

**INTERSECCIÓN DE CLASES
HOMOCLÍNICAS SOBRE CONJUNTOS
SINGULARES HIPERBÓLICOS**

Germán Fabian Escobar Fiesco

Trabajo de grado para optar al título de
Magister en ciencias matemáticas.

Dirigido por:
Serafín Bautista Diaz

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Bogotá D.C., 2010

Resumen

Los conjuntos singulares hiperbólicos sobre 3-variedades cerradas introducidos en [MPP98] tienen un papel importante en el estudio de la dinámica de conjuntos robustos transitivos en dimensión tres. En [MPP98] se asegura que un conjunto C^1 robusto transitivo con singularidades en un campo vectorial de dimensión tres, es un atractor singular hiperbólico para X_t ó X_{-t} (ver también [MPP04]). La búsqueda de una teoría general para conjuntos singulares hiperbólicos sugiere como referencia la teoría clásica de conjuntos hiperbólicos como modelo.

De otro lado recientemente fue probado en [MP04] y [MP07] que un conjunto attracting singular hiperbólico conexo con órbitas periódicas densas y una única singularidad es transitivo como en el caso del *atractor geométrico de Lorenz* (ver [ABS82], [GW79]), ó es unión de dos clases homoclínicas.

De estos resultados se pudo concluir en [BMP07] que la intersección de dos clases homoclínicas diferentes contenidas en un conjunto singular hiperbólico no son necesariamente disjuntas, propiedad que se extiende a toda 3-variedad compacta riemanniana con un campo vectorial exhibiendo un conjunto attracting singular hiperbólico conexo con órbitas periódicas densas, una única singularidad que es la unión de dos clases homoclínicas pero no es transitivo.

Este trabajo consiste en entender los resultados obtenidos en [[BMP07]] y reescribirlos en forma más accesible al lector.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Definiciones	1
2. Teorema principal	7
2.1. Teorema	7
3. Construcción del flujo	8
3.1. Definición de la aplicación f	8
3.2. Definición de la aplicación G	12
3.3. Campo vectorial 3-dimensional X	18
4. Demostración del teorema principal	25
4.1. Prueba del teorema	25
Bibliografía	26
Índice	28

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones

Definición 1 Un espacio M se denomina localmente euclidiano de dimensión n , si para cada punto $p \in M$ existe un abierto \mathcal{U} de M tal que si $p \in \mathcal{U}$, \mathcal{U} es homeomorfo a un abierto \mathcal{U}' de \mathbb{R}^n , esto es:

$$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (\varphi \text{ es un homeomorfismo})$$

donde $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ se denominan las coordenadas de p en \mathbb{R}^n .

Definición 2 Un espacio topológico M se denomina una variedad topológica n -dimensional si M satisface:

- (i) M es hausdorff.
- (ii) M es un espacio localmente euclidiano n -dimensional.
- (iii) M tiene un base contable para su topología.

Es comun llamar al par $(\mathcal{U}, \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ una carta local.

Definición 3 Dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{V}, \psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ de la variedad topologica M son C^r -compatibles si las aplicaciones

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}), \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \longrightarrow \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Son C^r difeomorfismos entre abiertos de \mathbb{R}^n

Definición 4 Un atlas \mathcal{A} de dimensión n y clase C^r sobre un espacio localmente euclidiano M es una colección $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartas C^r -compatibles que cubren M , es decir $M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$.

Un atlas \mathcal{A} sobre un espacio localmente euclidiano se dice maximal si este no está contenido en otro mayor.

Definición 5 Una C^r variedad suave es una variedad topológica junto con un atlas maximal. Un atlas máximo de dimensión n y clase C^r sobre M es llamada también una estructura diferenciable de dimensión n y clase C^r .

Definición 6 Sean N y M variedades de dimensión n y m respectivamente. Una aplicación $f : N \rightarrow M$ es de clase C^r para un punto $p \in N$ si existe una carta (\mathcal{V}, ψ) en M conteniendo $f(p)$ y una carta (\mathcal{U}, φ) en N conteniendo a p tal que la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es una aplicación de un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , es C^r para $\varphi(p)$.

Definición 7 La aplicación $f : N \rightarrow M$ se dice C^r , si es C^r para cada punto de N . f es un difeomorfismo si es biyectivo con f y f^{-1} de clase C^r .

Definición 8 sea $p \in \mathbb{R}^n$. Un vector tangente a p es el par (p, v) donde $v \in \mathbb{R}^n$, este par es algunas veces escrito v_p . El conjunto de todos los vectores a p denotado por $T_p\mathbb{R}^n$ es llamado el espacio tangente a p . La unión disyunta de todos los espacios tangentes es llamado el fibrado tangente denotado $T\mathbb{R}^n$, es decir:

$$T\mathbb{R}^n = \{(p, v) : p \in \mathbb{R}^n \text{ y } v \text{ es un vector tangente a } p\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Para una variedad M n -dimensional consideremos la aplicación $\gamma : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ que define una curva C^1 con $\gamma(0) = p$, asumamos $(\mathcal{U}, \varphi \rightarrow \mathbb{R}^n)$ es una carta para p , de esta forma el vector tangente está determinado por $(\varphi \circ \gamma)'(0) = v_p$. El conjunto de todos los vectores tangentes para p que escribimos como T_pM ,

$$T_pM = \{v_p : v_p \text{ es un vector tangente de una curva diferenciable a través de } p\}$$

. De forma similar a \mathbb{R}^n definimos el fibrado tangente TM como

$$TM = \{(p, v) : p \in M \text{ y } v \text{ es un vector tangente para } p\} = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

se define el diferencial de una aplicación $f : N \rightarrow M$ de clase C^r en cada punto $p \in N$ como la aplicación lineal entre los espacios tangentes inducida por f , esto es

$$Df(p) : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M.$$

Ahora enunciaremos sobre sistemas dinámicos.

Sea M una 3-variedad cerrada (compacta sin borde) riemanniana. Sea X un campo vectorial de clase C^1 , denotaremos por X_t el flujo generado por X . Diremos que el flujo es una acción $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ es decir, $X_0 = id_M$ y $X_s \circ X_t = X_{s+t}$ para todo s y $t \in \mathbb{R}$.

Una *órbita* de X es el conjunto $O = O_X(q) = \{X_t(q) : t \in \mathbb{R}\}$ para algún $q \in M$. Una *singularidad* de X es un punto $\sigma \in M$ tal que $X(\sigma) = 0$ (equivalentemente $O_X(\sigma) = \{\sigma\}$). Una *órbita periódica* de X es una órbita $O = O_X(p)$ tal que $X_T(p) = p$ para algún número mínimo $T > 0$ (equivalentemente O es compacto y $O \neq \{p\}$). Una *órbita cerrada* de X es una singularidad ó una órbita periódica de X .

El *conjunto omega limite* de un punto $p \in M$ es el conjunto $\omega_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p), \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$. El *conjunto alpha limite* de un punto p es el conjunto $\alpha_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{-t_n}(p), \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$. Un punto $p \in M$ es llamado *no-errante* para X si para cada $T > 0$ y cada vecindad U en M de p existe $t > T$ tal que $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no-errantes de X es denotado por $\Omega(X)$ ó $\Omega(X_t)$.

Un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ es:

- *Invariante* si $X_t(\Lambda) = \Lambda, \forall t \in \mathbb{R}$;
- *Transitivo* si $\Lambda = \omega_X(p)$ para algún $p \in \Lambda$;
- *No-trivial* si Λ no es una órbita cerrado de X ;
- *Aislado* si existe una vecindad compacta U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$$

(U es llamado *bloque aislante*);

- *Attracting* si es aislado y tiene un bloque aislante U positivamente invariante, e.d.,

$$X_t(U) \subset U, \quad \forall t \geq 0;$$

- *Atractor* si es attracting transitivo.
- *Hiperbólico* si es invariante y existen constantes positivas K, λ y una descomposición continua del fibrado tangente de M sobre Λ de la forma $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$, tal que $\forall p \in \Lambda$:

1. $\|DX_t(p)/E_p^s\| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t > 0$ (e.d., E_Λ^s es el subfibrado (K, λ) -contractor);
2. $\|DX_{-t}(p)/E_p^u\| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t > 0$ (e.d., E_Λ^u es el subfibrado (K, λ) -expansor);
3. $E_\Lambda^X = \langle X \rangle$ (e.d., E_Λ^X es la dirección del campo).

Una *órbita cerrada es hiperbólica* si es hiperbólica vista como un conjunto compacto invariante. El teorema de variedades invariantes (ver [HPS77]) asegura que si x pertenece a un conjunto hiperbólico H de X , entonces los conjuntos:

$$W^{ss}(x) = \{y \in M : d(X_t(x), X_t(y)) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

y

$$W^{uu}(x) = \{y \in M : d(X_t(x), X_t(y)) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}$$

son C^1 subvariedades de M . Estas variedades son llamadas las variedades *estable fuerte* e *inestable fuerte* de x . Además, si O es una órbita de X contenida en Λ , entonces los conjuntos:

$$W^s(O) = \bigcup_{x \in O} W^{ss}(x) \quad y \quad W^u(O) = \bigcup_{x \in O} W^{uu}(x)$$

Son también C^1 subvariedades de M usualmente llamadas las variedades *estable* e *inestable* de O . Note que $W^s(O)$ y $W^u(O)$ son tangentes a los subfibrados $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X$ y $E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^X$ respectivamente.

Por *órbita homoclínica* asociada a una órbita cerrada hiperbólica O de X se entenderá una órbita $\gamma \subset W^s(O) \cap W^u(O)$. Si además $T_q M = T_q W^s(O) \oplus T_q W^u(O)$ para algún (y por lo tanto para todo) punto $q \in \gamma$, entonces diremos que γ es una *órbita homoclínica transversa* de O .

La *clase homoclínica* de una órbita periódica hiperbólica O de X es la clausura $H(O)$ de la unión de las órbitas homoclínicas transversas de O .

Denotemos por

$$m(L) = \frac{\|L(v)\|}{\|v\|}$$

la norma del mínimo de un operador lineal L .

Definición 9 Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto compacto invariante de X . Una descomposición continua y DX_t -invariante del fibrado tangente de M sobre Λ , de la forma

$$T_\Lambda M = E_\Lambda \oplus F_\Lambda,$$

es una descomposición dominada, si existen constantes positivas K y λ tal que

$$\frac{\|DX_t(x)/_{E_x}\|}{m(DX_t(x)/_{F_x})} \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

El subfibrado F es (K, λ) -dominado por el subfibrado E .

Observación 1 Asumiremos que una descomposición dominada, de los dos subfibrados E y F son siempre no triviales.

De esta observación, se tiene también que $E_x \neq 0$ e $F_x \neq 0$ para todo $x \in \Lambda$.

Definición 10 Un conjunto compacto invariante Λ de X es parcialmente hiperbólico, si este exhibe una descomposición dominada

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$$

tal que E_Λ^s es un subfibrado (K, λ) -contractor, e.d.,

$$\|DX_t(x)/_{E_x^s}\| \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

El subfibrado E_Λ^c es llamado el subfibrado central.

Para $x \in \Lambda$ y $t \in \mathbb{R}$ sea $J_t^c(x)$ el valor absoluto del determinante de la transformación lineal

$$DX_t(x)/_{E_x^c} : E_x^c \rightarrow E_{X_t(x)}^c.$$

Diremos que un conjunto Λ parcialmente hiperbólico *expande volumen* (ó (K, λ) -*expande volumen*) en el subfibrado central, si

$$J_t^c(x) \geq K^{-1}e^{\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

Definición 11 *Un conjunto Λ compacto invariante de X_t es singular hiperbólico para X_t si Λ es parcialmente hiperbólico, expande volumen en el subfibrado central y cada singularidad en Λ es hiperbólica.*

Vamos a denotar por $OC(X_t)$ la unión de las órbitas cerradas, por $P(X_t)$ la unión de las singularidades atractoras y por $F(X_t)$ la unión de las singularidades repulsoras del flujo X_t , $t \in \mathbb{R}$.

Definición 12 *El flujo X_t en una 3-variedad cerrada es singular hiperbólico si el conjunto no-errante $\Omega(X_t)$ satisface las dos condiciones siguientes:*

1. $\Omega(X_t) = CL [OC(X_t)]$.
2. $\Omega(X_t) \setminus (P(X_t) \cup F(X_t))$ es vacío ó tiene una descomposición en una unión disyunta de la forma $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, donde cada Λ_i , $i = 1, 2$ es un conjunto singular hiperbólico para X_t ó un conjunto singular hiperbólico para X_{-t} .

Definición 13 *Un flujo X_t de clase C^1 es singular-Axioma A si existe una descomposición disyunta finita*

$$\Omega(X_t) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n,$$

donde cada Λ_i es pieza básica hiperbólica ó un atractor singular hiperbólico ó un repulsor singular-hiperbólico, $i = 1, \dots, n$.

Capítulo 2

Teorema principal

Se sabe que dos clases homoclínicas diferentes contenidas en un conjunto hiperbólico coinciden o son disyuntas, esto como consecuencia del *Teorema de Smale* (ver [Lan]). Además, en [MP] se demostró que un conjunto atrahcing singular hiperbólico con órbitas periódicas densas y una única singularidad es transitivo, ó, es unión de dos clases homoclínicas diferentes. También se sabe que los conjuntos singulares-hiperbólicos son una generalización de los conjuntos hiperbólicos, por tanto para un conjunto singular hiperbólico es natural preguntarse si existen dos clases homoclínicas diferentes con intersección no vacía. La respuesta es afirmativa dado que se puede construir sobre una 3-variedad compacta un flujo llamado *La Mascara de Venecia* que exhibe un conjunto atrahcing singular-hiperbólico no transitivo con órbitas periódicas densas y una única singularidad que es unión de dos clases homoclínicas con intersección no vacía.

2.1. Teorema

Teorema 1 *Sobre toda 3-variedad cerrada existe un campo vectorial X que tiene un conjunto A atrahcing singular hiperbólico conexo con las siguientes propiedades:*

1. X tiene una única singularidad en A .
2. Las órbitas periódicas de X son densas en A .
3. A es unión de dos clases homoclínicas.
4. A no es transitivo.

Capítulo 3

Construcción del flujo

3.1. Definición de la aplicación f .

Primero introducimos la aplicación f que será usado en la construcción del campo vectorial X del teorema principal.

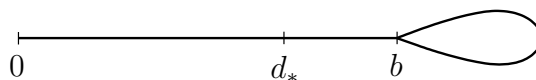


Figura 3.1: Variedad ramificada \mathcal{B} .

Dominio de f . Consideremos la 1-variedad ramificada \mathcal{B} que consiste de un intervalo compacto y un círculo que se unen en el punto b como se describe en la Figura 3.1. Si seccionamos \mathcal{B} sobre el punto b obtenemos un intervalo compacto que asumiremos como $[0, 1]$ por simplicidad. Sobre $[0, 1]$ consideraremos tres puntos

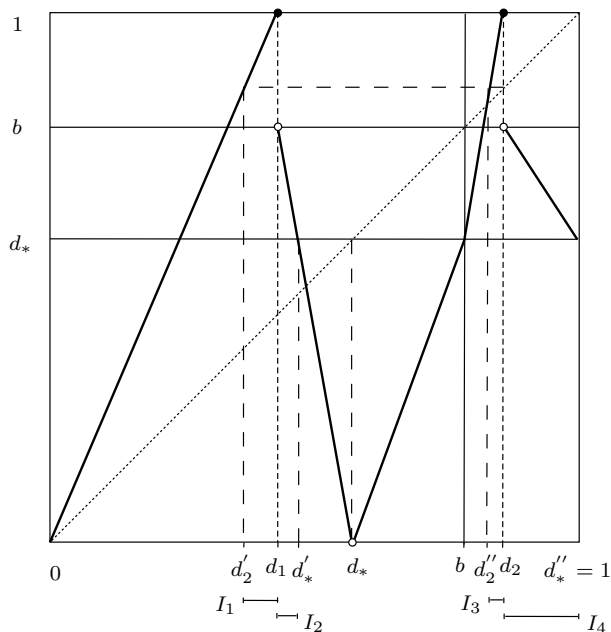
$$0 < d_1 < d_* < d_2 < 1,$$

donde d_* está también descrita en la Figura 3.1. Entonces d_* será el punto de discontinuidad de f como una aplicación de $[0, 1]$. El conjunto $\mathcal{B} \setminus \{d_*\}$ será el dominio de la función f

Definición de f . Definimos $f : \mathcal{B} \setminus \{d_*\} \rightarrow \mathcal{B}$ como se muestra en la Figura 3.2.

Mas precisamente, f satisface las siguientes hipótesis:

(H1): $Dom(f) = [0, 1] \setminus \{d_*\}$.


 Figura 3.2: Aplicación f .

$$(H2): f(0) = 0; f(d_1) = f(d_2) = 1; f(1) = f(b) = d_*.$$

$$(H3): f(d_1+) = f(d_2+) = b; f(d_1-) = f(d_2-) = 1; f(d_*+) = f(d_*-) = 0.$$

$$(H4): f([0, d_1]) = [0, 1]; f((d_1, d_*)) = (0, b); f((d_*, d_2]) = (0, 1]; f((d_2, 1]) = [d_*, b).$$

(H5): f **expande**, es decir, f es clase C^1 en el dominio $Dom(f)$ y existe un $\lambda > 1$ tal que:

$$|f'(x)| \geq \lambda, \forall x \in Dom(f).$$

Propiedades de f . Sea $|I|$ la longitud del intervalo I y consideremos los puntos $d'_2, d''_2 \in f^{-1}(d_2)$ y $d'_*, 1 \in f^{-1}(d_*)$ como en la Figura 3.2. Definiremos los siguientes intervalos:

- $I_1 = [d'_2, d_1], I_2 = (d_1, d'_*];$
- $I_3 = [d''_2, d_2], I_4 = (d_2, 1];$
- $H = [d'_2, d'_*] = I_1 \cup I_2, H' = (d''_2, 1] = I_3 \cup I_4.$

Lema 1 Los intervalos H, H', I_1, \dots, I_4 definidos arriba satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si $J \subset H \cup H'$ es un intervalo abierto, entonces $f^2(J)$ es un intervalo y

$$|f^2(J)| > \lambda^2 |J|.$$

$$2. d_* \in f^2(I_1) \cap f(I_2) \cap f^2(I_3) \cap f(I_4).$$

Demostración. Observe que $f(I_1) = f(I_3) = [d_2, 1]$ y $f(I_2) = f(I_4) = [d_*, b]$. En particular, $d_* \in f(I_2) \cap f(I_4)$. De $f((d_2, 1]) = [f(1), b)$ y $f(1) = d_*$, por **(H2)** se tiene que $d_* \in f^2(I_1) \cap f^2(I_3)$, lo que prueba la segunda parte. Ahora se probaremos la primera parte (1). Sea $J \subset H \cup H'$ un intervalo abierto. Note que H y H' son disjuntos y $J \subset H$ ó $J \subset H'$. Asumiremos $J \subset H$ para el otro caso es similar. Si $d_1 \notin J$ entonces $f(J)$ es un intervalo y $f(J) \cap \{d_1, d_*, d_2\} = \emptyset$. Si $d_1 \in J$ entonces $f(J)$ no es un intervalo. Sin embargo, $f(J)$ consiste de dos intervalos $J_1 \subset (d_2, 1]$ y $J_2 \subset (d_*, b)$, teniendo 1 y b como puntos límite respectivamente. En particular, $(J_1 \cup J_2) \cap \{d_1, d_*, d_2\} = \emptyset$. De $f(b) = f(1)$ por **(H2)** se tiene que $f^2(J) = f(J_1) \cup f(J_2)$ es un intervalo. La desigualdad se sigue por que f es expansiva (ver **(H5)**). ■

Lema 2 Si $I \subset [0, 1]$ es un intervalo abierto conteniendo a d_* , entonces existe un subintervalo $J \subset I$ y $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(J) = [0, 1]$.

Demostración. Como $d_* \in I$ se puede seleccionar un intervalo $J \subset I$ con punto límite d_* tal que $f(J)$ es un intervalo cerrado con 0 como punto límite. Ciertamente es suficiente usar $f(d_*+) = f(d_*-) = 0$ en **(H3)**. Como $f(0) = 0$, existe una sucesión de preimágenes de d_1 convergiendo a 0^+ . Así se puede asumir que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si b_{**} es el punto límite restante de J entonces $f^{n_1}(b_{**}) = d_1$. Usando $f([0, d_1]) = [0, 1]$ en **(H4)** podemos ver que $f^{n_1+2}(J) = [0, 1]$. Por tanto $r = n_1 + 2$.

■

Definición 14 Diremos que f es local eventualmente sobre (leo) si dado cualquier intervalo $I \subset [0, 1]$ existe un $m > 0$ tal que $f^m(I) = [0, 1]$.

Teorema 2 f es local eventualmente sobre

Demostración. Por **(H5)** si $K \subset [0, 1] \setminus \{d_1, d_*, d_2\}$ es un intervalo y

$$|f(K)| > \lambda |K|. \quad (1)$$

Fijando un intervalo $I \subset [0, 1] \setminus \{d_*\}$. Por el Lema 2 es suficiente mostrar la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d_* \in f^n(I) \quad (2)$$

Ciertamente para obtener la conclusión de la definición 5 para I , $m = n + r$ donde r viene del lema 2. Note que $I \subset \text{Dom}(f)$ por **(H1)**. De aplicar (1), se puede encontrar un primer entero $n \geq 0$ tal que $f^i(I)$ es un intervalo para toda $0 \leq i \leq n_1$ y

$$f^{n_1}(I) \cap \{d_1, d_*, d_2\} \neq \emptyset.$$

Si $d_* \in f^{n_1}(I)$ entonces probamos (2) con $n = n_1$. Asumamos que se da una de las dos $d_1 \in f^{n_1}(I)$ ó $d_2 \in f^{n_1}(I)$.

Caso I: $d_1 \in f^{n_1}(I)$. Se tienen dos subcasos, $f^{n_1}(I) \subset H$ ó no. Si no entonces $f^{n_1}(I) \supset I_1$ ó $f^{n_1}(I) \supset I_2$, como $f^{n_1}(I)$ es un intervalo que contiene a d_1 , entonces el lema 1-(2) implican $d_* \in f^{n_1+2}(I)$ ó $d_* \in f^{n_1+1}(I)$ así $n = n_1 + 2$ ó $n = n_1 + 1$ respectivamente. Si $f^{n_1}(I) \subset H$ entonces el lema 1-(1) implica que $f^{n_1+2}(I)$ es un intervalo y

$$|f^{n_1+2}(I)| > \lambda^{n_1+2} |I|.$$

En este subcaso se reemplaza I por $f^{n_1+2}(I)$ y reiniciamos.

Caso II: $d_2 \in f^{n_1}(I)$. Este caso es análogo al caso I donde nuevamente tenemos dos subcasos, que $f^{n_1}(I) \subset H'$ ó no. Si no entonces $f^{n_1}(I) \supset I_3$ ó $f^{n_1}(I) \supset I_4$, como $f^{n_1}(I)$ es un intervalo que contiene a d_2 , entonces el lema 1-(2) implican $d_* \in f^{n_1+2}(I)$ ó $d_* \in f^{n_1+1}(I)$ así $n = n_1 + 2$ ó $n = n_1 + 1$ respectivamente. Si $f^{n_1}(I) \subset H$ entonces el lema 1-(1) implica que $f^{n_1+2}(I)$ es un intervalo y

$$|f^{n_1+2}(I)| > \lambda^{n_1+2} |I|.$$

En este subcaso reemplazamos I por $f^{n_1+2}(I)$ y se reiniciamos.

Note que en los subcasos de arriba reemplazamos I por $f^{n_1+2}(I)$ y reiniciamos con intervalo con longitud mayor a $\lambda^{n_1+2} |I|$. Esto implica la existencia de un n satisfaciendo (2). El teorema esta probado. ■

Corolario 1 *Los puntos periódicos de f son densos en \mathcal{B} . Si $x \in \mathcal{B}$, entonces*

$$\mathcal{B} = \text{Cl} \left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(x) \right).$$

Demostración. Esto es una consecuencia directa del teorema 2 ■

3.2. Definición de la aplicación G .

En esta sección se definirá una aplicación dos dimensional G con una construcción similar al atractor de Plykin (pág.338-341 de [Rob95]).

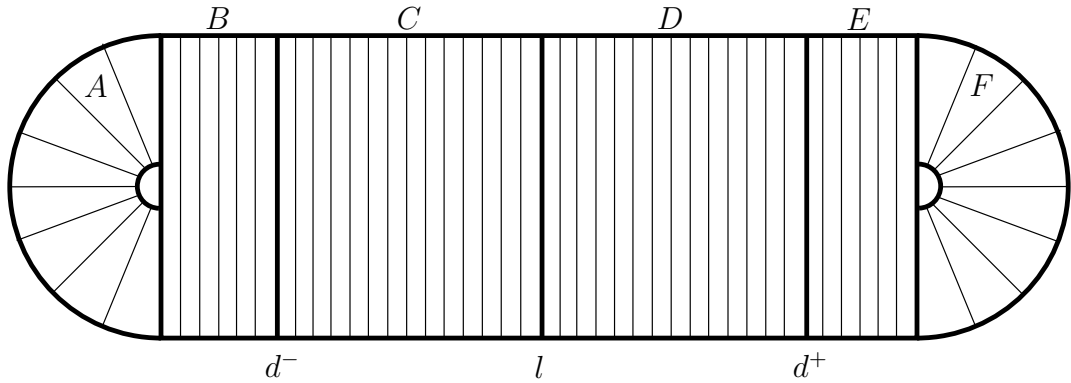


Figura 3.3: Región R .

Dominio de G . Consideremos la región del plano descrita en la figura 3.3. que es formada por dos semi-anillos A y F y cuatro rectángulos B, C, D, E . Existe una línea vertical media denotada por l . Note que l genera una reflexión de uno de los planos que denotaremos θ . Asumiremos $\theta(D) = \theta(C)$, $\theta(E) = \theta(B)$ y $\theta(F) = A$. En particular $\theta(R) = R$ y $\theta(d+) = d-$ donde los segmentos verticales $d+$, $d-$ son los límites de las curvas B y D como se muestra en la figura. Definamos

$$H^- = A \cup B \cup C \quad \text{y} \quad H^+ = D \cup E \cup F$$

Sea \mathcal{F} la foliación de R formada por los segmentos de línea descritos en la figura 3.3. Note que la línea media l en una folia de \mathcal{F} . Además, los segmentos formados en \mathcal{F} son verticales a la componentes B, C, D, E y radiales sobre los anillos componentes a, F . Usaremos la notación \mathcal{F}_x para denotar la folia de \mathcal{F} que contiene a $x \in R$.

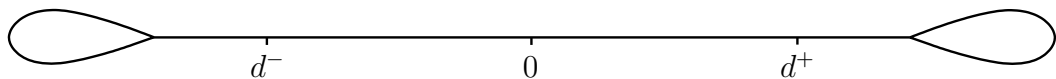


Figura 3.4: Espacio Cociente.

Identificando puntos en la misma folia de \mathcal{F} definiremos el espacio cociente K indicado en la figura 3.4, note que $0 \in K$ representa la hoja l en el espacio cociente.

Observación. La variedad K es obtenida al pegar dos copias \mathcal{B}^+ , \mathcal{B}^- de la variedad ramificada \mathcal{B} descrita en la figura 3.1. El conjunto $R \setminus \{d^+, d^-\}$ sera el dominio de G .

Definición de G . Definamos la aplicación $G : R \setminus \{d^+, d^-\} \rightarrow \text{Int}(R)$, C^∞ en forma que su imagen se indica en la figura 3.5.

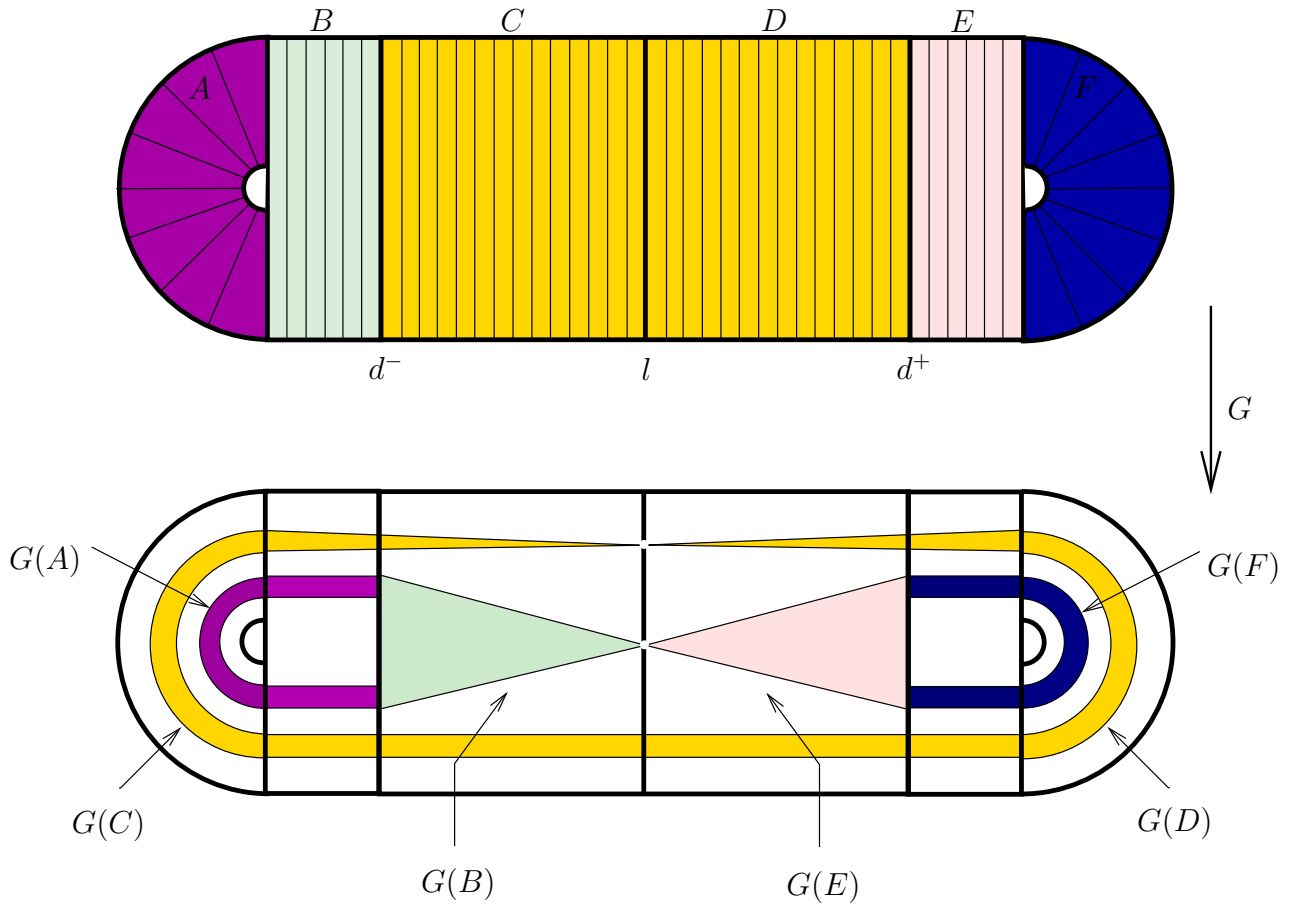


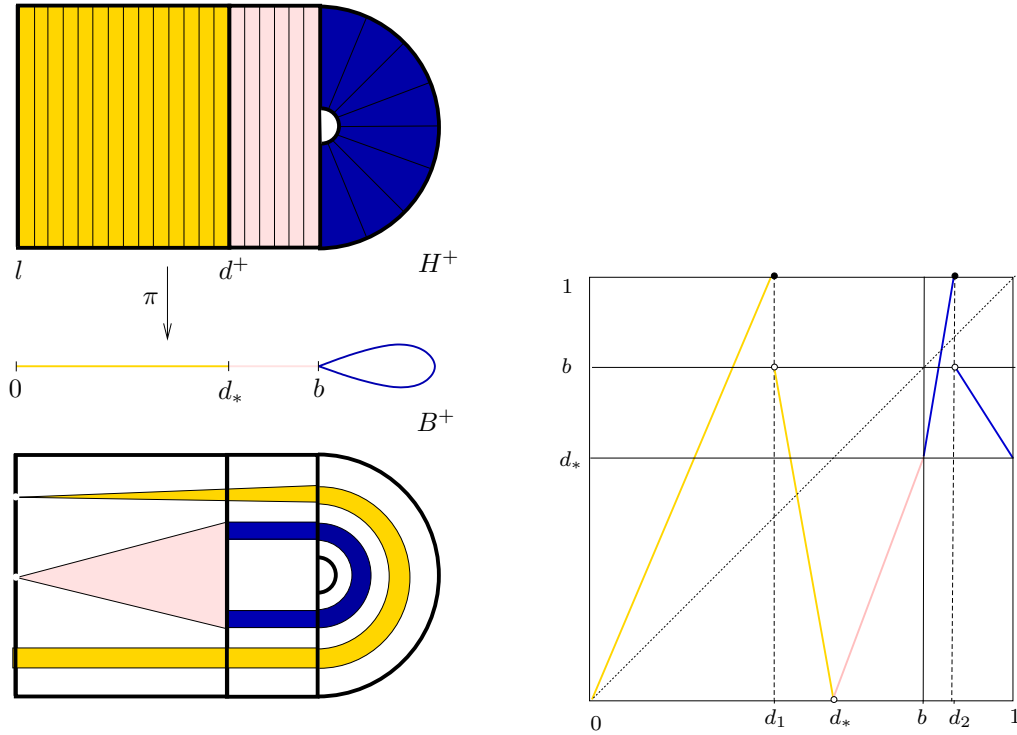
Figura 3.5: Aplicación G .

Requerimos las siguientes hipótesis:

(G1): G y θ conmutan, es decir, $G \circ \theta = \theta \circ G$.

(G2): G preserva y contrae la foliación \mathcal{F} .

(G3): sea $g : K \setminus \{d^+, d^-\} \rightarrow K$ la aplicación inducida por G en el espacio K . Entonces, la aplicación $f^+ = g/\mathcal{B}^+$ satisface las hipótesis **(H1)-(H5)** con $f = f^+$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+$ y $d_* = d^+$ (ver figura 3.6).


 Figura 3.6: Transformación inducida restringida a B^+ .

Propiedades de G . Denotemos por $\pi : R \rightarrow B$ la proyección a lo largo de las folias de \mathcal{F} . Se sigue que:

$$H^- = \pi^{-1}(B^-), \quad H^+ = \pi^{-1}(B^+)$$

(G1) implica que H^+ , H^- son invariantes bajo G , donde

$$G(H^- \setminus d^-) \subset H^- \quad \text{y} \quad G(H^+ \setminus d^+) \subset H^+ \quad (3)$$

Sea $Per(G/H_+)$ el conjunto de los puntos periódicos de G/H_+ . Sea $W^s(x, G)$ la variedad estable de $x \in R$ con respecto a G , es decir.

$$W^s(x, G) = \{y \in R : \lim_{n \rightarrow \infty} d(G^n(y), G^n(x)) = 0\}$$

Como G contrae \mathcal{F} por (G2) tenemos que $W^s(x, G)$ es unión de hojas de \mathcal{F} y se sigue de (G2), (G3) y la expansividad en (H5) que todos los puntos periódicos de G son sillars hiperbólicas. Por tanto la variedad inestable

$$W^u(x, G) = \{y \in R : \lim_{n \rightarrow -\infty} d(G^n(y), G^n(x)) = 0\}.$$

estará definida para todo $x \in R$ periódico. Por **(G1)** tenemos que $G(l) \subset l$ y G tiene un punto fijo P en l . Claramente se tiene $\pi(P) = 0$.

Dado un conjunto L denotamos por $Cl(L)$ la clausura de R . Definimos

$$A_G^- = Cl\left(\bigcap_{n \geq 1} G^n(H^-)\right), A_G^+ = Cl\left(\bigcap_{n \geq 1} G^n(H^+)\right) \quad (4)$$

Lema 3 Si $p \in Per(G/H_+) \setminus \{P\}$, entonces

$$A_G^+ = Cl(W^u(p, G))$$

y de igual forma remplazando $+$ por $-$.

Demostración. Para probar $Cl(W^u(p, G)) \subset A_G^+$ usaremos un argumento similar al del lema 29 de [Bau05]. Observe primero que $G^k(p) \notin d_+$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces $O_G(p) \subset int(H^+)$, así mismo existe un $\epsilon > 0$ tal que $W_\epsilon^u(G^{-k}(p), F) \subset H^+$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ por tanto para cualquier $k \geq 0$,

$$W^u(G^{-k}(p), G) = \bigcup_{j \geq 0} G^j(W_\epsilon^u(G^{-j}(G^{-k}(p)), G))$$

y

$$W^u(p, G) = G^k(W^u(G^{-k}(p), G)) \subset G^k(H^+)$$

entonces

$$CL(W^u(p, G)) \subset CL\left(\bigcap_{k \geq 0} G^k(H^+)\right) = A_G^+.$$

Para probar la inclusión contraria fijemos $a \in A_G^+$. Se sigue de la definición de A_G^+ existe un $a' \in H^+$ arbitrariamente cercano a a tal que $G^{-n}(a')$ existe y pertenece a H^+ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la hoja $\mathcal{F}_{G^{-n}(a')}$ conteniendo $G^{-n}(a')$. Escojamos un $\epsilon > 0$ pequeño, como \mathcal{F} es uniformemente contractiva por G (ver **(G2)**), tenemos que existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{n \geq n_\epsilon} \{d(G^n, a') : y \in F_{G^{-n}(a')}\} \leq \epsilon. \quad (5)$$

Ahora fijemos $n > n_\epsilon$ y consideremos $b_n = \pi(\mathcal{F}_{G^{-n}}(x)) \in B$. Fijemos un intervalo $I \subset W^u(p, G)$. Sea f^+ y \mathcal{B}^+ la aplicación y la variedad ramificada en **(G3)**. Para simplicidad de la notación quitaremos el exponente $+$.

Note que f es *leo* por el teorema 1. Además existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n'}(\pi(I)) = \mathcal{B}$ y $b_n \in f^{n'}(\pi(I))$. Como $f^{n'}(\pi(I)) = \pi(G^{n'}(I))$ se tiene $\pi(\mathcal{F}_{G^{-n}}(x)) = \pi(G^{n'}(I))$ y como

$$\mathcal{F}_{G^{-n}(a')} \cap G^{n'}(I) \neq \emptyset$$

se sigue que existe $x \in I$ tal que

$$G^{n'}(x) \in \mathcal{F}_{G^{-n}(a')}$$

Como $n > n_\epsilon$ y $n' \in \mathbb{N}$ se tiene $n + n' \geq n_\epsilon$. Como $W^u(p, G)$ es G -invariante y $x \in I \subset \mathcal{F}_{G^{-n}(a')}$ obtenemos

$$d(W^u(p, G), a') < \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario concluimos que

$$a' \in Cl(W^u(p, G)).$$

y como a' es arbitrariamente cercana a a se obtiene

$$a \in Cl(W^u(p, G))$$

probando el resultado. En forma similar reemplazando $+$ por $-$ dado que G y θ conmutan por **(G1)**. ■

Teorema 3 A_G^- y A_G^+ son clases homoclínicas de G y $P \in A_G^- \cap A_G^+$

Demostración. Claramente $P \in H^+ \cap H^-$ y como $G^n(P) \in G^n(H^+) \cap G^n(H^-)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como P es un punto fijo de G obtenemos $P \in G^n(H^+) \cap G^n(H^-)$ para todo n . Esto prueba $P \in A_G^- \cap A_G^+$. Ahora probaremos que A_G^- y A_G^+ son clases homoclínicas de G . Únicamente probaremos que A_G^+ si lo es, entonces A_G^- también lo es por que G y θ conmutan por **(G1)**. Sea f^+ y \mathcal{B}^+ la aplicación y la variedad ramificada en **(G3)** como antes quitaremos el exponente $+$ para mayor simplicidad. Por el corolario 1 tenemos que las órbitas periódicas de f son densas en \mathcal{B} . Podemos fijar $x \in Per(f) \setminus \{0\}$. Se sigue que la hoja $\pi^{-1}(x)$ de \mathcal{F} es periódica. Como \mathcal{F} es una foliación contractiva concluiremos que

existe $p \in \text{Per}(G/H^+) \setminus P$. Denotemos $H_G(p)$ la clase homoclínica de p . Afirmaremos que $A_G^+ = H_G(p)$. Ciertamente, tenemos que $A_G^+ = \text{Cl}(W^u(p, G))$ por el lema 3. $H_G(p)$ es la clausura de la intersección transversa de puntos de la $W^s(p, G)$ con $W^u(p, G)$ de esta forma obtenemos $H_G(p) \subset W^u(p, G)$ y $H_G(p) \subset A_G^+$. Ahora probaremos que $A_G^+ \subset H_G(p)$. Para ello únicamente tendremos que probar $W^u(p, G) \subset A_G^+$ puesto que $W^u(p, G)$ es denso en A_G^+ y $H_G(p)$ es cerrado. Fijemos $q \in W^u(p, G)$ y tomemos un intervalo abierto $I \subset W^u(p, G)$ conteniendo a q . Tenemos de **(G3)** y teorema 2 anterior que f es *leo*. Entonces, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(\pi(I)) = \mathcal{B}$. En particular, $\pi(\mathcal{F}_p) \in f^n(\pi(I))$, probando $\mathcal{F}_p \cap G^n(I) \neq \emptyset$. De

$$G^{-n}(\mathcal{F}_p) \cap I \neq \emptyset$$

Ahora tenemos

$$G^{-n}(\mathcal{F}_p) \cap I \subset H_G(p) \cap I$$

puesto que

$$G^{-n}(\mathcal{F}_p) \subset W^s(p, G)$$

y

$$I \subset W^u(p, G).$$

en consecuencia

$$H_G(p) \cap I \neq \emptyset$$

Como el intervalo I es arbitrariamente cercano a q y $H_G(p)$ es cerrado, podemos concluir que $q \in H_G(p)$. Esto prueba la afirmación. El teorema 2 se sigue de la afirmación. ■

Finalmente definimos

$$A_G = \text{Cl} \left(\bigcap_{n \geq 1} G^n(R) \right)$$

entonces definimos la siguiente propiedad.

Lema 4 $A_G = A_G^+ \cup A_G^-$.

Demostración. Se sigue de $R = H^+ \cup H^-$ y la definición de A_G^+ y A_G^- . ■

3.3. Campo vectorial 3-dimensional X .

En esta parte construiremos un campo vectorial X que satisfecerá las propiedades del teorema principal. La idea es construir la aplicación 2-dimensional G como la función de retorno asociada a un conjunto attracting singular hiperbólico. Además M será una 3-variedad cerrada.

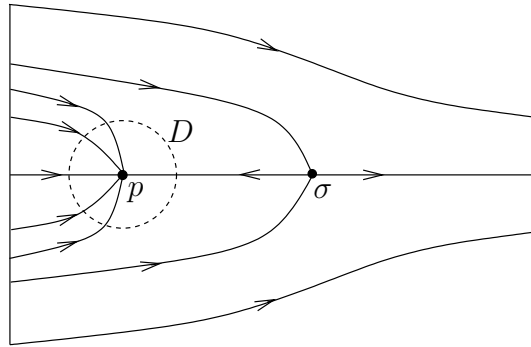


Figura 3.7: Sección transversal flujo cherry.

Definición de los plug 1 y 2. Introduzcamos los plugs 1 y 2. El plug 1 es construido a través de tres pasos. Primero consideremos un campo vectorial cuyo flujo se describe en la figura 3.7. Note que el campo vectorial tiene 2 equilibrios: una silla σ y un atractor p . Debemos asumir que los valores propios λ_3, λ_1 de σ satisfacen la relación.

$$\lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

Note en adición la similitud de este campo vectorial con el flujo cherry descrito en [PM82]. Describamos un disco pequeño D centrado alrededor del equilibrio attracting p . Esto da por terminado el primer paso de la construcción del plug 1. Para el segundo paso multiplicaremos el campo vectorial por una contracción fuerte λ_2 obteniendo el campo vectorial de la figura 3.8, el hueco indicado en esta figura esta dado alrededor del disco D .

Note también que si nuestra elección de λ_2 es tal que $-\lambda_2$ es mayor, entonces el resultante campo vectorial tiene una única singularidad σ que es *Lorenz-like*, es decir, σ tiene valores propios reales $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1$ tal que satisfacen:

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

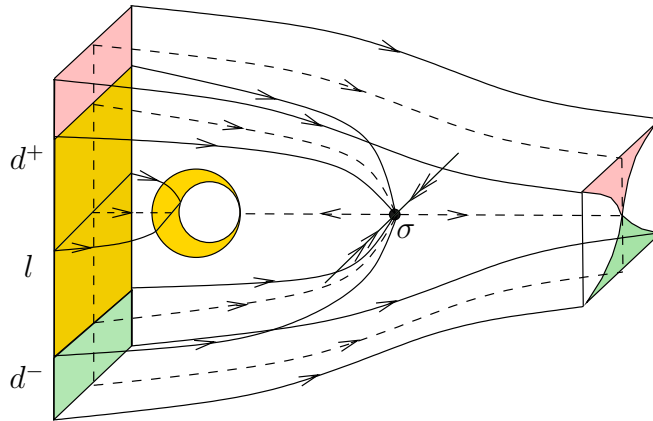


Figura 3.8: Flujo cherry.

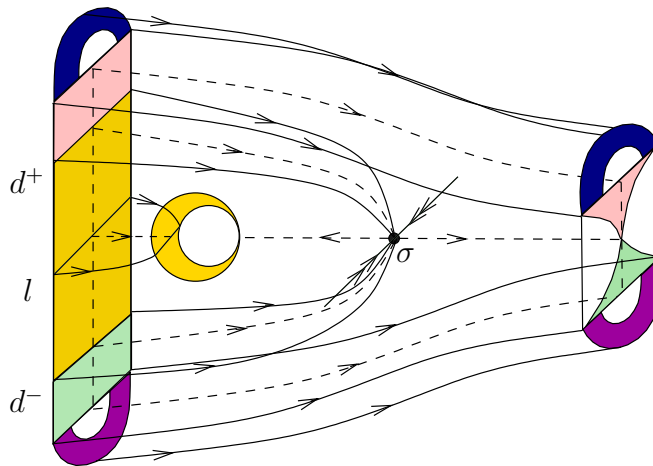


Figura 3.9: Plug 1.

El paso final es pegar dos orejas en el campo vectorial 3-dimensional cuyo flujo se muestra en la figura 3.9, el resultante campo vectorial se llamara el plug 1.

Observe que por construcción el plug 1 tiene la región del plano R como sección transversal. El plug 2 es una 3-bola sólida y el flujo no tiene singularidades como se ve en la figura 3.10.

Definición de X . Construiremos un campo vectorial X sobre un bitoro sólido ST en forma que $X_t(ST) \subset \text{Int}(ST)$ para todo $t > 0$ y X es transversa para el límite del bitoro $\partial(ST)$ de ST . El flujo es obtenido pegando los plugs 1 y 2 como se indica en la figura 3.11. Requerimos las siguientes hipótesis:

(X1): Existen dos órbitas periódicas repulsoras $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ en $\text{int}(ST)$ cruzando los huecos

de R como se indica en la figura 3.11.

(X2): Existen dos toros sólidos vecindades de $V_1, V_2 \subset \text{Int}(ST)$ de $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ con límite transverso a X_t tal que si $V = ST \setminus (V_1 \cup V_2)$, entonces V es una vecindad compacta con límite transverso suave a X_t y $X_t(V) \subset V$ para todo $t > 0$. Como V es un bitoro sólido con dos toros sólidos removidos, tenemos que V es conexo.

(X3): $R \subset V$ y la aplicación de retorno de G inducida por X en R satisface las propiedades **(G1)**-**(G3)**. Además,

$$\{q \in V : X_t(q) \notin R, \forall t \in \mathbb{R}\} = \{\sigma\}$$

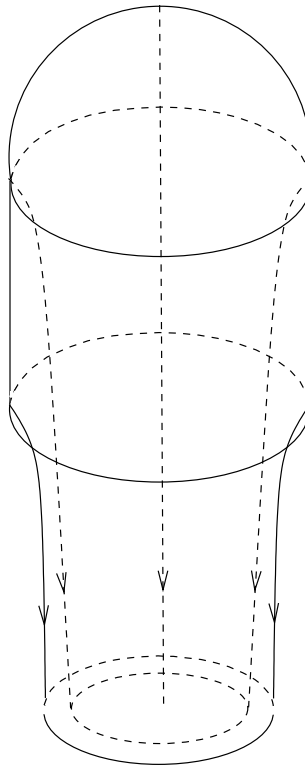


Figura 3.10: Plug 2.

Propiedades de X_t . Retomemos la definición A_G de las secciones anteriores. Definamos

$$A = Cl \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(A_G) \right) \quad (6)$$

Como σ es lorenz-like tenemos que es hiperbólica. Luego la variedad estable e inestable $W_X^s(\sigma), W_X^u(\sigma)$ de σ están definidas.

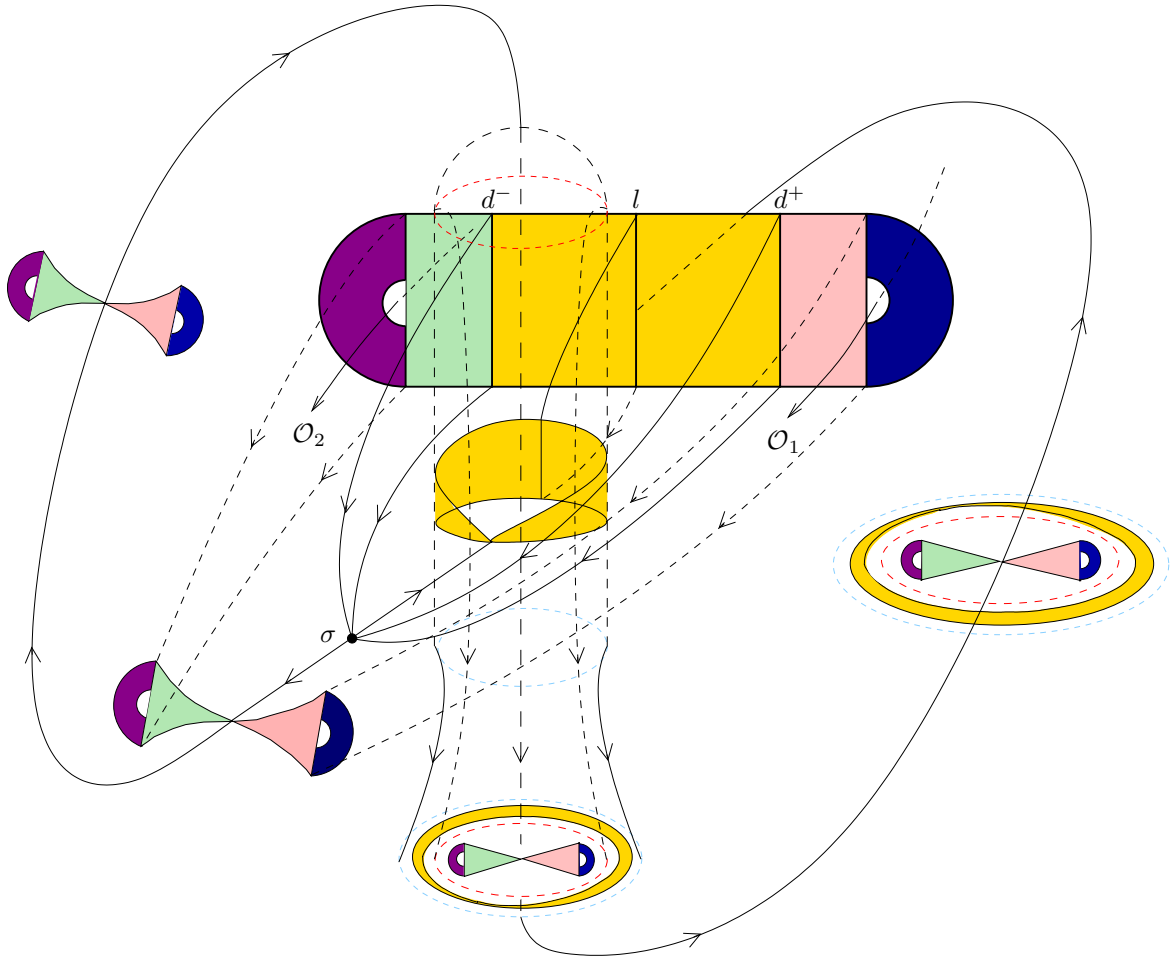


Figura 3.11: Plug 1 y 2

Lema 5 $W_X^u(\sigma) \subset A$

Demostración. Primero afirmaremos que las órbitas de X de los puntos periódicos de G están contenidas en A . Ciertamente, si $x \in R$ es un punto periódico de G , entonces $G^n(x) \in R$ para toda $n \leq 0$ y $x \in A_G = Cl(\bigcap_{n \geq 1} G^n(R))$. Consecuentemente $x \in A$ (por $A_G \subset A$) así las órbitas de x están contenidas en A , por tanto A es X_t -invariante. Segundo, los puntos periódicos de f en **(G3)** son densos en \mathcal{B} por el corolario 1. Entonces los puntos periódicos de G se acumulan sobre d^+ en la componente conexa de $R \setminus d^+$ (análogamente para d^-). d^+ (o d^-) están contenidas en $W_X^s(\sigma)$, las X_t -órbitas de los puntos periódicos de G se acumulan sobre d^+ (o d^-) y también se acumulan $W_X^u(\sigma)$. Entonces el resultado se sigue de esto ciertamente y del hecho que A es cerrado. ■

Lema 6 $A = \bigcap_{t \geq 0} X_t(V)$. En particular, A es un conjunto attracting conexo.

Demostración. Supongamos que $x \in \bigcap_{n \geq 1} G^n(R)$. Entonces $G^{-n}(x) \in R$ para todo $n \leq 0$. Si G es la aplicación de retorno inducido por $X_t(x)$ en R , tenemos que $X_t(x) \in V$ para todo $t < 0$. Esto implica $X_t(x) \in V$ para todo $t \in \mathbb{R}$ luego $x \in R \subset V$ (por **(X3)**) y V es positivamente invariante por X_t (por **(X3)**). Esto prueba $\bigcap_{n \geq 1} G^n(R) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(V)$. Como $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(V)$ es cerrada (por V es compacto) concluimos que $A_G = Cl\left(\bigcap_{n \geq 1} G^n(R)\right) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(V)$. Como $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(V)$ es X -invariante concluimos que $X_t(A_G) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(V)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por tanto:

$$A \subset \bigcap_{t \geq 0} X_t(V).$$

Ahora supongamos $q \in \bigcap_{t \geq 0} X_t(V)$. Entonces $X_t(q) \in V$ para todo $t \leq 0$. Se sigue que $X_t(q) \in V$ para todo $t \in \mathbb{R}$ luego V es positivamente invariante por **(X2)**. Si $X_t(q) \notin R$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $q = \sigma$ por la igualdad en **(X3)**. Por el lema 5 nosotros tenemos $W_X^u(\sigma) \subset A$. Luego $q \in A$ en este caso. Como podemos asumir que $X_{t_0}(q) \in R$ para algún t_0 . Fijemos $x = X_{t_0}(q)$. Si $X_t(x) \in R$ para infinitos valores de $t \leq 0$, entonces $x \in \bigcap_{n \geq 1} G^n(R)$. Por lo demas $x \in W_X^u(\sigma)$ por **(X3)**. En cualquier caso tenemos que $x \in A$ así:

$$\bigcap_{t \geq 0} X_t(V) \subset A.$$

La ultima parte del lema se sigue del hecho de que V es una vecindad compacta conexa de A . Esto prueba el lema. ■

Seguido definiremos

$$A^+ = Cl\left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(A_G^+)\right) \quad y \quad A^- = Cl\left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(A_G^-)\right)$$

Lema 7 A^+ y A^- son clases homoclínicas de X y

$$A = A^+ \cup A^-$$

Demostración. Note que A_G^+ y A_G^- son clases homoclínicas de G por el teorema 2. Entonces A^+ y A^- son clases homoclínicas de X dado que G es la aplicación de retorno

de X . En la otra mano el lema 4 implica $A_G = A_G^+ \cup A_G^-$. Entonces $X_t(A_G) = X_t(A_G^+) \cup X_t(A_G^-)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y la ecuación (6) implica

$$A = Cl \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(A_G) \right) = Cl \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(A_G^+) \right) \cup Cl \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(A_G^-) \right) = A^+ \cup A^-.$$

■

Otras propiedades de A se muestran en el siguiente lema.

Lema 8 *A cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *A tiene una única singularidad.*
- *A no es transitivo.*
- *A es un conjunto singular hiperbólico de X_t .*

Demostración. Tenemos que σ es la única singularidad de A por construcción. En adición A no es transitivo por la ecuación (3), las órbitas de X que inician en la componente conexa de $R \setminus l$ no intersecta la otra componente de $R \setminus l$. El resto de esta prueba queda entonces dedicado a probar que A es un conjunto singular hiperbólico. Aunque esto puede ser probado directamente de la construcción (ver [Mor04], sección 3 en [MPP99] o [Rob95]), aquí usaremos los argumentos basados en [MPP04]: Por el lema 7 tenemos $A = A^+ \cup A^-$, donde A^\pm son clases homoclínicas. El teorema de Birkhoff-Smale entonces implica que las órbitas periódicas de X en A son densas en A . En la otra mano, toda órbita periódica de X contenida en A es hiperbólica de tipo silla. Esto se sigue del hecho que la foliación \mathcal{F} preserva por G en **(G2)** es una contracción y del hecho de que el mapeo unidimensional g inducido por G en el espacio de folias \mathcal{F}_s en **(G3)** es expansivo. En particular toda órbita periódica de X contenida en A esta dotada con un splitting $T_{\mathcal{O}}M = E_{\mathcal{O}}^s \oplus E_{\mathcal{O}}^X \oplus E_{\mathcal{O}}^u$. Observe que la estructura de arriba persiste bajo pequeñas C^1 perturbaciones de X . Por tanto, toda órbita periódica en V de cada campo vectorial que es C^1 cercano a X es hiperbólico de tipo silla. Ahora denotemos por $Per(A)$ la unión de las órbitas periódicas de X contenidas en A . Por la discusión de arriba tenemos que $Per(A)$ es un subconjunto denso de A . Definimos el splitting

$$T_{Per(A)}M = F_{Per(A)}^s \oplus F_{Per(A)}^c$$

y para $Per(A)$

$$F_x^s = E_x^s \quad y \quad F_x^c = E_x^X \oplus E_x^u$$

para $x \in O$ donde $O \subset Per(A)$ es una órbita periódica. Como toda órbita periódica en V de cada campo vectorial C^1 cercano a X es hiperbólico de tipo silla, podemos usar el argumento en [MPP04] para probar que el splitting $T_{Per(A)}M = F_{Per(A)}^s \oplus F_{Per(A)}^c$ para $Per(A)$ extendido a un conjunto singular hiperbólico con splitting $T_A M = F_A^s \oplus F_A^c$ sobre $A = Cl(\overline{Per(A)})$. Esto completa la prueba. ■

Capítulo 4

Demostración del teorema principal

4.1. Prueba del teorema

Demostración. Sea M una 3-variedad cerrada y X un campo vectorial en el bitoro sólido ST definido anteriormente. En particular X satisface las propiedades **(X1)**-**(X3)**. La construcción en una 3-variedad topológica nos permite definir un *embedding* de ST sobre M tal que X se extienda sobre todo M . Debemos probar que X satisface la conclusión del teorema principal. Para esto procedemos como sigue: Sea V el conjunto en **(X2)** y A como en la ecuación (6). Se sigue del lema (6) y (8) que A es un conjunto attracting singular hiperbólico conexo de X que tiene una única singularidad y no es transitivo. De otro lado A es unión de dos clases homoclínicas por el lema 7, y las órbitas periódicas son densas en A por el teorema de Birkhoff-Smale expuesta en [GH90]. Finalmente estas clases homoclínicas deben ser diferentes por el teorema de Birkhoff-Smale aun más A no es transitivo. Esto completa la prueba. ■

Bibliografía

- [ABS82] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, and L. P. Shilnikov, *On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type*, (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obshch **44** (1982), 150–212.
- [Bau05] S. Bautista, *Sobre conjuntos singulares hiperbólicos.*, Ph.D. thesis, Universidad Federal de Rio de Janeiro, 2005.
- [BMP07] S. Bautista, C. Morales, and M. J. Pacifico, *Intersecction of homoclinic classes on singular-hiperbolic sets*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** (2007), no. 4, 761–775.
- [GH90] J. Guckenheimer and Ph. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, New York, 1990, Revised and corrected reprint of the 1983 original. Applied Mathematical Sciences, 42. xvi+459 pp. ISBN: 0-387-90819-6.
- [GW79] J. Guckenheimer and R. F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **50** (1979), 59–72.
- [HPS77] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 583, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1977, ii+149 pp.
- [Lan] W. Lan, *A short course on differentiable dynamical systems.*, Liu Bie Ju Centre for Mathematical Sciences., Lecture Notes in Mathematics.
- [Mor04] C. Morales, *A note on periodic orbits for singular-hyperbolic flows*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **11** (2004), no. 2-3, 615–619.
- [MP] C. Morales and M. J. Pacifico, *On the dynamics of singular hyperbolic systems*, Preprint, 2003.

- [MP04] ———, *Sufficient conditions for robustness of attractors*, Pacific Journal of Mathematics **216** (2004), no. 2, 327–342.
- [MP07] ———, *A spectral decomposition for singular-hyperbolic sets*, Pacific Journal of Mathematics **229** (2007), 223–232.
- [MPP98] C. Morales, M. J. Pacifico, and E. R. Pujals, *On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 1, 81–86.
- [MPP99] ———, *Singular hyperbolic systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 11, 3393–3401.
- [MPP04] ———, *C^1 robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers*, Ann. of Math. **160** (2004), 1–54.
- [PM82] J. Palis and W. Melo, *Geometric theory of dynamical systems. an introduction*, Springer-Verlag, 1982, New York-Berlin.
- [Rob95] C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, xii+468 pp. ISBN: 0-8493-8493-1.

Índice alfabético

Órbita, 3

 Cerrada, 3

 Cerrada Hiperbólica, 4

 Homoclínica, 4

 Periódica, 3

Birkhoff-Smale, 23, 25

Bloque aislante, 3

Clase Homoclínica, 5, 7, 22, 23, 25

Conjunto

 Aislado, 3

 Alpha limite, 3

 Atractor, 4

 Attracting, 4

 Hiperbólico, 4, 23

 Invariante, 3

 No-trivial, 3

 Omega limite, 3

 Parcialmente hiperbólico, 5

 Singular hiperbólico, 6

 Singular-hiperbólico, 23

 Transitivo, 3, 7

Descomposición

 Continua, 5

 Dominada, 5

Expande volumen, 5

Fluxo

 Singular hiperbólico, 6

 Singular-Axioma A , 6

Local Eventualmente Sobre, 10

Punto

 no-errante, 3

Singularidad, 3

Subvariedad, 4

Variedad

 Cerrada, 6, 7

 Estable, 4

 Estable Fuerte, 4

 Inestable, 4

 Inestable Fuerte, 4

 Ramificada, 8