



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Estimación Bayesiana de un modelo TAR multivariado cuando el proceso de ruido sigue una distribución *t-student*

Lizet Viviana Romero Orjuela

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística  
Bogotá, Colombia  
2017



# Estimación Bayesiana de un modelo TAR multivariado cuando el proceso de ruido sigue una distribución t student

**Lizet Viviana Romero Orjuela**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Estadística**

Director:  
Ph.D. Sergio Alejandro Calderón Villanueva

Línea de Investigación:  
Series de Tiempo  
Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística  
Bogotá D.C., Colombia  
2017



## Dedicatoria

A mis padres, especialmente a mi mamá por su dedicación y esfuerzo durante todos estos años. Sin ella esto no hubiera sido posible.



# Agradecimientos

Agradezco especialmente al profesor Sergio Calderón por su acompañamiento y consejo durante la realización de esta tesis. Al profesor Norberto Rodríguez por sus sugerencias y a Alexander Trilleras por sus recomendaciones y comentarios a versiones previas de este documento.



## Resumen

En este trabajo se presenta una metodología Bayesiana para realizar la estimación de los parámetros no estructurales (matrices autoregresivas, matrices de covarianzas y los grados de libertad) de un modelo TAR multivariado (MTAR) cuando los errores siguen una distribución *t-student* multivariada. Para ello se propone el uso de distribuciones a priori no informativas con las cuales se obtienen las distribuciones condicionales completas de los parámetros. Los métodos Monte Carlo de cadenas de Markov serán empleados para extraer muestras de dichas distribuciones. El desempeño de la estimación se pondrá a prueba a través de simulaciones. Finalmente se aplicará el modelo a los datos de los retornos de los índices Bovespa, Colcap y Standard and Poor's.

**Palabras clave:** Modelos MTAR, Análisis Bayesiano, Métodos MCMC

## Abstract

In this paper we introduce a Bayesian methodology for the estimation of non - structural parameters (autoregressive matrices, covariance matrices and degrees of freedom) of a multivariate TAR model (MTAR) when the noise process follows a multivariate t-student distribution. For this, the use of non-informative prior distributions is proposed to obtain the full conditional distributions. Markov chain Monte Carlo methods are used to obtain samples of such distributions. The performance of the estimation is evaluated through simulations. Finally, the model is applied to the data of the returns of the Bovespa, Colcap and Standard and Poor's indexes.

**Key words:** MTAR models, Bayesian Analysis, MCMC Methods



# Lista de Figuras

4-1. Serie simulada del modelo MTAR 4-1 . . . . .	16
4-2. Valores de las cadenas de las matrices autoregresivas para el régimen uno del modelo . . . . .	17
4-3. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para las matrices autoregresivas . . . . .	19
4-4. Resultados criterio de convergencia de Geweke para las matrices autoregresivas	19
4-5. Valores de las cadenas de las matrices autoregresivas para el régimen dos . .	20
4-6. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los doce parámetros de las matrices autoregresivas . . . . .	21
4-7. Valores de las cadenas de las desviaciones estándar para el régimen uno del modelo . . . . .	22
4-8. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	23
4-9. Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	23
4-10. Valores de las cadenas de las desviaciones estándar para el régimen dos del modelo . . . . .	24
4-11. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	25
4-12. Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	25
4-13. Valores de las cadenas del coeficiente de correlación escalado para el régimen uno del modelo . . . . .	26
4-14. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado . . . . .	26
4-15. Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación	27
4-16. Valores de las cadenas del coeficiente de correlación escalado para el régimen dos del modelo . . . . .	27
4-17. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado . . . . .	28
4-18. Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación	28
4-19. Resultados cadenas estimación grados de libertad del modelo . . . . .	29

4-20. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad . . . . .	29
4-21. Resultados criterio de convergencia de Geweke para los grados de libertad . . . . .	30
4-22. Cusum y CusumSQ de los residuales del modelo (4-1) . . . . .	30
5-1. Retornos índice Colcap, Bovespa y S&P . . . . .	47
5-2. Cadenas de las matrices autorregresivas para el régimen uno del modelo. . . . .	50
5-3. Cadenas de las matrices autorregresivas para el régimen dos del modelo. . . . .	52
5-4. Cadenas estimación vector de desviaciones estándar, regimen uno del modelo . . . . .	53
5-5. Cadenas estimación vector de desviaciones estándar, regimen dos del modelo . . . . .	53
5-6. Cadenas estimación coeficiente de correlación, regimen uno del modelo . . . . .	54
5-7. Cadenas estimación coeficiente de correlación, regimen dos del modelo . . . . .	54
5-8. Cadenas estimación grado de libertad . . . . .	55
5-9. Cusum y CusumSQ de los residuales del modelo 5-5 . . . . .	56
5-10. Correlaciones simples de los residuos del modelo 5-5 . . . . .	56
A-1. Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las matrices autorregresivas . . . . .	62
A-2. Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las matrices autorregresivas . . . . .	62
A-3. Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las desviaciones estándar escaladas . . . . .	63
A-4. Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las desviaciones estándar escaladas . . . . .	63
A-5. Histograma y densidad suavizada para la cadena del coeficiente de correlación escalado . . . . .	63
A-6. Histograma y densidad suavizada para la cadena del coeficiente de correlación escalado . . . . .	64
A-7. Histograma y densidad suavizada para la cadena del grado de libertad . . . . .	64
B-1. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas . . . . .	66
B-2. Resultados criterio de convergencia de Geweke para los diez parámetros de las matrices autoregresivas . . . . .	66
B-3. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas . . . . .	67
B-4. Resultados criterio de convergencia de Geweke para los diez parámetros de las matrices autoregresivas . . . . .	68
B-5. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	68

---

<b>B-6.</b> Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	69
<b>B-7.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	69
<b>B-8.</b> Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	70
<b>B-9.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación . . . . .	70
<b>B-10</b> Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación	71
<b>B-11</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación . . . . .	71
<b>B-12</b> Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación	72
<b>B-13</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad . . . . .	72
<b>B-14</b> Resultados criterio de convergencia de Geweke para los grados de libertad . .	72

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Aspectos Teóricos</b>	<b>4</b>
2.1. Modelo MTAR . . . . .	4
2.2. Estadística Bayesiana . . . . .	5
2.3. Métodos de simulación MCMC . . . . .	5
2.3.1. Algoritmo de Metropolis Hastings . . . . .	6
2.3.2. Muestreador de Gibbs . . . . .	6
2.3.3. Estimación Bayesiana . . . . .	7
2.3.4. Diagnósticos de convergencia . . . . .	8
<b>3. Estimación de parámetros no estructurales</b>	<b>9</b>
3.1. Función de Verosimilitud del modelo . . . . .	9
3.2. Distribuciones condicionales completas . . . . .	10
3.2.1. Matrices autorregresivas . . . . .	11
3.2.2. Matrices de escala . . . . .	12
3.2.3. Grados de libertad . . . . .	13
3.3. Implementación del algoritmo de simulación MCMC . . . . .	13
<b>4. Ejercicio de simulación</b>	<b>15</b>
4.1. Aplicación de la metodología a una serie simulada . . . . .	15
4.1.1. Estimación de las matrices autoregresivas . . . . .	16
4.1.2. Estimación de las desviaciones estándar escaladas . . . . .	22
4.1.3. Estimación del coeficiente de correlación escalado . . . . .	25
4.1.4. Estimación de los grados de libertad . . . . .	28

4.2.	Estudio de simulación . . . . .	31
4.3.	TAR(2,2,1) Bivariado . . . . .	32
4.3.1.	Matrices autoregresivas . . . . .	32
4.3.2.	Vector de desviaciones estándar esacaladas . . . . .	34
4.3.3.	Coefficiente de correlación escalado . . . . .	35
4.3.4.	Grados de libertad . . . . .	35
4.4.	TAR(3,1,1,2) Bivariado . . . . .	36
4.4.1.	Matrices autoregresivas . . . . .	37
4.4.2.	Vector de desviaciones estándar escaladas . . . . .	38
4.4.3.	Coefficiente de correlación escalado . . . . .	40
4.4.4.	Grados de libertad . . . . .	41
4.5.	TAR(2,2,1) Trivariado . . . . .	41
4.5.1.	Matrices autoregresivas . . . . .	42
4.5.2.	Vectores de desviaciones estándar escaladas . . . . .	43
4.5.3.	Vector de coeficientes de correlación escalados . . . . .	44
4.5.4.	Grados de libertad . . . . .	45
<b>5.</b>	<b>Aplicación Práctica</b>	<b>46</b>
5.1.	Matrices autoregresivas . . . . .	50
5.2.	Vectores de desviaciones estándar escaladas . . . . .	52
5.2.1.	Coefficiente de correlación escalado . . . . .	53
5.2.2.	Grados de libertad . . . . .	54
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A.</b>	<b>Anexo: Histogramas y densidades suavizadas de las cadenas</b>	<b>62</b>
A.1.	Matrices autoregresivas . . . . .	62
A.2.	Desviaciones estándar escaladas . . . . .	63
A.3.	Coefficientes de correlación escalados . . . . .	63
A.4.	Grados de libertad . . . . .	64
<b>B.</b>	<b>Anexo: Diagnósticos de convergencia Cadenas Aplicación Práctica</b>	<b>65</b>
B.1.	Matrices autoregresivas . . . . .	65
B.2.	Vector de desviaciones estándar escaladas . . . . .	68
B.3.	Coefficientes de correlación escalados . . . . .	70
B.4.	Grados de libertad . . . . .	72



# Lista de Tablas

4-1. Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para las matrices autoregresivas, régimen uno . . . . .	18
4-2. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para las matrices autoregresivas . . . . .	18
4-3. Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para las matrices autoregresivas, régimen dos. . . . .	20
4-4. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para las matrices autoregresivas . . . . .	21
4-5. Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el vector de desviaciones estándar escaladas del modelo . . . . .	22
4-6. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	23
4-7. Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el vector de desviaciones estándar escaladas del modelo . . . . .	24
4-8. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	24
4-9. Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el coeficiente de correlación escalado del régimen uno . . . . .	26
4-10. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado . . . . .	26
4-11. Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el coeficiente de correlación escalado del régimen dos . . . . .	27
4-12. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado . . . . .	28
4-13. Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para los grados de libertad . . . . .	29
4-14. Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad . . . . .	29
4-15. Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, primer régimen . . . . .	33
4-16. Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, segundo régimen . . . . .	34

4-17. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, primer régimen . . . . .	34
4-18. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, segundo régimen . . . . .	35
4-19. Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación, primer régimen . . . . .	35
4-20. Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación, segundo régimen . . . . .	35
4-21. Resumen de los resultados para las estimaciones del grado de libertad . . . . .	36
4-22. Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, primer régimen . . . . .	37
4-23. Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, segundo régimen . . . . .	38
4-24. Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, tercer régimen . . . . .	38
4-25. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, primer régimen . . . . .	39
4-26. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, segundo régimen . . . . .	39
4-27. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, tercer régimen . . . . .	39
4-28. Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación escalado, primer régimen . . . . .	40
4-29. Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación escalado, primer régimen . . . . .	40
4-30. Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación escalado, primer régimen . . . . .	41
4-31. Resumen de los resultados para las estimaciones del grado de libertad . . . . .	41
4-32. Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, primer régimen . . . . .	42
4-33. Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, segundo régimen . . . . .	43
4-34. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, primer régimen . . . . .	44
4-35. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, segundo régimen . . . . .	44
4-36. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de coeficientes de correlación escalados, primer régimen . . . . .	45
4-37. Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de coeficientes de correlación escalados, segundo régimen . . . . .	45

---

<b>4-38.</b> Resumen de los resultados para las estimaciones del grado de libertad . . . .	45
<b>5-1.</b> NAIC para los 4 modelos considerados . . . . .	49
<b>5-2.</b> Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para las matrices autoregresivas del modelo . . . . .	51
<b>5-3.</b> Estimación e intervalos de credibilidad de los elementos del vector de desviaciones estándar escaladas . . . . .	53
<b>B-1.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas . . . . .	65
<b>B-2.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas . . . . .	67
<b>B-3.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	68
<b>B-4.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar . . . . .	69
<b>B-5.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación . . . . .	70
<b>B-6.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación . . . . .	71
<b>B-7.</b> Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad . . . . .	72

# 1. Introducción

Los modelos TAR (Threshold Autorregresivo) son uno de los modelos de series de tiempo no lineales más conocidos en la actualidad, los cuales han sido usados en campos tan diversos como la Economía, la Meteorología, la Computación, entre otros. El modelo ha sido ampliamente usado, especialmente en el tratamiento de series financieras y económicas, como es mostrado en Hansen (2011). Igualmente ha sido usado en el campo de la Meteorología (Nieto, 2005), la Geodesía (Bácigal, 2004), la Computación (Chen et al., 2006) entre otros. En el artículo de Chen & Lee (1993) es introducida la estimación Bayesiana a un modelo TAR univariado con dos regímenes, en 1998 Tsay extiende los modelos al caso multivariado y realiza una aplicación para el caso de un activo que es transado en dos distintos mercados. Nieto (2005) desarrolla una metodología Bayesiana para la identificación y estimación de un modelo TAR en presencia de datos faltantes.

Sin embargo, el supuesto de que los errores siguen una distribución normal no se ajusta muchas veces a la realidad. Tal es el caso de las series financieras, que debido a la presencia de colas pesadas podrían ajustarse mejor a un modelo con errores que sigan una distribución *t-student* (Lange & Taylor, 1989); o de datos que por su naturaleza sólo toman valores positivos y para los que la distribución normal no es la más conveniente. La distribución *t-student* es particularmente útil en el primer caso ya que puede modelar el exceso de curtosis que es comunmente encontrado en series financieras, en las que es de gran interés el estudio de distribuciones con alta probabilidad en las colas comparadas con la de una distribución normal.

A partir de lo anterior, Zhang et al (2015) proponen una metodología Bayesiana para estimar los parámetros no estructurales de un modelo TAR univariado cuando el proceso de ruido sigue una distribución *t-student* para cada tiempo  $t$ . Moreno (2010) compara el ajuste de los modelos GARCH con ruido *t-student* en series financieras con los modelos TAR con ruido normal; se concluye que los modelos TAR con ruidos Gaussianos pueden tener dificultades para capturar la heterocedasticidad marginal de las series y se recalca la importancia de modelar el ruido con una distribución distinta a la normal. Para el caso multivariado, Calderón y Nieto (2017) igualmente encuentran problemas en el ajuste del modelo TAR multivariado para datos hidrológicos cuando se usan errores gaussianos y sugiere realizar la estimación usando una función de distribución distinta para los errores, dicha estimación, sin embargo, no se ha llevado a cabo para el caso de un modelo TAR multivariado.

En este trabajo se quiere presentar una metodología Bayesiana para la estimación de los parámetros no estructurales de un modelo TAR multivariado cuando los errores se distribuyen *t-student* multivariados para cada tiempo  $t$ . Para esto se asume que los parámetros estructurales del modelo son conocidos. A partir de las distribuciones a priori no informativas que se proponen se calcularán las distribuciones condicionales completas de los parámetros no estructurales, a saber: las matrices autorregresivas, matrices de escala y, finalmente, grados de libertad. Posteriormente se obtendrán las estimaciones de los parámetros basadas en las muestras obtenidas a través de los algoritmos Metropolis-Hastings y el muestreador de Gibbs. El desempeño de la estimación se pondrá a prueba a través de un estudio de simulación basado en tres modelos en donde se computará el sesgo estimado, el número de intervalos de credibilidad al 95% que contienen el verdadero valor del parámetro y el ancho medio de dichos intervalos. Finalmente se utilizará la metodología propuesta para el modelamiento de los retornos del índice Bovespa y el índice Colcap usando como variable umbral los retornos del índice Standard and Poor's.

El documento es organizado como sigue. Primero, se presentan algunos aspectos teóricos del modelo MTAR y la estimación Bayesiana. Segundo, se muestran las distribuciones condicionales completas obtenidas a través de las distribuciones a priori no informativas. Tercero, se presentan los resultados del estudio de simulación. Cuarto, se realiza la aplicación de la estimación propuesta y finalmente se presentan algunas conclusiones y recomendaciones.

## 2. Aspectos Teóricos

### 2.1. Modelo MTAR

Los modelos TAR (Threshold Autoregressive) fueron introducidos por Tong en 1978 y Tong y Lim en 1980 y posteriormente fueron generalizados al caso multivariado por Tsay en 1998. El modelo está basado en una variable exógena denominada variable de umbrales y representa la relación entre dos procesos estocásticos: uno de entrada  $\{Z_t\}$  y otro de salida  $\{\mathbf{Y}_t\}$ .

Sean  $\{\mathbf{Y}_t\}$  y  $\{\mathbf{X}_t\}$  procesos estocásticos tales que  $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{pt})'$  y  $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{vt})'$  (donde  $\{\mathbf{X}_t\}$  se asume exógena) y  $\{Z_t\}$  es un proceso univariado.  $\{\mathbf{Y}_t\}$  sigue un proceso MTAR( $l, k_1, \dots, k_l, q_1, \dots, q_l, d_1, \dots, d_l$ ) con  $\{Z_t\}$  como variable umbral y  $\{\mathbf{X}_t\}$  como variables exógenas si:

$$\mathbf{Y}_t = \phi_o^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} \phi_i^{(j)} Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q_j} \beta_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{d_j} \delta_i^{(j)} Z_{t-i} + \Sigma_{(j)}^{1/2} \varepsilon_t \quad \text{si } r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j \quad (2-1)$$

con  $\{\varepsilon_t\} \sim i.i.d \quad t_\nu(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  y donde  $j = 1 \dots l$ ,  $l \in \{2, 3, \dots\}$  son el número de regímenes y  $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_{l-1} < r_l = \infty$  son los umbrales, los cuales definen los  $l$  regímenes.

Se asume que los procesos  $\{e_t\}$ ,  $\{\mathbf{X}_t\}$  y  $\{Z_t\}$  son independientes.  $\mathbf{Y}_t$ ,  $\mathbf{X}_t$  y  $Z_t$  son llamados vectores salida, covariable y variable umbral, respectivamente. Las matrices  $\phi_i^{(j)}$  para  $i = 0, 1, \dots, k_j$ ,  $\beta_i^{(j)}$  para  $i = 1, \dots, q_j$ ,  $\delta_i^{(j)}$  para  $i = 1, \dots, d_j$  y  $\Sigma_{(j)}^{1/2}$  son matrices reales de tamaños adecuados y son los llamados parámetros no estructurales.  $k_j$ ,  $q_j$  y  $d_j$  corresponden a los ordenes autoregresivos en el umbral  $j$  para  $\mathbf{Y}_t$ ,  $\mathbf{X}_t$  y  $Z_t$  respectivamente y  $d$  corresponde al parámetro de retardo de la variable umbral (Calderon & Nieto, 2014). Los parámetros a estimar en un modelo TAR pueden dividirse en:

**Parámetros estructurales:** El número de regímenes  $l$ , los  $l - 1$  umbrales que definen los  $l$  regímenes  $r_1, \dots, r_{l-1}$ , los órdenes autoregresivos en los  $l$  regímenes:  $k_j, q_j$  y  $d_j$  y el parámetro de retardo  $d$ .

**Parámetros no estructurales:** Las matrices autorregresivas  $\phi_i^{(j)}$  para  $i = 0, \dots, k_j$ ,  $\beta_i^{(j)}$  para  $i = 0, \dots, q_j$ ,  $\delta_i^{(j)}$  para  $i = 0, \dots, d_j$  y  $j = 1, \dots, l$ , las matrices de covarianza  $\Sigma_{(1)}^{(1/2)}, \dots, \Sigma_{(l)}^{(1/2)}$  y los grados de libertad  $\nu$ .

El vector de los parámetros no estructurales se define como  $\boldsymbol{\theta}_{y_{ns}} = (\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_l, \text{Vec}(\boldsymbol{\Sigma})')$ , con  $\theta_j = \text{Vec}(A_j)$  donde:

$$A_j = (\boldsymbol{\phi}_0^{(j)}, \boldsymbol{\phi}_1^{(j)}, \dots, \boldsymbol{\phi}_{pj}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}_1^{(j)}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{qj}^{(j)}, \boldsymbol{\delta}_1^{(j)}, \dots, \boldsymbol{\delta}_0^{(j)})_{p \times \eta_j}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\Sigma}_{(1)}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_{(l)})$$

$$\eta_j = (1 + pk_j + vq_j + d_j)$$

Por su parte el vector de parámetros estructurales se define como:

$$\boldsymbol{\theta}_{ys} = (k_1, \dots, k_l, q_1, \dots, q_l, d_1, \dots, d_l, \mathbf{r}', l),$$

siendo  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})$  los valores de los umbrales. Así, el vector de parámetros del modelo MTAR es  $\boldsymbol{\theta}_y = (\boldsymbol{\theta}'_{y_{ns}}, \boldsymbol{\theta}'_{ys})'$

## 2.2. Estadística Bayesiana

El análisis Bayesiano usa las observaciones para actualizar las estimaciones de los parámetros de un modelo estadístico. A través del enfoque Bayesiano se comienza con un modelo paramétrico que sea adecuado para describir el fenómeno que deseamos analizar y después se propone una distribución a priori para los parámetros desconocidos ( $\boldsymbol{\theta}$ ) del modelo que representa el conocimiento o creencia previa sobre el fenómeno antes de observar los datos. Al observar dichos datos  $\mathbf{x}$  (que se supone, son generados por el modelo) se actualizan dichas suposiciones o creencias (Medova, 2007). Para esto, se utiliza el teorema de Bayes con el fin de obtener una densidad de probabilidad posterior para los parámetros desconocidos  $\boldsymbol{\theta}$  dadas las observaciones  $\mathbf{x}$ :

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Theta} p(\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}}$$

donde  $p(\boldsymbol{\theta})$  es la función de densidad a priori y  $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$  es la función de verosimilitud de  $\mathbf{x}$ . El numerador es la densidad conjunta de  $\boldsymbol{\theta}$  y  $\mathbf{x}$  y el denominador es la densidad marginal de  $\mathbf{x}$ . La densidad condicional  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  de  $\boldsymbol{\theta}$  dado  $\mathbf{x}$  es llamada la densidad posterior, una cuantificación de la incertidumbre de  $\boldsymbol{\theta}$  a la luz de los datos (Ghosh et al., 2006). Así, la distribución a posteriori de los parámetros  $\boldsymbol{\theta}$  tiene en cuenta tanto la distribución a priori así como la de los datos observados.

## 2.3. Métodos de simulación MCMC

En esta sección se mencionarán brevemente los métodos MCMC (Markov Chain Monte Carlo) que son usados frecuentemente en la estadística Bayesiana para generar muestras

aleatorias de las distribuciones a posteriori. Los métodos MCMC permiten simular cadenas de Markov en el espacio de los parámetros. Existen dos métodos básicos: algoritmo de Metropolis Hastings y muestreador de Gibbs.

### 2.3.1. Algoritmo de Metropolis Hastings

El algoritmo Metropolis-Hastings fue el primer método de Cadenas de Markov de Monte Carlo en ser desarrollado (Koch, 2007) y fue introducido inicialmente por Metropolis et al. en 1953. En el caso de la estadística Bayesiana permite simular una cadena de Markov cuya distribución estacionaria es  $p(\boldsymbol{\theta}|x)$ , es decir la densidad a posteriori de interés. Para implementar el algoritmo se busca una densidad condicional  $g(\cdot|\boldsymbol{\theta})$  que sea fácil de muestrear (cuando  $p \approx g$  el algoritmo convergerá más rápido), después se generan observaciones de ella, para luego decidir si provienen de la distribución de  $\boldsymbol{\theta}|x$ . Para usar el algoritmo se llevan a cabo los siguientes pasos (Marín, 2011):

1. Dar un valor inicial para el vector  $\boldsymbol{\theta}$  llamado  $\boldsymbol{\theta}^0$
2.  $t = 0$
3. Generar  $\phi \sim g(\cdot|\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ , para  $t > 0$

4. Definir:

$$\alpha = \min \left[ 1, \frac{p(\phi|x)g(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\phi)}{p(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|x)g(\phi|\boldsymbol{\theta}^{(t)})} \right].$$

5. Tomar

$$\boldsymbol{\theta}^{(t+1)} = \begin{cases} \phi, & \text{con probabilidad } \alpha \\ \boldsymbol{\theta}^{(t)}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6.  $t = t + 1$ , repetir desde 3.

### 2.3.2. Muestreador de Gibbs

El muestreador de Gibbs es un caso particular del algoritmo Metropolis Hastings y es útil cuando se pueden extraer muestras de las distribuciones condicionales completas de todos los parámetros. Una gran ventaja del algoritmo es su fácil implementación.

Sea  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  el vector de  $k$  parámetros a estimar, las distribuciones condicionales de cada parámetro  $i$  son:

$$\begin{aligned} & p_1(\theta_1|\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k, \mathbf{y}), \\ & p_2(\theta_2|\theta_1, \theta_3, \dots, \theta_k, \mathbf{y}), \\ & \vdots \\ & p_k(\theta_k|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Los pasos para extraer muestras de la distribución de interés a través de este método son:

1. Se asignan valores arbitrarios  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}) : \boldsymbol{\theta}^{(0)}$
2.  $t = 0$
3. Generar  $\theta_1^{(t+1)} \sim p(\theta_1|x, \theta_2^{(t)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)})$
4. Generar  $\theta_2^{(t+1)} \sim p(\theta_2|x, \theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)})$
- ⋮
5. Generar  $\theta_k^{(t+1)} \sim p(\theta_k|x, \theta_1^{(t+1)}, \theta_2^{(t+1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(t+1)})$
6.  $t = t + 1$ , repetir desde 3.

### 2.3.3. Estimación Bayesiana

La estimación puntual consiste en la elección de un criterio para determinar un método para producir una estimación “óptima” de la distribución a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ . Se empieza por especificar una función de pérdida  $C(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta})$  no negativa que satisface  $C(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = 0$ , la cual cuantifica las consecuencias de usar  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$  (es decir una función particular de los datos) como un estimador. Esa función de pérdida es una función no decreciente del error muestral  $\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ . Así, un buen estimador es aquel que minimiza  $C(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta})$  (Koop et al., 2007).

Dada la función a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  y la función de pérdida  $C(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta})$  la estimación Bayesiana es definida como la solución del siguiente problema:

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} c(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = E_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}} \left[ C(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}) \right]$$

donde

$$E_{\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}} \left[ C(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}) \right] = \int_{\boldsymbol{\Theta}} C(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta}.$$

Dependiendo de la función de pérdida elegida se obtendrá un estadístico para la estimación puntual de  $\boldsymbol{\theta}$  a partir de la función a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ . Sea, por ejemplo, la función de pérdida cuadrática:

$$C(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}) = c(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^2, \quad (2-2)$$

donde  $c$  es una constante conocida,  $E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  minimiza la función de pérdida (2-2), así, la media de la función a posteriori es usada como la estimación Bayesiana del parámetro  $\boldsymbol{\theta}$ .

### 2.3.4. Diagnósticos de convergencia

La idea de un algoritmo MCMC es crear un proceso de Markov que tenga una distribución estacionaria igual a la distribución a posteriori de interés. Se puede asegurar la convergencia de un algoritmo MCMC cuando hay certeza de que la muestra generada por el algoritmo proviene de la distribución de interés (Sinharay, 2003). A continuación se presentan dos de los criterios más usados para verificar la convergencia de las cadenas de Markov a una distribución estacionaria:

- Criterio de Gelman y Rubin: este método hace uso de múltiples replicaciones de la cadena para decidir si la estacionariedad de la misma ha sido alcanzada dentro de la segunda parte de cada una de las cadenas, haciendo el supuesto de que esta sí se ha logrado en la primera mitad. Para ello realizan la estimación de la distribución a posteriori y el cálculo de un *factor de reducción*. Valores del factor de reducción muy superiores al valor uno indican falta de convergencia de las cadenas (Brooks et al., 1998).
- Criterio de Geweke: fue propuesto por Geweke en 1992 y computa un test para verificar si dos partes de la cadena provienen de la misma distribución, para ello se usa la distribución normal estándar y se calcula un Z-score con los errores corregidos por autocorrelación y se calcula la diferencia entre la media de las primeras  $n_A$  iteraciones de la cadena y la media de las últimas  $n_B$  iteraciones, para posteriormente dividir por el error estándar asintótico de la diferencia computado a través de las estimaciones de las densidades espectrales (Cowles y Carlin, 1996). Usualmente  $n_A$  es tomado como 0.1 y  $n_B$  como 0.5, desviaciones sustanciales de la puntuación Z indican falta de convergencia.

# 3. Estimación de parámetros no estructurales

En esta sección se presenta la metodología propuesta para la estimación de los parámetros no estructurales del modelo, para ello se presenta la función de verosimilitud del modelo MTAR (2-1), las funciones a priori para cada uno de los cuatro parámetros y las funciones condicionales completas respectivas necesarias para obtener la estimación de los parámetros usando el muestreador de Gibbs.

## 3.1. Función de Verosimilitud del modelo

Sea  $\mathbf{X}$  un vector  $p$ -variado que sigue una distribución *t-student*  $p$ -variada con  $\nu$  grados de libertad, vector de medias  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de escala  $\boldsymbol{\Sigma}$ , entonces su función de densidad viene dada por:

$$\frac{\Gamma[(\nu + p)/2]}{\Gamma(\nu/2)\nu^{p/2}\pi^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \left[ 1 + \frac{1}{\nu}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right]^{-(\nu+p)/2}$$

la matriz de covarianzas para esta distribución es:

$$\frac{\nu}{\nu - 2}\boldsymbol{\Sigma}; \quad \text{si } \nu > 2.$$

Análogo al caso de la distribución normal, tenemos la siguiente propiedad para la distribución *t-student* (Kibria & Joarder, 2006):

**Propiedad 1:** Sea  $\mathbf{X}$  una variable aleatoria distribuida *t-student* multivariada con  $\nu$  grados de libertad, vector de medias  $\boldsymbol{\mu}$  y matriz de escala  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Si  $\mathbf{A}$  es una matriz no singular y  $b$  un vector de constantes.  $\mathbf{AX} + b$  se distribuye *t student*  $p$ -variada con vector de medias  $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + b$ , con  $\nu$  grados de libertad y matriz de escala  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}'$

Ahora, considerando el modelo TAR multivariado en 2-1 donde  $\mathbf{Y}_t$  es el vector de salida de tamaño  $p \times 1$ ,  $\mathbf{X}_t$ , llamada covariable es de tamaño  $v \times 1$ , la variable umbral  $Z_t$  y  $\boldsymbol{\theta}$  definida como  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_y, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z)$ , donde  $\boldsymbol{\theta}_x$ ,  $\boldsymbol{\theta}_y$  y  $\boldsymbol{\theta}_z$  son los parámetros de los procesos  $\{\mathbf{Y}_t\}$ ,  $\{\mathbf{X}_t\}$  y  $\{Z_t\}$  respectivamente, la función de verosimilitud queda establecida como:

$$L(\boldsymbol{\theta}|y, x, z) = p(y, x, z|\boldsymbol{\theta}_y, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z) = p(y|x, z, \boldsymbol{\theta}_y, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z)p(x, z|\boldsymbol{\theta}_y, \boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z)$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_T)$  y  $z = (z_1, z_2, \dots, z_T)$  son realizaciones de  $\{\mathbf{X}\}$  y  $\{Z_t\}$  las cuales se generan independientemente de  $y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$  y  $\boldsymbol{\theta}_y$  (Nieto, 2005).

Ya que la estimación de los parámetros  $\boldsymbol{\theta}_x$  y  $\boldsymbol{\theta}_z$  no se llevará a cabo, asumimos que son conocidos o estimados previamente, con lo cual, la función de verosimilitud es (Calderón & Nieto, 2014):

$$L(\boldsymbol{\theta}|y, x, z) = p(y|x, z, \boldsymbol{\theta}_y)p(x, z|\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_z).$$

Sea  $k = \max\{k_1, \dots, k_l\}$ , suponiendo que los primeros  $k$  valores son fijos y conocidos, se tiene:

$$p(y|x, z, \boldsymbol{\theta}_y) = p(y_{k+1}|y_k, y_{k-1}, \dots, y_1, x, z, \boldsymbol{\theta}_y) \dots f(y_T|y_{T-1}, y_{T-2}, \dots, y_1, x, z, \boldsymbol{\theta}_y).$$

Ahora, si asumimos que el proceso  $\{\varepsilon_t\} \sim I.I.D.$  y para cada  $t$   $\varepsilon_t \sim t_\nu(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  entonces por la propiedad 1 se tiene que:

$$p(y_t|y_1, \dots, y_{t-1}, x, z, \boldsymbol{\theta}) \sim t_\nu(\boldsymbol{\phi}_o^{(j)} + \sum_{i=1}^{kj} \boldsymbol{\phi}_i^{(j)} Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{qj} \boldsymbol{\beta}_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{dj} \boldsymbol{\delta}_i^{(j)} Z_{t-i}, \boldsymbol{\Sigma}_{(j)}),$$

es decir,

$$p(y_t|y_1, \dots, y_{t-1}, x, z, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\nu/2) |\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}|^{1/2}} \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e'_t e_t \right]^{-(\nu+p)/2}$$

donde

$$e_t = \boldsymbol{\Sigma}_{(j)}^{-1/2} \left( \mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\phi}_o^{(j)} + \sum_{i=1}^{kj} \boldsymbol{\phi}_i^{(j)} Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{qj} \boldsymbol{\beta}_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{dj} \boldsymbol{\delta}_i^{(j)} Z_{t-i} \right). \quad (3-1)$$

Así, para  $t = 1, \dots, T$  la función de verosimilitud puede escribirse como:

$$p(y|x, z, \boldsymbol{\theta}_y) = \left[ \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\nu/2)} \right]^{T-k} \prod_{t=k+1}^T |\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}|^{-1/2} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e'_t e_t \right]^{-(\nu+p)/2} \quad (3-2)$$

## 3.2. Distribuciones condicionales completas

En esta sección se asume que los parámetros estructurales son conocidos y procedemos a encontrar las distribuciones condicionales completas de las matrices autoregresivas  $\boldsymbol{\theta}_{(j)}$ , las matrices de escala  $\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}$  con  $j = 1, \dots, l$  y los grados de libertad del proceso de ruido  $\nu$ . Se asume que los parámetros son independientes y a partir de las respectivas distribuciones a priori obtendremos las distribuciones condicionales completas.

### 3.2.1. Matrices autorregresivas

Sea  $\boldsymbol{\theta}_{(j)} = \text{Vec}(\boldsymbol{\phi}_0^{(j)}, \boldsymbol{\phi}_1^{(j)}, \dots, \boldsymbol{\phi}_{k_j}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}_0^{(j)}, \boldsymbol{\beta}_1^{(j)}, \dots, \boldsymbol{\beta}_{q_j}^{(j)}, \boldsymbol{\delta}_0^{(j)}, \boldsymbol{\delta}_1^{(j)}, \dots, \boldsymbol{\delta}_{k_j}^{(j)})$  para cada  $j = 1, \dots, l$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_l)$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}$  es la matriz de escala del régimen  $j$ , siguiendo a Zellner y Ando (2010) quienes estiman los parámetros de un modelo de regresión aparentemente no correlacionada (SUR por sus siglas en inglés) con errores *t-student* multivariados proponemos una distribución a priori no informativa para  $\boldsymbol{\theta}_{(j)}$  de la siguiente manera:

$$p(\boldsymbol{\theta}_{(j)}) = \text{Constante.}$$

Este es un enfoque similar al usado por Rahman (2009) para hallar la función predictiva de un modelo de regresión con errores matriz-variados distribuidos *t-student*. Usando la anterior distribución a priori y la función de verosimilitud 3-2 se tiene que para cada  $j = 1, \dots, l$  la distribución condicional completa de  $\boldsymbol{\theta}_{(j)}$  dada la matriz de escala  $\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}$ , los grados de libertad  $\nu$  y los parámetros estructurales queda establecida como:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta}_{(j)} | \boldsymbol{\theta}_{(i)}, i \neq j, \boldsymbol{\Sigma}, y, x, z) &= p(y|x, z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu) p(\boldsymbol{\theta}_{(j)}) \\ &= \left[ \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\nu/2)} \right]^{T-k} \prod_{t=k+1}^T |\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}|^{-1/2} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e_t' e_t \right]^{-(\nu+p)/2} \\ &\propto \prod_{t:j_t=j} \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e_t' e_t \right]^{-(\nu+p)/2} \end{aligned} \quad (3-3)$$

La cual no pertenece a una función de distribución estándar o conocida y por tanto se recurrirá a métodos MCMC para extraer muestras de ella.

Por su parte, el término de error 3-1 de la distribución a posteriori 3-3 se puede escribir como

$$e_t = \boldsymbol{\Sigma}_{(j_t)}^{-1/2} (Y_t - (W_{t,j}' \otimes I_k) \boldsymbol{\theta}_j)$$

con  $t = 1, \dots, N_j$ , donde  $N_j$  corresponde a la cantidad de observaciones en el régimen  $j$ , y

$$W_{t,j} = (1, y_{t-1}', \dots, y_{t-p_j}', x_{t-1}', \dots, x_{t-q_j}', z_{t-1}', \dots, z_{t-d_j}')_{\eta_j \times 1},$$

donde  $\eta_j$  corresponde a  $\eta_j = 1 + k \cdot p_j + v \cdot q_j + d_j$  para  $j = 1, \dots, l$ , (Calderón & Nieto, 2014). Así, la función condicional completa 3-3 se puede escribir como:

$$\propto \prod_{t:j_t=j} \left[ 1 + \frac{1}{\nu} (Y_t - (W_{t,j}' \otimes I_k) \boldsymbol{\theta}_j)' \boldsymbol{\Sigma}_{(j)}^{-1} (Y_t - (W_{t,j}' \otimes I_k) \boldsymbol{\theta}_j) \right]^{-(\nu+p)/2}$$

### 3.2.2. Matrices de escala

Consideremos la descomposición usada en Barnard et al (2000), es decir, la matriz de covarianza puede descomponerse como:

$$\Sigma_{(j)} = \text{diag}(\sigma_{(j)})\mathcal{P}_{(j)}\text{diag}(\sigma_{(j)}) \quad (3-4)$$

donde  $\sigma_{(j)}$  es un vector de tamaño  $p \times 1$  de desviaciones estándar del régimen  $j$  y  $\text{diag}(\sigma_{(j)})$  es la matriz diagonal que tiene como elementos  $\sigma_{(j)}$ , los elementos de  $\sigma_{(j)}$  son:

$$\sigma_{(j)} = (\sigma_{(1j)}, \sigma_{(2j)}, \dots, \sigma_{(pj)})$$

y  $\mathcal{P}_{(j)}$  es la matriz de correlaciones simétrica de tamaño  $p \times p$  para el régimen  $j$  cuyos elementos son los coeficientes de correlación escalados entre los  $p$  vectores y estos son:  $\rho_{(1)}, \rho_{(2)}, \dots, \rho_{(\frac{p^2-p}{2})}$ .

#### Vector de desviaciones estándar escaladas

Para la matriz diagonal de desviaciones estándar, en Barnard et al (2000) se sugiere el uso de la distribución a priori log-normal, sin embargo, para el caso del modelo MTAR se usará una función a priori no informativa:

$$P(\sigma_{(j)}) = \text{Constante} * I_{(0,+\infty)}(\sigma_{(1j)}) * I_{(0,+\infty)}(\sigma_{(2j)}) * \dots * I_{(0,+\infty)}(\sigma_{(pj)}).$$

De modo que la distribución condicional completa para el vector de desviaciones estándar, usando la descomposición 3-4 puede escribirse como:

$$\begin{aligned} p(\sigma_{(j)} | \sigma_{(i)}, i \neq j, \mathcal{P}, \theta, y, x, z) &= p(y|x, z, \theta, \Sigma, \nu) p(\sigma_{(j)}) \\ &= \left[ \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\nu/2)} \right]^{T-k} \prod_{t=k+1}^T |\Sigma_{(j)}|^{-1/2} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e_t' e_t \right]^{-(\nu+p)/2} \\ &\propto |\Sigma_{(j)}|^{-\frac{N_j}{2}} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} (\Sigma_{(j)}^{-1/2} (Y_t - (W_{t,j}' \otimes I_k) \theta_j))' (\Sigma_{(j)}^{-1/2} (Y_t - (W_{t,j}' \otimes I_k) \theta_j)) \right]^{-(\nu+p)/2} \end{aligned} \quad (3-5)$$

#### Vector de coeficientes de correlación escalados

Del mismo modo, para los elementos de la matriz de correlaciones resultante de la descomposición de la matriz de escala se usa una función a priori no informativa para los coeficientes de correlación escalados:

$$p(\mathcal{P}_{(j)}) = I_{(-1,1)}(\rho_1) * I_{(-1,1)}(\rho_2) * \dots * I_{(-1,1)}(\rho_{(\frac{p^2-p}{2})})$$

Así, la función condicional completa queda establecida como:

$$\begin{aligned}
& p(\mathcal{P}_{(j)} | \mathcal{P}_{(i)}, i \neq j, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, y, x, z) = p(y|x, z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu) p(\mathcal{P}_{(j)}) \\
& = \left[ \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\nu/2)} \right]^{T-k} \prod_{t=k+1}^T |\text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{(j)}) \mathcal{P}_{(j)} \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{(j)})_{(j)}|^{-1/2} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e_t' e_t \right]^{-(\nu+p)/2} \quad (3-6) \\
& \propto |\mathcal{P}_{(j)}|^{-\frac{N_j}{2}} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} (\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}^{-1/2} (Y_t - (W_{t,j}' \otimes I_k) \boldsymbol{\theta}_j))' (\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}^{-1/2} (Y_t - (W_{t,j}' \otimes I_k) \boldsymbol{\theta}_j)) \right]^{-(\nu+p)/2}
\end{aligned}$$

### 3.2.3. Grados de libertad

Finalmente, para los grados de libertad se usará igualmente una distribución a priori no informativa:

$$P(\nu) = \text{Constante} * I_{(2,+\infty)}(\nu)$$

La función condicional completa para  $\nu$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
& p(\boldsymbol{\nu} | \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\theta}, y, x, z) = p(y|x, z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu) p(\nu) \\
& = \left[ \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\nu/2)} \right]^{T-k} \prod_{t=k+1}^T |\boldsymbol{\Sigma}_{(j)}|^{-1/2} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e_t' e_t \right]^{-(\nu+p)/2} \quad (3-7) \\
& \propto \left[ \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\nu/2)} \right]^{T-k} \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e_t' e_t \right]^{-(\nu+p)/2}
\end{aligned}$$

## 3.3. Implementación del algoritmo de simulación MCMC

Ya que las cuatro distribuciones condicionales completas anteriores no corresponden a familias de distribuciones conocidas, se implementará el algoritmo Metropolis Hastings con caminata aleatoria con el fin de simular observaciones de dichas funciones condicionales completas. Finalmente se aplicará el algoritmo de Gibbs para realizar la estimación conjunta de los parámetros. A continuación se explica de forma detallada la implementación del algoritmo.

Después de contar con las expresiones de las distribuciones condicionales completas de las matrices autoregresivas 3-3, vector de desviaciones estándar escaladas 3-5, vector de coeficientes de correlación escalados 3-6 y grados de libertad 3-7 se lleva a cabo la implementación del algoritmo Metropolis Hastings con caminata aleatoria para obtener muestras de cada una de las cuatro distribuciones.

La varianza de las distribuciones del ruido propuestas para la implementación del algoritmo Metropolis Hastings con caminata aleatoria fue calculada a través del método de Laplace, dicho método usa el algoritmo de optimización de Nelder-Mead (Albert, 2009) y consiste en hallar una aproximación de la distribución a posteriori  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  aplicando una técnica para aproximar integrales. Este método optimiza funciones multivariadas y es ampliamente usado en los campos de la estadística, ingeniería, y las ciencias físicas y médicas (Byatt, 2000).

Para las matrices autoregresivas, el vector de desviaciones estándar escaladas y de coeficientes de correlación escalados proponemos usar el algoritmo Metropolis-Hastings con caminata aleatoria donde la distribución del ruido es una normal multivariada de media cero y matriz de covarianza  $k\sigma^*$  obtenida por el método de Laplace, donde  $k$  corresponde a una constante elegida a conveniencia para lograr tasas de aceptación adecuadas.

Posteriormente se llevó a cabo la implementación del muestreador de Gibbs para obtener muestras de las distribuciones condicionales completas:

1. Sea  $t = 0$ , se establece un valor inicial para los parámetros  $\boldsymbol{\theta}_{(j)}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{(j)}$ ,  $\mathcal{P}_{(j)}$  y  $\nu$  denotados como  $\boldsymbol{\theta}_{(j)}^0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{(j)}^0$ ,  $\mathcal{P}_{(j)}^0$  y  $\nu^0$  respectivamente, para  $j = 1, \dots, l$
2. Para  $t + 1$  se simula un valor para el vector  $\boldsymbol{\theta}_{(j)}$  de la función condicional  $\boldsymbol{\theta}_{(j)}^{t+1} \sim p(\boldsymbol{\theta}_{(j)}|\boldsymbol{\theta}_{(i)}^t, i \neq j, \boldsymbol{\Sigma}^t, \nu^t, y, x, z)$  a través del algoritmo Metropolis-Hastings descrito previamente.
3. Para  $t + 1$  se genera un valor para  $\boldsymbol{\sigma}_{(j)}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{(j)}^{t+1}$  de la función de densidad condicional  $p(\boldsymbol{\sigma}_{(j)}|\boldsymbol{\sigma}_{(i)}^t, i \neq j, \mathcal{P}^t, \boldsymbol{\theta}^{t+1}, \nu^t, y, x, z)$  usando el Algoritmo Metropolis-Hastings.
4. Para  $t + 1$  se simula un valor para  $\mathcal{P}_{(j)}$ ,  $\mathcal{P}_{(j)}^{t+1}$  de la función de densidad condicional  $p(\mathcal{P}_{(j)}|\mathcal{P}_{(i)}^t, i \neq j, \boldsymbol{\theta}^{t+1}, \boldsymbol{\sigma}^{t+1}, \nu^t, y, x, z)$  usando el Algoritmo Metropolis-Hastings.
5. Para  $t+1$  se simula un valor para  $\nu$ ,  $\nu^{t+1}$  de la función de densidad  $p(\nu|\boldsymbol{\Sigma}^{t+1}, \boldsymbol{\theta}^{t+1}, y, x, z)$  usando el Algoritmo Metropolis-Hastings.
6.  $t = t + 1$ , repetir desde 2  $n$  veces, donde  $n$  es la longitud de la cadena deseada.

## 4. Ejercicio de simulación

Esta sección estará dividida en dos partes, en la primera se aplicará la metodología propuesta a una serie simulada para un modelo MTAR(2,1,1). La segunda parte mostrará un estudio de simulación en donde detallaremos el desempeño de la metodología a lo largo de varias simulaciones.

### 4.1. Aplicación de la metodología a una serie simulada

En esta sección procederemos a ilustrar la metodología de estimación propuesta de los parámetros, basados en una serie simulada a partir del modelo 4-1 de longitud 500. Se tomó  $r = \hat{z}_{0.5}$ , es decir el umbral corresponde a la mediana de la variable umbral  $z$  y  $d = 0$ . Para este caso se tiene que cada régimen cuenta con 250 observaciones.

$$y_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} y_{t-2} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} x_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.5 & 1.1 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t \leq \hat{z}_{0.5} \\ \begin{pmatrix} -1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} z_{t-1} + \begin{pmatrix} 1.8 & 0.6 \\ 0.6 & 2.0 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t > \hat{z}_{0.5} \end{cases} \quad (4-1)$$

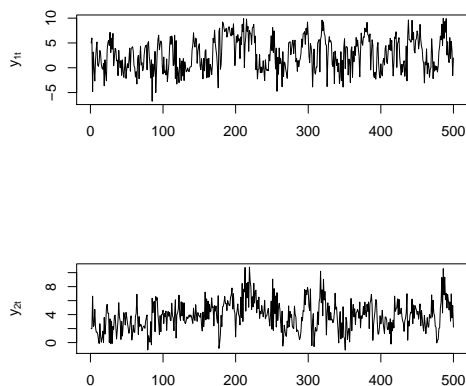
donde  $\varepsilon_t \sim t_7(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . La covariable y variable umbral son simuladas a través del siguiente modelo VAR:

$$\begin{pmatrix} Z_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

La figura 4-1 muestra la serie simulada:



**Figura 4-1.:** Serie simulada del modelo MTAR 4-1

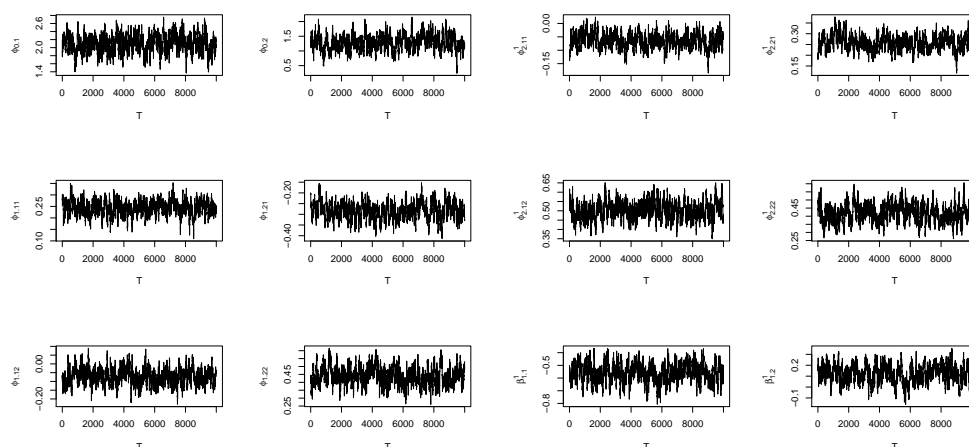
En seguida presentamos las estimaciones de los parámetros del modelo dentro de cada régimen junto con los criterios de convergencia para las cadenas obtenidas.

### 4.1.1. Estimación de las matrices autoregresivas

#### Primer Régimen

Para obtener muestras de las distribuciones condicionales completas y obtener la estimación de las matrices autoregresivas, se implementó el algoritmo de simulación MCMC explicado en la sección 3.3. Para ello, se realizaron 12.000 iteraciones con un período de calentamiento de 2.000 iteraciones. Adicionalmente se seleccionaron cada 10 valores para eliminar un posible efecto de autocorrelación.

En la figura 4-2 se presentan las cadenas resultantes efectivas de cada estimación para los parámetros de la matriz  $\phi_{(1)} = (\phi_{0,1}^{(1)}, \dots, \phi_{2,22}^{(1)})$  que corresponden a los coeficientes autoregresivos de  $Y_t$  y  $\beta_1 = \beta_{1,1}, \beta_{1,2}$ .



**Figura 4-2.:** Valores de las cadenas de las matrices autoregresivas para el régimen uno del modelo

En la tabla 4-1 se presentan los valores resultantes de la estimación puntual obtenidos a partir del cálculo de la media de la cadena, junto con los respectivos intervalos de credibilidad hallados a través de las regiones de mayor probabilidad usando un 95 % de confianza. Como se observa, las estimaciones resultantes son cercanas a los valores teóricos y todos los intervalos de credibilidad contienen los verdaderos valores de los parámetros. Es de resaltar igualmente que las estimaciones de los parámetros  $\phi_{0,1}$ ,  $\phi_{0,2}$  del intercepto y aquellos que acompañan la variable exógena  $X_t$  ( $\beta_{1,1}$ ,  $\beta_{1,2}$ ) son los que presentan intervalos de credibilidad más anchos. Ninguno de estos intervalos incluye el valor cero.

Parámetro	Valor del parámetro	Estimación	Percentil 2.5	Percentil 97.5
$\phi_{0,1}$	2.2	2.3645	1.9544	2.7899
$\phi_{0,2}$	1.5	1.5684	1.1124	2.0646
$\phi_{1,11}$	0.3	0.3359	0.2793	0.3955
$\phi_{1,21}$	-0.2	-0.2163	-0.2807	-0.1487
$\phi_{1,12}$	-0.1	-0.0906	-0.1699	-0.0113
$\phi_{1,22}$	0.4	0.4238	0.3306	0.5192
$\phi_{2,11}$	-0.1	-0.1358	-0.1862	-0.0897
$\phi_{2,21}$	0.2	0.1908	0.1306	0.2446
$\phi_{2,12}$	0.5	0.4796	0.3853	0.5687
$\phi_{2,22}$	0.4	0.3797	0.2674	0.4905
$\beta_{1,1}$	-0.5	-0.4110	-0.5448	-0.2838
$\beta_{1,2}$	0.2	0.1743	0.0167	0.3253

**Tabla 4-1.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para las matrices autoregresivas, régimen uno

Se hace necesaria la evaluación de la convergencia de las cadenas para cada uno de los parámetros, para ello se usan los criterios de convergencia de Gelman y Rubin y de Geweke.

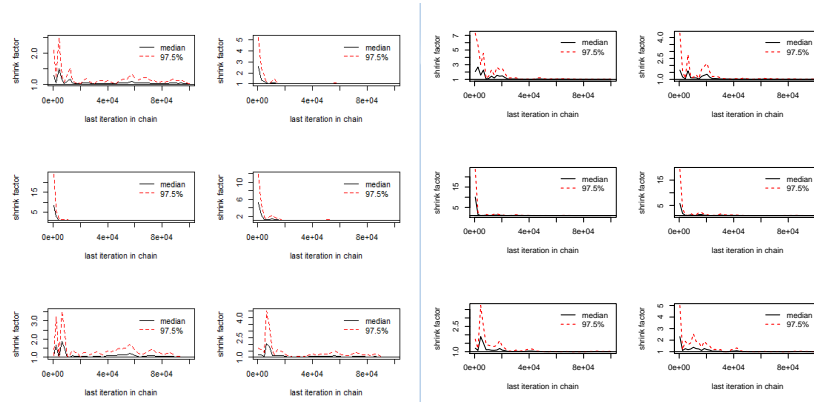
### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

Ya que los factores de reducción calculados y los límites superior observados en la tabla 4-2 son cercanos a uno podemos decir que existe convergencia en las cadenas.

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\phi_{0,1}$	1.01	1.02
$\phi_{0,2}$	1.01	1.01
$\phi_{1,11}$	1.01	1.03
$\phi_{1,21}$	1.00	1.01
$\phi_{1,12}$	1.00	1.00
$\phi_{1,22}$	1.00	1.00
$\phi_{2,11}$	1.00	1.01
$\phi_{2,21}$	1.00	1.00
$\phi_{2,12}$	1.00	1.00
$\phi_{2,22}$	1.00	1.02
$\beta_{1,1}$	1.01	1.03
$\beta_{1,2}$	1.00	1.02

**Tabla 4-2.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para las matrices autoregresivas

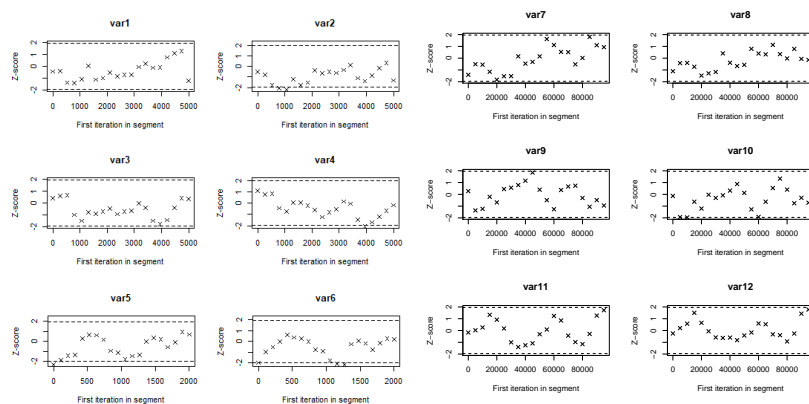
La figura del diagnóstico de convergencia convergencia **4-3** muestra lo mismo, dicho factor de reducción va descendiendo progresivamente hasta converger a valores cercanos a uno.



**Figura 4-3.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para las matrices autoregresivas

### Criterio de convergencia de Geweke

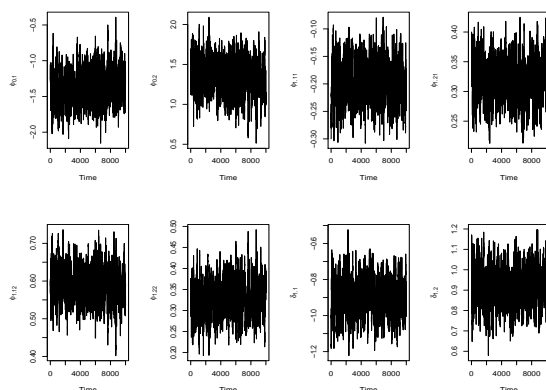
Como se mencionó en la sección 2.3.4 el criterio de convergencia de Geweke usa la distribución normal para el test, en este caso, como lo muestra la figura **4-4** los valores están entre más o menos a dos desviaciones estándar, dentro de las bandas de confianza, diagnosticando convergencia



**Figura 4-4.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para las matrices autoregresivas

### Segundo Régimen

Las cadenas resultantes de la aplicación del algoritmo planteado para los ocho parámetros del segundo régimen del modelo MTAR son dadas en la figura **4-5**:



**Figura 4-5.:** Valores de las cadenas de las matrices autoregresivas para el régimen dos

Las estimaciones y sus respectivos intervalos de credibilidad con un 95 % de confianza obtenidos a través de la media de los valores resultantes de las cadenas se muestran en la tabla 4-3. Se observa nuevamente que los intervalos de credibilidad más anchos se presentan en los dos primeros coeficientes (intercepto) y en los dos últimos ( $\delta_{1,1}$  y  $\delta_{1,2}$  que corresponden a los coeficientes de la variable umbral como covariable). Es de notar igualmente que todos los valores verdaderos de los parámetros están incluidos en los intervalos de credibilidad. Adicionalmente ninguno de estos intervalos incluyen el cero.

Parámetro	Valor del parámetro	Estimación	Percentil 2.5	Percentil 97.5
$\phi_{0,1}$	-1.3	-1.2088	-1.5059	-0.9127
$\phi_{0,2}$	1.2	1.2968	1.0019	1.5774
$\phi_{1,11}$	-0.3	-0.2695	-0.3246	-0.2134
$\phi_{1,21}$	0.4	0.3869	0.3336	0.4426
$\phi_{1,12}$	0.6	0.5644	0.4945	0.6287
$\phi_{1,22}$	0.3	0.3370	0.2767	0.4056
$\delta_{1,1}$	-1	-0.9595	-1.1107	-0.7928
$\delta_{1,2}$	1	0.9780	0.8238	1.1235

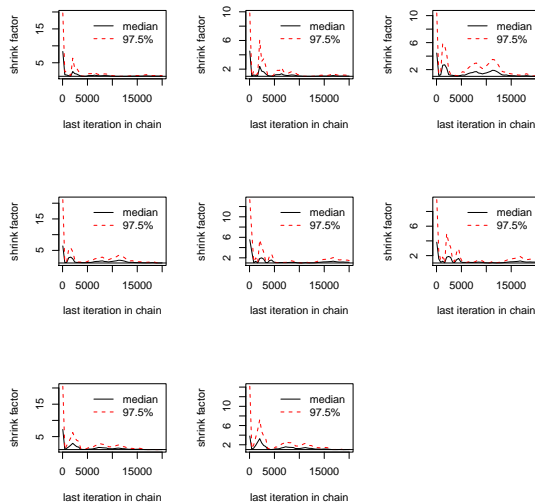
**Tabla 4-3.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para las matrices autoregresivas, régimen dos.

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

En la tabla 4-4 se evidencia que los factores de reducción de las estimaciones de los parámetros cinco y seis son ligeramente mayores al del resto, sin embargo, tanto dicho factor como el límite superior no distan mucho de uno. Lo anterior permite afirmar que las cadenas convergen.

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\phi_{0,1}$	1.04	1.16
$\phi_{0,2}$	1.03	1.10
$\phi_{1,11}$	1.02	1.09
$\phi_{1,21}$	1.02	1.10
$\phi_{1,12}$	1.07	1.18
$\phi_{1,22}$	1.10	1.16
$\delta_{1,1}$	1.01	1.03
$\delta_{1,2}$	1.01	1.04

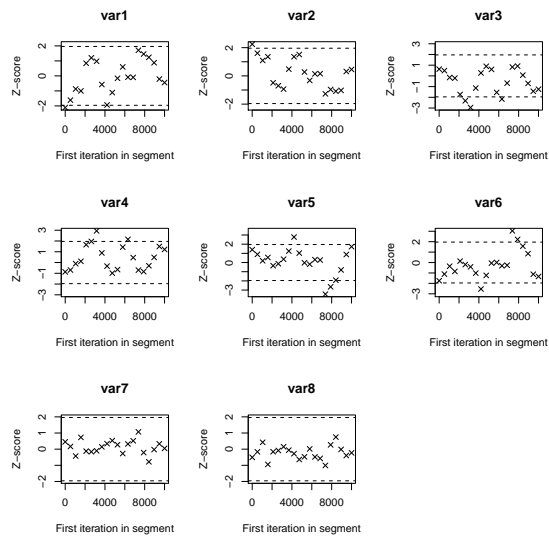
**Tabla 4-4.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para las matrices auto-regresivas



**Figura 4-6.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los doce parámetros de las matrices autoregresivas

### Criterio de convergencia de Geweke

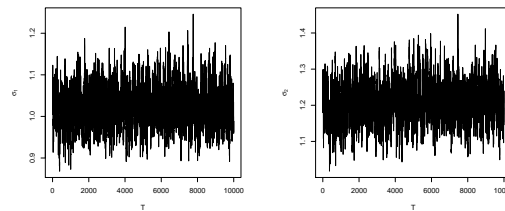
Se observa nuevamente que los Z-scores se encuentran mayormente dentro de las bandas de confianza, implicando convergencia en las cadenas.



## 4.1.2. Estimación de las desviaciones estándar escaladas

### Primer Régimen

Las cadenas de los dos elementos del vector de desviaciones estándar se observan en la figura 4-7



**Figura 4-7.:** Valores de las cadenas de las desviaciones estándar para el régimen uno del modelo

Los valores verdaderos de los parámetros son capturados por los intervalos de credibilidad realizados al 95 % y dichos valores son cercanos a los simulados mostrados en la tabla 4-5

Parámetro	Valor del parámetro	Estimación	Percentil 2.5	Percentil 97.5
$\sigma_1$	1.0295	1.0135	0.9127	1.1195
$\sigma_2$	1.2083	1.1898	1.0770	1.3133

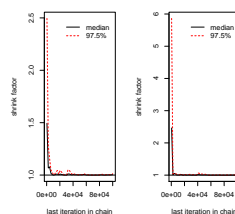
**Tabla 4-5.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el vector de desviaciones estándar escaladas del modelo

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

Los factores de reducción de la tabla 4-6 son 1 y 1.01 respectivamente, así, no hay evidencia para afirmar que las cadenas resultantes no convergen. Lo que se observa igualmente en la figura 4-8 del factor de reducción en todas las iteraciones.

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\sigma_1$	1.00	1.01
$\sigma_2$	1.01	1.01

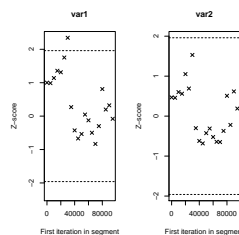
**Tabla 4-6.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar



**Figura 4-8.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

### Criterio de convergencia de Geweke

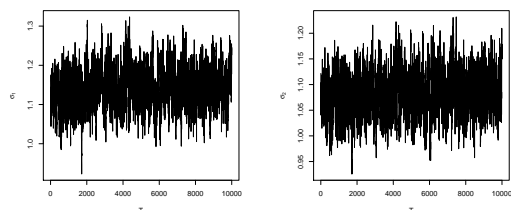
Los valores Z de la figura 4-9 están dentro de las bandas en casi todas las iteraciones, presentándose convergencia en las cadenas.



**Figura 4-9.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

### Segundo régimen

En la figura 4-10 se pueden ver las cadenas resultantes de la aplicación del algoritmo para el segundo régimen, pareciendo ser estables.



**Figura 4-10.:** Valores de las cadenas de las desviaciones estándar para el régimen dos del modelo

En la tabla 4-7 se muestra que el valor estimado del primer valor del vector de las desviaciones estándar registra un valor superior al verdadero, sin embargo, este está incluido en los intervalos de credibilidad obtenidos. El segundo valor estimado está más cerca del real e igualmente se encuentra contenido en los intervalos.

Parámetro	Valor del parámetro	Estimación	Percentil 2.5	Percentil 97.5
$\sigma_1$	1.1661	1.1357	1.0003	1.2847
$\sigma_1$	1.0816	1.0841	0.9574	1.2149

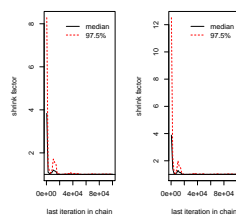
**Tabla 4-7.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el vector de desviaciones estándar escaladas del modelo

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

Los factores de reducción de la tabla 4-8 de Gelman y Rubin son 1.01, al igual que los límites superiores de los intervalos de confianza, así, las cadenas efectivamente convergen, lo que se observa igualmente en la figura 4-11

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\sigma_1$	1.01	1.01
$\sigma_1$	1.01	1.01

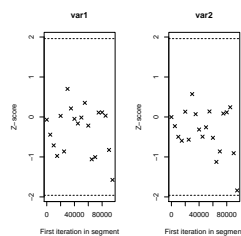
**Tabla 4-8.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar



**Figura 4-11.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

### Criterio de convergencia de Geweke

Los valores  $Z$  para el test de convergencia de Geweke observados en la figura 4-12 están dentro de los límites aceptables, efectivamente las cadenas obtenidas a través de los algoritmos para obtener muestras de la distribución condicional completa del vector de desviaciones estándar convergen.

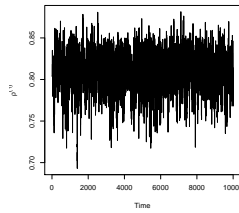


**Figura 4-12.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

### 4.1.3. Estimación del coeficiente de correlación escalado

La cadena resultante de la aplicación del algoritmo para la estimación del coeficiente de correlación escalado se presenta en la figura 4-13

#### Primer Régimen



**Figura 4-13.:** Valores de las cadenas del coeficiente de correlación escalado para el régimen uno del modelo

Para el primer régimen se observa que en la tabla 4-9 el valor del parámetro es 0.8038 y el valor estimado es 0.8103, valor bastante cercano al verdadero. El intervalo de confianza contiene el valor real del parámetro.

Parámetro	Valor del parámetro	Estimación	Percentil 2.5	Percentil 97.5
$\rho$	0.8038	0.8103	0.7594	0.8523

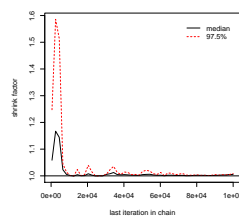
**Tabla 4-9.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el coeficiente de correlación escalado del régimen uno

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

La tabla 4-10 muestra que el factor de reducción y el límite superior del intervalo de confianza son 1.01 respectivamente, indicando convergencia, al igual que la figura 4-14 del diagnóstico.

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\rho$	1.01	1.01

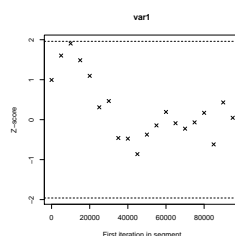
**Tabla 4-10.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado



**Figura 4-14.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado

### Criterio de convergencia de Geweke

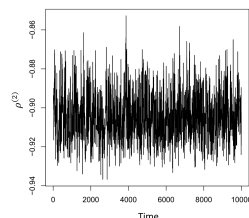
Los valores  $Z$  de la figura 4-15 están en las bandas de confianza establecidas, indicando la existencia de convergencia para las cadenas.



**Figura 4-15.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación

### Segundo Régimen

Para el segundo régimen se simuló una matriz de covarianzas escalada con una correlación de  $-0.9037$ , en la figura 4-16 se observa que las cadenas resultantes parecen converger y oscilan alrededor del verdadero valor del parámetro.



**Figura 4-16.:** Valores de las cadenas del coeficiente de correlación escalado para el régimen dos del modelo

El valor del parámetro es muy cercano al encontrado a través de la metodología propuesta. Los intervalos de confianza por su parte incluyen dicho valor simulado como se evidencia en la tabla 4-11.

Parámetro	Valor del parámetro	Estimación	Percentil 2.5	Percentil 97.5
$\rho$	$-0.9037$	$-0.9036$	$-0.9265$	$-0.8736$

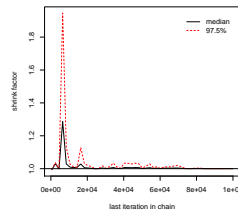
**Tabla 4-11.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para el coeficiente de correlación escalado del régimen dos

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

Los factores de reducción y los límites superior de los intervalos de confianza de la tabla 4-12 son iguales a uno, no hay evidencia para afirmar que las cadenas no convergen, lo que se comprueba una vez más a través de las figuras del factor de reducción.

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\rho$	1	1

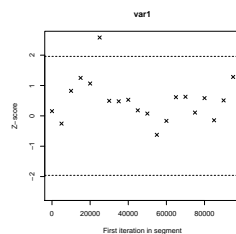
**Tabla 4-12.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado



**Figura 4-17.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación escalado

### Criterio de convergencia de Geweke

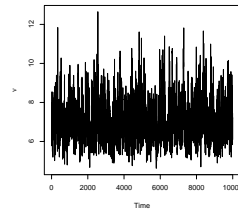
Igualmente, a través del criterio de convergencia de Geweke se encuentra que no hay evidencia para decir que las cadenas no convergen, lo que se evidencia en la figura 4-18.



**Figura 4-18.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación

#### 4.1.4. Estimación de los grados de libertad

El ruido del modelo MTAR simulado sigue una distribución *t-student* con 7 grados de libertad, La cadena obtenida en la figura 4-19 parece converger y oscila alrededor de 7, el valor del parámetro.



**Figura 4-19.:** Resultados cadenas estimación grados de libertad del modelo

A través del algoritmo propuesto se estimó que el grado de libertad es 6.97, valor bastante cercano al simulado (tabla 4-13). Los intervalos de credibilidad contienen igualmente al 7. Es de resaltar que de todas las estimaciones obtenidas del modelo MTAR es la de los grados de libertad la que registra un ancho del intervalo más grande.

Parámetro	Valor del parámetro	Estimación	Percentil 2.5	Percentil 97.5
$\nu$	7	6.9763	5.3021	9.5876

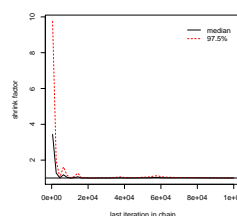
**Tabla 4-13.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para los grados de libertad

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

El factor de reducción de la tabla 4-14 indica que efectivamente la cadena obtenida converge ya que el valor es 1, lo que se evidencia graficamente en la figura 4-20 :

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\nu$	1	1.01

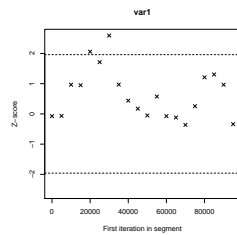
**Tabla 4-14.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad



**Figura 4-20.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad

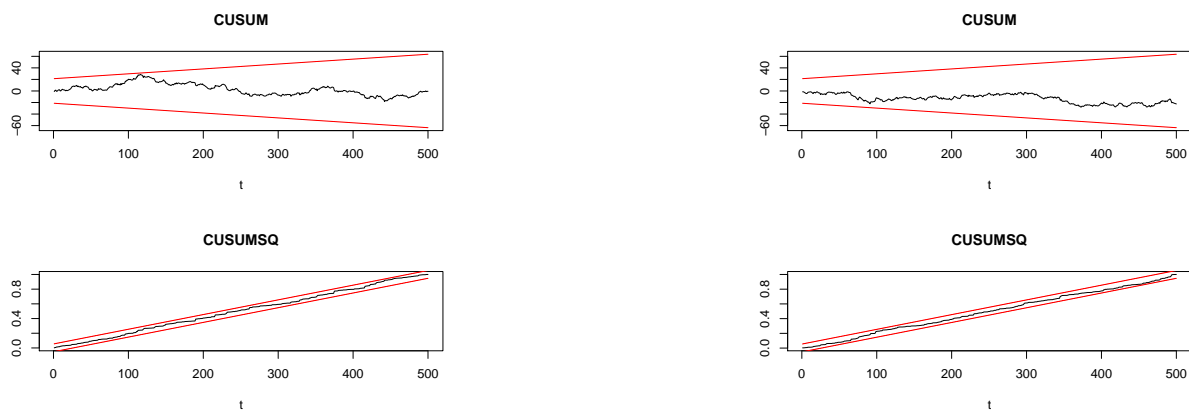
### Criterio de convergencia de Geweke

Los valores del test están dentro de las bandas de confianza. Observar este hecho en la figura 4-21



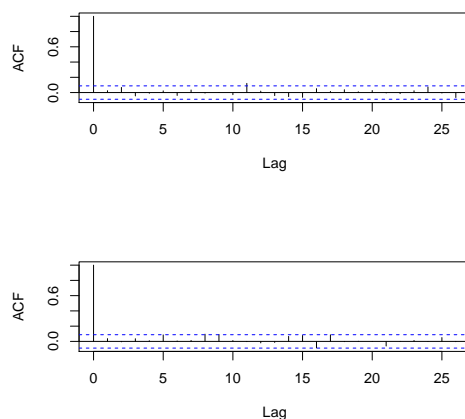
**Figura 4-21.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para los grados de libertad

En general pudimos observar que la metodología de estimación propuesta funciona razonablemente bien a lo largo de todos los parámetros del modelo. Se muestran adicionalmente las cartas CUSUM y CUSUMSQ realizadas con un 95% de confianza que indican que en general el ajuste del modelo es bueno.



**Figura 4-22.:** Cusum y CusumSQ de los residuales del modelo (4-1)

Igualmente los residuos del modelo ajustado a través de la metodología propuesta no muestran una autocorrelación significativa.



Es de tener en cuenta finalmente, que los histogramas y las densidades suavizadas de las cadenas obtenidas a través de la metodología son unimodales y en su mayoría simétricas, se presenta una asimetría positiva en el histograma de la estimación del grado de libertad. La media de las cadenas es así, un buen estimador del valor de parámetro. Lo anterior se puede observar en el anexo A.

## 4.2. Estudio de simulación

Ya que el ajuste del modelo solamente a una especificación, y con una sola serie simulada puede no dar indicios completamente del ajuste del algoritmo propuesto se hicieron varios estudios de simulación con los siguientes modelos:

- TAR(2,2,1) Bivariado (Modelo 4-1)
- TAR(3,1,1,2) Bivariado
- TAR(2,1,1) Trivariado

Se simulan 100 series, cada una de tamaño 500, que sigan el modelo indicado para cada una de las tres especificaciones y se supone que los parámetros estructurales son conocidos, después de ajustar el modelo a cada una de las series simuladas se calcula el sesgo estimado, adicionalmente se presenta el número de veces que el intervalo de credibilidad captura el verdadero valor del parámetro en cada caso, la tasa de aceptación media del algoritmo Metropolis-Hatings para cada bloque de parámetros y el ancho promedio de los intervalos de credibilidad que fueron calculados usando un 95 % de confianza.

### 4.3. TAR(2,2,1) Bivariado

Con base en las series simuladas a partir del modelo presentado en 4-1 se realiza el estudio de simulación, se simuló una cadena de longitud 10.000 y se descartaron las primeras 2.000 iteraciones de calentamiento. Adicionalmente, para la estimación se seleccionaron cada 10 valores para eliminar un posible efecto de autocorrelación. Dicho procedimiento se realizó 100 veces usando 100 series distintas simuladas usando el modelo 4-1

A continuación se presentan los resultados de la tasa de aceptación, el sesgo estimado, la cobertura de los intervalos de credibilidad y los anchos medios de los intervalos de credibilidad (IC) para cada bloque de parámetros. Se muestran igualmente las amplitudes medias de los intervalos de credibilidad ya que estas pueden servir a futuro como posibles medidas de comparación respecto al uso de funciones a priori informativas.

#### 4.3.1. Matrices autoregresivas

##### Primer régimen

**Tasa promedio de Aceptación:** 0.2247

A partir de la tabla **4-15** podemos ver que los sesgos estimados para los doce parámetros de las matrices autoregresivas son muy cercanos a cero indicando que el estimador Bayesiano es aproximadamente insesgado. Al igual que en la estimación del modelo de la sección anterior se encuentra que los sesgos estimados más grandes se dan para las dos estimaciones del intercepto (parámetros  $\phi_{0,1}$  y  $\phi_{0,2}$ ). Adicionalmente, las estimaciones de dichos parámetros y de aquellos que acompañan las variables exógenas ( $\beta_{1,1}$  y  $\beta_{1,2}$ ) tienen en promedio los anchos de intervalo más grandes, indicando una mayor incertidumbre en la estimación de los mismos. Es de notar que el número de veces que los intervalos contienen el verdadero valor del parámetro es alrededor de 95.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\phi_{0,1}$	2.2	0.0512	92	0.6379247
$\phi_{0,2}$	1.5	0.0498	93	0.4595610
$\phi_{1,11}$	0.3	0.0039	95	0.1310979
$\phi_{1,12}$	-0.2	0.0063	97	0.1665679
$\phi_{1,21}$	-0.1	-0.0044	97	0.1463264
$\phi_{1,22}$	0.4	-0.0073	93	0.1837124
$\phi_{2,11}$	-0.1	-0.0032	98	0.1423670
$\phi_{2,12}$	0.2	-0.0018	95	0.1568122
$\phi_{2,21}$	0.5	-0.0051	94	0.1452238
$\phi_{2,22}$	0.4	-0.0058	92	0.1732601
$\beta_{1,1}$	-0.5	-0.0060	97	0.2691619
$\beta_{1,2}$	0.2	0.0018	93	0.3308338

**Tabla 4-15.:** Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, primer régimen

### Segundo régimen

Como podemos notar en la tabla 4-16 para el segundo régimen se encuentra que el sesgo estimado es muy cercano a cero y es mayor para los términos del intercepto y para  $\delta_{1,1}$  y  $\delta_{1,2}$  que son los parámetros que acompañan la variable umbral (que también es una covariable).

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2520

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\phi_{0,1}$	-1.3	-0.0294	91	1.0442436
$\phi_{0,2}$	1.4	0.0166	94	1.1535890
$\phi_{1,11}$	-0.3	0.0094	97	0.2394871
$\phi_{1,12}$	0.4	-0.0075	98	0.2533750
$\phi_{1,21}$	0.6	0.0042	98	0.2360421
$\phi_{1,22}$	0.3	-0.0038	95	0.2548735
$\delta_{1,1}$	-1	0.0244	94	0.4946671
$\delta_{1,2}$	1	-0.0136	92	0.5317786

**Tabla 4-16.:** Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, segundo régimen

### 4.3.2. Vector de desviaciones estándar escaladas

#### Primer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2729

El sesgo estimado para los elementos del vector de desviaciones estándar escalada es bajo, como se nota en la tabla 4-17. De la misma forma el número de veces que los intervalos de credibilidad contienen el verdadero parámetro es de 92 y 91 siendo ligeramente menor al esperado al usar un 95 % de confianza.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\sigma_1$	1.029	-0.0677	92	0.2374176
$\sigma_2$	1.208	0.0561	91	0.2713467

**Tabla 4-17.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, primer régimen

#### Segundo régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2865

Para la estimación de las desviaciones estándar del segundo régimen observamos en la tabla 4-18 que el ancho del intervalo es 0.53 y 057 respectivamente, adicionalmente el sesgo estimado es cercano a cero.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\sigma_1$	1.1661	-0.02850625	93	0.5305872
$\sigma_2$	1.0816	-0.0316480	95	0.5783130

**Tabla 4-18.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, segundo régimen

### 4.3.3. Coeficiente de correlación escalado

#### Primer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3672

El sesgo estimado visto en la tabla 4-19 es pequeño y la cobertura de los intervalos de credibilidad es superior a la esperada: 97 intervalos contienen el verdadero valor de la correlación.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\rho$	0.8038	-0.00265789	97	0.093587

**Tabla 4-19.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación, primer régimen

#### Segundo régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2546

El sesgo estimado de la tabla 4-20 es muy pequeño y 98 intervalos de credibilidad contienen el verdadero parámetro.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\rho$	-0.9037	0.003581185	98	0.114978

**Tabla 4-20.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación, segundo régimen

### 4.3.4. Grados de libertad

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2465

Como se mencionó en la sección anterior las estimaciones de los grados de libertad observadas en la tabla 4-21 son las que registran un mayor valor en el ancho promedio de los intervalos de credibilidad y el sesgo estimado es pequeño y negativo.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\nu$	7	-0.5255254	95	4.8270279

**Tabla 4-21.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del grado de libertad

Las tasas de aceptación promedio para los parámetros multidimensionales oscila entre 0.2279 y 0.2865, adecuada según la recomendación de Roberts et al (1997) quienes sugieren que para modelos de dimensionalidad alta la tasa de aceptación debe ser de 0.234. Para los parámetros unidimensionales (coeficientes de correlación escalados y grados de libertad) las tasas de aceptación promedio adoptan valores entre 0.2465 y 0.3672, tasas adecuadas según la recomendación de Roberts et al. (1997) y Roberts et al. (2001)

#### 4.4. TAR(3,1,1,2) Bivariado

El segundo modelo a considerar es un TAR multivariado con tres regímenes:

$$y_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 \\ 0.5 & -0.4 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t \leq \hat{z}_{0.3} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.5 & 0.4 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} z_{t-1} + \begin{pmatrix} 1.4 & 0.7 \\ 0.7 & 1.2 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; \hat{z}_{0.3} < z_t \leq \hat{z}_{0.7} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & -0.5 \\ -0.7 & 0.2 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 0.3 \end{pmatrix} y_{t-2} + \begin{pmatrix} 2.0 & -0.4 \\ -0.4 & 1.0 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t > \hat{z}_{0.7} \end{cases} \quad (4-2)$$

donde  $\varepsilon_t \sim t_8(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Las covariables  $x_t$  y  $z_t$  se generaron a partir del siguiente modelo VAR:

$$\begin{pmatrix} Z_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \right)$$

Para este caso los umbrales son dos:  $\hat{z}_{0.3}$  y  $\hat{z}_{0.7}$ , es decir el percentil 30 y 70 de la variable de umbrales  $z$ . Se cuenta con 150 observaciones en el primer régimen, 200 en el segundo y 150 en el tercero. Para la estimación de estos parámetros se usaron las mismas distribuciones propuestas para el algoritmo Metropolis Hastings presentadas en el capítulo 3.3.

### 4.4.1. Matrices autoregresivas

#### Primer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2968

Nuevamente se observa en la tabla 4-22 que las estimaciones del intercepto ( $\phi_{0,1}$  y  $\phi_{0,2}$ ) son aquellas que registran el sesgo estimado más alto y los anchos de intervalo más grandes. El número de veces que los intervalos de credibilidad contienen el verdadero valor del parámetro oscila alrededor de 94.

Prámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\phi_{0,1}$	3	-0.011095	94	0.39078448
$\phi_{0,2}$	1.5	0.020472	93	0.25876836
$\phi_{1,11}$	0.7	0.004253	93	0.05116670
$\phi_{1,12}$	0.5	0.002653	95	0.03380033
$\phi_{1,21}$	-0.2	-0.007590	95	0.04523906
$\phi_{1,22}$	-0.4	-0.013027	94	0.02964300

**Tabla 4-22.:** Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, primer régimen

#### Segundo régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2854

La tabla 4-23 permite observar que nuevamente los sesgos estimados y los anchos promedio de los intervalos de confianza para las estimaciones de los parámetros que acompañan la covariable son ligeramente mayores ( $\delta_{1,1}$  y  $\delta_{1,2}$ ). Se observa una buena cobertura de los intervalos de credibilidad, oscilando en torno de 95 intervalos que contienen el verdadero valor del parámetro.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\phi_{1,11}$	0.6	0.004997	93	0.07286979
$\phi_{1,12}$	-0.5	-0.000865	95	0.06553090
$\phi_{1,21}$	-0.1	0.005380	96	0.07258357
$\phi_{1,22}$	0.4	-0.002154	96	0.06427477
$\delta_{1,1}$	4	0.064114	93	0.36795396
$\delta_{1,2}$	-2	-0.003698	94	0.32186805

**Tabla 4-23.:** Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, segundo régimen

### Tercer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3305

Las tabla 4-24 muestra que el sesgo estimado es muy cercano a cero y la cobertura de los intervalos de credibilidad es adecuada, siendo en siete de los ocho parámetros a analizar igual o superior a 95.

Parámetro	Valor simulado	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\phi_{1,11}$	0.3	0.002834	96	0.18502446
$\phi_{1,12}$	-0.7	-0.001850	99	0.09908525
$\phi_{1,21}$	-0.5	-0.002068	98	0.18437935
$\phi_{1,22}$	0.2	0.003053	91	0.09930338
$\phi_{2,11}$	0.4	0.001385	95	0.17389431
$\phi_{2,12}$	-0.3	0.003998	95	0.09295465
$\phi_{2,21}$	0.2	0.005881	99	0.17219482
$\phi_{2,22}$	0.3	-0.001520	97	0.09355090

**Tabla 4-24.:** Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, tercer régimen

## 4.4.2. Vector de desviaciones estándar escaladas

### Primer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2218

La tabla 4-25 permite observar una buena cobertura de los intervalos creíbles: 97 y 95 intervalos contienen el verdadero valor del parámetro.

Parametro	Valor simulado	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\sigma_1$	0.8246211	-0.01258893	97	0.2426706
$\sigma_2$	0.5385165	-0.004755322	95	0.1591469

**Tabla 4-25.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, primer régimen

### Segundo régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3647

En la tabla 4-26 podemos ver que el sesgo estimado de la primera estimación es más alto que el de la segunda, además la cobertura de los intervalos es ligeramente inferior.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\sigma_1$	1.565248	0.123222	92	0.3510604
$\sigma_2$	1.38924	0.082688	91	0.3113833

**Tabla 4-26.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, segundo régimen

### Tercer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2199

Para el primer parámetro, que es el que tiene un mayor valor se presenta el mayor ancho de intervalo de confianza y el mayor sesgo, como se observa en 4-27

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\sigma_1$	2.039608	-0.021317	97	0.5925998
$\sigma_2$	1.077033	-0.013528	93	0.3093005

**Tabla 4-27.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, tercer régimen

### 4.4.3. Coeficiente de correlación escalado

#### Primer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3594

Las estimaciones del coeficiente de correlación escalado de la tabla 4-28 tienen un sesgo estimado muy cercano a cero y un total de 94 intervalos de credibilidad que contienen el verdadero valor del parámetro.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\rho$	0.5854906	0.008842	94	0.2335

**Tabla 4-28.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación escalado, primer régimen

#### Segundo régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3553

El sesgo estimado es muy cercano a cero y 90 intervalos logran capturar el verdadero valor de la correlación, lo que se puede observar en la tabla 4-29

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\rho$	0.8369696	0.036332	90	0.2333562

**Tabla 4-29.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación escalado, primer régimen

#### Tercer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.4068

Se observa en la tabla 4-30 que el sesgo estimado es cercano a cero y hay una buena cobertura de los intervalos de credibilidad.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\rho$	-0.5462678	-0.009870	93	0.2511391

**Tabla 4-30.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del coeficiente de correlación escalado, primer régimen

#### 4.4.4. Grados de libertad

Tasa de aceptación promedio: 0.3333

Finalmente, en la tabla 4-31, para los grados de libertad se observa el mayor sesgo estimado.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\nu$	8	-0.900104	97	10.73049

**Tabla 4-31.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del grado de libertad

Así, se observa que en general el modelo de tres regímenes tiene un comportamiento similar al de dos regímenes; los sesgos estimados son muy cercanos a cero, el número de intervalos que contienen el verdadero valor del parámetro oscilan alrededor de 95 y dichos intervalos no tienen amplitudes muy grandes, es de notar sin embargo que la estimación de los grados de libertad para el modelo 4-2 presenta un mayor sesgo y un mayor ancho del intervalo creible que la estimación de dicho parámetro para el modelo 4-1. Las tasas de aceptación promedio encontradas para los parámetros multidimensionales oscilan alrededor de 0.3, adecuadas según la recomendación de Roberts et al. (1997)

## 4.5. TAR(2,2,1) Trivariado

Se simulan 100 series trivariadas que sigan el siguiente modelo MTAR:

$$y_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & -0.4 \\ 0.4 & -0.3 & 0.6 \\ -0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{pmatrix} x_{t-1} + \begin{pmatrix} 1.8 & -0.4 & 0.6 \\ -0.4 & 1.1 & -0.6 \\ 0.6 & -0.6 & 2.2 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t \leq \hat{z}_{0.5} \\ \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & -0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ -0.2 & 0.2 & -0.5 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 1.6 & -0.6 & 0.7 \\ -0.6 & 1.4 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 2.0 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t > \hat{z}_{0.5} \end{cases} \quad (4-3)$$

donde  $\varepsilon_t \sim t_4(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Las covariables fueron generadas a través del siguiente proceso VAR:

$$\begin{pmatrix} Z_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \right)$$

### 4.5.1. Matrices autoregresivas

#### Primer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2989

Para el modelo trivariado, considerando las 100 estimaciones resultantes, se evidencia nuevamente que los anchos medios de los intervalos de credibilidad para los parámetros que acompañan las covariables (parámetros  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$  y  $\delta_{1,3}$ ) son mayores, estas estimaciones también registran la menor cobertura por parte de los intervalos de credibilidad, tal y como se observa en la tabla **4-32**.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\phi_{1,11}$	0.5	-0.000459	97	0.17544792
$\phi_{1,21}$	0.4	0.002385	94	0.11819389
$\phi_{1,31}$	-0.1	-0.001382	95	0.21241386
$\phi_{1,12}$	0.2	0.015071	93	0.13920987
$\phi_{1,22}$	-0.3	-0.006655	96	0.09209539
$\phi_{1,32}$	0.3	0.018065	92	0.16499110
$\phi_{1,13}$	-0.4	-0.007140	95	0.13506788
$\phi_{1,23}$	0.6	0.000787	93	0.08969029
$\phi_{1,33}$	0.5	-0.000396	95	0.16091487
$\delta_{1,1}$	0.3	0.005198	90	0.34792326
$\delta_{1,2}$	0.5	0.001505	90	0.23364653
$\delta_{1,3}$	0.4	-0.010843	91	0.42253511

**Tabla 4-32.:** Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, primer régimen

#### Segundo Régimen

**Tasa de aceptación promedio: 0.2792**

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\phi_{0,1}$	1.2	-0.010750	94	0.6215782
$\phi_{0,2}$	1.5	0.007230	94	0.5539002
$\phi_{0,3}$	1.8	-0.018095	97	0.7734414
$\phi_{1,11}$	0.3	0.000853	90	0.1880556
$\phi_{1,21}$	0.1	-0.002990	91	0.1645405
$\phi_{1,31}$	-0.2	0.003631	93	0.2370141
$\phi_{1,12}$	0.2	0.004756	95	0.1508124
$\phi_{1,22}$	0.3	0.002754	97	0.1366876
$\phi_{1,32}$	0.2	0.010643	92	0.1869982
$\phi_{1,13}$	-0.2	-0.007754	96	0.1357900
$\phi_{1,23}$	0.3	0.003947	91	0.1236286
$\phi_{1,33}$	-0.5	-0.009283	90	0.1698590

**Tabla 4-33.:** Resumen de los resultados para las estimaciones de las matrices autoregresivas, segundo régimen

La tabla **4-33** muestra nuevamente que los tres valores estimados del vector del intercepto son los que generan en promedio los intervalos de credibilidad más anchos ( $\phi_{0,1}$ ,  $\phi_{0,2}$  y  $\phi_{0,3}$ ), en general los sesgos estimados son cercanos a cero y la tasa de cobertura de los intervalos oscila en el 94 %.

## 4.5.2. Vectores de desviaciones estándar escaladas

**Primer régimen**

**Tasa de aceptación promedio: 0.2781**

Ya que se está manejando un vector trivariado, hay tres elementos en el vector de desviaciones estándar escalonadas, como se observa en la tabla **4-34**. Para el tercer parámetro, el de mayor valor, se presenta el ancho medio mayor de los intervalos.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\sigma_1$	1.939072	-0.020784	97	0.453207
$\sigma_2$	1.315295	-0.005868	96	0.3058703
$\sigma_3$	2.357965	-0.023787	97	0.5546654

**Tabla 4-34.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, primer régimen

### Segundo régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3504

La tabla 4-35 muestra que nuevamente el sesgo estimado es muy cercano a cero y el mayor ancho medio del intervalo de credibilidad se presenta para el tercer parámetro, el de mayor valor.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\sigma_1$	1.846619	0.081525	90	0.4130683
$\sigma_2$	1.574802	-0.002383	97	0.3626069
$\sigma_3$	2.156386	-0.004499	95	0.5020760

**Tabla 4-35.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de desviaciones estándar escaladas, segundo régimen

### 4.5.3. Vector de coeficientes de correlación escalados

#### Primer régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3492

Ya que el vector de los datos simulados es trivariado se deben estimar tres coeficientes de correlación, como se ve en la tabla 4-36. Las estimaciones presentan sesgos estimados son muy cercanos a cero e intervalos de credibilidad reducidos.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\rho_1$	-0.5959730	-0.013300	93	0.1835810
$\rho_2$	0.5773945	0.009074	94	0.1875330
$\rho_3$	-0.7158014	-0.011262	95	0.1412668

**Tabla 4-36.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de coeficientes de correlación escalados, primer régimen

### Segundo régimen

**Tasa de aceptación promedio:** 0.3297

Los sesgos estimados son muy pequeños y se observan tasas de cobertura aceptables en las estimaciones de los coeficientes de correlación obtenidas en la tabla 4-37.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\rho_1$	-0.5265579	-0.006879	95	0.2006824
$\rho_2$	0.5820830	-0.000079	93	0.1848750
$\rho_3$	0.2768060	-0.001846	90	0.2484952

**Tabla 4-37.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del vector de coeficientes de correlación escalados, segundo régimen

### 4.5.4. Grados de libertad

**Tasa de aceptación promedio:** 0.2461

Para el grado de libertad más pequeño de los tres considerados se observa el menor ancho del intervalo de credibilidad y un sesgo igualmente inferior pero también negativo, como se observa en la tabla 4-38.

Parámetro	Valor del parámetro	Sesgo estimado	Número de IC que contienen el valor verdadero	Ancho medio del IC
$\nu$	4	-0.155924	92	1.926191

**Tabla 4-38.:** Resumen de los resultados para las estimaciones del grado de libertad

Se observa así que el ajuste en general del modelo es bueno, se presentan tasas de cobertura de alrededor del 95 % y los sesgos estimados son muy cercanos a cero.

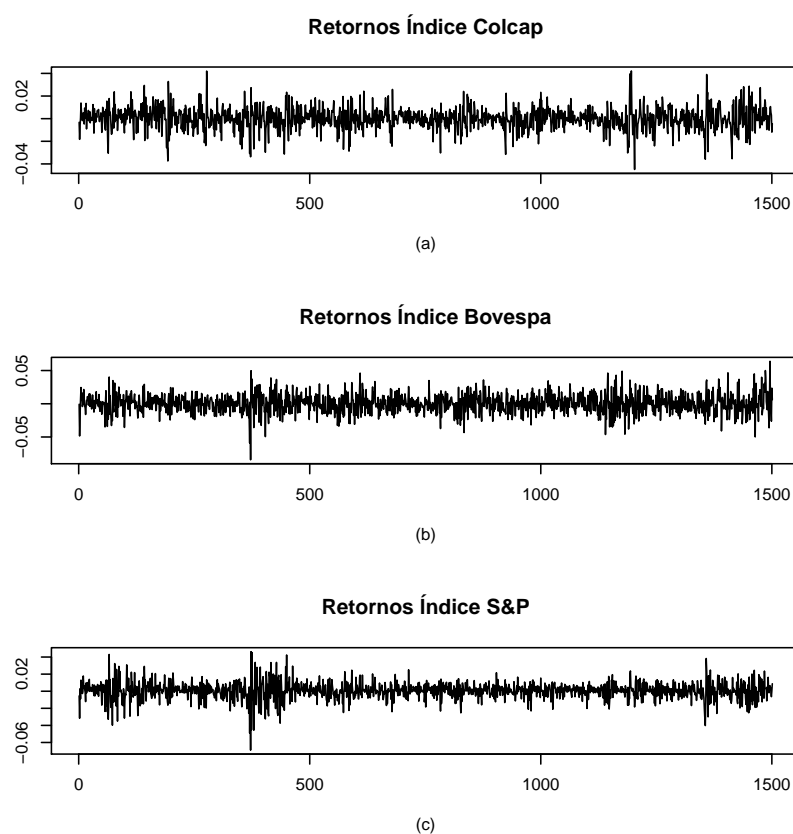
## 5. Aplicación Práctica

Finalmente, con el fin de examinar la aplicabilidad del modelo se estimará el mismo para un conjunto de datos financieros. Los datos utilizados para realizar la aplicación práctica corresponden a los retornos del precio de cierre de los índices Colcap y Bovespa:  $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t})'$  (donde  $Y_{1t}$  corresponde a los retornos de Colcap y  $Y_{2t}$  a los retornos de Bovespa) y como variable umbral  $Z_t$  se tomaron los retornos del índice S&P 500.

El índice Colcap es el principal indicador que refleja la dinámica de los precios de las 20 acciones más líquidas de la Bolsa de Valores de Colombia, donde el valor de Capitalización Bursátil de cada compañía determina su participación dentro del índice (BVC, 2013), este índice reemplazó al IGBC como el principal índice bursátil de Colombia. La Bolsa de Valores de Brasil por su parte es la más joven de Latinoamérica ya que formalmente existe desde el año 2008, cuando la bolsa de valores de Sao Paulo se unió con la Bolsa de Mercados y Futuros, naciendo así la Bolsa de Valores, Mercados y futuros S.A BM&FBovespa. La bolsa de Sao Paulo (Bovespa) sin embargo, existe desde 1890 (Rodríguez, 2011). Es una de las bolsas más grandes del mundo y la primera en Latinoamérica en cuanto a capitalizaciones. Finalmente el índice Standard and Poor's es un índice bursátil que tiene en cuenta a las 500 compañías más representativas de diversos sectores de Estados Unidos y es considerado como una referencia para probar el estado de la economía del país.

Los datos fueron tomados del Banco de la República de Colombia y de la plataforma Investing. El período de estudio comprende desde febrero de 2010 hasta marzo de 2016, para un total de 1500 observaciones con periodicidad diaria. El comportamiento de las tres series a lo largo del período de estudio se observa en la figura 5-1.

Inicialmente, para implementar el modelo MTAR en datos reales es necesario comprobar la no linealidad del proceso  $\{Y_t\}$ . En la presente investigación se implementará la extensión multivariada propuesta por Lo y Zivot (2001) del test de linealidad presentado por Hansen (1999).



**Figura 5-1.:** Retornos índice Colcap, Bovespa y S&P

Lo y Zivot realizan la extensión al caso multivariado a través del estadístico Sup-LR computado como:

$$LR_{1m} = T(\ln |\hat{\Sigma}| - \ln(|\hat{\Sigma}_m|)) \quad (5-1)$$

donde  $\hat{\Sigma}$  y  $\hat{\Sigma}_m$  son las matrices estimadas de covarianzas de los modelos  $TAR(1)$  (o un modelo VAR) y  $TAR(m)$  es decir de un modelo lineal y un modelo  $TAR(m)$  donde  $m > 1$  y corresponde al número de umbrales.

Ya que la distribución del estadístico Sup-LR no es estándar Lo y Zivot usan el procedimiento Bootstrap implementado por Hansen para computar los p-valores basados en el test. (Lo & Zivot, 2001)

Se aplica el test a los datos mencionados, tomando  $m$  en 5-1 como 2 y 3. Es decir, se pondrá a prueba el test tomando como hipótesis nula y alternativa:

- $H_0$  : Los datos siguen un modelo VAR lineal

- $H_a$  : Los datos siguen un proceso TAR con  $m$  regímenes

Los resultados del test se presentan a continuación, tomando en cada caso 1, 2, 3 y 4 rezagos respectivamente y como rezago de la variable umbral  $d = 0$ .

Los resultados del test tomando  $m = 2$  son:

	Rezagos en cada régimen			
	1	2	3	4
LR Test	27,3672	30,5669	50,589	56,1639
P - valor	0,000	0,000	0,000	0,000

Tomando  $m = 3$  se obtiene:

	Rezagos en cada régimen			
	1	2	3	4
LR Test	36,5017	53,6514	73,6119	88,1904
P - valor	0,000	0,000	0,000	0,000

Así, en todos los casos considerados rechazamos la hipótesis nula, por lo tanto se infiere que los datos provienen de un modelo MTAR.

Para la estimación de los parámetros estructurales  $d$  y el valor de los umbrales  $r$  se usó el procedimiento implementado por Millán y Calderón (2017), en este se reescribe la función de verosimilitud 3-2 como:

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\Gamma((\nu + p)/2)}{(\pi\nu)^{p/2}\Gamma(\nu/2)} \right]^{T-k} \prod_{j=1}^l \prod_{g=1}^{T_j} |\Sigma_{(j)}|^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{\nu} e'^{\pi_{j,g}+d} e^{\pi_{j,g}+d} \right]^{-(\nu+p)/2}$$

donde  $\pi_{j,i}$  es el índice de tiempo de la  $i$ -ésima observación más pequeña de:

$$\{Z_{k+1-d}, Z_{k+2-d}, \dots, Z_{T-d}\}.$$

A diferencia de la función de verosimilitud 3-2 esta especificación depende explícitamente del parámetro de retardo  $d$  a través del subíndice de  $e^{\pi_{j,g}+d}$ , e implícitamente del parámetro de umbrales  $r$  a través del índice de la productoria  $T_j$  (Millán & Calderón, 2017).

Millán y Calderón usan las distribuciones a priori uniforme y uniforme discreta respectivamente para los parámetros  $d$  y  $r$ . Para la obtención de muestras de las funciones condicionales completas usan igualmente los algoritmos Metrópolis Hastings y Gibbs.

Para la estimación del número de regímenes y del orden autorregresivo en cada régimen se uso el criterio de información NAIC, definido como (Tong, 1990):

$$NAIC = \left\{ \sum_{j=1}^l AIC_j(r) \right\} / \left\{ \sum_{j=1}^l N_j \right\}$$

donde

$$AIC_j(r) = N_j \ln(|S_j|/N_j) + 2 * p * \eta_j \quad (5-2)$$

$$S_j = \sum_{\{t:j_t=j\}} \left( \mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\phi}_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{kj} \boldsymbol{\phi}_i^{(j)} Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{qj} \boldsymbol{\beta}_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{dj} \boldsymbol{\delta}_i^{(j)} Z_{t-i} \right) \quad (5-3)$$

$N_j$  corresponde a la cantidad de observaciones en el régimen  $j$ .

Los modelos a considerar para elegir el número de regímenes y el orden autoregresivo de cada régimen fueron:

- MTAR(2,1,1)
- MTAR(2,2,2)
- MTAR(3,1,1,1)
- MTAR(3,2,2,2)

Después de implementar el algoritmo propuesto se encontró que el NAIC para cada modelo es el siguiente:

Modelo	NAIC
MTAR(2,1,1)	-18,15917
MTAR(2,2,2)	-18,18486
MTAR(3,1,1,1)	-18,15387
MTAR(3,2,2,2)	-18,17688

**Tabla 5-1.:** NAIC para los 4 modelos considerados

Usando este criterio elegimos un modelo con dos regímenes y dos ordenes autorregresivos. Así, el modelo a estimar es el siguiente:

$$y_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} \phi_{0,1}^{(1)} \\ \phi_{0,2}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{1,11}^{(1)} & \phi_{1,12}^{(1)} \\ \phi_{1,21}^{(1)} & \phi_{1,22}^{(1)} \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} \phi_{2,11}^{(1)} & \phi_{2,12}^{(1)} \\ \phi_{2,21}^{(1)} & \phi_{2,22}^{(1)} \end{pmatrix} y_{t-2} + \boldsymbol{\Sigma}_{(1)}^{1/2} \varepsilon_t & ; \quad z_{t-d} \leq r \\ \begin{pmatrix} \phi_{0,1}^{(2)} \\ \phi_{0,2}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{1,11}^{(2)} & \phi_{1,12}^{(2)} \\ \phi_{1,21}^{(2)} & \phi_{1,22}^{(2)} \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} \phi_{2,11}^{(2)} & \phi_{2,12}^{(2)} \\ \phi_{2,21}^{(2)} & \phi_{2,22}^{(2)} \end{pmatrix} y_{t-2} + \boldsymbol{\Sigma}_{(2)}^{1/2} \varepsilon_t & ; \quad z_{t-d} > r \end{cases} \quad (5-4)$$

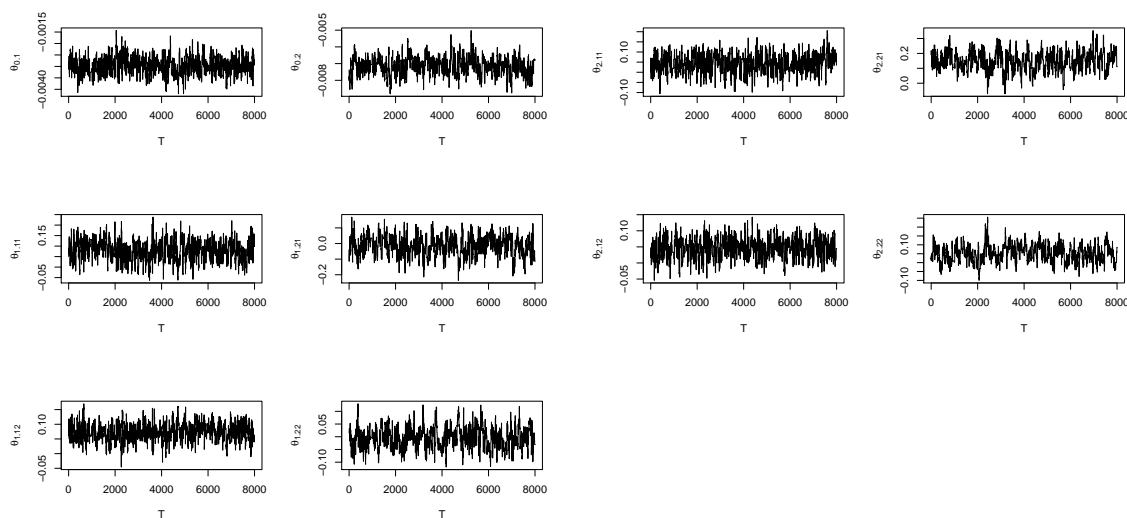
A través del método propuesto por Millán y Calderón (2017) se encuentra que el umbral corresponde a  $\hat{r} = -0.00111$  y el parámetro  $d = 0$ . A continuación se exponen detalladamente las cadenas resultantes de la aplicación del algoritmo propuesto con 10.000 iteraciones y un período de calentamiento de 2.000, se muestran adicionalmente los intervalos de credibilidad a un 95 % de confianza. Los diagnósticos de convergencia de Geweke y Gelman y Rubin para cada una de las cadenas se presentan en el anexo B y muestran evidencia de que efectivamente las cadenas obtenidas convergen.

## 5.1. Matrices autoregresivas

Las estimaciones y los intervalos de credibilidad al 95 % correspondientes para los dos regímenes son:

### Primer Régimen

Las cadenas obtenidas a través de la estimación Bayesiana se observan en la tabla 5-2, las mismas tienen un comportamiento estable y convergen (ver anexo B.1) pero algunas parecen incluir el cero.



**Figura 5-2.:** Cadenas de las matrices autorregresivas para el régimen uno del modelo.

En la tabla 5-2 se observa que las estimaciones para el término del intercepto ( $\phi_{0,1}$  y  $\phi_{0,2}$ ) son las que presentan menor valor. Los intervalos de credibilidad de tres de los elementos de la matriz autoregresiva de primer orden ( $\phi_{1,11}$ ,  $\phi_{1,12}$  y  $\phi_{1,22}$ ) incluyen el cero y por tanto no son incluidos en el modelo. El único que resulta ser significativo es aquel que muestra el efecto de los retornos del índice Bovespa sobre el Colcap ( $\phi_{1,12}$ ). Para la matriz autoregresiva

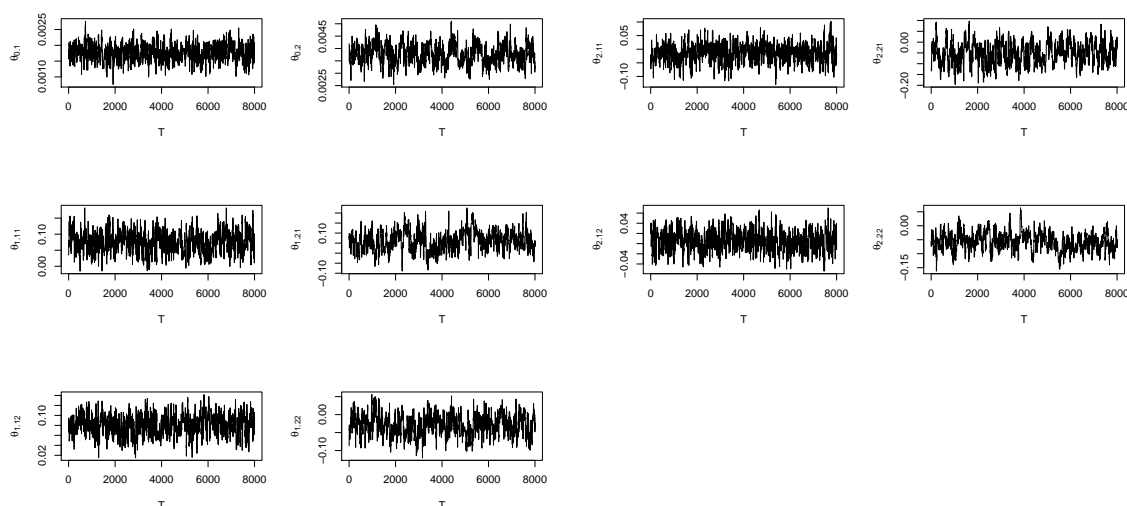
de orden dos resultan significativos los coeficientes del efecto de los retornos del índice de la bolsa de Brasil (Bovespa) sobre los retornos del Colcap ( $\phi_{2,21}$ ) y cuya estimación fue 0.14779 y el coeficiente de los retornos del índice Colcap sobre Bovespa ( $\phi_{2,12}$ ) cuya estimación fue menor: 0.06616.

Parámetro	Estimación	Percentil 2.5 %	Percentil 97.5 %
$\phi_{0,1}$	-0.002972	-0.003674	-0.002203
$\phi_{0,2}$	-0.007146	-0.008184	-0.006092
$\phi_{1,11}$	0.078517	-0.018268	0.165195
$\phi_{1,21}$	-0.014117	-0.145983	0.105906
$\phi_{1,12}$	0.073392	0.016195	0.127512
$\phi_{1,22}$	-0.004210	-0.081461	0.078388
$\phi_{2,11}$	0.042209	-0.052296	0.125726
$\phi_{2,21}$	0.147793	0.017158	0.268298
$\phi_{2,12}$	0.066163	0.008254	0.123381
$\phi_{2,22}$	0.052980	-0.035088	0.146783

**Tabla 5-2.:** Estimación e intervalos de credibilidad del modelo MTAR para las matrices autoregresivas del modelo

## Segundo Régimen

Las cadenas que se observan en la figura 5-3 y que fueron resultantes de la aplicación del algoritmo parecen tener un comportamiento estable y como se muestra en el anexo B.2 efectivamente convergen, aunque nuevamente algunas de las cadenas parecen contener el cero.



**Figura 5-3.:** Cadenas de las matrices autorregresivas para el régimen dos del modelo.

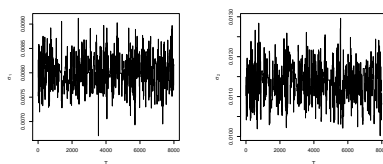
Para el segundo régimen los valores del intercepto estimados son los más pequeños y resultan ser significativos. El intervalo de credibilidad del parámetro  $\phi_{1,11}$  (que indica el efecto de los retornos de Colcap sobre ella misma un período atrás) no incluye al cero al igual que el intervalo de credibilidad de  $\phi_{1,12}$  (que indica el efecto de los retornos de Bovespa sobre los de Colcap un período atrás). Para el segundo orden autoregresivo todos los intervalos de credibilidad contienen el cero y por tanto no será incluido.

Parámetro	Estimación	Percentil 2.5 %	Percentil 97.5 %
$\phi_{0,1}$	0.00177	0.00125	0.00226
$\phi_{0,2}$	0.00378	0.00303	0.00456
$\phi_{1,11}$	0.07430	0.01344	0.13667
$\phi_{1,21}$	0.06229	-0.02962	0.16100
$\phi_{1,12}$	0.08120	0.04220	0.11800
$\phi_{1,22}$	-0.02906	-0.08716	0.02595
$\phi_{2,11}$	-0.01393	-0.08018	0.04961
$\phi_{2,21}$	-0.05215	-0.14338	0.04356
$\phi_{2,12}$	0.00587	-0.03185	0.04333
$\phi_{2,22}$	-0.05677	-0.11988	0.00611

## 5.2. Vectores de desviaciones estándar escaladas

### Primer régimen

Las cadenas resultantes tienen un comportamiento estable y presentan convergencia (Véase anexo B.3)



**Figura 5-4.:** Cadenas estimación vector de desviaciones estándar, regimen uno del modelo

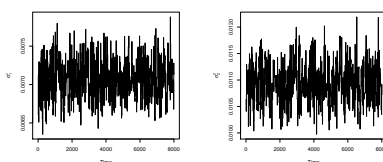
La estimación para la primera desviación estándar resulta ser menor que para la segunda, las desviaciones resultan ser significativas ya que los IC no contienen el cero (Véase tabla 5-3)

Parámetro	Estimación	Percentil 2.5 %	Percentil 97.5 %
$\sigma_1$	0.008014819	0.007419	0.008634
$\sigma_2$	0.01134219	0.010477	0.012176

**Tabla 5-3.:** Estimación e intervalos de credibilidad de los elementos del vector de desviaciones estándar escaladas

### Segundo régimen

Las cadenas resultantes que se ven en la tabla 5-5 presentan un comportamiento estable.



**Figura 5-5.:** Cadenas estimación vector de desviaciones estándar, regimen dos del modelo

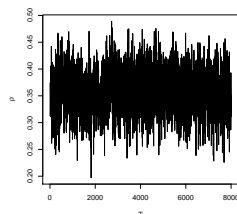
Nuevamente para este segundo régimen la estimación puntual del primer elemento de desviaciones estándar escaladas es menor que la del segundo. Ambas desviaciones resultan ser significativas, lo que se observa en la siguiente tabla

Parámetro	Estimación	Percentil 2.5 %	Percentil 97.5 %
$\sigma_1$	0.007322994	0.006637	0.007731
$\sigma_2$	0.01127546	0.010297	0.012183

## 5.2.1. Coeficiente de correlación escalado

### Primer régimen

Para el primer régimen la cadena obtenida parece estable (figura 5-6) y efectivamente converge, lo que se puede observar en el anexo B.3



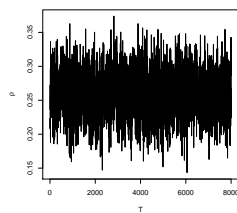
**Figura 5-6.:** Cadenas estimación coeficiente de correlación, regimen uno del modelo

La estimación puntual del coeficiente de correlación escalado es 0.35 y como se puede ver en la siguiente tabla los intervalos no incluyen el cero.

Parámetro	Estimación	Percentil 2.5 %	Percentil 97.5 %
$\rho$	0.3580173	0.2795476	0.4348982

### Segundo régimen

Las cadenas de la figura 5-7 resultan estables y convergen (ver anexo B.3)



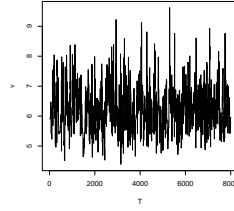
**Figura 5-7.:** Cadenas estimación coeficiente de correlación, regimen dos del modelo

El coeficiente de correlación escalado es significativo y resulta ser menor que el obtenido en el régimen uno.

Parámetro	Estimación	Percentil 2.5 %	Percentil 97.5 %
$\rho$	0.2595227	0.1914652	0.3259570

### 5.2.2. Grados de libertad

La cadena que se observa en la figura 5-8 es estable y como se muestra en el anexo B.4 converge.



**Figura 5-8.:** Cadenas estimación grado de libertad

La estimación puntual de los grados de libertad es 6.194, lo que indica la presencia de colas pesadas en el modelo, propias de las series financieras.

Parámetro	Estimación	Percentil 2.5 %	Percentil 97.5 %
$\nu$	6.194539	4.931898	7.734333

Así, descartando aquellos coeficientes que presentan estimaciones con intervalos creíbles que incluyan el cero, el modelo obtenido 5-4 a través de la metodología propuesta queda como:

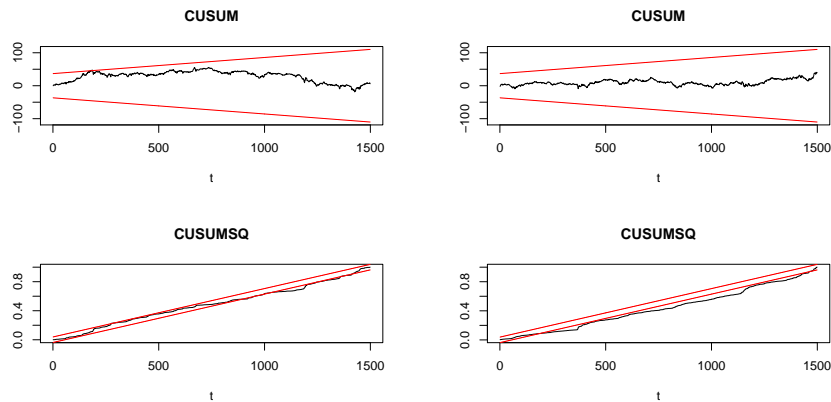
$$y_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} -0.00297 \\ -0.00714 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.07339 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y_{t-1} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0.06616 \\ 0.14779 & 0 \end{pmatrix} y_{t-2} + \begin{pmatrix} 0.000064 & 0.000032 \\ 0.000032 & 0.000128 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t \leq -0.00111 ; \\ \begin{pmatrix} 0.00176 \\ 0.00377 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.07429 & 0.08120 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.000049 & 0.000020 \\ 0.000020 & 0.000119 \end{pmatrix} \varepsilon_t & ; z_t > -0.00111 \end{cases} \quad (5-5)$$

El primer régimen denota retornos del índice S&P 500 en su mayoría negativos, en dicho régimen los valores medios de los retornos de los dos índices son negativos (debido a los valores del intercepto). Se encuentra que los retornos del índice Colcap no afectan los valores de los retornos del índice Bovespa un período atrás, pero estos sí afectan la bolsa de valores colombiana ( $\phi_{1,12}$ ). Dos períodos atrás, cuando los retornos del índice S&P 500 son negativos se registra un efecto recíproco en los retornos que parece ser mayor en la bolsa de Brasil. Así, los retornos del índice Bovespa afectan los del Colcap tanto uno como dos períodos atrás, pero estos sólo se ven afectados por los retornos del índice Colcap dos períodos atrás.

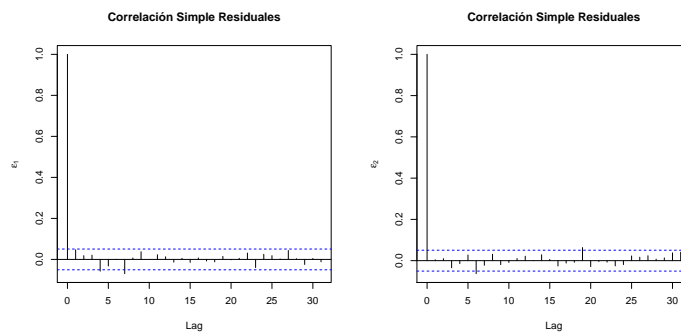
Para el segundo régimen, cuando los retornos del S&P 500 son en su mayoría positivos se observa que el índice Bovespa tiene influencia sobre los retornos del Colcap, pero no al revés, indicando un posible liderazgo de la bolsa de valores de Brasil sobre la de Colombia (pero sólo un período atrás ya que los coeficientes de la matriz autoregresiva de orden dos resultan ser no significativos). Esto era de esperarse debido al gran tamaño de la bolsa de valores brasileña respecto a la colombiana. Es de notar que dado que el valor estimado del retardo

fue cero el efecto del S&P 500 sobre la dinámica de los dos índices es inmediato.

Los gráficos **5-9** Cusum y CusumSQ muestran que el ajuste del modelo en general es bueno. Igualmente, los residuos obtenidos no dan muestra de autocorrelación tal y como se observa en la figura **5-10**.



**Figura 5-9.:** Cusum y CusumSQ de los residuales del modelo 5-5



**Figura 5-10.:** Correlaciones simples de los residuos del modelo 5-5

## 6. Conclusiones

Se estimaron los parámetros no estructurales de un modelo TAR multivariado cuando el ruido sigue una distribución *t-student* para cada tiempo  $t$  usando una metodología Bayesiana asumiendo que los parámetros estructurales del modelo son conocidos. Se propone el uso de distribuciones a priori no informativas para los parámetros de interés: matrices autorregresivas, vectores de desviaciones estándar y correlaciones y grados de libertad. Se encontró que las distribuciones condicionales completas no corresponden a funciones de distribución estándar, lo cual sugiere el uso de los algoritmos Metropolis-Hastings y muestreador de Gibbs para extraer muestras de las distribuciones condicionales completas.

Para conocer el desempeño de la estimación se lleva a cabo un estudio de simulación a través de tres modelos propuestos. Se observa en general que las estimaciones funcionan bien en términos del número de veces que los IC contienen el verdadero valor del parámetro y del sesgo estimado. Los kernel de las estimaciones obtenidas son en general unimodales, la media constituye así una buena estimación a partir de las cadenas obtenidas. Las tasas de aceptación para el algoritmo Metropolis-Hastings oscilan entre 0.2 y 0.45, en línea con las recomendaciones de Robert et al (1997). Los grados de libertad son los parámetros que suelen presentar un mayor sesgo respecto a los valores reales simulados y que tienen los intervalos de credibilidad más anchos. Mediante diferentes criterios se observó que las cadenas convergen a la distribución estacionaria en forma general para el procedimiento propuesto. Adicionalmente las estadísticas Cusum y CusumSQ proveen una herramienta importante para verificar la bondad del ajuste del modelo MTAR y muestran que efectivamente este es adecuado.

Finalmente se llevó a cabo la aplicación del modelo a datos reales de los índices Colcap y Bovespa, tomando como variable umbral los retornos del índice S&P 500. Se encuentra que cuando el retorno del índice S&P 500 registra valores mayormente positivos el índice Bovespa afecta la bolsa colombiana un período atrás y para dos períodos atrás los retornos del Colcap tienen un efecto sobre el índice Bovespa. Cuando la economía se encuentra en expansión y el índice S&P es mayormente positivo el valor de los retornos de la bolsa de Colombia no tiene ningún efecto sobre la bolsa brasileña, pero sí al revés, indicando un posible liderazgo por parte de la bolsa de Brasil. El ajuste del modelo es en general bueno y las cadenas obtenidas convergen.

Para trabajos futuros, se recomienda realizar la estimación completa del modelo incluyendo los parámetros estructurales. Adicionalmente se sugiere la incorporación de distribuciones a priori informativas para la estimación de los parámetros no estructurales con el fin de verificar cuál de los dos tipos de distribución a priori puede ofrecer un mejor ajuste. También se sugiere hacer estudios de simulación para la estimación en muestras pequeñas y medianas.

# Bibliografía

- [Albert, 2009] Albert, J. (2004), *Bayesian Computation with R*. Springer.
- [Bacigál, 2004] Bacigál T. (2004) *Multivariate Threshold Autoregressive Models in Geodesy*. J. Electrical Engineering, Volumen 55.
- [Barndard et al., 2000] Barnard, J. McCulloch, R & Meng, X (2000), *Modeling Covariance Matrices in Terms of Standard Deviations and Correlations, with Application to Shrinkage*. Statistica Sinica, Volumen 10, 1281-1311.
- [Brooks et al., 1998] Brooks, S. & Gelman, A. (1998), *General Methods for Monitoring Convergence of Iterative Simulations*. Journal of Computational and Graphical Statistics, Volumen 7, Número 4, 434–455
- [BVC, 2013] BVC. (2013), *Estructura General de los Índices de la Bolsa de Valores de Colombia*.
- [Byatt, 2000] Byatt, D. (2000), *Convergent variants of the Nelder–Mead algorithm*. Tesis de Maestría, Universidad de Canterbury, Christchurch, Nueva Zelanda.
- [Calderón, S] alderón, S. & Nieto, F. (2017), *Bayesian analysis of multivariate threshold autoregressive models with missing data*, Communications in Statistics - Theory and Methods Volumen 46, Número 1, 296-318
- [Chen & Lee, 1993] Chen, C. & Lee, J. (1993), *Bayesian Inference of Threshold Autoregressive Models*. Journal of Time Series Analysis, Volumen 16, Número 5.
- [Chen et al., 2006] Chen, X. Quan, Q. Jia & Cai, K. (2006), *A Threshold Autoregressive Model for Software Aging*. Service-Oriented System Engineering, 2006. SOSE '06. Second IEEE International Workshop, 34-40.
- [Cowles & Carlin, 1996] Cowles, M & Carlin, B. (1996), *Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostics: A Comparative Review*. Journal of the American Statistical Association, Volumen 91, Número 434. 883-904.
- [Geweke, 1992] Geweke, J. (1992), *Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments*. In Bayesian Statistics, 169-193.

- [Ghosh et al., 2006] Ghosh, J. Delampady, M & Samanta T. (2006), *An Introduction to Bayesian Analysis, Theory and Methods*. Springer
- [Hansen, 1999] Hansen, B. (1999), *Testing for linearity*. Journal of Economic Surveys, Volumen 13, Número 5, 551-576.
- [Hansen, 2011] Hansen, B. (2011), *Threshold Autorregression in Economics*. Statistics and Its Interface, Volumen 4, 123-127.
- [Kibria & Joarder, 2006] Kibria, B & Joarder A. (2006), *A Short Review of Mutivariate t Distribution*. Journal of Statistical Research. Volumen 40, Número 1.
- [Koch, 2007] Koch, C. (2007), *Introduction to Bayesian Statistics*. Springer.
- [Koop et al., 2007] Koop, G. Poirier, D & Tobias, J. (2007), *Bayesian Econometric Methods*. Cambridge University Press.
- [Lange & Taylor, 1989] Lange, K & Taylor J. (1989) *Robust statistical modelling using the t distribution*. Journal of the American Statistical Association. Volumen 84, Número 408, 881-896.
- [Lo & Zivot, 2001] Lo, M. & Zivot, E. (2001), *Threshold Cointegration and Nonlinear Adjustment to the Law of One Price*. Macroeconomic Dynamics, Cambridge University Press, Volumen 5, 533-576.
- [Marín, 2011] Marín, J. (2011), *Tema 5: Comparación de modelos. Métodos Computacionales. Notas de Clase*, Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid.
- [Medova, 2007] Medova, E. (2007), *Bayesian analysis and Markov chain Monte Carlo simulation*. Working Paper Series, Judge Business School, University of Cambridge.
- [Metropolis et al., 1953] Metropolis, N. (1953), Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A. & Teller, E. (1953), *Equation of state calculations by fast computing machines*. The Journal of Chemical Physics, Volumen 21, Número 6. 1087-1092.
- [1] Millán, C. & Calderón, S. (2017), *Estimación bayesiana de los parámetros de umbrales y de retardo en un modelo autorregresivo de umbrales multivariado (mtar) con ruido t-student multivariado*, Universidad Nacional de Colombia, Tesis de pregrado .
- [Moreno, 2010] Moreno, E. (2010), *Una aplicación del modelo TAR en series de tiempo financieras*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia.
- [Nieto, 2005] Nieto, F. (2005), *Modeling bivariate threshold autoregressive processes in the presence of missing data*. Communications in Statistics: Theory and Methods. Volumen 34, Número 4, 905-930.

- [Rahman, 2009] Rahman, A. (2009), *Objective Bayesian Prediction for the Matrix-T Error Regression Model*. Paper presentado en el International Workshop on Objective Bayes Methodology, The Wharton School at the University of Pennsylvania, Philadelphia USA, 1-13.
- [Roberts et al., 1997] Roberts, G. Gelman, A & Gilks W. (1997), *Weak Convergence and Optimal Scaling of Random Walk Metropolis Algorithms*. The Annals of Applied Probability. Volumen 7, Número 1, 110-120.
- [Roberts et al., 2001] Roberts, G & Rosenthal, J. (2001), *Optimal Scaling for Various Metropolis-Hastings Algorithms*. Technical Report Series. Technical Report No. 0109. University of Toronto. Department of Statistics.
- [Rodríguez, 2009] Rodríguez, W. (2009), *Análisis del efecto día de semana en los mercados accionarios latinoamericanos*. Lecturas de Economía, Volumen 71, 189-200.
- [Sinharay, 2003] Sinharay, S. (2003), *Assesing Convergence of the Markov Chain Monte Carlo Algorithms: A Review*. Research report. Educational Testing Service.
- [Tong, 1978] Tong, H. (1978) *On a threshold model*, en Chen, C. *Pattern Recognition and Signal Processing*. NATO ASI Series E: Applied Sc, 575-586.
- [Tong & Lim, 1980] Tong, H. & Lim, K. (1980), *Threshold autoregression, limit cycles, and cyclical data*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodological), 245–292.
- [Tong, 1990] Tong, H. (1990), *Nonlinear Time Series, A Dynamical System Approach*. Oxford Statistical Science, Oxford University Press, Oxford.
- [Tong, 1993] Tong, H. (1983), *Threshold models in non-linear time series analysis*. Springer.
- [Tsay, 1989] Tsay R. (1989), *Testing and modeling threshold autoregressive process*. Journal of the American Association, Volumen 84, Número 405, 231-240.
- [Tsay, 1998] Tsay, R. (1998), *Testing and Modeling Multivariate Threshold Models*. Journal of the American Statistical Association, Volumen 93, Número 443, 1188-1202
- [Zellner & Ando, 2010] Zellner, A & Ando, T. (2010), *Bayesian and non-Bayesian analysis of the seemingly unrelated regression model with Student-t errors, and its application for forecasting*. International Journal of Forecasting, Volumen 26, Número 2, 413-434.
- [Zhang, 2011] Zhang, H & Nieto, F (2015), *TAR Modeling with Missing Data when the White Noise Process Follows a Student's t-Distribution*. Revista Colombiana de Estadística, Volumen 38, Número 1, 239-266

# A. Anexo: Histogramas y densidades suavizadas de las cadenas

## A.1. Matrices autoregresivas

Primer régimen

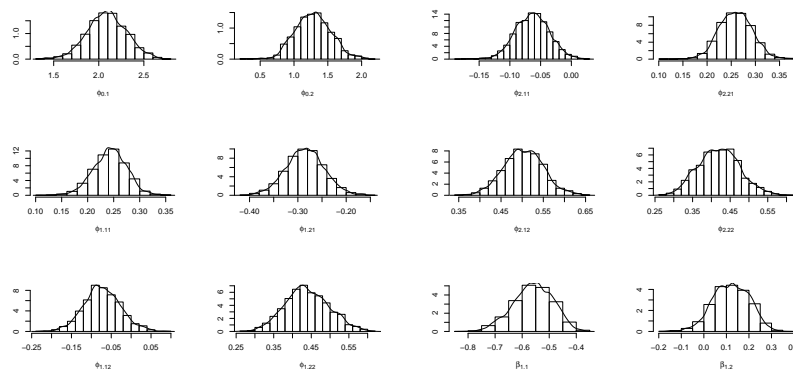


Figura A-1.: Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las matrices autoregresivas

Segundo régimen

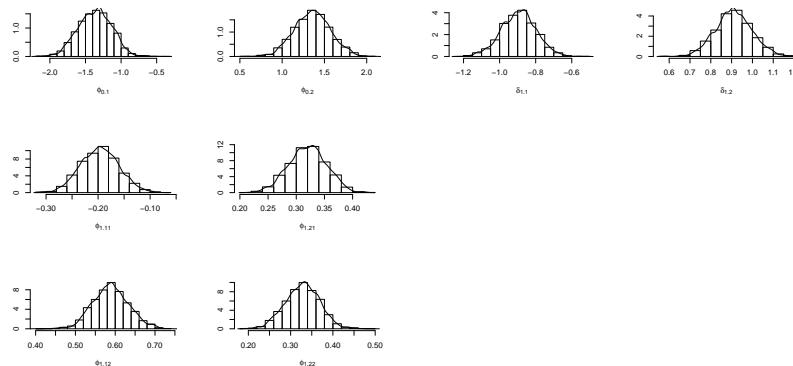


Figura A-2.: Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las matrices autoregresivas

## A.2. Desviaciones estándar escaladas

### Primer régimen

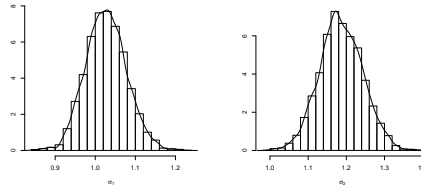


Figura A-3.: Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las desviaciones estándar escaladas

### Segundo régimen

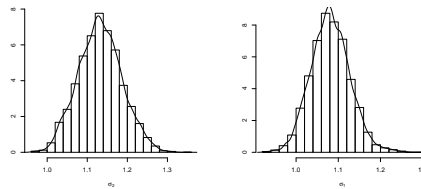


Figura A-4.: Histogramas y densidades suavizadas para las cadenas de las desviaciones estándar escaladas

## A.3. Coeficientes de correlación escalados

### Primer régimen

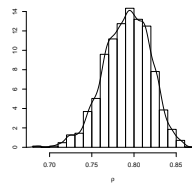
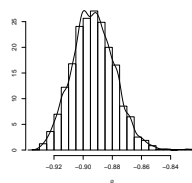


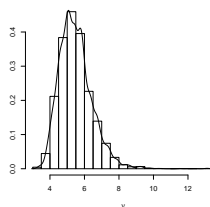
Figura A-5.: Histograma y densidad suavizada para la cadena del coeficiente de correlación escalado

### Segundo régimen



**Figura A-6.:** Histograma y densidad suavizada para la cadena del coeficiente de correlación escalado

## A.4. Grados de libertad



**Figura A-7.:** Histograma y densidad suavizada para la cadena del grado de libertad

# B. Anexo: Diagnósticos de convergencia Cadenas Aplicación Práctica

## B.1. Matrices autoregresivas

### Primer régimen

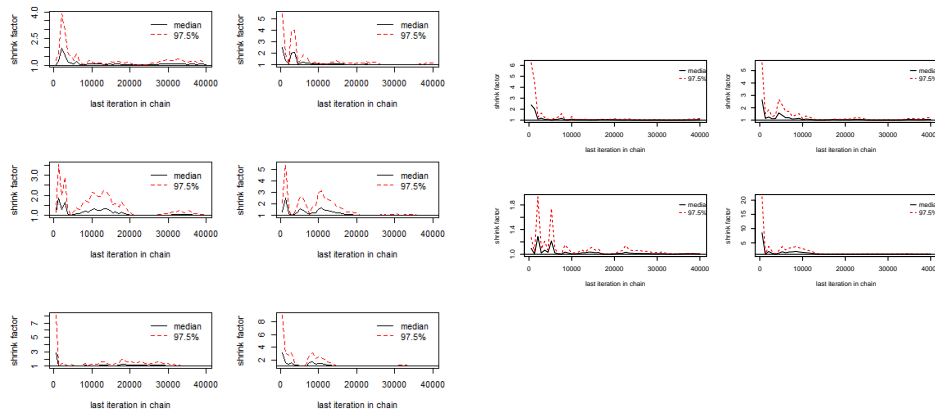
Se encuentra que las cadenas obtenidas a través de la implementación del algoritmo Metropolis Hastings convergen usando el criterio de Gelman y Rubin y de Geweke. En la mayoría de casos los factores de reducción de Gelman y Rubin y sus respectivos límites superiores del intervalo de confianza son muy cercanos a uno, indicando convergencia. Para el criterio de convergencia de Geweke se encuentra que la mayoría de los Z-scores están dentro de las bandas de confianza indicando, nuevamente la convergencia de las cadenas.

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

#### Segundo régimen

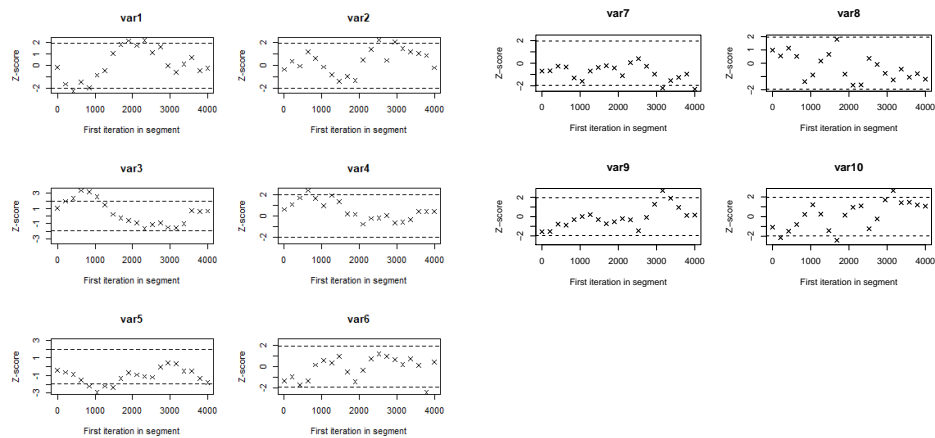
Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\phi_{0,1}$	1.02	1.02
$\phi_{0,2}$	1.02	1.07
$\phi_{1,11}$	1.04	1.16
$\phi_{1,21}$	1.06	1.23
$\phi_{1,12}$	1.04	1.17
$\phi_{1,22}$	1.03	1.15
$\phi_{2,11}$	1.02	1.02
$\phi_{2,21}$	1.05	1.19
$\phi_{2,12}$	1.01	1.05
$\phi_{2,22}$	1.05	1.23

**Tabla B-1.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas



**Figura B-1.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas

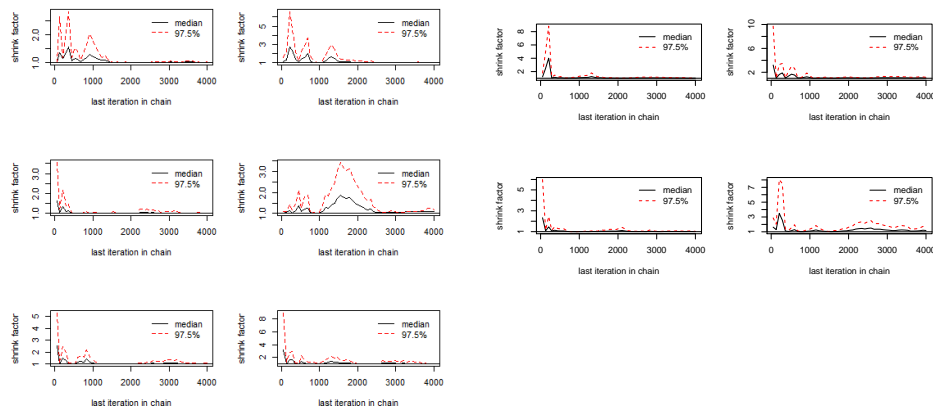
### Criterio de convergencia de Geweke



**Figura B-2.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para los diez parámetros de las matrices autoregresivas

Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\phi_{0,1}$	1.00	1.02
$\phi_{0,2}$	1.00	1.01
$\phi_{1,11}$	1.00	1.02
$\phi_{1,21}$	1.08	1.17
$\phi_{1,12}$	1.02	1.09
$\phi_{1,22}$	1.01	1.05
$\phi_{2,11}$	1.00	1.02
$\phi_{2,21}$	1.04	1.16
$\phi_{2,12}$	1.01	1.03
$\phi_{2,22}$	1.08	1.22

**Tabla B-2.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas



**Figura B-3.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los diez parámetros de las matrices autoregresivas

**Criterio de convergencia de Geweke**

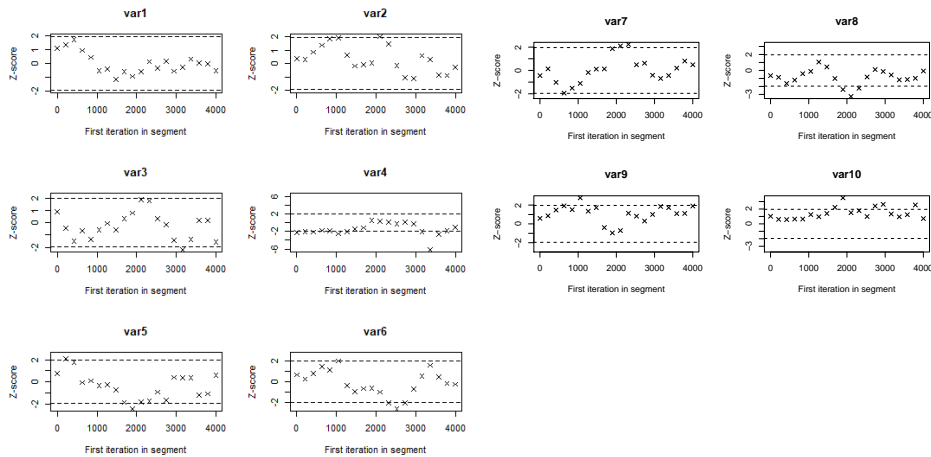


Figura B-4.: Resultados criterio de convergencia de Geweke para los diez parámetros de las matrices autoregresivas

## B.2. Vector de desviaciones estándar escaladas

### Primer régimen

#### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\sigma_1$ 1.00	1.00
$\sigma_2$ 1.00	1.01

Tabla B-3.: Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

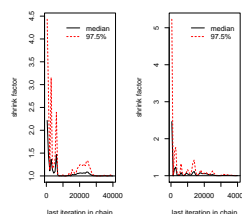
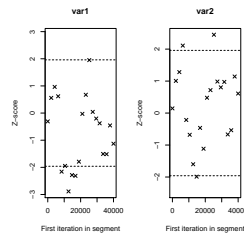


Figura B-5.: Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

#### Criterio de convergencia de Geweke



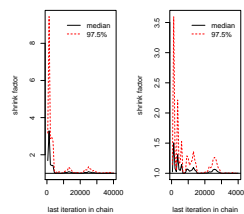
**Figura B-6.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

Segundo régimen

Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

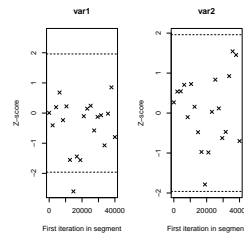
Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\sigma_1$	1.00	1.01
$\sigma_2$	1.00	1.01

**Tabla B-4.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar



**Figura B-7.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

Criterio de convergencia de Geweke



**Figura B-8.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para los dos elementos del vector de desviaciones estándar

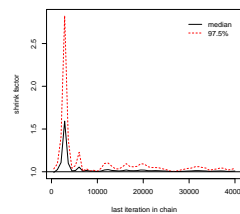
### B.3. Coeficientes de correlación escalados

Primer régimen

Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
1.01	1.04

**Tabla B-5.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación

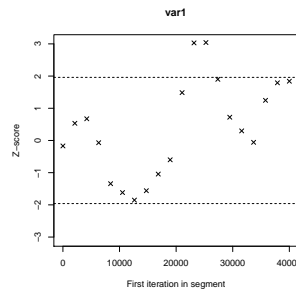


**Figura B-9.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación

Criterio de convergencia de Geweke

Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
1	1

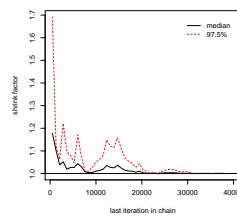
**Tabla B-6.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación



**Figura B-10.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación

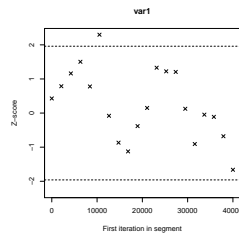
Segundo régimen

Criterio de convergencia de Gelman y Rubin



**Figura B-11.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para el coeficiente de correlación

Criterio de convergencia de Geweke



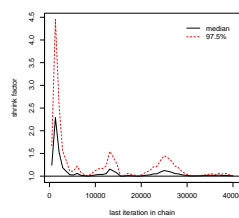
**Figura B-12.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para el coeficiente de correlación

## B.4. Grados de libertad

### Criterio de convergencia de Gelman y Rubin

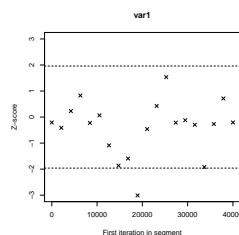
Parámetro	Factor de Reducción	Límite Superior I.C.
$\nu$	1	1

**Tabla B-7.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad



**Figura B-13.:** Resultados criterio de convergencia de Gelman y Rubin para los grados de libertad

### Criterio de convergencia de Geweke



**Figura B-14.:** Resultados criterio de convergencia de Geweke para los grados de libertad