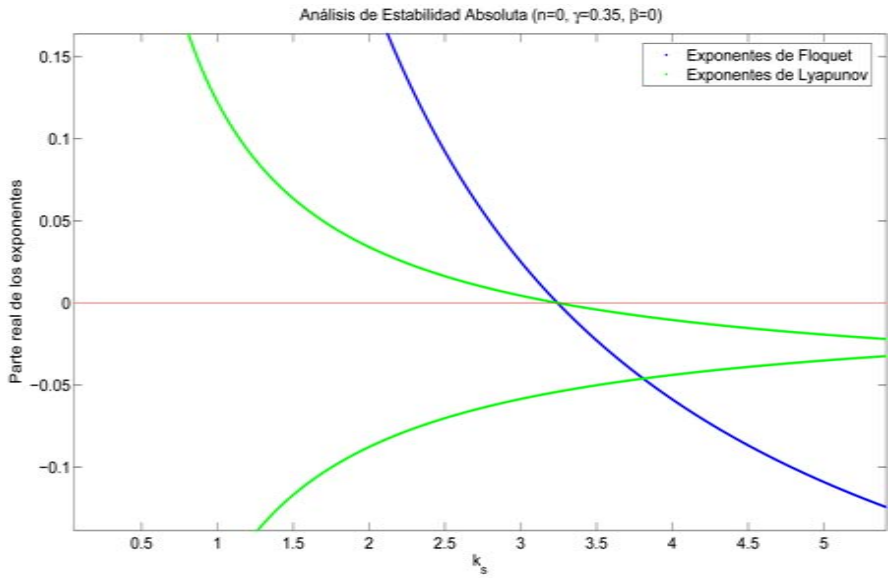


Figura 3.4: Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema sin tiempo de atraso

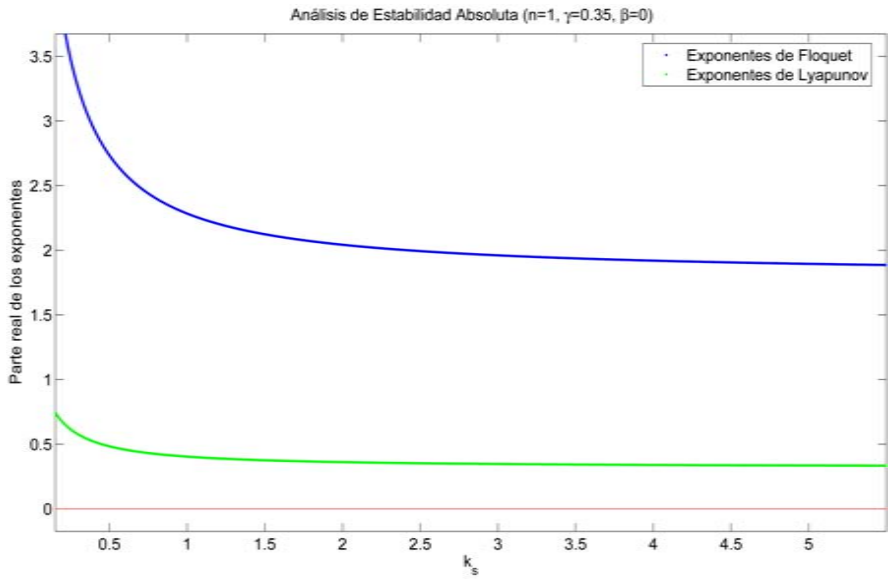


Figura 3.5: Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema con un periodo de atraso.

La ecuación (3.21) rige la evolución de los exponentes de Floquet en la medida en que el parámetro k_s varía, en la cual se tiene que el límite inferior que garantiza estabilidad de la órbita de periodo $1T$ está aproximadamente en $k_s = 3{,}24$, como se observa en la figura 3.4.

Para el caso cuando $n = 1$, es decir, en el esquema $PWMCD\ de\ orden\ 1$, la ecuación del

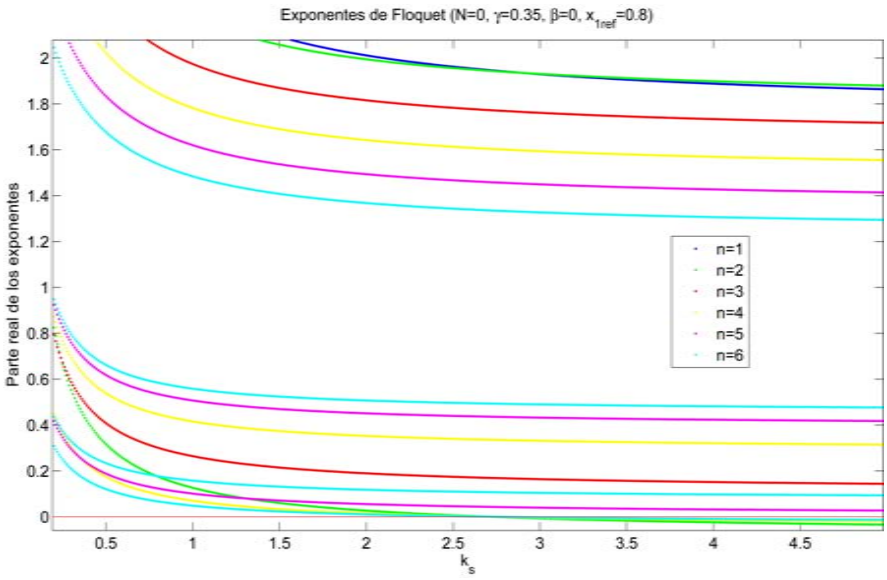


Figura 3.6: Variación de los exponentes de Floquet (n=1,2,3,...,6)- Parámetro de Bifurcación k_s

determinante en función de k_s queda expresada por la ecuación (3.22).

$$\frac{1e-9}{k_s^2}z^4-(1{,}8867+\frac{0{,}002154}{k_s})z^3+(\frac{0{,}344375}{k_s}+2{,}79635)z^2-1{,}90983z+1=0 \quad (3.22)$$

En la ecuación (3.22) se tiene que no existe un valor para el parámetro k_s que garantice estabilidad de la órbita de periodo $1T$. Como se visualiza en figura 3.5 existe un exponente inestable (con parte real positiva) para cualquier valor de k_s.

Para $n > 1$ tampoco existen valores de k_s donde la órbita $1T$ sea estable, ya que los tiempos de atraso disminuyen la estabilidad del sistema. A medida que n aumenta también aumentan el número de exponentes de Floquet del sistema. En los casos presentados en la figura 3.6, los exponentes de Floquet inestables aumentan a medida que crece el atraso, lo representa mayor inestabilidad para un tiempo de atraso mayor.

Estabilidad Absoluta del Sistema PWMCD basado en ZAD y controlado con FPIC

La viabilidad de operar el sistema $PWMCD$ basado en ZAD con tiempo de atraso está supeditada a la inclusión de alguna técnica de control que estabilice la órbita $1T$-periódica. De las técnicas de control analizadas en el capítulo anterior, la técnica FPIC se destaca por su excelente desempeño en el control de sistemas que incorporan tiempos de atraso en su funcionamiento.

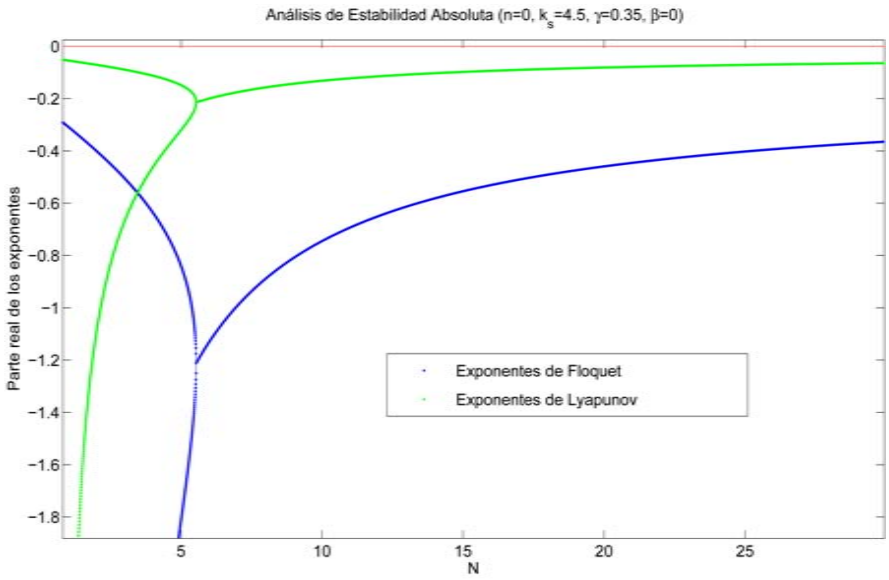


Figura 3.7: Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema sin tiempo de atraso con control FPIC (n=0, k_s=4.5, N:variable)

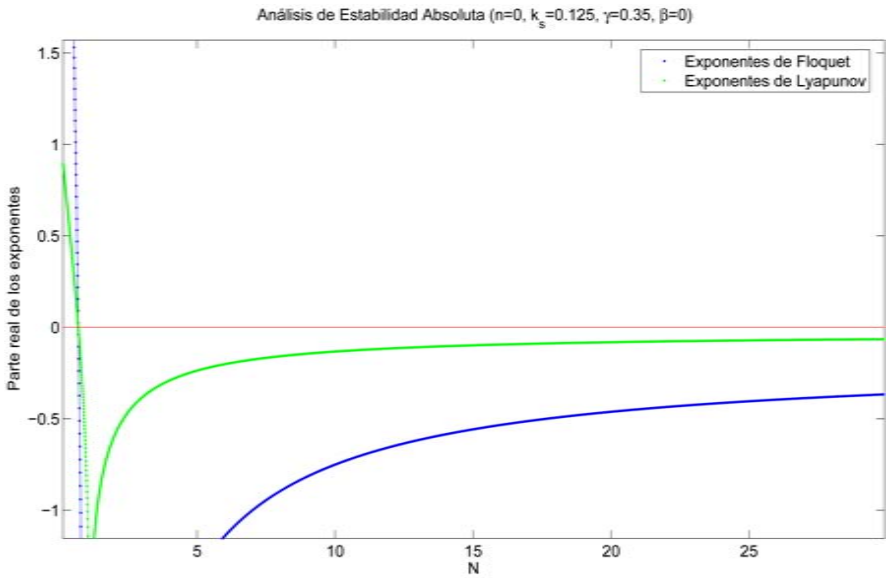


Figura 3.8: Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema sin tiempo de atraso con control FPIC (n=0, k_s=0.125, N:variable)

En el sistema basado en *ZAD* y controlado con *FPIC*, el otro parámetro crucial en el desempeño del sistema, además del k_s que está asociado a la dinámica del error, es el parámetro N del control *FPIC*, el cual puede ser asumido como parámetro de bifurcación.

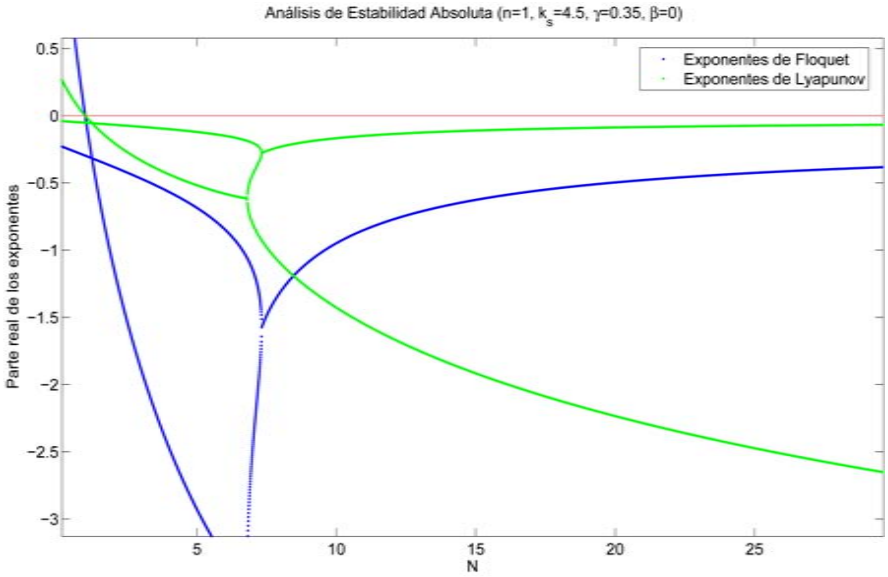


Figura 3.9: Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema con un periodo de atraso con control FPIC (n=1, k_s=4.5, N:variable)

En las figuras 3.7 y 3.8 se muestra el comportamiento de los exponentes de Floquet y de Lyapunov para dos valores de k_s ($k_s = 4{,}5$ y $k_s = 0{,}125$), respectivamente, para el sistema sin atraso. Para el caso $k_s = 4{,}5$, el sistema ya es estable aún sin el control FPIC ($N = 0$), sin embargo, al incluir el controlador es posible modificar la forma de su respuesta, como se discutirá más adelante. En cambio, para el caso $k_s = 0{,}125$, el sistema sin control presenta caos; con el control FPIC, para valores $N > 1$ el sistema responde de manera estable.

En las figuras 3.9 y 3.10 se presentan los mismos casos ($k_s = 4{,}5$ y $k_s = 0{,}125$), pero ahora considerando un periodo de atraso. Como se dijo anteriormente, en ambos casos es necesario el control FPIC para alcanzar respuestas estables. Éste es un problema de control más exigente, al tener límites de estabilidad más altos ($N \approx 18$ cuando $k_s = 0{,}125$). En las figuras 3.8 y 3.10 sólo se presenta la parte real del exponente de Floquet y de Lyapunov que presenta el cruce por cero (equivalente a la transición de inestable a estable), omitiendo la evolución de los otros exponentes ya que son estables en todo el rango de control.

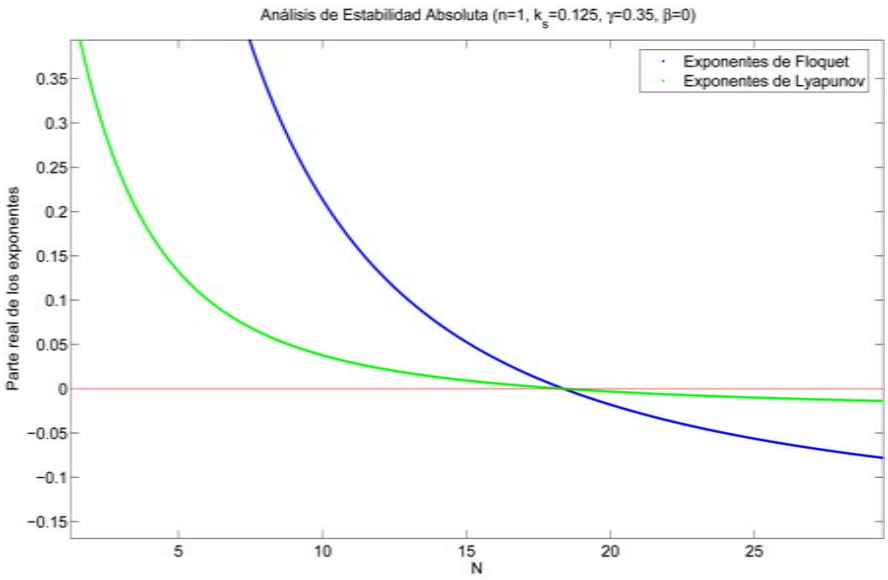


Figura 3.10: Exponentes de Floquet y de Lyapunov para el sistema con un periodo de atraso con control FPIC (n=1, k_s=0.125, N:variable)

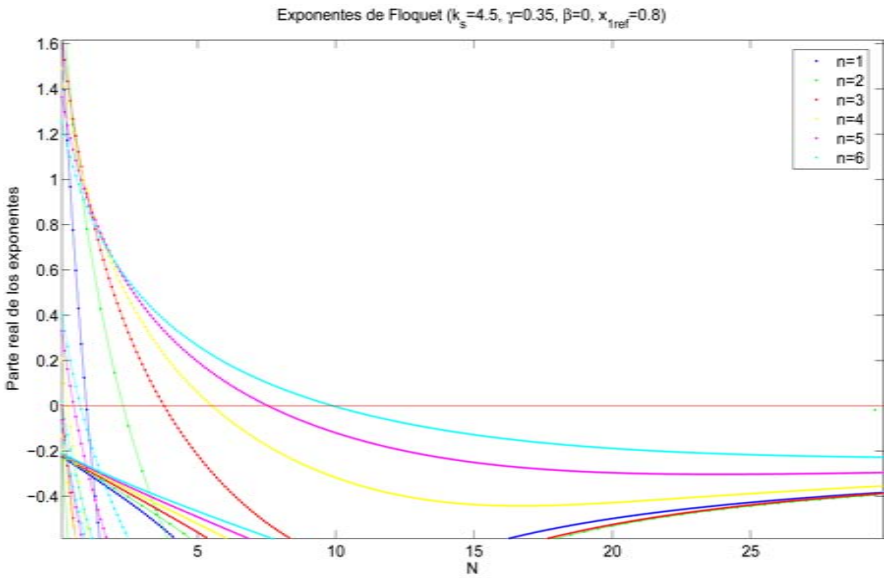


Figura 3.11: Variación de los exponentes de Floquet (n=1,2,3,...,6)- Parámetro de Bifurcación N ($k_s = 4{,}5$)

Condición de operación	Límite de estabilidad
($n = 0$), ($k_s = 4{,}5$)	$---$
($n = 1$), ($k_s = 4{,}5$)	$N_{cr} \approx 0{,}99$
($n = 2$), ($k_s = 4{,}5$)	$N_{cr} \approx 2{,}32$
($n = 3$), ($k_s = 4{,}5$)	$N_{cr} \approx 3{,}79$
($n = 4$), ($k_s = 4{,}5$)	$N_{cr} \approx 5{,}53$
($n = 5$), ($k_s = 4{,}5$)	$N_{cr} \approx 7{,}55$
($n = 6$), ($k_s = 4{,}5$)	$N_{cr} \approx 9{,}89$

Tabla 3.2: Límites de estabilidad en el sistema PWMCD-ZAD-FPIC $k_s = 4{,}5$ y N variable ($n = 0$ hasta $n = 6$)

Para periodos de atraso $n > 1$ también es posible encontrar rangos del parámetro N que garanticen un control FPIC efectivo, tal como se presenta en la figura 3.11, para un tiempo de atraso nT desde $n = 1$ hasta $n = 6$. Como se mostró anteriormente, a un mayor tiempo de atraso más inestable es el sistema, por lo tanto, mayor es el esfuerzo de control que realiza el controlador FPIC para estabilizar el sistema. Este hecho se ve reflejado en el corrimiento del límite de la estabilidad, cercano a $N = 2$ cuando $n = 2$ y a $N = 10$ cuando $n = 6$.

Condición de operación	Límite de estabilidad
($n = 0$, $N = 0$)	$k_s \approx 3{,}24$
($n = 1$, $N = 2$)	$k_s \approx 0{,}46$
($n = 2$, $N = 3$)	$k_s \approx 1{,}19$
($n = 3$, $N = 4$)	$k_s \approx 2{,}99$
($n = 4$, $N = 6$)	$k_s \approx 2{,}72$
($n = 5$,$N = 8$)	$k_s \approx 3{,}25$
($n = 6$,$N = 10$)	$k_s \approx 4{,}21$

Tabla 3.3: Límites de estabilidad en el sistema PWMCD-ZAD-FPIC k_s variable y N fijo ($n = 0$ hasta $n = 6$)

En la tabla 3.2 se presentan los límites de estabilidad del sistema PWMCD-ZAD-FPIC cuando el parámetro k_s es fijado en 4.5 y se varía N. Para $n = 0$ no existe un $N > 0$ en el que el sistema sea inestable, mientras que para $n = 6$ el requerimiento es $N > 9{,}89$ para tener

respuesta 1T-periódica estable. Si por el contrario, se deja N fijo en un valor que garantice intervalo estable y se hace un barrido con el parámetro k_s se obtienen resultados mostrados en la tabla 3.3.

Es importante resaltar que en las gráficas de estabilidad donde se presenta simultáneamente la variación de los exponentes de Floquet y de Lyapunov, la escala en que varían es diferente, pero los puntos de crucen con el eje del parámetro de bifurcación (ya sea k_s o N) son iguales para ambas técnicas.

Cuando el sistema se trabaja sin control FPIC, es k_s el parámetro de mayor relevancia para su estudio, por lo cual es el escogido como parámetro de bifurcación. Al incluirse el controlador en el sistema, es el parámetro N del FPIC es el que reviste una mayor relevancia, debido a que es éste el que garantiza o no la estabilidad del sistema, por lo cual ha sido escogido como parámetro de bifurcación.

Modificación del valor crítico de estabilidad debida a la disipación de energía

La disipación de energía en el sistema modifica los límites de estabilidad del sistema. A continuación se presentan algunos análisis que se realizaron al respecto.

Se escoge analizar el esquema generalizado primal, presentado en la figura 2.8 de la página 17. Se fija el valor del parámetro γ en 0.35 y se realizan variaciones del parámetro β. En un convertidor de potencia tipo buck, analizar los cambios en β es equivalente a analizar los cambios en la resistencia interna de la inductancia.

El valor de β en el esquema generalizado primal, está dado por la ecuación (2.4), que por comodidad se repite en la ecuación (3.23). Para el caso particular del convertidor buck: R_{Ds} corresponde a la resistencia interna de la bobina (r_L), C_A es la capacitancia del condensador que se fija en $C = 40\mu F$, mientras que L_T es la inductancia de la bobina que se trabaja en $L = 2mH$. Con estos valores de inductancia y capacitancia, para que γ sea $0{,}35$ se requiere de una resistencia de carga de 20Ω para satisfacer la ecuación (2.3).

$$\beta = \left(\sum_{i=0}^{M} R_{Di}\right)\sqrt{\frac{C_A}{L_T}} = R_{Ds}\sqrt{\frac{C_A}{L_T}} \tag{3.23}$$

El parámetro β se varía entre $0{,}001$ y $0{,}2$ lo cual equivale a variar la resistencia interna de la bobina (r_L) entre $7m\Omega$ y $1414m\Omega$. Existen varios factores que determinan el valor de la

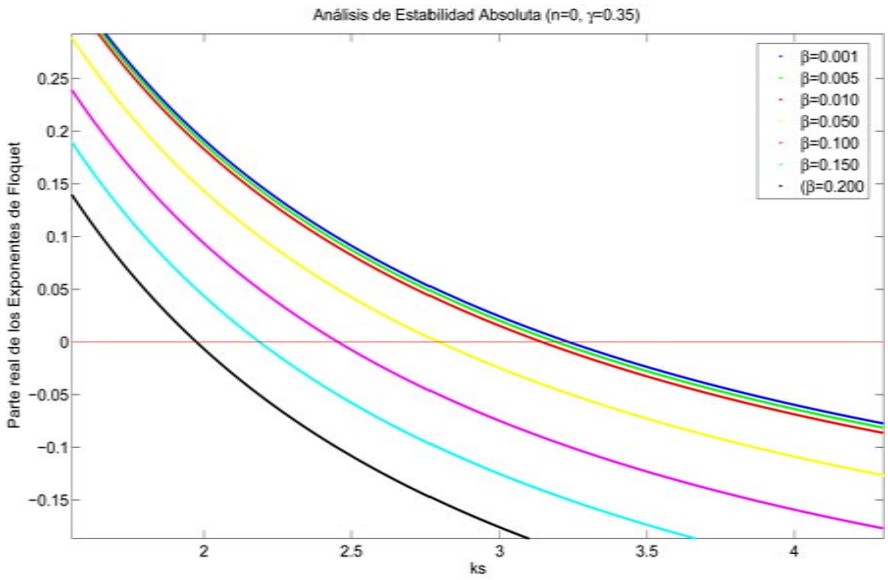


Figura 3.12: Valor crítico de estabilidad $n = 0$, $N = 0$, $\gamma = 0{,}35$, $x_{1ref} = 0{,}8$. Variaciones en β

resistencia interna de la bobina, entre ellos están: la calidad de la bobina, el tamaño de la bobina, su geometría, el tipo de materiales utilizados en su construcción, etc. Una bobina con unas buenas especificaciones puede tener una resistencia internas de unas cuantas decenas de $m\Omega$, por ejemplo $r_L = \{7m\Omega, 35m\Omega, 71m\Omega\}$, mientras que otras de menor calidad pueden alcanzar varios cientos de $m\Omega$, por ejemplo $r_L = \{354m\Omega, 707m\Omega, 1414m\Omega\}$.

En la figura 3.12 se presentan los resultados de variar β en el sistema sin tiempo de atraso. El rango de estabilidad del sistema aumenta a medida que crece el factor de disipación de energía en el sistema. En la tabla 3.4 se sintetizan los valores críticos de estabilidad presentados en la figura 3.12.

Los resultados presentados en la tabla 3.4, muestran que con un valor de β mayor se obtiene un rango de estabilidad mayor, aunque como se mostró en el capítulo anterior se puede tener un desempeño más pobre. Intuitivamente, este hecho refleja que cuanto menor es la energía, menor es el esfuerzo de control que se debe realizar.

Además, en la tabla 3.4 se tiene que la variación del parámetro β produce un corrimiento del límite de estabilidad k_s en $1{,}25$. Esta influencia es importante conocerla y tenerla en cuenta a la hora de corroborar los datos experimentalmente.

Condición de operación ($n = 0$; $\gamma = 0{,}35$; $x_{1ref} = 0{,}8$)	r_L ($m\Omega$)	k_{scr} ($N = 0$)
($\beta = 0{,}001$)	$7m\Omega$	3,2333
($\beta = 0{,}005$)	$35m\Omega$	3,1924
($\beta = 0{,}010$)	$71m\Omega$	3,1427
($\beta = 0{,}050$)	$354m\Omega$	2,7945
($\beta = 0{,}100$)	$707m\Omega$	2,4546
($\beta = 0{,}150$)	$1061m\Omega$	2,1883
($\beta = 0{,}200$)	$1414m\Omega$	1,9741

Tabla 3.4: Valor crítico de estabilidad del sistema $n = 0$, $\gamma = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$. Variaciones en β

3.2. Análisis de Estabilidad Relativa: Comportamiento del Sistema en Estado Transitorio

Hasta el momento, en este capítulo se ha mostrado que dado un conjunto de parámetros es posible encontrar la pareja de control (ks, N) que estabilice la solución $1T - periódica$ del sistema, incluso cuando el sistema es operado con un tiempo de atraso alto.

Al tener garantía de la estabilidad del punto fijo del sistema muestreado, es decir, garantía de estabilidad de la órbita $1T$-periódica del sistema continuo, nos podemos concentrar en el análisis de otras características que también son importantes a la hora de diseñar un sistema de control práctico, como lo son su respuesta transitoria y su respuesta ante perturbaciones.

Con el análisis de estabilidad absoluta, se ha logrado que el conjunto $controlador - planta$ opere de acuerdo a los requerimientos deseados (sean estos regulación o rastreo), dentro de un margen de tolerancia muy pequeño, sin embargo, no se han dado herramientas que permitan analizar y controlar el sistema en estado transitorio.

Con el objetivo de facilitar el análisis y el control del sistema en estado transitorio, se construyen unos modelos simplificados, tanto en tiempo continuo, como en tiempo discreto. En el proceso de construir los modelos, fue necesario establecer un compromiso entre la exactitud y la simplicidad de los mismos.

Dichos modelos, son modelos linealizados basados en el comportamiento de la ecuación varia-

cional del sistema. La ecuación variacional es la parte principal (lineal) del sistema, cuyo comportamiento gobierna la evolución de las perturbaciones cercanas al ciclo [55]. El resto de este capítulo, está dedicado a mostrar que tanto la estabilidad absoluta como la relativa, dependen de las propiedades de la ecuación variacional del sistema.
Especificaciones en respuesta transitoria, como tiempo de asentamiento y sobreimpulso máximo son consideraciones de diseño básicas en sistemas conmutados prácticos, por lo tanto, modelos que permitan la aplicación directa de las técnicas convencionales de control lineal presentan obvias ventajas entre las que se pueden citar:

- La simplicidad en los análisis y diseños.
- La alta familiaridad que existe en el campo de la ingeniería con los métodos lineales.
- La comprobada utilidad y efectividad de modelos linealizados en el estudio de sistemas no lineales.

La validez limitada de estos modelos es el precio que se tiene que pagar, sin embargo, las limitaciones o suposiciones en las que se basan los modelos son, en general, alcanzables y manejables. La siguientes son algunas de las principales restricciones:

- *Estabilidad*: el modelo es válido, siempre y cuando, el sistema esté operando de forma estable, es decir, que todos los multiplicadores característicos estén dentro del círculo unitario.
- *Regulación*: se supone que el sistema alcanza la referencia, lo cual siempre puede ser posible con el control híbrido *ZAD-FPIC*. Esta aproximación es tolerable ya que el error de estado estacionario, en la mayoría de los casos, es bajo.
- *Fase mínima y grado relativo completo*: estas son suposiciones para los modelos linealizados que no han mostrado tener inconvenientes.

3.2.1. Modelos Linealizados PWMCD basado en ZAD y control FPIC

En este apartado se formularán dos modelos matemáticos linealizados del sistema conmutado en lazo cerrado que usa PWM centrado basado en ZAD y con control FPIC. Estos modelos

son causales, dinámicos, determinísticos, de parámetros concentrados, lineales, invariantes en el tiempo, para dos casos diferentes: tiempo continuo y tiempo discreto.
En ambos casos partimos de la ecuación variacional del sistema, dada en la ecuación (3.15), que por facilidad se vuelve a presentar a continuación:

$$\dot{\mathbf{a}}_e = \begin{pmatrix} -\gamma-\mu & 1 \\ -1 & -\beta-\mu \end{pmatrix} \mathbf{a}_e + e^{-\mu\left(nT+\frac{d}{2}\right)}\delta\left(t-\left(nT+\frac{d}{2}\right)\right)\mathbf{H}\mathbf{a}_e\left(0\right) +$$

$$e^{-\mu\left((n+1)T-\frac{d}{2}\right)}\delta\left(t-\left(\left(n+1\right)T-\frac{d}{2}\right)\right)\mathbf{H}\mathbf{a}_e\left(0\right)$$

donde,
γ y β son los parámetros adimiensionales del elemento lineal (sistema de segundo orden).
T es el periodo de muestreo
n es el número de periodos de atraso
$\mathbf{a}_e$ es un vector de funciones de tiempo
$\delta(t)$ es la función delta de Dirac
d es el ciclo de trabajo definido con el control FPIC incluido, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{2} = c_1x_1(0) + c_2x_2(0) + c_3 + \frac{Nd_{ss}}{2(N+1)}$$

siendo las variables c_1, c_2 y c_3, presentadas en las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14), que se reescriben a continuación, incluyendo el término FPIC:

$$c_1 = \frac{2-\gamma(2k_s+T(1-\gamma k_s))-k_sT}{-2k_s(u_+-u_-)(N+1)} \qquad c_2 = \frac{2k_s+T(1-k_s(\gamma+\beta))}{-2k_s(u_+-u_-)(N+1)} \qquad c_3 = \frac{-2x_{1ref}+k_sTu_-}{-2k_s(u_+-u_-)(N+1)}$$

por último la matriz **H**, está definida así:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c_1 & 2c_2 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación variacional es de la forma:

$$\mathbf{a}_e\left(T\right) = \mathbf{Q}_1\mathbf{a}_e\left(0\right)$$

donde,

$$\mathbf{Q}_1 = \left(z e^{-\alpha_3 T} e^{\mathbf{A}_2 T} + z^{(n+1)} e^{-\alpha_3 \left(T - \frac{d}{2}\right)} e^{\mathbf{A}_2 \left(T - \frac{d}{2}\right)} \mathbf{H} + z^{(n+1)} e^{-\alpha_3 \left(\frac{d}{2}\right)} e^{\mathbf{A}_2 \left(\frac{d}{2}\right)} \mathbf{H} \right)$$

con $\mathbf{A}_2$ dado por la ecuación (3.17) y $\alpha_3 = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$.

La ecuación característica del modelo linealizado está dada por la ecuación (3.24), que es un polinomio en z, cuya forma general se muestra en la ecuación (3.25).

$$det(\mathbf{Q}_1 - I) = 0 \tag{3.24}$$

$$z^{2(n+1)} + q_1 z^{(2n+1)} + ... + q_{(2n+1)} z + q_{2(n+1)} = 0 \tag{3.25}$$

donde los coeficientes q_i dependen de $\mathbf{Q}_1$.

Si realizamos la transformación $z = e^{-\mu T}$ en la ecuación (3.25), obtenemos la ecuación característica del sistema linealizado en tiempo continuo. Por lo tanto, los ceros de esta ecuación son los polos del sistema linealizado en tiempo continuo, los cuales son equivalentes a los exponentes de Floquet del sistema $(\mu_1, \mu_2 ..., \mu_{2n+1}, \mu_{2(n+1)})$.

Por otro lado, podemos convertir la ecuación característica al tiempo discreto si se realiza la transformación: $\mu = \frac{\ln|m|}{T}$. Los ceros del polinomio en m son los polos del sistema linealizado en tiempo discreto, los cuales son equivalentes a los multiplicadores característicos del sistema $(m_1, m_2, ..., m_{2n+1}, m_{2(n+1)})$.

En este punto, están dadas las pautas principales de los modelos linealizados, que se resumen a continuación:

- *Grado relativo del sistema*: completo, es decir, $r = 2(n+1)$, siendo n el número de periodos de atraso del sistema, que afecta directamente la dimensión del sistema.
- *Ceros del sistema*: con base en el item anterior y en la aproximación de error de estado estacionario nulo, se define el numerador de la función de transferencia.
- *Polos del sistema*: definidos por los exponentes de Floquet, en el caso continuo, y por los multiplicadores característicos en el caso discreto.

Los criterios anteriores son suficientes para construir las funciones de transferencia generalizadas de los modelos linealizados del sistema que usa PWMC basado en ZAD y control FPIC, para el caso continuo la ecuación (3.26) y para el caso discreto la ecuación (3.27).

$$F(\mu) = \frac{a_{2(n+1)}}{\mu^{2(n+1)} + a_1 \mu^{2n+1} + ... + a_{(2n+1)} \mu + a_{2(n+1)}} \tag{3.26}$$

donde μ es la variable compleja que representa el comportamiento continuo del sistema linealizado, la cual es equivalente a la variable compleja de Laplace de sistemas lineales y a la evolución de los exponentes de Floquet en sistemas no lineales.

$$F(m) = \frac{\left(1 + a_1 + ... + a_{(2n+1)} + a_{2(n+1)}\right)}{m^{2(n+1)} + a_1 m^{2n+1} + ... + a_{(2n+1)} m + a_{2(n+1)}} \tag{3.27}$$

siendo m la variable compleja que describe la evolución discreta del sistema linealizado, equivalente a la variable compleja Z de sistemas lineales y a los multiplicadores característicos del sistema no lineal.

La notación utilizada (μ y m) busca enfatizar en las herramientas que permitieron definir los modelos linealizados y crear el puente entre el análisis no lineal y el análisis lineal (exponentes de Floquet y multiplicadores característicos).

3.2.2. Lugar Geométrico de las Raíces del Sistema Linealizado

Como se estableció anteriormente, la ecuación característica del sistema linealizado depende de la solución de la ecuación variacional del sistema no lineal, por lo tanto, existe una dependencia directa entre los valores de los parámetros del sistema y la ubicación de los polos del sistema linealizado.

Con base en lo anterior, se puede definir un gráfico en el plano complejo de la ubicación de las raíces del modelo linealizado conforme un parámetro del sistema (como k_s o N) es variado. Nótese que este gráfico es análogo al Lugar Geométrico de las Raíces (*Root-Locus*) que se estudia en sistemas lineales.

Para no propiciar confusiones a estos se denominarán: Lugar geométrico de los Exponentes de Floquet, cuando se ubiquen las raíces del sistema linealizado continuo; y Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos, para graficar la variación de las raíces del sistema linealizado discreto.

En las próximas secciones se utilizarán los modelos linealizados y los lugares geométricos de las raíces en el sistema que funciona sin tiempo de atraso y en el sistema que incorpora un periodo de atraso.

3.2.3. Análisis de Estabilidad Relativa en el Sistema Sin Tiempo de Atraso

El estudio del comportamiento transitorio del sistema que responde en tiempo real será el caso típico de estudio ya que los modelos linealizados de este sistema son de segundo orden. Los sistemas lineales de segundo orden presentan comportamientos básicos que pueden aparecer en cualquier sistema dinámico, por lo cual un estudio detallado de este modelo servirá para hacernos a una idea de la respuesta transitoria de sistemas de dimensión mayor, como los sistemas con tiempo de atraso.

Dada la familiaridad que existe en ingeniería sobre estos métodos, solo se hará un resumen de los conceptos fundamentales que fueron adaptados de las técnicas convencionales de análisis de sistemas lineales, para obtener la información del transitorio del sistema.

Se explicarán conjuntamente los dos casos: el continuo y el discreto. Aunque el sistema estudiado es enteramente discreto, en general, puede plantearse el estudio de una secuencia de puntos analizando el sistema continuo que la genera; sin embargo, en ocasiones los resultados pueden ser engañosos, de ahí la importancia de brindar las dos opciones. Dependiendo de la información de se disponga y de los requerimientos del análisis se puede seleccionar el modelo. Si únicamente se busca establecer cotas de comportamientos y regiones de diseños ambos modelos pueden ser convenientes.

La función de transferencia prototipo, para el caso continuo, está dada por la ecuación (3.28).

$$F(\mu) = \frac{\omega_n^2}{\mu^2 + 2\zeta\omega_n\mu + \omega_n^2} \tag{3.28}$$

donde, ω_n es la frecuencia natural no amortiguada y ζ es el coeficiente de amortiguamiento.

De acuerdo con la función de transferencia, los polos del sistema linealizado son:

$$\mu_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

Los polos son complejos conjugados si $|\zeta| < 1$:

$$\mu_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

En tiempo discreto, la función de transferencia prototipo está dada por la ecuación 3.29.

$$F(m) = \frac{\left(1 - 2b\cos a + b^2\right)}{m^2 + 2bm\cos a + b^2} \tag{3.29}$$

donde a y b definen la distancia fasorial a los polos, a como el ángulo y b como la magnitud.

Los polos de esta función de transferencia son:

$$m_{1,2} = b\left(\cos a \pm \sqrt[2]{\cos^2 a - 1}\right)$$

El término del radical es menor o igual que cero; si es menor, los dos polos son complejos conjugados:

$$m_{1,2} = b\left(\cos a \pm j\sqrt[2]{1 - \cos^2 a}\right) = b\left(\cos a \pm j \sin a\right)$$

Con base en los valores de ζ y ω_n en el caso continuo, y los valores de a y b en el caso discreto, se puede definir la forma de la respuesta transitoria y especificaciones como tiempo de asentamiento, sobreimpulso máximo, etc.

Lugar geométrico de los exponentes de Floquet en el sistema sin tiempo de atraso

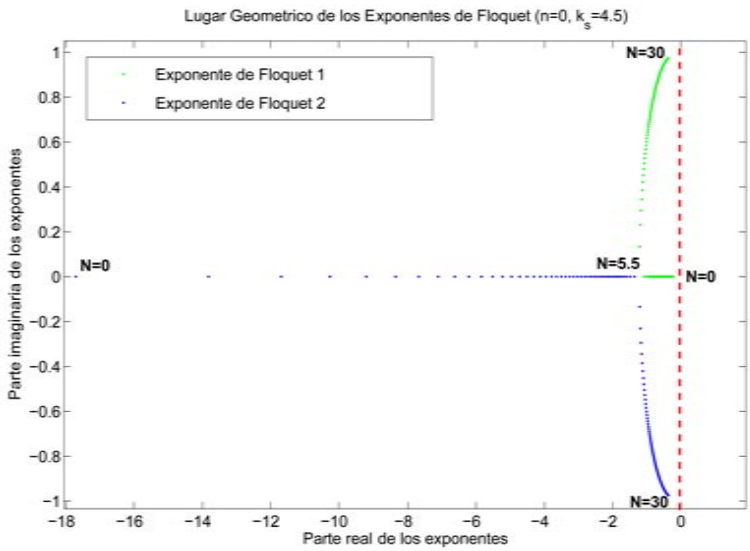


Figura 3.13: Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema sin atraso y control FPIC. ($k_s = 4{,}5, n = 0$)

En la figura 3.13 se presenta el lugar geométrico de los exponentes de Floquet del sistema sin atraso para $k_s = 4{,}5$ y variación del parámetro N entre 0 y 30. Note que en todo el rango de variación de N los polos del modelo linealizado continuo (exponentes de Floquet) se mantienen dentro del semiplano complejo izquierdo, lo cual equivale a decir que el sistema tiene órbita 1T-periódica estable. Observe además que desde $N = 0$ hasta $N \approx 5{,}5$ los polos del sistema

linealizado de lazo cerrado se sitúan sobre el eje real del lugar geométrico. A partir de $N \approx 5{,}5$ hasta $N = 30$ los polos son complejos conjugados.

En la figura 3.14 se añade al lugar geométrico de la figura 3.13 una rejilla con las regiones de coeficiente de amortiguamiento (ζ) constante y de frecuencia natural (ω_n) constante. Líneas que pasan por el origen representan $\zeta = constante$ y círculos concéntricos al origen equivalen a $\omega_n = constante$. La región de ω_n constante no se visualiza adecuadamente debido al rango reducido en que varían la parte imaginaria de los exponentes de Floquet.

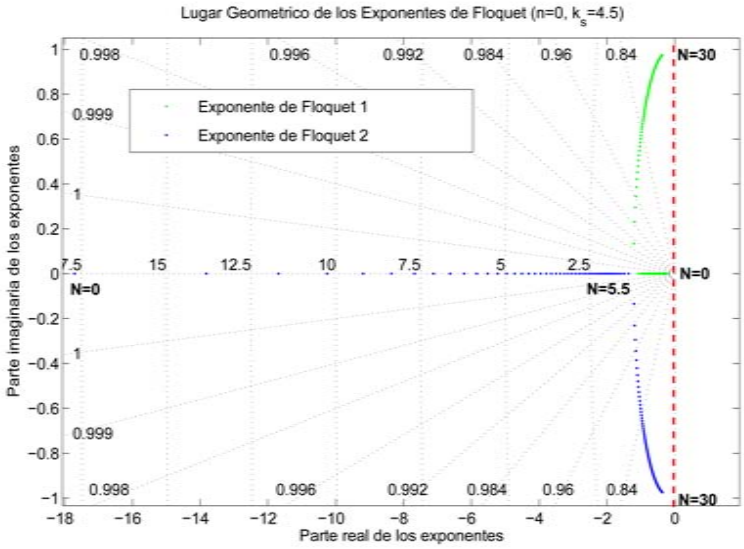


Figura 3.14: Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema sin atraso y control FPIC ($k_s = 4{,}5, n = 0$), y regiones de ζ constante y ω_n constante

El sistema es subamortiguado, es decir, con respuesta transitoria oscilatoria en el rango $0 < \zeta < 1$. La respuesta transitoria no oscila si es críticamente amortiguado cuando $\zeta = 1$ y si es sobreamortiguado para valores del coeficiente de amortiguamiento $\zeta > 1$. Por último, presenta respuesta transitoria oscilatoria que no se extingue si $\zeta = 0$.

La frecuencia natural no amortiguada ω_n corresponde a la frecuencia a la que el sistema oscilaría si el amortiguamiento descendiera a cero. Si el sistema tiene algún amortiguamiento, la frecuencia natural no se puede observar en forma experimental.

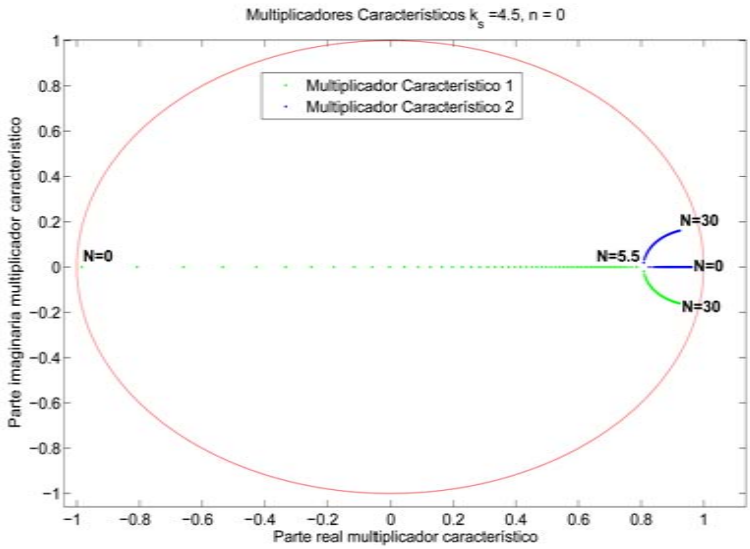


Figura 3.15: Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema sin atraso y control FPIC)

Lugar geométrico de los multiplicadores característicos en el sistema sin tiempo de atraso

En la figura 3.15 se presenta la representación discreta del caso presentado en la sección anterior, con $k_s = 4{,}5$ y variación de N desde 0 hasta 30. Como las variables complejas μ y m están relacionadas por $m = e^{\mu T}$, entonces la localización de los polos y ceros en el plano m está relacionada con la localización de los polos y ceros en el plano μ, con la siguiente consideración: hay infinitos valores de μ para cada valor de m, ya que polos y ceros, en el plano μ donde la frecuencia difiere en un múltiplo entero de la frecuencia de muestreo $(2\pi/T)$ son mapeados en la misma localización en el plano m. El eje imaginario del lugar geométrico de los exponentes de Floquet corresponde al círculo unitario en el plano m, y el interior del círculo unitario corresponde al semiplano izquierdo del plano μ. Nótese en la figura 3.15 que todos los multiplicadores caracterìsticos en el rango de variaciòn se ubican dentro del cìrculo unitario, por lo tanto, la representaciòn discreta tambièn indica estabilidad de la òrbita 1T-periódica. En la figura 3.16 se presenta el lugar geomètrico de los multiplicadores caracterìsticos con las regiones de ζ constante y ω_n constante delimitadas, que son el equivalente discreto de las regiones presentadas en la figura 3.14.

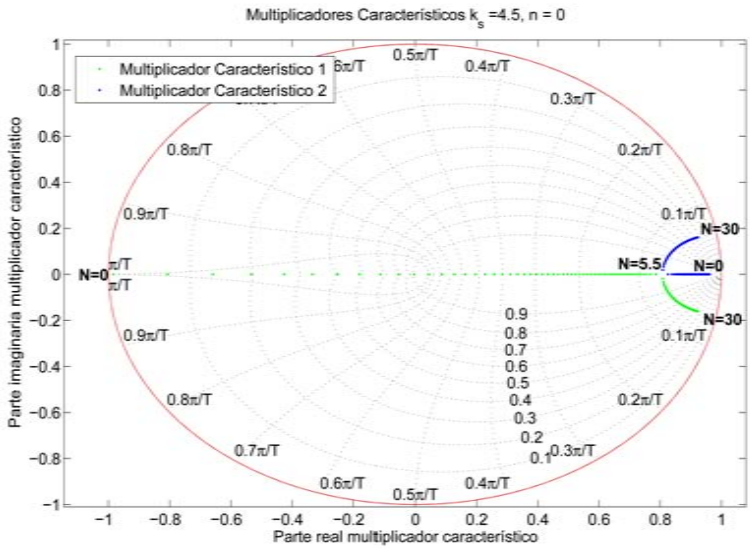


Figura 3.16: Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema sin atraso y control FPIC), y regiones de ζ constante y ω_n constante

Especificaciones de respuesta transitoria en el sistema sin tiempo de atraso

Frecuentemente, el comportamiento característico de un sistema de control está especificado en términos de la respuesta transitoria a una entrada escalón. La entrada escalón es fácil de generar y es lo suficientemente drástica a la hora de proporcionar la informaciòn conveniente de la respuesta transitoria y de estado estable de un sistema. Entre las características de respuesta transitoria de un sistema de control a una entrada escalón están: tiempo de retardo, tiempo de crecimiento, tiempo pico, sobreimpulso máximo y tiempo de establecimiento.

En este análisis se trabajará con las especificaciones de sobreimpulso máximo (M_p) y tiempo de establecimiento (t_s), ya que estas son muy usadas en el diseño de sistemas de control. El sobreimpulso máximo es el valor pico máximo porcentual de la curva de respuesta medido desde la referencia, está dado por la ecuación (3.30) y su magnitud indica la estabilidad relativa del sistema

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} 100\,\% \tag{3.30}$$

El tiempo de establecimiento es el tiempo que la curva de respuesta requiere para alcanzar y

mantenerse en el $2\,\%$ de su valor final y está dado por la ecuación (3.31).

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{3.31}$$

Las ecuaciones (3.30) y (3.31) están definidas sobre la ecuación canónica de segundo orden dada por la ecuación (3.28).

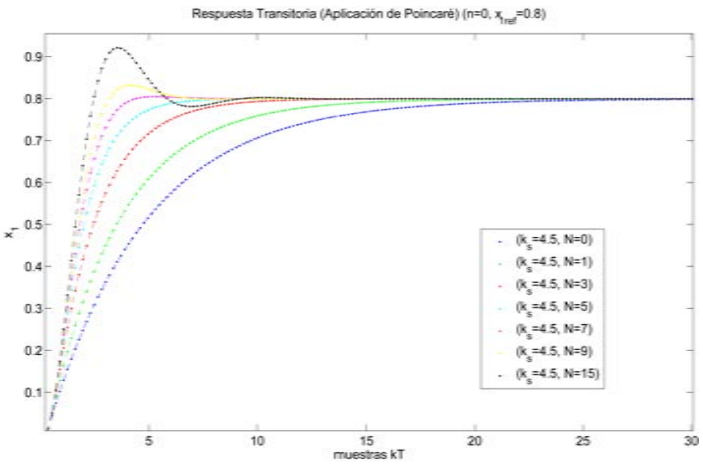
Normalmente, el valor de ζ se ajusta para cumplir requerimientos de sobreimpulso máximo (estabilidad relativa), mientras que ω_n se ajusta para que la respuesta sea rápida.

En la figura 3.17 se presentan algunas de las posibles respuestas transitorias del sistema sin atraso cuando se desea alcanzar una referencia de $0{,}8$ con un $k_s = 4{,}5$. La respuesta obtenida con la aplicación de Poincaré se presenta en la figura 3.17(a) y la respuesta que se obtiene utilizando el modelo linealizado discreto se muestra en la figura 3.17(b). Cualitativamente el modelo linealizado basado en los multiplicadores característicos se ajusta a la respuesta real del sistema. En la tabla 3.5 se sintetizan los resultados mostrados en la figura 3.17. Los tiempos de establecimiento y los sobreimpulsos máximos del sistema varían al aumentar N. Sin control FPIC ($N = 0$) el sistema tiene una respuesta sobreamortiguada, la cual se puede mantener con un tiempo de establecimiento aproximadamente 3 veces menor si se incluye el controlador FPIC con $N = 5$. Con un sobreimpulso muy bajo ($M_p = 0{,}633\,\%$) el sistema controlado con N=7 es 5 veces más rápido que el sistema sin control.

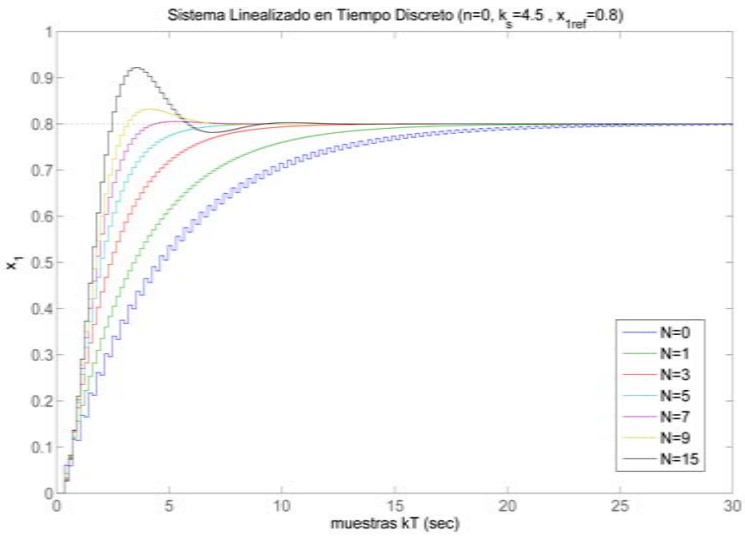
Condición de operación	m_1	m_2	t_s (kT)	M_p (%)
$(N = 0)$	$0{,}962$	$-0{,}984$	18,70	0
$(N = 1)$	$0{,}947$	$-0{,}004$	13,10	0
$(N = 3)$	$0{,}512$	$0{,}915$	8,31	0
$(N = 5)$	$0{,}725$	$0{,}863$	5,66	0
$(N = 7)$	$0{,}834 + 0{,}091i$	$0{,}834 - 0{,}091i$	3,71	0,63
$(N = 9)$	$0{,}858 + 0{,}121i$	$0{,}858 - 0{,}121i$	5,48	4,03
$(N = 15)$	$0{,}894 + 0{,}148i$	$0{,}894 - 0{,}148i$	7,42	15,20

Tabla 3.5: Comportamiento transitorio del sistema sin atraso PWMC-ZAD-FPIC (n=0, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, $T = 0{,}1767s$, N=0,1,3,5,7,9,15)

Por último es importante destacar que en la figura 3.17 el modelo no lineal (dado por la aplicación de Poincaré) y el modelo lineal (obtenido de la ecuación variacional) tienen condi-



(a) Aplicación de Poincaré



(b) Linealizado Discreto

Figura 3.17: Respuestas al escalón unitario sistema linealizado en tiempo discreto PWMC-ZAD-FPIC (n=0, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=0,1,3,5,7,9,15).

ciones iniciales $(x_{10}, x_{20}) = (0, 0)$, que están distantes del punto de linealización $(x_1, x_2) = (x_{1ref}, \gamma x_{1ref})$. Si bien el modelo linealizado tiene un caracter local en el cual se define explícitamente el valor deseado de la salida (x_{1ref}=0.8), las características cualitativas de las dinámicas transitorias se mantienen aún si no se tienen condiciones iniciales cercanas al punto

de linaelización.

3.2.4. Análisis de Estabilidad Relativa en el Sistema con un Periodo de Atraso

Al incluir el tiempo de atraso, la dimensión del sistema aumenta por lo cual no es posible aplicar de manera directa el análisis presentado en las secciones anteriores, sin embargo, los conceptos presentados para el sistema de segundo orden, pueden ser útiles para analizar el sistema aunque éste sea de orden superior. La conveniencia está dada principalmente cuando se puede aplicar el concepto de *polos dominantes*. Se dice que un sistema discreto estable tiene (1 ó 2) polos dominantes si la magnitud de dichos polos es suficientemente mayor (está más lejos del origen, dentro del círculo unitario) que la de los demás polos del sistema, de este modo en la respuesta transitoria prevalecen las dinámicas lentas.
El sistema con un periodo de atraso ($n = 1$) tiene dimensión 4, por lo cual los modelos linealizados tienen 4 polos, pero se trabajará con sólo tres de ellos, que corresponden a las dinámicas dominantes. A continuación se presentan los lugares geométricos y la respuesta al escalón del sistema con un periodo de atraso.

Lugar geométrico de los exponentes de Floquet en el sistema con un periodo de atraso

En la figura 3.18 se presenta el lugar geométrico para el modelo linealizado en tiempo continuo para $n = 1$, $k_s = 4{,}5$ y variación de N entre 0 y 30. Los exponentes de Floquet de naturaleza compleja cruzan el eje imaginario en $N \approx 1$, haciendo que el sistema pase de inestable a estable. Las características de las raíces se mantienen hasta $N \approx 6{,}8$ donde todas pasan a ser reales negativas, comportamiento que se mantiene hasta $N \approx 7{,}4$ donde dos de los exponentes vuelven a ser complejos conjugados. Estas transiciones aunque imperceptibles en estado estacionario, representan una amplia gama de comportamientos en estado transitorio.
En la figura 3.19 se observan más claramente las regiones de coeficiente de amortiguamiento constante (líneas radiales que pasan por el origen) y las regiones de frecuencia natural no amortiguada (círculos concéntricos al origen).

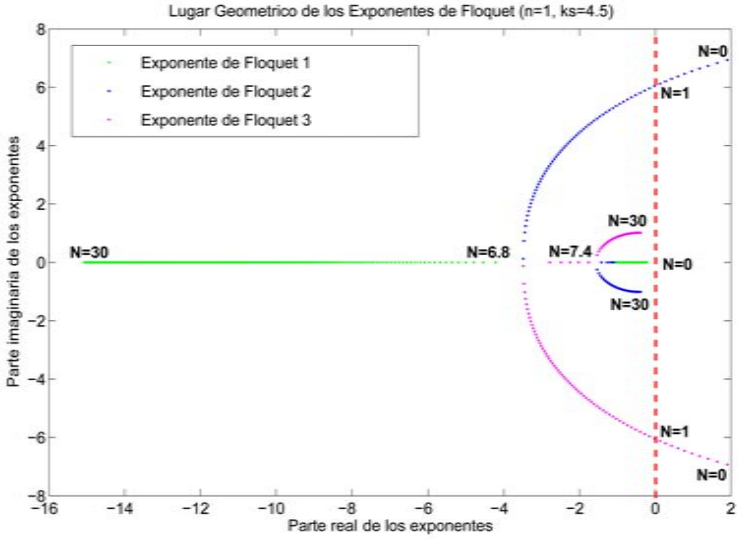


Figura 3.18: Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema con un periodo de atraso y control FPIC. ($k_s = 4{,}5, n = 1$)

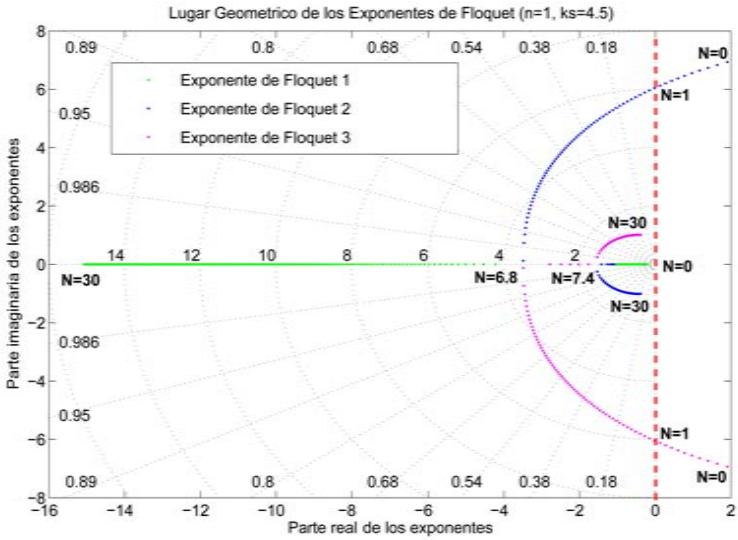


Figura 3.19: Lugar Geométrico de los Exponentes de Floquet del sistema con un periodo de atraso y control FPIC. ($k_s = 4{,}5, n = 1$)

Lugar geométrico de los multiplicadores característicos en el sistema con un periodo de atraso

En la figura 3.20 se presenta el lugar geométrico del modelo linealizado discreto. La forma en que los multiplicadores característicos atraviesan el círculo unitario se conoce con el nombre de bifurcación de Neimark-Sacker. En el *Capítulo 5*, dentro de la sección de *Trabajo Futuro* se realizan algunas consideraciones sobre este tipo de bifurcaciones.

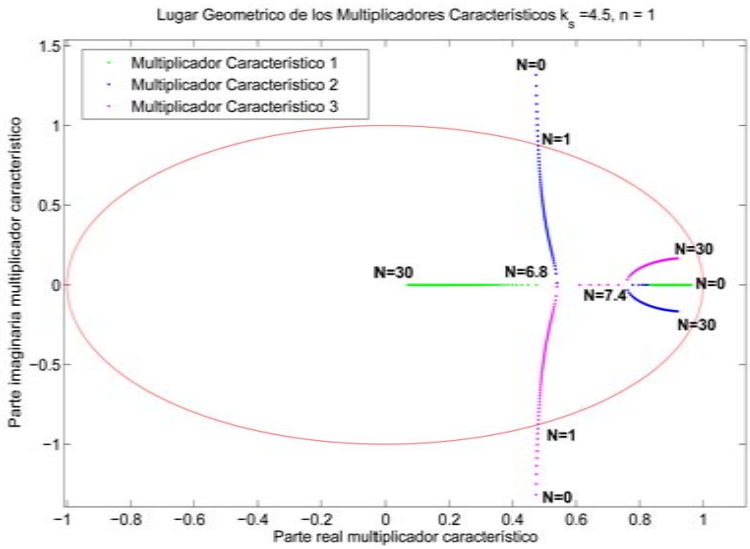


Figura 3.20: Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema con un periodo de atraso y control FPIC)

En el lugar geométrico de los multiplicadores característicos se visualiza claramente el efecto del control $FPIC$ en el sistema con un periodo de atraso. Cuando $N = 0$ dos de los multiplicadores se ubican por fuera de la región de estabilidad del sistema, lo cual en un sistema que evoluciona en una zona restringida del espacio es garantía de fenómenos no lineales como bifurcaciones y caos. A partir de $N = 1$ el sistema presenta respuestas estables que varían en sus características transitorias dependiendo de la ubicación de los multiplicadores dentro del círculo unitario. Entre $N = 6{,}8$ y $N = 7{,}4$ la respuesta transitoria no oscila, es del tipo sobreamortiguada debido a que los tres multiplicadores son reales. En los rangos donde existen multiplicadores característicos complejos conjugados se debe determinar si son ellos los que dominan en la respuesta transitoria, o es el multiplicador real, lo cual será tema de análisis en

la próxima sección.

Especificaciones de respuesta transitoria en el sistema con un periodo de atraso

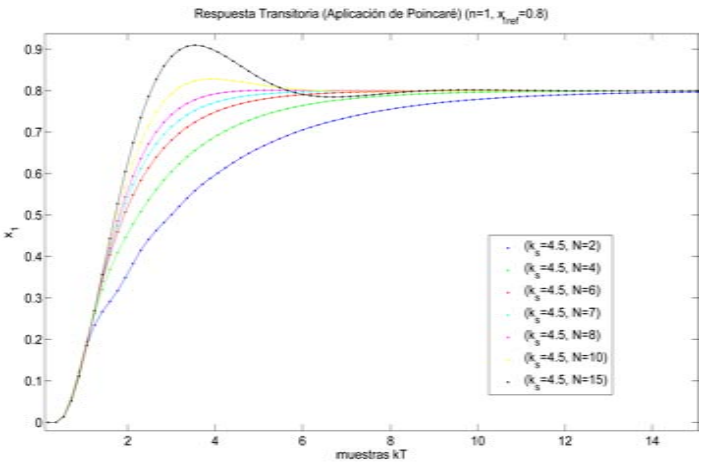
En la figura 3.21 se presenta la respuesta respuesta al escalón de amplitud $0{,}8$ del sistema con un periodo de atraso, en dos representaciones: aplicación de Poincaré en la figura 3.21(a) y modelo linealizado discreto en la figura 3.21(b). En la tabla 3.6 se presentan los polos dominantes del modelo linealizado, junto con los valores de tiempo de establecimiento t_s y sobreimpulso máximo M_p. Observe que entre $N = 1$ y $N = 6{,}4$ el polo dominante es el multiplicador real, ya que predomina el comportamiento sobreamortiguado con un $M_p = 0\,\%$. En $N = 7$ se está propiamente en la región sobreamortiguada del sistema, en la cual los tres polos son reales y se tiene una respuesta levemente más rápida que los valores $1 < N < 7$ manteniendo $M_p = 0\,\%$. Las respuesta $N = 8$, $N = 10$ y $N = 15$ muestran un paulatino crecimiento de la influencia de los multiplicadores complejos conjugados en la respuesta del sistema y por ende mayores sobreimpulsos máximos.

Condición de operación	m_1	m_2	m_3	t_s (kT)	M_p (%)
$(N = 2)$	$0{,}935$	$0{,}487 + 0{,}659i$	$0{,}487 - 0{,}659i$	$10{,}6$	0
$(N = 4)$	$0{,}905$	$0{,}502 + 0{,}406i$	$0{,}502 - 0{,}406i$	$7{,}42$	0
$(N = 6)$	$0{,}861$	$0{,}524 + 0{,}196i$	$0{,}524 - 0{,}196i$	$5{,}30$	0
$(N = 7)$	$0{,}448$	$0{,}817$	$0{,}644$	$4{,}42$	0
$(N = 8)$	$0{,}333$	$0{,}788 + 0{,}089i$	$0{,}788 - 0{,}089i$	$3{,}71$	$0{,}153$
$(N = 10)$	$0{,}239$	$0{,}835 + 0{,}134i$	$0{,}835 - 0{,}134i$	$4{,}95$	$0{,}828$
$(N = 15)$	$0{,}147$	$0{,}881 + 0{,}157$	$0{,}881 - 0{,}157i$	$5{,}30$	$13{,}7$

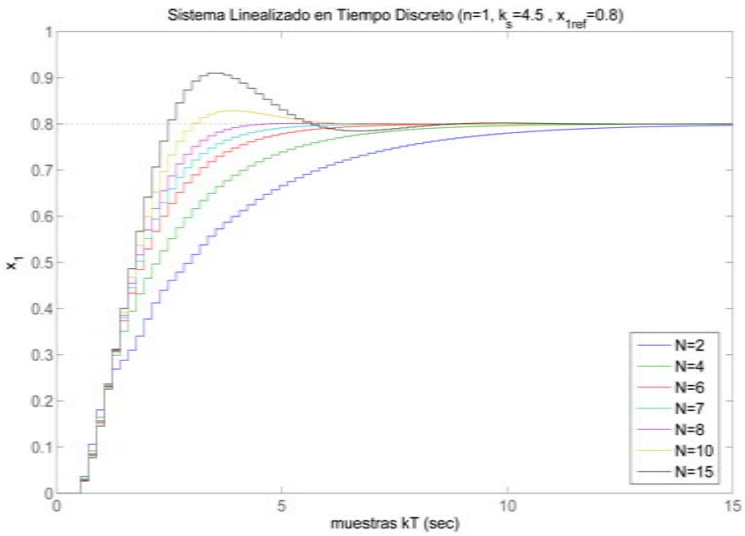
Tabla 3.6: Comportamiento transitorio del sistema con un periodo de atraso PWMCD-ZAD-FPIC (n=1, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=2,4,6,7,8,10,15)

Comparando las respuestas transitorias obtenidas del sistema sin atraso y del sistema con tiempo de atraso, para $k_s = 4{,}5$, resumidas en las tablas 3.5 y 3.6 se realizan las siguientes dos consideraciones:

– Se pueden alcanzar respuestas sobreamortiguadas más rápidas en el sistema con un periodo de atraso que en el sistema sin atraso.



(a) Aplicación de Poincaré



(b) Linealizado Discreto

Figura 3.21: Respuestas al escalón unitario sistema linealizado en tiempo discreto PWMCD-ZAD-FPIC (n=1, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=2,4,6,7,8,10,15).

– En la región estable, aplicando valores de control igual, como en los casos $N = 7$ y $N = 15$, el sistema con un periodo de atraso presenta un menor sobreimpulso que el sistema sin atraso.

Las anteriores observaciones muestran que el desempeño del sistema $PWMC - ZAD -$

$FPIC$, en cuando a velocidad de respuesta (dada por t_s) y estabilidad relativa (dada por M_p), es mejor cuando se trabaja con un periodo de atraso que cuando se trabaja en tiempo real. Sin embargo, es necesario realizar más análisis para determinar el verdadero alcance de estos resultados, para lo cual se propone realizar análisis de la respuesta transitoria con k_s variable y con n variable.

3.2.5. Análisis de Estabilidad Relativa con k_s variable

Hasta el momento sólo se han considerado las variaciones de la respuesta transitoria para un valor del parámetro de control ZAD constante ($k_s = 4{,}5$) y un parámetro de control FPIC variable ($N \in [0; 30]$), en esta sección se propone lo contrario, analizar con un N fijo y variaciones en el parámetro k_s, el desempeño del sistema sin atraso y con un periodo de atraso.

Análisis de Estabilidad Relativa del sistema sin atraso con k_s variable

En la figura 3.22 se presenta el lugar geométrico de los multiplicadores del sistema sin tiempo de atraso, para diferentes valores del parámetro k_s. Observe que en cada caso, la forma en que los multiplicadores evolucionan dentro del círculo unitario es similar, ya que hasta un determinado valor de N los multiplicadores son reales y por lo tanto la respuesta no presenta sobreimpulso y a partir de ese valor los multiplicadores son complejos conjugados, presentando sobreimpulsos cuya magnitud va depender de la ubicación de los multiplicadores dentro del círculo unitario. Para los valores de $k_s = \{0{,}125; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1{,}5; 3\}$ existe un rango de valores de N en el cual uno de los multiplicadores característicos está por fuera del círculo unitario. El valor de N en el cual el multiplicador real negativo sale del círculo unitario corresponde a una bifurcación flip o por doblamiento de periodo. Algunas consideraciones sobre las bifurcaciones tipo flip se plantean dentro de la sección de *Trabajo Futuro* del *Capítulo 5*.

En la tabla 3.7 se reúnen los valores de sobreimpulso máximo y tiempo de establecimiento para los 7 casos considerados del parámetro k_s, con un valor de $N = 1$. Note que se logran respuestas sobreamortiguadas ($M_p = 0\,\%$) mucho más rápidas que las presentadas en las tablas 3.5 y 3.6.

Además observe que las respuestas más rápidas se dan en valores de k_s donde el sistema sin control FPIC presenta caos, lo cual muestra que el sistema que funciona en tiempo real responde más rápidamente, si es llevado a una región caótica (por ejemplo $k_s = 0{,}25$) para pos-

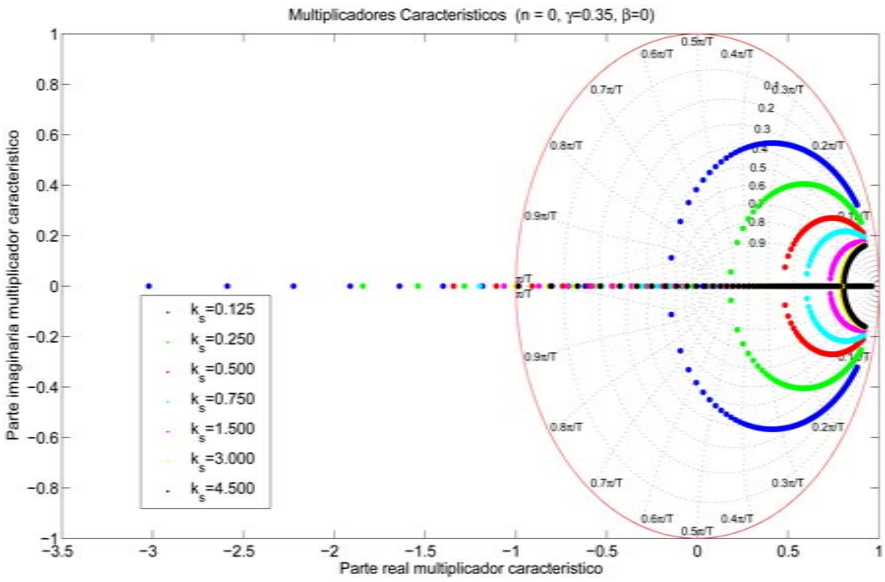


Figura 3.22: Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema sin tiempo de atraso y control FPIC (k_s variable)

Condición de operación ($x_{1ref} = 0{,}8$), ($\gamma = 0{,}35$), ($T = 0{,}1767$)	t_s (kT)	M_p (%)
($n = 0$), ($k_s = 0{,}125$), ($N = 1$)	1,06	38,4
($n = 0$), ($k_s = 0{,}250$), ($N = 1$)	0,88	0
($n = 0$), ($k_s = 0{,}500$), ($N = 1$)	1,77	0
($n = 0$), ($k_s = 0{,}750$), ($N = 1$)	2,83	0
($n = 0$), ($k_s = 1{,}500$), ($N = 1$)	5,30	0
($n = 0$), ($k_s = 3{,}000$), ($N = 1$)	9,55	0
($n = 0$), ($k_s = 4{,}500$), ($N = 1$)	13,10	0

Tabla 3.7: Comportamiento dinámico del sistema PWMC-ZAD-FPIC ($k_s = 0{,}125, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1{,}5, 3, 4{,}5$, $N = 1$, $x_{1ref} = 0{,}8$, $n = 0$)

teriormente ser estabilizado con la estategia FPIC. Este hecho concuerda con observaciones que se han hecho en otras investigaciones, en las cuales se alcanzan respuestas más veloces con sistemas caóticos estabilizados. En la próxima sección se investiga esta situación con un periodo de atraso.

Análisis de Estabilidad Relativa del sistema con un periodo de atraso con k_s variable

En la figura 3.23 se presenta el lugar geométrico de los multiplicadores característicos del sistema con un periodo de atraso para los 7 valores del parámetro k_s considerados en el análisis del sistema sin atraso, en un rango de variación de N entre 0 y 30. Observe como a medida que el parámetro k_s disminuye es necesario un mayor esfuerzo de control para tener todos los multiplicadores característicos dentro del círculo unitario. En todos los casos se presentan bifurcaciones del tipo Neimark-Sacker, las cuales se estudian de forma preliminar en la sección de trabajo futuro.

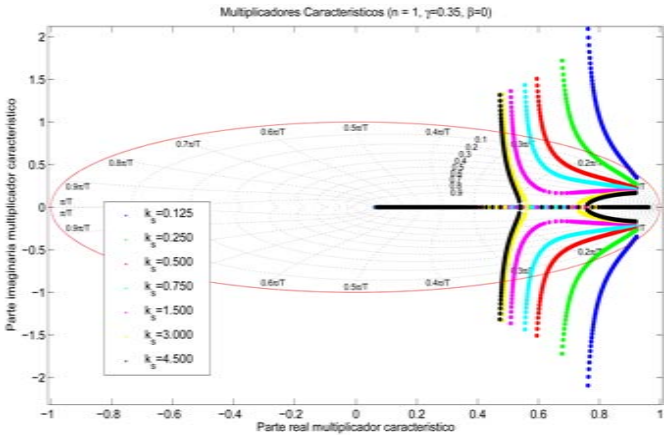


Figura 3.23: Lugar Geométrico de los Multiplicadores Característicos del sistema con un periodo de atraso y control FPIC (k_s variable)

En la tabla 3.8 se analizan las características de respuesta transitoria M_p y t_s del sistema con un periodo de atraso, para un mismo valor del parámetro FPIC. Se escoge $N = 20$ ya que para este valor se presenta respuestas estables en los 7 casos de k_s. Note que la dirección en la que se presenta un mejor compromiso entre velocidad de respuesta y estabilidad relativa es contrario a la detectada en el sistema sin atraso, es decir, para el sistema sin atraso se alcanzaba un mejor desempeño al disminuir el valor de k_s, en cambio en el sistema con un periodo de atraso la tendencia indica un mejor desempeño al aumentar el valor de k_s.

Los consideraciones realizadas con $k_s = 4{,}5$, en las cuales se observaba un mejor desempeño del sistema con un periodo de atraso, sólo muestran una situación particular en las curvas de desempeño de los sistemas $n = 0$ y $n = 1$. No obstante, se ha determinado que la curva de

Condición de operación ($x_{1ref} = 0{,}8$), ($\gamma = 0{,}35$), ($T = 0{,}1767$)	t_s (kT)	M_p (%)
($n = 1$), ($k_s = 0{,}125$), ($N = 20$)	199,20	98,7
($n = 1$), ($k_s = 0{,}25$), ($N = 20$)	15,70	65,7
($n = 1$), ($k_s = 0{,}5$), ($N = 20$)	9,55	44,8
($n = 1$), ($k_s = 0{,}75$), ($N = 20$)	8,49	37,0
($n = 1$), ($k_s = 1{,}5$), ($N = 20$)	8,84	28,0
($n = 1$), ($k_s = 3$), ($N = 20$)	7,60	22,9
($n = 1$), ($k_s = 4{,}5$), ($N = 20$)	7,78	21,3

Tabla 3.8: Comportamiento dinámico del sistema PWMC-ZAD-FPIC ($k_s = 0{,}125, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1{,}5, 3, 4{,}5$, $N = 20$, $x_{1ref} = 0{,}8$, $n = 1$)

desempeño del sistema sin atraso mejora para valores $k_s < 4{,}5$ (con un adecuado valor de N) y que el desempeño más adecuado del sistema con un periodo de atraso se alcanza para valores cercanos a $k_s = 4{,}5$ y valores de N inferiores a 10.

3.2.6. Análisis de Estabilidad Relativa con n variable

A continuación se presenta algunas consideraciones sobre la variación del tiempo de atraso nT en el sistema. A medida que crece el valor de n, crece el número de polos en los modelos linealizados, en un factor $2(n + 1)$. De esta manera, si n=2 se tienen 6 polos, si n=3 se tienen 8 polos y así sucesivamente. Este crecimiento en el número de polos hace que cada vez sea más dificil obtener respuestas sobreamortiguadas, en las que predomine el efecto de un polo real, ya que existe una mayo presencia de multiplicadores complejos conjugados, que en la mayoria de los casos son los polos dominantes del sistema. Esta situación se suma al hecho que el parámetro FPIC debe tomar valores más altos, ya que es necesario un mayor esfuerzo de control a medida que n crece. Los efectos de polos complejos conjugados dominantes son respuestas subamortiguadas con valores de M_p altos, y los efectos de mayores esfuerzos en el control se reflejan en respuestas más lentas.

En la figura 3.24 se muestra el comportamiento del sobreimpulso máximo a medida que el parámetro k_s es variado en el sistema, para valores de atraso desde $n = 1$ hasta $n = 6$.

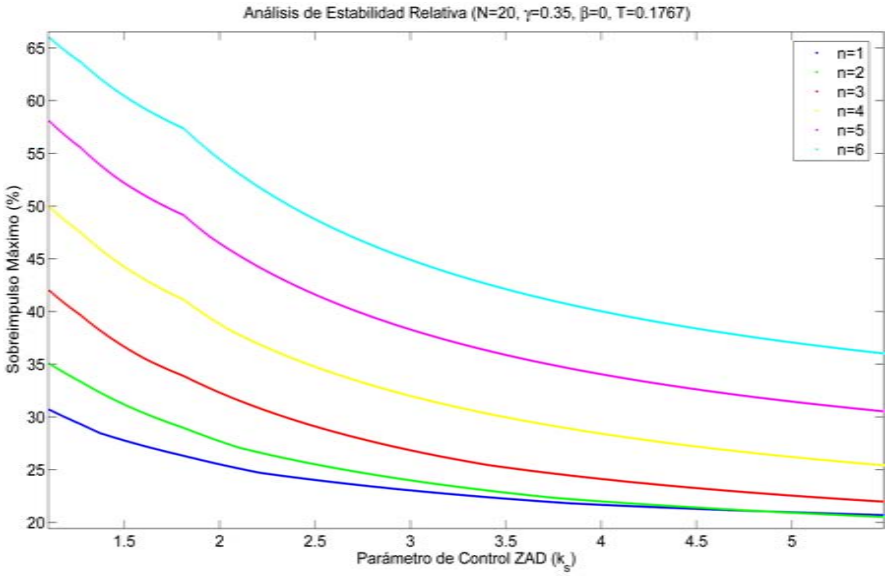


Figura 3.24: Análisis de Estabilidad Relativa: Sobreimpulso Máximo $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $\beta = 0$, n varios

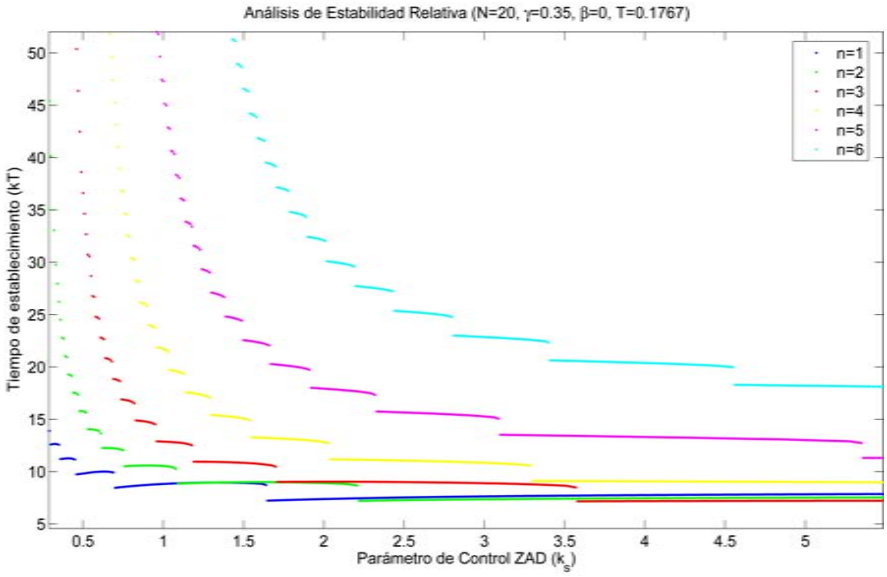


Figura 3.25: Análisis de Estabilidad Relativa: Tiempo de establecimiento $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $\beta = 0$, n varios

Observe que a medida que aumenta el tiempo de atraso en el sistema, la magnitud del sobreimpulso máximo también lo hace, incluso hasta valores que en muchos casos son intolerables. Además, note que este gráfico confirma la tendencia que se resaltaba anteriormente, en la cual el sistema con tiempo de atraso mejora su estabilidad relativa a medida que k_s aumenta.

En la figura 3.25 se presenta el comportamiento del tiempo de establecimiento (t_s) a medida que k_s varía, para los mismos atrasos considerados en la figura 3.24. Las líneas presentan son discontinuas debido a las respuestas alcanzan la región del $2\,\%$ del valor final en forma oscilante, lo cual puede ocasiona valores discontinuos ante leves variaciones del parámetro de bifurcación. Note como a medida que se utiliza un atraso mayor en el sistema, la respuesta se demora más tiempo en alcanzar el margen del $2\,\%$ del valor de referencia. Nuevamente, debe tenerse en cuenta que las curvas de t_s decrecen a medida que k_s aumenta, lo cual implica que se tienen respuesta más rapidas a medida que el parámetro de bifurcación k_s aumenta.

En las figuras 3.26 y 3.27 se presentan las respuesta al escalón del sistema con tiempo de atraso, con $k_s = 4{,}5$ y dos valores del parámetro FPIC: $N = 15$ y $N = 25$. Se presentan las tres formas de obtener la respuesta: utilizando la aplicación de Poincaré, el modelo linealizado continuo y el modelo linealizado discreto. Observe que cualitativamente los modelos linealizados responden adecuadamente para diferentes tiempos de atraso.

Condición de operación	t_s ($N = 15$) (kT)	M_p ($N = 15$) ($\%$)	t_s ($N = 25$) (kT)	M_p ($N = 25$) ($\%$)
($n = 0$)	7,42	15,2	8,13	27,1
($n = 1$)	5,30	13,7	7,95	26,6
($n = 2$)	4,95	13,2	9,55	26,9
($n = 3$)	6,36	15,0	9,72	28,7
($n = 4$)	8,13	20,5	9,72	31,9
($n = 5$)	14,3	27,6	12,0	36,3
($n = 6$)	25,6	35,1	16,8	41,0

Tabla 3.9: Comportamiento transitorio del sistema PWMC-ZAD-FPIC (n=0,1,...,6, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, N=15 y N=25)

En la tabla 3.9 se agrupan los resultados transitorios (M_p y t_s) de las respuestas presentadas

en las figuras 3.26 y 3.27. Nótese que al aumentar el valor del parámetro FPIC de $N = 15$ a $N = 25$, en todos los casos de atraso existe un deterioro en la estabilidad relativa del sistema, dada por la magnitud del sobreimpulso máximo.

3.2.7. Análisis de Estabilidad Relativa con β variable

A continuación se analizan los efectos que la disipación de energía, tienen en el análisis de estabilidad relativa. Para tal hecho se realizarán variaciones en el parámetro β, que como se presnta en la tabla 3.4 tiene una relación directa con elementos disipativos de energía, en particular con la resistencia interna de la inductancia en un convertidor de potencia tipo *buck*.

En la figura 3.28 se presenta la variación del sobreimpulso máximo en el sistema sin atraso, con $k_s = 4{,}5$, a medida que el parámetro N es variado, para diferentes valores de β. Note que en la zona $0 < N < 7{,}4$, no existe variación en la magnitud de M_p. En la región $7{,}4 < N < 30$, donde los multiplicadores característicos son complejos conjugados, se observa que un mayor valor de β disminuye la magnitud del sobreimpulso máximo. Intuitivamente, a medida que existen mayores pérdidas en el sistema existe menos energía, lo cual ocasiona sobreimpulsos de menor magnitud.

En la figura 3.29 se muestra la variación del tiempo de establecimiento a medida que N es variado, para 7 diferentes casos de β. Note que a medida que las pérdidas de energía en el sistema aumentan es necesario un mayor esfuerzo de control FPIC para tener la misma velocidad de respuesta.

3.3. Conclusiones

Para fines prácticos, las aplicaciones más comunes para el sistema PWMC basado en ZAD requieren del conocimiento de la estabilidad de la órbita 1T-periódica, por este motivo el análisis presentado se restringe a esta órbita.

Dado que el tiempo de atraso no afecta el punto fijo 1T-periódico, la expresión hallada del ciclo de trabajo en estado estacionario (para el caso de rastreo y regulación) es aplicable para cualquier periodo de atraso.

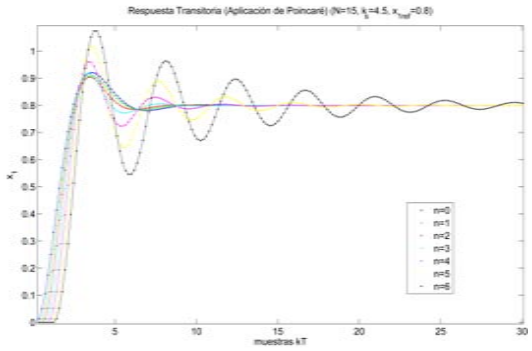
Sin embargo, las condiciones de estabilidad del sistema sí cambian drásticamente dependiendo del tiempo de atraso considerado: entre mayor sea el número de periodos de atraso (n) menos estable será el sistema.

La exigencia para efectuar el análisis de estabilidad también aumenta con el n del sistema, debido a que la dimensionalidad del sistema crece en un factor $2(n+1)$. Este inconveniente se solucionó con el procedimiento explicado para calcular los exponentes de Floquet, el cual permitió generalizar el método para cualquier periodo de atraso.

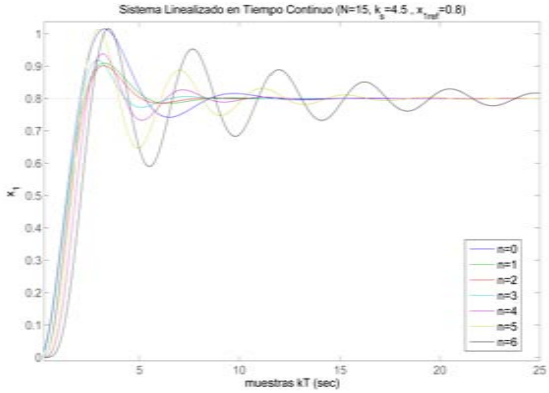
Resolver la ecuación variacional brinda información que puede ser utilizada para definir características de estabilidad absoluta (en estado estacionario) y de estabilidad relativa (en estado transitorio). Si se utiliza la información de los multiplicadores de Floquet, tanto en sus partes real como imaginaria, se pueden definir criterios de análisis del sistema en estado transitorio. En estado estacionario, la parte imaginaria no es relevante, por lo cual solo se requiere conocer la parte real.

Por otro lado, es importante destacar que el uso de varias técnicas para determinar la estabilidad del sistema, además de ofrecer ventajas de validación y verificación, permiten manejar varios espacios de referencia, el continuo y el discreto.

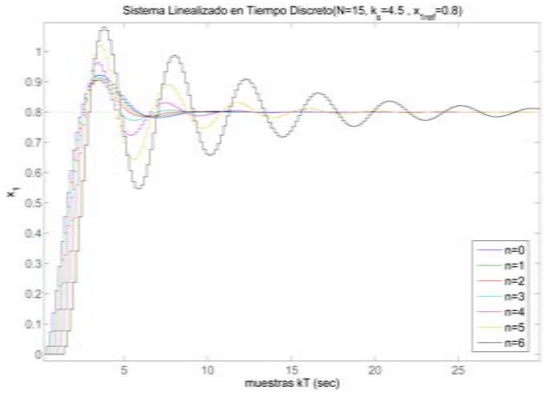
Los resultados mostrados en este capítulo dejan claro la necesidad de incluir el control FPIC en el sistema con atraso. Además se muestran las bondades de utilizarlo en el esquema de trabajo en tiempo real, para ajustar una respuesta transitoria deseada.



(a) (Aplicación de Poincaré)

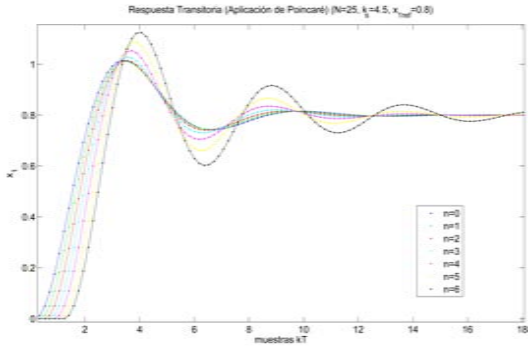


(b) (Linealizado Continuo)

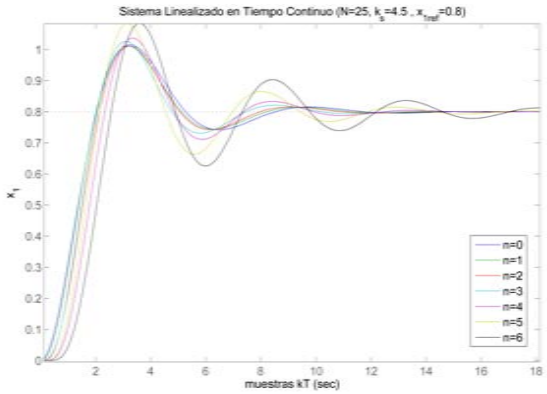


(c) (Linealizado Discreto)

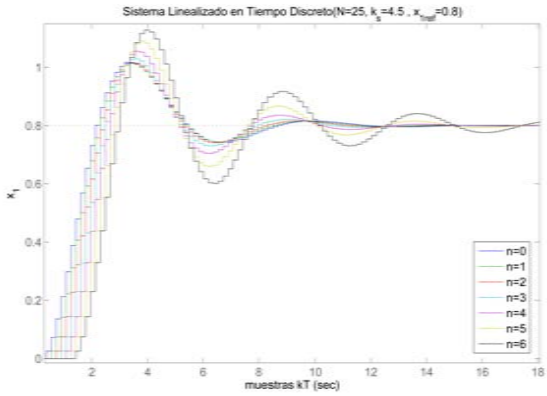
Figura 3.26: Respuestas transitorias modelos linealizados (N=15, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, n=0,1,...,6))



(a) (Aplicación de Poincaré)



(b) (Linealizado Continuo)



(c) (Linealizado Discreto)

Figura 3.27: Comparación de las respuestas transitorias reales y de los modelos linealizados del sistema PWMC-ZAD-FPIC (N=25, $k_s = 4{,}5$, $x_{1ref} = 0{,}8$, n=0,1,...,6))

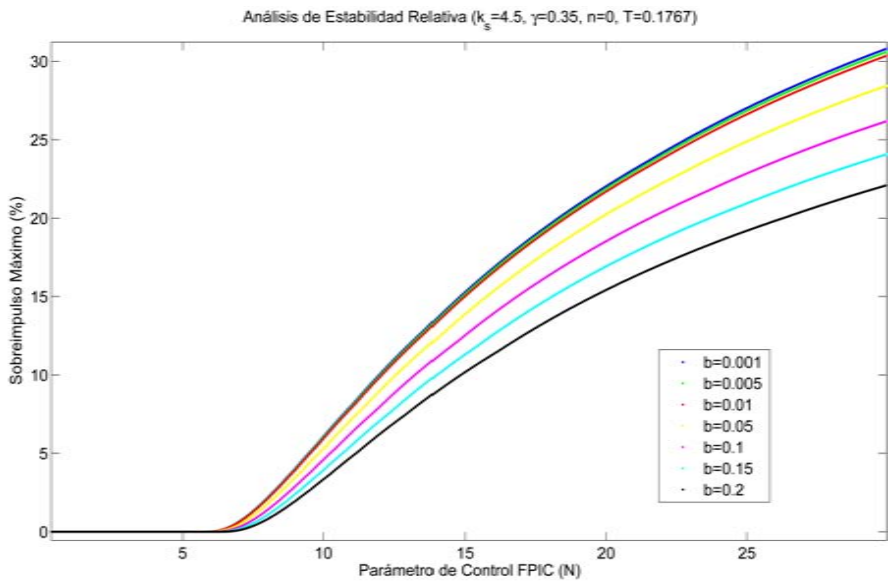


Figura 3.28: Análisis de Estabilidad Relativa: Sobreimpulso Máximo $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $n = 0$, β varios

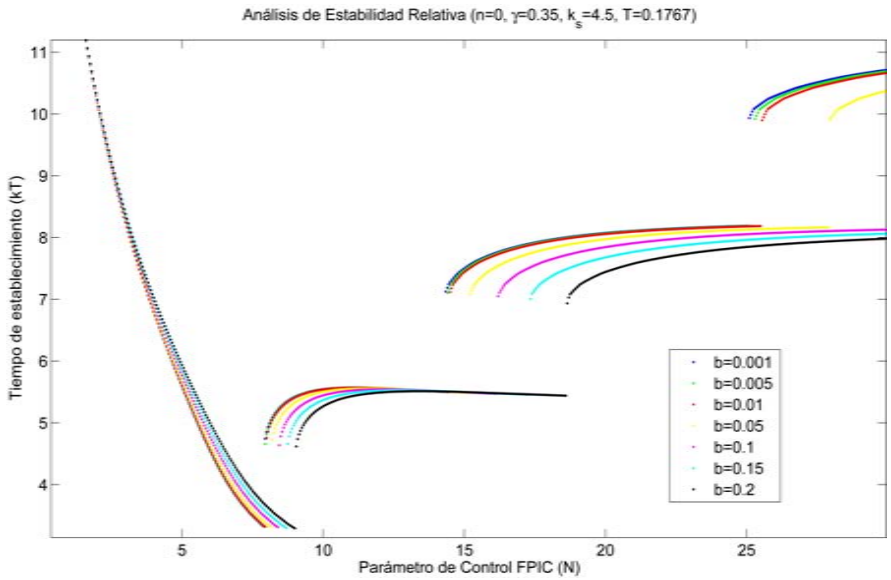


Figura 3.29: Análisis de Estabilidad Relativa: Tiempo de establecimiento $N = 20$, $\gamma = 0{,}35$, $n = 0$, β varios

Capítulo 4

Estabilidad y Existencia de Órbitas pT-Periódicas

4.1. Determinación de la estabilidad de órbitas pT-periódicas

El procedimiento utilizado para calcular la estabilidad de la órbita $1T$-periódica puede ser extendido al análisis de órbitas pT-periódicas con $p > 1$.

El único requerimiento es tener cierto conocimiento sobre el comportamiento del sistema, en especial del ciclo de trabajo.

Un estudio completo sobre el comportamiento dinámico de este sistema es presentado en [5], donde se especifican las transiciones entre las diferentes órbitas periódicas y la estructura y comportamiento del ciclo de trabajo. En este capítulo se complementan los resultados de [5], al lograr un procedimiento general que explica de una manera formal, aunque aproximada, la transición del sistema de la periodicidad al caos.

Algunas características que resultan muy útiles a la hora de definir el conjunto $\{d_1, d_2, ..., d_p\}$, son las siguientes:

- El valor del ciclo de trabajo en estado estacionario, para la órbita $1T$-periódica, depende de los parámetros: γ, β, x_{1ref}, u_+, u_- y T. En la ecuación (4.1) se presenta el ciclo de trabajo en estado estacionario, para el caso donde la generación del pulso obedece a la secuencia $\{u_+, u_-, u_+\}$.

$$d_{ss} = T\frac{(1+\beta\gamma)x_{1ref} - u_-}{u_+ - u_-} \tag{4.1}$$

- *Características de la superficie de deslizamiento aproximada* ($s(\mathbf{x}(t))$): el conocimiento del comportamiento de la superficie de deslizamiento permite realizar aproximaciones

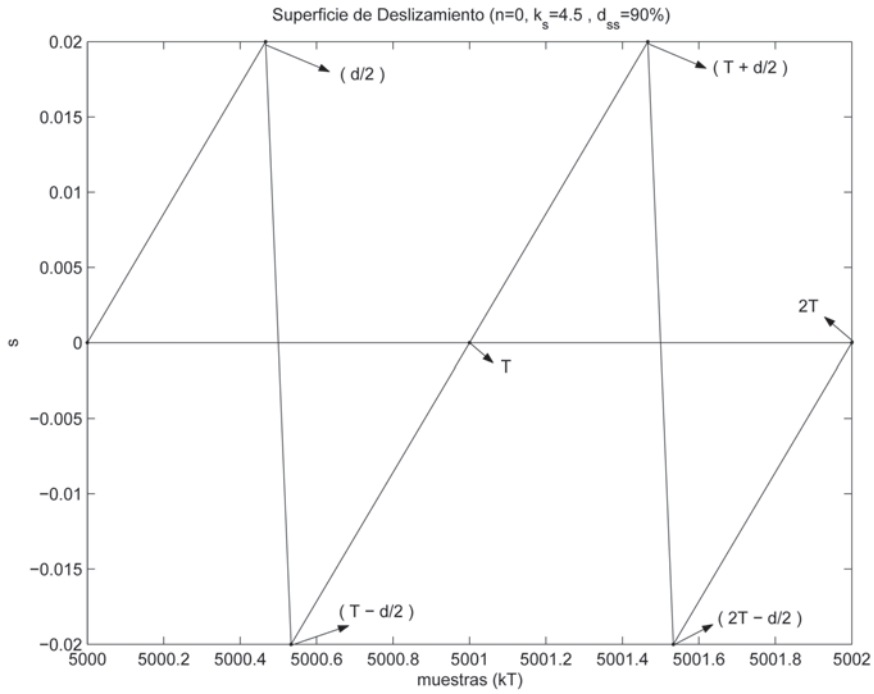


Figura 4.1: Superficie de deslizamiento (Órbita $1T$-periódica).

que facilitan la determinación de la estabilidad de órbitas pT-periódicas. A continuación se describen algunas de las principales características de $s(\mathbf{x}(t))$:

- La superficie de deslizamiento se considera lineal a tramos. En la figura 4.1 se presenta el comportamiento de la superficie de deslizamiento para una órbita $1T$-periódica, correspondiente al sistema sin atraso con $k_s = 4{,}5$. En la figura 4.2 se presenta el caso $2T$-periódico sin ciclos saturados ($d_1 - d_2$), alcanzado con los parámetros: $n = 0$ y $k_s = 3{,}243$. En la figura 4.3 se presenta la superficie de deslizamiento de la órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado ($T - d$) correspondiente al sistema sin atraso con un $k_s = 3$.
- Existe promedio cero en cada periodo de muestreo. En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se observa el comportamiento en estado estacionario de $s(\mathbf{x}(t))$ durante 2 periodos de muestreo. En todos los casos, el área bajo la curva tiene promedio cero, en cada intervalo de muestreo. Cuando existen ciclos de trabajo saturados la suposición de promedio cero se cumple principalmente cuando el valor del ciclo coincide con el

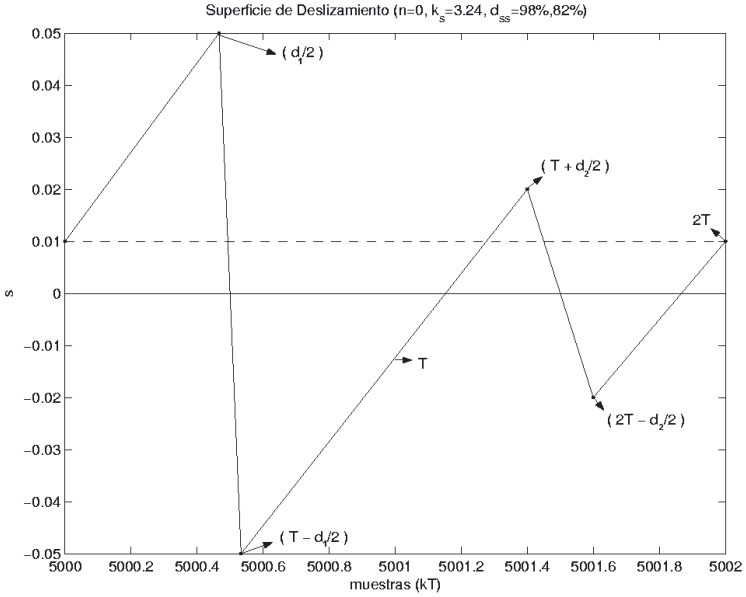


Figura 4.2: Superficie de deslizamiento (Órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados).

de saturación.

- En una órbita pT-periódica, el valor de la superficie de deslizamiento, en estado estacionario, cada p muestras coincide. Para la órbita $1T$-periódica (figura 4.1) se tiene $s(\mathbf{x}(iT)) = s(\mathbf{x}((i+1)T))$. Para la órbita $2T$-periódica (figuras 4.2 y 4.3) esta condición implica: $s(\mathbf{x}(iT)) = s(\mathbf{x}((i+2)T))$.
- En cada intervalo de muestreo $\Delta_i \in [(i-1)T, iT)$ existen tres tramos: $t_1 \in [(i-1)T, (i-1)T + d/2)$, $t_2 \in [(i-1)T + d/2, iT - d/2)$ y $t_3 \in [iT - d/2, iT)$.
  - t_1 y t_2 tienen igual duración y la misma pendiente de signo positivo: $m_{t1} = m_{t2} = 2A_{si}/d$, donde A_{si} es el valor pico de la superficie de deslizamiento en el intervalo Δ_i.
  - t_2 tiene pendiente de signo negativo: $m_{t_2} = -2A_{si}/(T-d)$.
  - La magnitud de las pendientes en cada tramo se relacionan con la proporción dada en la ecuación (4.2). Si $d = 0{,}5T$ todas la pendientes tienen igual magnitud: $|m_{t1}| = |m_{t2}| = |m_{t3}|$. Si $d < 0{,}5T$ se tiene $|m_{t1}| = |m_{t3}| < |m_{t2}|$. El caso $d > 0{,}5T$ es el caso típico cuando la generación del pulso obedece a la

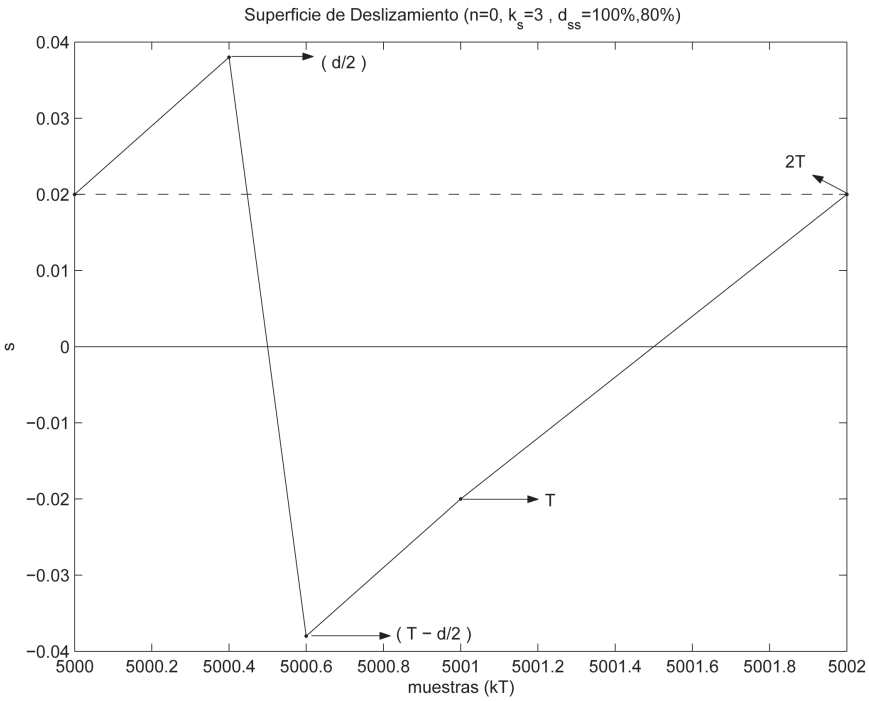


Figura 4.3: Superficie de deslizamiento (Órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado).

secuencia $\{u_+, u_-, u_+\}$, en el cual se tiene $|m_{t1}| = |m_{t3}| > |m_{t2}|$.

$$\frac{|m_{t2}|}{|m_{t1}|} = \frac{|m_{t2}|}{|m_{t3}|} = \frac{T-d}{d} \tag{4.2}$$

- Cruce por cero: La superficie de deslizamiento cambia de polaridad en la mitad de cada intervalo de muestreo ($t_{cx0} = ((iT - (i-1)T)/2) = T/2$).
- Ciclo saturado ($d = T$): cuando se presentan órbitas con ciclos saturados, los tramos t_1 y t_3 tienen una duración de $T/2$ y pendiente $m_t = 2A_{si}/T$, por lo tanto el tramo t_2 tiene duración 0 y no existe cambios de pendiente en todo el intervalo de muestreo.

– Las anteriores consideraciones permiten considerar que existe promedio fijo entre los valores $\{d_1, d_2, ..., d_p\}$ de la órbita pT-periódica, el cual está dado por la ecuación (4.3). El promedio entre los ciclos de trabajo de la órbita pT-periódica es equivalente al valor

de estado estacionario de la órbita $1T$-periódica (ecuación (4.1))

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} d_i = pT\left[\frac{(1+\beta\gamma)x_{1ref} - u_-}{u_+ - u_-}\right] = d_{ss} \tag{4.3}$$

En la próxima sección se explica cómo dado un conjunto $\{d_1, d_2, ..., d_p\}$ es posible determinar la estabilidad de la órbita pT-periódica, por medio de los exponentes de Floquet.

Cálculo de los Exponentes de Floquet del Sistema PWMC-ZAD con Generalización de Órbitas Periódicas

Las ecuaciones dinámicas del sistema pT-periódico PWMCD-ZAD pueden ser expresadas tal como se presenta en la ecuación (4.4), donde $\mathbf{A} = [-\gamma\ , 1; -1, -\beta]$, $\mathbf{B} = [0; 1]$, $k_1 = u_i u_+$, Y $k_2 = u_i(u_+ - u_-)$, $u_i = 1$ si el pulso centrado se inicia en u_+ y $u_i = -1$ si pulso centrado se inicia en u_-.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + k_1\mathbf{B} + k_2\sum_{i=1}^{p}\left[-\theta(t - ((i-1)T + \frac{d_i}{2})) + \theta(t - (iT - \frac{d_i}{2}))\right]\mathbf{B} \tag{4.4}$$

Los valores $d_1, ..., d_i, ..., d_p$ corresponden al ciclo de trabajo aplicado en los intervalos $(0, T]$,...,$((i-1)T, iT]$,..., $((p-1)T, pT]$, respectivamente, los cuales están sujetos al conjunto de p restricciones mostrado en la ecuación (4.5), donde d_{ci} está dado por la ecuación (4.6).

$$d_i = \begin{cases} 0 & si \quad d_{ci} \leqslant 0 \\ d_{ci} & si \quad 0 < d_{ci} < T \\ T & si \quad d_{ci} \geqslant T \end{cases} \tag{4.5}$$

$$d_{ci} = c_1 x_1((i-1)T) + c_2 x_2((i-1)T) + c_3 \tag{4.6}$$

Los valores de c_1, c_2 y c_3 fueron calculados en la sección 2,1 y se repiten a continuación en las ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9).

$$c_1 = \frac{2 - \gamma(2k_s + T(1 - \gamma k_s)) - k_s T}{-k_s(u_+ - u_-)} \tag{4.7}$$

$$c_2 = \frac{2k_s + T(1 - k_s(\gamma + \beta))}{-k_s(u_+ - u_-)} \tag{4.8}$$

$$c_3 = \frac{-2x_{1ref} + k_s T u_-}{-k_s(u_+ - u_-)} \tag{4.9}$$

Para definir la ecuación variacional del sistema pT-periódico se procede de la misma forma que en el caso $1T$-periódico: se perturba el sistema con una función exponencial ($e^{\mu t}$**a**), posteriormente se realiza una aproximación por series de Taylor a primer orden, y por último se elimina la solución, para dejar solo la información correspondiente a la perturbación, tal como se muestra en la ecuación (4.10), donde el vector **a** corresponde a las funciones de tiempo asociadas a la perturbación, $\mathbf{M} = [-(\mu+\gamma)\ , 1; -1, -(\mu+\beta)]$, $\mathbf{H} = [0, 0; k_2c_1, k_2c_2]$.

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{Ma} + e^{-\mu t}\sum_{i=1}^{p}\left[\delta(t-((i-1)T+\frac{d_i}{2})) + \delta(t-(iT-\frac{d_i}{2}))\right]\mathbf{Ha}(0) \tag{4.10}$$

Para resolver la ecuación variacional pT-periódica (ecuación (4.10)) se procede de la siguiente forma:

1. Se halla la matriz de transición de estados como el producto de las exponenciales de las matrices $\mathbf{M}_1 = [-(\gamma/2+\beta/2+\mu)\ , 0; 0, -(\gamma/2+\beta/2+\mu)]$ y $\mathbf{M}_2 = [-\gamma/2+\beta/2\ , 1; -1, \gamma/2-\beta/2]$, (ecuaciones (4.11) y (4.12)), donde $\alpha_1 = \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$ y $\alpha_2 = \sqrt{1-\alpha_1^2}$.

$$e^{\mathbf{M}_1 t} = e^{-(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}+\mu)t}\mathbf{I} \tag{4.11}$$

$$e^{\mathbf{M}_2 t} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}sen(\alpha_2 t) + \cos(\alpha_2 t) & \frac{1}{\alpha_2}sen(\alpha_2 t) \\ -\frac{1}{\alpha_2}sen(\alpha_2 t) & \frac{\alpha_1}{\alpha_2}sen(\alpha_2 t) + \cos(\alpha_2 t) \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

2. Para resolver la ecuación variacional del sistema pT-periódico se integra sobre el intervalo $[0, pT]$, de acuerdo con las siguientes consideraciones:

   – *Descomponer la solución*: La solución total se puede dividir en un conjunto de p soluciones parciales, cada una correspondiente a un intervalo de muestreo $\Delta_i = ((i-1)T, iT]$, como en la ecuación (4.13) con $i = 1, 2, ..., p$.

$$\mathbf{a}(iT) = \mathbf{Q}_i\mathbf{a}((i-1)T) \tag{4.13}$$

- *Desacoplar las discontinuidades*: Dado que cada ciclo de trabajo d_i está definido en función del estado al inicio de cada intervalo Δ_i, es necesario que cada discontinuidad en el intervalo Δ_i esté referenciada al mismo punto $(i-1)T$.
- *Solucionar un intervalo* Δ_i: Para cada intervalo de muestreo se procede de la siguiente forma:
  - En el tramo: $((i-1)T, (i-1)T + d_i/2)$ se calcula $\mathbf{a}((i-1)T + d_i/2)_-$.
  - Se evalúa la discontinuidad desacoplada en $d_i/2$ para calcular $\mathbf{a}((i-1)T + d_i/2)_+$.
  - En el tramo: $((i-1)T + d_i/2, iT - d_i/2)$ se calcula $\mathbf{a}(iT - d_i/2)_-$.
  - Se evalúa la discontinuidad desacoplada en $T - d_i/2$ para calcular $\mathbf{a}(iT - d_i/2)_+$.
  - En el tramo: $(iT - d_i/2, iT)$ se calcula $\mathbf{a}(iT)$.
  - Haciendo $z = e^{-\mu T}$ se obtiene que la solución a la perturbación está dada por la ecuación (4.14).

$$\mathbf{a}(iT) = (ze^{-(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2})T}e^{\mathbf{M}_2 T} + ze^{-(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2})(T-\frac{d_i}{2})}e^{\mathbf{M}_2(T-\frac{d_i}{2})}\mathbf{H} + ze^{-(\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2})(\frac{d_i}{2})}e^{\mathbf{M}_2(\frac{d_i}{2})}\mathbf{H})\mathbf{a}((i-1)T) \tag{4.14}$$

  - *Unir la solución*: Las p soluciones parciales se unen para formar la solución total, considerando que la solución encontrada en el intervalo $((i-1)T, iT]$ es la condición inicial para la hallada en el intervalo $(iT, (i+1)T]$, para $i = 1, 2, ..., p-1$, como se sintetiza en la ecuación (4.15).

$$\mathbf{a}(pT) = \mathbf{Q}_p\mathbf{Q}_{p-1}...\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{a}(0) \tag{4.15}$$

Con base en las consideraciones antes expuestas, la solución de la ecuación variacional tiene la forma de la ecuación (4.16), donde $\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_p\mathbf{Q}_{p-1}...\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$.

$$\mathbf{a}(pT) = \mathbf{Q}_t\mathbf{a}(0) \tag{4.16}$$

Para que la solución sea periódica se requiere que $\mathbf{a}(pT) = \mathbf{a}(0)$, por lo tanto se debe satisfacer la ecuación (4.17).

$$(\mathbf{Q}_t - \mathbf{I})\mathbf{a}(0) = \mathbf{0} \tag{4.17}$$

Si se garantiza que la parte real de los exponentes de Floquet μ, obtenidos de la ecuación variacional es negativa, entonces la órbita pT-periódica es estable. Esta condición se verifica si se cumple la ecuación (4.18).

$$\det(\mathbf{Q}_t - I) = 0 \tag{4.18}$$

Al evaluar la ecuación (4.18) se obtiene un polinomio en z, expresado en forma general en la ecuación (4.19). Los coeficientes q_1 y q_0 son funciones de k_s. En este punto, los otros parámetros del sistema (γ, β, x_{1ref}, u_+, u_- y T), ya han sido fijados a algún valor.

$$z^{2p} + q_1(k_s)z^p + q_0(k_s) = 0 \tag{4.19}$$

Si en la ecuación (4.19) se reemplaza $z = e^{-\mu(pT)}$, se pueden obtener los dos exponentes de Floquet asociados a la órbita pT-periódica para cada valor del parámetro de bifurcación k_s.

4.2. Existencia de órbitas pT-periódicas

El análisis de estabilidad explicado en la sección anterior debe estar complementado con un análisis de existencia de la órbita pT-periódica, dado que los rangos del parámetro k_s para los cuales la órbita es estable, no necesariamente coinciden con los rangos donde la órbita existe.
Se garantiza que la órbita pT-periódica existe, si existe un rango de valores del parámetro k_s en el cual el conjunto de ciclos de trabajo $\{d_0, d_1, ..., d_{p-1}\}$ esté definido dentro del intervalo $[0, T]$. Cuando alguno de los ciclos d_i se encuentra saturado, ya sea en $d = T$ o en $d = 0$, se puede realizar una reducción de incógnitas en la formulación del problema.
Para verificar la existencia, partimos de la aplicación de Poincaré del sistema, dada por la ecuación (4.35), donde $A = [-\gamma\ ,\ 1\ ;\ -1\ ,\ -\beta]$, d_k es el ciclo de trabajo que es función de los estados al momento de muestrear y f_k es una función vectorial que depende del ciclo de trabajo y está dada por la ecuación (4.21).

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{f}_k(d_k(\mathbf{x}(kT))) \tag{4.20}$$

$$\mathbf{f}_k = (e^{\mathbf{A}\ T-\frac{d_k}{2}} + \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\ \frac{d_k}{2}} - \mathbf{I})\mathbf{B} - e^{\mathbf{A}\ \frac{d_k}{2}}\ \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}(T-d_k)} - \mathbf{I})\mathbf{B} \tag{4.21}$$

Iterando el sistema hasta la muestra pT se tiene el conjunto de ecuaciones mostrado en la ecuación (4.22).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0) + \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{x}(2T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(T) + \mathbf{f}_1 \\ \dots \\ \mathbf{x}(iT) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}((i-1)T) + \mathbf{f}_{i-1} \\ \dots \\ \mathbf{x}(pT) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}((p-1)T) + \mathbf{f}_{p-1} \end{cases} \tag{4.22}$$

Aplicando la condición de periodicidad: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(pT)$, y aprovechando la recursividad del sistema se tiene la ecuación (4.23).

$$\mathbf{x}(0) = (\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}(pT)})^{-1}(e^{\mathbf{A}((p-1)T)}\mathbf{f}_0 + \dots + e^{\mathbf{A}T}\mathbf{f}_{p-2} + \mathbf{f}_{p-1}) \tag{4.23}$$

La condición inicial $\mathbf{x}(0)$ del sistema queda en función del conjunto de incógnitas $\{d_0, d_1, \dots, d_{p-1}\}$, de este modo, el sistema de la ecuación (4.22) también queda relacionado con las variables desconocidas.

Utilizando la expresión del ciclo de trabajo, se define el sistema de la ecuación (4.24), el cual es un sistema de p ecuaciones con p incógnitas.

$$\begin{cases} d_0 - c_1x_1(0) - c_2x_2(0) - c_3 = 0 \\ d_1 - c_1x_1(T) - c_2x_2(T) - c_3 = 0 \\ \dots \\ d_i - c_1x_1(iT) - c_2x_2(iT) - c_3 = 0 \\ \dots \\ d_{p-1} - c_1x_1((p-1)T) - c_2x_2((p-1)T) - c_3 = 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

4.3. De la periodicidad al caos en sistemas de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error

El cálculo de la estabilidad y la garantía de la existencia de órbitas pT-periódicas que fueron presentados anteriormente conforman la base teórica para reconstruir analíticamente la ruta al caos del sistema con estrategia de control PWMC basada en el promediado cero de la dinámica del error.

A medida que el parámetro k_s es variado en forma decreciente desde un valor inicial tal que garantiza la presencia de una órbita $1T$-periódica estable (por ejemplo, $k_s = 4{,}5$), el sistema presenta diferentes esquemas de operación periódicos hasta alcanzar un comportamiento caótico. A continuación se presentan de forma detallada los rangos de estabilidad y de existencia de cada órbita y sus puntos de transición.

Nuevamente, los parámetros del sistema son los siguientes: $\gamma = 0{,}35$; $\beta = 0$; $x_{1ref} = 0{,}8$; $T = 0{,}1767$; $u_+ = 1$; $u_- = -1$; $u_i = 1$.

4.3.1. Transición órbita $1T$-periódica a órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados

Si bien la órbita $1T$-periódica existe para cualquier valor del parámetro de control k_s, ésta solo es estable para valores de k_s mayores de un valor crítico ($k_{scr} = 3{,}2437342$), en el cual ocurre un doblamiento de periodo que da origen a la órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados.

Con los valores establecidos anteriormente, el valor del ciclo de trabajo en estado estacionario de la órbita $1T$-periódica es $d_{ss} = 0{,}9T$ (ecuación (4.1)). De esta forma la órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados (d_1-d_2) se puede definir simétrica a d_{ss}, de la siguiente forma: $d_1 = (0{,}9 - \alpha)T$ y $d_2 = (0{,}9 + \alpha)T$ donde α es un valor positivo ($\alpha \leqslant 0{,}1$).

Conforme con lo expresado anteriormente y teniendo $p = 2$ se puede determinar la existencia de la órbita $2T$-periódica definiendo un sistema de ecuaciones (ecuación (4.24)) con 2 ecuaciones y 2 incógnitas que en este caso son: k_s y α, tal como se presenta en la ecuación (4.25).

$$\begin{cases} (0{,}9 - \alpha)T - c_1(k_s)x_1(0) - c_2(k_s)x_2(0) - c_3(k_s) = 0 \\ (0{,}9 + \alpha)T - c_1(k_s)x_1(T) - c_2(k_s)x_2(T) - c_3(k_s) = 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

Para tener control sobre la incógnita α, se despeja $c_3(k_s)$ de la primera ecuación y se reemplaza en la segunda ecuación para reducir el sistema a una ecuación con una incógnita, como se muestra en la ecuación (4.26). El valor de $\mathbf{x}(0)$ se calcula en función de d_1 y d_2 de acuerdo con la ecuación (4.23), y que $\mathbf{x}(T)$ se calcula en función de $\mathbf{x}(0)$ de acuerdo con la ecuación (4.22).

$$2\alpha T + c_1(k_s)\left(x_1(0) - x_1(T)\right) + c_2(k_s)\left(x_2(0) - x_2(T)\right) = 0 \tag{4.26}$$

En la tabla 4.1 se presenta el rango de valores del parámetro de bifurcación k_s en el cual la órbita $2T$-periódica existe sin presencia de ciclos saturados.

α	$d_1 = (0{,}9 - \alpha)T$	$d_2 = (0{,}9 + \alpha)T$	k_s
≈ 0	$\approx 0{,}9T$	$\approx 0{,}9T$	3.2437341
0.001	0.899T	0.901T	3.2437339
0.01	0.89T	0.91T	3.2437195
0.02	0.88T	0.92T	3.2436760
0.03	0.87T	0.93T	3.2436034
0.04	0.86T	0.94T	3.2435019
0.05	0.85T	0.95T	3.2433713
0.06	0.84T	0.96T	3.2432117
0.07	0.83T	0.97T	3.2430231
0.08	0.82T	0.98T	3.2428055
0.09	0.81T	0.99T	3.2425589
0.099	0.801T	0.999T	3.2423122
0.1	0.8T	T	3.2422834

Tabla 4.1: Rango de existencia de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados

---

Para cada uno de los resultados de existencia obtenidos se comprueba de manera numérica que al iterar el sistema para el valor de k_s hallado al resolver la ecuación (4.26), efectivamente se esté en la órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados. Los resultados indican que para cualquier α en el intervalo $[0, 0{,}1)$ el sistema no satura ninguno de los ciclos.

En la tabla 4.1 la órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados existe en un rango muy reducido de k_s, el intervalo de existencia es de aproximadamente 15 diezmilésimas, hecho por el cual los cálculos requieren de una alta precisión, que en una etapa de implementación difícilmente se alcanzaría.

Dado que la órbita $2T$-periódica ($d_1 - d_2$) existe sólo para un valor del parámetro de bifurcación, se seleccionan los mismos valores del ciclo de trabajo (expuestos en la tabla 4.1) y se calcula la estabilidad de la órbita $2T$-periódica utilizando el procedimiento antes mencionado, basado en los exponentes de Floquet. Para el caso $p = 2$ sin ciclos saturados, la solución de la ecuación variacional (mostrada en la ecuación (4.16)) tiene la forma dada por la ecuación

(4.27).

$$\mathbf{a}(2T) = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{a}(0) \tag{4.27}$$

Donde $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ son las soluciones parciales que se obtienen de resolver cada periodo de muestreo con su ciclo de trabajo asociado.

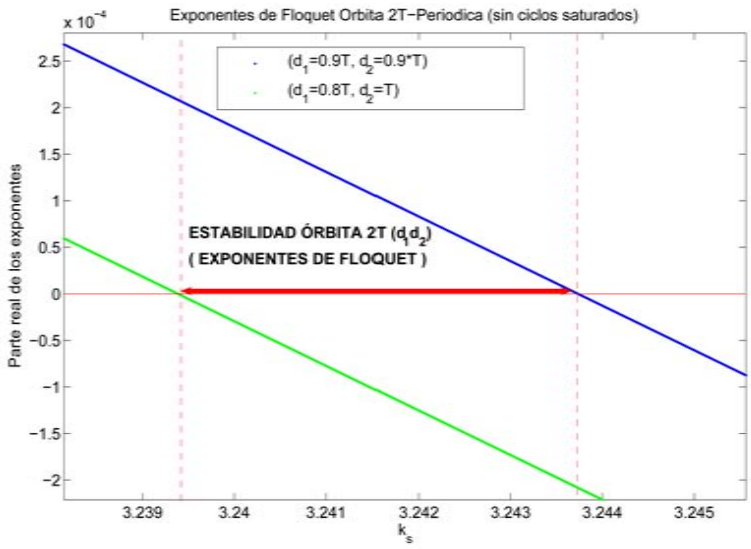


Figura 4.4: Evolución de la parte real del exponente de Floquet que pasa de estable a inestable de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados.

En la figura 4.4 se muestra la evolución de la parte real del exponente de Floquet que pasa de inestable a estable de la órbita $2T$-periódica ($d_1 - d_2$), para los 2 casos límites presentados en la tabla 4.1, que definen la zona de existencia de la órbita. La transición de la parte real del exponente de Floquet de positiva a negativa es equivalente al cambio de inestable a estable de la órbita $2T$-periódica ($d_1 - d_2$).

En la figura 4.5 y en la tabla 4.2 se sintetizan los resultados de los análisis de existencia y estabilidad de la órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados. En la tabla 4.2 se presentan, para algunos valores de α el valor de k_s para el cual existe la órbita y el valor crítico de estabilidad. En todos los casos (figura 4.5 y tabla 4.2) el valor de existencia está a la derecha del respectivo valor crítico de estabilidad, lo cual significa que todos los casos expuestos existen dentro de la zona estable de la órbita ($k_{sexiste}$ es siempre mayor que k_{scr}, aunque note que en el caso $\alpha \approx 0$

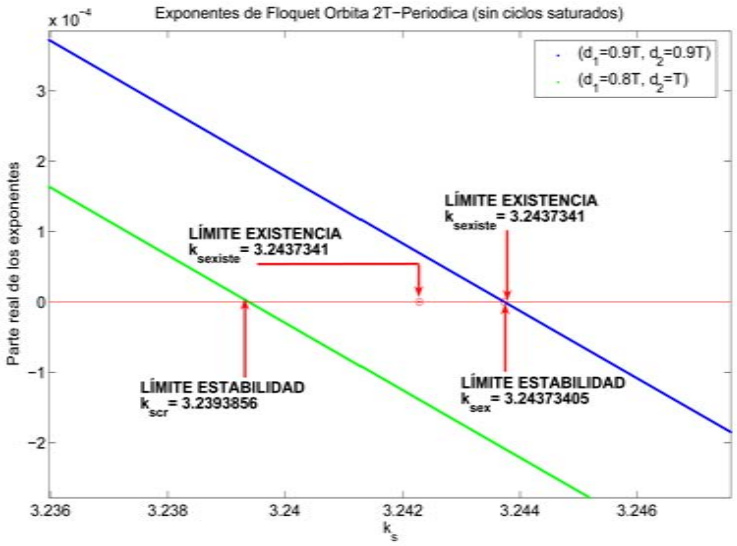


Figura 4.5: Existencia y estabilidad de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados.

α	k_{scr}	$k_{sexiste}$
≈ 0	3.24373405	3.2437341
0.01	3.2436905	3.2437195
0.02	3.2435599	3.2436760
0.04	3.2430376	3.2435019
0.08	3.2409498	3.2428055
0.09	3.2402111	3.2425589
0.1	3.2393856	3.2422834

Tabla 4.2: Estabilidad y existencia de la órbita 2T-periódica sin ciclos saturados

esta diferencia solo se alcanza en el séptimo decimal). En la medida que $\alpha \to 0$ el valor de existencia tiende al valor crítico de estabilidad de la órbita $1T$-periódica.

4.3.2. Transición órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados a órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado

Después de perder la estabilidad de la órbita $1T$-periódica, ocasionada por una bifurcación por doblamiento de periodo, el sistema exhibe una órbita $2T$-periódica estable (como se demostró en la sección anterior), si el valor de k_s decrece un poco más, se presenta un cambio en la evolución de las órbitas $2T$-periódicas debido a una bifurcación por colisión de borde [5].

El cambio en la evolución de las órbitas debido a la colisión de borde se ve reflejado en la saturación de uno de los ciclos de trabajo, pasando de un regimen sin saturación a uno con un ciclo saturado. A continuación se presentan los resultados de los análisis de existencia y estabilidad de esta órbita.

Para determinar la existencia de la órbita $2T$ del tipo *saturado - no saturado* se debe tener en cuenta el efecto que tienen los límites de la zona de evolución del sistema, es decir, que el ciclo de trabajo está restringido entre los valores 0 y T. En este caso en particular, la cota superior es la única restricción activa del sistema.

Si bien el valor máximo que puede asignarse al ciclo de trabajo es $d = T$, la órbita saturada puede existir para valores mayores al periodo de muestreo ($d > T$), por esta razón se incluye un factor α que considere las órbitas saturadas en valores diferentes a $d = T$, tal como se muestra en el sistema de ecuaciones 4.28.

$$\begin{cases} \alpha T - c_1(k_s)x_1(0) - c_2(k_s)x_2(0) - c_3(k_s) = 0 \\ d - c_1(k_s)x_1(T) - c_2(k_s)x_2(T) - c_3(k_s) = 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

El sistema (4.28) presenta 2 ecuaciones con tres incógnitas (α, k_s y d), por lo cual éste se resuelve para valores particulares de α, sabiendo que $\alpha \geqslant 1$. Algunos de los resultados se reúnen en la tabla 4.3. La órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados (estudiada en la sección anterior) existe sólo para valores puntuales de k_s, en cambio la órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado ($T - d_1$) existe para un rango de valores de k_s.

De nuevo, es importante corroborar que en los casos antes expuestos, para los valores de k_s encontrados, el sistema sature cada dos muestras uno de los ciclos. En la tabla 4.4 se presentan algunos de los valores de comprobación de los ciclos de trabajo. Note que para $\alpha = 1{,}05$ el valor del ciclo saturado se aleja un poco del valor esperado ($1{,}05T$), sin embargo, la órbita sigue siendo del tipo (*saturado - no saturado*). Sin embargo, la órbita $T - d$ sigue existiendo para estos valores bajos de k_s. La diferencia entre el valor real y el valor esperado radica en

α	k_s	$T-d$
1	3.2422773	T-0.7998954T
1.00005	3.2133546	T-0.7998843T
1.0001	3.1849463	T-0.7998734T
1.0005	2.9746576	T-0.7997926T
1.001	2.7480312	T-0.7997054T
1.005	1.7087349	T-0.7993048T
1.01	1.1608391	T-0.7990929T
1.05	0.3258321	T-0.7987692T

Tabla 4.3: Estabilidad y existencia de la órbita 2T-periódica con un ciclo saturado (Td_1)

que para valores tan bajos de k_s la superficie de deslizamiento pierde el promedio cero y por lo tanto se afectan los resultados obtenidos con esa aproximación.

α	d_1	d_2
1	0.9999999T	0.7998954T
1.005	1.0050000T	0.7993049T
1.05	1.0067812	0.8005371T

Tabla 4.4: Valores de comprobación de existencia de la órbita 2T-periódica con un ciclo saturado (Td_1)

De acuerdo con los resultados obtenidos, la orbita $2T$-periódica con un ciclo saturado existe para $k_s < 3{,}2422773$, sin embargo, es necesario determinar para que valores dentro de este rango la órbita es estable, para lo cual se recurre al procedimiento basado en los exponentes de Floquet.

El procedimiento para determinar la estabilidad de la órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado es diferente al utilizado en la órbita $2T$-periódica sin ciclos saturados. Mientras en el caso anterior (*no saturado - no saturado*), se calculaban soluciones parciales para cada ciclo de trabajo que luego se unían para hallar la solución total, en este caso (*saturado - no saturado*), solo se halla una solución para todo el intervalo.

$$\mathbf{a}(2T) = \mathbf{Q}_{dT}\mathbf{a}(0) \tag{4.29}$$

La solución de la ecuación variacional que se resuelve tiene la forma dada en la ecuación (4.29), donde $\mathbf{Q}_{dT}$ es una matriz que se obtiene de resolver la ecuación variacional dada en la ecuación (4.10) para el intervalo $2T$ tramo a tramo, considerando los siguientes tramos:

- En el tramo: $(0, d/2)$ se calcula $\mathbf{a}(d/2)_-$.
- Se evalúa la discontinuidad en $d/2$ para calcular $\mathbf{a}(d/2)_+$.
- En el tramo: $(d/2, T - d/2)$ se calcula $\mathbf{a}(T - d/2)_-$.
- Se evalúa la discontinuidad en $T - d/2$ para calcular $\mathbf{a}(T - d/2)_+$.
- En el tramo: $(T - d/2, 2T)$ se calcula $\mathbf{a}(2T)$.

En el último tramo se incluye el ciclo saturado, el cual se une de forma directa al último tramo del primer periodo de muestreo, para hallar la solución hasta $2T$. En la figura 4.6 se muestra la evolución de los exponentes de Floquet de la órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado $(T - 0{,}8T)$, donde se puede observar el valor crítico de estabilidad de esta órbita en $k_s = 2{,}9980335$ y el valor límite de existencia en $k_s = 3{,}2422773$, por lo tanto el rango donde la órbita $2T$-periódica ($T - d$) existe y es estable es: $2{,}9980335 < k_s < 3{,}2422773$.

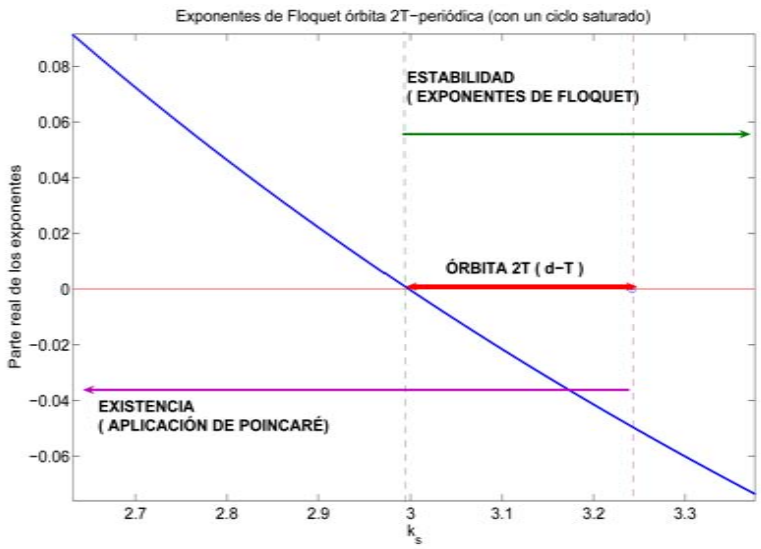


Figura 4.6: Existencia y estabilidad de la órbita 2T-periódica con un ciclo saturado.

4.3.3. Transición órbita $2T$-periódica ($d - T$) a órbita $4T$-periódica ($d_1 - T - d_2 - T$)

La órbita $2T$-periódica pierde su estabilidad debido a una bifurcación tipo flip en $k_s = 2{,}9980335$. Se originan nuevos puntos de equilibrio, conformándose una órbita $4T$-periódica con una secuencia de operación $d_1 - T - d_2 - T$.

La reconstrucción de la ruta al caos continúa en este apartado con el análisis de la existencia y estabilidad de la órbita $4T$-periódica.

Con base en la iteración de la aplicación de Poincaré se puede determinar la existencia de la órbita $4T$-periódica resolviendo el sistema de ecuaciones dado en (4.30), el cual se define con las 2 ecuaciones de los ciclos de trabajo no saturados (d_1 y d_2) y con una tercera que contiene el factor α que sirve para calcular un conjunto de soluciones, adicionales a la calculada cuando ambos ciclos saturados son iguales a T.

$$\begin{cases} \alpha T - c_1(k_s)x_1(0) - c_2(k_s)x_2(0) - c_3(k_s) = 0 \\ d_1 - c_1(k_s)x_1(T) - c_2(k_s)x_2(T) - c_3(k_s) = 0 \\ d_2 - c_1(k_s)x_1(3T) - c_2(k_s)x_2(3T) - c_3(k_s) = 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

Es importante aclarar que la información del otro ciclo saturado está implícita en el sistema, ya que $\mathbf{x}(0)$ es función del conjunto de ciclos de trabajo $\{T - d_1 - T - d_2\}$ (tal como se presentó en la ecuación (4.23)); y además $\mathbf{x}(T)$ y $\mathbf{x}(3T)$ se calculan con base en $\mathbf{x}(0)$ (ecuación (4.22)).

La tabla 4.5 agrupa algunos de los conjunto solución del sistema (4.30) para distintos valores de α. Observe que la existencia de la órbita $4T$-periódica varía en un rango muy pequeño de valores de k_s.

En la tabla 4.6 se presentan los valores de comprobación de la existencia 4T-periódica $T - d_1 - T - d_2$. Con cada valor de k_s encontrado, se itera el sistema para verificar que su respuesta es 4T-periódica con 2 ciclos saturados. Note que para $\alpha = 1{,}005$ el sistema sólo satura un ciclo, es decir, existe es una órbita 4T-periódica $T - d_1 - d_2 - d_3$, de ahí la importancia de realizar esta prueba.

El procedimiento para definir el rango de estabilidad de la órbita $4T$-periódica es similar al establecido en la sección anterior (utilizado para calcular la estabilidad de la órbita $2T$-periódica con un ciclo saturado). Para este caso se unen dos soluciones parciales formadas cada una por intervalos de 2 periodos de muestreo, en las cuales el periodo saturado es unido directamente

α	$T-d_1$	$T-d_2$	k_s
1	T-0.8002457T	T-0.7993575T	2.998019055
1.000005	T-0.7993624T	T-8002408T	2.998019057
1.00005	T-0.7994066T	T-0.8001966T	2.998019057
1.0005	T-0.7998479T	T-0.7997553T	2.998019067
(*)1.005	T-0.7953416T	T-0.8002457T	2.998017864

Tabla 4.5: Rango de existencia de la órbita 4T-periódica $T-d_1-T-d_2$. En $(*)$ la órbita $4T$-periódica pasa a un esquema $T-d_1-d_2-d_3$ como se comprueba en la tabla 4.6

α	d_1	d_2	d_3	d_4
1	1.0000000T	0.7993575T	1.0009056T	0.8002457T
1.000005	1.0000049T	0.7993624T	1.0009006T	0.8002408T
1.00005	1.0000499T	0.7994066T	1.0008556T	0.8001967T
1.0005	1.0004999T	0.7998479T	1.0004055T	0.7997553T
(*)1.005	1.0050000T	0.8042616T	0.9959055T	0.7953416T

Tabla 4.6: Valores de comprobación de existencia de la órbita 4T-periódica $T-d_1-T-d_2$

al último tramo del intervalo del ciclo no saturado.

En consecuencia, la solución de la ecuación variacional tiene la forma dada en la ecuación (4.31), donde $\mathbf{Q}_{Td_1}$ es la solución parcial en el intervalo $(0, 2T]$ y $\mathbf{Q}_{Td_2}$ es la solución parcial en el tramo $(2T, 4T]$ cuya condición inicial es $\mathbf{Q}_{Td_1}\mathbf{a}(0)$

$$\mathbf{a}(4T) = \mathbf{Q}_{Td_2}\mathbf{Q}_{Td_1}\mathbf{a}(0) \tag{4.31}$$

La órbita $4T$-periódica es estable si los exponentes de Floquet (μ_1, μ_2) calculados de la ecuación: $z^8 + a_1(k_s)z^4 + a_0(k_s) = 0$ con $z = e^{-\mu(4T)}$ tienen parte real negativa. La evolución de la parte real de los exponentes de Floquet de la órbita $4T$-periódica se presentan en la fig.4.7. En la fig.4.8 se muestra un acercamiento donde se puede visualizar el valor critico de estabilidad $k_{scr} = 2{,}998019031288$ junto con el valor límite de existencia de la órbita 4T-periódica: $k_s = 2{,}998019055139$.

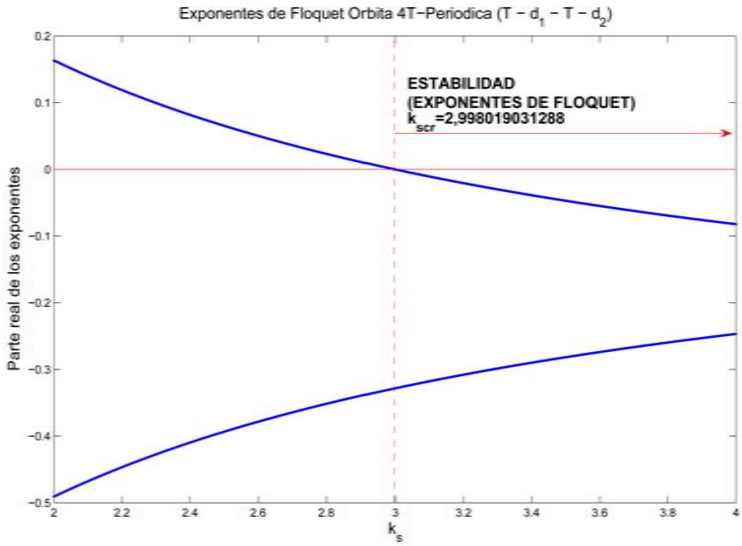


Figura 4.7: Evolución de la parte real de los exponentes de Floquet de la órbita 4T-periódica $T - d_1 - T - d_2$.

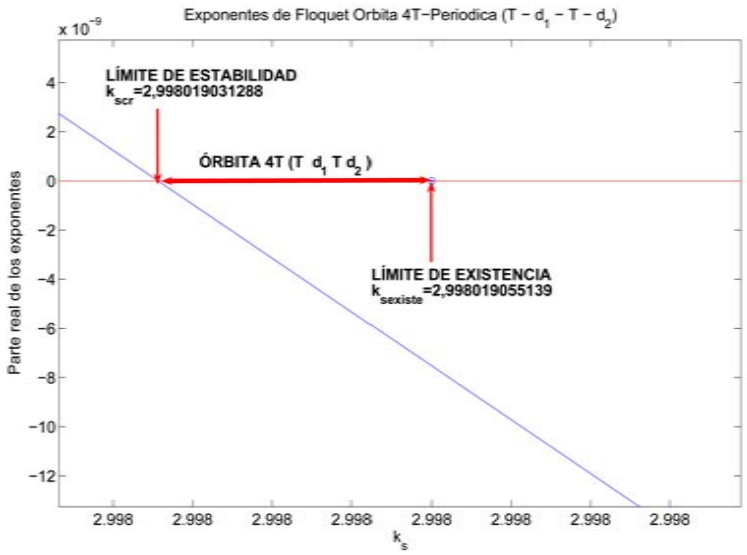


Figura 4.8: Existencia y estabilidad de la órbita 4T-periódica $T - d_1 - T - d_2$.

El rango en el que la órbita 4T-periódica ($T-d_1-T-d_2$) existe y es estable es: $2{,}998019031288 < k_s < 2{,}998019055139$.

En la tabla 4.5 que en todos los casos menos en $\alpha = 1{,}005$, los valores de existencia son

mayores que el valor crítico de estabilidad $k_{scr} = 2{,}998019031288$, lo cual confirma que en $\alpha = 1{,}005$ no se presenta órbita $4T$-periódica $T - d_1 - T - d_2$ (tal como se muestra en la tabla 4.6).

4.3.4. Transición órbita $4T$-periódica ($d_1 - T - d_2 - T$) a órbita $8T$-periódica ($d_1 - T - d_2 - T - d_3 - T - d_4 - T$)

En un rango de valores muy reducido del parámetro k_s suceden varios cambios en la evolución del sistema como lo son los cambios de órbitas $2T$, $4T$ y $8T$.

Siguiendo el mismo proceso se investiga la existencia y la estabilidad de la órbita $8T$-periódica. La existencia está dada por la solución del sistema de ecuaciones (4.32), en la cual se plantean las 4 ecuaciones de los ciclos no saturados y una ecuación adicional para calcular un grupo de soluciones que se sume a la hallada cuando los ciclos saturados son iguales a T (es decir, $\alpha = 1$).

$$\begin{cases} \alpha T - c_1(k_s)x_1(0) - c_2(k_s)x_2(0) - c_3(k_s) = 0 \\ d_1 - c_1(k_s)x_1(T) - c_2(k_s)x_2(T) - c_3(k_s) = 0 \\ d_2 - c_1(k_s)x_1(3T) - c_2(k_s)x_2(3T) - c_3(k_s) = 0 \\ d_3 - c_1(k_s)x_1(5T) - c_2(k_s)x_2(5T) - c_3(k_s) = 0 \\ d_4 - c_1(k_s)x_1(7T) - c_2(k_s)x_2(7T) - c_3(k_s) = 0 \end{cases} \tag{4.32}$$

Los resultados de la existencia de la órbita $8T$-periódica son muy similares a los obtenidos en la sección anterior para la órbita $4T$-periódica, notándose solo cambios en las últimas cifras significativas (trabajando con una precisión de 200 dígitos), por lo cual se asumen los datos de la tabla 4.5 como equivalentes para la existencia de la órbita $8T$-periódica, con la siguiente salvedad: $d_1 \cong d_3$ y $d_2 \cong d_4$.

Para el cálculo de la estabilidad de la órbita $8T$-periódica se llega a una solución de la ecuación variacional con la forma expresada en la ecuación (4.33), las matrices $\mathbf{Q}_{Td_4}$, $\mathbf{Q}_{Td_3}$, $\mathbf{Q}_{Td_2}$ y $\mathbf{Q}_{Td_1}$ representan las soluciones parciales construidas por tramos de 2 periodos de muestreo, cada una considerando un ciclo saturado.

$$\mathbf{a}(8T) = \mathbf{Q}_{Td_4}\mathbf{Q}_{Td_3}\mathbf{Q}_{Td_2}\mathbf{Q}_{Td_1}\mathbf{a}(0) \tag{4.33}$$

Satisfacer la condición de periodicidad en la ecuación (4.33) implica que:

$$det(\mathbf{Q}_{Td4}\mathbf{Q}_{Td3}\mathbf{Q}_{Td2}\mathbf{Q}_{Td1} - \mathbf{I}) = 0$$

lo que lleva a tener una expresión de la forma:

$$z^{16} + a_1(k_s)z^8 + a_0(k_s) = 0$$

con la que se calculan los exponentes de Floquet de la órbita, haciendo $z = e^{-\mu(8T)}$. Si la parte real de μ_1 y μ_2 son negativas entonces la órbita $8T$-periódica es estable.

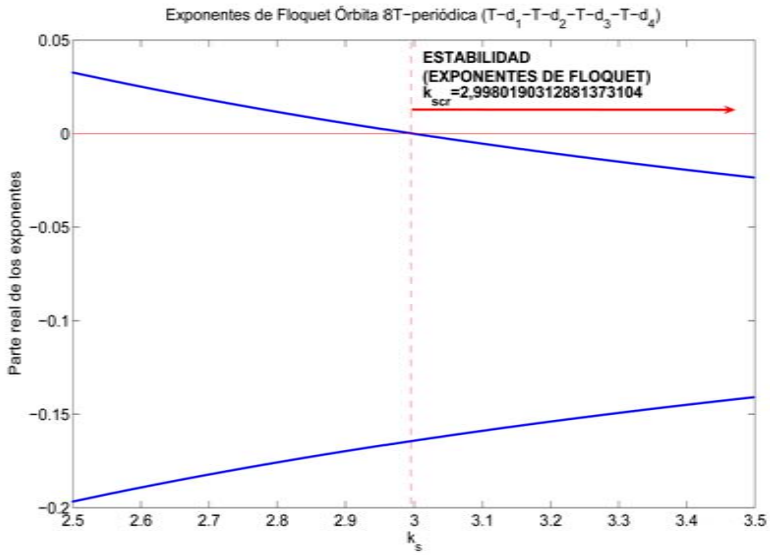


Figura 4.9: Evolución de la parte real de los exponentes de Floquet de la órbita 8T-periódica ($d_1 - T - d_2 - T - d_3 - T - d_4 - T$).

En la figura 4.9 se muestra la evolución de los exponentes de Floquet de la órbita $8T$-periódica y en la figura 4.10 se realiza un acercamiento sobre la zona crítica de estabilidad para observar el k_{scr} y el límite de la existencia. El punto de cruce de estabilidad de la órbita $8T$-periódica está muy cercano al punto crítico de la órbita $4T$-periódica, los cuales solo difieren después del decimosexto decimal ($k_{scr4T} = 2{,}99801903128813739105$ y $k_{scr8T} = 2{,}9980190312881373104$). Debido a las aproximaciones que se realizaron en los procedimientos, los resultados obtenidos en este punto tienen un mayor grado de incertidumbre debido a que se requiere de mayor grado de precisión. Sin embargo, se considera que los resultados son representativos desde un punto de vista cualitativo, ya que reflejan la acumulación de órbitas pT en un rango extremadamente pequeño del parámetro k_s.

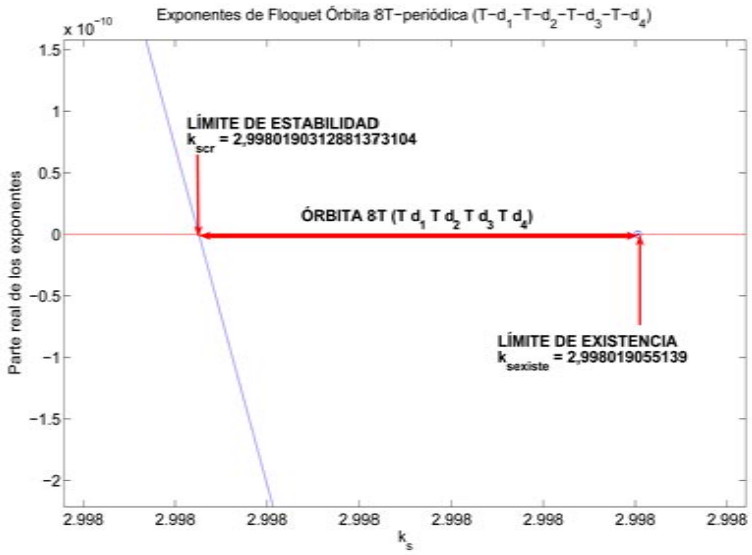


Figura 4.10: Existencia y estabilidad de la órbita $8T$-periódica ($d_1 - T - d_2 - T - d_3 - T - d_4 - T$).

4.3.5. Transición al caos

Después de la órbita $4T$-periódica se hace muy difícil distinguir claramente la formación de puntos de equilibrio, tal es el caso de la órbita $8T$-periódica que requiere de un análisis de alta precisión. Para la órbita $16T$-periódica los análisis antes expuestos no arrojaron ni zona de existencia, ni mucho menos zona de estabilidad, por lo cual se asume que a partir de este punto el sistema entra en caos.

Las sucesivas acumulaciones de órbitas en una región muy pequeña del espacio de parámetros conllevan a la presencia de bandas caóticas 2^n en el sistema, que posteriormente se transforma en caos total. En el diagrama de bifurcación $\{x_1, x_2, k_s\}$ de la figura 4.11, se observa que el caos que se presenta obedece a una típica formación de '*fingers*' [56] [40]. En las vistas del diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo de las figuras 4.12 y 4.13 se presentan las primeras cuatro iteraciones de la aplicación de Poincaré, para observar más claramente el fenómeno de bandas caóticas.

En las figuras se observan los primeros cuatro mapas de Poincaré, en los cuales se puede apreciar de una forma más directa, aunque intuitiva, el fenómeno de las bandas caóticas y del caos en el sistema.

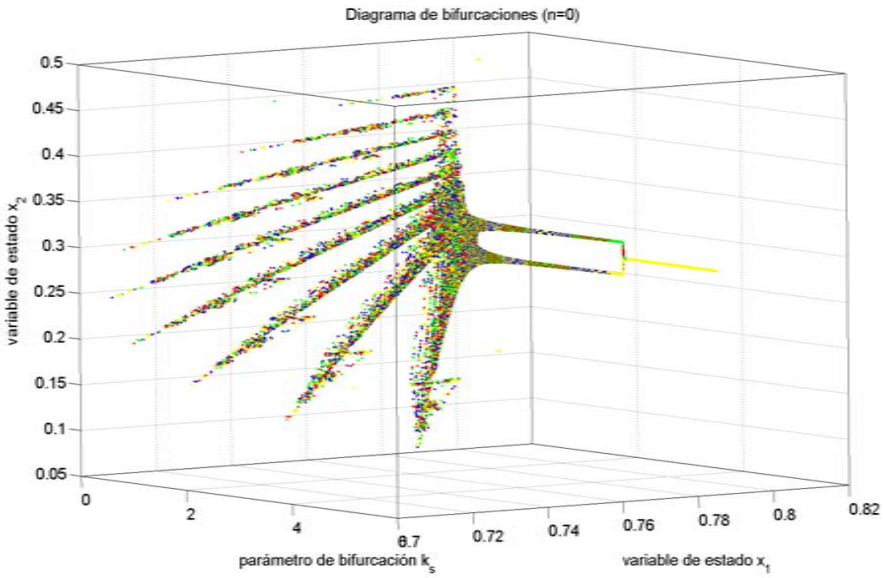
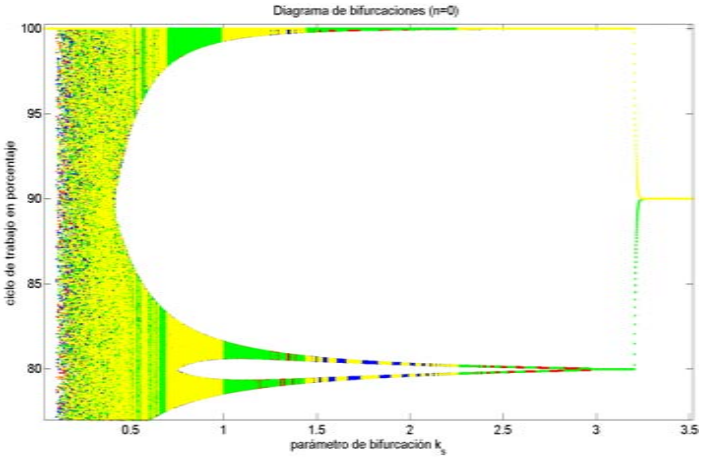


Figura 4.11: Diagrama de bifurcación 3D del sistema de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error.

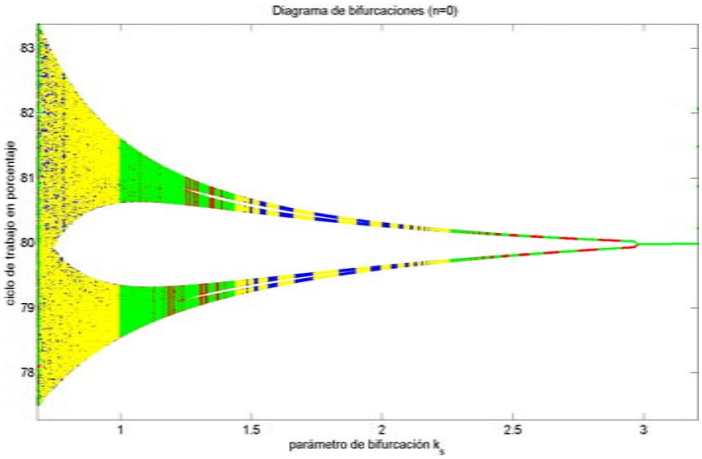
En resumen, el sistema de segundo orden que funciona en presencia de un PWM de pulso centrado cuya estrategia de control está basada en el promediado cero de la dinámica del error (ZAD) tiene un recorrido de la periodicidad al caos en el intervalo de $k_s = [2{,}99, 3{,}24]$, en el cual el sistema pasa por transiciones $1T$, $2T$ (sin ciclos saturados), $2T$ (con un ciclo saturado), $4T$ ($d_1 - T - d_2 - T$) y $8T$ ($d_1 - T - d_2 - T - d_3 - T - d_4 - T$), bandas caóticas 2^n, hasta finalmente entrar en caos. Probablemente existan otras periódicas, en las cuales se sigue trabajando. En particular, actualmente se trabaja en la determinación de la existencia y estabilidad de órbitas $4T$-periódicas del tipo $T - d_1 - d_2 - d_3$, donde la intersección entre la región de estabilidad y la de existencia está arrojando un intervalo vacío.

4.4. Control de órbitas pT-periódicas en sistemas de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error con control FPIC

Resulta conveniente estudiar si las técnicas utilizadas para conocer el comportamiento periódico del sistema, también pueden ser utilizadas exitosamente cuando se incorpora una estrate-



(a) vista 1

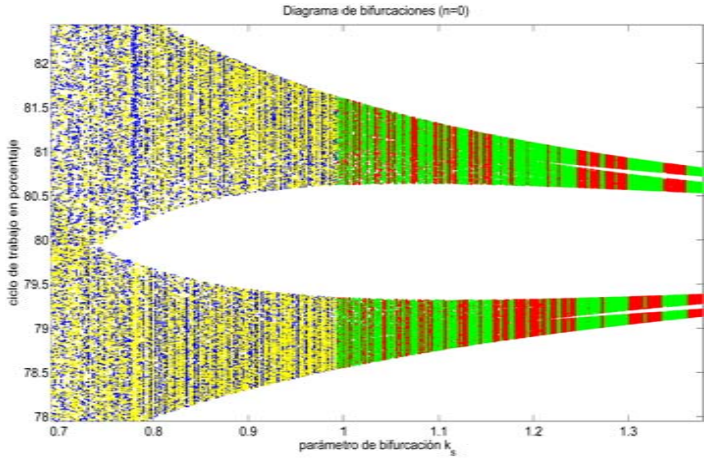


(b) vista 2

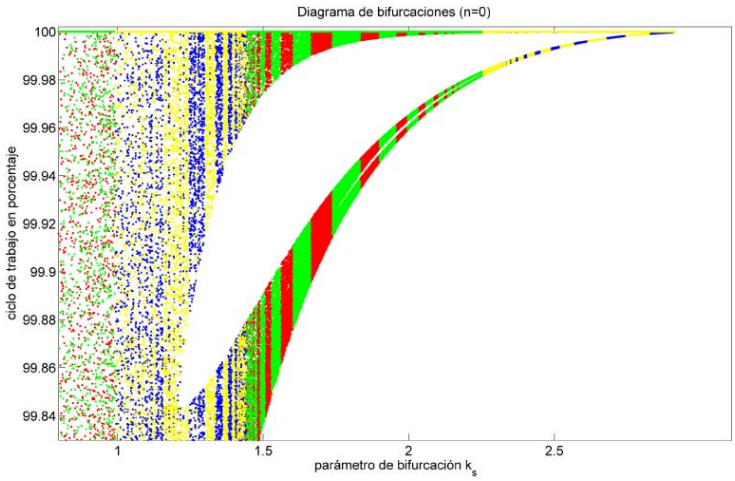
Figura 4.12: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo del sistema de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error (vistas 1 y 2).

gia de control de caos como la FPIC. En esta sección, se presentan algunos de los resultados obtenidos al estabilizar distintas órbitas periódicas utilizando control por inducción al punto fijo.

En el transcurso del trabajo solo se había utilizado la técnica FPIC para estabilizar órbitas $1T$-periódicas, sin embargo, en [27] quedó demostrada la eficacia de la técnica en el control de órbitas superiores de una manera simple. En esta sección se pretende corroborar los resultados



(a) vista 3



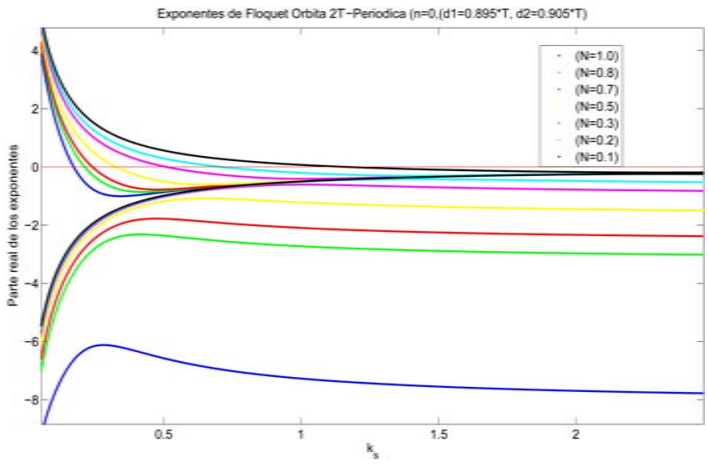
(b) vista 4

Figura 4.13: Diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo del sistema de segundo orden usando PWM y promediado cero de la dinámica del error (vistas 3 y 4).

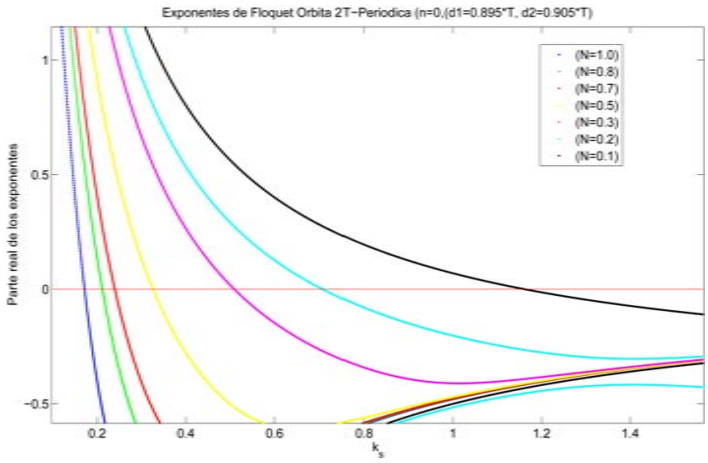
presentados en el trabajo en mención de una manera diferente, haciendo uso del cálculo de los exponentes de Floquet de la órbita estabilizada.

La estrategia de control FPIC para estabilizar una órbita pT-periódica consiste en aplicar la ley de control FPIC, dada en la ecuación (4.34) , cada pT iteraciones.

$$d(k) = \frac{d + Nd_{ss}}{N+1} \tag{4.34}$$



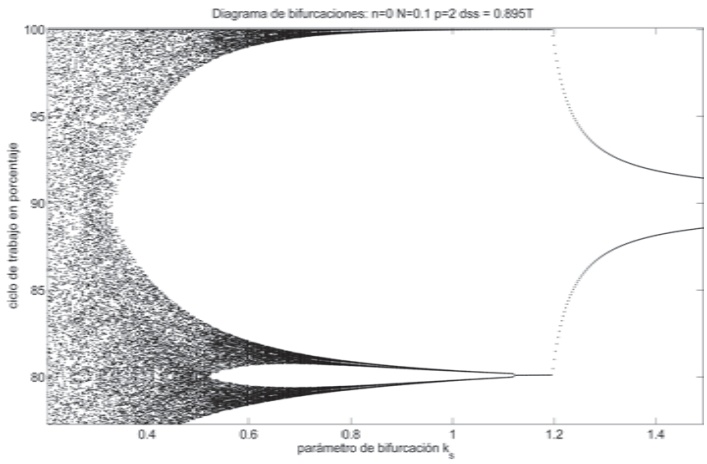
(a) vista general



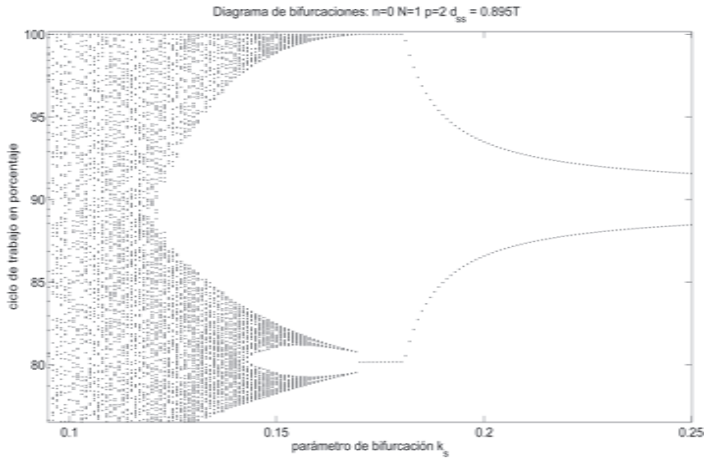
(b) acercamiento

Figura 4.14: Control FPIC de la órbita 2T-periódica (Exponentes de Floquet)

En primera instancia, se decide controlar la órbita $2T$-periódica ($d_1 - d_2$). Para tal efecto, se escogen un valor del ciclo de trabajo en estado estacionario $d_{ss} = 0{,}895T$ junto con 7 valores del parámetro de control FPIC: $N = \{0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}5; 0{,}7; 0{,}8; 1\}$. En la figura 4.14 se muestra la evolución de la parte real de los exponentes de Floquet de la órbita $2T$-periódica. Note que en los siete casos el valor crítico de la estabilidad es menor al caso sin control que se encontraba alrededor de $3{,}24$; es decir, el sistema presenta un rango de estabilidad mayor, con la siguiente tendencia: a mayor esfuerzo de control (o sea, a mayor valor de N), mayor es el



(a) $N = 0{,}1$



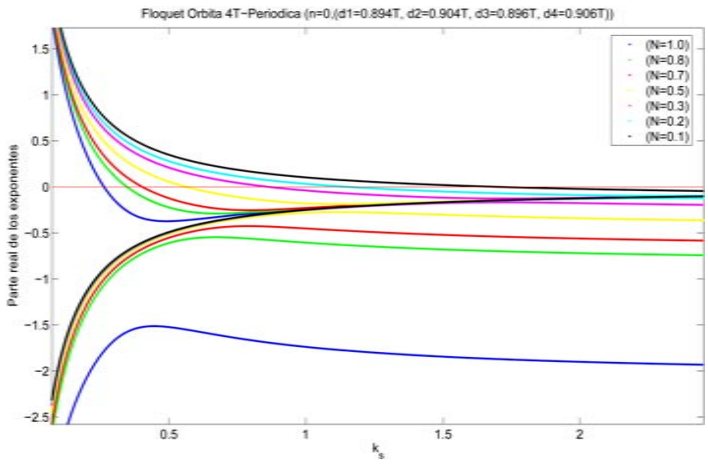
(b) $N = 1$

Figura 4.15: Control FPIC de la órbita 2T-periódica (Diagramas de Bifurcación)

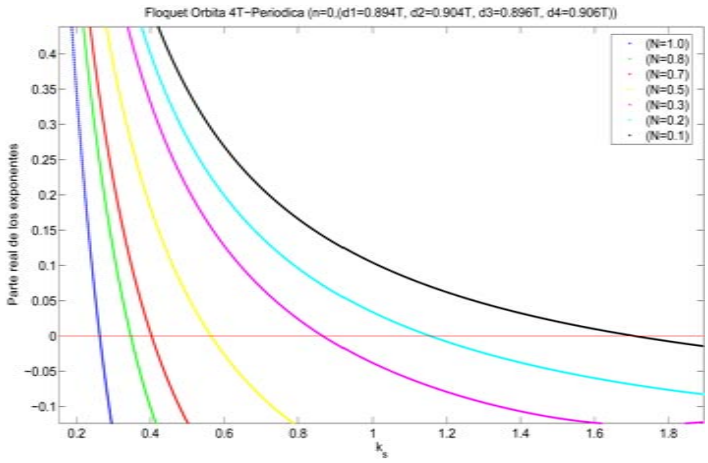
rango de estabilidad.

Resulta conveniente destacar que en estos casos no es necesario realizar un análisis adicional para garantizar la existencia de la órbita ya que la inclusión del control FPIC garantiza que la estabilidad de la órbita se mantenga una vez sea alcanzada esta condición.

Los diagramas de bifurcación presentados en la figura 4.15 sirven para constatar el buen comportamiento del procedimiento basado en los exponentes de Floquet para determinar la estabilidad de órbitas periódicas con control FPIC. En la figura 4.15(a) se muestra el control con



(a) vista general

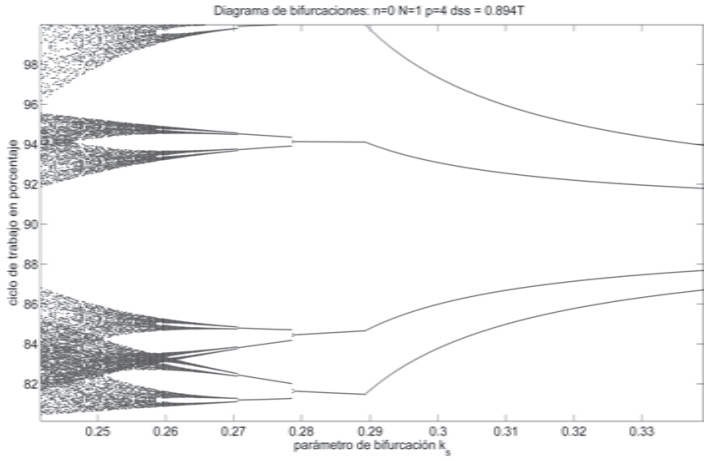


(b) acercamiento

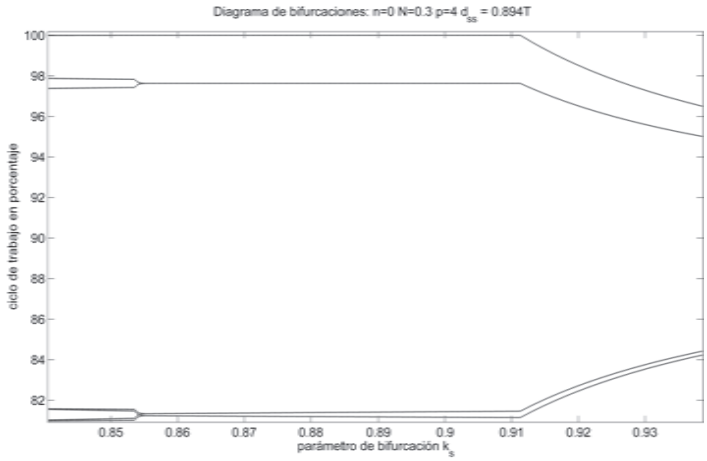
Figura 4.16: Control FPIC de la órbita 4T-periódica (Exponentes de Floquet)

$N = 0{,}1$ en el cual a partir de $k_s \approx 1{,}2$ el sistema presenta una órbita $2T$-periódica de ciclos no saturados, mientras que si $N = 1$ el k_s crítico está es alrededor de $k_s = 0{,}18$ (figura 4.15(b)). Para controlar la órbita $4T$-periódica se decide estabilizar la secuencia: $\{d_1 = 0{,}894T, d_2 = 0{,}904T, d_3 = 0{,}896T, d_4 = 0{,}906\}$, utilizando el mismo conjunto de valores de N. Se aplica la ley de control (ecuación (4.34)) con $d_{ss} = 0{,}894T$ cada 4 iteraciones, obteniendo los resultados mostrados en la figura 4.16.

En la figura 4.17(a) se muestra como el diagrama de bifurcación del ciclo de trabajo cuando



(a) $N = 1$



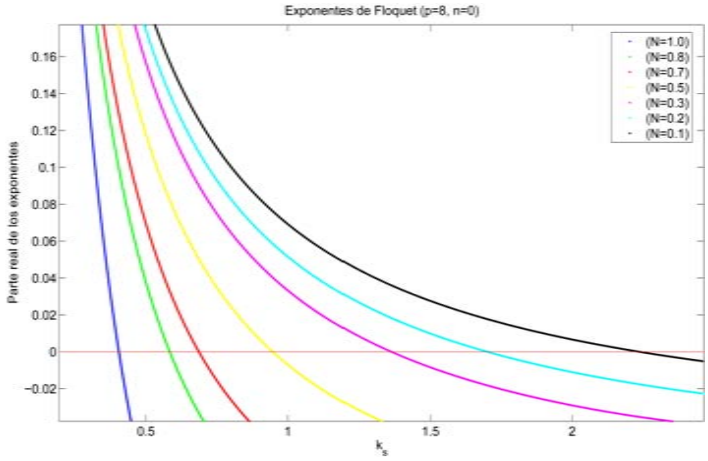
(b) $N = 0{,}3$

Figura 4.17: Control FPIC de la órbita 4T-periódica (Diagramas de Bifurcación)

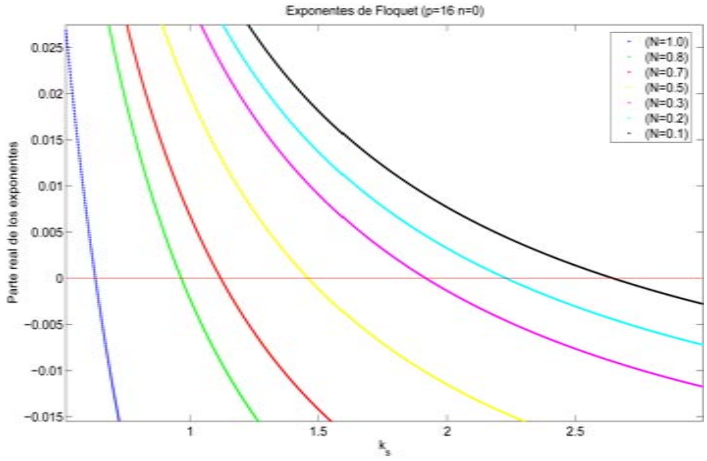
$N = 1$ presenta una órbita $4T$-periódica sin ciclo saturados en $k_s \approx 0{,}28$, lo que es concordante con lo observado en la figura 4.16. De la misma forma, si $N = 0{,}3$ el sistema exhibe una órbita $4T$-periódica de ciclos no saturados en las proximidades de $k_s = 0{,}9$ (figura 4.17(b)).

Los resultados al estabilizar órbitas $8T$-periódicas y $16T$-periódicas son igualmente satisfactorios. En la figura 4.18(a) se presentan los exponentes de Floquet de la órbita 8T-periódica y en la figura 4.18(b) los exponentes de Floquet de la órbita 16T-periódica.

En la figura 4.19 se presentan los diagramas de bifurcación del ciclo de trabajo para los casos



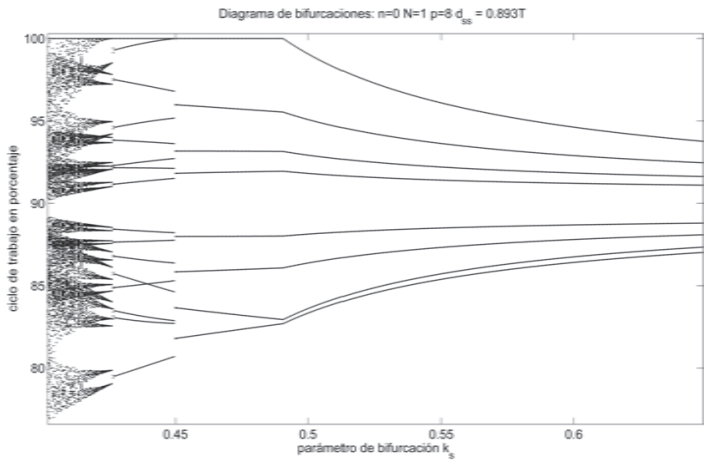
(a) órbita $8T$-periódica



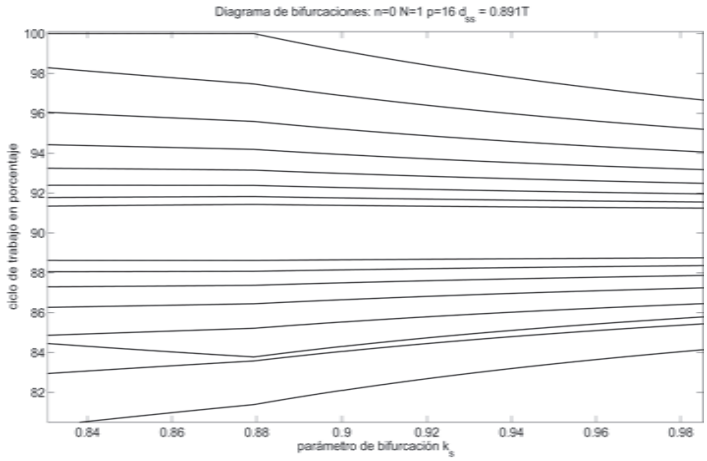
(b) órbita $16T$-periódica

Figura 4.18: Control FPIC de la órbita $8T$-periódica y órbita 16T-periódica (Exponentes de Floquet)

$p = 8, N = 1$ (figura 4.19(a)) y $p = 16, N = 1$ (figura 4.19(b)). Los valores de aparición de las órbitas $8T$ y $16T$ son concordantes con los encontrados por medio del análisis basado en los exponentes de Floquet.



(a) $p = 8$,$N = 1$



(b) $p = 16$,$N = 1$

Figura 4.19: Control FPIC de la órbita $8T$ y $16T$ (Diagramas de Bifurcación)

4.5. Análisis Numérico de órbitas pT-periódicas en el sistema *PWMCD-ZAD* con tiempo de atraso ($n > 1$)

Cuando se incluye tiempo de atraso en el funcionamiento del sistema, no fue posible aplicar el mismo procedimiento que se planteó anteriormente para la determinación de la estabilidad basado en el cálculo de los exponentes de Floquet, debido a que con el tiempo de atraso no se pudo descomponer fácilmente la solución total en soluciones parciales, lo cual hizo que el

problema se tornara inmanejable.

No obstante, es posible hacer uso de algunas técnicas numéricas, combinadas con algunos procedimientos analíticos para tener una idea del comportamiento periódico del sistema cuando opera con tiempo de atraso.

Dado que procedimientos exclusivamente numéricos conllevan a tener un grado de incertidumbre alto en el análisis, se incluye una técnica analítica basada en la iteración de la aplicación de Poincaré para garantizar la existencia de la órbita pT-periódica en el sistema. Este procedimiento se explica en la siguiente sección.

4.5.1. Existencia de órbitas pT-periódicas en el sistema *PWMCD-ZAD* con tiempo de atraso ($n \geq 1$)

Se garantiza que la órbita pT-periódica existe, si existen valores del parámetro de bifurcación k_s en el cual el conjunto de ciclos de trabajo $\{d_0, d_1, ..., d_{p-1}\}$ esté definido dentro del intervalo $[0, T]$.

Para verificar la existencia, partimos de la aplicación de Poincaré del sistema, dada por la ecuación (4.35), donde $\mathbf{A} = [-\gamma\ , 1; -1, -\beta]$, d_{k-n} es el ciclo de trabajo que es función de los estados atrasados nT muestras y $\mathbf{f}_{k-n}$ es una función vectorial que depende del ciclo de trabajo y está dada por la ecuación (4.36).

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{f}_{k-n}(d_{k-n}(\mathbf{x}((k-n)T))) \tag{4.35}$$

$$\mathbf{f}_{k-n} = (e^{\mathbf{A}\ T-\frac{d_{k-n}}{2}} + \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\ \frac{d_{k-n}}{2}} - \mathbf{I})\mathbf{B} - e^{\mathbf{A}\ \frac{d_{k-n}}{2}}\ \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}(T-d_{k-n})} - \mathbf{I})\mathbf{B} \tag{4.36}$$

Iterando el sistema hasta la muestra pT se tiene el conjunto de ecuaciones mostrado en la ecuación (4.37), donde $\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T}$.

$$\begin{cases} \mathbf{x}((n+1)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(nT) + \mathbf{f}_0(d_0(\mathbf{x}(0))) \\ \mathbf{x}((n+2)T) = \mathbf{G}\mathbf{x}((n+1)T) + \mathbf{f}_1(d_1(\mathbf{x}(T))) \\ \ldots \\ \mathbf{x}(iT) = \mathbf{G}\mathbf{x}((i-1)T) + \mathbf{f}_{i-n-1}(d_{i-n-1}(\mathbf{x}((i-n-1)T))) \\ \ldots \\ \mathbf{x}(pT) = \mathbf{G}\mathbf{x}((p-1)T) + \mathbf{f}_{p-n-1}(d_{p-n-1}(\mathbf{x}((p-n-1)T))) \end{cases} \tag{4.37}$$

Aprovechando la recursividad del sistema se obtiene la ecuación (4.38) para los estados en la iteración pT

$$\mathbf{x}\left(pT\right) = \mathbf{G}^{p-n}\mathbf{x}(nT) + \mathbf{F}_{\Sigma 1} + \mathbf{f}_{p-n-1} \tag{4.38}$$

donde,

$$\mathbf{F}_{\Sigma 1} = \sum_{i=2}^{p-n} \mathbf{G}^{p-n-i+1}\mathbf{f}_{i-2}$$

y la ecuación (4.39) para los estados en la iteración $(p+n)T$.

$$\mathbf{x}\left((p+n)T\right) = \mathbf{G}^{p}\mathbf{x}(nT) + \mathbf{F}_{\Sigma 2} + \mathbf{f}_{p-1} \tag{4.39}$$

donde,

$$\mathbf{F}_{\Sigma 2} = \sum_{i=2}^{p} \mathbf{G}^{p-i+1}\mathbf{f}_{i-2}$$

Aplicando las condiciones de periodicidad $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(pT)$ y $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{x}((p+n)T)$, se puede expresar la condición inicial del sistema $\mathbf{x}(0)$ en función del conjunto de incógnitas $\{d_0, d_1, ..., d_{p-1}\}$. En primera instancia, se utiliza $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{x}((p+n)T)$ en la ecuación (4.39) obteniendo la ecuación (4.40).

$$\mathbf{x}(nT) = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^{p})^{-1}\left[\mathbf{F}_{\Sigma 2} + \mathbf{f}_{p-1}\right] \tag{4.40}$$

Posteriormente, se aplica $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}((p)T)$ y se reemplaza la ecuación (4.40) en la ecuación (4.38), tal como se presenta en la ecuación (4.41).

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}^{p-n}(\mathbf{I} - \mathbf{G}^{p})^{-1}\left[\mathbf{F}_{\Sigma 2} + \mathbf{f}_{p-1}\right] + (\mathbf{F}_{\Sigma 1} + \mathbf{f}_{p-n-1}) \tag{4.41}$$

Utilizando la expresión del ciclo de trabajo, se define el sistema de la ecuación (4.42), el cual es un sistema de p ecuaciones con p incógnitas, donde las incógnitas corresponden a los valores de los ciclos de trabajo d_i.

$$\begin{cases} d_0 - c_1x_1(0) - c_2x_2(0) - c_3 = 0 \\ d_1 - c_1x_1(T) - c_2x_2(T) - c_3 = 0 \\ \dots \\ d_i - c_1x_1(iT) - c_2x_2(iT) - c_3 = 0 \\ \dots \\ d_{p-1} - c_1x_1((p-1)T) - c_2x_2((p-1)T) - c_3 = 0 \end{cases} \tag{4.42}$$

4.5.2. Análisis de Órbitas pT-periódicas en el sistema con un periodo de atraso ($n = 1$)

Diferentes tipos de órbitas periódicas existen cuando el sistema opera con un periodo de atraso. En este apartado se estudiarán las órbitas $6T$,$7T$,$8T$,$9T$,$10T$,$11T$,$12T$ y $13T$-periódicas. Otras órbitas como las $20T$,$23T$,$24T$,$26T$,$41T$ ó $42T$-periódicas también son posibles en este esquema de operación pero no serán tratadas en este trabajo. El análisis comienza con las órbitas $6T$ y $7T$-periódicas, en sus diferentes esquemas de operación, posteriormente se analizan en conjunto las órbitas $8T$,$9T$,$10T$,$11T$ y $12T$-periódicas, que conforman una típica transición al caos conocida como *period-adding route* [57]. Por último, se analiza la órbita $13T$-periódica en sus diferentes formas.

Los parámetros de simulación utilizados serán: $T = 0{,}1767$; $\gamma = 0{,}35$; $\beta = 0$; $u_+ = 1$; $u_- = -1$, $x_{1ref} = 0{,}8$, $N = 0$ y $n = 1$.

Órbita $6T$-periódica ($n = 1$)

De las órbitas periódicas que serán estudiadas con $n = 1$, la órbita $6T$-periódica es la que existe en un intervalo más grande de valores de k_s, comprendido entre $k_s = 10{,}5$ y $k_s = 30$, aproximadamente. Tanto la transición superior como la inferior son de la forma $caos \leftrightarrow 6T$-*periódica*. Este tipo de transiciones pueden producirse por una colisión entre una órbita periódica inestable y el atractor caótico y se denominan *crisis* o también pueden deberse a una bifurcación del tipo ($silla - nodo$) [1]. En la figura 4.20 se presenta el diagrama de bifurcaciones de la variable de estado x_2 en la zona de operación $6T$-periódica.

Los resultados numéricos obtenidos de los diagramas de bifurcaciones sirven como base para analizar la existencia de la órbita $6T$-periódica usando el procedimiento analítico basado en la aplicación de Poincaré explicado en la sección anterior. Al disminuir el parámetro de bifurcación desde $k_s = 30$, la respuesta del sistema es una órbita $6T$-periódica con un esquema de operación con dos ciclos no saturados, un ciclo saturado en $d = 0$, y tres ciclos saturados en $d = T$, en el siguiente orden: $d_0 - 0 - d_2 - T - T - T$. La existencia de esta órbita se comprueba resolviendo el sistema de ecuaciones mostrado en (4.43). En este sistema d_0 y d_2 son las incógnitas, mientras que $\mathbf{x}(0)$ es la condición inicial definida en función de los ciclos de trabajo (conocidos y desconocidos) presentada en (4.41), y $\mathbf{x}(2T)$ es función de $\mathbf{x}(0)$ tal como

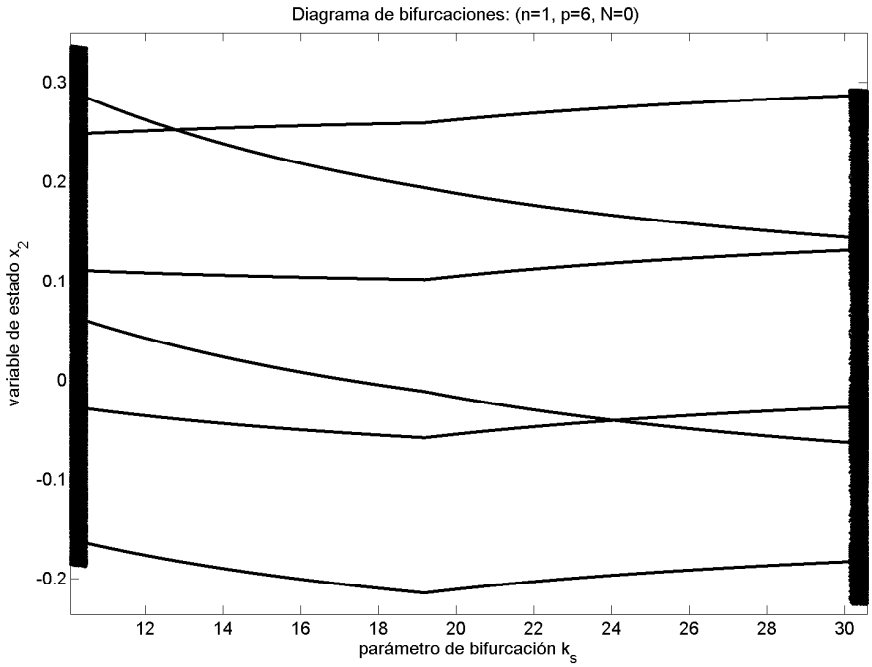


Figura 4.20: Órbita $6T$-periódica ($n = 1$) Diagrama de Bifurcación de la variable de estado x_2.

se muestra en (4.37).

$$\begin{cases} d_0 - c_1x_1(0) - c_2x_2(0) - c_3 = 0 \\ d_2 - c_1x_1(2T) - c_2x_2(2T) - c_3 = 0 \end{cases} \tag{4.43}$$

En la tabla 4.7 se presentan los datos calculados de d_0 y d_2 para cada valor de k_s, en donde se observa que a medida que k_s disminuye el valor de d_0 aumenta y el valor de d_2 disminuye acercándose al límite $d = 0$. En $k_s \approx 19{,}2$ el ciclo d_2 alcanza el límite produciéndose una bifurcación por colisión de borde.

Después de la bifurcación por colisión de borde, el esquema de operación de la órbita $6T$-periódica pasa a tener un sólo ciclo no saturado, dos saturados en $d = 0$ y tres saturados en $d = T$, de la siguiente forma: $d_0 - 0 - 0 - T - T - T$. Para este esquema, el sistema de ecuaciones se puede reducir a una ecuación con una incógnita, tal como se muestra en (4.44). Los resultados del cálculo de d_0 para diferentes valores de k_s se reúnen en la tabla 4.8.

$$d_0 - c_1x_1(0) - c_2x_2(0) - c_3 = 0 \tag{4.44}$$

En la figura 4.21 se presenta el diagrama de bifurcaciones del ciclo de trabajo, junto con los

k_s	d_0	d_2
20	0.3644127079T	0.0208249054T
21	0.3373194878T	0.0512182636T
22	0.3128356037T	0.0786455176T
23	0.2906004556T	0.1035208275T
24	0.2703170874T	0.1261846797T
25	0.2517387178T	0.1469195579T
26	0.2346585629T	0.1659618044T
27	0.2189020235T	0.1835106719T
28	0.1997352772T	0.2043206811T
29	0.1907875210T	0.2147801693T
30	0.1781932341T	0.2287695677T

Tabla 4.7: Existencia de la órbita 6T-periódica $d_0 - 0 - d_2 - T - T - T$

k_s	d_0
11	0.6963434159T
12	0.6432630730T
13	0.5958733073T
14	0.5533086080T
15	0.5148701417T
16	0.4799875153T
17	0.4481906082T
18	0.4190884880T
19	0.3923534484T

Tabla 4.8: Existencia de la órbita 6T-periódica $d_0 - 0 - 0 - T - T - T$

valores calculados de los ciclos de trabajo en cada esquema de operación presentados en las tablas 4.7 y 4.8. Existen leves diferencias entre el valor análitico y numéríco de cada ciclo de trabajo, debidas a la mayor exactitud del procedimiento análitico con respecto al procedimiento