



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

ANALISIS DE BIFURCACIONES DE CODIMENSIÓN-2, BT Y GH EN UN MODELO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

Juan Pablo Muñoz Diaz

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas.
Manizales, Colombia
2018

Análisis de bifurcaciones de codimensión-2, BT y GH en un modelo de desarrollo sostenible

Juan Pablo Muñoz Díaz

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias - Matemática Aplicada

Director:
Ph.D. Gerard Olivar Tost

Línea de Investigación:
Desarrollo sostenible
Grupo de Investigación:
ABC Dynamics

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas.
Manizales, Colombia
2018

A mi familia

“El conocimiento no es una vasija que se llena,
sino un fuego que se enciende”

Plutarco

Agradecimientos

Me llena de orgullo agradecer a la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, por ser mi Alma Mater en mi formación como matemático. A mi familia, por la paciencia y confianza en mi hacer profesional. A mi amiga Laura Victoria Rodríguez Restrepo, matemática de la Universidad Nacional de Colombia, por su motivación constante que me permitió concluir esta investigación. A la profesora María del Pilar Hurtado Parra, magister en lingüística y profesional de apoyo de la Universidad Nacional de Colombia, por la orientación y aprendizaje para la correcta redacción de este documento. A mi tutor de tesis el profesor titular Gerard Olivar Tost de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales por sus consejos, orientación y libertad para el oficio investigativo. Finalmente al grupo de investigación ABC Dynamics de la Universidad Nacional de Colombia por los aportes de gran ayuda para alcanzar los objetivos de este trabajo investigativo.

Resumen

El presente trabajo describe un modelo de recursos, población y capital económico, de una sociedad basada en actividades económicas primarias. El objetivo del trabajo es encontrar los escenarios de sostenibilidad del sistema, en los cuales las tres variables del modelo conserven el balance sostenible. Un factor de subsidio es introducido para reactivar la economía en la comunidad. La importancia de los parámetros de tasa neta de crecimiento poblacional y crecimiento natural del recurso es analizada a través de resultados de simulación numérica obtenidos por CL-Matcont. Los resultados describen escenarios de sostenibilidad cuando la tasa neta de crecimiento poblacional y crecimiento natural del recurso renovable no aumentan más allá de ciertos umbrales. Las conclusiones se derivan con la ayuda de un diagrama de bifurcaciones de codimensión-2 donde aparece un punto Bogdanov-Takens (BT).

Palabras clave: Desarrollo sostenible; Estabilidad; Bifurcaciones; Hopf; Bogdanov - Takens.

Abstract

Analysis of codimension-2 bifurcations BT and GH, over a sustainable development model

The present work describes a resource, population and economic model in a society based on primary economic activities. The objective of the work is to find the system's scenarios of sustainability where the three variables of the model do preserve a sustainable balance. A subsidy factor is introduced to reactivate the economy in the community. The importance of the net rate of population growth and natural growth parameter of the resource is analyzed through numerical simulation obtained by CL-Matcont. The results describe scenarios of sustainability when the net rate of population growth and natural growth of the renewable resource do not increase beyond certain thresholds. The conclusions are derived with the help of a codimension-2 bifurcation diagram where a Bogdanov-Takens (BT) point appears.

Keywords: Sustainable development; Stability; Bifurcations; Hopf; Bogdanov - Takens.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xiii
1. Introducción	1
2. Marco teórico	5
2.1. Desarrollo sostenible	5
2.2. Conceptos matemáticos	6
2.2.1. Equilibrios y estabilidad.	7
2.2.2. Bifurcaciones	7
3. Marco conceptual en modelamiento de sistemas, enfocados al desarrollo sostenible	11
3.1. Modelo desacoplado 3-Dimensional (MD3D)	11
3.1.1. Modelo productivo de D'Alessandro	11
3.1.2. Modelo poblacional de Brander y Taylor	12
3.1.3. Producción económica de Cobb-Douglas	13
3.2. Etapas en el análisis del sistema	14
3.2.1. Reescalamiento y reparametrización	14
3.2.2. Análisis de estabilidad de sistema 2-dimensional desacoplado	14
3.2.3. Introducción de un factor de reactivación económica $R(Y, Z)$	15
3.2.4. Análisis de estabilidad del sistema por diagramas de bifurcación	15
3.3. Validación del modelo	15
3.3.1. Justificación del factor de reactivación económica	16
3.3.2. Análisis del factor de reactivación económica	17
4. Resultados	19
4.1. Análisis de la estabilidad	19
4.1.1. Estabilidad de equilibrio 1.1: $X = 0, Y = 0$	20
4.1.2. Estabilidad de equilibrio 1.2: $X = k_1, Y = 0$	20
4.1.3. Estabilidad de equilibrio 1.3: $X = k_2, Y = 0$	22
4.1.4. Estabilidad de equilibrio 2	23

4.2.	Condiciones de bifurcación para los nodos	24
4.2.1.	Bifurcación Fold (Silla-Nodo)	24
4.2.2.	Condiciones para la bifurcación de Hopf	26
4.2.3.	Condiciones para la bifurcación Bogdanov-Takens	26
4.3.	Diagrama de bifurcaciones de codimensión-1 para la tasa neta de crecimiento poblacional τ	27
4.3.1.	Región 1	34
4.3.2.	Región 2	36
4.3.3.	Región 3	38
4.3.4.	Región 4	40
4.3.5.	Región 5	42
4.3.6.	Región 6	44
4.3.7.	Región 7	46
4.4.	Diagrama de bifurcaciones de codimensión-2 en un punto Bogdanov-Takens (BT)	48
4.4.1.	Análisis de los puntos de codimensión-2	52
4.4.2.	Determinación de zonas de estabilidad con el diagrama de bifurcaciones para el modelo de desarrollo sostenible acoplado (S3DA)	53
4.4.3.	Bifurcación Hopf Generalizada (GH)	61
5.	Conclusiones y discusión	64
5.1.	Conclusiones	64
5.2.	Discusión	66
A.	Normalización y reparametrización del sistema	70
B.	Existencia y Unicidad de soluciones para el sistema (3-11)	72
B.1.	Delimitación del espacio de parametros	73
B.2.	Condiciones de bifurcación	74
B.2.1.	Condiciones para la bifurcación Limit Point	74
B.2.2.	Código Matlab: puntos de equilibrio	76
B.2.3.	Código Matlab: Jacobiano	76
B.2.4.	Condiciones para la bifurcación Hopf	77
B.3.	Condiciones de simulación en el software Matcont-CL	77
C.	Análisis de la estabilidad y condiciones de bifurcación para el sistema 2-Dimensional	80
C.1.	Equilibrio 1.2: Casos de estabilidad	80
C.2.	Estabilidad de equilibrio 1.3: $X = k_2, Y = 0$	81
C.3.	Estabilidad equilibrio 2	82

C.4. Condiciones de bifurcacion para los Nodos	84
C.4.1. Bifurcación Fold (Silla-Nodo)	84
C.4.2. Condiciones para la bifurcación de Hopf	86
C.4.3. Condiciones para la bifurcación Bogdanov-Takens	86
C.5. Condiciones de simulación en el software Matcont-CL	88
Bibliografía	89

Lista de símbolos

Símbolo	Término	Unidad
S, X	Recurso natural renovable	arboles
L, Y	Población humana	habitantes
K, Z	Capital económico	COP, USD
ρ	Tasa de crecimiento intrínseco de recurso natural renovable	1
M	Tasa extracción de recurso renovable de S	1
k_1	Cota superior para el crecimiento de recurso natural renovable	arboles
k_2	Cota inferior limitante para crecimiento autónomo de recurso renovable de S	arboles
α	Parámetro tecnológico para extracción de recurso	1
β	Fracción de población dedicada a la explotación de recurso	1
τ	Tasa neta de crecimiento poblacional	1
ϕ	Factor de fertilidad de la población	1
λ	Inversión económica de un periodo al siguiente	1
δ	Depreciación en la moneda o desvalorización de bienes económicos	1

1. Introducción

El desarrollo sostenible (DS) se define como la preservación del equilibrio a lo largo del tiempo de las relaciones entre población humana, recursos renovables, y capital económico; la comprensión de estas relaciones son importantes para planificar estrategias rentables acertadas para la administración de recursos, para evitar pérdidas económicas, o predecir consecuencias favorables o perjudiciales de la intervención del ser humano sobre el entorno. Varias catástrofes ambientales en el mundo han motivado la comprensión de las relaciones entre ser humano y sistemas biológicos o sociales. Por ejemplo, en la costa pacífica de estados Unidos y en el Golfo de Alaska, se retiraron restricciones para las flotas pesqueras foráneas de merluza y abadejo, lo cual pudo ser la causa del decrecimiento dramático de la población de camarones [36] o el derrame de petróleo de Amoco –Cádiz en la costa de Brittany ocasionó la pérdida de 60 millones de organismos vivos no comerciales [36]. El desconocimiento de los sistemas ecológicos y económicos desde una visión general, se considera que es una de las causas de grandes pérdidas económicas y de ecosistemas ecológicos, el estudio y comprensión de los sistemas desde el desarrollo sostenible se convierte en un problema mundial de gran interés para los entes gubernamentales y para las comunidades científicas.

Desde el año 1989 hasta la actualidad, se han presentado numerosas definiciones sobre DS; estas se enmarcan entre dos enfoques llamados, enfoque de sostenibilidad débil y sostenibilidad fuerte. La regla de sostenibilidad débil requiere que se conserve el crecimiento de la riqueza, en el sentido en que se mantenga la valorización del capital humano y capital natural. Posterior a la primera definición formal de desarrollo sostenible establecida en la Comisión Brundtland WCED EN 1987 [11], el enfoque débil fue el mayormente aceptado; sin embargo, debido a la simplificación del concepto de “desarrollo sostenible” desde el punto de vista del crecimiento económico, el enfoque de sostenibilidad débil es reemplazado y surge como contraposición el enfoque de “sostenibilidad fuerte” [23].

Este último enfoque propone que el desarrollo debe compartir los recursos económicos de manera equitativa entre la generación de hoy y la del futuro. [6]; preservar la persistencia y la integridad de los recursos en el tiempo para evitar alteraciones que modifiquen la capacidad original para conservar los recursos naturales [6], y analizar las alteraciones en la resiliencia y la estabilidad de las relaciones de la especie humana con el entorno ecológico. Este enfoque en comparación con el enfoque de sostenibilidad débil, contempla muchas más variables y resulta más compleja la comprensión de las relaciones de los seres humanos con su entorno.

Por tal razón; para preservar las relaciones de sostenibilidad se deben adquirir herramientas que brinden mayor comprensión frente a estas relaciones.

La ciencia y tecnología son las herramientas que pueden aportar soluciones para alcanzar un desarrollo sostenible fuerte. Las ciencias exactas con los modelos matemáticos pueden dar explicaciones cuantitativas sobre la forma en que las modificaciones sobre ecosistemas, economía y población, impactan el equilibrio armonioso de estas tres dimensiones del desarrollo. Además bajo condiciones especiales de control, es posible garantizar la conservación ambiental y un crecimiento económico aceptable [3]. Estos modelos permiten comprender la evolución a lo largo del tiempo de las variables sociales, económicas y de recursos naturales; por esta razón, una vez que un modelo matemático es estudiado y entendido a profundidad, puede ser usado como herramienta de decisión y se pueden diseñar estrategias para alcanzar la sostenibilidad y generar soluciones responsables con el planeta y las especies que lo habitan [2] [39][11].

Los modelos matemáticos enfocados al desarrollo sostenible tiene su origen en los años veinte con los trabajos de Lotka y Volterra, bajo el nombre de “Modelos Depredador-presa” [26], [45]. Estos trabajos son pioneros y piezas fundamentales que estructuran el punto de partida en la investigación de las relaciones entre seres humanos y recursos naturales. Estos modelos estudian la dinámica de la población de dos especies que comparten la misma locación; uno es conocido como el predador y el otro como la presa. El aumento y disminución periódica del número de individuos de las dos especies significa que se garantiza la presencia de ambas sin llegar nunca a la extinción de ninguna de las dos. Este “Comportamiento oscilatorio” aplicado a seres humanos vs recursos naturales trajo consigo el concepto primitivo de desarrollo sostenible. En 1998 Brander y Taylor plantean este escenario y estudian la dinámica de la población humana en conjunto con los recursos naturales. Con este enfoque los autores explican la extinción de la población y caída de la civilización de la Isla del Oeste Moai, la cual puede presentarse en sociedades actuales como aquellas de la amazonía o de otras sociedades alrededor del mundo que sobreviven fundamentalmente del uso de recursos naturales primarios. Varios autores intentaron explicar el colapso de esta civilización en un sentido esotérico [19], [10], sin embargo Brander y Taylor justificaron matemáticamente, como causa del colapso, la mala administración de los recursos naturales [17], [9]. Del 1990, en adelante la comunidad matemática, por medio del enfoque “ser humano VS recurso naturales”, determina cómo las reformas institucionales pueden evitar el colapso de sociedades, [9], [15], [17], [18], [35], [37], [9].

Cobb y Douglas, añaden al escenario de ser humano y recursos la variable de capital económico, lo cual permite estudiar la relación entre ser humano, recursos y bienes monetarios. Los autores construyen la función Cobb Douglas” para calcular los bienes en función de la fuerza de labor y capital de inversión, lo cual permite extender los trabajos a recursos disponibles,

población y tecnología [24], [42],[20].

El artículo [17] hace parte de los trabajos sucesores de Cobb y Douglas, y añade la influencia de explotación humana sobre las condiciones del crecimiento del recurso, lo que permite un estudio matemático más realista de las relaciones entre el sistema humano y ecológico. Estos aportes se fundamentan con el uso del efecto Allee y al introducir la agricultura como una segunda fuente de ingreso. El efecto Allee es la “irreversibilidad en la explotación” y logra exigir al modelo matemático que se mantenga una cantidad mínima de recurso explotado; si se excede este umbral mínimo, el recurso natural no puede crecer de manera autónoma y ocasiona la extinción del mismo [46], [17], [2]. D’alessandro al introducir la agricultura como una segunda fuente de ingreso, da al modelamiento matemático herramientas fuertes para el uso en los avances posteriores de desarrollo sostenible.

El modelo propuesto por David es uno de los trabajos que amplían la visión del desarrollo [5], complementa el trabajo de D’Alessandro e incluye el desarrollo social y una estructura de red dinámica para modelar regiones interconectadas, con lo cual los modelos revelan mayor riqueza dinámica y permiten el estudio de Bifurcaciones de Hopf, Bogdanov-Takens y Neimark-Sacker[48].

El presente documento toma el sistema de [5] hasta la versión 3-dimensional, y se añade la influencia que causa el aumento de capital económico sobre el aumento de la población. Se establecen los valores de los parámetros que generan comportamientos de desarrollo sostenible en el sistema. Además se adopta la noción de sostenibilidad de [5], la cual interpreta el escenario de desarrollo sostenible como la coexistencia de las variables poblacional, económica y ambiental.

El factor propuesto en el modelo de reactivación económica permite una ganancia en la dinámica del sistema. Este factor permite la aparición de un punto Bogdanov-Takens (BT) y un punto Hopf Generalizado (GH), los cuales no presenta el modelo original [5]. En el presente trabajo se verifica el diagrama de bifurcaciones en vecindades del punto BT y se logran determinar los valores de parámetros de tasa de natalidad (τ) y crecimiento natural del recurso (ρ) que favorecen los escenarios de sostenibilidad. Además se reporta la existencia del punto GH en el nuevo modelo propuesto.

En la sección 3.1 del presente documento se describe el modelo desacoplado 3-Dimensional (MD3D) planteado en la literatura, posterior a esto se presenta en la sección 3.2 tres propuestas nuevas al modelo. Primera: Normalización del modelo por medio de un cambio lineal de variables. Segunda: Reparametrización del modelo por medio de un renombramiento y restricción de parámetros, sección 3.2.1. Tercera: Inclusión de un factor de reactivación económica para la población, sección 3.2.3. Con el nuevo modelo planteado se realiza en las secciones

4.1 y 4.3 un análisis de estabilidad analítico y bifurcacional. En la sección 4.4 se presenta el diagrama de bifurcaciones de codimensión-2 en vecindades del punto BT; y los valores de los parámetros de tasa de natalidad (τ) y crecimiento natural del recurso (ρ) en vecindades del punto BT que generan los diferentes escenarios de equilibrio sostenible. Además, se reporta la presencia de una bifurcación en un punto Hopf Generalizado y la existencia de una curva de Hopf y de ciclos límite (curva LC) en vecindades de este punto. En el último capítulo 5 se derivan conclusiones sobre los valores de parámetros que favorecen la sostenibilidad y se expone una discusión sobre la interpretación biológica de los resultados, secciones 5.1 y 5.2.

2. Marco teórico

Este capítulo cuenta con dos secciones. En la primera sección 2.1 se introduce el concepto de desarrollo sostenible y su evolución desde los inicios de la agricultura hasta la definición propuesta por la Comisión Mundial de Ambiente y Desarrollo y se expone la relevancia del desarrollo sostenible como un reto mundial para los entes gubernamentales y las comunidades científicas. En la segunda sección 2.2, se introducen los conceptos matemáticos que permiten un análisis cuantitativo del desarrollo sostenible a través de la teoría de la dinámica de sistemas, esta es una rama de las matemáticas usada en la literatura para modelar sistemas de población, recurso y capital económico. La presentación de los conceptos matemáticos se divide en dos partes. Primera: sección 2.2.1 en la cual se introducen los conceptos de equilibrios y estabilidad. Segunda: sección 2.2.2 en la cual se definen los conceptos generales de la teoría de bifurcaciones.

2.1. Desarrollo sostenible

La comprensión intuitiva del desarrollo sostenible (DS) tuvo sus inicios en la edad temprana de la agricultura y en la explotación de recursos [5]. El objetivo de estas civilizaciones antiguas fue disminuir la tasa de mortalidad satisfaciendo la demanda de recurso. Esta concepción trajo consigo el concepto primitivo de equilibrio entre explotación de recursos y crecimiento poblacional[3]. Posterior a esta concepción de equilibrio y con la aparición del capital económico, el equilibrio se entiende a partir de tres variables, recursos naturales, capital económico y población [20]. Para alcanzar el pleno equilibrio se debían tener en cuenta las ciudades cercanas los lugares de explotación de recurso y basados en el comportamiento económico y características de la población de estas ciudades como tasas de mortalidad, fuerza de labor y poder económico se establecen estrategias para la prosperidad de las regiones. Este enfoque se complementa con el estudio de crecimiento de cultivo, a la comprensión de la ecología y entender el impacto en la economía por las variaciones en la fuerza-labor (fracción de población dedicada a la explotación)[5].

Las estrategias usadas para alcanzar el balance de la población recursos y capital tuvieron una orientación empírica y se intentaron generalizar a grupos de ciudades cercanas, de esta forma se empezó a consolidar una teoría más amplia de unificación y permitió la aparición de uno de los conceptos de globalización [24]. Este enfoque permite que las poblaciones humanas

seán entendidas a nivel global como sistemas ecológicos y económicos interrelacionados [32].

Posterior a estos enfoques se plantea en la comisión mundial de Brundtland, la primera definición mundial de desarrollo sostenible, posterior a esta definición el concepto ha sido modificado con el objetivo de darle una comprensión más amplia [34], hasta la fecha la definición ha sido propuesta por la comisión mundial de Ambiente y Desarrollo considera los siguientes fundamentos[5].

- El futuro no debe estar comprometido por el presente
- Áreas geográficas no deben estar comprometidas por otras áreas geográficas
- Las necesidades humanas deben ser abastecidas entre sus límites biológicos, mientras que el capital natural es guardado y mejorado.
- Se debe mantener un esfuerzo proactivo para conservar los modelos de desarrollo sostenible, y eliminar aquellos que no lo son.
- Sostenibilidad debe ser reconocida como un concepto dinámico, que puede mostrar muchas facetas y no puede ser juzgado por un único valor [12].

Con esta nueva comprensión, el DS es considerado un reto mundial para los entes gubernamentales y las comunidades científicas. Por esta razón se hacen necesarias herramientas que brinden una mayor comprensión del DS. Una de las herramientas fuertes que pueden ayudar a comprender el DS son los modelos matemáticos. Una vez que un modelo matemático es analizado y estudiado a profundidad puede convertirse en una herramienta de decisión para plantear políticas que favorezcan el desarrollo sostenible,[5].

2.2. Conceptos matemáticos

Un sistema dinámico está definido por un conjunto de variables y la evolución con respecto al tiempo que las gobierna. Normalmente, el comportamiento de un sistema dinámico a tiempo continuo está dado por un conjunto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE's) que puede estar acopladas o no. Supongamos que el espacio de estados de un sistema es $X = R^n$ con coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) . Es normal que las leyes de evolución de las variables se presenten de manera implícita, en términos de las tasas de cambio (velocidades) \dot{x}_i en función de las coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

que puede ser reescrita de manera vectorial.

$$\dot{x} = f(x). \quad (2-1)$$

Se supone que el campo vectorial $f(x)$ es suficientemente diferenciable. En 2-1, el tiempo no aparece explícitamente pero si implícitamente como \dot{x} . Un sistema con estas características se llama un sistema autónomo [5].

2.2.1. Equilibrios y estabilidad.

Considere un sistema dinámico de tiempo continuo definido por 2-1. Sea x^* un equilibrio del sistema (es decir, $f(x^*) = 0$) y J la matriz jacobiana del sistema evaluado en x^* .

$$J = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*} \quad (2-2)$$

(2-2) representa la linealización del sistema alrededor del equilibrio. Esta es una herramienta muy útil ya que tenemos una representación local del movimiento del sistema. Los valores propios (λ_i) de (2-2) determinan la naturaleza del equilibrio x^* en las vecindades. Definimos n_- , n_0 , y n_+ como el número de valores propios con parte real negativa, nula y positiva, respectivamente. Si $n_0 = 0$, x^* es genérico y es llamado equilibrio hiperbólico [5].

Teorema de estabilidad: [43], [29]

Estable: Un punto de equilibrio hiperbólico es estable si todos los valores propios de J tienen parte real negativa.

Inestable: Un punto de equilibrio hiperbólico es inestable si algún valor propio de J tienen parte real positiva.

Ciclo límite

Un ciclo límite es una órbita periódica L_0 en la cual para todo punto $x_0 \in L_0$ satisface $\phi^{t+T_0}x_0 = \phi^t x_0$, para algún $T_0 > 0$, y para todo $t \in T$.

2.2.2. Bifurcaciones

Ahora consideraremos un sistema dinámico que depende no sólo de las variables de estado, sino también de unos parámetros. Esta situación puede escribirse de la siguiente manera [29]:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \quad (2-3)$$

Bifurcaciones de Codimension-1:

Hay dos maneras en que la hiperbolicidad de un equilibrio puede ser violada. Ya sea un valor propio real simple es cero ($\lambda_1 = 0$) o si un par de valores propios conjugados están sobre el eje imaginario. En el primer caso se cumple $n_0 = 1$ y por tanto aumenta una unidad la dimensión de la variedad central. En el segundo caso se tiene $n_0 = 2$ y por tanto los valores propios tienen la forma ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$) aumentando el valor de la dimensión de (Variedad Central) en 2 unidades. Bifurcaciones de codimensión 1 se pueden lograr mediante la variación de sólo un parámetro. Suponiendo que la dimensión del espacio de parámetros es $m = 1$. y la dimensión del espacio de estados es $n = 2$ tenemos las bifurcaciones [29]:

1. Fold, Limit Point o bifurcaciones punto silla-nodo bajo las siguientes condiciones

Suponga que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1$$

con f una función suave, tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $X = 0$

- Equilibrio: $f(0, 0) = 0$
- Valores propios: $\lambda = f_x(0, 0) = 0$
- Nodegeneración: $f_{xx}(0, 0) \neq 0$
- Transversalidad: $f_\alpha(0, 0) \neq 0$

2. Bifurcación Andronov-Hopf ó Hopf, bajo las siguientes condiciones

Suponga que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(X, \alpha), \quad X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1$$

con f una función suave, tiene para $|\alpha|$ suficientemente pequeño el equilibrio $X = 0$ y además

- Equilibrio: $f(0, 0) = 0$
- Valores propios: $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega_0, \quad \mu(0) = 0. \quad \omega(0) = \omega_0 > 0$
- Nodegeneración: $L_1(0) \neq 0, L_1$ es el primer coeficiente de Lyapunov
- Transversalidad: $\mu'(0) \neq 0$

Bifurcaciones de Codimensión-2:

Consideremos ahora la dimensión del espacio de parámetros $m = 2$, puesto que necesitamos dos condiciones independientes para alcanzar una bifurcación de codimensión 2. Existen condiciones necesarias para estos evento de bifurcaciones, a continuaciones se enumeran las bifurcaciones que pueden ocurrir en sistemas cuyas variables de estados tienen dimensión mayor o igual a dos $X \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$

1. Bogdanov-Takens o Bifurcación Doble Zero:

Suponga que el sistema planar

$$\frac{dx}{dt} = f(X, \alpha), \quad X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

con f una función suave, tiene en $\alpha = 0$, el equilibrio $X = 0$ y además

- Doble valor propio cero: $\lambda_{1,2}(0) = 0$
- (BT,0) La matriz Jacobiana $A(0) = f_x(0,0) \neq 0$
- (BT,1) $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$
- (BT,2) $b_{20}(0) \neq 0$
- (BT,3) La aplicación

$$(x, \alpha) \implies \left(f(x, \alpha), Tr \left(\frac{\partial f(x, a)}{\partial x} \right), Det \left(\frac{\partial f(x, a)}{\partial x} \right) \right)$$

es regular en el punto $(x, \alpha) = (0, 0)$

2. Bifurcación Bautin o Hopf Generalizada:

Suponga que el sistema planar

$$\frac{dx}{dt} = f(X, \alpha), \quad X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

con f una función suave, tiene en $\alpha = 0$, el equilibrio $X = 0$ y además para $\alpha = 0$ se cumple

- Doble valor propio de la forma : $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ con $\omega(\alpha) = \omega_0 > 0$
- $\mu(0) = 0$
- $l_1(0) = 0$
- (GH,1) $l_2 \neq 0$, donde l_2 es el segundo coeficiente de Lyapunov.
- (GH,2) La aplicación $\alpha \implies (\mu(\alpha), l_1(\alpha))^T$ es regular en $\alpha = 0$

En el sistema 3-dimensional se presentan las bifurcaciones anteriormente descritas. A continuación se presentan otros 3 tipos de bifurcaciones que se pueden presentar en sistemas 3-dimensionales, debido a que en este trabajo investigativo estas bifurcaciones no se presentan, las condiciones de degeneración y transversalidad pueden consultarse en [29]

3. Gavrilov-Guckenheimer, Zero-Hopf o Bifurcación Fold-Hopf
4. Bifurcación Hopf-Hopf.
5. Bifurcación Cúspide.

3. Marco conceptual en modelamiento de sistemas, enfocados al desarrollo sostenible

En este capítulo en la sección 3.1 se presenta el modelo desacoplado 3-Dimensional (MD3D) obtenido en la literatura. En la sección 3.2 se presentan tres propuestas nuevas al modelo. Primera: Normalización del modelo por medio de un cambio lineal de variables. Segunda: Reparametrización y restricción de los parámetros del del modelo, sección 3.2.1; y tercera: Inclusión de un factor de reactivación económica para la población, sección 3.2.3.

3.1. Modelo desacoplado 3-Dimensional (MD3D)

En esta sección se explica el modelo 3-Dimensional de [5] y la obtención de las 3 ecuaciones relacionadas respectivamente con la tasa del modelo productivo de D'Alessandro [17], tasa de población del modelo de Brander y Taylor [9] y tasa de capital económico del modelo Cobb-Douglas [14].

3.1.1. Modelo productivo de D'Alessandro

La estructura productiva del modelo sigue los lineamientos de [17] denotada como $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$ se define como el crecimiento natural del recurso $N(S)$ menos la tasa de extracción del recurso:

$$\dot{S} = N(S) - M \tag{3-1}$$

$N(S)$ es una función logística con fuerte efecto Allee [17]:

$$N(S) = \rho(1 - S/k_1)(S/k_2 - 1)S \tag{3-2}$$

El parámetro ρ es la tasa intrínseca de crecimiento sin influencia humana. El efecto Allee se expresa con los factores $(1 - S/k_1)$ y $(S/k_2 - 1)$, los cuales expresan el límite de crecimiento del recurso hasta un valor k_1 y un valor mínimo para el crecimiento igual a k_2 , respectivamente; es decir, la tasa de crecimiento del recurso disminuye a medida que se alcanza el límite de

crecimiento k_1 debido, por ejemplo, a limitaciones espaciales, y si el recurso disminuye hasta una cantidad mínima de recurso k_2 , se detiene la reproducción natural del mismo.

La tasa de extracción de recurso M , es una función proporcional al stock (S) y a la población (L);

$$M = \alpha\beta SL \quad (3-3)$$

Los parámetros α y β se refieren a parámetros tecnológicos y de fuerza de labor, respectivamente. El parámetro tecnológico representa que a mayor velocidad de extracción mayor es la tecnología con que se realiza. El parámetro de fuerza de labor representa la fracción de la población dedicada a la explotación del recurso. Finalmente, la ecuación general representa dos relaciones. Primera: la extracción del recurso es directamente proporcional a la población L . Segunda: la extracción del recurso es directamente proporcional a la cantidad de recurso disponible S de (3-1),(3-2) y (3-3), se obtiene:

$$\dot{S} = \rho(1 - S/k_1)(S/k_2 - 1)S - \alpha\beta SL \quad (3-4)$$

3.1.2. Modelo poblacional de Brander y Taylor

Se usa la tasa poblacional (3-5) propuesta por los autores Brander y Taylor (1998) en [9]:

$$\dot{L} = (\tau + F)L \quad (3-5)$$

El parámetro $\tau = b - d$ es la diferencia entre tasa de natalidad (b) y tasa de mortalidad (d), y se interpreta como la tasa neta de crecimiento, F es la fertilidad de la población y está dada por (3-6):

$$F = \phi M/L \quad (3-6)$$

ϕ es un parámetro de ajuste positivo, M es la extracción del recurso de (3-3), (3-5) y (3-6) se obtiene la ecuación para la población:

$$\dot{L} = (\tau + \phi\alpha\beta S)L \quad (3-7)$$

La ecuación (3-6) expresa que la fertilidad es proporcional al consumo de recurso M de (3-5); la suma de $\tau + F$ expresa que un incremento en la fertilidad; también se puede entender como una disminución en la tasa de mortalidad. En general, de (3-5) se debe interpretar que en ausencia de fertilidad $F = 0$ la población tiende a desaparecer, por tal motivo τ es considerado un parámetro con signo negativo.

3.1.3. Producción económica de Cobb-Douglas

La función de producción de Cobb-Douglas, fue propuesta formalmente por Knut Wick-sell [14]. Aunque es un modelo simple para modelar la economía como se referenció en la introducción, esta función se ajusta bien a datos estadísticos reales y a diversos tipos de economías. La función Cobb-Douglas define Γ como la productividad total (Valor monetario de todos los bienes en un año):

$$\Gamma = \lambda K^{q_1} \beta^{q_2} \quad (3-8)$$

K es la entrada de capital en el mercado, β es la fuerza de labor (fracción de población destinadas a la producción), λ factor de producción, q_1 y q_2 coeficientes de elasticidad. Debido a que la ecuación de productividad (3-8) tiene unidades de medida sin significado, se le asigna al parámetro λ la unidad de medida $\text{Capital}^{q_1+q_2}/(\text{Capital}^{q_1}\text{Labor}^{q_2})$, por esta razón λ es un factor de balance en la ecuación llamado “factor de producción”.

Los coeficientes q_1 y q_2 son coeficientes que definen la relación que existe entre las entradas K y β con respecto a las la salida en la producción Γ ; estas relaciones pueden modelar tres diferentes tipos de economía o escenarios, dependiendo del valor de la suma de los coeficientes q_1 y q_2 a continuación se resumen tres escenarios con su respectivo efecto sobre la función Γ de productividad total

- $q_1 + q_2 = 1$: Representa que un 10 % de incremento entre fuerza de labor(β) y capital genera un retorno en la productividad de un 10 % ; es decir, la relación entre Γ y β o α es 1 a 1
- $q_1 + q_2 < 1$: Representa que un 10 % de incremento entre fuerza de labor β y capital K genera un retorno en la productividad menor al 10 %.
- $q_1 + q_2 > 1$: Representa que un incremento del 10 % entre K y β , genera un retorno en la productividad mayor al 10 %

Por ejemplo, si $q_1 + q_2 = 1,5$ el retorno en la productividad total Γ es de 15 %.

Los coeficientes q_1 y q_2 permiten que la función se ajuste muy bien a datos estadísticos de diversas economías a nivel macroeconómico y microeconómico [14], [1], debido a que la obtención de la ecuación proviene de su ajuste a los modelos reales económicos [8].

El parámetro $\delta > 0$ es un factor de descuento en los bienes ocasionado por pérdidas en la economía o por la deflación. λ es la fracción de capital que es ahorrado e invertido en el periodo siguiente. La obtención del capital acumulado (\dot{K}) siguiendo los lineamientos de [16], proviene de la ecuación de Cobb y Douglas [14],

$$\dot{K} = \lambda K^{q_1} (B)^{q_2} \quad (3-9)$$

B es el trabajo de fuerza de labor. Para obtener la ecuación final de capital usada en (3-10) a partir de (3-9), se tienen dos consideraciones adicionales. Primera: la deflación se interpreta con el factor δK . Segunda: el cambio de B por el factor M de extracción. La segunda consideración se fundamenta porque en una economía basada en la extracción de recursos primarios, la fuerza de labor B es equivalente la extracción total M [16], bajo estas dos modificaciones y reduciendo parámetros con la igualdad $\Omega = \alpha\beta$ se obtiene finalmente (3-10)

$$\begin{cases} \dot{S} = \rho(1 - S/k_1)(S/k_2 - 1)S - \Omega SL \\ \dot{L} = (\tau + \phi\Omega S)L \\ \dot{K} = \lambda K^{q_1}(\Omega LS)^{q_2} - \delta K \end{cases} \quad (3-10)$$

3.2. Etapas en el análisis del sistema

En esta sección se presentan tres propuestas nuevas al modelo. Primera: Normalización del modelo por medio de un cambio lineal de variables, sección. Segunda: Reparametrización del modelo por medio de un renombramiento y restricción de parámetros, sección 3.2.1. Tercera: Inclusión de un factor de reactivación económica para la población, sección 3.2.3.

3.2.1. Reescalamiento y reparametrización

Se propone un reescalamiento y reparametrización para el modelo (3-10), con el cual las variables S , L y K cambian respectivamente por su variable reescalada X , Y , Z (Apéndice A), con lo que se obtiene un modelo topológicamente equivalente al original:

$$\dot{X} = \left(\rho \left(1 - \frac{X}{K_1} \right) \left(\frac{X}{K_2} - 1 \right) - Y \right) X \quad (3-11a)$$

$$\dot{Y} = (\tau + \phi X)Y \quad (3-11b)$$

$$\dot{Z} = (\lambda Z^{q_1} (YX)^{1-q_1} - \delta Z) \quad (3-11c)$$

3.2.2. Análisis de estabilidad de sistema 2-dimensional desacoplado

Se realiza un análisis de estabilidad del sistema dos dimensional dado por las ecuaciones (3-11a), (3-11b). El sistema dado en (3-11) es parcialmente acoplado pues el capital Z no tiene influencia sobre las tasas de población (Y) ni de recurso natural (X). Por esta razón el sistema 3-11 es una generalización del sistema dado por (3-11a) y (3-11b). Esto permite que los resultados de estabilidad para el sistema sistema 2-dimensional se pueden generalizar para el sistema 3-D.

3.2.3. Introducción de un factor de reactivación económica $R(Y, Z)$.

EL desacoplamiento del sistema se puede ver como la ausencia de influencia del capital (K) sobre el crecimiento de la población (\dot{Y}) y de recurso (\dot{X}). Para representar la influencia del recurso sobre la población y se plantea un parámetro de reactivación económica o factor de subsidio $R(Y, Z)$, el cual es un factor que se adiciona a la tasa de población. Y finalmente se obtiene el modelo acoplado:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \left(\rho \left(1 - \frac{X}{K_1} \right) \left(\frac{X}{K_2} - 1 \right) - Y \right) X \\ \dot{Y} &= (\tau + \phi X)Y + R(Y, Z) \\ \dot{Z} &= (\lambda Z^{q_1} (YX)^{q_2} - \delta Z)\end{aligned}\tag{3-12}$$

$$\text{Con} \quad R(Y, Z) = \epsilon Z \left(\frac{1}{Y} - 1 \right)\tag{3-13}$$

ϵ representa el porcentaje de capital destinado a la reactivación de la economía; el factor $\left(\frac{1}{Y} - 1\right)$ muestra que a medida que aumenta la población, la fracción de capital distribuido disminuye. Finalmente, con el sistema acoplado se realizan simulaciones numéricas obtenidas con CL-Matcont, las conclusiones se derivan con ayuda de un diagrama de codimensión-1 con respecto al parámetro τ (tasa neta de crecimiento poblacional), y un diagrama de codimensión-2 donde aparece un punto BT.

3.2.4. Análisis de estabilidad del sistema por diagramas de bifurcación

Posterior al acoplamiento del modelo se obtienen resultados bifurcacionales por medio de un diagrama de codimensión 1 en función del parámetro τ y un diagrama de bifurcación de codimensión 2 donde aparece un punto Bogdanov-Takens que depende de los parámetros τ y ρ , definidos respectivamente como tasa neta de crecimiento poblacional y tasa de crecimiento intrínseco del recurso natural renovable.

3.3. Validación del modelo

En esta sección se presenta la bibliografía donde se puede encontrar la validación del modelo 3- Dimensional en ausencia del factor de reactivación económica y las dificultades que se deben tener en cuenta para validar el modelo propuesto. En la sección 3.3.1 se presenta la justificación para usar un factor de subsidio en el modelo bioeconómico. Posteriormente en la sección 3.3.2 se presenta el significado de la expresión matemática dado por (3-13) para el factor de reactivación económica,.

En la sección 3.2.3, el modelo planteado sin el factor de reactivación es obtenido a partir de un modelo 3 Dimensional tomado de la literatura [3], específicamente de la revista “Bulletin of Mathematical Biology”, por esta razón se considera que el modelo sin el factor de reactivación económica ya está validado por la comunidad científica.

Por otro lado, la validación del modelo que incluye el factor de reactivación económica es un trabajo que requiere la calibración de parámetros. Esta calibración de parámetros se logra por medio de la recolección de datos reales relacionados con el desarrollo económico. Estos datos reales necesitan ser recolectados durante mínimo dos años con el objetivo de simular de manera asertiva los sistemas reales. Un sistema real en general se pueden recolectar datos relacionados con el capital de una población, productividad agrícola, tasas de crecimiento poblacional, desarrollo de capital en una población, entre otros. En esta fase de recolección de datos los prestadores de servicios públicos encargados de recolectar y trabajar con estos datos, son contratistas, que están cargo de la figura pública llamada “Secretaría de Desarrollo”. Infortunadamente estos contratistas no son fijos y son rotados de su puesto de trabajo de manera continua y por tal razón los datos recolectados relacionados con el nivel de crecimiento económico presentan discontinuidades que coinciden en estos tiempos de transición. Estas discontinuidades propias de un gobierno rotativo convierten la validación del modelo en una tarea de recolección de datos. Esta recolección de datos queda entonces a cargo del propio investigador y la complejidad para tomarlos de manera acertada se sale del alcance de esta tesis.

A pesar de la dificultad de la validación del modelo a partir de la calibración de parámetros se presenta en la siguiente sección 3.3.1; la justificación que permite usar el factor de reactivación económica. Además, se profundiza en la explicación sobre como el factor de reactivación modela de manera exitosa el crecimiento poblacional cuando hay influencia de una factor de subsidio o factor de reactivación económica.

3.3.1. Justificación del factor de reactivación económica

El sistema 3 dimensional (3-11) sin el factor de reactivación económica es un sistema dinámico desacoplado. El desacoplo de este sistema se verifica con las ecuaciones (3-11a) y (3-11b). En estas ecuaciones hay influencia de la variable de población Y sobre el crecimiento de capital \dot{K} , sin embargo no se presenta una influencia del capital económico K sobre la población \dot{Y} . Haciendo una amplia revisión de la bibliografía, se encontró que no hay modelos matemáticos que estudien la influencia de capital económico sobre la población y tampoco hay autores que propongan modelos relacionados con el aumento de bienestar sobre una población. La falta de influencia del capital sobre la variación de la población, es una característica que esta investigación quiere solucionar. Por esta razón este trabajo soluciona la falta de influencia de capital sobre el crecimiento económico a través del factor de reactivación económica dado por (3-13).

El factor de subsidio o de reactivación, permite describir la influencia que ejerce el crecimiento de capital económico (Z) sobre el crecimiento de la población (Y) y por esta razón el comportamiento del modelo se acerca al de los sistemas económicos modernos, en los cuales se desarrollan y ejecutan políticas de subsidio para el crecimiento poblacional. Estas políticas de subsidio son acciones ejecutadas por los gobiernos, las cuales reciben una gran aceptación. Estas políticas han llegado a conocerse a nivel mundial. Una de estas políticas se lleva a cabo en Canadá el cual es un país con alto nivel de desarrollo. En este país se ofrece dinero para que las parejas tengan hijos, también se ofrece auxilio de transporte, de vivienda, educación, servicios públicos entre otros; con el objetivo de que las personas jóvenes se establezcan de por vida en este país. Estas políticas generan un aumento significativo en la población. Este aumento poblacional es positivo ya que reactiva de manera directa el desarrollo de un país, ya que promueve el aumento poblacional de personas altamente productivas. Estos subsidios incrementan el desarrollo de un país, debido a un aumento de personas productivas. De manera análoga, también se garantiza el desarrollo en años futuros por medio de los subsidios por los hijos jóvenes o recién nacidos, que se convertirán en personas productivas para el país.

Un ejemplo más cercano sobre estas políticas de subsidios, se presenta en la ciudad de Manizales- Caldas-Colombia. En esta ciudad se han generado políticas de subsidio a través de “cajas de compensación familiar”. Estas cajas de compensación, consideradas como “figuras administrativas subsidiarias” han entrado en auge en los últimos años y ofrecen a los estratos bajos subsidios que mejoran la calidad de vida. Entre estos subsidios, están los subsidios para: educación, implementos escolares, recreación, alimentación balanceada, etc. Estos subsidios son generalmente orientados al bienestar de los niños, jóvenes y adolescentes. Estos niños y jóvenes se convierten en la población beneficiada. Esta población beneficiada, le da a la sociedad una sensación de seguridad para la crianza de las personas entre 0 y 18 años y por tanto una seguridad alta a la hora de pensar en tener hijos.

3.3.2. Análisis del factor de reactivación económica

Por las razones establecidas en la justificación: sección 3.3.1, el factor de subsidio es proporcional a la variable Z . Esta variable es el capital total o valorización de todos los bienes económicos. A nivel económico la variable Z puede representar el presupuesto anual de una nación o de una región. Si este presupuesto anual aumenta, de igual forma el dinero invertido para guerra, educación e inclusive subsidios, aumentan proporcionalmente. Este porcentaje de ajuste, dirigido únicamente a subsidios para la población está representado por el parámetro ϵ . En esta investigación, este parámetro toma el valor de 0,005. Sin embargo, debido a que el presupuesto de subsidio queda determinado a libertad de los gobiernos, este subsidio puede tomar valores arbitrarios a conveniencia del sistema real que se quiera representar a través del modelo. Cabe resaltar que, bajo los valores de parámetros usados en este trabajo,

table4-2. El valor máximo para ϵ que permite la conservación del equilibrio interno sostenible es de $\epsilon = 0,0058$. El análisis sobre este comportamiento del equilibrio interno en relación con el valor de ϵ , al igual que la validación del modelo; sale del alcance de este trabajo investigativo.

El subsidio económico tiene un efecto de bienestar en la población que depende de la cantidad de personas entre las cuales se reparte el porcentaje ϵ es decir; el subsidio asignado a cada persona va a disminuir si la cantidad de personas que se deben subsidiar es muy alta, por el contrario, si la población subsidiada disminuye, los subsidios pueden aumentar y por ende el bienestar percibido por la sociedad. Para representar este comportamiento en función de la población se añade el factor $(\frac{1}{Y} - 1)$. Este factor disminuye a medida que la población se acerca a su valor máximo en el intervalo $0 < Y < 1$, y aumenta a medida que se alcanza el valor mínimo para Y en el mismo intervalo. Esta variación del factor total en función de la población permite modelar el fenómeno que se está buscando (aumento de subsidio si la población disminuye y disminución de subsidio si la población aumenta); y se considera un primer acercamiento acertado para modelar las políticas de subsidio.

4. Resultados

En la sección 4.1 de este capítulo se realiza un estudio analítico de estabilidad para el sistema dos-Dimensional desacoplado, posterior a este análisis, en la sección 4.3 se presenta un diagrama de bifurcaciones de codimensión-1 que permite determinar los valores de tasa neta de crecimiento poblacional (τ) que favorecen los escenarios de sostenibilidad. Finalmente en la sección 4.4 se presenta el diagrama de bifurcaciones de codimensión-2 en vecindades de un punto BT; y los valores de los parámetros de tasa de natalidad (τ) y crecimiento natural del recurso (ρ) que generan los diferentes escenarios de equilibrio sostenible.

4.1. Análisis de la estabilidad

Se usa la definición del jacobiano:

$$\text{Jacobiano}(X, Y) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(X, Y)}{\partial X} & \frac{f_1(X, Y)}{\partial Y} \\ \frac{f_2(X, Y)}{\partial X} & \frac{f_2(X, Y)}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

Donde

$$f_1 = \left(\rho \left(1 - \frac{X}{k_1} \right) \left(\frac{X}{k_2} - 1 \right) - Y \right) X$$
$$f_2 = (\tau + \phi X) Y$$

Usando f_1 y f_2 en (4-1) se obtiene:

$$\text{Jacobiano}(X, Y) = \begin{bmatrix} \frac{2\rho X}{k_2} - \rho - \frac{3\rho X^2}{k_1 k_2} + \frac{2\rho X}{k_1} - Y & -X \\ \phi Y & \tau + \phi X \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

4.1.1. Estabilidad de equilibrio 1.1: $X = 0, Y = 0$

Se evalúa el Jacobiano en el equilibrio $X = 0$ y $Y = 0$:

$$\text{Jacobiano}(0, 0) = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

Por ser una matriz diagonal, los valores propios (VP) son los elementos de la diagonal:

$$VP_1 = -\rho \quad ; \quad VP_2 = \tau \quad (4-4)$$

Criterio de estabilidad para equilibrio 1 $x = 0, y = 0$:

$$\rho > 0 \quad (4-5a)$$

$$\tau < 0 \quad (4-5b)$$

El parametro ρ se define como la "tasa de crecimiento natural del recurso (X)", es decir, el crecimiento del recurso sin intervención humana, este parámetro siempre es positivo, por tal razón se cumple 4-5a.

El parámetro $\tau = b - d$ donde b es la tasa de nacimientos de la población y d es la tasa de muertes de la población.

Debido a datos estadísticos para el sistema poblacional se supone que $d > b$ de esta forma se garantiza la segunda condición de estabilidad (4-5b)

4.1.2. Estabilidad de equilibrio 1.2: $X = k_1, Y = 0$

Se evalúa el Jacobiano en el equilibrio $X = k_1$ y $Y = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Jacobiano}(k_1, 0) &= \begin{bmatrix} \frac{2\rho k_1}{k_2} - \rho - \frac{3\rho K_1^2}{k_1 k_2} + \frac{2\rho k_1}{k_1} & -k_1 \\ 0 & \tau + \phi k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\rho k_1}{k_2} - \rho - \frac{3\rho K_1}{k_2} + 2\rho & -k_1 \\ 0 & \tau + \phi k_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho - \frac{\rho k_1}{k_2} & -k_1 \\ 0 & \tau + \phi k_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por ser una matriz triangular, los valores propios (VP) son los elementos de la diagonal.

$$\begin{aligned} VP_1 &= \rho - \frac{\rho k_1}{k_2} \\ VP_2 &= \tau + \phi k_1 \end{aligned} \tag{4-6}$$

Los detalles de la demostración para las siguientes restricciones de estabilidad se pueden ver en el apéndice C.1

Equilibrio 1.2 , Estabilidad Caso 1 $\rho > 0, \phi > 0$

Criterio de estabilidad para Equilibrio 2: $X = k_1, Y = 0$

Para que el equilibrio sea estable se deben satisfacer las siguientes condiciones

$$k_2 < k_1 \quad ; \quad k_1 < -\frac{\tau}{\phi}, \quad \text{Con} \quad \rho > 0 \quad , \quad k_1 > 0, \quad \phi > 0$$

Equilibrio 1.2, Estabilidad Caso 2: $\rho < 0, \phi > 0$

Bajo estas condiciones las desigualdades para ρ y ϕ que garantizan la estabilidad cambian respectivamente de la siguiente forma.

$$k_2 > k_1 \quad ; \quad k_1 < -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 1.2, Estabilidad Caso 3: $\rho > 0, \phi < 0$

$$k_2 < k_1 \quad ; \quad k_1 > -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 1.2, Estabilidad Caso 4: $\rho < 0, \phi < 0$

$$k_2 > k_1 \quad ; \quad k_1 > -\frac{\tau}{\phi}$$

Finalmente, usando los valores de parametros dados por la tabla 4-1 y reemplazando en los criterios de estabilidad se obtiene:

$$\begin{aligned} VP_1 &= \rho - \frac{\rho k_1}{k_2} = -0,4036 < 0 \\ VP_2 &= \tau + \phi k_1 = 6,599e^{-3} > 0 \end{aligned} \tag{4-7}$$

Por tanto el equilibrio es silla-nodo para los valores actuales de parámetros de tabla 4-1

Ω	0,000025	τ	-0,1
ϕ	0,55	ρ	0,025
q_1	0,5	q_2	0,5
k_1	12000	λ	0,1
k_2	700	δ	0,1

Tabla 4-1.: Valores de parámetros tomados de [9] y [17] que permiten alcanzar equilibrio sostenible.

4.1.3. Estabilidad de equilibrio 1.3: $X = k_2, Y = 0$

De manera análoga para el equilibrio anterior se obtiene las siguientes condiciones de estabilidad, la demostración de las restricciones se encuentran en el apéndice C.2

Equilibrio 1.3. Estabilidad Caso 1: $\rho > 0, k_1 > 0, \phi > 0$

Criterio de estabilidad para Equilibrio 1.3: $X = k_2, Y = 0$

$$k_1 < k_2 \quad ; \quad k_2 < -\frac{\tau}{\phi}, \quad \text{Con } \rho > 0 \quad , \quad k_1 > 0, \quad \phi > 0$$

En el sistema propuesto, el valor de los parámetros siempre cumplen $k_1 > 0$ y $\rho > 0$, por interés analítico también se considera el caso $\rho < 0$

Equilibrio 1.3, Estabilidad Caso 2 $\rho < 0, k_1 > 0$

Bajo estas condiciones las desigualdades para ρ y ϕ que garantizan la estabilidad cambian respectivamente de la siguiente forma.

$$k_1 > k_2 \quad ; \quad k_2 < -\frac{\tau}{\phi}$$

Usando los valores de la tabla (4-1) y reemplazando en los criterios de estabilidad:

$$VP_1 = \rho - \frac{\rho k_2}{k_1} = 0,023$$

$$VP_2 = \tau + \phi k_2 = 384,9$$

Por tanto el equilibrio $(k_2, 0)$ es un nodo Inestable.

4.1.4. Estabilidad de equilibrio 2

El equilibrio interno 2 está dado por las ecuaciones:

$$X^* = -\frac{\tau}{\phi}, \quad Y^* = -\frac{\rho\tau}{K_2\phi} - \rho - \frac{\rho\tau^2}{k_1k_2\phi^2} - \frac{\rho\tau}{k_1\phi} \quad (4-8)$$

Los valores propios se obtienen de J_{E_2} la cual es la matriz jacobiana (4-2) evaluada en el equilibrio (4-8), se obtiene:

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Con:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\rho}{k_2} \left(-\frac{\tau}{\phi} \right) - \rho - \frac{3\rho}{k_1k_2} \left(-\frac{\tau}{\phi} \right)^2 + \frac{2\rho}{k_1} \left(-\frac{\tau}{\phi} \right) - \left(-\frac{\rho\tau}{K_2\phi} - \rho - \frac{\rho\tau^2}{k_1k_2\phi^2} - \frac{\rho\tau}{k_1\phi} \right) \\ b &= - \left(-\frac{\tau}{\phi} \right) \\ c &= \phi \left(-\frac{\rho\tau}{K_2\phi} - \rho - \frac{\rho\tau^2}{k_1k_2\phi^2} - \frac{\rho\tau}{k_1\phi} \right) \\ d &= \tau + \phi \left(-\frac{\tau}{\phi} \right) \end{aligned}$$

Se obtienen las siguientes condiciones de estabilidad. Las demostraciones de cada condicione se encuentran en el apéndice C.3.

Caso 1: Valores propios Reales

Si los valores propios son reales quiere decir que se debe tener:

$$a^2 > -4bc$$

Para garantizar la estabilidad del equilibrio 2 se debe satisfacer la restricción:

$$-\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1k_2\phi} - \frac{\rho\tau}{k_1} > 0 \quad (4-9)$$

Caso 2: raíces imaginarias: $a^2 < -4bc$.

Condiciones de estabilidad para equilibrio 2 con raíces imaginarias:

$$\frac{-3}{k_2} - \frac{2\tau}{\phi k_1 k_2} + \frac{1}{k_1} > 0 \quad ; \quad a < 0 \quad \text{y} \quad a^2 < -4bc$$

Para los valores de parámetros dados en (4-1) se obtienen los valores propios:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0,04997274 \\ \psi_2 &= -0,0499536401 \end{aligned} \tag{4-10}$$

Por el teorema de estabilidad y los resultados de (4-10), se tiene que uno de los valores propios es positivo, y el otro es negativo, por esta razón el equilibrio 4 es silla-nodo.

4.2. Condiciones de bifurcación para los nodos

Las condiciones de bifurcación se obtienen a partir de los valores propios. (Ver apéndice C.4.1).

4.2.1. Bifurcación Fold (Silla-Nodo)

Una de las condiciones de bifurcación fold es la presencia de un único valor propios igual a cero, a continuación se presentan las restricciones necesarias para que se cumpla esta condición en cada uno de los 4 equilibrios hallados.

Equilibrio 1 (0,0)

Dados los dos valores propios en (4-4), uno de los valores propios debe ser cero, esta condición se verifica para los siguientes dos casos:

Caso 1: $VP_1 = 0, \quad VP_2 \neq 0$

$$\rho = 0 \text{ y } \tau \neq 0$$

Caso 2: $VP_1 \neq 0, \quad VP_2 = 0$

$$\rho \neq 0 \text{ ó } \tau = 0$$

Equilibrio 2 $(k_1, 0)$

De manera análoga al caso 1, se obtiene dos casos; cada uno relacionado con la presencia de uno de los valores propios igualados a cero.

Caso 1: $VP_1 = 0$; $VP_2 \neq 0$

$$k_1 = k_2 \text{ y } k_1 \neq -\frac{\tau}{\phi}$$

Caso 2: $VP_1 \neq 0$, $VP_2 = 0$

$$k_1 \neq k_2 \text{ y } k_1 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 3 $(k_2, 0)$

Se presenta de manera análoga a los casos anteriores las restricciones para garantizar un valor propio nulo y un segundo valor propio no nulo.

Caso 1: $VP_1 = 0$, $VP_2 \neq 0$

$$k_1 = k_2 \text{ y } k_2 \neq -\frac{\tau}{\phi}$$

Caso 2: $VP_1 \neq 0$, $VP_2 = 0$

$$k_1 \neq k_2 \text{ y } k_2 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 4

A partir del desarrollo analítico presentado en el apéndice C.4.1 se tienen dos valores propios de la forma :

$$VP_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2} \quad (4-11)$$

La condición de bifurcación se da cuando uno de los valores propios es igual a cero esto ocurre cuando $c = 0$ y por tanto:

$$-\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\rho\tau}{k_1} = 0 \quad (4-12)$$

La demostración de este resultado puede verse en el apéndice C.4.1

4.2.2. Condiciones para la bifurcación de Hopf

Una de las condiciones de bifurcación de Hopf es la presencia de exactamente dos valores propios con parte real nula y parte imaginaria diferente de cero, a continuación se muestran las condiciones necesarias para que ocurra esta bifurcación en cada punto de equilibrio

Equilibrio 1 $(0, 0)$, **Equilibrio 1.2** $(k_2, 0)$, **Equilibrio 1.3** $(k_2, 0)$

Para cada uno de estos equilibrios se tienen los valores propios asociados dados por las ecuaciones (4-4), (4-6) y (C-1) respectivamente. Se observa que para cada valor propio es imposible obtener raíces imaginaria, ya que no hay presencia de raíces en ninguna de las ecuaciones nombradas, por tal razón en ningún escenario estos equilibrios van a presentar bifurcaciones de Hopf.

Equilibrio 2

En el equilibrio 2, los valores propios tiene la forma obtenida en la ecuación (4-11). Con el fin de obtener valores propios imaginarios, esta ultima ecuación exige que el argumento de la raíz sea negativo y la parte real del valor propio sea nula por lo tanto las restricciones que satisfacen estas condiciones son:

$$\frac{-3}{k_2} - \frac{2\tau}{\phi k_1 k_2} + \frac{1}{k_1} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\tau}{k_2} - \phi - \frac{\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\tau}{k_1} < 0$$

La demostración de estas restricciones para el equilibrio 2 se encuentran en el apéndice C.4.2

4.2.3. Condiciones para la bifurcación Bogdanov-Takens

La aparición de una bifurcación Bogdanov-Takens (BT) exige la presencia de exactamente dos valores propios nulos. Para los 4 equilibrios hallados y a partir de sus respectivos valores propios dados por las ecuaciones (4-4), (4-6), (C-1) y (C-6) se presenta en esta sección las condiciones para garantizar la nulidad de los valores propios.

Equilibrio 1 $(0, 0)$

$$\rho = 0 \quad ; \quad \tau = 0$$

Equilibrio 1.2 $(k_1, 0)$

$$k_2 = k_1 \quad ; \quad k_1 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 1.3 $(k_2, 0)$

$$k_1 = k_2 \quad ; \quad k_2 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 2

Finalmente, a partir de los valores propios dados del equilibrio 2 dados por la ecuación (4-11), se garantiza que ambos valores propios son cero si:

$$-3k_1 - 2\tau + k_2 = 0 \quad \text{y} \quad K_1 + \tau + K_1 = \frac{\phi k_1 k_2}{-\tau}$$

Para los detalles de la demostración de estas condiciones de bifurcación BT en el equilibrio 2, revisar apéndice C.4.3

4.3. Diagrama de bifurcaciones de codimensión-1 para la tasa neta de crecimiento poblacional τ

Para los valores de parámetros dados en la tabla 4-2 y el sistema tres dimensional acoplado (3-12), se presentan 7 puntos de equilibrio del sistema. Ver Tabla 4-3. E_1, E_2, E_3, E_4 son hallados de manera analítica y E_5, E_6 y E_7 son hallados numéricamente.

Ω	0,000025	τ	-0,1
ϕ	0,55	ρ	0,025
q_1	0,5	q_2	0,5
K_1	12000	λ	0,1
K_2	700	δ	0,1
ϵ	0,005		

Tabla 4-2.: Parámetros del sistema tomados de [3]

En la figura 4-1, se grafica la coordenada Z del equilibrio E_7 (Rama superior), y la coordenada del equilibrio E_6 (Rama inferior). En el valor de $\tau = -0,0255$ asociado al evento LP los dos equilibrios se unen. El valor de τ asociado a este evento LP se denomina valor de bifurcación Limit Point. El equilibrio asociado a este valor se denomina análogamente, punto Limit Point. El punto de bifurcación LP representa la existencia de dos equilibrios antes del valor de bifurcación y la desaparición de estos posterior al valor de bifurcación. En la gráfica se evidencia la existencia de equilibrios antes del valor $\tau = -0,0255$ y la desaparición de

Equilibrio	Coordenadas (X, Y, Z)
E_1	$(0, 0, 0)$
E_2	$(k_1, 0, 0)$
E_3	$(k_2, 0, 0)$
E_4	$\left(-\frac{\tau}{\phi}, \rho \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) \left(\frac{1}{k_2} - 1\right), 0\right)$
E_5	$(7339, 0.0675, 2.58e-05)$
E_6	$(0.0182, 0.00101, 1.85e-05)$
E_7	$(0.167, 0.0946, 0.0158)$

Tabla 4-3.: Equilibrios para el sistema (3-12). Equilibrios analíticos hallados con valores de parametros de la tabla 4-2

estos equilibrios posterior a este valor.

La bifurcación LP y Hopf hallada anteriormente se encuentran bajo la

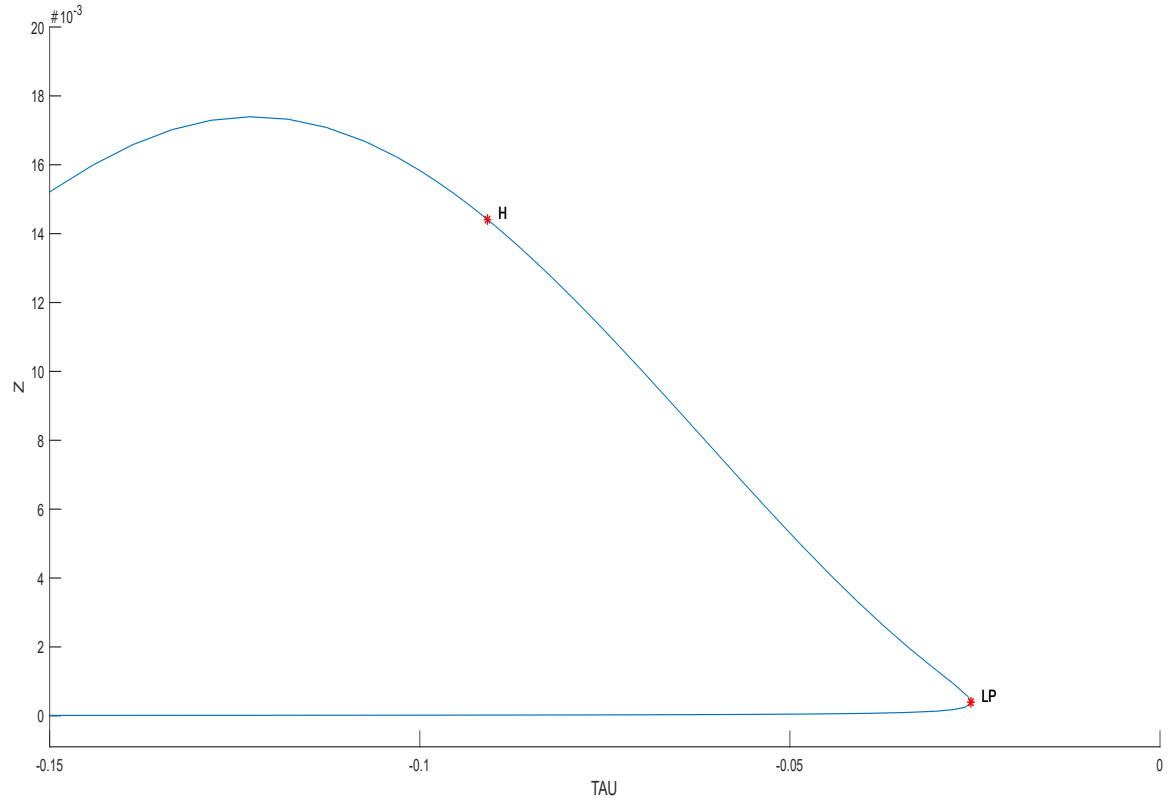


Figura 4-1.: Diagrama de bifurcación para el parámetro τ

El equilibrio E_7 cambia su estabilidad para valores posteriores al evento H . Antes del valor de $\tau = -0,0908$ asociado a la aparición del evento H el equilibrio E_7 es estable. Para valores posteriores a $\tau = -0,0908$ el equilibrio es foco inestable. Por otro lado E_6 (Rama inferior) se mantiene inestable para todo el intervalo $-0,15 < \tau < -0,0255$. En la Tabla 4-4, se verifican numéricamente los resultados de estabilidad para valores de $\tau = -0,1$ antes del evento H y $\tau = -0,05$ posterior al evento H .

		$\tau = -0,1$		$\tau = -0,05$	
		E_7	E_6	E_7	E_6
Eigenvalores: $v_{1,2,3}$	v_1	-0,0554	-0,208	-0.0564	-0.0111
	v_2	-0,0125+ 0,0922i	-0,0192	0.0272+0.042i	-0.0161
	v_3	-0,0125-0,092i	0,0239	0.0272-0.042i	0.0244
Estabilidad		ATRACTOR	SILLA	SILLA	SILLA

Tabla 4-4.: Valores propios y estabilidad para equilibrios de grafica 4-1

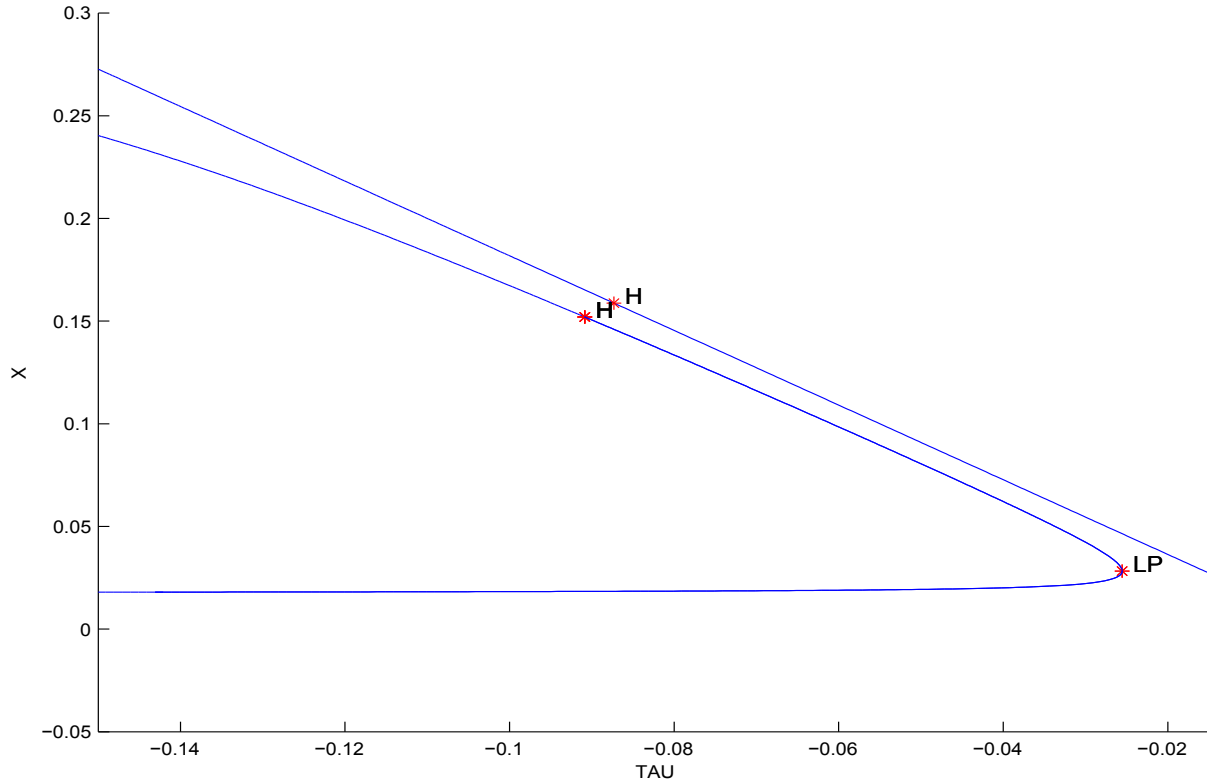


Figura 4-2.: Curvas de equilibrio para E_4 y E_7 . Los valores de bifurcación Hopf son $\tau = -0,090858$ y $\tau = -0,087312$ para E_4 y E_7 respectivamente

A la Figura 4-1 se le añade la curva de equilibrio asociada a E_4 obteniendo la Figura 4-2. El análisis de estabilidad para E_4 a partir de los valores de la tabla 4-5, demuestra que para valores anteriores al evento Hopf $\tau < -0,087312$ se tienen valores propios (v) de la forma $v_{1,2} = a_{1,2} + wi_{1,2}$ con $a < 0$ y $w \neq 0$, y $v_3 > 0$. Debido a la presencia de una valor propio positivo y dos valores propio imaginarios E_4 se determina “foco inestable”. Para valores posteriores al evento Hopf $-0,087312 < \tau$ el equilibrio presenta valores propios de la forma $v_{1,2,3} = a_{1,2,3} > 0$, debido al valor real positivo de los valores propios E_4 se determina equilibrio “inestable”.

		E_4	
		$\tau = -0,1$	$\tau = -0,05$
Eigenvalores	v_1	-0.0199-0.094i	0.029-0.052i
	v_2	-0.0199+0.094i	0.029+0.052i
	v_3	1.95	1.18
Estabilidad		SILLA	INESTABLE

Tabla 4-5.: Valores propios para el equilibrio E_4

El evento Hopf asociado al equilibrio E_4 , garantiza que el equilibrio cambia de ser foco inestable a ser estable. En este valor de bifurcación Hopf también aparecen ciclos límites estables para valores de τ posteriores al valor de bifurcación ($-0,0873 < \tau$), en la Figura **4-3**, se muestra el retrato de fase de los ciclos límite para la coordenada de recurso natural (X), a medida que aumenta la tasa de crecimiento poblacional τ . Los ciclos límite se presentan para $-0,0873 < \tau < -0,0759$.

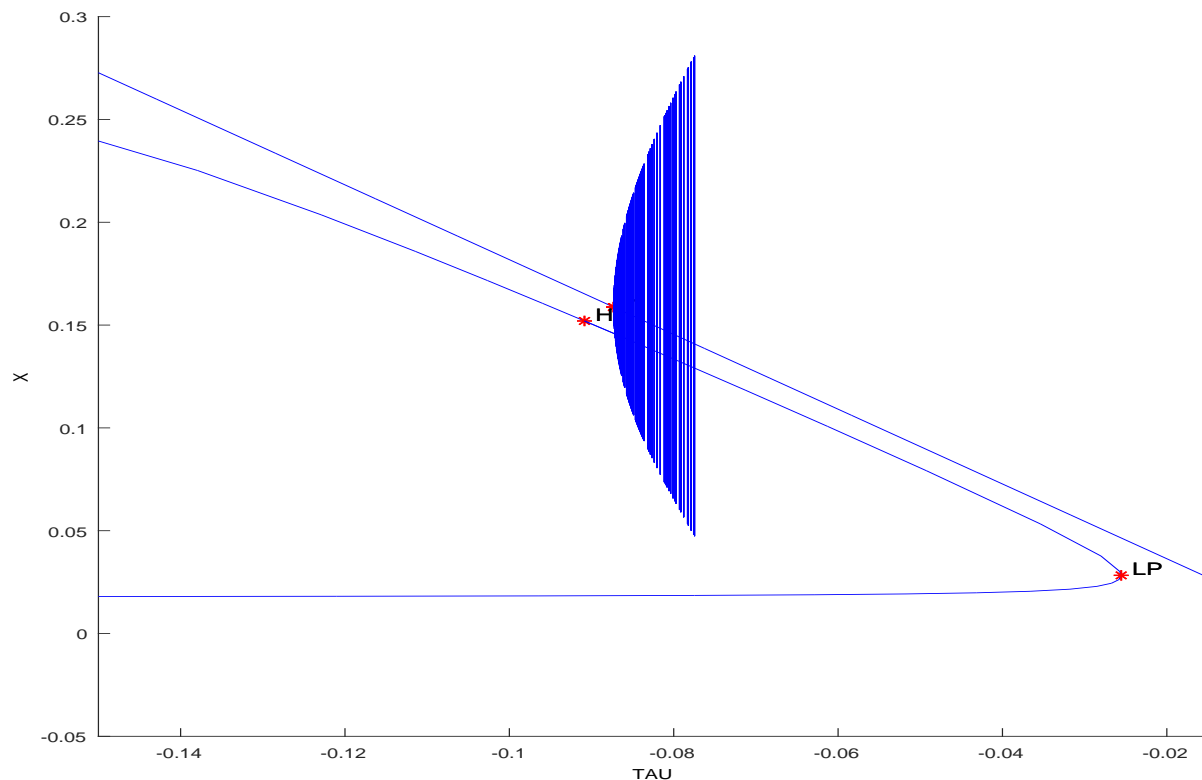


Figura 4-3.: Ciclos límites generados posterior a la bifurcación de Hopf asociada a E_4 , para $-0,0873 < \tau < -0,0759$

De manera análoga a la Figura 4-3, en la Figura 4-4 se muestran los ciclos límites generados por la bifurcación de Hopf asociada a la curva de equilibrio E_7 . Los ciclos límites ocurren en $-0,0908 < \tau < -0,0789$. A partir de los datos de las gráficas 4-2, 4-3, 4-4, se establecen 7 regiones de equivalencia topológica, para el retrato de fase asociado a los valores de tau de los siguiente intervalos:

- Región 1** $-0,15 < \tau < -0,0908$: escenario de un equilibrio estable y dos equilibrios silla.
- Región 2** $-0,0908 < \tau < -0,0873$: escenario de tres equilibrios silla y un ciclo límite estable.
- Región 3** : $-0,0873 < \tau < -0,0789$: escenario de un equilibrio inestable, dos equilibrios silla y dos ciclos límite estable.
- Región 4** $-0,0789 < \tau < -0,0759$: escenario de un equilibrio inestable dos equilibrios silla y un ciclo límite estable.
- Región 5** $-0,0759 < \tau < -0,0255$: escenario de un equilibrio estable y dos equilibrios silla.
- Región 6** $\tau = -0,0255$: escenario de un equilibrio inestable y un punto de bifurcación LP.
- Región 7** $-0,0255 < \tau < -0,01$: escenario de un único equilibrio inestable.

Para cada región establecida, se hace necesario la representación cualitativa de cada uno de

los retratos de fase. Con el objetivo de facilitar la notación, los tres equilibrios E_4, E_6, E_7 del diagrama de bifurcación de la Figura 4-2, se renombran respectivamente como E_1, E_2, E_3 ,

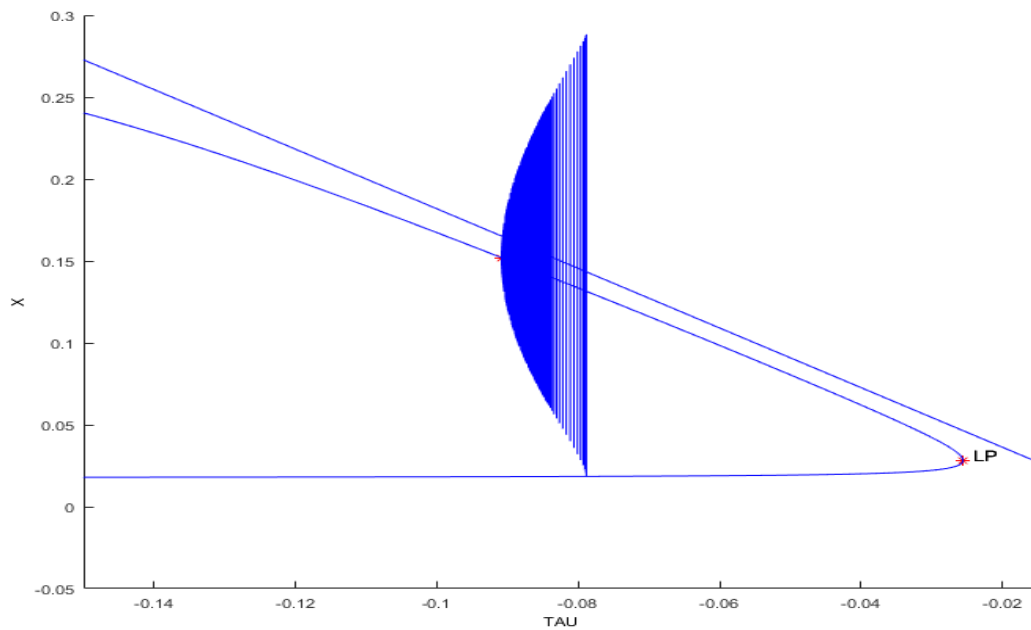


Figura 4-4.: Ciclos límites generados posterior a la bifurcación de Hopf asociada a E_7 para $-0,0908 < \tau < -0,0789$

4.3.1. Región 1

		Equilibrios		
		E_1	E_2	E_3
Coordenadas	X	0.181	0,167	0,018
	Y	0.0924	0,094	0,00101
	Z	0	0,0158	$1,85e^{-05}$
Eigenvalores $v_{1,2,3}$	v_1	-0.0199-0.094i	-0,0552	-0,208
	v_2	-0.0199+0.094i	$-0,0125 + 0,0922i$	-0,0192
	v_3	1.95-2.05i	$-0,0125 - 0,092i$	0,0239
Estabilidad		FOCO INESTABLE	ATRACTOR	SILLA

Tabla 4-6.: Caracterización de los tres puntos de equilibrio en región 1 para $\tau = -0,1$

En $-0,15 < \tau < -0,090858$ se toma el valor de $\tau = -0,1$ los equilibrios encontrados en el diagrama de bifurcación están se caracterizan en la tabla **4-6**. Se observa que la parte real de los valores propios de E_2 es negativa, y se considera un equilibrio estable. E_1 tiene valores imaginarios con parte real negativa, lo cual indica que su variedad estable es de dimensión 2, adicional a esto la componente imaginaria expresa que la estabilidad se manifiesta a modo de foco sobre la variedad estable. El equilibrio E_3 presenta dos valores propios reales negativos y uno positiva, lo cual determina que es un equilibrio silla. En la figura **4-5**, se muestran cada uno de los equilibrios. E_2 representado en rojo, E_1 azul y E_3 en verde. Se evidencia la estabilidad de E_2 . El comportamiento de foco sobre la 2-variedad estable de E_1 se muestra sobre el plano XY , la variedad estable de este mismo punto se ubica sobre el eje coordenado Z , por esta razón para condiciones iniciales en vecindades del plano XY cerca a E_1 , el retrato de fase se aleja y converge a E_2 , esto ocurre debido a que es posible que la variedad inestable 1-dimensional de E_1 se conecta con la variedad estable de E_2 .

Para E_3 se tienen dos valores propios negativos y uno positivo, la 2-variedad estable de E_3 se conecta con la variedad estable de E_1 sobre el plano XY .

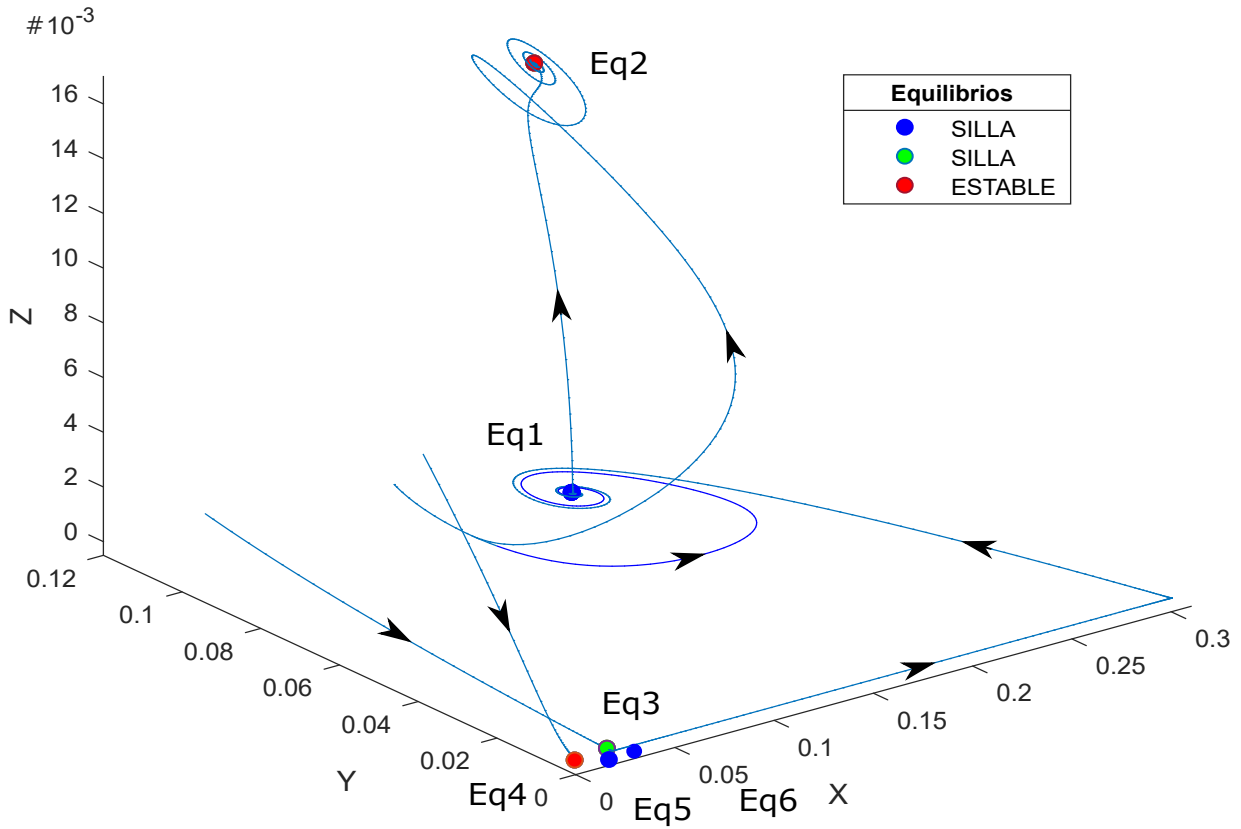


Figura 4-5.: Diagrama de fase región 1 para $\tau = -0,1$

Análisis biológico región 1

Se puede ver que en ausencia de capital existe un atractor que permite un escenario sostenible de recurso y población, dado por la órbita en espiral sobre el plano XY , esto permite concluir que no es necesario un capital económico en la población del modelo para que exista un balance en la relación de ser humano con recurso natural. Se puede ver que este balance no es oscilatorio sino que converge a un punto de equilibrio estable, adicional a esto la espiral descrita sobre el plano, representa periodos de tiempo de pérdidas poblacionales y de recurso que pueden entenderse como crisis locales necesarias para alcanzar el equilibrio sostenible.

Al incluir el capital, existe un equilibrio atractor al cual convergen las orbitas, este nuevo equilibrio E_2 muestra que el sistema no colapsa con la inclusión de la variable de capital económico, y que el sistema se estabiliza en un equilibrio de mayor sostenibilidad, ya que posee una coordenada de población más alta y de recurso más baja. Este hecho muestra que la inclusión de capital en la sociedad es benéfico para el aumento de la misma y que además disminuye la cantidad de recurso renovable y por ende también disminuye el impacto sobre el ambiente ecológico que genera la producción de recurso para la supervivencia de la

población. Por otro lado la convergencia de una de las órbitas al origen es a causa de que la condición inicial de recurso pertenece a un valor inferior al valor permitido k_1 , en el cual se imposibilita el crecimiento autónomo del recurso y por ende se lleva a la extinción del mismo y de la población.

En la figura se puede que la coordenada de recurso asociado a los equilibrios siempre va a estar en el intervalo $k_1 < X < k_2$, debido a que por encima de k_2 el recurso tiende a decrecer entonces el valor máximo de recurso permitido para un tiempo prolongado es igual o menor a k_2 y de igual forma para un valor de recurso menor a k_1 la tasa de crecimiento decrece, llevando el recurso a una situación de extinción.

4.3.2. Región 2

En $-0,090858 < \tau < -0,087312$ se toma el valor de $\tau = -0,09$, los equilibrios encontrados en el diagrama de bifurcación se caracterizan en la tabla 4-7. Se observa que en este escenario solo cambia la estabilidad de E_2 el cual pasa de ser equilibrio estable a foco inestable. En la figura 4-6 se muestra el cambio de estabilidad, ahora el punto inestable se representa en azul. También se presenta un ciclo límite estable alrededor de E_2 debido a que el valor de $\tau = -0,09$ corresponde al valor posterior a la bifurcación de Hopf en donde cambia la estabilidad del equilibrio y se genera un ciclo límite estable, ambos fenómenos se observan al comparar las figuras 4-5 con 4-6 correspondientes a valores anteriores y posteriores a la bifurcación Hopf de E_2 . Los demás equilibrios conservan su estabilidad a pesar del cambio del valor de τ .

		Equilibrio		
		E_1	E_2	E_3
Coordenadas	X	0,163	0,150	0.0183
	Y	0,0948	0.0946	0.00114
	Z	0	0.0142	0
Eigenvalores $v_{1,2,3}$	v_1	$-0,0038 - 0,092i$	$-0,0555$	-0.188
	v_2	$-0,0038 + 0,092i$	$0.00106+0.0871i$	-0.0192
	v_3	1,87	$0.00106-0.087i$	0.0239
Estabilidad		FOCO INESTABLE	FOCO INESTABLE	SILLA

Tabla 4-7.: Caracterización de los tres puntos de equilibrio en región 2 para $\tau = -0,09$

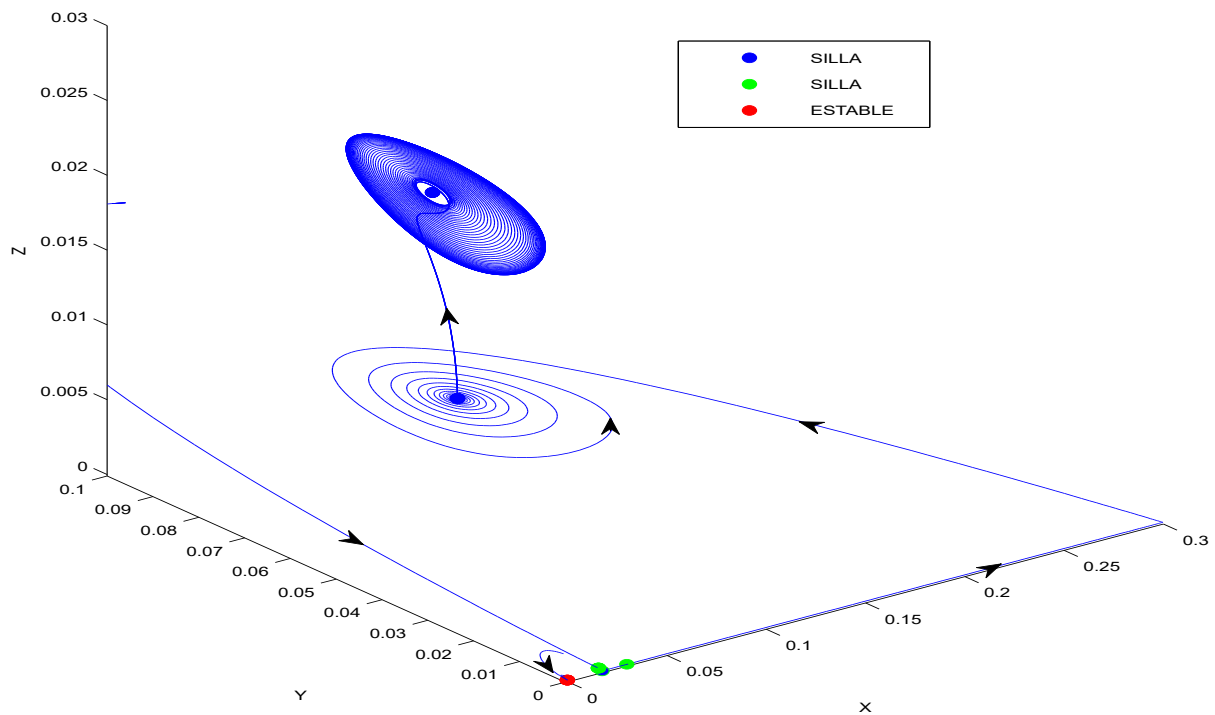


Figura 4-6.: Diagrama de fase para $\tau = -0,09$

Análisis biológico región 2

Se puede ver que en ausencia del capital económico, sobre el plano XY , se presenta un equilibrio, el cual muestra el balance que puede haber entre población y recurso natural sin la necesidad de capital económico. Sin embargo cuando se incluye capital económico después de un tiempo largo de estabilización, el sistema alcanzará un pico de población y posterior a este pico descenderá hasta un nivel mínimo de población, esto se puede pensar como escenarios en que la población humana muere continuamente hasta alcanzar un valor de población específico y posterior a esto la población crece de nuevo hasta un pico máximo, de igual forma el ciclo mostrado en la figura 4-6 representa el mismo comportamiento para recurso natural y capital. Esto es considerado algo poco conveniente para el sistema ya que las oscilaciones de población son significativos y por ende también las muertes de la población.

Es posible pensar las oscilaciones de una manera más conservadora como una disminución en la tasa de natalidad, sin embargo como el parámetro relacionado con la tasa de natalidad

$\tau = -0,09$ es constante, la tasa de natalidad y mortalidad no servirían como explicación de las oscilaciones del sistema. De manera análoga los equilibrios se encuentran entre el valor de recurso que permite el crecimiento autónomo del mismo, y para escenarios en que el recurso se lleva a niveles por debajo de k_1 se presenta extinción de recurso y población, lo cual se evidencia en la órbita que converge al equilibrio ubicado en el origen en color rojo.

4.3.3. Región 3

En $-0,0873 < \tau < -0,0789$: se toma el valor de $\tau = -0,08$, los equilibrios encontrados en el diagrama de bifurcación se caracterizan en la tabla 4-8. Se observa que en este escenario solo cambia la estabilidad de E_1 el cual pasa de ser equilibrio silla a equilibrio inestable. En la Figura 4-7 se muestra el cambio de estabilidad, ahora el equilibrio inestable se representa en negro. También se presenta un nuevo ciclo límite estable alrededor del equilibrio E_1 . Esto ocurre debido a que el valor de $\tau = -0,08$, corresponde a un valor posterior a la bifurcación de Hopf en donde cambia la estabilidad del equilibrio y se genera un ciclo límite estable. Ambos fenómenos se observan al comparar las Figuras 4-6 y 4-7 correspondientes a valores anteriores y posteriores a la bifurcación hopf de E_1 . En esta situación el nuevo ciclo límite aparece sobre el plano XY .

		Equilibrios		
		E_1	E_2	E_3
Coordenadas	X	0.145	0.133	0.0184
	Y	0.0941	0.091	0.00132
	Z	0	0.0122	0
Eigenvalores	v_1	0.0092+0.0863i	-0.0556	-0.168
	v_2	0.0092-0.0863i	0.0119+0.079i	-0.019
	v_3	1.75	0.0119-0.079i	0.024
Estabilidad		INESTABLE	FOCO INESTABLE	SILLA

Tabla 4-8.: Caracterización de los tres puntos de equilibrio y ciclos límite en región 3 para $\tau = -0,08$

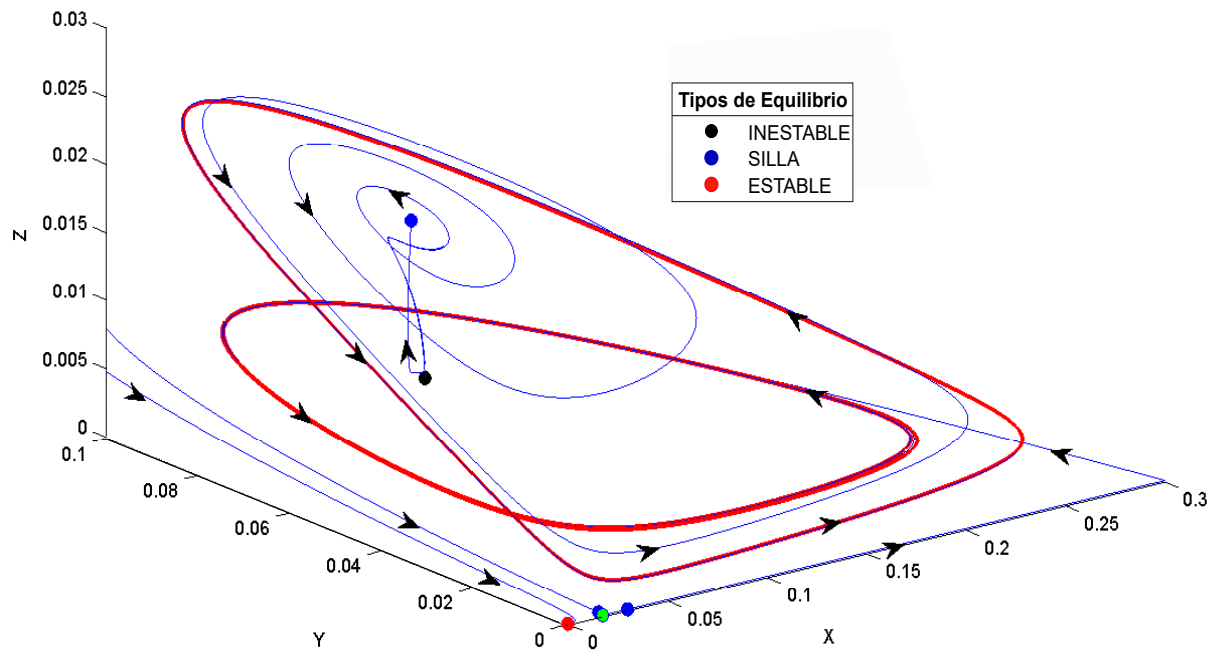


Figura 4-7.: Diagrama de fase para $\tau = -0,08$

Análisis biológico región 3

En este escenario se presenta sobre el plano XY un ciclo límite, lo que muestra que en ausencia de capital, no se alcanza un balance entre población y recurso natural como en las regiones anteriores, sino que se que presenta un comportamiento oscilatorio que expone el aumento y disminución de población y recurso de manera consecutiva, en esta situación a pesar de las oscilaciones ninguna variable llega a la extinción, puede verse también en la Figura 4-7, que la amplitud del ciclo ubicado sobre el plano es mayor comparada con la amplitud del ciclo de la Figura 4-6.

En presencia de pequeñas cantidades de capital se puede ver que el sistema adquiere mayor valorización del capital y gracias a la inversión económica la sociedad es capaz de incrementar el capital presente. Este hecho se puede evidenciar a partir de la órbita que tiene condiciones iniciales cercanas al equilibrio repulsor (Inestable) ver Figura 4-6, en este escenario se presenta un incremento de capital desde cero hasta $X \approx 0,012$, posterior a este incremento el sistema presenta de nuevo crisis locales que se muestran por el comportamiento en espiral de la órbita en vecindades del nodo silla, estos escenarios de crisis aumentan sus oscilaciones

de manera indefinida y por tanto las crisis de población y de recurso se profundizan, este hecho se muestra por la órbita atractora que fuera del plano XY .

4.3.4. Región 4

En $-0,0789 < \tau < -0,0759$: se toma el valor de $\tau = -0,0765$, los equilibrios encontrados en el diagrama de bifurcación se caracterizan en la tabla 4-9. Se observa que en este escenario no cambia la estabilidad de ningún equilibrio. En la Figura 4-8 desaparece el ciclo límite estable alrededor de E_2 . Esto ocurre debido a que el valor de $\tau = -0,0765$, corresponde a un valor en el que los ciclos límite desaparecen. La desaparición de este ciclo límite se observa al comparar las figuras 4-7 y 4-8 correspondientes a valores de τ anteriores a la desaparición de los ciclos límite y posteriores a este evento.

		Equilibrios		
		E_1	E_2	E_3
Coordenadas	X	0.139	0.127	0.0185
	Y	0.0931	0.0903	0.00139
	Z	0	0.0115	0
Eigenvalores $v_{1,2,3}$	v_1	0.013-0.0834I	-0.0557	-0.162
	v_2	0.013+0.083i	0.0151+0.075i	-0.0188
	v_3	1.699	0.0151-0.075i	0.024
Estabilidad		INESTABLE	FOCO INESTABLE	SILLA

Tabla 4-9.: Caracterización de equilibrios para $\tau = -0,0765$

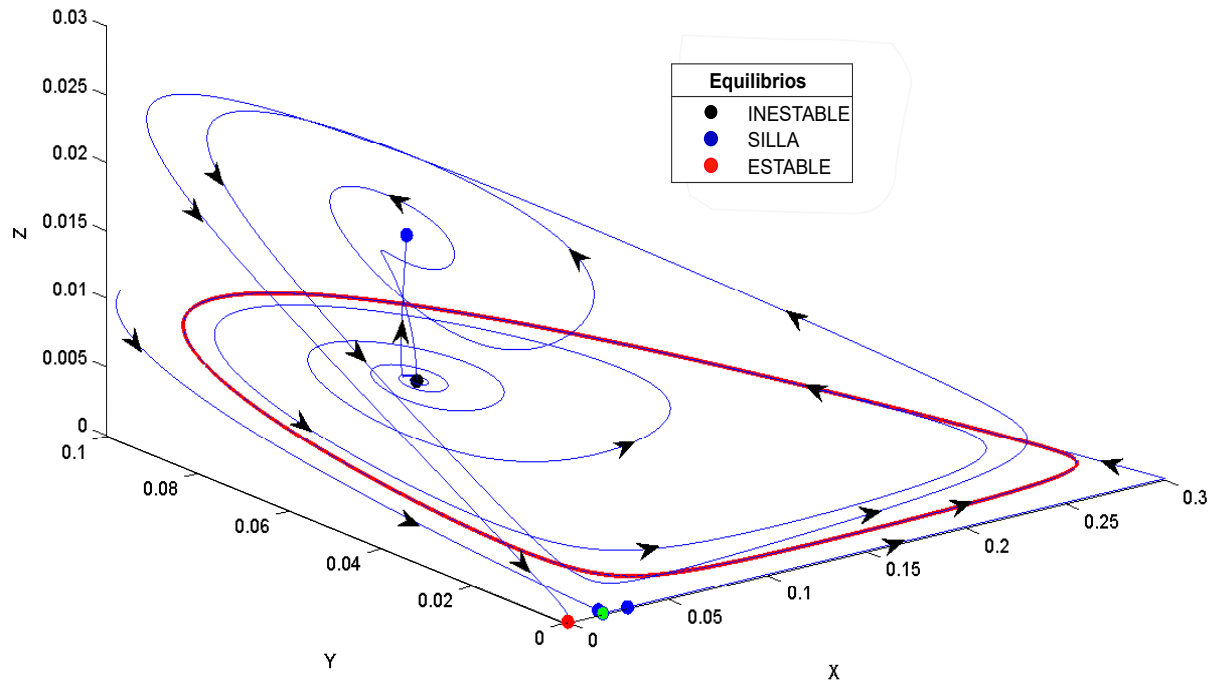


Figura 4-8.: Diagrama de fase para $\tau = -0,0765$

Análisis biológico región 4

En este escenario se puede ver que en ausencia de capital económico, las crisis económicas se mantiene sobre el plano XY , lo que se representa por el ciclo límite de la Figura 4-8; sin embargo, al añadir el capital económico el equilibrio repulsor en negro permite una situación similar a la de la región 3, describiendo un aumento de capital en la sociedad y posterior a este oscilaciones que muestran escenarios de crisis, en esta región el sistema presenta diversas crisis a lo largo del tiempo que aumentan su gravedad, y se puede ver que posterior a la ultima crisis de de mayor gravedad representada por la oscilación de mayor amplitud, el sistema converge a cero lo cual representa extinción de las tres componentes de sostenibilidad.

Se puede concluir entonces que en ausencia de capital se presentan crisis periódicas que permiten la supervivencia tanto del recurso como de la población, sin embargo al inyectar capital en esta sociedad, hay un periodo de incremento y multiplicación de capital pero a largo plazo esta inyección de capital lleva el sistema a la extinción. Este fenómeno muestra que se presenta mayor sostenibilidad en el caso en que la sociedad sobrevive a partir del recurso natural y en ausencia de capital, por otro lado se puede ver que si la sociedad

incluye el capital en su economía a largo plazo se genera la extinción de la población y de recurso.

4.3.5. Región 5

En $-0,0759 < \tau < -0,0255$: se toma el valor de $\tau = -0,05$, los equilibrios encontrados en el diagrama de bifurcación se caracterizan en la Tabla 4-10. Se observa que en este escenario se mantiene el tipo de estabilidad para todos los equilibrios. Sin embargo se presenta la desaparición del ciclo límite ubicado en el plano XY . En la Figura 4-9 se muestra la ausencia del ciclo límite estable alrededor de E_3 . Esto ocurre debido a que el valor de $\tau = -0,05$, corresponde a un valor en el que el ciclo límite desaparecen. La desaparición de este ciclo límite se observa al comparar las Figuras 4-7 y 4-8 correspondientes a valores de τ anteriores a la desaparición de los ciclos límite y posteriores a este evento.

En este escenario las orbitas convergen a cero para la gran mayoría de condiciones iniciales. Los escenarios de sostenibilidad se consiguen para condiciones iniciales que pertenezcan a la variedad estable de los equilibrios. Sobre el plano XY la única variedad estable es unidimensional, lo que significa que condiciones iniciales sobre esta variedad, bajo pequeñas perturbaciones puede trasladar la condición inicial sobre la variedad inestable, y en consecuencia generar un escenario de extinción representado en la Figura 4-9, por la órbita que conecta el equilibrio E_3 y el origen.

		Equilibrio		
		E_1	E_2	E_3
Coordenadas	X	0.09	0.08	0.0193
	Y	0.073	0.0658	0.00244
	Z	0	0.0053	0
Eigenvalores	v_1	0.0293-0.052i	-0.0564	-0.0111
	v_2	0.0293+0.052i	0.0272+0.042i	-0.0161
	v_3	1.188	0.0272-0.042i	0.0244
Estabilidad		INESTABLE	FOCO INESTABLE	SILLA

Tabla 4-10.: Caracterización de equilibrios para $\tau = -0,0765$

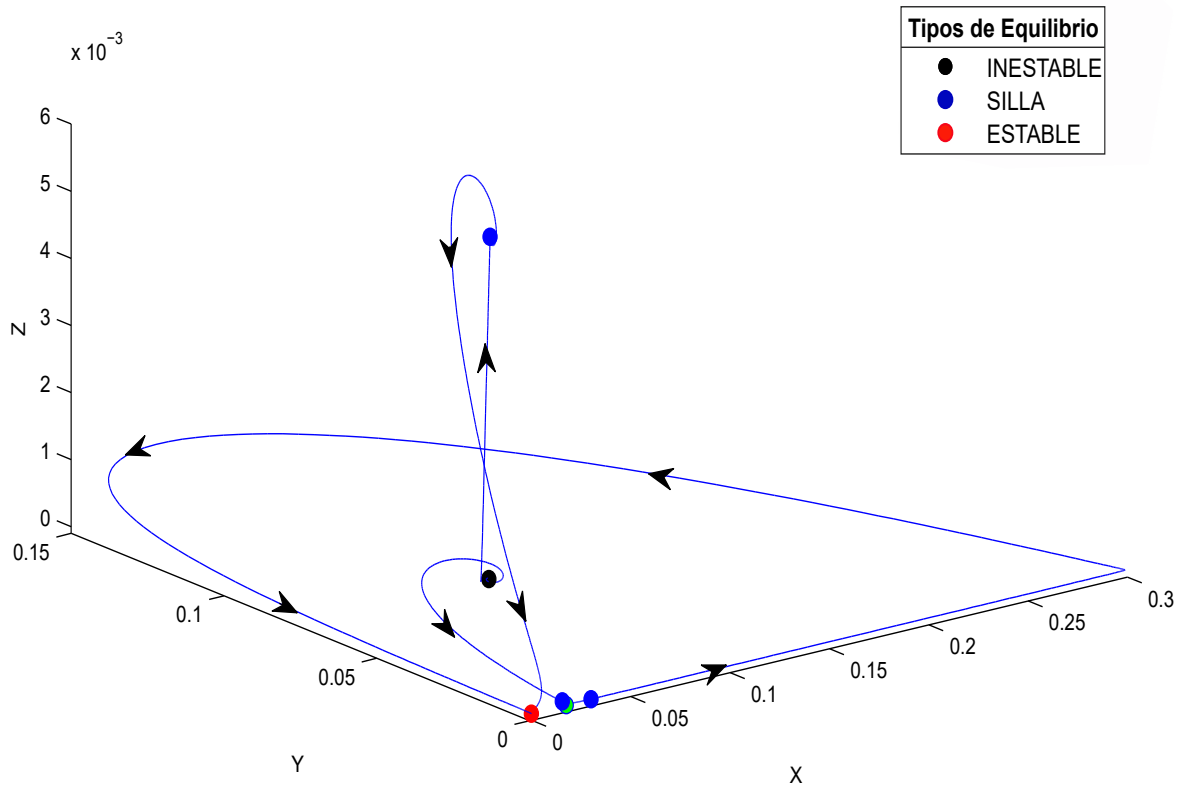


Figura 4-9.: Diagrama de fase para $-0,0759 < \tau < -0,0255$

Análisis biológico región 5

En esta región independiente de la condición inicial tomada para el sistema, siempre se va a presentar extinción de las variables, también se ve que en ausencia de capital y para valores de población muy pequeña es posible que el recurso crezca hasta su máxima capacidad definida por limitaciones espaciales, posterior a este crecimiento de recurso, la tasa de fertilidad de la población, aumenta proporcional a este recurso natural, por tal motivo se presenta un incremento de población hasta un valor de $Y \approx 0,15$, en periodos anteriores a alcanzar este pico se puede ver que el stock de recurso natural X empieza a disminuir, lo cual se debe al incremento de la extracción de recurso (M) necesaria para la supervivencia de la población, por esta situación de pico máximo poblacional, el recurso fue llevado a un valor inferior de su límite para reproducción autónoma del mismo, lo cual genera una extinción paulatina del mismo. Este decrecimiento en el stock del recurso se detiene únicamente con la desaparición del recurso, por esta razón se puede ver que posterior al pico poblacional disminuyen rápidamente población y recurso, presentando una situación de extinción para ambas variables.

Si se hace una inyección de capital para la población, el capital aumenta debido a que el

valor de reinversión λ permite un incremento de capital de un periodo al siguiente, este crecimiento económico se muestra en la órbita que conecta el equilibrio repulsor en color negro y el equilibrio interior nodo silla en azul. Posterior a esta fase de crecimiento se presenta un crecimiento adicional de capital acompañado de una disminución de recurso natural, esta disminución está relacionado con la imposibilidad de crecimiento autónomo debido a la sobreexplotación, de esta manera se presenta una disminución simultanea de las tres variables ya que la población disminuye por la ausencia de recurso y a pesar de que el capital aumenta por el parámetro λ , los valores de población y recursos son demasiado bajos para la producción económica. Finalmente se alcanza un escenario de extinción, que se evidencia por la convergencia a cero de la órbita que proviene del equilibrio interior nodo silla.

4.3.6. Región 6

Para el valor de $\tau = -0,0255$ se encuentran los equilibrios del diagrama de bifurcación y se caracterizan en la Tabla 4-11. Se observa que en este escenario solo se muestra el punto de equilibrios E_1 asociado al equilibrio original de las regiones anteriores, para el valor actual de τ este equilibrio mantiene su estabilidad. En este escenario aparece un equilibrio E_2 denominado punto de bifurcación LP, debido a que en este equilibrio E_2 y E_3 de la gráfica anterior 4-10 se unen formando un nuevo equilibrio que se renombra como E_2 .

En la Tabla 4-11 se observa que E_2 tiene un valor propio igual a cero, por esta razón el equilibrio se denomina no hiperbólico. Los puntos de equilibrios no hiperbólicos son equilibrios para los cuales no se puede determinar la estabilidad de manera analítica. Por esta razón su estabilidad se debe derivar a partir de las órbitas aproximadas en vecindades del punto. La Figura 4-10, muestra órbitas estables e inestables en vecindades del equilibrio, por tanto es posible que el equilibrio E_2 continúe siendo un equilibrio silla a pesar del cambio en el valor de τ .

Este escenario presenta una órbita cercana a E_1 que permite el incremento del capital económico hasta un valor máximo cercano a 0,0015 ver Figura 4-10, posterior a este umbral la órbita desciende hasta la extinción de las tres variables de sostenibilidad. En comparación con el escenario asociado a $\tau = -0,05$ Figura 4-9, la órbita cercana a E_1 permite un incremento hasta 0,008, lo cual supera el umbral máximo de la región 6, con este análisis es posible afirmar que las condiciones para la coexistencia de las variables de recurso natural, capital y población son más favorables en la región 5 con valores de $-0,0759 < \tau < -0,0255$ que en la región 6 con valor de $\tau = -0,0255$.

		Equilibrio	
		E_1	E_2
Coordenadas	X	0.0464	0.0282
	Y	0.0349	0.0139
	Z	0	0.000394
Eigenvalores $v_{1,2,3}$	v_1	$0,018 - 0,0032i$	-0.0627
	v_2	$0,018 + 0,0032i$	0
	v_3	0,208	0.0277
Estabilidad		FOCO INESTABLE	LIMIT POINT

Tabla 4-11.: Caracterización de equilibrios para $\tau = -0,0255$

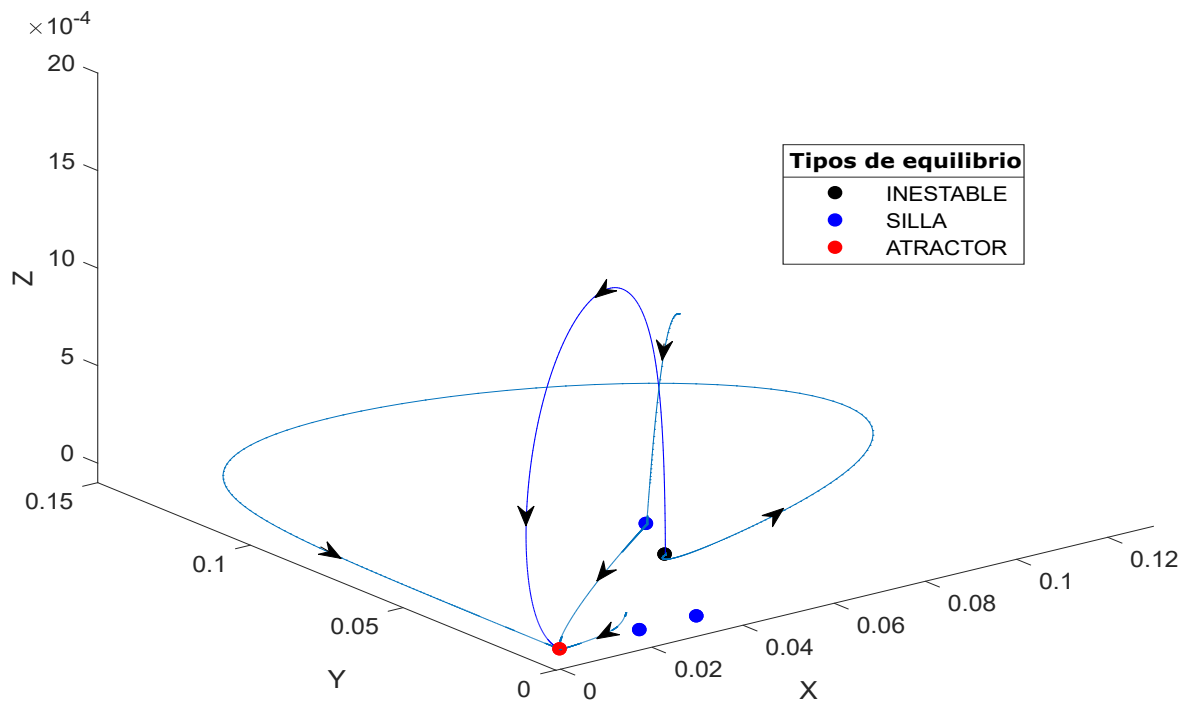


Figura 4-10.: Diagrama de fase para $\tau = -0,0255$

En este escenario si se parte de los valores de población recurso y capital asociados al equilibrio repulsor y se incluye un pequeño capital en el sistema, el capital de manera análoga a la Figura 4-9 crece rápidamente, sin embargo el recurso natural disminuye a causa del alto valor de la tasa neta de crecimiento poblacional lo cual genera un incremento en la tasa de extracción, la rápida disminución del recurso genera la extinción de la población.

Por otro lado si partimos del mismo punto repulsor, sin la inclusión de capital, entonces el recurso económico crece hasta su capacidad máxima, esto da lugar al crecimiento de la población y posteriormente debido a la alta demanda se genera de nuevo extinción de las variables.

Al comparar los dos escenarios de inclusión y ausencia de capital, se puede ver en la Figura 4-10 que después de un tiempo significativo se llega a la extinción en ambos casos, sin embargo en el escenario de ausencia de capital antes de la extinción se presentan picos de crecimiento de recurso y de población, estos picos de crecimiento no ocurre en la presencia de capital ya que después del crecimiento económico se presenta disminución simultanea de población y recurso. Por esta razón se considera que la presencia de capital en el sistema genera estados desfavorables para la supervivencia de la población y el escenario de ausencia de capital permite mayor crecimiento en ciertos periodos de tiempo.

4.3.7. Región 7

En $-0,0255 < \tau < -0,01$: se toma el valor de $\tau = -0,02$, los equilibrios encontrados en el diagrama de bifurcación se caracterizan en la Tabla 4-12. Se observa que en este escenario solo se muestra el punto de equilibrios, E_1 asociado al equilibrio original de las regiones anteriores. Los demás equilibrios han desaparecido debido a que el valor de $\tau = -0,02$ corresponde a un valor posterior a la bifurcación LP. Es conocido que para valores posteriores a este evento LP dos equilibrios desaparecen simultáneamente. De esta forma, de los tres equilibrios anteriores solo se mantiene E_1 y tres equilibrios triviales $(0, 0, 0)$, $(K_1, , 0, 0)$ y $(k_2, 0, 0)$ representado en la figura 4-11.

		Equilibrio	
		E_1	
Coordenadas	X	0,0363	
	Y	0,0236	
	Z	0	
Eigenvalores: $v_{1,2,3}$	v_1	0,0211 - 0,0048i	
	v_2	0,0211 + 0,0048i	
	v_3	0,363	
Estabilidad		FOCO INESTABLE	

Tabla 4-12.: Caracterización de equilibrios para $-0,0255 < \tau < -0,01$

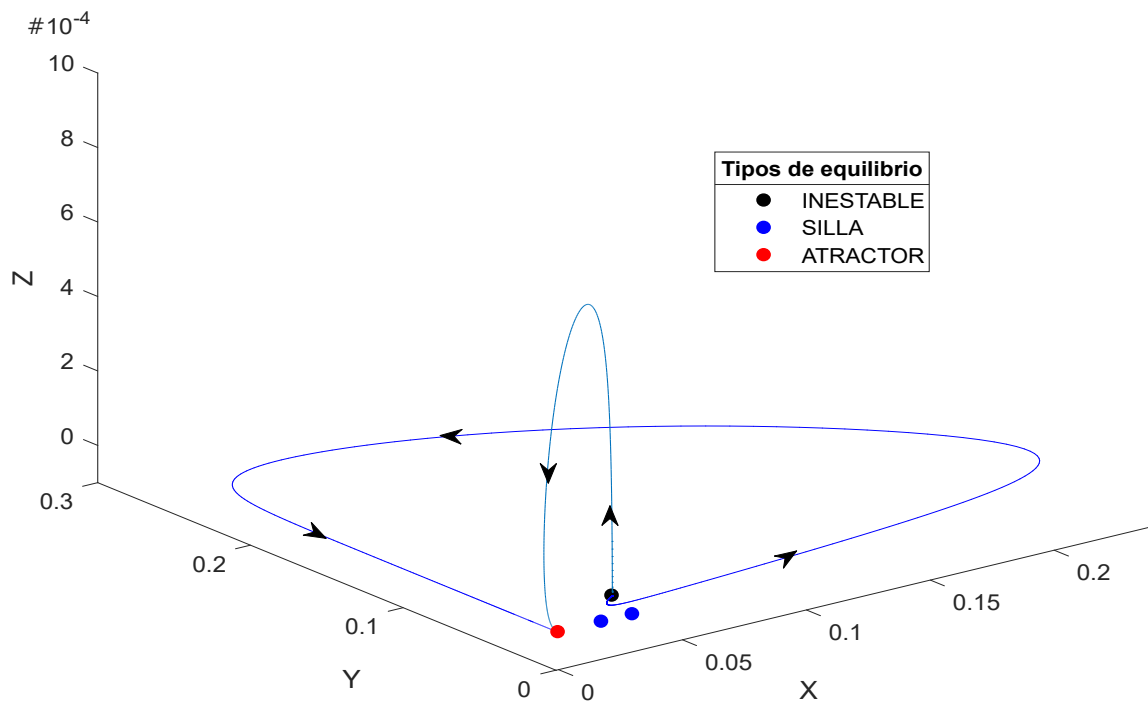


Figura 4-11.: Diagrama de fase para $\tau = -0,02$

Para el valor de $\tau = -0,02$ se presenta la desaparición de unos de los equilibrios Nodo silla ubicado en el interior del plano XY , de esta forma la posibilidad de alcanzar un balance entre población y recurso se anula, ya que el único punto de equilibrio interior genera repulsión bajo cualquier tipo de perturbación. La región 7 también presenta únicamente orbitas que convergen al origen, y además de esto también presenta de manera análoga a la Figura 4-10 picos de crecimiento de recurso, población y económico, pero a diferencia de las regiones anteriores estos picos se dan en valores de $X = 0,2$; $Y = 0,3$ y $Z = 0,0006$, lo que quiere decir que el crecimiento es mínimo. Con este hecho se verifica que un aumento paulatino de la tasa neta de crecimiento lleva el sistema a escenarios de mayor insostenibilidad.

4.4. Diagrama de bifurcaciones de codimensión-2 en un punto Bogdanov-Takens (BT)

Se analizan los efectos en la estabilidad (puntos de Equilibrio) del sistema (3-12) al variar los parametros ρ y τ

Puntos de Equilibrio: Un punto de equilibrio X_{EP} del sistema es una solución del sistema $f(X_{EP}) = 0$. En la Figura 4-12, se muestra una curva (azul) la cual representa los valores del capital (Z) para equilibrios del sistema, esta muestra el valor de capital Z que corresponde a la coordenada de equilibrio. En el eje horizontal se encuentra la tasa neta de crecimiento intrínseco del recurso (ρ). Se puede observar que sobre la curva están marcados eventos LP , H , que dividen la curva en tres secciones. Primera: sección de curva superior entre evento LP y H . Segunda: sección de curva superior posterior a evento H . Tercera: sección de curva inferior posterior a evento LP , en esta sección se presenta el evento NE pero no se tiene en cuenta como criterio para una nueva sección de curva ya que no representa un fenómeno significativo para el modelo matemático.

Las tres secciones de curva corresponden a equilibrios con estabilidades distintas ya que los valores propios asociados a los equilibrios cambian de signo en cada sección de curva. La primera sección corresponde a un equilibrio que posee todos sus valores propios con parte real negativa, por esta razón el equilibrio es estable, esta sección de curva superior corresponde a valores de $0,002 < \rho < 0,00818$. En la segunda sección de la curva superior, posterior al evento H el equilibrio tiene asociados valores propios complejos con parte real positiva y negativa, lo cual permite concluir que este es un equilibrio foco inestable, esta sección corresponde a valores de $0,00818 < \rho$. En la tercera sección de curva inferior, posterior al evento LP , el equilibrio tiene valores propios reales positivos y negativos por tanto se caracteriza como equilibrio nodo silla, esta sección corresponde a valores de $0,002 < \rho$.

El cambio de estabilidad de los equilibrios para cada sección se debe a la aparición sobre la curva de los eventos LP y H . Los eventos LP (Limit Point) y H (Hopf) se denominan bifur-

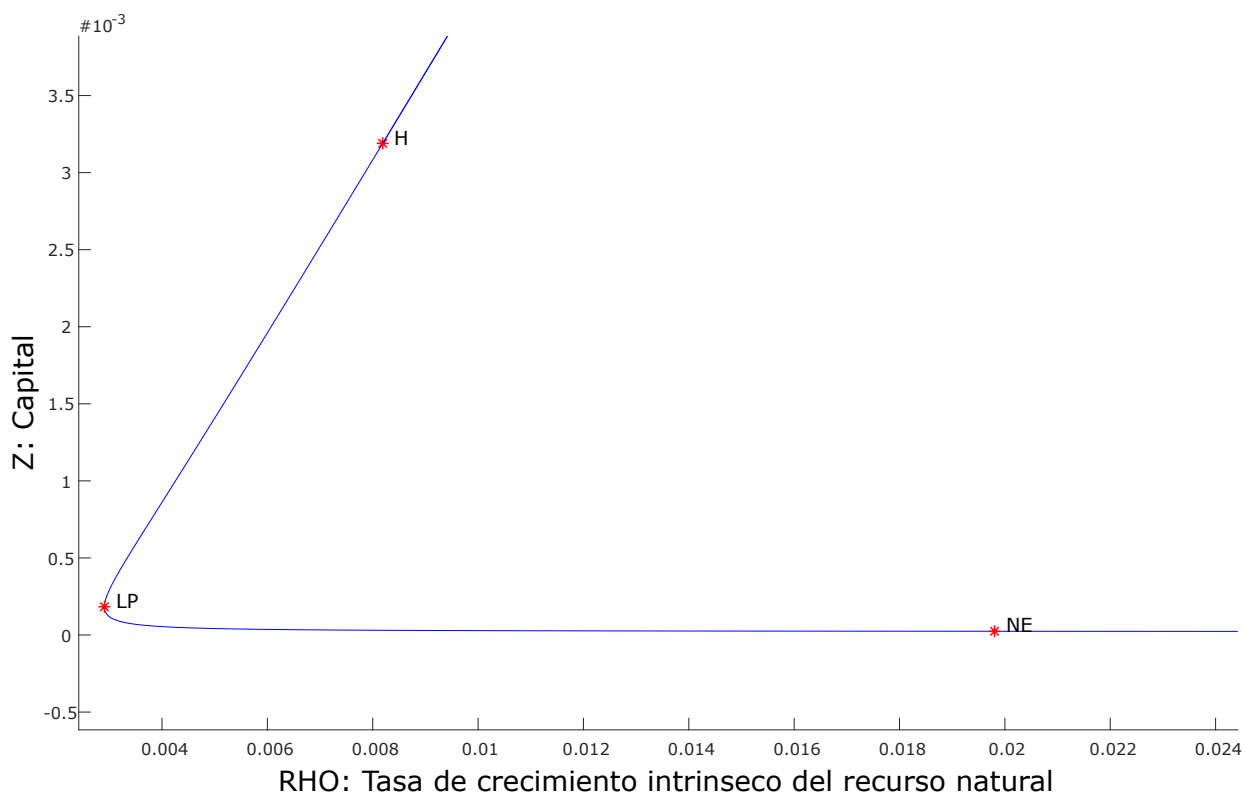


Figura 4-12.: Curva de Equilibrios.

caciones locales. En el valor de $\rho = 0,0029$ asociado al evento LP ver Tabla 4-13, determina que para este valor específico dos equilibrios con diferente estabilidad chocan y se convierten en un solo equilibrio llamado punto LP en la Figura 4-12 se muestra el punto de bifurcación. Los dos equilibrios que chocan corresponden a la sección 1 y 3 de la curva. La bifurcación LP también determina los valores de τ para los cuales existe o no existen puntos de equilibrio se puede ver en la Figura 4-12 que para el valor de $0,0029 < \tau$ no hay puntos de equilibrio y que para $0,0029 < \tau$ existen dos puntos de equilibrio dados por la parte inferior y superior de la curva. Una Silla Neutra o "Neutral Saddle(NS)", ocurre cuando $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Este evento no es un punto de bifurcación, pero se reporta en general debido al comportamiento particular de sus valores propios.

La detección de bifurcaciones en el sistema se realiza a través del monitoreo de los valores propios del Jacobiano, cuando este último es evaluado en los puntos de equilibrio. La Tabla 4-13 presenta los valores propios $\lambda_{(1,2,3)}$ de los equilibrios asociados a los eventos LP y Hopf:

	ρ	λ_1	λ_2	λ_3
H	0.00818	-0,0742	$-8,726e^{-6} + 0,036i$	$-8,726e^{-6} - 0,036i$
LP	0.0029	-0,145	-0,014	7,564e-05
NS	0.0198	-0,173	-0,019	0,0197

Tabla 4-13.: Puntos de Bifurcación

Un punto de bifurcación Hopf se caracteriza por tres factores. Primero: El cruce por cero de los valores propios conjugados. Segundo: Primer coeficiente de Lyapunov diferente de cero. Tercero: La derivada de la parte real de los valores propios con respecto al parámetro de bifurcación es diferente de cero. Estos parámetros se verifican numéricamente por medio del software computacional CL-Matcont. En las Tablas **4-13** y **4-14** se verifica que los valores propios son complejos conjugados con parte real negativa y el primer coeficiente de Lyapunov tiene signo negativo.

Tabla 4-14.: Coeficiente de Lyapunov para bifurcación Hopf

H_1	
Coeficiente de Lyapunov L_1	-0.8945404

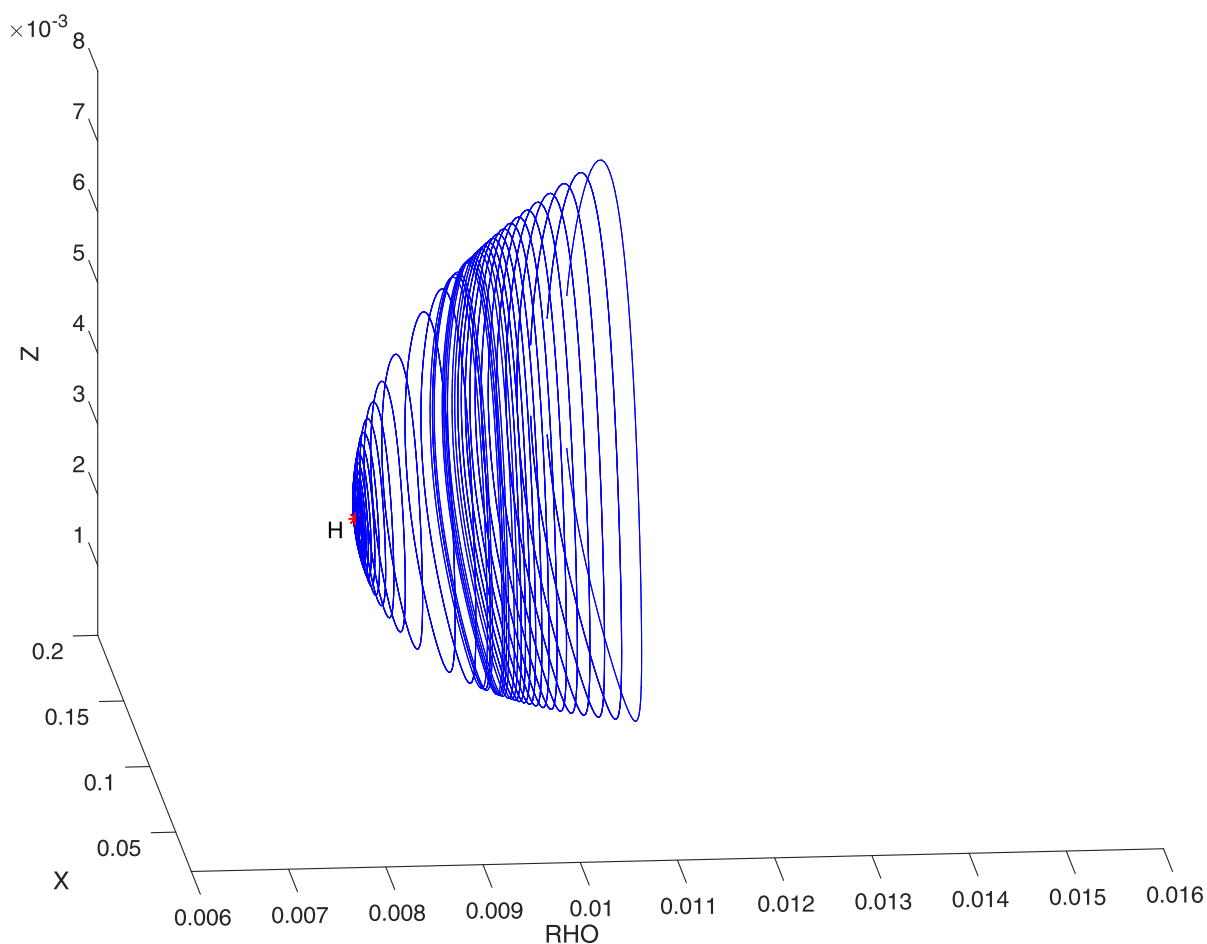


Figura 4-13.: Aumento del ciclo límite estable posterior al valor de bifurcación $\rho = 0,008189$.

El primer coeficiente de Lyapunov permite clasificar la bifurcación de Hopf como subcrítica si el signo del coeficiente es positivo lo cual significa que para valores posteriores al valor de bifurcación, se generan ciclos límites inestables. Si la bifurcación se denomina supercrítica si el signo es negativo, lo cual expresa que los ciclo límites generados a partir de la bifurcación son ciclo límites estables. Esta interpretación del coeficiente de Lyapunov puede verse como una generalización del concepto de valores propios para un punto de equilibrio, y de los multiplicadores característicos para órbitas periódicas, ya que su signo provee una representación cualitativa de la dinámica del sistema. Para el sistema en estudio se obtuvo un valor negativo para el primer coeficiente de Lyapunov L_1 ver Tabla 4-13 por tanto la bifurcación Hopf de la Figura 4-12 es una bifurcación supercrítica, lo cual implica que un punto de equilibrio Estable existe antes de la bifurcación, posterior a ella el equilibrio se convierte en inestable y se generan ciclos límite estables que aumentan de periodo para valores $0,00818 < \rho$. Ver Figura 4-13

4.4.1. Análisis de los puntos de codimensión-2

Las bifurcaciones Hopf y LP definen cualitativamente el comportamiento del sistema, por esta razón es importante comprender de una manera más amplia el comportamiento dinámico de estos fenómenos ya que a partir de este estudio se puede determinar la influencia dinámica sobre el sistema que ejerce la variación de los parámetros. Los diagramas de bifurcaciones de son herramientas fuertes que permiten una comprensión completa de estas bifurcaciones. En la Figura 4-14, se presenta un diagrama de bifurcaciones de Codimensión-2. En este se presentan los valores de parámetros (ρ y τ) para los cuales ocurre una bifurcación LP, Hopf, Homoclínica y otros eventos no bifurcacionales como puntos NE (neutral equilibria o equilibrios neutro). Estos pares de parámetros asociados a cada evento permiten la construcción de curvas, cada una asociada a cada evento en particular. Ver Figura 4-14.

En la figura 4-14 se observan curvas asociadas a los eventos LP, Hopf, homoclinica y NE, en función de los parámetros de tasa intrínseca de crecimiento de recurso renovable (ρ) y tasa neta de crecimiento poblacional (τ). Esto significa que ambos parámetros, ρ y τ influyen en estas curvas y por ende tienen influencia en la ocurrencia de los eventos de bifurcación. El punto que compone la intersección de las 4 curvas de bifurcación se denomina punto Bogdanov-Takens (BT). Los puntos correspondientes a bifurcaciones de codimensión-2 se pueden presentar en un sistema debido al aumento de la dimensión de la variedad centro o a la falla de algunas de las condiciones de no degeneración. En vecindades de este punto se puede caracterizar el comportamiento dinámico del sistema 3-Dimensional, ya que teóricamente se conoce la forma normal de la bifurcación Bogdanov Takens [29] a partir de este desarrollo teórico se puede garantizar que las 4 curvas halladas en el diagrama de bifurcación caracterizan completamente el comportamiento del sistema en vecindades del punto Bogdanov takens. Cada curva delimita diversas regiones en el plano, en esta investigación se presenta el estudio de 4 de estas regiones: Primera: región de no equilibrios. Segunda: región de órbita heteroclínica. Tercera: región de ciclos límite. Cuarta: región de inestabilidad, denominadas respectivamente regiones I, II, III y IV. Cada una de estas delimita el espacio de parámetros, cada par de puntos de τ y ρ ubicados en una misma región tiene asociados retratos de fase del sistema topológicamente equivalente entre sí. De manera análoga, si los pares de valores para τ y ρ son tomados de regiones diferentes la equivalencia topológica no se mantiene.

Para cada región se toma un par de valores asociado de τ y de ρ y se muestra el retrato de fase correspondiente para el sistema. Es conocido por la equivalencia topológica que solo es necesario el análisis para un par de valores, ya que para el resto de valores ubicados en la región el comportamiento cualitativo del sistema es el mismo. A continuación se presenta el análisis del retrato de fase para valores de parámetros que pertenecen a cada región

delimitada de la Figura 4-14

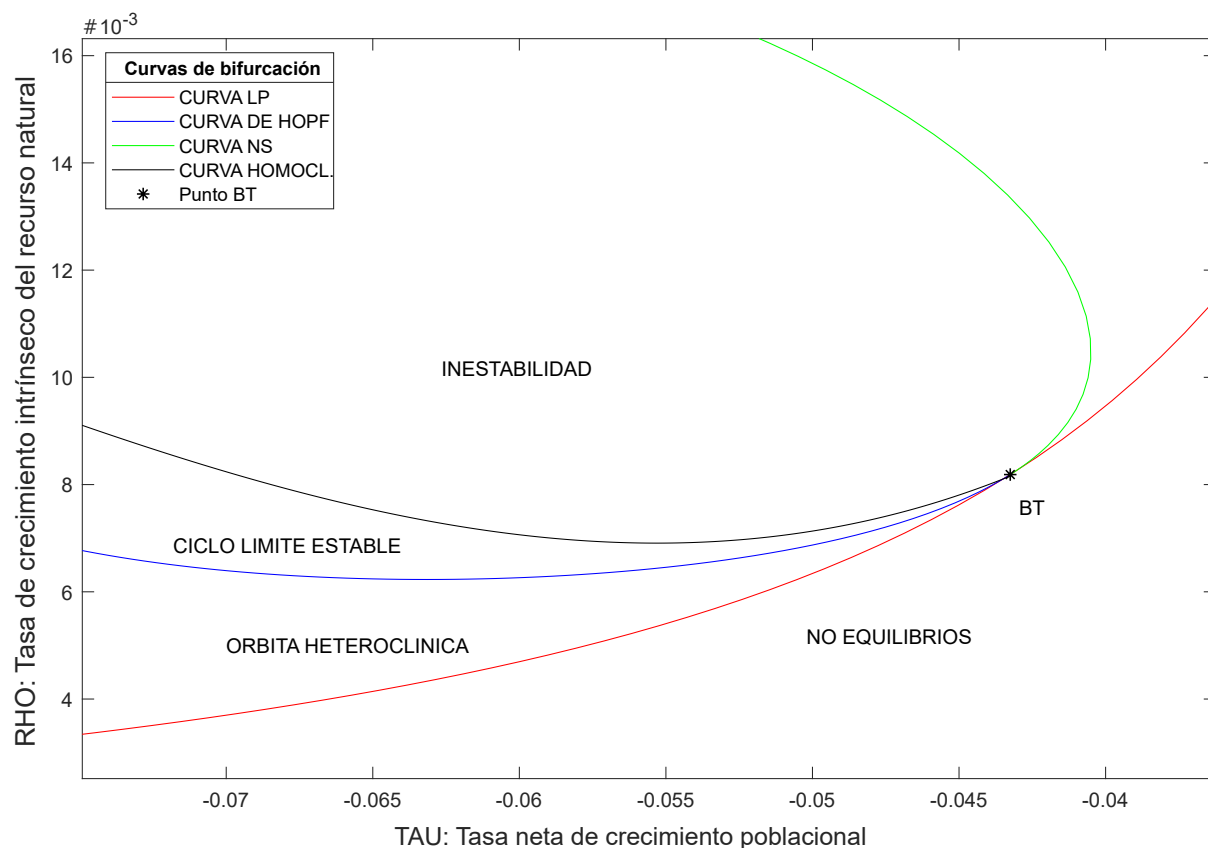


Figura 4-14.: Diagrama de bifurcación de codimensión-2. Se muestran curvas asociadas a los eventos LP, Hopf, homoclinica y NE, en función de los parámetros de tasa intrínseca de crecimiento de recurso renovable (ρ) y tasa neta de crecimiento poblacional (τ). Cada curva delimita 4 regiones en el plano. Primera: región de no equilibrios. Segunda: región de órbita heteroclinica. Tercera: región de ciclos límite. Cuarta: región de inestabilidad. Cada par de puntos de τ y ρ ubicados en una misma región tienen asociados retratos de fase del sistema topológicamente equivalentes

4.4.2. Determinación de zonas de estabilidad con el diagrama de bifurcaciones para el modelo de desarrollo sostenible acoplado (S3DA)

Para valores de ρ y τ ubicados en la región 1, el sistema es inestable y las dimensiones de Población, Recurso y Capital convergen al origen, lo que representa una situación de extinción ver figura 4-15

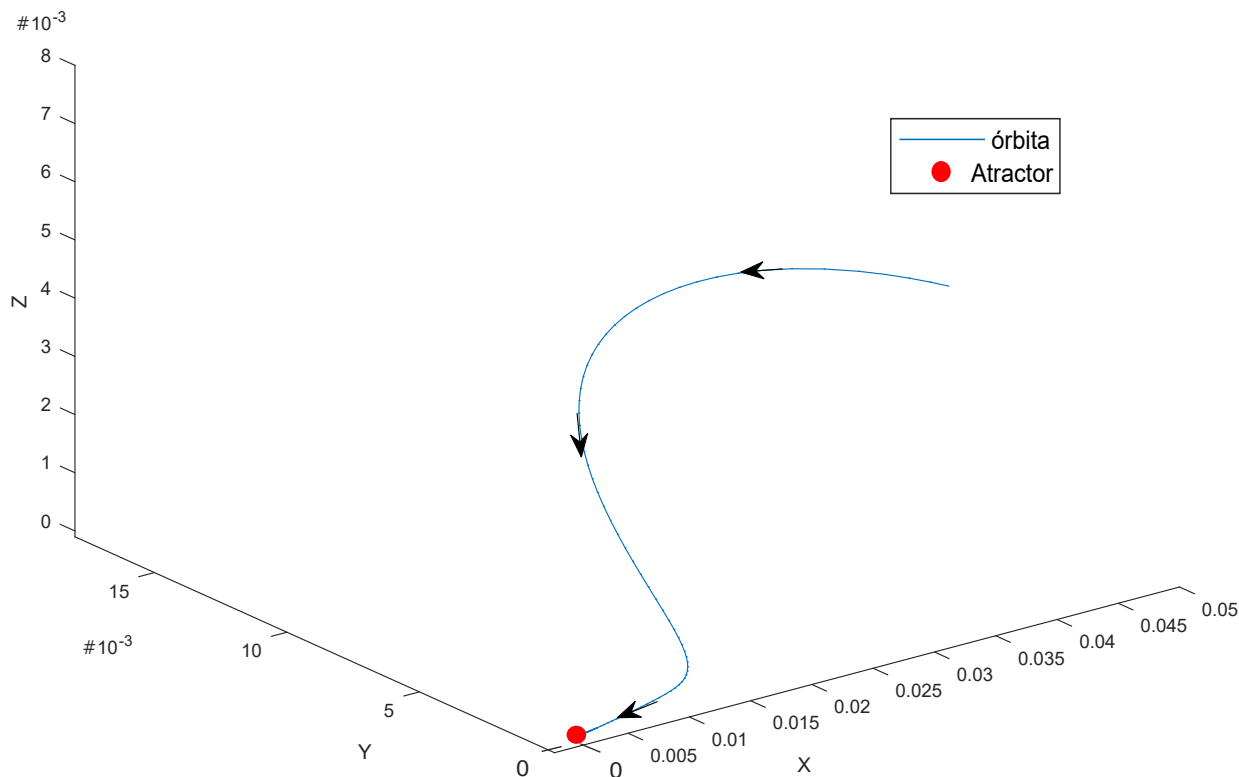


Figura 4-15.: Divergencia para el punto $\tau = -0,06$ y $\rho = 0,001$

Para valores ubicados en la Región 2 el sistema presenta dos equilibrios uno estable y otro inestable, la estabilidad del punto de equilibrio se obtienen debido al signo negativo de los valores propios del jacobiano evaluado en este punto de equilibrio, esta caracterización de estabilidad define el equilibrio como un atractor en vecindades cercanas al punto, por esta razón para que las variables del sistema de desarrollo sean atraídas por este equilibrio se debe partir de condiciones iniciales que pertenezcan a la cuenca de atracción de este punto, este escenario es considerado de sostenibilidad, debido a que este equilibrio atractor permite mayores valores de recurso X , población Y , y capital Z . El otro equilibrio por el contrario tiene coordenadas cercanas al origen lo cual se entiende que es un equilibrio de baja sostenibilidad. Este equilibrio tiene valores propios positivos y negativos, por esta razón es llamado, “equilibrio silla”, una silla es un punto de equilibrio que posee una variedades estables e inestables; es decir, existen condiciones iniciales que permiten una convergencia a este equilibrio, y otras condiciones iniciales que evitan la convergencia a este equilibrio, de la Figura 4-16 se puede ver que la variedad inestable del nodo silla se conecta con la variedad estable del atractor, este hecho es favorable desde el punto de vista de sostenibilidad ya que se evitan valores bajos de recurso, población y capital y se promueve la alta sostenibilidad por la atracción que genera el equilibrio estable, además de esto debido a que en el interior

del primer octante se encuentra el atractor es posible asegurar que las coordenadas se encuentran en valores reales que permiten una interpretación biológico.

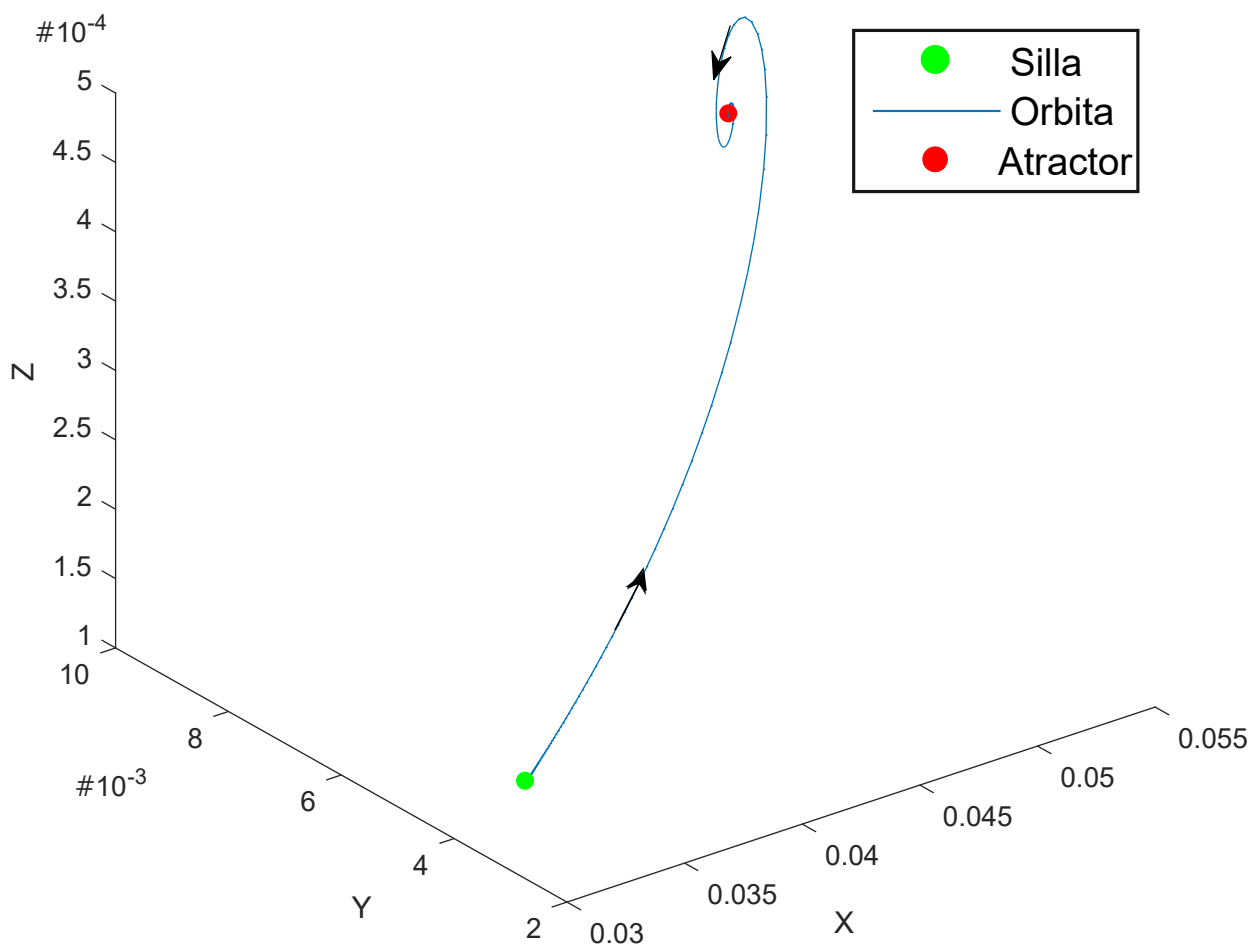


Figura 4-16.: Convergencia para $\tau = -0,06$ y $\rho = 0,005$.

En la Figura 4-17 se muestra el valor de capital económico en función del tiempo, donde el tiempo inicial corresponde al valor de capital asociado al equilibrio inestable, a medida que el tiempo aumenta se puede ver que el valor de capital converge cuando $t \rightarrow \infty$ al valor de capital asociado a la posición del atractor. Lo cual evidencia el escenario anteriormente descrito, en el que se evita el equilibrio de baja sostenibilidad y se promueve un valor de capital más alto, las gráficas de población y recurso con respecto al tiempo son análogas al comportamiento descrito en la Figura 4-16. Adicional a esto se puede ver que antes de alcanzar el equilibrio sostenible, se presentan algunas oscilaciones las cuales se pueden pensar como escenarios de crisis locales en la sociedad. Que se deben atravesar de manera inevitable

para alcanzar la sostenibilidad ideal (Equilibrio atractor).

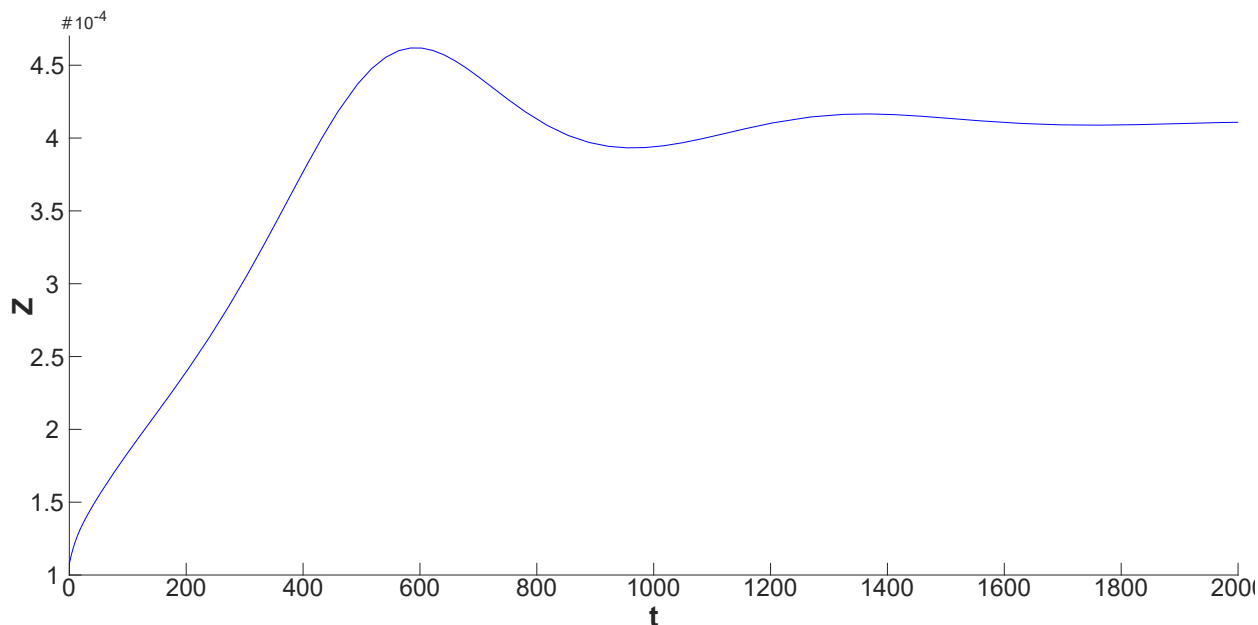


Figura 4-17.: Estado transitorio oscilante de órbita heteroclínica con $\tau = -0,06$ y $\rho = 0,005$.

En los retratos de fase de las figuras anteriores, se han tomado dos pares de valores, un par correspondiente a la zona de no equilibrios y otro para asociado a la zona de orbita heteroclínica, se muestra para cada uno de ellos el diagrama de fase asociado, de esta forma es posible concluir que la curva de bifurcaciones "LP" divide al espacio de parámetros en dos regiones: Región I: Correspondiente a la desaparición de puntos de equilibrio en el primer octante y convergencia al origen. En consecuencia estos valores corresponden a un escenario de extinción, opuesto al desarrollo sostenible. La Región II: Correspondiente a la aparición de dos puntos de equilibrio en el primer octante y convergencia a un atractor que permite de valores positivos de recurso población y capital, que favorecen la sostenibilidad.

Los puntos ubicados en la Región III, en particular $0,00818 < \rho$ y $\tau = -0,06$, son valores posteriores a la bifurcación Hopf por esta razón se presenta un ciclo límite estable. Ver Figura 4-18. El diagrama de fase asociado ver Figura 4-18 muestra que se presenta estabilidad del sistema a manera de ciclos límites, esto significa que las variables del modelo cuando el tiempo es prolongada no convergen a un único valor para las tres variables, por el contrario los valores de recurso población y capital se mantienen en un estado oscilatorio. En la Figura 4-19 se muestra el valor de capital a medida que el tiempo aumenta, se puede ver que en el sistema se alcanza un capital máximo y mínimo cada cierto periodo de tiempo. De manera

análoga las gráficas de recurso y población en función del tiempo presentan comportamientos oscilatorios con valores máximos y mínimos. A partir de este hecho se puede concluir que en este escenario de ciclos límite se pueden predecir de manera consecutiva periodos de crisis o escasos seguidos de periodos de riqueza o abundancia.

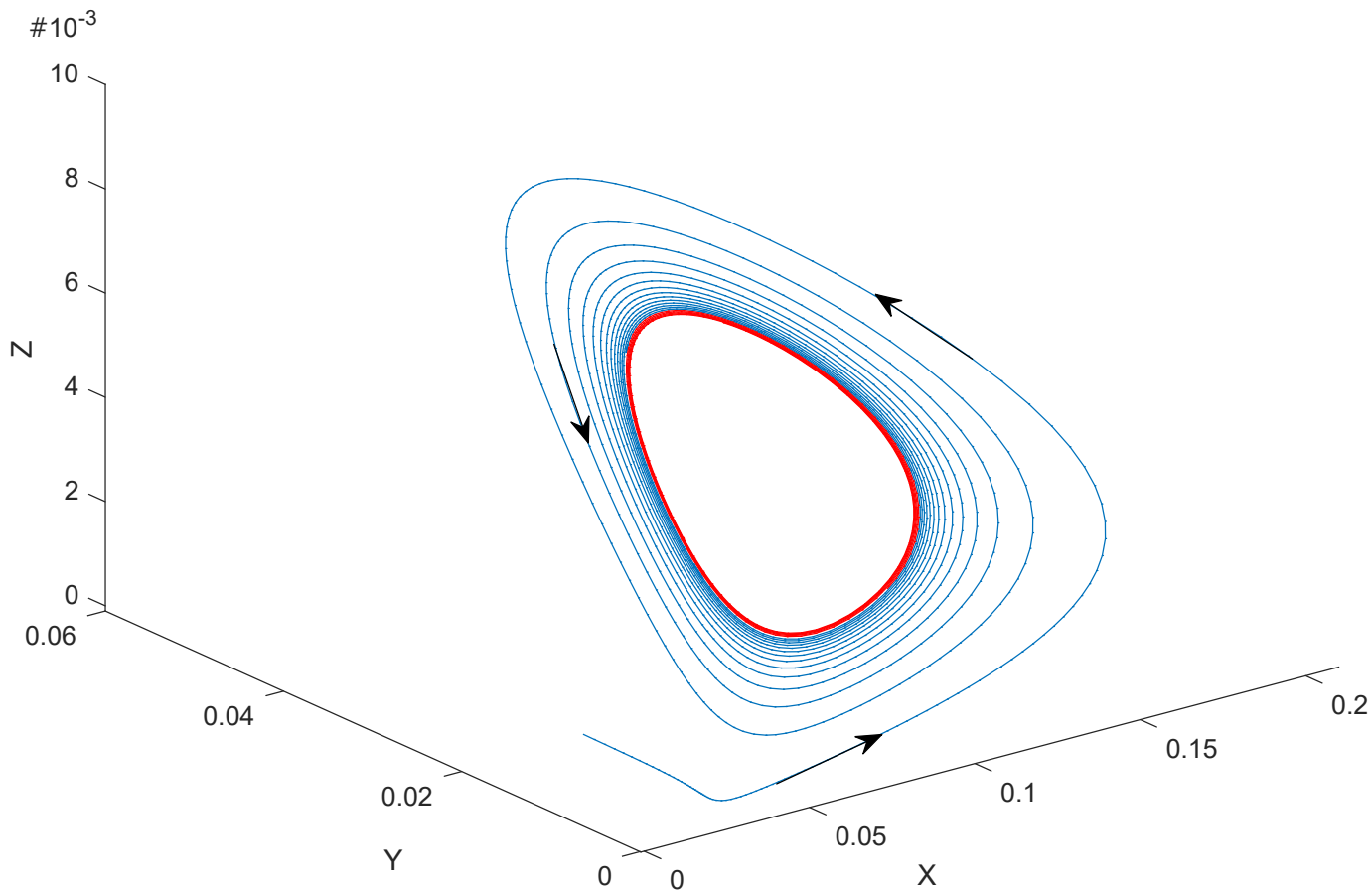


Figura 4-18.: Convergencia a Ciclo Limite en región 2 $\tau = -0,06$ y $\rho = 0,00818$.

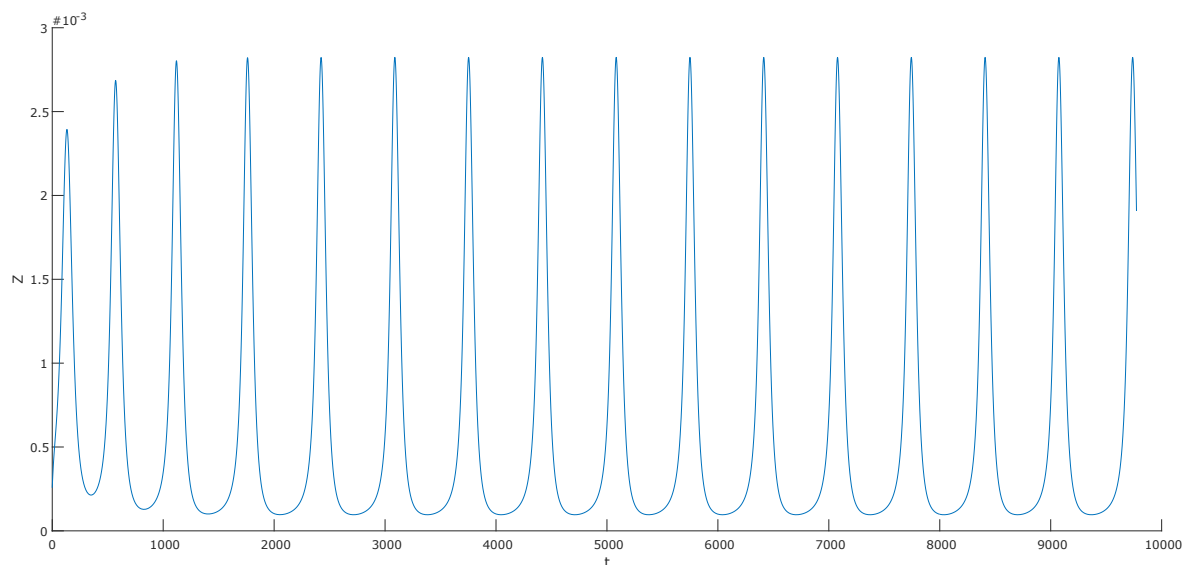


Figura 4-19.: Estado oscilatorio de Capital con respecto al tiempo en región 2: $\tau = -0,06$, $\rho = 0,00818$.

Debido a que la región de ciclos límite se ubica posterior a la curva de bifurcación de Hopf los ciclos límite aumentan el periodo de oscilación. Este hecho permite concluir que esta región puede pensarse como un escenario sostenible siempre que el periodo de los ciclos límite se mantenga en valores realistas.

La gráfica 4-20 muestra la evolución del ciclo límite al asignar valores de τ del intervalo $-0,08 < \tau < -0,0693$ y $\rho = 0,0698$ constante. En la figura se puede ver el aumento de amplitud de los ciclos límite. Se puede notar además que los ciclos límite dejan de crecer y se observa un comportamiento no suave en la parte inferior de la órbita. El comportamiento no suave se debe a que en la parte inferior de la órbita se encuentra un nodo silla proveniente de la bifurcación LP asociada a la aparición de dos equilibrios, un atractor y un nodo silla. El crecimiento del ciclo límite se ve limitado por la presencia de este nodo silla, ya que para el valor superior del intervalo de $\tau = -0,0693$ el ciclo límite choca con el nodo y el ciclo límite se convierte en una órbita homoclínica que conecta el nodo silla consigo mismo.

Desde el punto de vista sostenible el cruce sobre la curva homoclínica no es conveniente debido a que sobre esta curva el ciclo límite atractor pierde estabilidad, ya que este se transforma en una órbita homoclínica repulsora; por esta razón, si los valores de los parámetros se ubican sobre esta curva el sistema tiende al equilibrio ubicado en el origen. Esto se considera un escenario de extinción ya que las variables si irían a cero lo cual es opuesto a la sostenibilidad. La desaparición del ciclo límite y la aparición de una órbita homoclínica se debe a que la variedad estable del ciclo límite se conecta con la variedad estable del nodo

silla. Este comportamiento revela la importancia del parámetro de tasa neta de crecimiento poblacional; debido a que un aumento excesivo del crecimiento de la población sin ningún control puede ser dañino no únicamente para el stock del recurso sino para todas las variables de sostenibilidad.

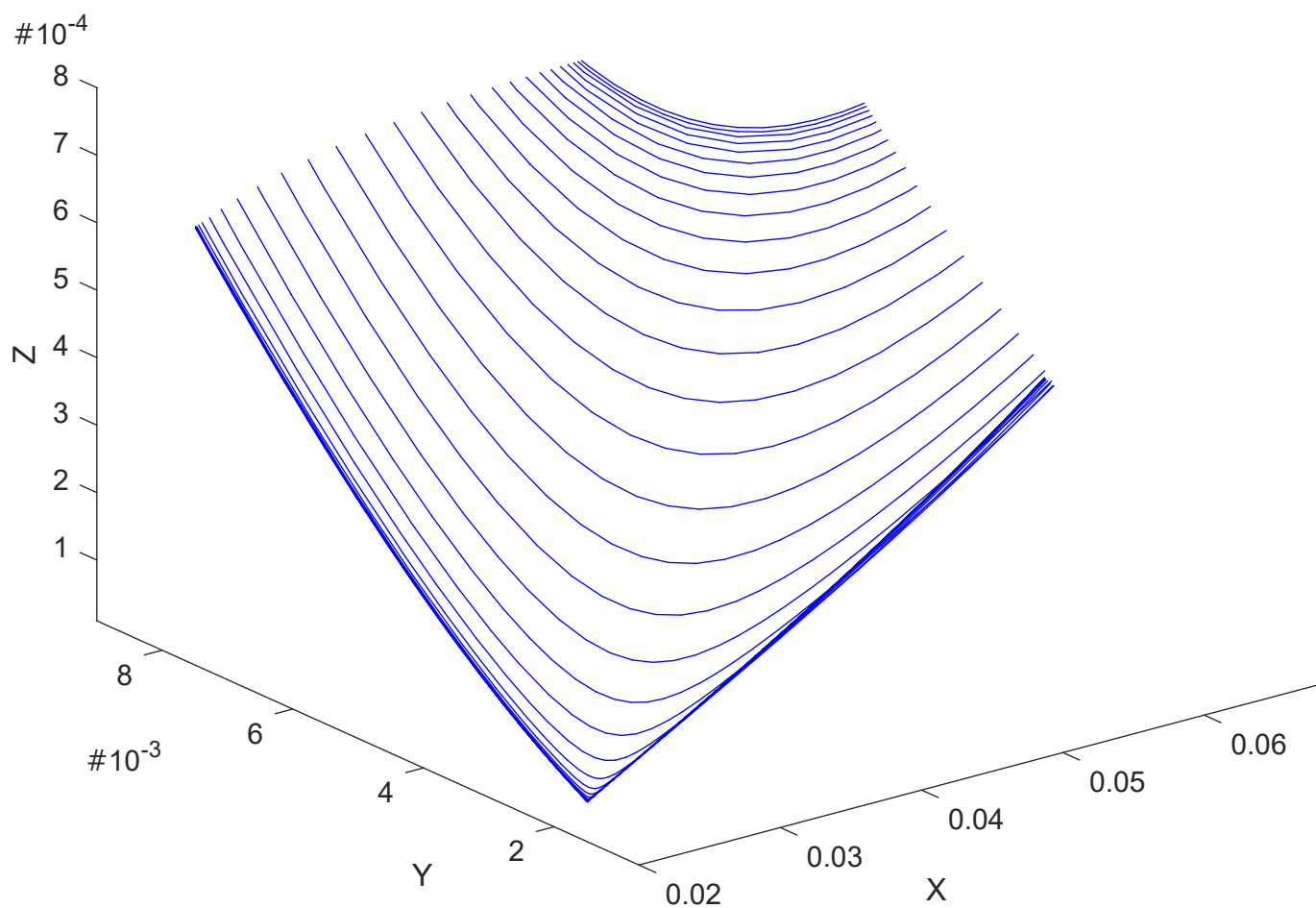


Figura 4-20.: Convergencia de ciclos límites a órbita Homoclinica para $\rho = 0,0698$ y valores cercanos a $\tau = -0,0693$.

Por otro lado si se parte de la región de ciclos límites desde el punto $\rho = 0,00698$ y $\tau = -0,06$ y se genera un aumento sobre el parámetro de tasa intrínseca de crecimiento del recurso (ρ), de manera análoga el espacio de parámetros tocaría la curva homoclínica y de igual forma

el ciclo límite se transforma en una órbita homoclínica inestable, perjudicando de nuevo la sostenibilidad. Gráficamente se puede entender este análisis a partir del diagrama de codimensión-2 de la Figura 4-14, en este diagrama se observa que la curva homoclínica se puede cruzar en diferentes puntos desde la región de ciclos límite, el cruce puede ocurrir debido al aumento de la tasa neta de crecimiento poblacional o por el incremento de la tasa de crecimiento intrínseco del recurso. Este hecho revela que en el modelo de esta investigación existen límites naturales para el crecimiento poblacional y de recurso natural, que predicen el colapso del sistema cuando estos crecimientos sobrepasan los valores permitidos. Por medio del diagrama de bifurcación los límites de crecimiento están determinados exactamente por la curva homoclínica hallada. De esta forma el crecimiento de τ y de ρ está limitado por el umbral establecido: curva en negro en Figura 4-14.

El escenario de extinción a causa del aumento de la tasa de crecimiento de recurso, se debe a que el aumento del crecimiento del recurso natural en ausencia de control incrementa el recurso disponible para la población, lo cual promueve el factor de fertilidad de la población generando posteriormente una alta demanda de recurso para la supervivencia de la misma, este escenario ocasiona que después de un tiempo largo; la tasa de extracción de stock supere la tasa de crecimiento del mismo (sobrexplotación), lo cual lleva el recurso a niveles des escasos por debajo de los permitidos para la sustentabilidad a largo plazo (efecto allee), afectando directamente la supervivencia de la población y por ende la sostenibilidad.

En la Figura 4-21 se gráfica el valor del periodo de los ciclo límites para los mismos valores de la Figura 4-20 intervalo $-0,08 < \tau < -0,0693$ y $\rho = 0,0698$ constante. Se puede observar que para valores el valor de τ cercano a la curva de orbita homoclínica $\tau \rightarrow -0,0693$ el periodo de los ciclos límite asociados a este valor tiende a infinito según la Figura 4-21.

EL incremento del periodo hacia infinito se debe a que a medida que el valor de τ se acerca al valor de orbita homoclínica asociado $\tau = -0,0693$, los ciclos límite asociados a estos valores se acercan de manera infinitesimal al nodo silla. Este acercamiento significa que la trayectoria del ciclo límite pasa muy cerca al nodo silla. La trayectoria entonces se ve afectada por la influencia de la variedad estable atractora del nodo silla. De tal forma que la trayectoria es mucho más lenta para posiciones cercanas al nodo silla y de más velocidad para posiciones alejadas de este nodo.

Este escenario hace parte de la región de ciclos límites considerado como sostenible, sin embargo debido al cambio dinámico en el periodo de la órbita es considerado un escenario de baja sostenibilidad ya que la trayectoria incrementa su tiempo de tránsito cerca al nodo silla que favorece valores bajos para las variables y disminuye su tiempo de tránsito en posiciones de la trayectoria que permiten valores altos de recurso, población y capital.

Se describe entonces un escenario nuevo en la región de ciclos límite, que corresponde a

valores de esta región cercanos a la curva homoclínica. En esta región se presenta un alto incremento del periodo por lo cual se puede pensar que valores cercanos a la curva homoclínica no promueven escenarios sostenibles en el sistema, de esta forma la región sostenible de ciclos límite queda determinada por aquellos valores de periodo que se mantienen en valores aceptables.

Por otro lado, el crecimiento del periodo algunas veces ocurre debido al incremento de amplitud de los ciclos límite, sin embargo este no es el caso ya que la amplitud de la órbita homoclínica acota a la de los ciclos límite.

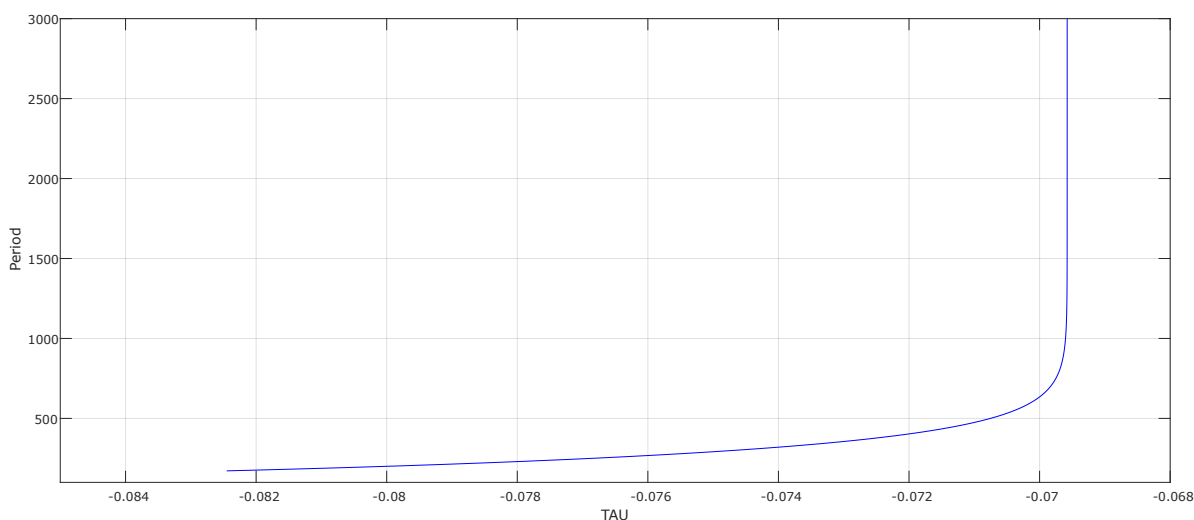


Figura 4-21.: Periodo de ciclos límite cuando $\tau \rightarrow -0,0698$ los ciclos límite convergen a la órbita homoclínica, el periodo de los ciclos límites tiende a infinito para valores cercanos a $\tau = -0,0698$.

4.4.3. Bifurcación Hopf Generalizada (GH)

De las cinco posibles bifurcaciones dadas en la sección 2.2.2, en este modelo se encontraron dos. Primera: Bifurcación BT, la cual es caracterizada en la sección (4.4.1). Segunda: Bifurcación GH: la cual es expuesta en esta sección.

En vecindades del punto GH existen 3 zonas de equivalencia topológica dadas en la literatura [29]. De manera análoga a la Figura 4-14, se presenta esta bifurcación en la Figura 4-22; en esta se muestran dos curvas que caracterizan esta bifurcación llamadas curva de Hopf (azul) y curva LP (verde); en la primera, se presentan los pares de parámetros que permiten que el sistema presente una bifurcación de Hopf, la segunda curva muestra los valores de parámetros para los cuales se presenta un choque de ciclos límite. También se delimitan

dos regiones de equivalencia topológica; la primera, esta delimitada por la región superior e la curva de Hopf y la segunda región delimitada por la parte inferior de la misma curva. En la primera región se presenta un punto de equilibrio estable y un ciclo límite inestable en la segunda un equilibrio inestable y un ciclo límite estable. Se puede ver también que existe un solapamiento de la primera y segunda curva, lo cual puede ser pensado como la inexistencia de la tercera región dada en la bibliografía [29].

La presencia de esta bifurcación GH se considera una posibilidad para hallar escenarios de mayor sostenibilidad y de riqueza para el estudio dinámico del sistema, por esta razón se reportan los valores de este punto GH en la Tabla 4-15. El análisis biológico de esta bifurcación se plantea como trabajo futuro para ampliar la investigación.

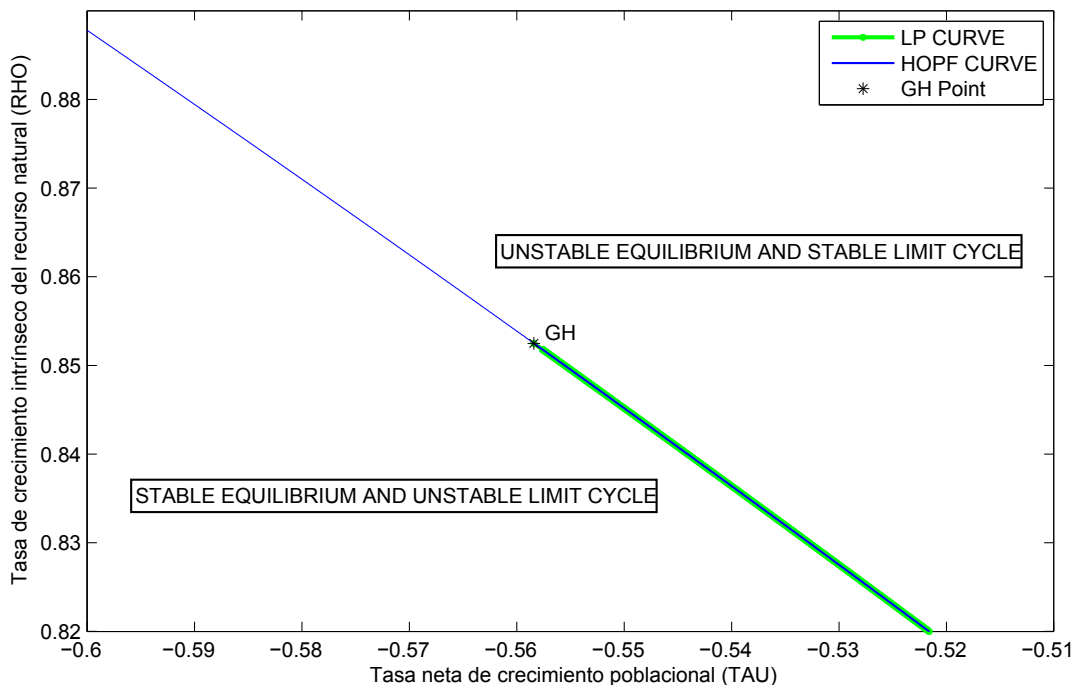


Figura 4-22.: Diagrama de bifurcación de codimensión 2 en un punto GH

		Punto GH
Coordenadas	X	0.135
	Y	0.0924
	Z	0.911
Eigenvalores: $v_{1,2,3}$	v_1	-1.03
	v_2	$1,6e^{-13} + 0,04$
	v_3	$1,6e^{-13} - 0,04$
1^{er} Coeficiente de Lyapunov		$9e^{-7}$
2^{do} coeficiente de Lyapunov		0.0359
τ		-0.558
λ		-0.852

Tabla 4-15.: Coordenadas, valores propios, coeficientes de lyapunov y valores de parámetros que caracterizan el punto GH

5. Conclusiones y discusión

5.1. Conclusiones

Se ha presentado un análisis de la estabilidad de un modelo de desarrollo Sostenible complejo desde el punto de vista dimensional y de parámetros, bastante representativo en cuanto a su dinámica, permitiendo con ello revisar la influencia de un factor de subsidio económico poblacional sobre los escenarios de desarrollo sostenible (estabilidad) y, al mismo tiempo, se explica como estos escenarios cambian con la modificación de los parámetros de crecimiento de recurso natural y tasa de crecimiento poblacional.

En la práctica, es común la utilización de dicho factor de subsidio para la población, por ejemplo subsidios por tener hijos, de salud, educación, alimentación, transporte, que buscan promover el crecimiento de la población y mejorar la calidad de vida.

El ejercicio realizado en el artículo permite observar mediante el análisis de la bifurcación de codimensión-dos del tipo Bogdanov-Takens que cerca del límite del colapso del sistema (Región 1) aparecen fenómenos de bifurcación "Limit Point" que llevan a la existencia de puntos de equilibrio sostenibles y a evitar equilibrios de baja sostenibilidad (órbita heteroclínica en Región 2), o que llevan también el sistema a ciclos límites estables (Región 3), ya sea bajo el incremento de la tasa de natalidad o de la tasa de crecimiento natural del recurso o bien bajo la disminución de la tasa de mortalidad, las tres posibilidades anteriores se presentan según la manera en que se cruce la curva de separación (Curva de Hopf) desde la región 2 hacia la región 3: Escenario de órbita heteroclínica.

Se revelan dinámicas del sistema especiales que se presentan únicamente bajo condiciones iniciales y valores de parámetros específicos, estas dinámicas son: órbitas homoclínicas, Equilibrios sillas-Nodo, equilibrios Silla-Neutra los cuales terminan de caracterizar completamente la bifurcación Bogdanov-Takens en un diagrama de codimensión dos en función de la tasa total de crecimiento poblacional (τ) y la tasa de crecimiento del recurso (ρ). La bifurcación obtenida y su dinámica se convierte en una guía que permite determinar y formular políticas que influyan en el mejoramiento del desarrollo sostenible.

- Se plantea un sistema novedoso a partir del sistema ya establecido. Se propone una normalización que facilita las simulaciones numéricas por medio del software Matcont,

ya que estos sistemas en muchos casos presentan dificultades para los métodos de integración sobre las curvas de integración. Se plantea una propuesta nueva que consiste en la reducción de parámetros. Esta reducción permite que el software encuentre bifurcaciones que facilitan la búsqueda de fenómenos cualitativos a partir de la teoría de bifurcaciones, como por ejemplo, facilita la búsqueda de: orbitas homoclínicas, escenarios de extinción, ciclos límites. Finalmente, esta metodología permite darle robustez al modelo y revela la dirección hacia la cual se dirigen los mercados. Esta dirección es “la crisis por sobrepoblación” y “exceso de producción de recursos”.

- Por medio del diagrama de bifurcación de codimensión-2, se entiende que debido a los límites espaciales donde crece el recurso, no se debe generar una sobreproducción como una respuesta a la sobrepoblación, ni se debe estimular el crecimiento de la población debido a la abundancia de recursos. Esto se plantea debido a que siempre va a existir un límite de crecimiento definido en esta investigación como la curva homoclínica. Hallar este límite de crecimiento significa que se tiene éxito al poder simular y representar las consecuencias en un modelo económico si se exceden estos límites. Los resultados coinciden con los estudios de otros autores sobre “desarrollo sostenible”, los cuales aseguran que los límites de producción se están alcanzando debido a la condición finita del planeta Tierra.
- La presencia de capital es beneficioso para la sociedad si la tasa de crecimiento se mantiene en valores bajos ya que el mejor estado de sostenibilidad se presenta cuando hay presencia de capital y la tasa de crecimiento es baja. Sin embargo para valores altos de la tasa poblacional, se puede observar que el escenario de ausencia de capital siempre es más sostenible comparado con el comportamiento del sistema cuando se incluye la variable de capital económico.
- Se puede concluir que la presencia de capital genera una sensación de comodidad en la población que le permite un bienestar ficticio. Este bienestar ficticio en la población promueve la fertilidad sin tener en cuenta los límites de producción del recurso y por ende a largo plazo genera la extinción de la población.
- La ausencia de capital genera un estado de bienestar directamente relacionado con el stock del recurso y por ende una consciencia más real sobre el bienestar de la población. Esto se debe a que en ausencia de capital la consciencia de bienestar no recae sobre el capital económico, el cual es una idea colectiva, sino que recae en una realidad relacionada con la cantidad de recurso. Lo cual no es una idea colectiva sino una realidad física que promueve el bienestar.
- Para órbitas cercanas a la órbita homoclínica el periodo tiende a infinito por esta razón, el escenario en donde la órbita se acerca al equilibrio inestable cercano al origen se debe evitar, ya que esta órbita cruza con menos velocidad la región cercana a al equilibrio

y por lo tanto el sistema se mantendrá un tiempo prolongado en valores cercanos al origen y un tiempo corto durante el aumento de las variables económicas, de recurso y población.

- Con el diagrama de bifurcación de codimension-2 es posible determinar las zonas en las cuales los puntos de equilibrios y los ciclos límite, se mantienen en función de dos parámetros. Así quedan determinadas curvas de equilibrio y de ciclos límite; además, entre cada una de estas regiones se puede determinar el diagrama de fase esperado, lo cual puede ayudar a determinar estrategias para favorecer escenarios sostenibles en función de la tasa de crecimiento poblacional y de crecimiento intrínseco del recurso.
- Una falencia del modelo es que no diferencia aumento de población por adultos de la 3ra edad o por aumento de tasa de natalidad (adultos jóvenes), ya que los nacimientos representan un aumento en la productividad de un país, sin embargo, los adultos no son productivos y no generan una valorización de capital como lo generan las personas en edad productiva
- El modelo no es absoluto ya que falta calibrar el modelo para predecir escenarios reales, sin embargo, se propone ampliar la investigación por medio de la calibración de parámetros.

5.2. Discusión

Un modelo matemático no lineal es planteado con el objetivo de estudiar los conflictos de los seres humanos con los recursos naturales renovables, como resultado de la sobreexplotación y del crecimiento poblacional, . El modelo es formulado en términos de sistemas de ecuaciones diferenciales, el cual toma un factor de subsidio para reactivar la economía, parámetros de población, de crecimiento de recurso renovable y económico. Y es analizado cualitativa y cuantitativamente. El análisis cualitativo trató condiciones de frontera, existencia, y estabilidad de puntos. Adicionalmente, el análisis cuantitativo se realiza evaluando las soluciones numéricas del modelo y se analizan a través de ilustraciones gráficas. El análisis matemático del modelo prueba lo siguiente

- La aceleración del crecimiento natural del recurso renovable para uso humano puede llevar a la extinción del recurso y por ende a la extinción de la población.
- Se encontró que un aumento en la tasa neta de crecimiento poblacional posterior a cierto umbral propende a la disminución de recurso económico, población y capital.
- Se observa un escenario de órbita heteroclínica en el cual, antes de alcanzar la completa sostenibilidad, se presentan algunas oscilaciones que se pueden pensar como escenarios de crisis locales en la sociedad.

- La aparición de una órbita homoclínica inestable a partir de una sucesión de ciclos límites estables revela la importancia del parámetro de tasa de crecimiento poblacional. En este escenario un aumento del crecimiento neto de población puede ser dañino, no únicamente para el stock del recurso, sino para todas las variables de sostenibilidad.
- Se presentan escenarios en los cuales todas las variables o algunas de ellas tienden a cero, lo cual representa no sostenibilidad.

En la órbita heteroclínica, el sistema tiende al equilibrio interno E_2 . Así, con el objetivo de alcanzar la sostenibilidad se deben asignar condiciones iniciales que pertenezcan a la cuenca de atracción de este equilibrio interno; en caso contrario, el sistema propende a la extinción de los recursos y de la población, en consecuencia; a la de cualquier crecimiento económico. Se puede observar que antes de alcanzar la completa sostenibilidad se presentan algunas oscilaciones. Esto puede ser pensado como escenarios de crisis locales en la sociedad que pueden llegar después de un cierto periodo de tiempo.

El escenario de ciclos límite estables puede ser pensado como un escenario sostenible siempre que el periodo de los ciclos límites se mantenga en valores realistas. La sucesión de ciclos límites expone la formación de ciclos límites estables y el crecimiento del periodo de oscilación. Cuando $\tau \rightarrow -0,698$ se presenta un cambio en las cuencas de atracción y el sistema tiene al equilibrio ubicado en el origen el cual es un equilibrio de no sostenibilidad. Este resultado revela la importancia en particular del parámetro de tasa de crecimiento poblacional, en el cual un aumento excesiva del crecimiento neto de la población sin ningún control sobre la explotación puede ser dañino no únicamente para el stock del recurso, sino para todas las variables de sostenibilidad.

Además de los hechos anteriores, se ha demostrado que en tiempos largos el crecimiento del recurso natural debe ser mucho mayor comparado con su utilización para consumo humano. Si el recurso natural es continuamente extraído debido al aumento de la población, esto puede afectar el crecimiento del recurso disponible y como resultado puede presentarse la extinción del recurso renovable. En esta condición, la supervivencia de la población también entra en riesgo. Esto crea una perturbación en el ecosistema del recurso renovable y además añade un impacto negativo a la población humana. El crecimiento natural del recurso en ausencia de control para su reproducción natural, promueve el factor de fertilidad de la población, lo que genera alta demanda de recurso para la supervivencia de la población en crecimiento. Este escenario hace que la extracción supere el crecimiento del recurso perjudicando la sostenibilidad después de un tiempo largo.

Se concluye finalmente que en un sistema de este tipo se describen tres comportamientos diferentes. Primero, un escenario sostenible, donde todos los estados tienden a un punto interno en el retrato de fase. Es posible alcanzar este escenario ideal pasando a través de

un estado transitorio que puede relacionarse con pequeños escenarios de crisis, donde pueden ocurrir pequeñas oscilaciones. Un segundo escenario de sostenibilidad se alcanza cuando aparece una órbita periódica. Esto permite soluciones que predicen de manera consecutiva periodos críticos seguidos de periodos de riqueza. En el tercer caso, todas las variables o algunas de ellas tienden a cero, en ambos casos esto representa no sostenibilidad. Tasa de natalidad y crecimiento intrínseco del recurso tienen un rol importante en el desarrollo sostenible, ya que permite la aparición de uno de los tres escenarios según sus valores establecidos en el diagrama de codimensión-2. Estos escenarios son una característica importante porque también se puede concluir que al aumentar los procesos de crecimiento poblacional se deben garantizar acciones de control con el objetivo de favorecer la sostenibilidad a largo plazo, donde la extinción en tiempo prolongado parece ser la consecuencia en algunos escenarios. Con este análisis, el modelo propuesto de estudio tiene éxito para entender problemas y objetivos del desarrollo sostenible, y pueden entenderse las implicaciones serias del impacto de la sobrepoblación y aceleración del crecimiento natural del recurso renovable.

En este trabajo se hace énfasis en el modelado y simulación ya que estos modelos 3 dimensionales enfocados al desarrollo sostenible. Presentan grandes dificultades para trabajar en un sentido analítico. Por ejemplo, hallar puntos de equilibrio y soluciones analíticas es casi imposible. Esta imposibilidad de hallar soluciones parte de que el sistema es no lineal, y por tanto estos sistemas son difíciles de trabajar con la teoría analítica. La teoría analítica existente caracteriza los sistemas o modelos matemáticos de una manera amplia si los sistemas presentan linealidad. El sistema propuesto en esta tesis para el desarrollo sostenible carece completamente de un carácter lineal y por tanto se debe abordar su análisis desde las herramientas matemáticas existentes. Estas herramientas existentes son el modelado y simulación, ya que además de encontrar soluciones para el modelo, estas soluciones permiten predecir el comportamiento futuro del modelo a partir de un estado inicial

Por otro lado los resultados gráficos y el modelado, permiten que esta investigación sea de gran utilidad para plantear políticas públicas en torno al desarrollo sostenible, por ejemplo, es posible ver que llegado el caso en que se presenten problemas por una alta tasa de crecimiento poblacional y por ende una alta demanda de recurso natural para consumo humano, es entonces necesario desarrollar políticas que permitan disminuir esta tasa de crecimiento por medio de políticas públicas para la salud reproductiva, evitar embarazos no deseados, educación sexual para estratos bajos, acompañamiento familiar para evitar casos de violencia intrafamiliar y violencia. En regiones o países de gran extensión es posible plantear políticas públicas en donde si se tiene un único hijo entonces se dan ventajas económicas para la educación y bienestar del hijo y la pérdida de estas ventajas en el caso en que se tengan más de un hijo por familia.

Estos resultados a través del análisis gráfico permiten dar información útil a personas en

cargos públicos, como por ejemplo alcaldes con propuestas de gobiernos, concejales para orientar la aprobación de proyectos de salud pública. En particular las personas encargadas del desarrollo de una región, en el caso de Colombia, las personas encargadas de las políticas encaminadas al análisis de población y de crecimiento económico son los “secretarios de desarrollo”. Se considera que los resultados de este trabajo son de interés debido a que revela dinámicas significativas y poco intuitivas, por ejemplo, las personas en cargos públicos pueden apoyar políticas como:

- Regulación de la tasa de crecimiento natural de recurso renovable, con el objetivo de evitar a largo plazo periodos críticos de población.
- Control de la tasa de crecimiento poblacional, a través de educación sexual para evitar embarazos en la edad temprana.
- Aumento de bienestar educativo, ya que se ha demostrado que un alto nivel educativo representa personas que evitan el embarazo en edad temprana y tienen menor número de hijos.
- Políticas que regulan la circulación de dinero, con el objetivo de mantener el sistema lejos del escenario de extinción debido a que en escenarios de rápido crecimiento poblacional una pequeña inyección de capital después de su respectiva valorización, puede conducir a la población en general a escenarios oscilatorios que representan grandes muertes poblacionales, y en casos extremos a escenarios de extinción poblacional y de recurso.

A. Normalización y reparametrización del sistema

Un cambio de variables es una técnica usada para simplificar problemas en los cuales las variables originales son reemplazadas por funciones de otras variables[30]. El cambio de variables implementado transforma el problema original un problema más fácil de abordar en la simulación numérica. Existen diferentes cambios de variables los cuales varían según la “técnica de escalamiento” usada. Los factores que se deben tener en cuenta a la hora de escoger una técnica de escalamiento son: el álgebra después de hacer el escalamiento, la escala de medida después del escalamiento, la interpretación de los parámetros redimensionados y el impacto que tiene el reescalamiento en la simulación computacional[30]. El presente trabajo aplica al sistema (3-10) un cambio de variables llamado “escalamiento de ecuaciones diferenciales” [30], el cual es generalizable a otros modelos [41] la técnica de escalamiento escogida para el modelo en (3-10) consiste en dividir las variables de estado por cada una de sus capacidades máximas, de esta forma las nuevas variables quedan acotadas en el intervalo $[-1, 1]$, con el objetivo de simplificar el método se dividen las variables de estado por un parámetro que ya haga parte del sistema, con la condición adicional de que el parámetro; acote por encima a todas las capacidades máximas de las variables, esto último se hace con el objetivo no recurrir a todas las capacidades máximas y evitar añadir parámetros adicionales al sistema, para profundizar en la formulación matemática del reescalamiento se puede revisar [23]. En el modelo (3-10), se escogió el parámetro Ω para el reescalamiento : y se definieron las nuevas variables:

$$L = \frac{Y}{\Omega} \quad ; \quad S = \frac{X}{\Omega} \quad ; \quad K = \frac{Z}{\Omega}$$

Aplicando los cambios de variables se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{Y}}{\Omega} &= \left(\tau + \phi \Omega \frac{X}{\Omega} \right) \frac{Y}{\Omega} \\ \frac{\dot{X}}{\Omega} &= \left(\rho \left(1 - \frac{X}{\Omega k_1} \right) \left(\frac{X}{\Omega k_2} - 1 \right) - \Omega \frac{Y}{\Omega} \right) \frac{X}{\Omega} \\ \frac{\dot{Z}}{\Omega} &= \lambda \left(\frac{Z}{\Omega} \right)^{q_1} \left(\Omega \frac{Y X}{\Omega \Omega} \right)^{q_2} - \delta \frac{Z}{\Omega}\end{aligned}$$

Finalmente despues de eliminar terminos y despejar variables

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= (\tau + \phi X)Y \\ \dot{X} &= \left(\rho \left(1 - \frac{X}{\Omega k_1} \right) \left(\frac{X}{\Omega k_2} - 1 \right) - Y \right) X \\ \dot{Z} &= \left(\lambda \left(\frac{Z}{\Omega} \right)^{q_1} \left(\frac{Y X}{\Omega} \right)^{q_2} - \delta \frac{Z}{\Omega} \right) \Omega\end{aligned}$$

El nuevo sistema queda

$$\dot{Y} = (\tau + \phi X)Y \tag{A-1}$$

$$\dot{X} = \left(\rho \left(1 - \frac{X}{\Omega k_1} \right) \left(\frac{X}{\Omega k_2} - 1 \right) - Y \right) X \tag{A-2}$$

$$\dot{Z} = \left(\lambda \left(\frac{Z}{\Omega} \right)^{q_1} \left(\frac{Y X}{\Omega} \right)^{q_2} - \frac{\delta Z}{\Omega} \right) \Omega \tag{A-3}$$

Para facilitar el cálculo numérico se añaden renombran los parámetros y se añaden restricciones que se muestran en A-4; con el objetivo de evitar el uso de valores de parámetros pequeños en los denominadores.

$$\Omega k_1 = K_1 \quad ; \quad \Omega k_2 = K_2 \quad ; \quad 0 < q_2 < 1 \quad y; \quad q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = 1 - q_1 \tag{A-4}$$

Finalmente se obtiene

$$\dot{X} = \left(\rho \left(1 - \frac{X}{K_1} \right) \left(\frac{X}{K_2} - 1 \right) - Y \right) X$$

$$\dot{Y} = (\tau + \phi X)Y$$

$$\dot{Z} = (\lambda Z^{q_1} (Y X)^{1-q_1} - \delta Z)$$

B. Existencia y Unicidad de soluciones para el sistema (3-11)

El teorema fundamental de existencia y unicidad afirma que dado un subconjunto E abierto de \mathbb{R}^3 , y una condición inicial $(X(0), Y(0), K(0))$ y se asume que $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z} \in C^1(E)$ entonces la solución del sistema con condición inicial; existe y esta es única, [?]

Con el objetivo de encontrar el intervalo en que las funciones son de clase $C^1(E)$ se calcula el jacobiano, ecuación (B-7). En las componentes del jacobiano a_{11}, a_{22}, a_{33} se presentan indeterminaciones en $Y = 0$ y $Z = 0$, por esta razón solo se puede garantizar existencia y unicidad en la región $X \geq 0, Y > 0, Z > 0$. Una de las regiones donde no se puede garantizar soluciones es sobre el plano $Z = 0$, sin embargo el plano $Z = 0$ es un plano invariante. La invarianza del sistema garantiza que toda condición inicial sobre este plano, se mantiene sobre este el mismo. Debido a la invarianza del plano $Z = 0$ o del plano XY , es posible analizar la existencia y unicidad únicamente sobre el plano XY . En este plano se se toman en cuenta solo las dos primeras ecuaciones \dot{X}, \dot{Y} , el jacobiano para este sistema es el siguiente (B-1)

$$\begin{pmatrix} -Y - X \left(\frac{\rho \left(\frac{X}{K_2} - 1 \right)}{K_1} + \frac{\rho \left(\frac{X}{K_1} - 1 \right)}{K_2} \right) - \rho \left(\frac{X}{K_1} - 1 \right) \left(\frac{X}{K_2} - 1 \right) & -X \\ \phi Y & \tau + \phi X \end{pmatrix}' \quad (\text{B-1})$$

El sistema 2-dimensional es de clase C^1 Por tal motivo se puede garantizar la existencia y unicidad de las soluciones sobre el plano XY , es decir para $Y \geq 0$ y $X \geq 0$. En este plano siempre se tienen existencia y unicidad de soluciones.

Si se considera el sistema 3-Dimensional puede ser que existan más soluciones, pero al menos las que se tienen sobre el plano XY existen y son únicas.

B.1. Delimitación del espacio de parametros

Con el objetivo de garantizar que la población no crezca hasta infinito, se propone el siguiente análisis para el sistema sin subsidio y posterior a este una evidencia numérica acerca del acotamiento de la población.

Para la variable de recurso natural, del sistema en 3-11 se tiene:

$$\dot{X} \leq \rho X \left(1 - \frac{X}{K_1}\right) \left(\frac{X}{K_2} - 1\right) \quad (\text{B-2})$$

Siguiendo el análisis para el acotamiento propuesto en [?]. De (B-2) se obtiene un máximo en $X = K_1$ y posterior a este valor $\dot{X} < 0$. Con esto se obtiene finalmente $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup X(t) \leq K_1$

Para la ecuación de población

$$\dot{Y} = (\tau + \phi X)Y \leq (\tau + \phi K_1)Y \quad (\text{B-3})$$

$$\implies \int \dot{Y} \leq \int (\tau + \phi K_1)Y \quad (\text{B-4})$$

$$\implies \int \frac{dY}{Y} \leq \int (\tau + \phi K_1) dt \quad (\text{B-5})$$

$$\implies Y \leq e^{(\tau + \phi K_1)t + C_1} + Y(O) \quad (\text{B-6})$$

De esta forma se garantiza que la población no crece hasta infinito si $\tau + \phi K_1 \leq 0 \iff K_1 \leq -\frac{\tau}{\phi}$. Sin embargo no se puede decir que en nuestro sistema la variable Y está limitada debido a que no se cumple esta desigualdad.

Por otro lado el parametro de subsidio económico $R(X, Y) = \epsilon \left(\frac{1}{Y} - 1\right) \geq 0$ si $0 < Y < 1$. Por la evidencia numérica existente a lo largo del documento se observa que se tiene esta última desigualdad.

Como un indicio para analizar el acotamiento de la variable Y a través del parametro de subsidio. Se observa con las simulaciones numéricas que para un valor de $\epsilon = 0,05$ se conserva el equilibrio interno para los valores de la tabla 4-2, sin embargo para valores de ϵ mayores a 0.05, el equilibrio interno desaparece y las orbitas que antes presentaban convergencia al equilibrio interno, presenta divergencia hacia infinito para todas las variables en el espacio de estados. Por esta razón se observa que los valores de ϵ menores a 0.05 acotan la población, en el sentido en que conserva el equilibrio interno atractor.

En otras palabras, se puede acotar el recurso por el límite superior de crecimiento y la población presenta convergencia al origen si se cumple la desigualdad entre τ , ρ y K_1 , de esta forma se muestra que Y está acotada por la desigualdad. El factor de subsidio se acota por debajo cuando Y tiende a 1. Sin embargo debido al cociente $\frac{1}{Y}$ el factor de subsidio no está limitado.

A pesar de esta falta de delimitación, existen valores numéricos nombrados anteriormente, que permiten ver cuando hay crecimiento hacia infinito y cuando hay convergencia a alguno de los equilibrio.

Con referencia a garantizar que la variable Y no toma valores negativos, (Falta invarianza de el plano $y=0$ para garantizar que no hay valores negativos para Y)

B.2. Condiciones de bifurcación

B.2.1. Condiciones para la bifurcación Limit Point

(C_1) Fold, Limit Point o bifurcaciones punto silla-nodo bajo las siguientes condiciones

El sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1$$

con f una función suave, tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $X = 0$

(C_2) Equilibrio: $f(0, 0) = 0$

(C_3) Valores propios: $\lambda = f_x(0, 0) = 0$

(C_4) Nodgeneración: $f_{xx}(0, 0) \neq 0$

(C_5) Transversalidad: $f_\alpha(0, 0) \neq 0$

Para garantizar la primera condición (C_1) para el primer punto LP hallado de la sección [4,3] se debe cumplir que las coordenadas y parametros dados por la tabla **B-1**, son valores asociados a un punto de equilibrio del sistema (3-11).La verificación se puede realizar a traves del codigo implementado en Matlab de la sección B.2.2

X	0,0464	Ω	0,000025	τ	-0,1
Y	0,0349	ϕ	0,55	ρ	0,025
Z	0	q_1	0,5	q_2	0,5
		K_1	0,3	λ	0,1
		K_2	0,0175	δ	0,1
		ϵ	0,005		

Tabla B-1.: Coordenadas y parámetros del primer punto LP hallado en sección [4,3]

El equilibrio que arroja el código en Matlab tiene coordenadas $X = 0,0464, Y = 0,0349$ y $Z = 0$, este equilibrio coincide con el mostrado en la tabla **B-1**, por tal razón se verifican las condiciones (C_1) y (C_2) .

Para la condición (C_3) se deben hallar los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio $X = 0,0464, Y = 0,0349$ y $Z = 0$ la matriz jacobiana puede hallarse simbólicamente a través del código dado en la sección Usando este código se puede comprobar que el jacobiano del sistema está dado por:

$$\begin{pmatrix} -Y - \left(\frac{X}{12} - \frac{1}{40}\right) \left(\frac{400X}{7} - 1\right) - X \left(\frac{200X}{21} - \frac{127}{84}\right) & -X & 0 \\ \frac{11Y}{20} & \frac{11X}{20} - \frac{Z}{200Y^2} - \frac{51}{2000} & \frac{1}{200Y} - \frac{1}{200} \\ \frac{Y\sqrt{Z}}{20\sqrt{XY}} & \frac{X\sqrt{Z}}{20\sqrt{XY}} & \frac{\sqrt{XY}}{20\sqrt{Z}} - \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad (\text{B-7})$$

Al reemplazar el punto de equilibrio $X = 0,0464, Y = 0,0349$ y $Z = 0$ en el jacobiano, se obtiene una indeterminación en la componente de la matriz a_{33} . Por esta razón, verificar analíticamente la condición (C_3) , se vuelve una tarea compleja. A pesar de esto la verificación analítica de estas condiciones se podría conseguir a través del uso de paquetes simbólicos. Estos paquetes simbólicos vienen incorporados en software de alto nivel. Entre los paquetes simbólicos existentes en el mercado están los incluidos en el software matlab, Mathematica o Maple. El paquete simbólico incluido en Matlab es el que se ha usado en los códigos propuestos en este proyecto de tesis añadidos en las secciones B.2.2 y Sin embargo, se ha mostrado anteriormente que la obtención analítica de estas condiciones a veces puede complicarse por la presencia de indeterminaciones. Para solucionar este tipo de fenómenos, se puede considerar hallar el jacobiano simbólico y reemplazar primero los valores asociados al equilibrio hallado y posteriormente los valores de parámetros. De esta forma podría suceder que la indeterminación desapareciera.

Con los razonamientos anteriores, se hace notable la necesidad de paquetes simbólicos y diferentes perspectivas con el objetivo de abordar la verificación de las condiciones de transversalidad y degeneración. Una de estas perspectivas, es la usada por el software Matcont. Este software calcula las curvas de punto límite y puntos Hopf a través de la computación basada en los métodos "jacobianos frontera" "jacobianos cuadrados frontera" [25] otro de los métodos usado por ejemplo para calcular ciclos límite es el computación basada en colocación orthogonal [7].

Debido a el componente numérico para la verificación las condiciones de degeneración y transversalidad, esta verificación se sale de los objetivos planteados para este trabajo investigativo .

B.2.2. Código Matlab: puntos de equilibrio

```

1 syms X Y Z TAU PHI K1 K2 RHO LAMBDA Q1 DELTA EPSILON
2 TAU= -0.0255; %i no se asignan valores
3 PHI=0.5500000000000000; %l comando solve no funciona
4 K1= 0.3000000000000000;
5 K2 =0.0175000000000000;
6 RHO =0.0250000000000000;
7 LAMBDA= 0.1000000000000000;
8 Q1=0.5000000000000000;
9 DELTA=0.1000000000000000;
10 EPSILON =0.0050000000000000;
11 eq1 = (RHO*(1-X/K1)*(X/K2-1)-Y)*X == 0 %Expresión para representar
    ecuaciones
12 eq2 = (TAU+PHI*X)*Y + EPSILON*Z*(1/Y-1)==0
13 eq3 = (LAMBDA*(Z)^Q1*(Y*X)^(1-Q1)-DELTA*Z)==0
14 sol = solve(eq1,eq2,eq3); %Solución de las ecuaciones
15 soluX=double(sol.X); %Soluciones para x
16 soluY=double(sol.Y); %Soluciones para y
17 soluZ=double(sol.Z); %Soluciones para x
18 %Equilibrio de orbita Hetero
19 EquiOrbHetero=[soluX(3) soluY(3) soluZ(3)] %coordenadas del 3er equilibrio
    encontrado
20 REALX =real(soluX) %Parte real de la solución(No es necesario ya que todas las
    soluciones son reales)
21 REALY =real(soluY)
22 REALZ =real(soluZ)
23 %EPSILON =0.0050000000000000;
24 X=soluX(1), Y=soluY(1), Z= soluZ(1)
25 %X=0, Y=0,
26 %Z= 0
27 eq1 = (RHO*(1-X/K1)*(X/K2-1)-Y)*X == 0;
28 eq2 = (TAU+PHI*X)*Y + EPSILON*Z*(1/Y-1)==0;
29 eq3 = (LAMBDA*(Z)^Q1*(Y*X)^(1-Q1)-DELTA*Z)==0;

```

B.2.3. Código Matlab: Jacobiano

```

1 %JACOBIANO SIMBOLICO
2 syms X Y Z TAU PHI K1 K2 RHO LAMBDA Q1 DELTA EPSILON
3 TAU= -0.0255; %i no se asignan valores
4 PHI=0.5500000000000000; %l comando solve no funciona

```

```

5 K1= 0.3000000000000000;
6 K2 =0.0175000000000000;
7 RHO =0.0250000000000000;
8 LAMBDA= 0.1000000000000000;
9 Q1=0.5000000000000000;
10 DELTA=0.1000000000000000;
11 EPSILON =0.0050000000000000;
12 jac=jacobian ([ (RHO*(1-X/K1)*(X/K2-1)-Y)*X , ...
13      (TAU+PHI*X)*Y + EPSILON*Z*(1/Y-1) , ...
14      (LAMBDA*(Z)^Q1*(Y*X)^(1-Q1)-DELTA*Z) ] , ...
15      [X, Y, Z])
16 X=0.0464;
17 Y=0.0464;
18 Z=0;
19 MEVAL=[ subs(jac(1,1)),subs(jac(1,2)),subs(jac(1,3)); subs(jac
20      (2,1))...
21      , subs(jac(2,2)), subs(jac(2,3)) ; ...
22      subs(jac(3,1)),subs(jac(3,2)),subs(jac(1,3)) ]

```

B.2.4. Condiciones para la bifurcación Hopf

1. Bifurcación Andronov-Hopf ó Hopf, bajo las siguientes condiciones

Suponga que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(X, \alpha), \quad X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1$$

con f una función suave, tiene para $|\alpha|$ suficientemente pequeño el equilibrio $X = 0$ y además

- Equilibrio: $f(0, 0) = 0$
- Valores propios: $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega_0$, $\mu(0) = 0$. $\omega(0) = \omega_0 > 0$
- Nodgeneración: $L_1(0) \neq 0$, L_1 es el primer coeficiente de Lyapunov
- Transversalidad: $\mu'(0) \neq 0$

B.3. Condiciones de simulación en el software Matcont-CL

A continuación se muestran las condiciones de simulación realizadas en el software Matcont para la obtención de algunos resultados presentados en esta investigación.

Las simulaciones realizadas que se encuentran en el documento de tesis , se pueden dividir en tres tipos. estos tres tipos de simulaciones se clasifican según las condiciones especificadas sobre el software Matcont. El primer tipo de simulaciones, presentan condiciones iniciales de simulación especificadas en la tabla **B-2**. Esta tabla muestra en particular las condiciones iniciales para hacer la continuación de equilibrios que se muestra en la figura **4-1**. Las gráficas relacionadas con continuación de equilibrios, se obtiene usando las mismas tolerancias de la tabla **B-2**. A pesar de usar las mismas tolerancia, los diferente resultados obtenidos en las simulaciones se debe a la variación de las condiciones iniciales asociadas a las coordenadas de equilibrios y valores de parámetros.

De manera orientativa, con el objetivo de facilitar la simulación a interesados en la replicación de estas simulaciones, las condiciones iniciales y valores de parámetros se pueden encontrar a lo largo del documento. De manera específica, las tolerancias usadas en la tabla **B-2**, se usan en los resultados de las figuras: **4-2**, **4-3**, **4-12**, **4-13**.

De manera análoga las condiciones de simulación de la tabla **B-3**, pueden ser usadas para obtener los resultados de las gráficas: **4-20**, **4-21**, **4-14**.

Finalmente la tabla **B-4**, contiene las condiciones de simulación asociadas a las gráficas **4-5**, **4-6**, **4-7**, **4-8**, **4-9**, **4-10**, **4-11**, **4-15**, **4-16**, **4-17**, **4-18**, **4-19**.

Tabla B-2.: Condiciones iniciales para simulación de gráficas **4-1** y **4-2**

		Condiciones iniciales de simulación,	
		Figura 4,1	Figura 4.2
		E_7	E_4
Coordenadas	X	0.16363639	0,167274476544171
	Y	0.094893741	0, 0182555091737
	Z	0	0,0946614085697518
Tolerancias	$VarTolerance$	1e-6	1e - 6
	$FunTolerance$	1e-6	1e - 6
	$TestTolerance$	1e-6	1e - 6

Tabla B-3.: Valores propios y estabilidad para equilibrios de grafica **4-1**

		Condiciones iniciales	
		Figura 4,1	
		Punto Hopf inicial	
Coordenadas	X	0.113	
	Y	0.02801	
	Z	0.00319	
Tolerancias	$VarTolerance$	1e-6	
	$FunTolerance$	1e-6	
	$TestTolerance$	1e-6	
Parámetros	tau	-0.0824	
	rho	0.00819	

Tabla B-4.: Condiciones iniciales para simulaciones de gráficas **4-5:** órbitas

		Condiciones iniciales de simulación,	
		Figura 4-5	
		Condición inicial para orbita	
Coordenadas	X	0.15	
	Y	0.09	
	Z	0	
Integrador	Method	ode23s	
	Interval	1000	
	InitStepsize	1e-6	
	MaxStepSize	1e-6	
	Rel. Tolerance	1e-6	
	Abs. Tolerance	1e-6	
Parámetros		Tabla: 4-2	

C. Análisis de la estabilidad y condiciones de bifurcación para el sistema 2-Dimensional

C.1. Equilibrio 1.2: Casos de estabilidad

Equilibrio 1.2. Estabilidad Caso 1: $\rho > 0, \phi > 0$

Criterio de estabilidad para Equilibrio 2: $X = k_1, Y = 0$

$$\rho - \frac{\rho k_1}{k_2} < 0 \implies 1 - \frac{k_1}{k_2} < 0 \implies k_2 < k_1 \quad ; \quad \text{Si } \rho > 0 \text{ y } k_1 > 0$$

Segundo Criterio

$$\tau + \phi k_1 < 0 \implies k_1 < -\frac{\tau}{\phi} \quad ; \quad \text{si } \phi > 0$$

Equilibrio 1.2, estabilidad Caso 2: $\rho < 0, \phi > 0$

Bajo estas condiciones las desigualdades para ρ y ϕ que garantizan la estabilidad cambian respectivamente de la siguiente forma.

$$k_2 > k_1 \quad ; \quad k_1 < -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 1.2, Estabilidad Caso 3: $\rho > 0, \phi < 0$

$$k_2 < k_1 \quad ; \quad k_1 > -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 1.2, Estabilidad Caso 4: $\rho < 0, \phi < 0$

$$k_2 > k_1 \quad ; \quad k_1 > -\frac{\tau}{\phi}$$

C.2. Estabilidad de equilibrio 1.3: $X = k_2, Y = 0$

Se evalua el Jacobiano en el equilibrio $X = k_2$ y $Y = 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{Jacobiano}(k_1, 0) &= \begin{bmatrix} \frac{2\rho k_2}{k_2} - \rho - \frac{3\rho K_2^2}{k_1 k_2} + \frac{2\rho k_2}{k_1} - Y & -k_1 \\ 0 & \tau + \phi k_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{2\rho k_2}{k_2} - \rho - \frac{3\rho K_2}{k_1} + 2\rho \frac{k_2}{k_1} - Y & -k_1 \\ 0 & \tau + \phi k_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \rho - \frac{\rho k_2}{k_1} & -k_1 \\ 0 & \tau + \phi k_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Por ser una matriz triangular, los valores propios Valores propios (VP) son los elementos de la diagonal.

$$\begin{aligned}
 VP_1 &= \rho - \frac{\rho k_2}{k_1} \\
 VP_2 &= \tau + \phi k_2
 \end{aligned} \tag{C-1}$$

Equilibrio 1.3. Estabilidad Caso 1: $\rho > 0, k_1 > 0, \phi > 0$

Criterio de estabilidad para Equilibrio 1.3: $X = k_2, Y = 0$

$$\rho - \frac{\rho k_2}{k_1} < 0 \implies 1 - \frac{k_2}{k_1} < 0 \implies k_1 < k_2 \quad ; \quad \text{si } \rho > 0 \text{ y } k_1 > 0 \tag{C-2}$$

Segundo Criterio

$$\tau + \phi k_2 < 0 \implies k_2 < -\frac{\tau}{\phi} \quad ; \quad \text{si } \phi > 0$$

En el sistema propuesto, el valor de los parametros siempre cumplen $k_1 > 0$ y $\rho > 0$, sin embargo, por interes análitico consideramos el caso $\rho < 0$

Equilibrio 1.3, Estabilidad Caso 2 $\rho < 0, k_1 > 0$

Bajo estas condiciones las desigualdades para ρ y ϕ que garantizan la estabilidad cambian respectivamente de la siguiente forma.

$$k_1 > k_2 \quad ; \quad k_2 < -\frac{\tau}{\phi} \tag{C-3}$$

Usando los valores de la tabla (4-1) y reemplazando en los criterios de estabilidad:

$$VP_1 = \rho - \frac{\rho k_2}{k_1} = 0,023$$

$$VP_2 = \tau + \phi k_2 = 384,9$$

Por tanto el equilibrio $(k_2, 0)$ es un nodo Inestable.

C.3. Estabilidad equilibrio 2

Se sustituyen las ecuaciones del equilibrio interno, en el jacobiano :

Jacobiano (caso 4)

$$P = \frac{2\rho}{k_2} \left(-\frac{\tau}{\phi} \right) - \rho - \frac{3\rho}{k_1 k_2} \left(-\frac{\tau}{\phi} \right)^2 + \frac{2\rho}{k_1} \left(-\frac{\tau}{\phi} \right) - \left(-\frac{\rho\tau}{K_2\phi} - \rho - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi^2} - \frac{\rho\tau}{k_1\phi} \right)$$

$$M = - \left(-\frac{\tau}{\phi} \right)$$

$$Q = \phi \left(-\frac{\rho\tau}{K_2\phi} - \rho - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi^2} - \frac{\rho\tau}{k_1\phi} \right)$$

$$R = \tau + \phi \left(-\frac{\tau}{\phi} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} P & M \\ Q & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2\rho\tau}{k_2\phi} - \rho - \frac{3\rho\tau^2}{k_1k_2\phi^2} - \frac{2\rho\tau}{k_1\phi} + \frac{\rho\tau}{K_2\phi} + \rho + \frac{\rho\tau^2}{k_1k_2\phi^2} + \frac{\rho\tau}{k_1\phi} & -\left(-\frac{\tau}{\phi}\right) \\ & -\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1k_2\phi} - \frac{\rho\tau}{k_1} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-3\rho\tau}{\phi k_2} - \frac{2\rho\tau^2}{\phi^2 k_1 k_2} + \frac{\rho\tau}{k_1\phi} & \frac{\tau}{\phi} \\ -\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\rho\tau}{k_1} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Los valores propios de la matriz Jacobiana (J) viene dados por

$$\det \begin{bmatrix} \psi - a & -b \\ -c & \psi - 0 \end{bmatrix} = (\psi - a)(\psi - 0) - (-b)(-c) = \psi^2 - \psi a - bc \quad (\text{C-4})$$

Despejando ψ se obtiene

$$\psi_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}; \text{ con } a = J_{11}, b = J_{12}, c = J_{21}, d = J_{22}. \quad (\text{C-5})$$

ψ es la formula para el determinante de una matriz 2×2 . Reemplazando las componentes a, b y c.

$$\psi_{1,2} = \frac{\frac{-3\rho\tau}{\phi k_2} - \frac{2\rho\tau^2}{\phi^2 k_1 k_2}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{-3\rho\tau}{\phi k_2} - \frac{2\rho\tau^2}{\phi^2 k_1 k_2}\right)^2 - 4 \left(\frac{\tau}{\phi}\right) \left(-\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\rho\tau}{k_1}\right)}}{2} \quad (\text{C-6})$$

Para garantizar la estabilidad se analizan dos casos posibles, los valores propios reales o los valores propios son imaginarios.

Caso 1, Valores propios Reales

Si los valores propios son reales quiere decir que en la ecuación (C-5) se tiene

$$a^2 > -4bc$$

Para garantizar la estabilidad se debe satisfacer:

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2} < 0 \implies a \pm \sqrt{a^2 - 4bc} < 0 \implies a < -\sqrt{a^2 + 4bc} \quad \text{ó} \quad a < \sqrt{a^2 + 4bc}$$

Multiplicando por -1 la ultima desigualdad:

$$\implies -\sqrt{a^2 + 4bc} < -a \implies |\sqrt{a^2 + 4bc}| < -a \implies \sqrt{a^2 + 4bc}^2 < a^2 \implies 4bc < 0 \implies bc < 0 \quad (\text{C-7})$$

En el sistema de parametros $b < 0$ debido a que $b = \frac{\tau}{\phi} < 0$, por tanto para la estabilidad se debe garantizar únicamente:

$$c > 0 \implies -\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1k_2\phi} - \frac{\rho\tau}{k_1} > 0 \quad (\text{C-8})$$

La condición de raices imaginarias se satisface a traves de la siguiente reestriccion:

Caso 2 raices imaginarias: $a^2 < -4bc$.

Se debe tener adicionalmente que $a < 0$,

$$\frac{-3\rho\tau}{\phi k_2} - \frac{2\rho\tau^2}{\phi^2 k_1 k_2} + \frac{\rho\tau}{k_1 \phi} < 0 \implies \frac{\rho\tau}{\phi} \left[\frac{-3}{k_2} - \frac{2\tau}{\phi k_1 k_2} + \frac{1}{k_1} \right] < 0$$

Como $\frac{\rho\tau}{\phi} < 0$ finalmente se consigue la estabilidad con

$$\frac{-3}{k_2} - \frac{2\tau}{\phi k_1 k_2} + \frac{1}{k_1} > 0$$

C.4. Condiciones de bifurcacion para los Nodos

C.4.1. Bifurcación Fold (Silla-Nodo)

Equilibrio 1 $(0, 0)$

Los valores propios son

$$VP_1 = -\rho$$

$$VP_2 = \tau$$

Caso 1

$$\rho = 0 \text{ y } \tau \neq 0$$

Caso 2

$$\rho \neq 0 \text{ ó } \tau = 0$$

Equilibrio 2 $(k_1, 0)$

$$VP_1 = \rho - \frac{\rho k_1}{k_2}$$

$$VP_2 = \tau + \phi k_1$$

Caso 1

$$k_1 = k_2 \text{ y } k_1 \neq -\frac{\tau}{\phi}$$

Caso 2

$$k_1 \neq k_2 \text{ y } k_1 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 3 $(k_2, 0)$

$$VP_1 = \rho - \frac{\rho k_2}{k_1}$$

$$VP_2 = \tau + \phi k_2$$

Caso 1

$$k_1 = k_2 \text{ y } k_2 \neq -\frac{\tau}{\phi}$$

Caso 2

$$k_1 \neq k_2 \text{ y } k_2 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 4

$$VP_{1,2} = \frac{\frac{-3\rho\tau}{\phi k_2} - \frac{2\rho\tau^2}{\phi^2 k_1 k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3\rho\tau}{\phi k_2} - \frac{2\rho\tau^2}{\phi^2 k_1 k_2}\right)^2 - 4\left(\frac{\tau}{\phi}\right)\left(-\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\rho\tau}{k_1}\right)}}{2}$$

Segun el desarrollo simbolico desarrollado en C-7 y C-8 La bifurcacion se presenta si

$$c = 0 \quad \implies -\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\rho\tau}{k_1} = 0 \quad (C-9)$$

C.4.2. Condiciones para la bifurcación de Hopf

Equilibrio 1 $(0, 0)$, **Equilibrio 2** $(k_2, 0)$, **Equilibrio 3** $(k_2, 0)$

En estos equilibrio no hay presencia de raices, por tanto no hay imaginarios que satisfagan la condición de Hopf

Equilibrio 4

$$VP_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$$

Se deben presentar dos valores propios imaginario con parte real cero, por lo tanto:

$$a = 0 \wedge a^2 - 4bc < 0 \implies 4bc > 0 \quad (C-10)$$

Como $b < 0$ entonces se obtiene un punto hopf para

$$a = 0 \quad y \quad c < 0 \quad \implies \quad \frac{-3\rho\tau}{\phi k_2} - \frac{2\rho\tau^2}{\phi^2 k_1 k_2} + \frac{\rho\tau}{k_1 \phi} = 0 \quad y \quad -\frac{\rho\tau}{K_2} - \rho\phi - \frac{\rho\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\rho\tau}{k_1} < 0$$

Cancelando ρ , τ y ϕ se obtienen finalmente las condiciones para un punto Hopf en el Equilibrio 4:

$$\frac{-3}{k_2} - \frac{2\tau}{\phi k_1 k_2} + \frac{1}{k_1} = 0 \quad y \quad -\frac{\tau}{K_2} - \phi - \frac{\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\tau}{k_1} < 0$$

C.4.3. Condiciones para la bifurcación Bogdanov-Takens

Equilibrio 1 $(0, 0)$

$$\rho = 0 \quad ; \quad \tau = 0$$

Equilibrio 2 $(k_1, 0)$

$$k_2 = k_1 \quad ; \quad k_1 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 3 $(k_2, 0)$

$$k_1 = k_2 \quad ; \quad k_2 = -\frac{\tau}{\phi}$$

Equilibrio 4

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2} = 0 \quad \implies \quad a = 0 \text{ y } bc = 0$$

Como $b < 0$ se debe cumplir que $a = 0$ y $c = 0$:

$$\frac{-3}{k_2} - \frac{2\tau}{\phi k_1 k_2} + \frac{1}{k_1} = 0 \quad \implies \quad \frac{-3k_1 - 2\tau + k_2}{k_1 k_2} = 0 \quad \implies \quad -3k_1 - 2\tau + k_2 = 0$$

$$-\frac{\tau}{K_2} - \phi - \frac{\tau^2}{k_1 k_2 \phi} - \frac{\tau}{k_1} = 0 \quad \implies \quad -\tau \left(\frac{k_1 + \tau + k_2}{K_1 K_2} \right) = \phi \quad \implies \quad K_1 + \tau + K_1 = \frac{\phi k_1 k_2}{-\tau}$$

Finalmente para garantizar que ambos valores propios sea cero se deben cumplir las restricciones :

$$-3k_1 - 2\tau + k_2 = 0 \tag{C-11}$$

$$K_1 + \tau + K_1 = \frac{\phi k_1 k_2}{-\tau} \tag{C-12}$$

$$\tag{C-13}$$

C.5. Condiciones de simulación en el software Matcont-CL

		Condiciones de simulación,	
		Figura 4,1	Figura 4.2
		E_7	E_4
Coordinates	X	0.16363639	0,167274476544171
	Y	0.094893741	0,0182555091737
	Z	0	0,0946614085697518
Tolerancias	v_1	-0.00380758-0.092336i	0,0158344375674391
	v_2	-0.00380758+0.092336i	-0,012563 + 0,0922568i
	$v_{1,2,3}$	1.9502-2.0502i	-0,0125630 - 0,0922568i

Tabla C-1.: Valores propios y estabilidad para equilibrios de grafica 4-1

Bibliografía

- [1] AIYAR, Shekhar ; DALGAARD, Carl-Johan: Accounting for productivity: Is it OK to assume that the world is Cobb–Douglas? En: *Journal of Macroeconomics* 31 (2009), Nr. 2, p. 290–303
- [2] AMADOR, Jorge A. ; OLIVAR, Gerard ; ANGULO, Fabiola: Smooth and Filippov models of sustainable development: Bifurcations and numerical computations. En: *Differential Equations and Dynamical Systems* (2013), p. 1–12
- [3] ANGULO, David ; ANGULO, Fabiola ; OLIVAR, Gerard: Dynamics and forecast in a simple model of sustainable development for rural populations. En: *Bulletin of mathematical biology* 77 (2015), Nr. 2, p. 368–389
- [4] ANGULO, Fabiola ; OLIVAR, Gerard ; OSORIO, A ; VELÁSQUEZ, Luz S. [u. a.]: Nonlinear dynamics and bifurcation analysis in two models of sustainable development. En: *Revista Internacional Sostenibilidad, Tecnología y Humanismo* (2009), Nr. 4, p. 41–46
- [5] ANGULO GARCÍA, David ; OLIVAR TOST, Gerard: *Esquemas de Desarrollo Sostenible : una Aplicación de Redes Complejas a la Región de Caldas = Sustainable development schemes: [recurso electrónico]*. Manizales, 2012., 2012
- [6] ARIAS, Fabio: Desarrollo sostenible y sus indicadores. En: *Revista sociedad y economía* (2006)
- [7] ASCHER, Uri ; CHRISTIANSEN, J ; RUSSELL, Robert D.: A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems. En: *Mathematics of Computation* (1979), p. 659–679
- [8] BARNETT, William: Dimensions and economics: some problems. En: *Quarterly Journal of Austrian Economics* 7 (2004), Nr. 1, p. 95–104
- [9] BRANDER, James A. ; TAYLOR, M. S.: The Simple Economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus Model of Renewable Resource Use. En: *The American Economic Review* 88 (1998), Nr. 1, p. 119–138. – ISSN 00028282
- [10] BROWN, John M.: *The riddle of the Pacific*. Adventures Unlimited Press, 1924

-
- [11] BRUNDTLAND, Gro H.: World commission on environment and development. En: *Environmental policy and law* 14 (1985), Nr. 1, p. 26–30
- [12] BUTLIN, John. *Our common future. By World commission on environment and development.* (London, Oxford University Press, 1987, pp. 383. 1989
- [13] CARSON, Rachel: *Silent spring.* Houghton Mifflin Harcourt, 2002
- [14] COBB, Charles W. ; DOUGLAS, Paul H.: A theory of production. En: *The American Economic Review* 18 (1928), Nr. 1, p. 139–165
- [15] CONRAD, Jon M.: Open access and extinction of the passenger pigeon in North America. En: *Natural Resource Modeling* 18 (2005), Nr. 4, p. 501–519
- [16] CUARESMA, Jesús C. ; PALOKANGAS, Tapio ; TARASYEV, Alexander: *Dynamic systems, economic growth, and the environment.* Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2009
- [17] D.ALESSANDRO, Simone: Non-linear dynamics of population and natural resources: The emergence of different patterns of development. En: *Ecological Economics* 62 (2007), Nr. 3-4, p. 473. – ISSN 0921–8009
- [18] DALTON, Thomas R. ; COATS, R M.: Could institutional reform have saved Easter Island? En: *Journal of Evolutionary Economics* 10 (2000), Nr. 5, p. 489–505
- [19] DANIKEN, Erich v.: *Chariots of the Gods?: Unsolved Mysteries of the Past.* New Jersey:Putnam, 1969. – Informe de Investigación
- [20] DE LARA, Michel ; DOYEN, Luc: *Sustainable management of natural resources: mathematical models and methods.* Springer Science & Business Media, 2008
- [21] DE LARA, Michel ; DOYEN, Luc: *Sustainable management of natural resources: mathematical models and methods.* Springer Science & Business Media, 2008
- [22] DHOOGHE, A. ; GOVAERTS, W. ; KUZNETSOV, Yu. A. ; MESTROM, W. ; RIET, A. M. ; SAUTOIS, B: MATCONT and CL MATCONT. En: *Continuation toolboxes in matlab* (2006)
- [23] DÍAZ, Héctor Andrés Granada: *Dinámica No Lineal de un Sistema Complejo Demográfico, Económico y Ambiental de Desarrollo Sostenible,* Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Tesis de Grado, 2014. – Línea de Investigación : Modelamiento Matemático en Desarrollo Sostenible y Análisis Bifurcacional
- [24] GALOR, Oded ; WEIL, David N.: Population, technology, and growth: From Malthusian stagnation to the demographic transition and beyond. En: *American economic review* (2000), p. 806–828

- [25] GOVAERTS, Willy ; KUZNETSOV, Yu A. ; SIJNAVE, Bart: Implementation of Hopf and double-Hopf continuation using bordering methods. En: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 24 (1998), Nr. 4, p. 418–436
- [26] HERBERT A, Alfred J. L.: Elements of Mathematical Biology. En: *Econometrica* 27 (1959), Nr. 3, p. 493–495
- [27] JORGE, Amador M.: *Estudio de la dinámica no-lineal y no suave en sistemas de desarrollo sostenible*, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Tesis de Grado, 2011
- [28] KUZNETSOV, Yu A. ; RINALDI, S ; GRAGNANI, Alessandra: One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. En: *International Journal of Bifurcation and chaos* 13 (2003), Nr. 08, p. 2157–2188
- [29] KUZNETSOV, Yuri A.: *Elements of applied bifurcation theory*. Vol. 112. Springer Science & Business Media, 2013
- [30] LANGTANGEN, Hans P. ; PEDERSEN, Geir K.: *Scaling of differential equations*. Vol. 2. Springer, 2016
- [31] MANDAL, Sandip ; RAY, Santanu ; ROY, Samar ; JARGENSEN, Sven E.: Order to chaos and vice versa in an aquatic ecosystem. En: *Ecological Modelling* 197 (2006), Nr. 3-4, p. 498. – ISSN 0304–3800
- [32] MIN ; ZHOU ; BANG-JUN ; WANG ; FENG, Ji: The 6th International Conference on Mining Science and Technology: Coalmining cities’ economic growth mechanism and sustainable development analysis based on logistic dynamics model. En: *Procedia Earth and Planetary Science* 1 (2009), Nr. special issue title: Proceedings of the International Conference on Mining science and Technology (ICMST2009), p. 1737 – 1743. – ISSN 1878–5220
- [33] PETER, SAETA: *Writing DE’s with Dimensionless Variables*. 2011. – Accessed: 2018-06-02
- [34] PEZZEY, John ; RUSONG, W ; HINMAN, GW ; RUITENBEEK, HJ ; KAIRIUKSTIS, L ; BURACAS, A ; STRASZAK, A ; ALTIERI, MA ; ARCHIBUGI, F ; NIJKAMP, D [u. a.]: *Economic analysis of sustainable growth and sustainable development*. Banco Mundial, Washington, DC (EUA)., 1990
- [35] PEZZEY, John C. ; ANDERIES, John M.: The effect of subsistence on collapse and institutional adaptation in population–resource societies. En: *Journal of Development Economics* 72 (2003), Nr. 1, p. 299–320

- [36] RAGOZIN, David L. ; BROWN, Gardner: Harvest policies and nonmarket valuation in a predator—prey system. En: *Journal of Environmental Economics and Management* 12 (1985), Nr. 2, p. 155–168
- [37] SAEED, Khalid: Economic development, creative destruction and urban dynamics: a proposal for rethinking developmental agendas. En: *The 28th International System Dynamics Conference, Seoul, Korea* (2010)
- [38] SANTILLO, David: Reclaiming the Definition of Sustainability (7 pp). En: *Environmental Science and Pollution Research* 14 (2007), Nr. 1, p. 60–66
- [39] SERAGELDIN, Ismail ; MARTIN-BROWN, Joan: Ethics and Values a Global Perspective: Proceedings of an Associated Event of the Fifth Annual World Bank Conference on Environmentally and Socially Sustainable Development. (1998)
- [40] SOLOW, Robert M.: Intergenerational equity and exhaustible resources. En: *The review of economic studies* 41 (1974), p. 29–45
- [41] SONIN, Ain A.: Dimensional analysis / Massachusetts Institute of Technology. 2001. – Informe de Investigación
- [42] SOREK, Gilad: Berglas School of Economics, Tel Aviv University. En: *Thesis* (2006)
- [43] STROGATZ, Steven H.: *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018
- [44] SUAREZ, Inti: Mastering chaos in ecology. En: *Ecological Modelling* 117 (1999), Nr. 2, p. 305–314
- [45] VOLTERRA, Vito: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. In Italy, 1926
- [46] WANG, Gang ; LIANG, Xue-Gong ; WANG, Fei-Zhi: The competitive dynamics of populations subject to an Allee effect. En: *Ecological Modelling* 124 (1999), Nr. 2-3, p. 183–192
- [47] WARREN, Weckesser: *Second Order Differential Equations; Nondimensional Equations*. 2005. – Accessed: 2018-06-02
- [48] ZHOU ; MING-CHUN ; LIU ; YU, Zong: Hopf bifurcations in a Ricardo Malthus model. En: *Applied Mathematics and Computation* 21 (2010), Nr. 6, p. 2425–2432. – ISSN 0096–3003