Soluciones Radiales para una Ecuación no Lineal en $\mathbb{R}^N$ que Involucra el p-Laplaciano

José Gabriel Hernández Montiel

Universidad Nacional de Colombia

Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Medellín, Colombia

2014

Soluciones Radiales para una Ecuación no Lineal en $\mathbb{R}^N$ que Involucra el p-Laplaciano

José Gabriel Hernández Montiel

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de

Magister en Matemáticas

Director: **Jorge Iván Cossio Betancur**

Universidad Nacional de Colombia

Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Medellín, Colombia

2014

A mi madre Betty y

a mi padre Aguedo.

Contenido

Resumen **v**

Introducción **1**

1. Existencia, regularidad y propiedades de la solución global para un problema de valor inicial. **4**

1.1. Existencia y regularidad de la solución global para un problema de valor inicial. 4

1.2. Propiedades de la solución global. 15

2. Soluciones con un número prescrito de ceros. **22**

2.1. Una familia de funciones especiales que converge a una función v. . . 23

2.2. Existencia de ceros de la función v. 26

2.3. Un lema Auxiliar. 30

3. Prueba del Teorema Principal **39**

3.1. Prueba del Teorema A 39

Referencias **45**

Resumen

En este trabajo se demuestra la existencia de infinitas soluciones radiales para el problema elíptico cuasilineal

$$\begin{cases} \Delta_p u(x) + f(u(x)) & = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) & = 0, \end{cases}$$

donde $\Delta_p u := \mathbf{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el p-Laplaciano, $1 < p < N$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no lineal tal que $f(s)$ se comporta como $|s|^{q-1}s$ cuando s es grande, siendo $p < q + 1 < \frac{Np}{N-p}$, y $f(s) < 0$ para $s > 0$ suficientemente pequeño.

Agradecimientos

Gracias a Dios por permitirme culminar con éxito mis estudios de maestría.
A mis padres Aguedo y Betty, mis hermanos Angel y Carlos y mi novia Lorena un eterno agradecimiento, sin su apoyo incondicional esto no hubiera sido posible.
Quiero expresar mis mas sinceros agradecimientos al profesor Jorge Iván Cossio Betancur, director de esta tesis de maestría por todas sus contribuciones y todo el tiempo dedicado a este trabajo. También por su amabilidad, generosidad, disciplina y sus oportunos consejos.
Agradezco a los profesores Hugo Samuel Aduen Muskus y Sigifredo Herrón Osorio, por sus apreciables aportes, sugerencias y correcciones las cuales ayudaron a mejorar la versión final del trabajo.
A cada uno de los profesores que contribuyeron a mi formación académica.
A mis amigos y compañeros de la maestría que de una u otra forma hicieron un ambiente agradable durante todo el proceso de estudio.

Introducción.

En este trabajo estudiaremos la existencia de soluciones $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para el problema elíptico cuasilineal

$$\Delta_p u(x) + f(u(x)) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{0.1}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \tag{0.2}$$

donde $\Delta_p u := \mathbf{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el p-Laplaciano, $1 < p < N$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no lineal tal que $f(s)$ se comporta como $|s|^{q-1}s$ cuando s es grande, siendo $p < q + 1 < \frac{Np}{N-p}$, y $f(s) < 0$ para $s > 0$ suficientemente pequeño.
Si $p = 2$ la ecuación (0.1) se escribe

$$\Delta u(x) + f(u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{0.3}$$

Mc-Leod, Troy y Weissler en [4] demuestran la existencia de soluciones radiales con un número prescrito de ceros para el problema (0.2)-(0.3) y en dicho artículo los autores mencionan la posibilidad de extender este resultado al p-Laplaciano. En este trabajo se prueba, siguiendo a Pudipeddi en [1], que la conjetura es cierta. Iaia y Warchall en [3] demuestran la existencia de soluciones no radiales con un número prescrito de ceros para el problema (0.2)-(0.3) en $\mathbb{R}^2$. Castro y Kurepa en [2] demuestran la existencia de infinitas soluciones para el problema

$$\Delta u(x) + g(u(x)) = q(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.4}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{0.5}$$

donde Ω es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función superlineal y $q \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.
Para la ecuación (0.1), Gazzola, Serrin y Tang prueban en [5] la existencia de infinitas soluciones radiales con condiciones de frontera de tipo Dirichlet o Neumann, donde

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es continua y localmente Lipschitz, $f(s) < 0$ para $s > 0$ suficientemente pequeño. Calzolari, Filipucci y Pucci demuestran en [6] la existencia de soluciones radiales para un problema que involucra el p-Laplaciano con peso.

En este trabajo asumiremos que la función no lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes hipótesis:

(H1) f es una función impar, continua y localmente Lipschitz.

(H2) Existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $f(u) < 0$ para $0 < u < \epsilon_1$.

(H3) $f(u) = |u|^{q-1}u + g(u)$ con $\dfrac{g(u)}{|u|^q} \underset{|u|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donde $1 < p < q+1 < \dfrac{Np}{N-p}$. De **(H2)** y **(H3)** se sigue que f tiene al menos un cero positivo.

(H4) Sea α el menor cero positivo de f y β el mayor cero positivo de f.

(H5) Sea $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. Suponemos que F tiene exactamente un cero positivo γ, con $\gamma > \beta$.

(H6) Si $p > 2$ existe $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$\int_0^{\epsilon_2} \frac{1}{\sqrt[p]{|F(u)|}} du = \infty.$$

En realidad de la hipótesis **(H6)** se puede ver que para todo $\epsilon > 0$

$$\int_0^{\epsilon} \frac{1}{\sqrt[p]{|F(u)|}} du = \infty.$$

Un ejemplo de una función que cumple las hipótesis **(H1)**-**(H6)** es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(s) = s^3 - s$.

Estudiaremos soluciones u de (0.1)-(0.2) que sean radialmente simétricas, esto es soluciones que cumplan $u(x) = u(r)$ donde $r = \|x\|$. De esta manera (0.1)-(0.2) se convierte en la siguiente ecuación diferencial ordinaria no-lineal

$$\frac{1}{r^{N-1}}\left(r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right)' + f(u) = |u'|^{p-2}\left((p-1)u'' + \frac{N-1}{r}u'\right) + f(u) = 0, \quad (0.6)$$

para $0 < r < \infty$ y

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = 0, \qquad \lim_{r\to 0^+} u'(r) = 0. \quad (0.7)$$

Quisiéramos encontrar soluciones de clase C^2 para el problema (0.6)-(0.7), pero como veremos en el capítulo 1 esto no siempre es posible (véase Lema 1.4). Multiplicando (0.6) por r^{N-1} e integrando en el intervalo $(0, r)$ obtenemos

$$r^{N-1}|u'|^{p-2}u' = -\int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds. \tag{0.8}$$

En lugar de buscar soluciones de clase C^2 para el problema (0.6)-(0.7), buscaremos soluciones de clase C^1 para el problema (0.8)-(0.7).

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA A. *Sean f una función que satisface las hipótesis **(H1)-(H6)** y n un entero no negativo. Entonces existe una solución $u \in C^1[0, \infty)$ de (0.7)-(0.8) tal que u tiene exactamente n ceros.*

Este resultado fue probado por Pudipeddi [1] en el año 2008. La técnica utilizada para demostrar este teorema es el "shooting method". Este método consiste en encontrar una solución $u(r, d)$ del problema de valor inicial

$$r^{N-1}|u'|^{p-2}u' = -\int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds, \tag{0.9}$$

$$u(0) = d \geq 0. \tag{0.10}$$

Variando d adecuadamente, se consigue encontrar un dato inicial d tal que $u(r, d)$ tenga exactamente n ceros y u satisfaga la condición (0.7).

Este trabajo consta de tres capítulos. En el capítulo 1 demostraremos la existencia de una única solución global $u(r, d)$ para el problema de valor inicial (0.9)-(0.10) y se estudia la regularidad de $u(r, d)$ al igual que algunas propiedades de la solución, que serán utilizadas posteriormente en el trabajo. En el capítulo 2 se estudia la existencia de soluciones con un número prescrito de ceros y en el capítulo 3 se demuestra el Teorema A.

Capítulo 1

Existencia, regularidad y propiedades de la solución global para un problema de valor inicial.

El propósito fundamental de este capítulo es demostrar la existencia de una única solución global para el problema (0.9)-(0.10). Este capítulo consta de dos secciones, en la primera, utilizando el Teorema de Punto Fijo de Banach, demostraremos la existencia de una única solución local para nuestro problema. A continuación se estudia la regularidad de la solución local y la existencia de una única solución global para el problema (0.9)-(0.10). Finalmente se estudian algunas propiedades cualitativas de esta solución.

1.1. Existencia y regularidad de la solución global para un problema de valor inicial.

Consideremos el problema de valor inicial

$$r^{N-1}|u'|^{p-2}u' = -\int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds, \tag{1.1}$$

$$u(0) = d \geq 0. \tag{1.2}$$

Notemos que si $d = 0$, entonces $u \equiv 0$ es una solución de (1.1)-(1.2), dado que nos interesan soluciones no nulas consideraremos $d > 0$.

Definamos la función $\Phi_p(x) = |x|^{p-2}x$ para $p > 1$. Φ_p es continua en $\mathbb{R}$ si $p \geq 2$, mientras que si $1 < p < 2$, Φ_p es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. La inversa de $\Phi_p(x)$ es la función $\Phi_{p'}(x)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, nótese también que Φ_p y $\Phi_{p'}$ son funciones impares. Dividiendo (1.1) por r^{N-1}, tenemos

$$|u'|^{p-2}u' = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds, \tag{1.3}$$

de la definición de Φ_p se sigue que

$$\Phi_p(u') = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds, \tag{1.4}$$

así

$$u' = -\Phi_{p'}\left(\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds\right). \tag{1.5}$$

Integrando (1.5) sobre el intervalo $(0, r)$ tenemos que

$$\int_0^r u'(t) = -\int_0^r \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right) dt. \tag{1.6}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$u(r) = d - \int_0^r \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right) dt. \tag{1.7}$$

Probaremos la existencia de una solución local u para el problema (1.1) - (1.2) hallando un punto fijo para el operador definido por

$$(Tu)(r) := d - \int_0^r \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right) dt. \tag{1.8}$$

Notemos que si $f(d) = 0$, entonces $u \equiv d$ es solución de (1.1)-(1.2), por tal motivo en adelante asumiremos que $f(d) \neq 0$.

Para $\epsilon > 0$ y $R > 0$ definamos el conjunto

$$B_R^\epsilon(d) = \{u \in \mathrm{C}[0, \epsilon] : \|u - d\|_\infty \leq R\},$$

donde $\|u - v\|_\infty = \sup_{0 \leq r \leq \epsilon} |u(r) - v(r)|$. $B_R^\epsilon(d)$ es un subconjunto cerrado de $\mathrm{C}[0, \epsilon]$, por lo tanto es un conjunto completo.

Con ayuda del siguiente lema demostraremos que el operador T es una contracción del conjunto $B_R^\epsilon(d)$ en $B_R^\epsilon(d)$.

Lema 1.1. *Sea $R < d/2$. Entonces $T\left(B_R^\epsilon(d)\right) \subseteq B_R^\epsilon(d)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.*

Demostración. En efecto sea $u \in B_R^\epsilon(d)$, luego tenemos que

$$u(s) \in \left[\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}\right] \quad \forall s \in [0, \epsilon],$$

y como f es continua en $\left[\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}\right]$ existe $M := M(d) > 0$ tal que

$$|f(u(s))| \leq M \quad \forall s \in [0, \epsilon].$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
|T(u(r)) - d| &\leq \int_0^r \left|\Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right)\right| dt \\
&= \int_0^r \left|\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right|^{p'-1} dt \\
&\leq \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_0^t s^{N-1}|f(u(s))|ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&\leq \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\int_0^t s^{N-1} M ds\right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= \int_0^r \frac{1}{t^{\frac{N-1}{p-1}}}\left[\frac{M}{N}t^N\right]^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= \left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^r t^{\frac{1}{p-1}} dt \\
&= \frac{p-1}{p}\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} r^{\frac{p}{p-1}} \leq \frac{p-1}{p}\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \epsilon^{\frac{p}{p-1}} < R,
\end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto $T\left(B_R^\epsilon(d)\right) \subseteq B_R^\epsilon(d)$ para ϵ suficientemente pequeño. □

Lema 1.2. *$T : B_R^\epsilon(d) \longrightarrow B_R^\epsilon(d)$ es una contracción para ϵ suficientemente pequeño.*

Demostración. Sean $u, v \in B_R^\epsilon(d)$.

$$T(u) - T(v) = -\left[\int_0^r \Phi_{p'}\left(X(u(t))\right) dt - \Phi_{p'}\left(X(v(t))\right) dt\right], \tag{1.9}$$

donde $X(u)(t) := \dfrac{1}{t^{N-1}} \displaystyle\int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds.$
Del Teorema del Valor Medio se sigue que

$$\Phi_{p'}\left(X(u)\right) - \Phi_{p'}\left(X(v)\right) = \Phi'_{p'}(c)\left(X(u) - X(v)\right), \tag{1.10}$$

para algún c entre $X(u)$ y $X(v)$, esto es, existe $\lambda \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} c &= \lambda X(u) + (1-\lambda)X(v) \\ &= \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1}\left[\lambda f(u(s)) + (1-\lambda) f(v(s))ds\right]. \end{aligned}$$

De otra parte

$$\begin{aligned} \Phi'_{p'}(c) &= (p'-1)|c|^{p'-2} \\ &= \frac{1}{p-1}\left|\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}\left[\lambda f(u(s)) + (1-\lambda) f(v(s))\right] ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \\ &\leq \frac{1}{(p-1)t^{\frac{(N-1)(2-p)}{p-1}}}\left[\int_0^t s^{N-1}\left|\lambda f(u(s)) + (1-\lambda) f(v(s))\right|\right]^{\frac{2-p}{p-1}} ds. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ahora debemos considerar dos casos:

- **Caso 1:** $1 < p \leq 2$. Dado que f es continua y $u(s), v(s) \in [\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}]$ para $s \in [0, \epsilon]$, tenemos que existe $A = A(d) > 0$ tal que

  $$|f(u(s))| \leq A \quad \text{y} \quad |f(v(s))| \leq A \qquad \forall s \in [0, \epsilon],$$

  luego existe $C := C(d, p, N)$ tal que

  $$\left[\int_0^t s^{N-1}\left|\lambda f(u(s)) + (1-\lambda) f(v(s))\right| ds\right]^{\frac{2-p}{p-1}} \leq \left[\frac{At^N}{N}\right]^{\frac{2-p}{p-1}} = Ct^{\frac{N(2-p)}{p-1}}. \tag{1.12}$$

- **Caso 2:** $p > 2$. Como f es continua y $f(d) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que

  $$|y - d| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(d)| < \frac{|f(d)|}{2}.$$

  Ahora notemos que $|f(d)| \leq |f(y)| + |f(d) - f(y)|$, luego para todo y con $|y - d| < \delta$ se cumple que

  $$|f(y)| \geq |f(d)| - |f(d) - f(y)| \geq |f(d)| - \frac{|f(d)|}{2} = \frac{|f(d)|}{2} > 0. \tag{1.13}$$

Como u y v están en $B_R^\epsilon(d)$, tomando $R < \frac{\delta}{4}$ tenemos que

$$|u(s) - d| < \delta \quad \text{y} \quad |v(s) - d| < \delta \quad \forall s \in [0, \epsilon].$$

Afirmación: *Para todo $s \in [0, \epsilon]$, $f(u(s))$ y $f(v(s))$ tienen el mismo signo.*

En efecto, supongamos que existe $s_1 \in [0, \epsilon]$ tal que $f(u(s_1)) > 0$ y $f(v(s_1)) < 0$. Como f es continua, existe α entre $u(s_1)$ y $v(s_1)$ tal que $f(\alpha) = 0$, pero

$$\begin{aligned}
|\alpha - d| &\leq |\alpha - u(s_1)| + |u(s_1) - d| \\
&\leq |u(s_1) - v(s_1)| + |u(s_1) - d| \\
&\leq 2|u(s_1) - d| + |v(s_1) - d| \\
&\leq 3R < \delta,
\end{aligned}$$

lo cual contradice a (1.13). Luego $f(u)$ y $f(v)$ tienen el mismo signo. Así

$$\begin{aligned}
|\lambda f(u(s)) + (1-\lambda) f(v(s))| &= \lambda |f(u)| + (1-\lambda)|f(v)| \\
&\geq \lambda \frac{|f(d)|}{2} + (1-\lambda)\frac{|f(d)|}{2} \\
&= \frac{|f(d)|}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^t s^{N-1} \left|\lambda f(u(s)) + (1-\lambda) f(v(s))\right| ds\right]^{\frac{2-p}{p-1}} &\leq \left[\int_0^t s^{N-1} \frac{|f(d)|}{2} ds\right]^{\frac{2-p}{p-1}} \\
&= \left(\frac{|f(d)|}{2}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{t^N}{N}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \\
&= K t^{\frac{N(2-p)}{p-1}}, \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

donde $K := K(d, p, N)$.

De (1.11),(1.12),(1.14) concluimos que

$$\Phi'_{p'}(c) \leq \frac{1}{(p-1)t^{\frac{(N-1)(2-p)}{p-1}}} (K + C) t^{\frac{N(2-p)}{p-1}} = \frac{(K+C)}{p-1} t^{\frac{2-p}{p-1}}.$$

De (1.10) y la desigualdad anterior se tiene que

$$|\Phi_{p'}(X(u)) - \Phi_{p'}(X(v))| \leq \frac{(K+C)}{p-1} t^{\frac{2-p}{p-1}} |X(u) - X(v)|. \qquad (1.15)$$

Como f es localmente Lipschitz existe $D := D(d) > 0$ tal que

$$|f(u(s)) - f(v(s))| \leq D|u(s) - v(s)| \quad \forall s \in (0,t),$$

de lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} |X(u) - X(v)| &\leq \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} \left| f(u(s)) - f(v(s)) \right| ds \\ &\leq \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t D s^{N-1} \|u - v\|_\infty ds = \frac{Dt\|u - v\|_\infty}{N}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

De (1.15) y (1.16) se tiene que

$$\begin{aligned} |\Phi_{p'}(X(u)) - \Phi_{p'}(X(v))| &\leq \frac{(K + C)Dt^{\frac{2-p}{p-1}} t\|u - v\|_\infty}{N(p-1)} \\ &= \frac{K_0 t^{\frac{1}{p-1}} \|u - v\|_\infty}{N(p-1)}, \qquad \text{donde} \qquad K_0 := K_0(d, p, N). \end{aligned} \tag{1.17}$$

De (1.9) y (1.17) se sigue que

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(v)\| &\leq \int_0^r \frac{K_0 t^{\frac{1}{p-1}} \|u - v\|_\infty}{N(p-1)} dt \\ &= \frac{K_0 \|u - v\|_\infty}{N(p-1)} \int_0^r t^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &= \frac{K_0 \|u - v\|_\infty}{Np} r^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq \frac{K_0 \|u - v\|_\infty}{Np} \epsilon^{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

De (1.18) concluimos que si $\epsilon < \left(\frac{Np}{K_0}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ entonces T es una contracción de $B_R^\epsilon(d)$ en sí misma, para $\epsilon > 0$ y $R > 0$ suficientemente pequeños. $\square$

Por el Teorema de punto fijo de Banach, se sigue que T tiene un único punto fijo $u \in B_R^\epsilon(d)$, esto es, existe un único $u \in \mathrm{C}[0, \epsilon]$ tal que

$$u = T(u) = d - \int_0^r \Phi_{p'} \left(\frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} f(u(s)) ds \right) dt. \tag{1.19}$$

Por lo tanto el problema (1.1)-(1.2) tiene una solución local en $[0, \epsilon]$.

Estudiemos a continuación algunas propiedades de la regularidad de la solución local.

Lema 1.3. $u \in C^1[0,\epsilon]$.

Demostración. De (1.5) vemos que u' es continua en $(0,\epsilon]$ luego solo resta probar que u' es continua en 0. De (1.19) se sigue que

$$\begin{aligned} u'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(h)-u(0)}{h-0} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{ d - \int_0^h \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right) dt - d \right\} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{ -\int_0^h \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right) dt \right\}. \end{aligned}$$

Ahora dado que u y f son continuas y $u(0)=d$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(u(s)) - f(d)| < \frac{|f(d)|}{2} \quad \forall s \in (0,\delta_1),$$

por tanto

$$|f(u(s))| < \frac{3|f(d)|}{2} =: M_1 \quad \forall s \in (0,\delta_1). \tag{1.20}$$

Sea $\epsilon < \delta_1$, para $t \in (0,\epsilon)$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\displaystyle\int_0^h \Phi_{p'}\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right) dt}{h} \right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \left(\frac{\left|\int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds\right|}{t^{N-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \left(\frac{1}{t^{N-1}} M_1 \int_0^t s^{N-1} ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{M_1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^h t^{\frac{1}{p-1}} dt \\ &= \left(\frac{M_1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} h^{\frac{1}{p-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0^+. \end{aligned}$$

De lo anterior podemos decir que $u'(0) = 0$.

De (1.3) se sigue que para $r \in (0,\epsilon)$

$$|u'|^{p-1} = \frac{1}{r^{N-1}} \left| \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds \right|.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{r^{N-1}} \left| \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds \right| \leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} |f(u(s))| ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} M_1 ds \\
&= \frac{rM_1}{N} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \to 0^+.
\end{aligned}
$$

Por tanto $\lim_{r\to 0^+} u'(r) = 0 = u'(0)$, y así $u \in C^1[0,\epsilon]$. $\square$

Lema 1.4. *$u \in C^2[0,\epsilon]$ si $1 < p \leq 2$ y $u \in C^2\{r \in [0,\epsilon) : u'(r) \neq 0\}$ si $p > 2$, donde $\{r \in (0,\epsilon) : u'(r) \neq 0\}$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Recordemos que $\Phi_{p'}(x) = |x|^{p'-2}x$, luego $\Phi'_{p'}(x) = (p'-1)|x|^{p'-2}$ y como $p' - 2 = \dfrac{2-p}{p-1}$, entonces $\Phi'_{p'}$ es continua en $\mathbb{R}$ si $1 < p \leq 2$ y $\Phi'_{p'}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $p \geq 2$.

Sea $k : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida por

$$
k(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt \quad \text{y} \quad k(0) = 0.
$$

Afirmación: *k es continua en $[0,\epsilon]$.*

En efecto, por la definición de k se sigue que k es continua en $(0,\epsilon]$, sólo resta probar que $\lim_{r\to 0^+} k(r) = 0$. De (1.20) tenemos que para $t \in (0,\epsilon]$

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} f(u(s))ds \right| &\leq \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} |f(u(s))| ds \\
&\leq \frac{M_1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} ds = \frac{M_1 t}{N} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Por tanto $k(0) = \lim_{r\to 0^+} k(r)$; esto es, k es continua en $[0,\epsilon]$.

Ahora notemos que

$$
k'(r) = \frac{-(N-1)}{r^N} \int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt + f(u(r)). \tag{1.21}
$$

Así k' es continua en $(0,\epsilon)$.

Demostremos que k' es continua en $r = 0$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
k'(0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{k(r) - k(0)}{r - 0} &= \lim_{r\to 0} \frac{k(r)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{r^{N-1}} \displaystyle\int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt}{r} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt}{r^N}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{f(u(r))}{N} = \frac{f(u(0))}{N} = \frac{f(d)}{N}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} k'(r) &= \lim_{r\to 0^+} \left[\frac{-(N-1)}{r^N}\int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt + f(u(r))\right] \\
&\lim_{r\to 0^+} \left[\frac{-(N-1)}{Nr^{N-1}} r^{N-1} f(u(r)) + f(u(r))\right] \\
&= \frac{-(N-1)}{Nr^{N-1}} r^{N-1} f(d) + f(d) = \frac{f(d)}{N}.
\end{aligned}$$

Por tanto k' es continua en $[0,\epsilon)$.

De (1.5) y de la definición de k y k' se sigue que:

$$\begin{aligned}
-u''(r) &= \Phi'_{p'}(k(r))k'(r) \\
&= \frac{1}{p-1}\left|\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds\right|^{\frac{2-p}{p-1}} \left[\frac{-(N-1)}{r^N}\int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt + f(u(r))\right] \\
&= \frac{|u'|^{2-p}}{p-1}\left[\frac{-(N-1)}{r^N}\int_0^r t^{N-1} f(u(t))dt + f(u(r))\right]. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

De la expresión en (1.22), concluimos que u'' será continua en $[0,\epsilon]$ si $1 < p \leq 2$, mientras que para $p > 2$, u'' es continua en el conjunto $\{r \in [0,\epsilon) : u'(r) \neq 0\}$. □

En adelante denotaremos por $[0,R)$ el intervalo maximal para el cual u es solución del problema (1.1)-(1.2), donde $0 < R \leq \infty$. En realidad probaremos que $R = \infty$.

Lema 1.5. *Supongamos que u es solución de (1.1)-(1.2) en $[0,R)$ con $R < \infty$, entonces existen u_0 y u'_0 en $\mathbb{R}$ tales que*

$$\lim_{r\to R^-} u(r) = u_0,$$
$$\lim_{r\to R^-} u'(r) = u'_0.$$

Demostración. Consideremos la función de energía para el problema (1.1)-(1.2), definida por

$$E(r) = \frac{(p-1)|u'|^p}{p} + F(u), \quad \text{con} \quad F(u) = \int_0^{u(r)} f(s)ds.$$

De (1.1) se sigue que

$$\frac{d}{dr}\left[-\int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds\right] = \frac{d}{dr}\left[r^{N-1}|u'|^{p-2}u'\right]$$

$$-r^{N-1}f(u(r)) = (N-1)r^{N-2}|u'|^{p-2}u' + r^{N-1}(p-2)|u'|^{p-3}\frac{u'}{|u'|}u''u' + r^{N-1}|u'|^{p-2}u''$$
$$-f(u(r)) = \frac{(N-1)}{r}|u'|^{p-2}u' + (p-2)|u'|^{p-4}u''(u')^2 + |u'|^{p-2}u''. \tag{1.23}$$

Así

$$-f(u(r))u' = \frac{(N-1)}{r}|u'|^p + (p-1)|u'|^{p-2}u''u'. \tag{1.24}$$

De otra parte,

$$E'(r) = \left[\frac{p-1}{p}\right]p|u'|^{p-2}u''u' + f(u(r))u' = (p-1)|u'|^{p-2}u''u' + f(u(r))u',$$

de (1.24) se sigue que

$$E'(r) = \frac{-(N-1)}{r}|u'|^p \leq 0. \tag{1.25}$$

Por tanto E es decreciente y así $E(r) \leq E(0)$. Luego

$$\frac{(p-1)|u'|^p}{p} + F(u) \leq F(d). \tag{1.26}$$

De **(H3)** y **(H5)**

$$F(u) = \frac{|u|^{q+1}}{q+1} + G(u), \tag{1.27}$$

por lo tanto

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{F(u)}{|u|^{q+1}} = \lim_{|u|\to\infty}\left[\frac{1}{q+1} + \frac{G(u)}{|u|^{q+1}}\right],$$

usando la regla de L'Hospital

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{G(u)}{|u|^{q+1}} = \lim_{|u|\to\infty}\frac{g(u)}{(q+1)|u|^q} = 0,$$

así

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{F(u)}{|u|^{q+1}} = \frac{1}{q+1}. \tag{1.28}$$

De (1.28) vemos que existe $\rho > 0$ tal que $F(u) > 0$ para $|u| > \rho$ y como F es continua entonces F tiene un mínimo en $[-\rho, \rho]$, por tanto existe $L > 0$ tal que

$$F(u) \geq -L, \qquad \text{para todo} \quad u. \tag{1.29}$$

De (1.26) y (1.29) se sigue que

$$\frac{(p-1)|u'|^p}{p} - L \leq \frac{(p-1)|u'|^p}{p} + F(u) \leq F(d).$$

Por lo tanto $|u'|^p \leq \dfrac{p(F(d)+L)}{p-1}$. Así $|u'| \leq B$, donde $B = \left[\dfrac{p(F(d)+L)}{p-1}\right]^{1/p}$.
Sean $\lambda > 0$ y (x_n) una sucesión tal que $x_n \to R$ y $x_n < R$, por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\lambda}{B} \quad \text{para} \quad n, m \geq N.$$

Por el Teorema del Valor Medio

$$|u(x_n) - u(x_m)| = |u'(z_{nm})||x_n - x_m| \leq B\frac{\lambda}{B} = \lambda \quad \text{para} \quad n, m \geq N,$$

esto implica que $(u(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto existe $u_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{r \to R^-} u(r) = u_0 \in \mathbb{R}$.
De otro lado tomando límite cuando $r \to R^-$ en la ecuación (1.1) vemos que

$$\lim_{r \to R^-} r^{N-1}|u'|^{p-2}u' = -\int_0^R s^{N-1} f(u(s))ds < \infty.$$

Ahora, como $\lim\limits_{r \to R^-} r^{N-1}$ existe, $\lim\limits_{r \to R^-} |u'|^{p-2}u'$ también existe, luego existe $u_0' \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{r \to R^-} u'(r) = u_0'$. □

En vista de que en la demostración del lema siguiente se utilizara el Teorema de Existencia y Unicidad para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias enunciamos a continuación dicho resultado.

Teorema de Picard. *Sea f una función continua y Lipschitz en $\Omega = I_a \times B_b$, donde $I_a = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq a\}$ y $B_b = \{x : \|x - x_0\| \leq b\}$. Si $\|f\| \leq M$ en Ω existe una y única solución de*

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

en I_α donde $\alpha = \text{mín}\{a, \frac{b}{M}\}$.

Demostración. Véase [7], páginas 13-14. □

Lema 1.6. *Existe una solución para (1.1)-(1.2) en $[0, \infty)$*

Demostración. Si $R = \infty$ no hay nada que probar. Supongamos que $R < \infty$. **Caso 1.** Si $u'(R) \neq 0$, por el Lema 1.4 se sigue que $u \in C^2$ en una vecindad de R.
De (1.23)

$$(p-1)u'' + \frac{(N-1)}{r}u' + |u'|^{2-p}f(u) = 0. \tag{1.30}$$

Como $u'(R) \neq 0$, entonces por el Teorema de Picard, existe una solución para la ecuación diferencial anterior en $[R, R+\epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$ con $u(R) = u_0$ y $u'(R) = u'_0$. Esto contradice la definición de R, por lo tanto $R = \infty$.

Caso 2. Si $u'(R) = 0$ y $f(u(R)) = 0$, podemos extender u para valores $r > R$ como $u(r) = u(R)$, lo cual contradice la definición de R, así $R = \infty$.

Caso 3. Si $u'(R) = 0$ y $f(u(R)) \neq 0$, entonces podemos considerar un problema de valor inicial similar al problema (1.1)-(1.2) y procediendo de manera similar como se hizo en los Lemas 1.1 y 1.2 logramos extender nuestra solución u hasta $[R, R+\epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$, pero esto contradice la definición de R.
Por tanto concluimos que $R = \infty$.

□

1.2. Propiedades de la solución global.

Lema 1.7. *Sea $d > \beta$ donde β es como en **(H4)** entonces $|u(r)| < d$ para $0 < r < \infty$.*

Demostración. Recordemos que

$$E(r) = \frac{(p-1)|u(r)|^p}{p} + F(u(r)) \quad \text{y} \quad E'(r) = \frac{-(N-1)}{r}|u'|^p.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$F(d) = E(r) - \int_0^r E'(t)dt = \frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + F(u(r)) + \int_0^r \frac{N-1}{t}|u'|^p dt. \tag{1.31}$$

Supongamos, por contradicción, que exista $r_0 > 0$ tal que $|u(r_0)| = d$. De manera similar a como se hizo en el Lema 1.3 se prueba que $u'(r_0) = 0$, por tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^{r_0} \frac{N-1}{t}|u'(t)|^p dt &= -\int_0^{r_0} E'(t)dt \\
&= E(0) - E(r_0) \\
&= F(d) - \frac{(p-1)|u'(r_0)|^p}{p} - F(u(r_0)) \\
&= F(d) - \frac{(p-1)(0)}{p} - F(d) = 0.
\end{aligned}$$

Esto implica que $|u'(t)| = 0$ para todo $t \in [0, r_0]$. Se sigue que $u(t) = d$ para todo $t \in [0, r_0]$, por lo tanto $f(u(t)) = f(d)$ para todo $t \in [0, r_0]$.
De (1.1)

$$r_0^{N-1}|u'(r_0)|^{p-2}u'(r_0) = -\int_0^{r_0} t^{N-1} f(u(t))dt,$$

se sigue que $f(d) = 0$, lo cual es una contradicción, ya que $f(d) \neq 0$.
Lo anterior significa que

$$|u(r)| < d \quad \forall r \in (0, \infty) \quad \text{o} \quad |u(r)| > d \quad \forall r \in (0, \infty).$$

Ahora de (1.26) sabemos que $F(u) \leq F(d)$ para todo u en $[0, \infty)$ y como F es creciente en (γ, ∞) y es una función par entonces $|u(\cdot)| < d$ en (γ, ∞) y por tanto $|u(\cdot)| < d$ en $(0, \infty)$. □

Lema 1.8. *Sean $z_1 < z_2$ con $u(z_1) = u(z_2) = 0$ y $|u| > 0$ en (z_1, z_2), entonces existe un único $m \in (z_1, z_2)$ tal que $u'(m) = 0$ y $|u(m)| > \gamma$, donde γ es como en **(H5)**.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u > 0$ sobre (z_1, z_2). Por el Teorema del Valor Medio existe $m \in (z_1, z_2)$ tal que $u'(m) = 0$. Además,

$$F(u(m)) = E(m) \geq E(z_2) = \frac{(p-1)}{p}|u'(z_2)|^p \geq 0 = F(\gamma),$$

de **(H5)** se sigue que $|u(m)| \geq \gamma$.
Supongamos que existen valores consecutivos $m_1 < m_2 < m_3$ tales que $u'(m_1) = u'(m_2) = u'(m_3) = 0$ y en m_1 y m_3, u tiene máximos locales y en m_2, u tiene un mínimo local, luego $u' < 0$ en (m_1, m_2) y $u' > 0$ en (m_2, m_3). Como $z_1 < m_1 < m_2 < m_3 < z_2$, y la energía E es decreciente entonces

$$E(m_2) \geq E(m_3) \geq E(z_2).$$

Como $u'(m_2) = u'(m_3) = 0$ y $u(z_2) = 0$ entonces $F(u(z_2)) = 0$, así

$$F(u(m_2)) \geq F(u(m_3)) \geq \frac{p-1}{p}|u'(z_2)|^p \geq 0. \tag{1.32}$$

Ahora, por **(H5)** se sigue que $u(m_2) \geq \gamma$ y $u(m_3) \geq \gamma$. Como u tiene un mínimo local en m_2 y u tiene un máximo local en m_3 tenemos que

$$\gamma \leq u(m_2) < u(m_3).$$

De **(H5)** vemos que F es creciente en $[\gamma, \infty]$ y esto implica que $F(u(m_2)) < F(u(m_3))$, lo cual es una contradicción con (1.32). Así, en (z_1, z_2) sólo existe un único m tal que $u'(m) = 0$. $\square$

Lema 1.9. *Si existe $r_0 \in (0, \infty)$ tal que $u(r_0) = u'(r_0) = 0$ entonces $u \equiv 0$.*

Demostración. Supongamos que $u(r_0) = 0 = u'(r_0)$, primero probemos que $u = 0$ en (r_0, ∞). En efecto, como

$$E' \leq 0 \quad \text{y} \quad E(r_0) = \int_0^{u(r_0)} f(s)ds + \frac{(p-1)|u'(r_0)|^p}{p} = 0,$$

se sigue que $E(r) < 0$ para $r > r_0$ ó $E \equiv 0$ en un intervalo de la forma $(r_0, r_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$.

Supongamos que $E(r) < 0$ para $r > r_0$. Luego $|u(r)| > 0$ para todo $r > r_0$, pues si existiese $r_1 > r_0$ tal que $|u(r_1)| = 0$, entonces

$$0 \leq \frac{p-1}{p}|u'(r_1)|^p = E(r_1) < 0,$$

lo cual es una contradicción, por tanto $|u| > 0$ en (r_0, ∞). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u(r) > 0$ para $r > r_0$. Ahora, como $u(r_0) = 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$u(r) < \epsilon_1 \quad \forall r \in (r_0, r_0 + \delta_2).$$

De **(H2)** se sigue que $f(u(r)) < 0$ para $r \in (r_0, r_0 + \delta_2)$, así

$$-r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) = \int_{r_0}^{r} t^{N-1} f(u(t))dt < 0.$$

Luego $u' > 0$, y así u es creciente en $(r_0, r_0 + \delta_2)$.

Ahora como $E(r) < 0$ en $(r_0, r_0 + \delta_2)$ se sigue que

$$\frac{p-1}{p}|u^{'}(r)|^p + F(u(r)) < 0$$

$$\left[\frac{p}{p-1}\right]^{1/p} |F(u(r))|^{1/p} > |u^{'}(r)|. \tag{1.33}$$

Afirmación. *La hipótesis **(H6)** también se cumple para $1 < p \leq 2$.*

En efecto como $f(0) = 0$ y f es localmente Lipschitz, existe $\xi > 0$ tal que

$$|f(u)| = |f(u) - f(0)| \leq C_\xi |u|, \quad \text{para todo} \quad |u| < \xi,$$

luego para $u \in (0, \xi)$

$$-C_\xi \int_0^u t dt \leq \int_0^u f(t) dt \leq C_\xi \int_0^u t dt,$$

así,

$$\frac{-C_\xi u^2}{2} \leq F(u) \leq \frac{C_\xi u^2}{2}.$$

Luego

$$|F(u)|^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{C_\xi}{2}\right)^{\frac{1}{p}} u^{\frac{2}{p}}.$$

Dado $1 < p \leq 2$,

$$\int_0^\xi \frac{du}{|F(u)|^{\frac{1}{p}}} \geq \left(\frac{2}{C_\xi}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^\xi \frac{du}{u^{\frac{2}{p}}} = \infty.$$

Lo que demuestra la afirmación.

Ahora, por **(H6)**, la afirmación anterior y (1.33) tenemos que

$$\begin{aligned}
\infty = \int_0^{u(r_0+\delta_2)} \frac{ds}{\sqrt[p]{|F(s)|}} &= \int_{r_0}^{r_0+\delta_2} \frac{u^{'}(t)dt}{\sqrt[p]{|F(u(t))|}} \\
&= \int_{r_0}^{r_0+\delta_2} \frac{|u^{'}(t)|dt}{|F(u(t))|^{1/p}} \\
&< \int_{r_0}^{r_0+\delta_2} \left[\frac{p}{p-1}\right]^{1/p} dt < \infty,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por tanto $E \equiv 0$ en un intervalo de la forma $[r_0, r_0 + \delta)$. Así

$$\begin{aligned}
\frac{-(N-1)}{r}|u^{'}|^p = E'(r) = 0 \quad \forall r \in [r_0, r_0 + \delta), \\
u'(r) = 0 \quad \forall r \in [r_0, r_0 + \delta), \\
u(r) = u(r_0) = 0 \quad \forall r \in [r_0, r_0 + \delta).
\end{aligned}$$

Denotemos por $[r_0, r_1)$ el intervalo maximal donde $u \equiv 0$.

Si $r_1 < \infty$, procediendo como se hizo al principio de esta prueba, se demuestra que $u \equiv 0$ en un intervalo de la forma $[r_1, r_1 + \delta)$, pero esto contradice la elección de r_1, así $r_1 = \infty$, entonces $u \equiv 0$ en $[r_0, \infty)$ y $E \equiv 0$ en (r_0, ∞).

Ahora probemos que $u \equiv 0$ en $(0, r_0)$. Sea $r_1 = \text{ínf}\{r > 0 : u(r) = 0 = u^{'}(r)\}$, note que el conjunto $\{r : u(r) = 0 = u^{'}(r)\}$ es no vacío pues r_0 pertenece a este. Si $r_1 = 0$ entonces $u \equiv 0$ en $(0, \infty)$ y por la continuidad de u, $u \equiv 0$ en $[0, \infty)$.

Supongamos que $r_1 > 0$. Sea $\dfrac{r_1}{2} < r < r_1$, así $\dfrac{2}{r_1} > \dfrac{1}{r}$. Recordemos que

$$E'(t) = -\frac{(N-1)|u'(t)|^p}{t}, \tag{1.34}$$

por lo tanto,

$$E(r_1) - E(r) = -\int_r^{r_1} \frac{(N-1)|u'(t)|^p}{t} dt. \tag{1.35}$$

De otra parte, por la manera como se definió r_1, $u(r_1) = 0$ y $u'(r_1) = 0$, luego $F(u(r_1)) = 0$ y $E(r_1) = 0$ y así

$$\frac{p-1}{p}|u'(r)|^p + F(u(r)) = \int_r^{r_1} \frac{(N-1)|u'(t)|^p}{t} dt. \tag{1.36}$$

Sea $W(r) = \displaystyle\int_r^{r_1} \frac{(N-1)|u^{'}(t)|^p}{t} dt$. Se sigue que $W^{'}(r) = \dfrac{-(N-1)|u^{'}(r)|^p}{r}$,

$$|u^{'}(r)|^p = \frac{-rW^{'}}{N-1}. \tag{1.37}$$

Luego (1.36) se puede escribir en la forma

$$\frac{-(p-1)rW^{'}}{p(N-1)} + F(u(r)) = W(r), \tag{1.38}$$

$$W^{'} + \frac{\eta W}{r} = \frac{\eta F(u(r))}{r} \quad \text{con} \quad \eta = \frac{p(N-1)}{p-1}$$

$$W^{'} r^{\eta} + \eta W r^{\eta-1} = \eta F(u(r)) r^{\eta-1}$$

$$(W r^{\eta})^{'} = \eta F(u(r)) r^{\eta-1}$$

$$W(r_1) r_1^{\eta} - W(r) r^{\eta} = \int_r^{r_1} \eta t^{\eta-1} F(u(t)) dt.$$

Como $u(r_1) = 0$, existe $\delta_3 \in (0, \frac{r_1}{2})$ tal que

$$|u(t)| < \epsilon_1 \quad \forall t \in (r_1, r_1 + \delta_3),$$

luego por **(H2)**

$$F(u(t)) \leq 0 \quad \forall t \in (r_1 - \delta_3, r_1).$$

Como $W(r_1) = 0$ se sigue que

$$W(r) = \frac{-\eta}{r^{\eta}} \int_r^{r_1} t^{\eta-1} F(u(t)) dt = \frac{\eta}{r^{\eta}} \int_r^{r_1} t^{\eta-1} |F(u(t))| dt. \tag{1.39}$$

Usando (1.37) y (1.39) podemos escribir (1.38) de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{(p-1)|u^{'}|^p}{p} + F(u(r)) &= \frac{\eta}{r^\eta}\int_r^{r_1} t^{\eta-1}|F(u(t))|dt,\\
|u^{'}|^p &= \frac{p}{p-1}\left[\frac{\eta}{r^\eta}\int_r^{r_1} t^{\eta-1}|F(u(t))|dt - F(u(r))\right],\\
|u^{'}|^p &= \frac{p}{p-1}\left[\frac{\eta}{r^\eta}\int_r^{r_1} t^{\eta-1}|F(u(t))|dt + |F(u(r))|\right]. \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

Notemos que para $r < r_1$ y r suficientemente cercano a r_1, $u^{'}(r) \neq 0$, pues si existiese $r_2 < r_1$ tal que $u'(r_2) = 0$, entonces de (1.40)

$$\int_{r_2}^{r_1} t^{\eta-1}|F(u(t))|dt = 0 \quad \text{y} \quad F(u(r_2)) = 0.$$

Por tanto $F(u(t)) = 0$ para todo $t \in [r_2, r_1]$, luego $u(t) = 0$ para todo $t \in [r_2, r_1]$ ó $u(t) = \gamma$ para todo $t \in [r_2, r_1]$, pero como $u(r_1) = 0$, $u(t) = 0$ para todo $t \in [r_2, r_1]$ lo que contradice la definición de r_1. Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u^{'}(r) < 0$ para $r < r_1$ y r suficientemente cerca de r_1. Ahora, para $r < t < r_1$, como u es decreciente $u(r) > u(t) > u(r_1) = 0$. Así, $F(u(r)) < F(u(t)) < 0$ y luego $|F(u(r))| > |F(u(t))| > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|u^{'}|^p &= \frac{p}{p-1}\left[\frac{\eta}{r^\eta}\int_r^{r_1} t^{\eta-1}|F(u(t))|dt + |F(u(r))|\right]\\
&\leq \frac{p}{p-1}\left[\frac{\eta}{r^\eta}|F(u(r))|\int_r^{r_1} t^{\eta-1}dt + |F(u(r))|\right]\\
&\leq \frac{p}{p-1}\left[\frac{\eta}{r^\eta}|F(u(r))|\frac{r_1^\eta - r^\eta}{\eta} + |F(u(r))|\right]\\
&= \frac{p|F(u(r))|r_1^\eta}{(p-1)r^\eta}\\
&\leq \frac{p2^\eta|F(u(r))|}{p-1},
\end{aligned}$$

así

$$|u'| \leq \sqrt[p]{\frac{p2^\eta|F(u(r))|}{p-1}}.$$

Dividiendo por $\sqrt[p]{|F(u(r))|}$, integrando en (r, r_1) y usando **(H6)** se tiene que

$$\begin{aligned}
\infty = \int_0^{u(r)} \frac{ds}{\sqrt[p]{|F(s)|}} &= \int_r^{r_1} \frac{|u^{'}(t)|dt}{|F(u(t))|^{1/p}}\\
&< \sqrt[p]{\frac{p2^\eta}{p-1}}\int_r^{r_1} dt
\end{aligned}$$

$$= \sqrt[p]{\frac{p2^{\eta}}{p-1}}(r_1 - r) < \infty.$$

Lo anterior es una contradicción y por tanto $r_1 = 0$ y $u \equiv 0$. $\square$

Capítulo 2

Soluciones con un número prescrito de ceros.

En este capítulo probaremos la existencia de soluciones u del problema (1.1)-(1.2) con un número grande de ceros, para esto estudiaremos el comportamiento de las soluciones cuando la condición inicial $u(0) = d$ es tal que $d \to \infty$. Este capítulo consta de tres secciones. En la sección 2.1 construiremos una familia de funciones mediante un reescalamiento de u y usando el Teorema de Arzela-Ascoli demostraremos su convergencia a una cierta función v, la cual más adelante nos permitirá garantizar la existencia de soluciones u del problema (1.1)-(1.2) con un número grande de ceros. La sección 2.2 está dedicada a establecer la existencia de infinitos ceros de la función v. En la sección 2.3 probaremos un lema técnico, que será de mucha utilidad en el capítulo 3, al momento de demostrar el **Teorema A**.
Inicialmente presentamos a continuación un resultado clásico del análisis que sera utilizado en la demostración del siguiente lema.

Teorema de Arzela-Ascoli. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea F una familia equicontinua de funciones $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Esto es, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$ para toda $\varphi \in F$. Si F es uniformemente acotada, esto es, existe $M > 0$ tal que $\|\varphi\| < M$ para toda $\varphi \in F$, entonces toda sucesión $\{\varphi_n\}$ de elementos de F tiene una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}$ uniformemente convergente en X.*

Demostración. Véase [7], páginas 15-16. □

2.1. Una familia de funciones especiales que converge a una función v.

Sean $\lambda > 0$ y $u(r)$ la solución del problema (1.1)-(1.2) con $d = \lambda^{\frac{p}{q-p+1}}$.
Definamos $u_\lambda(r) = \lambda^{\frac{-p}{q-p+1}} u\left(\frac{r}{\lambda}\right)$.

Lema 2.1. *$u_\lambda \longrightarrow v$ cuando $\lambda \to \infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de $[0, \infty)$, donde v es solución del problema*

$$r^{N-1}|v'|^{p-2}v' = -\int_0^r s^{N-1}|v(s)|^{q-1}v(s)ds \tag{2.1}$$

$$v(0) = 1. \tag{2.2}$$

Demostración. Notemos que $u_\lambda(r)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned}
r^{N-1}|u_\lambda'|^{p-2}u_\lambda' &= r^{N-1}\left|u'\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right|^{p-2} u'\left(\frac{r}{\lambda}\right)\left[\lambda^{\left(\frac{-q-1}{q-p+1}\right)}\right]^{p-1} \\
&= \lambda^{k_0}\left[-\int_0^{r/\lambda} t^{N-1}f(u(t))dt\right], \quad \text{con} \quad k_0 = \frac{-qp+q-p+1}{q-p+1} + N - 1 \\
&= \lambda^{k_0}\left[-\int_0^r s^{N-1}\lambda^{-N}f(u\left(\frac{s}{\lambda}\right))ds\right] \\
&= -\int_0^r \lambda^{\left(\frac{-qp}{q-p+1}\right)}s^{N-1}f\left(\lambda^{\left(\frac{p}{q-p+1}\right)}u_\lambda(s)\right)ds
\end{aligned}$$

y además $u_\lambda(0) = \lambda^{\frac{-p}{q-p+1}}u(\frac{0}{\lambda}) = 1$.

Sea $E(r,\lambda) = \dfrac{(p-1)|u_\lambda'(r)|^p}{p} + \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}}F\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}u_\lambda(r)\right)$. De manera similar a como se hizo en el Lema 1.5 se sigue que

$$\frac{d}{dr}E(r,\lambda) = -\frac{(N-1)|u_\lambda'|^p}{r}.$$

Por lo tanto $E(r,\lambda)$ es decreciente en la variable r. Así para $\lambda > 0$,

$$E(r,\lambda) \leq E(0,\lambda) = \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}}F\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right). \tag{2.3}$$

De (1.27) y (2.3) se tiene

$$E(r,\lambda) \leq \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}}\left[\frac{\left|\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right|^{q+1}}{q+1} + G\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{q+1} + \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}} G\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right).$$

De otro lado como $\lim\limits_{|u|\to\infty} \frac{G(u)}{|u|^{q+1}} = 0$ se sigue que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{G\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right)}{\left[\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right]^{q+1}} = 0, \tag{2.4}$$

por lo tanto $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E(0,\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \left[\frac{1}{q+1} + \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}} G\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right)\right] = \frac{1}{q+1}$.
Luego existe $\lambda_1 > 0$ tal que $E(0,\lambda) < \frac{2}{q+1}$, para $\lambda > \lambda_1$ y como $E(r,\lambda) \leq E(0,\lambda)$, concluimos que $E(r,\lambda)$ está acotado superiormente (independiente de r) para λ suficientemente grande. **Afirmación:** *$u_\lambda(r)$ y $u'_\lambda(r)$ están acotadas.*
En efecto, del Lema 1.7 tenemos que $|u(r)| \leq d = \lambda^{\frac{p}{q-p+1}}$, así

$$|u_\lambda(r)| = \left|\lambda^{\frac{-p}{q-p+1}} u\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right| \leq \lambda^0 = 1.$$

De otra parte, como

$$\frac{(p-1)}{p}|u'_\lambda|^p + \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}} F\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}} u_\lambda(r)\right) = E(r,\lambda) \leq E(0,\lambda) = \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}} F\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right),$$

y $F(u) \geq -L$ (véase (1.29)) se sigue que

$$\frac{(p-1)}{p}|u'_\lambda|^p \leq \frac{1}{q+1} + \lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}} G\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}\right) + L\lambda^{\frac{-p(q+1)}{q-p+1}}.$$

De la anterior desigualdad y (2.4) tenemos que

$$\exists \lambda_2 > 0 \quad \text{tal que} \quad \frac{p-1}{p}|u'_\lambda|^p \leq \frac{2}{q+1} \qquad \text{para} \qquad \lambda > \lambda_2.$$

Por tanto

$$|u'_\lambda(r)| \leq M \qquad \text{para} \qquad \lambda > \lambda_2.$$

Lo que concluye la prueba de la afirmación.
Ahora, sean $\eta > 0$ y $r > 0$ y tomemos $\delta < \frac{\eta}{M}$, luego para $|r-s| < \delta$ y $\lambda > \lambda_2$

$$|u_\lambda(r) - u_\lambda(s)| = |u'_\lambda(t)(r-s)| = |u'_\lambda(t)||(r-s)| < M\delta < \eta.$$

Así $\{u_\lambda\}_{\lambda>\lambda_2}$ es una familia equicontinua de funciones. Por el Teorema de Arzela-Ascoli existe una subsucesión $\{u_{\lambda_k}\}$ de $\{u_\lambda\}_{\lambda>\lambda_2}$, tal que $u_{\lambda_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$, uniformemente

sobre conjuntos compactos, donde v es una función continua definida en $[0,+\infty)$. De otra parte notemos que

$$\begin{aligned}
r^{N-1}|u'_\lambda|^{p-2}u'_\lambda &= -\int_0^r s^{N-1}\lambda^{\frac{-pq}{q-p+1}} f\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}u_\lambda(s)\right)ds \\
&= -\int_0^r s^{N-1}\lambda^{\frac{-pq}{q-p+1}}\left\{\left|\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}u_\lambda(s)\right|^{q-1}\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}u_\lambda(s)+g\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}u_\lambda(s)\right)\right\}ds \\
&= -\int_0^r s^{N-1}\left\{|u_\lambda(s)|^{q-1}u_\lambda(s)+\lambda^{\frac{-pq}{q-p+1}}g\left(\lambda^{\frac{p}{q-p+1}}u_\lambda(s)\right)\right\}ds.
\end{aligned}$$

Ahora como $\Phi_p(x)=|x|^{p-2}x$, $\Phi_{p'}=(\Phi_p)^{-1}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\Phi_p(u'_{\lambda_k}) &= -\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\left\{|u_{\lambda_k}(s)|^{q-1}u_{\lambda_k}(s)+\lambda_k^{\frac{-pq}{q-p+1}}g\left[\lambda_k^{\frac{p}{q-p+1}}u_{\lambda_k}(s)\right]\right\}ds \\
u'_{\lambda_k} &= -\Phi_{p'}\left\{\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\left[|u_{\lambda_k}(s)|^{q-1}u_{\lambda_k}(s)+\lambda_k^{\frac{-pq}{q-p+1}}g\left(\lambda_k^{\frac{p}{q-p+1}}u_{\lambda_k}(s)\right)\right]ds\right\}.
\end{aligned}$$

Tomando límite en la igualdad anterior cuando $k\to\infty$ y teniendo en cuenta que $\Phi_{p'}$ es continua, $u_{\lambda_k}(r)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} v(r)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[0,\infty)$, y **(H3)** tenemos

$$\lim_{k\to+\infty} u'_{\lambda_k}(r) = -\Phi_{p'}\left(\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}|v^{q-1}(s)|v(s)ds\right) := \phi(r).$$

Luego $u'_{\lambda_k}\to\phi$ puntualmente y como v es continua se sigue que ϕ es una función continua.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$u_{\lambda_k}(r) = 1+\int_0^r u'_{\lambda_k}(s)ds.$$

Como $u_{\lambda_k}\to v$ uniformemente, $u'_{\lambda_k}\to\phi$ puntualmente y u'_{λ_k} es uniformemente acotada por M, entonces por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_0^r u'_{\lambda_k}(s)ds &= \int_0^r \phi(s)ds \\
\lim_{k\to\infty}[u_{\lambda_k}(r)-1] &= v(r)-1.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$v(r) = 1+\int_0^r \phi(s)ds.$$

Luego $v' = \phi$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v'(r) &= -\Phi_{p'}\left(\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}|u(s)|^{q-1}u(s)ds\right) \\ |v'(r)|^{p-1}v'(r) &= -\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}|v(s)|^{q-1}v(s)ds \\ -r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r) &= \int_0^r s^{N-1}|v(s)|^{q-1}v(s)ds. \end{aligned}$$

Notemos que $v(0) = 1$ y $v'(0) = 0$. Así $v \in C^1[0,\infty)$ y v es solución del problema (2.1)-(2.2). □

2.2. Existencia de ceros de la función v.

Estudiaremos ahora la existencia de ceros para la función v definida en la sección anterior, para esto procederemos demostrando inicialmente que v al menos tiene un cero y luego probaremos que v tiene infinitos ceros.

El siguiente resultado permite garantizar la existencia de una cierta integral que aparecerá más adelante cuando estemos realizando algunos cálculos en el Lema 2.3.

Lema 2.2. *Sea v solución del problema (2.1)-(2.2). Si $1 < p < q+1 < \dfrac{Np}{N-p}$ y $v > 0$ entonces*

$$\int_0^\infty s^{N-1}v^{q+1}ds < \infty.$$

Demostración. Del Lema 2.1 sabemos que v es continua y por tanto acotada en cualquier conjunto compacto, luego para probar el lema es suficiente demostrar que

$$\int_1^\infty s^{N-1}v^{q+1}ds < \infty.$$

En efecto, como

$$-r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r) = \int_0^r s^{N-1}|v(s)|^{q-1}v(s)ds$$

y dado que $v > 0$, $v' < 0$. Así v es decreciente y

$$\begin{aligned} -r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r) = r^{N-1}|v'(r)|^{p-1} &= \int_0^r s^{N-1}|v(s)|^{q-1}v(s)ds \\ &= \int_0^r s^{N-1}v^q(s)ds \end{aligned}$$

$$\geq v^q(r)\int_0^q s^{N-1}ds = \frac{(v(r))^q r^N}{N}.$$

Por lo tanto

$$|v'| \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}} v^{\frac{q}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}}$$
$$\frac{-v'}{v^{q/(p-1)}} \geq \frac{r^{\frac{1}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}},$$

integrando en $(0,r)$ la anterior desigualdad se sigue que

$$\int_0^r \frac{-v'}{v^{\frac{q}{p-1}}}ds \geq \int_0^r \frac{s^{\frac{1}{p-1}}}{N^{\frac{1}{p-1}}}ds$$
$$\left[\frac{-v^{1-\frac{q}{p-1}}}{1-\frac{q}{p-1}}\right]_0^r \geq \frac{(p-1)r^{\frac{-p}{p-1}}}{pN^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Así

$$v^{\frac{p-1-q}{p-1}}(r) - 1 \geq Cr^{\frac{-p}{p-1}}, \quad \text{donde} \quad C = \frac{q-p+1}{pN^{1/(p-1)}}.$$

Luego

$$\frac{1}{v(r)^{\left(\frac{q+1-p}{p-1}\right)}} \geq Cr^{\frac{-p}{p-1}}.$$

Por lo tanto

$$v(r) \leq C_2 r^{\frac{-p}{q+1-p}}.$$

De lo anterior se sigue que

$$\int_1^\infty s^{N-1}v^{q+1}ds \leq C_2^{q+1}\int_1^\infty s^{N-1}s^{\left(\frac{-p(q+1)}{q+1-p}\right)}ds,$$

y como $p < q+1 < \frac{Np}{N-p}$, $N - \frac{p(q+1)}{q+1-p} < 0$. De esto y usando el hecho de que $\int_1^\infty t^a dt < \infty$ siempre que $a < -1$ concluimos que

$$C_2^{q+1}\int_1^\infty s^{N-\frac{p(q+1)}{q+1-p}-1}ds < \infty,$$

de donde se sigue el resultado deseado. □

Lema 2.3. *Sea v una solución de (2.1)-(2.2), entonces v tiene al menos un cero en $(0,\infty)$.*

Demostración. Supongamos que v no tiene ceros. Como v es continua y $v(0) = 1$, tendríamos que $v(r) > 0$ para todo r. De otra parte de (2.1) se sigue que

$$\begin{aligned}\left(r^{N-1}v(r)v'(r)|v'(r)|^{p-2}\right)' &= \left(r^{N-1}v'(r)|v'(r)|^{p-2}\right)' v(r) + \left(r^{N-1}v'(r)|v'(r)|^{p-2}\right) v'(r)\\ &= \left(-\int_0^r s^{N-1}|v(s)|^{q-1}v(s)ds\right)' v(r) + r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}|v'(r)|^2\\ &= r^{N-1}|v'(r)|^p - r^{N-1}v^{q+1}(r).\end{aligned}$$

Integrando en $(0, r)$ la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}r^{N-1}v(r)|v'(r)|^{p-2}v'(r) &= \int_0^r s^{N-1}|v'(s)|^p ds - \int_0^r s^{N-1}v^{q+1}(s)ds\\ \int_0^r s^{N-1}(v(s))^{q+1}ds &= -r^{N-1}v(r)v'(r)|v'(r)|^{p-2} + \int_0^r s^{N-1}|v'(s)|^p ds. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Ahora, como $v > 0$ entonces de (2.1) vemos que $v' < 0$. Como $1 < p < q + 1 < \frac{Np}{N-p}$, por el Lema 2.2 tenemos que

$$\int_0^\infty s^{N-1}|v'(s)|^p ds \leq \int_0^\infty s^{N-1}(v(s))^{q+1}ds < \infty. \qquad (2.6)$$

Haciendo $r \to \infty$ en (2.5) tenemos que $-\lim\limits_{r\to\infty} r^{N-1}v(r)v'(r)|v'(r)|^{p-2}$ existe y es finito.

De otra parte, un cálculo simple y (2.1) implican que

$$\left(\frac{(p-1)r^N|v'(r)|^p}{p} + \frac{r^N v^{q+1}(r)}{q+1}\right)' = \frac{Nr^{N-1}v^{q+1}(r)}{q+1} - \frac{(N-p)}{p}r^{N-1}|v'(r)|^p. \qquad (2.7)$$

Integrando en $(0, r)$ la igualdad anterior tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{(p-1)r^N|v'(r)|^p}{p} + \frac{r^N v^{q+1}(r)}{q+1} \qquad (2.8)\\ &\qquad = \int_0^r \frac{-(N-p)|v'(s)|^p s^{N-1}}{p}ds + \int_0^r \frac{Nv^{q+1}(s)s^{N-1}}{q+1}ds,\end{aligned}$$

en la última expresión sabemos por (2.6) que las dos integrales convergen cuando $r \to \infty$, así

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{p-1}{p}r^N|v'(r)|^p + \frac{r^N v^{q+1}(r)}{q+1}\right) < \infty.$$

Sea

$$h(r) := \frac{(p-1)r^N|v'(r)|^p}{p} + \frac{r^N v^{q+1}(r)}{q+1},$$

vemos que $h(r) \geq 0$. Sea $l := \lim_{r\to+\infty} h(r) \geq 0$. Además, de (2.6)

$$\int_0^\infty \frac{h(s)}{s} ds < \infty.$$

Probemos que $l = 0$. Supongamos que no. Entonces para $\varepsilon \in (0, l)$ existe $M > 0$ tal que

$$h(s) > l - \varepsilon > 0, \quad \forall s > M, \quad \text{luego} \quad \int_M^\infty \frac{h(s)}{s} ds \quad \text{diverge},$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $l = 0$. Tomando límite cuando $r \to \infty$ en (2.8)

$$\int_0^\infty \frac{-(N-p)|v'(s)|^p s^{N-1}}{p} ds + \int_0^\infty \frac{N v^{q+1}(s) s^{N-1}}{q+1} ds = 0.$$

Luego

$$\frac{(Np)}{(N-p)(q+1)} \int_0^\infty s^{N-1} v^{q+1}(s) ds = \int_0^\infty |v'(s)|^p s^{N-1} ds.$$

Utilizando (2.6) tendríamos que $Np \leq (N-p)(q+1)$ lo cual contradice la hipótesis $q + 1 < \frac{Np}{N-p}$. Por tanto concluimos que v no puede ser positiva para todo $r \geq 0$, esto es v tiene al menos un cero positivo. □

Lema 2.4. *Sea v la solución del problema (2.1)-(2.2). Entonces v tiene infinitos ceros.*

Demostración. Por el Lema 2.3 existe $z_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v > 0$ en $[0, z_1)$ y $v(z_1) = 0$. Después de z_1 pueden ocurrir dos casos.

Caso 1: v tiene un primer mínimo local en $m_1 > z_1$ ó,

Caso 2: $v'(r) < 0$ para todo $r > z_1$.

Probemos que el **Caso 2** no es posible. Supongamos, por contradicción, que $v'(r) < 0$ para todo $r > z_1$.

Como

$$E(r) = \frac{(p-1)|v'(r)|^p}{p} + \frac{1}{q+1}|v(r)|^{q+1} \geq 0 \quad \text{y} \quad E'(r) \leq 0,$$

$$\frac{1}{q+1}|v(r)|^{q+1} \leq E(r,d) \leq E(0,d) = \frac{1}{q+1}.$$

Luego $|v| \leq 1$. Como v es acotado y $v' < 0$, se sigue que

$$\lim_{r\to\infty} v(r) = J < 0. \tag{2.9}$$

También como E es acotado y $E' \leq 0$ se sigue que $\lim_{r\to\infty} E(r,d)$ existe, luego $\lim_{r\to\infty} v'(r)$ existe y $\lim_{r\to\infty} v'(r) \leq 0$.

Afirmación: $\lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$.
Supongamos que no, así $\lim_{r\to\infty} v'(r) < 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que $-v'(r) > m > 0$ para $r > \delta$, por lo tanto

$$-v(r) + v(0) > mr \qquad \forall r > \delta,$$

luego $\lim_{r\to\infty}[-v(r)] = +\infty$. Esto contradice el hecho de que v es acotada, por tanto $\lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$.
Si en (2.1) dividimos por r^N y tomamos límite cuando $r \to +\infty$, aplicando la regla de L'Hôpital tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r\to\infty} \frac{-\displaystyle\int_0^r t^{N-1}|v(t)|^{q-1}v(t)dt}{r^N} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{-r^{N-1}|v(r)|^{q-1}v(r)}{Nr^{N-1}}. \end{aligned}$$

Así $\lim_{r\to\infty} v(r) = J = 0$. Esta contradicción con (2.9) demuestra que no puede ocurrir el **Caso 2**, esto es v tiene un primer mínimo local en $m_1 > z_1$.
Sea $v_1 = v(m_1) < 0$, luego v satisface el siguiente problema

$$\begin{cases} r^{N-1}|v'(r)|^{p-2}v'(r) &= -\displaystyle\int_{m_1}^r t^{N-1}|v(t)|^{q-1}v(t)dt \\ v(m_1) &= v_1. \end{cases}$$

Utilizando argumentos similares a los considerados en la prueba del Lema 2.3 se sigue que v tiene un segundo cero en $z_2 > z_1$, procediendo inductivamente, concluimos que v tiene infinitos ceros.

□

2.3. Un lema Auxiliar.

A continuación presentamos un lema que será usado cuando demostremos nuestro resultado principal en el capítulo 3.

Lema 2.5. *Sea $u(r,d)$ la solución del problema (1.1)-(1.2). Supongamos que $u(r,d^*)$ tiene exactamente k ceros y $\lim_{r\to\infty} u(r,d^*) = 0$. Si $|d-d^*|$ es suficientemente pequeño, entonces $u(r,d)$ tiene a lo sumo $k+1$ ceros en $[0,+\infty)$.*

Demostración. Lo que buscamos es probar que para d cercano a d^*, $u(\cdot, d)$ tiene a lo sumo $(k+1)$ ceros en $[0, \infty)$. Supongamos, por contradicción, que existe una sucesión de valores (d_j) que converge a d^* y tal que $u(\cdot, d_j)$ tiene al menos $(k+2)$ ceros en $[0, \infty)$.

Denotemos por $u_j(r)$ a la solución $u(r, d_j)$ y por z_j al $(k+1)$-cero de u_j.

Demostremos que $u(r, d_j) \to u(r, d^*)$ y $u'(r, d_j) \to u'(r, d^*)$ cuando $d_j \to d^*$, uniformemente en subconjuntos compactos de $[0, \infty)$. Esto lo probaremos en las siguientes 2 afirmaciones.

Afirmación 1. *Si* $\lim_{j\to\infty} d_j = d^*$ *entonces existen* $M_1, M_2 > 0$ *tales que*

$$|u(r, d_j)| \leq M_1 \quad y \quad |u'(r, d_j)| \leq M_2 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad y \quad \forall r \geq 0.$$

En efecto, sabemos del capítulo anterior que la función de energía E es decreciente y por tanto

$$E(r, d_j) \leq E(0, d_j) = F(u(0, d_j)) = F(d_j). \tag{2.10}$$

Como F es una función continua existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F(d_j) < F(d^*) + 1$ siempre que $j \geq N$. De (2.10)

$$\frac{(p-1)|u'(r, d_j)|^p}{p} + F(u(r, d_j)) \leq F(d^*) + 1, \quad \forall j \geq N. \tag{2.11}$$

Ahora de otra parte, sabemos que $F(u) \geq -L$ (véase (1.29)), así de (2.11) tenemos que

$$\frac{(p-1)}{p}|u'(r, d_j)|^p \leq F(d^*) + 1 + L.$$

Para $j \geq N$ se cumple que

$$|u'(r, d_j)| \leq M_2, \quad \forall r \geq 0, \quad \text{donde} \quad M_2 = \left(\frac{p(F(d^*) + 1 + L)}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Como $E(r, d^*)$ es decreciente y acotada inferiormente por $-L$ entonces $\lim_{r\to\infty} E(r, d^*)$ existe y como $\lim_{r\to\infty} u(r, d^*) = 0$ se sigue que

$$F(d^*) = E(0, d^*) > \lim_{r\to\infty} E(r, d^*) \geq 0.$$

Así $F(d^*) > 0$. De **(H4)** y **(H5)**, $d^* > \gamma$, luego por el Lema 1.7 tenemos que $|u(r, d_j)| \leq d_j$ y como $d_j \to d^*$, tenemos que $|u(r, d_j)| < d^* + 1 := M_1$ para j suficientemente grande. Se concluye así la prueba de la **Afirmación 1**.

La siguiente afirmación demuestra la dependencia continua de la condición inicial de $u(r,d)$ y $u'(r,d)$.

Afirmación 2. *$u(r,d_j) \to u(r,d^*)$ y $u'(r,d_j) \to u'(r,d^*)$ uniformemente en subconjuntos compactos de $[0,+\infty)$.*

En efecto, de la Afirmación 1 se sigue que $|u(r,d_j)| \leq M_1$ y $|u'(r,d_j)| \leq M_2$. Por lo tanto $\{u(r,d_j)\}$ es una sucesión acotada y equicontinua, por el Teorema de Arzela-Ascoli existe una subsucesión que también llamaremos $\{u(r,d_j)\}$ tal que $u(r,d_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} h(r)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[0,+\infty)$.
Dado que $u_j(r) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} h(r)$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[0,+\infty)$, y f es localmente Lipschitz entonces $f(u_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} h$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[0,+\infty)$ y como

$$|u_j'(r)|^{p-2}u_j'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r t^{N-1}f(u_j(t))dt$$

tenemos que

$$\lim_{j\to\infty}\left\{|u_j'(r)|^{p-2}u_j'(r)\right\} = \lim_{j\to\infty}\frac{-1}{r^{N-1}}\int_0^r t^{N-1}f(u_j(t))dt \;=\; \frac{-1}{r^{N-1}}\int_0^r t^{N-1}f(h(t))dt.$$

Por tanto, $|u_j'(r)|^{p-2}u_j'(r)$ converge uniformemente sobre compactos de $[0,+\infty)$. Así $u_j'(r)$ converge uniformemente a una función $g(r)$. Probemos ahora que $g(r) = h'(r)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int_0^r u_j'(t)dt &= \int_0^r g(t)dt\\
\lim_{j\to\infty}(u_j(r)-u_j(0)) &= \int_0^r g(t)dt\\
h(r)-h(0) &= \int_0^r g(t)dt\\
h'(r) &= g(r).
\end{aligned}$$

Notemos que $h(0) = \lim\limits_{j\to\infty} u_j(0) = \lim\limits_{j\to\infty} u(0,d_j) = \lim\limits_{j\to\infty} d_j = d^*$, luego por la unicidad de la solución del problema (1.1)-(1.2) tenemos que $h(r) = u(r,d^*)$, y

$$u(r,d_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u(r,d^*) \quad \text{y} \quad u'(r,d_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u'(r,d^*).$$

Se concluye así la prueba de la Afirmación 2.
Sea t_j el $(k+2)$-ésimo cero de u_j. Entonces existe un extremo local l_j de $u(\cdot,d_j)$ con

$z_j < l_j < t_j$. Del Lema 1.9 sabemos que $u'(t_j) \neq 0$, entonces

$$F(u(l_j)) = E(l_j, d_j) \geq E(t_j, d_j) = \frac{p-1}{p}|u'(t_j)|^p > 0.$$

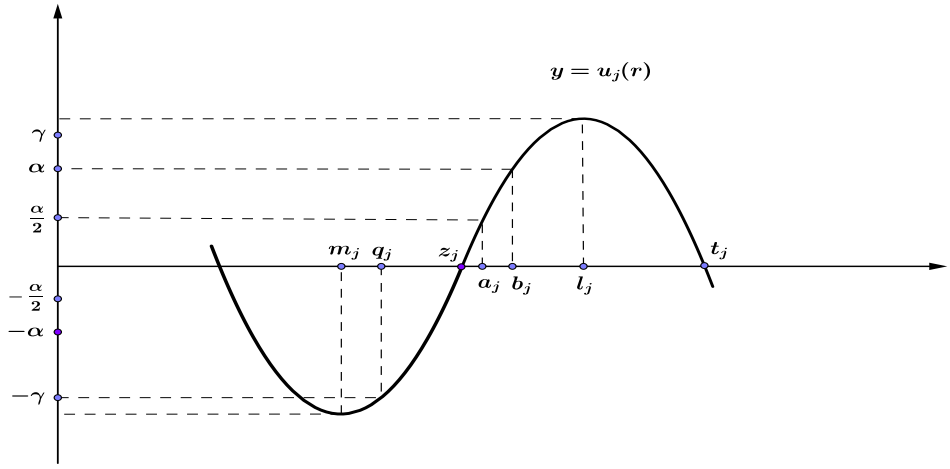
De **(H5)** y usando el hecho que F es una función par tenemos que $|u(l_j)| > \gamma$. Ahora, por la continuidad de u y el hecho de que $0 < \alpha < \gamma$, podemos garantizar la existencia de dos números b_j y a_j tales que:
b_j es el número más pequeño mayor que z_j tal que $|u_j(b_j)| = \alpha$ y
a_j es el número más pequeño mayor que z_j tal que $|u_j(a_j)| = \frac{\alpha}{2}$.
Sea m_j el extremo local entre el k-ésimo y el $(k+1)$-ésimo cero de u_j. Así tenemos que, $m_j < z_j < a_j < b_j$ y como la energía es decreciente $E(z_j, d_j) \leq E(m_j, d_j)$. Dado que $u_j'(m_j) = 0$, $u_j(z_j) = 0$, $u'(z_j) \neq 0$ y $F(u_j(z_j)) = 0$, se sigue

$$0 < \frac{(p-1)}{p}|u_j'(z_j)|^p \leq F(u_j(m_j)).$$

Nuevamente por **(H5)** y la paridad de F, $|u_j(m_j)| > \gamma$. Por tanto existe el número más grande q_j menor que z_j tal que $|u_j(q_j)| = \gamma$, de donde

$$m_j < q_j < z_j < a_j < b_j < l_j < t_j.$$

La siguiente gráfica nos permite visualizar la situación planteada



Afirmación 3. *Existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que $b_j - a_j \geq k_1 > 0$, donde k_1 es independiente de j para j suficientemente grande y $\xi_2 - \xi_1 \geq k_2 > 0$ donde ξ_1 y ξ_2 son dos ceros consecutivos de u_j.*

En efecto, como la energía es decreciente y $d_j \to d^*$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $j > N_2$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
E(r, d_j) = \frac{p-1}{p}|u_r'(t)|^p + F(u_j(r)) \leq E(0, d_j) = F(d_j) \leq F(d^*) + 1 \\
\frac{p-1}{p}|u_j'(r)|^p \leq F(d^*) + 1 - F(u_j(r)) \\
\frac{|u_j'(r)|}{(F(d^*) + 1 - F(u_j(r)))^{1/p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} \qquad (2.12) \\
\int_{a_j}^{b_j} \frac{|u_j'(t)|dt}{(F(d^*) + 1 - F(u_j(t)))^{1/p}} \leq \int_{a_j}^{b_j} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} dt \\
\int_{\alpha/2}^{\alpha} \frac{ds}{(F(d^*) + 1 - F(s))^{1/p}} \leq (b_j - a_j)\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} \\
(b_j - a_j) \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int_{\alpha/2}^{\alpha} \frac{ds}{(F(d^*) + 1 - F(s))^{1/p}} =: k_1 > 0.
\end{aligned}
$$

Ahora probemos la segunda parte de la afirmación. En primer lugar en vista del Lema 1.8, existe m el extremo local entre ξ_1 y ξ_2, tal que $|u_j(m)| > \gamma$. De (2.12)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{|u_j'(t)|}{(F(d^*) + 1 - F(u_j(t)))^{1/p}} \leq 1 \\
\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{\xi_1}^{m} \frac{|u_j'(t)|dt}{(F(d^*) + 1 - F(u_j(t)))^{1/p}} \leq m - \xi_1 \\
\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{0}^{\gamma} \frac{ds}{(F(d^*) + 1 - F(s))^{1/p}} \leq m - \xi_1. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

De manera similar obtenemos que

$$
\xi_2 - m \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{0}^{\gamma} \frac{ds}{(F(d^*) + 1 - F(s))^{1/p}}. \qquad (2.14)
$$

De (2.13) y (2.14) concluimos que

$$
\xi_2 - \xi_1 \geq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{0}^{\gamma} \frac{ds}{(F(d^*) + 1 - F(s))^{1/p}} =: k_2 > 0.
$$

Se concluye así la prueba de la Afirmación 3.

Sean y^* el k-ésimo cero de $u(r,d^*)$ y y_j el k-ésimo cero de u_j. De la Afirmación 2 se sigue que $u(r,d_j) \longrightarrow u(r,d)$ uniformemente en $\left[0, y^* + \frac{k_2}{2}\right]$, luego para j suficientemente grande se tiene que u_j tendrá al menos $k-1$ ceros en $\left[0, y^* + \frac{k_2}{2}\right]$, ahora de la afirmación 3 sabemos que entre dos ceros consecutivos al menos hay una distancia de k_2 por lo que se concluye que u_j tiene exactamente k ceros en $\left[0, y^* + \frac{k_2}{2}\right]$, para j suficientemente grande, mas aún la convergencia uniforme de $u(\cdot,d_j)$ a $u(\cdot,d^*)$ en $\left[0, y^* + \frac{k_2}{2}\right]$ implica que $y_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y^*$.

Afirmación 4. *$z_j \longrightarrow \infty$ cuando $j \to \infty$.*

En efecto, razonemos por el absurdo, supongamos que $|z_j| \leq A$. Entonces existe una subsucesión $\{z_{j_k}\}$ tal que $z_{j_k} \to z$ para algún $z \in [0,A]$. Como $u(r,d_{j_k}) \to u(r,d^*)$ en $[0,A]$ se sigue que, $u(z,d^*) = 0$. Como $z_{j_k} > y_{j_k}$ y $y_{j_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y^*$, entonces $z \geq y^*$.
De otra parte como $u(r,d^*)$ tiene exactamente k-ceros, entonces $z = y^*$. Así $u_j(y_j) = 0 = u_j(z_j)$, luego por el Teorema del Valor Medio existe $w_j \in (y_j, z_j)$ tal que $u'(w_j) = 0$ y como $u_j \to u$ uniformemente en $[0,A]$ y $w_j \to y^*$, se sigue que $u'(y^*) = 0$. Por el Lema 1.9 tendríamos que $u \equiv 0$, lo cual contradice que u tenga exactamente k-ceros, lo que concluye la prueba de la Afirmación.
Ahora probemos que $\{q_j\}$ es una sucesión acotada. En efecto, sea m^* el extremo local de $u(r,d^*)$ que ocurre después de y^*, como $u_j \to u$ y $u_j' \to u'$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[y^*, m^*+1]$, vemos que u_j' debe ser cero en algún punto de $[y^*, m^*+1]$ para j grande. Luego existe m_j con $y_j < m_j < m^*+1$ tal que $u_j'(m_j) = 0$. Estimemos $q_j - m_j$ en $[m_j, q_j]$. Asumamos sin perdida de generalidad que $u_j(q_j) = -\gamma$ y $u_j(m_j) < -\gamma$, luego $u_j' > 0$ y $|u_j| \geq \gamma > \beta$ en $[m_j, q_j]$ entonces $-f(u(t)) \geq C > 0$ para $t \in (m_j, q_j)$. Así para todo $r \in (m_j, q_j)$

$$\begin{aligned} -r^{N-1}|u_j'(r)|^{p-2}u_j'(r) &= -\int_{m_j}^{r} \left(t^{N-1}|u_j'(t)|^{p-2}u_j'(t)\right)' dt \\ &= \int_{m_j}^{r} t^{N-1} f(u_j(t))dt, \end{aligned}$$

entonces

$$r^{N-1}|u_j'|^{p-2}u_j' = \int_{m_j}^{r} -t^{N-1} f(u_j(t))dt$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{C\left(r^N - m_j^N\right)}{N} \\
&\geq \frac{C}{N}\left(r - m_j\right) r^{N-1}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior

$$
\begin{aligned}
(u_j')^{p-1} &\geq \frac{C}{N}(r - m_j) \\
(u_j') &\geq \left(\frac{C}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} (r - m_j)^{\frac{1}{p-1}} \\
\int_{m_j}^{q_j} u_j'(t)dt &\geq \left(\frac{C}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_{m_j}^{q_j} (t - m_j)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
u_j(q_j) - u_j(m_j) &\geq \left(\frac{C}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_{m_j}^{q_j} (t - m_j)^{\frac{1}{p-1}} dt \\
|u_j(m_j)| - \gamma &\geq \left(\frac{C}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_{m_j}^{q_j} (t - m_j)^{\frac{1}{p-1}} dt
\end{aligned}
$$

entonces por el Lema 1.7

$$
d_j - \gamma \geq \left(\frac{C}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_{m_j}^{q_j} (t - m_j)^{\frac{1}{p-1}} dt.
$$

Usando el hecho que $d_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} d^*$ y dado que j es grande tenemos que

$$
d^* + 1 \geq d_j - \gamma \geq \left(\frac{C}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{p-1}{p}\right) (q_j - m_j)^{\frac{p}{p-1}}.
$$

Ahora como $m_j < m^* + 1$, simplificando llegamos a que $\{q_j\}$ es una sucesión acotada.

Afirmación 5. *Existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|u_j(r)| < \gamma$ para todo $r > z_j$ y $j > N_0$.*

En efecto, razonemos por contradicción. Sea c_j el menor número tal que $c_j > z_j$ y $|u_j(c_j)| = \gamma$. Como $0 < |u_j| < \gamma$ en (z_j, c_j), entonces $F(u_j) \leq 0$ en (z_j, c_j), por lo tanto existen a_j y b_j tales que $z_j < a_j < b_j < c_j$ con $|u_j(a_j)| = \frac{\alpha}{2}$ y $|u_j(b_j)| = \alpha$ y como F es decreciente en $[\frac{\alpha}{2}, \alpha]$, $F(\frac{\alpha}{2}) \geq F(u_j)$ para todo $\frac{\alpha}{2} \leq u_j \leq \alpha$.
Ahora notemos que

$$
\begin{aligned}
&\left(r^{\frac{p(N-1)}{p-1}} E(r, d_j)\right)' \\
&= \frac{p(N-1)}{p-1} r^{\frac{pN-2p+1}{p-1}} E(r) + r^{\frac{p(N-1)}{p-1}} E'(r)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{p(N-1)}{p-1} r^{\frac{pN-2p+1}{p-1}} \left[\frac{(p-1)|u'(r)|^p}{p} + F(u_j(r)) \right] - r^{\frac{pN-2p+1}{p-1}} (N-1)|u'(r)|^p$$
$$= \frac{p(N-1)F(u_j(r))r^{\frac{Np-2p+1}{p-1}}}{p-1}. \tag{2.15}$$

Integrando en (q_j, c_j) la igualdad anterior y como
$|u_j(q_j)| = |u_j(c_j)| = \gamma$, $F(u_j(q_j)) = 0 = F(u_j(c_j))$, se sigue que

$$0 \leq \frac{c_j^{\frac{p(N-1)}{p-1}} |u_j'(c_j)|^p (p-1)}{p} = \frac{q_j^{\frac{p(N-1)}{p-1}} |u_j'(q_j)|^p (p-1)}{p} + \int_{q_j}^{c_j} \frac{p(N-1)F(u_j(t))t^{\frac{Np-2p+1}{p-1}}}{p-1} dt. \tag{2.16}$$

Como q_j es acotado existe una subsucesión, que denotamos igual, (q_j) tal que $q_j \to q^*$, donde $q^* < \infty$, así $u(q^*, d^*) = \gamma$. Como $u_j' \to u'$ uniformemente en $[0, q^*+1]$, entonces $u_j'(q_j) \to u'(q^*, d^*)$. De (2.16) se sigue que

$$\liminf_{j\to\infty} \int_{q_j}^{c_j} t^{\frac{(N-2)p+1}{p-1}} F(u_j(t))dt \geq \frac{-(q^*)^{\frac{p(N-1)}{p-1}} |u'(q^*, d^*)|^p (p-1)}{p} > -\infty. \tag{2.17}$$

Ahora como $z_j \to \infty$ y $z_j < a_j < b_j$, entonces $a_j \longrightarrow \infty$.
Como $q_j < a_j < b_j < c_j$, por la Afirmación 3

$$\begin{aligned}
\int_{q_j}^{c_j} t^{\frac{(N-2)p+1}{p-1}} F(u_j(t))dt &\leq \int_{a_j}^{b_j} t^{\frac{(N-2)p+1}{p-1}} F(u_j(t))dt \\
&\leq F\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(b_j^{\frac{(N-1)p}{p-1}} - a_j^{\frac{(N-1)p}{p-1}} \right) \left(\frac{p-1}{(N-1)p} \right) \\
&\leq F\left(\frac{\alpha}{2}\right) a_j^{\frac{(N-1)p}{p-1}-1} (b_j - a_j) \left(\frac{p-1}{(N-1)p} \right) \\
&\leq k_1 F\left(\frac{\alpha}{2}\right) a_j^{\frac{(N-1)p}{p-1}-1} \left(\frac{p-1}{(N-1)p} \right) \longrightarrow -\infty,
\end{aligned}$$

cuando $j \to +\infty$. Se sigue que

$$\int_{q_j}^{c_j} t^{\frac{(N-2)p+1}{p-1}} F(u_j(t))dt \to -\infty,$$

pero esto contradice (2.17). Por tanto $|u_j(r)| < \gamma$ para j grande y $r > z_j$. Así queda demostrada la Afirmación 5.

Retornemos ahora a la demostración del Lema 2.5. Supongamos que u_j tiene otro cero en $t_j > z_j$, entonces existe un extremo local para u_j en un valor s_j tal que $z_j < s_j < t_j$. Como la energía es decreciente se sigue que $E(t_j) \leq E(s_j)$. Por los

Lemas 1.8 y 1.9 se tiene que

$$0 < \frac{(p-1)|u_j'(t_j)|^p}{p} \leq F(u_j(s_j)).$$

De **(H5)** se sigue que $|u_j(s_j)| > \gamma$. Luego de la Afirmación 5, para j suficientemente grande y para todo $r > z_j$ tenemos que $|u_j(r)| < \gamma$, así $|u_j(s_j)| < \gamma$, lo cual es una contradicción, por tanto, no existe un cero de u_j mayor que z_j.

$\square$

Capítulo 3

Prueba del Teorema Principal

En este capítulo probaremos el Teorema A, es decir demostraremos que existen soluciones del problema (1.1)-(1.2) con un número prescrito k de ceros ($k = 0, 1, 2, ...$).

3.1. Prueba del Teorema A

Sea

$$S_0 = \{d \geq \gamma : u(r, d) > 0 \quad \text{para todo} \quad r \geq 0\}.$$

Afirmación. $S_0 \neq \emptyset$.

Demostración. Probemos que $\gamma \in S_0$. En efecto, si $d = \gamma$, $u(0, \gamma) = \gamma > 0$. Así

$$E(0, r) = \frac{p-1}{p}|u^{'}(0)|^p + F(u(0)) = 0.$$

Como E es decreciente, $E(r) \leq 0$ para todo $r \geq 0$. Probemos que $E(r) < 0$ para todo $r > 0$. En efecto, supongamos lo contrario, esto es, $E(r_1) = 0$ para algún $r_1 > 0$. Como E es decreciente

$$0 = E(0, \gamma) \geq E(r, \gamma) \geq E(r_1, \gamma) = 0, \qquad \forall r \in (0, r_1),$$

luego $E(r, \gamma) = 0$ para todo $r \in [0, r_1]$. Por tanto $E'(r, \gamma) = 0$ para todo $r \in [0, r_1]$. Luego $u'(r, \gamma) = 0$ para todo $r \in [0, r_1]$, así $u(r, \gamma) = \gamma$ para todo $r \in [0, r_1]$, lo cual contradice el Lema 1.7, por tanto $E(r) < 0$ para todo $r > 0$.

Demostremos ahora que $u(r,\gamma) > 0$ para todo $r \geq 0$. Supongamos que existe $t_0 > 0$ tal que $u(t_0,\gamma) = 0$, luego

$$E(t_0,\gamma) = \frac{p-1}{p}|u'(t_0,\gamma)|^p \geq 0,$$

lo cual es una contradicción con lo demostrado arriba, ya que $E(t_0,\gamma) < 0$. Por tanto concluimos que $u(r,\gamma)$ es positiva para todo $r \in [0,\infty)$ y así $\gamma \in S_0$. □

Afirmación. *S_0 está acotado superiormente.*

Demostración. Razonemos por contradicción. Supongamos que S_0 no está acotado superiormente, luego existe una sucesión (d_n) en S_0 tal que $d_n \to \infty$. Definamos $\lambda_n = d_n^{\frac{q-p+1}{p}}$, así $\lambda_n \to \infty$. Del Lema 2.1, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\lambda_n} = v$ uniformemente en subconjuntos compactos de $[0,\infty)$ donde v es solución de (2.1)-(2.2). Por el Lema 2.3, v tiene un cero, entonces para n suficientemente grande tendríamos que u_{λ_n} tiene un cero. Se sigue que $u(r,d_n)$ tiene un cero para n suficientemente grande lo cual es una contradicción ya que $d_n \in S_0$. Por tanto S_0 está acotado superiormente. □

De las dos afirmaciones anteriores garantizamos la existencia de $d_0 := \sup S_0$.

Lema 3.1. *$d_0 \in S_0$.*

Demostración. Como $d \geq \gamma$, para todo $d \in S_0$, se sigue que $d_0 \geq \gamma$. Sólo resta probar que $u(r,d_0) > 0$ para todo $r \in [0,\infty)$.
Supongamos, por contradicción, que exista $r_0 > 0$ tal que $u(r_0,d_0) < 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $d_n \in S_0$ tal que $d_n + \frac{1}{n} > d_0$. Por la dependencia continua de las condiciones iniciales, tenemos que $u(r_0,d_n) < 0$ para n suficientemente grande, lo cual es una contradicción pues $d_n \in S_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos demostrado que $u(r,d_0) \geq 0$ para todo $r \in [0,\infty)$.
Supongamos que existe $r_1 > 0$ tal que $u(r_1,d_0) = 0$. Luego u tendría un mínimo en r_1 y como $u \in C^1([0,+\infty))$, $u'(r_1,d_0) = 0$. Por el Lema 1.9, $u \equiv 0$, lo cual es una contradicción ya que $u(0) = d_0 > 0$, por tanto $u(\cdot,d_0)$ es positiva en $[0,\infty)$, así $d_0 \in S_0$. □

Sea $d > d_0$. Denotemos por $z_1(d)$ el primer cero de $u(\cdot,d)$. Notemos que para $d > d_0$, $u(r,d)$ tiene al menos un cero, ya que $d \notin S_0$. Es interesante saber que ocurre con $z_1(d)$ cuando $d \to d_0^+$, esta inquietud se resuelve en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. $\lim_{d \to d_0^+} z_1(d) = \infty$.

Demostración. Razonemos por contradicción, supongamos que $\lim_{d \to d_0^+} z_1(d) = z_{d_0} < \infty$. Como $u(r,d) \to u(r,d_0)$ uniformemente en compactos cuando $d \to d_0$, esto implica que $u(z_{d_0}, d_0) = \lim_{d \to d_0} u(z_1(d), d)$. Luego $u(z_{d_0}, d_0) = 0$, sin embargo por el Lema 3.1, $u(z_{d_0}, d_0) > 0$. Esta contradicción demuestra que $\lim_{d \to d_0^+} z_1(d) = \infty$. □

Nuestro objetivo ahora será probar que $u(r, d_0)$ decae a cero cuando $r \to \infty$. Para ello es necesario primero demostrar ciertos resultados sobre el comportamiento de $u(\cdot, d_0)$ y $E(\cdot, d_0)$.

Proposición 3.2. $E(r, d_0) \geq 0$ *para todo* $r \geq 0$.

Demostración. Supongamos lo contrario, esto es supongamos que existe $r_0 > 0$ tal que $E(r_0, d_0) < 0$. Por la continuidad de E existe $\delta > 0$ tal que $E(r_0, d) < 0$ para todo $d \in (d_0, d_0 + \delta)$. De otra parte como $d > d_0$, entonces $u(r,d)$ tiene un primer cero en $z_1(d)$, así $F(u(z_1, d)) = F(0) = 0$.

$$E(z_1(d), d) = \frac{p-1}{p} |u^{'}(z_1, (d))|^p \geq 0.$$

Como E es decreciente, entonces $z_1(d) \leq r_0$, lo cual contradice la Proposición 3.1, por lo tanto $E(r, d_0) \geq 0$ para todo $r \geq 0$. □

Lema 3.2. $u^{'}(r, d_0) < 0$ *para todo* $r \in (0, +\infty)$.

Demostración. Primero probemos que u es decreciente en $(0, \epsilon)$, para algún $\epsilon > 0$. Sabemos que

$$r^{N-1} |u^{'}|^{p-2} u^{'} = - \int_0^r s^{N-1} f(u(s)) ds.$$

Dividiendo ambos lados de la igualdad por r^N, tomando limite cuando $r \to 0^+$, y usando la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0^+} \frac{|u^{'}|^{p-2} u^{'}}{r} &= \lim_{r \to 0^+} \frac{-1}{r^N} \int_0^r s^{N-1} f(u(s)) ds \\ &= - \lim_{r \to 0^+} \frac{f(u(r))}{N} = - \frac{f(u(0))}{N} = - \frac{f(d_0)}{N} < 0. \end{aligned}$$

La ultima desigualdad es cierta, ya que $f(d_0) > 0$ puesto que $d_0 \geq \gamma > \beta$.
De lo anterior se sigue que existe $\epsilon > 0$, tal que $u^{'}(r) < 0$ para $r \in (0, \epsilon)$.

Sea $[0, R_{d_0}]$ el intervalo máximal donde $u^{'} < 0$ en $(0, R_{d_0})$. Se presentan dos posibles casos:

Caso 1: Si $R_{d_0} = \infty$, entonces $u^{'} < 0$ en $(0, \infty)$, y con esto habríamos terminado la prueba del lema.

Caso 2: Si $R_{d_0} < \infty$, entonces como u' es continua tenemos que $u^{'} < 0$ en $(0, R_{d_0})$ y $u^{'}(R_{d_0}) = 0$.

Afirmación. $0 < u(R_{d_0}) \leq \beta$.

Demostración. Supongamos que $u(R_{d_0}) > \beta$, así $f(u(R_{d_0})) > 0$. Por la continuidad de $f(u)$, existe $\delta > 0$ tal que $f(u)$ es positiva en $(R_{d_0} - \delta, R_{d_0})$. Para $r \in (R_{d_0} - \delta, R_{d_0})$ se cumple que

$$\begin{aligned} -\int_r^{R_{d_0}} \left(t^{N-1}|u^{'}(t)|^{p-2}u^{'}(t)\right)^{'} &= \int_r^{R_{d_0}} t^{N-1}f(u(t))dt \\ -\left[R_{d_0}^{N-1}|u^{'}(R_{d_0})|^{p-2}u^{'}(R_{d_0}) - r^{N-1}|u^{'}(r)|^{p-2}u^{'}(r)\right] &= \int_r^{R_{d_0}} t^{N-1}f(u(t))dt \\ r^{N-1}|u^{'}(r)|^{p-2}u^{'}(r) &= \int_r^{R_{d_0}} t^{N-1}f(u(t))dt > 0. \end{aligned}$$

Así $u^{'}(r) > 0$ para $r \in [R_{d_0} - \delta, R_{d_0})$, pero esto contradice la suposición $u^{'} < 0$ en $(0, R_{d_0})$. Por lo tanto $0 < u(R_{d_0}) \leq \beta$.

La afirmación anterior implica que $F(u(R_{d_0})) < 0$. Como $u^{'}(R_{d_0}) = 0$ se sigue que

$$E(R_{d_0}, d_0) = F(u(R_{d_0})) < 0,$$

lo que contradice la Proposición 3.2. Por tanto $u^{'}(r, d_0) < 0$ para todo $r > 0$.

□

Como $u(r, d_0) > 0$ y $u^{'}(r, d_0) < 0$ en $(0, \infty)$, se sigue que $\lim\limits_{r\to\infty} u(r, d_0)$ existe.

Lema 3.3. $\lim\limits_{r\to\infty} u(r, d_0) = U \geq 0$, *donde U es un cero no-negativo de f.*

Demostración. Como $E(r, d_0)$ es decreciente y está acotada inferiormente por cero tenemos que $\lim\limits_{r\to\infty} E(r, d_0) =: E < \infty$. Además,

$$\frac{p-1}{p}|u^{'}(r, d_0)|^p = E(r, d_0) - F(u(r, d_0)).$$

Como el límite cuando $r \to \infty$ de ambos términos de la derecha existe, se sigue que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{p-1}{p}|u^{'}(r)|^p = E - F(U).$$

Así, $\lim_{r\to\infty} |u^{'}(r)|$ existe. Afirmamos que $\lim_{r\to\infty} |u^{'}(r)| = 0$. En efecto, supongamos que esta afirmación es falsa, esto es, $\lim_{r\to\infty} |u^{'}(r)| = \mathfrak{L} > 0$. Por lo tanto existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|u^{'}(r)| > \frac{\mathfrak{L}}{2}, \qquad \forall r \geq R. \tag{3.1}$$

Como $|u^{'}(r)| = -u^{'}(r)$, integrando (3.1) en el intervalo (R, r), se tiene que:

$$\int_R^r -u^{'}(t)dt > \int_R^r \frac{\mathfrak{L}}{2}dt,$$

entonces

$$d_0 \geq u(R) \geq u(R) - u(r) > \frac{\mathfrak{L}}{2}(r-R) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

lo cual es una contradicción, pues $d_0 < \infty$. Por tanto $\lim_{r\to\infty} |u^{'}(r)| = 0$, así $\lim_{r\to\infty} u^{'}(r) = 0$.
Como

$$\frac{|u^{'}(r)|^{p-2}u^{'}(r)}{r} = -\frac{\displaystyle\int_0^r t^{N-1}f(u(t))dt}{r^N},$$

por la regla de L'Hospital se sigue que

$$0 = \lim_{r\to\infty} \frac{|u^{'}(r)|^{p-2}u^{'}(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{-\displaystyle\int_0^r t^{N-1}f(u(t))dt}{r^N} = \lim_{r\to\infty} \frac{-r^{N-1}f(u(r))}{Nr^{N-1}} = \frac{-f(U)}{N}.$$

Luego $f(U) = 0$, por lo tanto U es un cero no negativo de f. □

Lema 3.4. $U = 0$.

Demostración. Notemos que al tomar límite cuando $r \to \infty$ en

$$E(r, d_0) = \frac{p-1}{p}|u^{'}(r, d_0)|^p + F(u(r, d_0)),$$

obtenemos que $E = F(U)$. De otra parte por la Proposición 3.2, $E \geq 0$, luego $F(U) \geq 0$. Supongamos que $F(U) > 0$, luego $U > \gamma$, pero por el Lema 3.3 $f(U) = 0$, entonces se debe tener que $U \leq \beta < \gamma$, lo cual es una contradicción, por tanto $F(U) = 0$. Así necesariamente $U = 0$ □

Hemos demostrado hasta este momento la existencia de una solución $u(r, d_0)$ para el problema (1.1)-(1.2), tal que $u(\cdot, d_0) > 0$ en $[0, +\infty)$ y $\lim\limits_{r\to\infty} u(r, d_0) = 0$.
A continuación consideremos el conjunto

$$S_1 := \{d > d_0 : u(\cdot, d) \quad \text{tiene exactamente un cero en} \quad [0, \infty)\}.$$

Afirmación: *$S_1 \neq \emptyset$ y S_1 está acotado superiormente.*

Demostración. En efecto, sea $d > d_0$, luego $d \notin S_0$, es decir $u(r, d)$ tiene al menos un cero. De otra parte por el Lema 2.5 si d es suficientemente cercano a d_0, entonces $u(r, d)$ tiene a lo sumo un cero, por lo tanto $u(r, d)$ tiene exactamente un cero. Así, $S_1 \neq \emptyset$.
Probemos ahora que S_1 está acotado superiormente. Razonemos por el absurdo, supongamos que existe una sucesión $\{d_n\}$ en S_1 tal que $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Definamos $\lambda_n = d_n^{\frac{q-p+1}{p}}$, así $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Del Lema 2.1 se sigue que $u_{\lambda_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ uniformemente en subconjuntos compactos de $[0, \infty)$, donde v es solución de (2.1)-(2.2). Por el Lema 2.4 v tiene infinitos ceros en $[0, \infty)$, en particular v tiene dos ceros en el intervalo $[0, K]$, con $K < \infty$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que u_{λ_n} tiene dos ceros en el intervalo $[0, K + 1]$ para $n \geq N$. Se sigue que $u(r, d_n)$ tiene dos ceros en $[0, \infty)$ para $n \geq N$, lo cual es una contradicción ya que $d_n \in S_1$. Por tanto S_1 está acotado superiormente. $\square$

Sea $d_1 := \sup S_1$. De manera similar a como se hizo con $u(\cdot, d_0)$, se demuestra que $u(\cdot, d_1)$ tiene exactamente un cero en $[0, \infty)$ y $\lim\limits_{r\to\infty} u(r, d_1) = 0$.
Continuando este proceso de manera inductiva, definimos el conjunto

$$S_k := \{d > d_{k-1} : u(\cdot, d) \quad \text{tiene exactamente k ceros en} \quad [0, \infty)\}.$$

Luego se demuestra que $S_k \neq \emptyset$ y que S_k es acotado superiormente, lo cual garantiza la existencia de $d_k := \sup S_k$. Seguidamente se prueba $u(\cdot, d_k)$ tiene exactamente k ceros en $[0, +\infty)$ y $u(r, d_k) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Se concluye así la demostración del Teorema A.

■

Referencias

[1] S. Pudipeddi, *Localized Radial Solutions for a Nonlinear p-Laplacian Equation in* $\mathbb{R}^N$, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 20, 1-23 (2008).

[2] A. Castro and A. Kurepa, *Infinitely Many Radially Symmetric Solutions to a Superlinear Dirichlet Problem in a Ball*, Proceedings of American Mathematical Society, Volume 101, Number 1, 57-64 (1987).

[3] J. Iaia, and H. Warchall, *Nonradial Solutions of a Semilinear Elliptic Equation in Two Dimensions*, Journal of Differential Equations 119, No.2, 533-558 (1995).

[4] K. Mcleod, W.C.Troy and F.B. Weissler, *Radial solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *with Prescribed Numbers of Zeros*, Journal of Differential Equations 83, 368-378 (1990).

[5] F. Gazzola, J. Serrin and M. Tang, *Existence of Ground States And Free Boundary Problems For Quasi-linear Elliptic Operators*, Advances in Differential Equations, Volume 5, 1-30 (2000).

[6] E. Calzolari, R. Filippucci and P. Pucci, *Existence of Radial Solutions for the p-Laplacian Elliptic Equations With Weights*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Volume 15, 447-479 (2006).

[7] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Instituto de Matemática Pura y Aplicada, (1979).