PARADOJA DE *LAS TRES TARJETAS* COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Deysi Ivonne Latorre Verano

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2016

PARADOJA DE *LAS TRES TARJETAS* COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Deysi Ivonne Latorre Verano

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:
Dra. Emilse Gómez Torres

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2016

Dedicatoria

A Dios por su amor incondicional,
A mi Hermosa abuelita por su esfuerzo y dedicación en mi formación,
A mis padres por su apoyo constante,
A mi hermana querida y a mi Jerónimo amado.

Agradecimientos

A Dios por permitirme comenzar y culminar este trabajo, porque sin él nada sería posible. A la Universidad Nacional de Colombia y los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, por sus enseñanzas y conocimientos que me permitieron subir un escalón más en mi formación académica y profesional. De manera especial agradezco enormemente a la profesora Emilse Gómez, por su dirección, guía, apoyo, esfuerzo y dedicación en la realización de cada uno de los capítulos de este trabajo. Sin duda es un ejemplo no sólo como maestra sino como persona, por ser una persona íntegra y humana.

A mi familia, porque gracias a ellos logré cumplir este objetivo, con su apoyo, amor y colaboración constante.

A Jean por su comprensión en tiempos de dificultad y a mis compañeros de maestría con los que trabajé en conjunto y aprendí de ellos en cada tarea, especialmente a Ximena.

Resumen

Este trabajo presenta un conjunto de actividades para la enseñanza de la noción de probabilidad condicional a un grupo de estudiantes de grado noveno. Dentro del diseño de la propuesta se incluye la *paradoja de las tres tarjetas* como eje central en el estudio de esta investigación. Esta investigación analiza las producciones de 26 estudiantes en cada una de las actividades; para estos análisis se tienen en cuenta diferentes autores que poseen una larga trayectoria en la enseñanza de la estadística y probabilidad como Carmen Batanero y José Miguel Contreras y una parte del "enfoque Ontosemiótico" (EOS) en cuanto a significado referencial propuesto por Batanero, Godino y Font (2007). Con base a estos análisis, por un lado se evalúa el conocimiento del estudiante en cuanto al aprendizaje de la probabilidad condicional y por otro, se establecen las conclusiones que surgen tras la implementación de la propuesta, como el efecto que generó la *paradoja* en el aprendizaje de la noción de condicionalidad y la comprensión de conceptos como la dependencia e independencia de eventos.

Palabras clave: probabilidad condicional, dependencia de eventos, propuesta didáctica, paradoja. EOS.

Abstract

This document presents a three activities for teaching conditional probability notion. It is oriented to Colombian students in 9th level of basic school. The design of the proposal is based on *the paradox of the three cards*, which is the central axis of this didactical sequence; the other activies are an initial test for establiching previous students' knowledge and a final test for evaluating their understanding of conditional probability in other context. This research analyzes productions of 26 students to each activity, taking into account previous research and some tools of the "Ontosemiotic approach" (EOS) about referential meaning, proposed by Batanero, Godino y Font (2007). The proposal's implementation showed good results, the activity based on the paradox generated in this sample of students learning about conditionality notion and understanding of concepts as dependence and independence of events.

Keywords: Conditional probability, dependence of events, didactic proposal, paradox.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

INTRODUCCIÓN

En Colombia la enseñanza de la probabilidad para la educación básica y media se implementa desde los primeros años, inicia con la imposibilidad o posibilidad de que un suceso ocurra en la realidad del estudiante y se espera que llegue a la probabilidad condicional y dependencia e independencia de eventos (MEN, 2006). Sin embargo, en la mayoría de los casos, los temas propuestos por el MEN dentro del *pensamiento aleatorio y sistema de datos*, se dejan para los últimos meses del año escolar, lo que genera un escaso desarrollo del razonamiento probabilístico.

La probabilidad condicional permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia de sucesos aleatorios que ocurren en la sociedad, cuando se adquiere una información adicional (Díaz, 2003), por tanto afianza la toma de nuestras decisiones. De ahí la importancia de promover el aprendizaje del *enfoque* subjetivo de la probabilidad en educación secundaria. Una manera para incorporar temas relacionados con este *enfoque subjetivo* es la implementación de algunas paradojas sencillas que resultan ser motivantes para los estudiantes, según Lesser (1998).

Específicamente esta propuesta se basa en la *paradoja de las tres tarjetas*[1] como recurso didáctico para el aprendizaje de condicionalidad, independencia y dependencia de eventos, utilizando un juego que permitió captar la atención e interés de los estudiantes (como se muestra en capítulo 4). Adicional a ello, se diseñaron y aplicaron dos actividades más, una con el fin de establecer los conocimientos previos de los estudiantes acerca de este tema y otra para valorar la comprensión de la probabilidad condicional después de la implementación de la paradoja.

El documento está organizado en cinco capítulos. El primero presenta la contextualización, incluye el planteamiento del problema, los referentes curriculares, los objetivos y la metodología que se utilizó para el desarrollo de las clases. El segundo capítulo, muestra los referentes teóricos, tanto epistemológicos e históricos de la probabilidad como disciplinares y didácticos, y la metodología de investigación acción, que caracteriza esta propuesta. En el tercer capítulo se encuentra el diseño de las actividades construidas con un análisis a priori de cada una. En el cuarto capítulo se

[1] Idea original de Shannon y Weaver (1949, citado en Batanero, Godino y Roa, 2004) en el documento *mathematical model of communication.* Urbana,IL: University of Illinois Press.

evidencia el análisis de las producciones de los estudiantes realizado al aplicar las tres actividades. El capítulo cinco expone las conclusiones relacionadas con los objetivos del trabajo, algunas recomendaciones para los profesores que deseen implementar la propuesta en sus clases de probabilidad y nuevos retos que se deriva de esta investigación. Finalmente, los anexos contienen los diseños de las tres actividades que se implementaron en la institución.

CAPITULO 1: CONTEXTUALIZACIÓN.

El presente capítulo describe el planteamiento del problema, del cual surgen las ideas para la construcción de la presente propuesta; incluye tanto el objetivo general como los específicos, las políticas educativas en cuanto a la enseñanza de la probabilidad condicional en Colombia, y la metodología de la propuesta, que describe las fases en las que se desarrolló.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El interés de la sociedad actual por comprender mejor diversas situaciones que suceden a su alrededor bajo condiciones de incertidumbre, ha incrementado la importancia de la estadística y la probabilidad dentro de la educación básica y media. Sin embargo, el tiempo destinado a estos contenidos y en especial a la enseñanza de la probabilidad condicional es insuficiente en el currículo tradicional, al menos desde mi experiencia en la institución donde me desempeño; por tal motivo la propuesta que se describe en este documento se orienta a la comprensión de este tópico por parte de estudiantes de grado noveno.

El I.E.D Grancolombiano, ubicado en la localidad séptima de Bogotá (Bosa), es el lugar donde se desarrolló la presente propuesta. Esta institución educativa incluye dentro de su plan curricular centros de interés[2] bajo la modalidad de *electivas*, cuya finalidad consiste en potencializar y desarrollar diferentes habilidades y conocimientos que no son trabajados en el aula regular. Una de las electivas para el grado noveno se refiere al *Pensamiento aleatorio y los Sistemas de datos,* su propósito es la formación de estudiantes estadísticamente competentes en la realidad social, cultural y política de los ciudadanos.

Esta formación pretende el desarrollo de competencias para tomar decisiones asertivas en situaciones que involucren diversos fenómenos aleatorios que ocurren en la

[2] Proyecto de Secretaria de Educación de Bogotá que busca la implementación de la jornada única con la política educativa *"Currículo para la excelencia académica y la formación integral 40x40"* (40 horas semanales por 40 semanas), cuyo fin, es brindar a los estudiantes aprendizajes integrales potencializando sus habilidades y gustos a través de diferentes *centros de interés.*

cotidianidad (Bennet, 1998, citado por MEN, 1996). A través de su interacción con dichos fenómenos, el estudiante desarrolla su pensamiento aleatorio y pone en juego procesos para cuantificar y controlar una situación determinada. Arteaga, Batanero, Contreras y Diaz (2012) afirman que la toma de decisiones asertivas en situaciones de incertidumbre en la mayoría de casos se basa en el razonamiento condicional; el cual, tal y como lo menciona MEN (2006), debe ser trabajado en los últimos años escolares; con la dificultad, observada desde mi experiencia, la probabilidad condicional es una temática difícil de comprender, y se tiende a confundir con las probabilidades de otros eventos, por ejemplo entre ésta y la probabilidad conjunta, por ello es importante empezar a construir en el estudiante una noción de condicionalidad en grados previos.

Al respecto, Batanero, Contreras y Cañadas (2012) proponen el planteamiento de situaciones paradójicas como una forma de introducir la probabilidad condicional de manera interesante y motivadora para los estudiantes, pues desarrolla razonamiento probabilístico condicional en los estudiantes y exige el análisis de diversos elementos y relaciones; en particular, se ponen en juego los conceptos de independencia y dependencia estadística, que son fundamentales para la comprensión de la condicionalidad y para posteriores procesos de inferencia estadística.

Por lo anterior, con este trabajo se pretende realizar un acercamiento a la noción de probabilidad condicional y con ello al razonamiento probabilístico condicional. En este orden de ideas, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué efecto genera en los estudiantes de grado noveno el uso de una paradoja para la comprensión de la noción de probabilidad condicional?

Esta pregunta se trabajó con 26 estudiantes de noveno del grupo 9E6 dentro del plan curricular de la electiva *pensamiento aleatorio* en el I.E.D. Grancolombiano, ya que incluye la probabilidad condicional entre sus temáticas y al contar con un micro-currículo alterno al tradicional, permite que se tenga el tiempo suficiente para llevar a cabo esta práctica de aula.

1.2 POLÍTICAS EDUCATIVAS ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN COLOMBIA

Según los lineamientos curriculares colombianos, la enseñanza de la probabilidad condicional, se encuentra dentro del *pensamiento aleatorio y sistemas de datos*, que debería ser desarrollado como lo sugiere Shaughnessy (1985, citado por el MEN 2006), por medio de la exploración de fenómenos físicos y el desarrollo de diferentes estrategias que estén presentes en la realidad del estudiante.

En un sentido más amplio, la enseñanza de la probabilidad, según los Estándares Curriculares en Matemáticas (2006), se debería enseñar desde el primer grado de primaria. Para los primeros años de la educación básica, los documentos curriculares sugieren que el estudiante, desde su experiencia, sea capaz de explicar la posibilidad (o no) de que un evento cotidiano ocurra. Para los últimos años de la educación media, estos mismos documentos promueven la inclusión de la probabilidad condicional, como se lee en el estándar "interpreto el concepto de probabilidad condicional e independencia de eventos" (MEN, 2006, p.89). Allí mismo se sugiere que, para lograrlo, el estudiante diseñe experimentos aleatorios, formule hipótesis e inferencias, siendo capaz de rectificarlas y/o refutarlas después de un proceso de verificación. Dicho enfoque subjetivo permite a los estudiantes generar su propio grado de creencia frente a la ocurrencia de un evento, basado en la evidencia que se tiene.

En el I.E.D. Grancolombiano, la enseñanza de la probabilidad condicional se encuentra dentro del micro-currículo de la electiva *pensamiento aleatorio y sistemas de datos* (descrita en el planteamiento del problema) con el fin de que los estudiantes, al terminar la educación básica, tengan un acercamiento al razonamiento probabilístico condicional.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 General

Diseñar e implementar una propuesta didáctica que facilite a los estudiantes de grado noveno del colegio Grancolombiano comprender la noción de probabilidad condicional a través del análisis de la paradoja de *las tres tarjetas.*

1.3.2 Específicos

1) Identificar conocimientos previos que tienen los estudiantes de grado noveno respecto a conceptos de probabilidad, desde el punto de vista clásico y frecuencial.
2) Estructurar las situaciones (contextos, problemas) que conformarán la propuesta didáctica, teniendo en cuenta la dependencia e independencia estadística entre experimentos.
3) Evaluar el desarrollo de esta propuesta con estudiantes del grado noveno del colegio Grancolombiano.

1.4 METODOLOGÍA

La propuesta se implementa utilizando las tres fases en el proceso de resolución de problemas matemáticos (Mason, Burton & Stacey, 1982): Abordaje, Ataque y Revisión. Para cada fase se diseñó una actividad orientada a un objetivo específico como se muestra a continuación.

La fase de abordaje busca que los estudiantes pongan en juego algunos conceptos matemáticos previos, en este caso con respecto a probabilidad clásica, frecuencial y conjunta, y prepararlos para la siguiente fase.

En la fase de ataque se presenta la actividad basada en la paradoja de las tres tarjetas, con la cual se pretende que los estudiantes comprendan la noción de condicionalidad, dependencia e independencia de eventos, por medio de un juego que paulatinamente irá formalizando dichos conceptos.

La fase de revisión evalúa la comprensión de los significados que los estudiantes tienen alrededor del contenido de interés en la propuesta didáctica. Para este trabajo la probabilidad condicional. Esta fase finaliza el proceso de enseñanza – aprendizaje de la propuesta.

Las actividades se implementaron en tres sesiones. Luego, las producciones de los estudiantes en cada actividad se analizaron, con el fin de evaluar el impacto que generó la enseñanza de la noción de probabilidad condicional a través de la paradoja, identificando desventajas y ventajas que se presentan en el proceso de aprendizaje.

CAPITULO 2: REFERENTES TEÓRICOS

Este capítulo presenta en 2.1 un breve resumen de la evolución histórica de la probabilidad como concepto matemático. En 2.2, se sintetizan los fundamentos teóricos relacionados con ésta, incluyendo tres significados formales de la probabilidad, tomando como referencia diversos autores (Gnedenko 1969 y Cramér 1970; Zajárov, Sevastiánov y Chistiakov 1985; Álvarez, Rojas y Bautista 2010; Blanco 2004). En 2.3, se introducen los sesgos y dificultades que se pueden dar en la enseñanza de la probabilidad condicional. En 2.5, se presentan algunos antecedentes de propuestas didácticas sobre la enseñanza de la condicionalidad; en 2.6, se muestra una manera de enseñar la noción de este tema a través de paradojas y, en 2.7, se exponen algunas características generales de la metodología de investigación acción. Finalmente, en 2.8, se incluye una parte del "enfoque ontosemiótico" (EOS) en el cual se basan los análisis posteriores.

2.1 EVOLUCIÓN HISTÓRICA

La probabilidad surge desde la antigüedad cuando se empieza a cuestionar sobre los posibles resultados al lanzar un dado o cómo realizar la repartición de las ganancias en juegos de apuestas antes de su finalización, así lo evidencian algunas pinturas relacionadas con juegos de azar en las pirámides de Egipto aproximadamente 3.500 años A.C. Por su parte Herodoto (historiador griego 484 A.C) relata sobre el gran auge que tomaron estos juegos de azar en su época. (Cramér 1970)

En el poema de *Vetula de Richard de Fournival* (1200-1250), aparece uno de los primeros problemas dirigidos a contabilizar el número de posibles resultados al lanzar un dado varias veces, sin embargo hasta la época de Pacioli (1445-1517), Tartaglia (1499–1557) y Cardano (1501-1576) se empieza a modelizar esto a través de las matemáticas (Mateos 2002).

Cardano escribe uno de los mejores manuales para los jugadores, donde resuelve diferentes problemas del análisis combinatorio, en dicho manual aparece el concepto de equiprobabilidad en el lanzamiento repetitivito de un dado. (Cramér 1970)

Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) dejan a un lado los juegos de azar como una simple experimentación y se empiezan a interesar por la creencia en Dios como base para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, allí involucran un conjunto de posibilidades que pueden ocurrir o no según los estados de la naturaleza (Ríos y Ríos, 1998). Huygens (1629-1695) al tener conocimiento de estos trabajos escribe acerca del razonamiento en los juegos de azar en *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, el cual se convierte en uno de los aportes más significativos a la probabilidad del siglo XVII. (Zajárov, Sevastiánov y Chistiakov 1985)

Finalizando el siglo XVII e iniciando el XVIII James y Daniel Bernoulli realizan su aporte al cálculo de probabilidades, establecen diferentes herramientas combinatorias a las ya conocidas hasta entonces, por otro lado exponen una nueva teoría de la probabilidad unida a la teoría de los grandes números. Daniel Bernoulli reconocido matemático se destacó por dar inicio a la llamada "esperanza moral"[3], argumentando que las personas se rigen por diferentes criterios para valorar las consecuencias de una decisión.

Pensadores como Leibniz (1646-1716) se interesaron por problemas que no podían ser resueltos por las teorías de probabilidad conocidas hasta entonces (intuitiva, clásica y frecuencial) ya que no cumplían con una repetitividad.

Thomas Bayes (1702-1761), matemático británico, continuó con el trabajo de Leibniz en particular los problemas relacionados con la probabilidad de un suceso que está condicionado por la ocurrencia de otro suceso. Él argumenta que "el mundo era el resultado de una causa inteligente" (Mateos 2002). En la comunidad matemática la probabilidad condicional se reconoce a partir de su trabajo. Estas reflexiones dan inicio a un enfoque subjetivo de la probabilidad, que suscitó polémicas por ser contrario al enfoque objetivo de la asignación clásica y frecuencial. Sin embargo, pasaron dos siglos antes que se realizara su vinculación formal a la teoría de la probabilidad (Contreras, 2011).

Finalmente, Simon Laplace (1749-1827) formaliza la teoría clásica de la probabilidad en su trabajo *Théorie Analytique des Probabilités,* donde involucra algunos principios

[3] Según Durán y Ferreirós (2001), Bernoulli definía "esperanza moral" como la esperanza de la utilidad de los resultados. Entonces, si X es una variable aleatoria y U(X) una función de utilidad usada por una persona, la esperanza moral se define como $E\big(U(X)\big)$ (utilidad media).

generales relacionados con loterías, extracciones de bolas y el problema de los puntos (Pearson y Kendall 1970).

2.2 CONCEPTOS Y SIGNIFICADOS

En el campo de la probabilidad hay gran número de definiciones y conceptos, por la extensión del presente documento sólo se incluyen las que formaron parte del diseño y análisis de las actividades, teniendo en cuenta que la propuesta está enfocada en la *noción de probabilidad condicional*, que se introduce en noveno grado.

En esta sección, los conceptos (relacionados con la probabilidad) y los significados de la probabilidad se presentan de manera formal, teniendo en cuenta las recomendaciones hechas desde las investigaciones sobre desarrollo profesional del profesor de matemáticas, como la de Ball, Thames y Phelps (2008). Estas autoras proponen un modelo de "conocimiento para la enseñanza de las matemáticas" a nivel escolar (conocido como MKT) que está compuesto de 6 categorías. Una de las conclusiones de su investigación es la importancia de un sólido conocimiento disciplinar del profesor para lograr un mejor ejercicio docente en el aula. En tal sentido, el profesor de matemáticas en educación básica y media debería conocer la formalidad de los conceptos que enseña y hacer una adecuada trasposición didáctica (usando la terminología de Chevallard 1991).

2.2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Experimento aleatorio: un experimento es aleatorio si no se puede predecir su resultado con anterioridad.

Espacio muestral: es el conjunto de por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio (Blanco, 2004). Se acostumbra a denotar con la letra griega Ω.

Espacio medible: tomando la idea de Blanco (2004, p.9) se tiene:

> Sean $\Omega \neq \Phi$ y ξ una σ-álgebra[4] sobre Ω. La pareja (Ω, ξ) se llama espacio medible. Se tiene a partir de la definición que Ω y Φ pertenecen a cualquier álgebra definida sobre Ω. Ω se llama evento seguro y Φ evento imposible. Un evento de la forma $\{\omega\}$, con $\omega \in \Omega$ se llama evento elemental.
>
> Cuando se dice que un evento A ocurre significa que el resultado obtenido, al realizar el experimento aleatorio cuyo espacio muestral es Ω, es un elemento de A, por tanto si A y B son eventos entonces:
>
> I. $A \cup B$ es un evento que ocurre, si y sólo si, A o B o ambos ocurren.
> II. $A \cap B$ es un evento que ocurre, si y sólo si, A y B ocurren.
> III. A^C es un evento que ocurre, si y sólo si, A no ocurre.
> IV. $A - B$ es un evento que ocurre, si y sólo si, A ocurre pero B no.

Si (Ω, ξ) es un espacio medible [Ω es un espacio muestral y ξ es una sigma álgebra sobre Ω], entonces una función P definida sobre ξ y de valor real satisface las siguientes condiciones:

1) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \xi$.
2) $P(\Omega) = 1$.
3) Si $A_1, A_2, \ldots$ son elementos de ξ mutuamente excluyentes, es decir que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, se tiene que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$(\Omega, \xi, \mathrm{P})$ Se denomina *espacio de la probabilidad*. (p. 11)

[4] (σ-álgebra) Sean $\Omega \neq \boldsymbol{\Phi}$. Una colección de $\boldsymbol{\xi}$ de subconjuntos de Ω es una σ-*álgebra* sobre Ω, si:

I. $\Omega \in \xi$.
II. Si $A \in \xi$ entonces $A^C \in \xi$.
III. Si $A_1, A_2, \ldots \in \xi$ entonces $\bigcup_{i:1}^{\infty} A_i \in \xi$.

(σ-álgebra generada): Sean $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\Phi}$ y L una colección de subconjuntos de Ω. Sea $M = \{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}$ es una σ-*álgebra* sobre Ω que contiene a $L\}$. Entonces, se tiene que $\sigma(L) := \bigcap_{\xi \epsilon M} \xi$ es la menor σ-*álgebra* sobre Ω que contiene a L. Esta σ-*álgebra* se llama σ-*álgebra* generada por L.
(p. 7)

Si (Ω, ξ, P) es un espacio de probabilidad, se tiene que:

I. P(**Φ**)=0
II. Si A, B ∈ ξ y A∩ $B) = \Phi$ entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
III. *P* (A^C)*=1 - P(A).*
IV. Si A ⊆ B entonces *P(A) ≤ P (B) y P (B – A) = P (B) – P(A).* Se tiene que *P(A)* ≤ 1 para todo A ∈ ξ.
V. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Variable aleatoria: sean (Ω, ξ, P) un espacio de probabilidad y ($\breve{\Omega}$,$\check{\xi}$) un espacio medible. Una ξ- $\check{\xi}$) – variable aleatoria es una aplicación *X:* Ω→ $\breve{\Omega}$ tal que, para todo A ∈ ξ se tiene que X^{-1}(*A*) ∈ ξ. Si ($\breve{\Omega}$,$\check{\xi}$) = (R, β), entonces, se dice que *X* es una variable aleatoria real. (Blanco 2004, p.47)

2.2.2 SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD

2.2.2.1 PROBABILIDAD CLÁSICA (a priori o Laplace)

En algunos experimentos aleatorios, se sugiere asignar probabilidades iguales a los diferentes resultados en un espacio muestral Ω finito. Tal espacio en el cual todos sus puntos son puntos son igualmente probables se llama *espacio equiprobable.* Si un suceso A de dicho espacio puede ocurrir de *h* maneras diferentes de un número total de *n* maneras posibles, entonces la probabilidad de ocurrencia del suceso A está dada por:

$$P(A) = \frac{h}{n}$$

Según la definición, un espacio de probabilidad $(\Omega, \xi, \mathrm{P})$ se llama laplaciano si Ω es finito y $\xi = \mathrm{P}(\Omega)$ y $\mathrm{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ para todo $\omega \in \Omega$. Entonces si $(\Omega, \xi, \mathrm{P})$ es un espacio de probabilidad laplaciano y A⊆ Ω. (Álvarez, Rojas y Bautista 2010). Entonces:

$$P(A) = P\left(\cup_{\omega \in A}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

2.2.2.2 PROBABILIDAD FRECUENCIAL

Dadas las limitaciones de la probabilidad clásica surge un concepto frecuentista de la probabilidad a mediados del siglo XIX, con dos bases fundamentales, la estabilidad de las frecuencias relativas y la aceptación del enfoque objetivo de la probabilidad.

Dado un espacio un espacio muestralΩ, cada suceso de A de Ω se le realiza una probabilidad de la siguiente manera:

1. Se efectúa un experimento aleatorio *n* veces.
2. Se observa el número de veces en que ocurre el suceso *A*, *n(A).*
3. Se determina con qué frecuencia ha ocurrido el suceso *A* en el pasado y se usa dicho resultado para predecir la probabilidad de que vuelva a ocurrir en el futuro.

$$fr(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Si n tiende a infinito la frecuencia relativa de ocurrencia de A, $fr(A)$, tiende a estabilizarse alrededor de un valor fijo, denominado *probabilidad de ocurrencia* del suceso A:

$$P\ (A) = \lim_{n\to\infty} fr(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Esto constituye la ley de la estabilidad de las frecuencias relativas (Álvarez, Rojas y Bautista, 2010).

2.2.2.3 PROBABILIDAD CONDICIONAL

En lenguaje natural, la probabilidad condicional establece que: Dados dos eventos A y B de probabilidad no nula, en un mismo espacio muestral, la probabilidad de ocurrencia de un evento A dado otro evento B, P(A|B), es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B ya se ha verificado (Canavos, 2001).

En ocasiones se obtiene una información parcial de un experimento aleatorio antes de ser conocido su resultado final. Teniendo en cuenta esta información, se cambia por lo general la estructura probabilística de los posibles resultados. Desde el punto de vista de las frecuencias relativas, sea A un evento cuyo chance de ocurrir debe ser medido bajo la suposición de que un evento B ha sido observado. Si el experimento se repite bajo las mismas condiciones n veces, entonces la frecuencia relativa de *A* bajo la condición de *B* se define como:

$$fr(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n}}{\frac{n(B)}{n}}; si\, n(B) > 0$$

Como se dijo anteriormente cuando *n* es lo suficientemente grande el numerador tiende a $P(A \cap B)$ y el denominador *P(A).* (Blanco, 2004).

Lo anterior conlleva a la siguiente definición:

> Sea $(\Omega, \xi, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Si A, B $\in$ ξ, con P(A) $>$ 0, entonces se define la probabilidad del evento B bajo la condición A como sigue:
>
> $$\mathrm{P}\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$
>
> Y análogamente, la probabilidad condicional de A dada la ocurrencia de B, es:
> $\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$ donde $\mathrm{P\,(A)} > 0$. (p. 22)

Sucesos independientes

Cuando dos sucesos A y B, de probabilidad no nula, están asociados a un experimento aleatorio y $\mathrm{P(B)} > 0$, se cumple que P(A|B)=P(A) cuando el suceso A no depende estadísticamente del suceso B.

Siguiendo el razonamiento anterior cuando $\mathrm{P(A|B)} \neq \mathrm{P(A)}$, se dice que el suceso A depende estadísticamente del suceso B.

Sucesos mutuamente excluyentes

Dos sucesos A y B, de probabilidad no nula, son mutuamente excluyentes cuando ninguno de los dos tiene elementos comunes, $\mathrm{A \cap B} = \emptyset$, entonces $\mathrm{P(A \cap B)} = 0$. En consecuencia, sucesos mutuamente excluyentes son sucesos dependientes estadísticamente dado que la ocurrencia de uno de ellos implica que la probabilidad de que el otro ocurra es cero.

2.2.2.4 PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN DE SUCESOS

A partir del cálculo de la probabilidad condicional se obtiene la siguiente *regla de probabilidad compuesta* o *del producto*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) * \mathrm{P}(B|A), \text{ con } \mathrm{P}(\mathrm{A}) > 0$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) * \mathrm{P}(A|B), \text{ con } \mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$$

Que puede generalizarse de la siguiente manera:

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{P}\ (\mathrm{A}) * \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) * \mathrm{P}(\mathrm{C}/\mathrm{A} \cap \mathrm{B});\ \text{con } \mathrm{P}(\mathrm{A}) > 0$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2/A_1) \ldots P(A_n \ / \ A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1});$$

$$\text{con } \ P(A, \ \cap \ldots \cap A_{n-1}) \ > 0$$

2.3 SESGOS Y DIFICULTADES EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Para realizar un adecuado proceso de enseñanza – aprendizaje de la probabilidad condicional es importante reconocer y analizar algunos errores y dificultades que comúnmente suelen aparecer en el momento de resolver problemas. Por ejemplo, cuando se tiene conocimiento adicional sobre los sucesos implicados en una situación o en un experimento aleatorio, comprender que un suceso depende o no de otro es una dificultad evidente para el aprendizaje de la probabilidad, por ello el conocimiento de la probabilidad condicionada cobra tanta importancia (Contreras, 2011).

Este tipo de probabilidad se encuentra dentro del enfoque subjetivo, dado que requiere tanto de la condicionalidad (y los conceptos relacionados a ella) como de la toma de decisiones a partir creencias personales. Esta relación con la toma de decisiones bajo incertidumbre motivó, en la década del 70 en el siglo XX, varios estudios sobre la comprensión de la probabilidad condicional desde el campo de la psicología. Un compendio de estas investigaciones se encuentra en Kahneman, Slovic y Tversky (1982 en Díaz, 2003), quienes dan a conocer tres heurísticas muy comunes al momento de resolver problemas de condicionalidad. A continuación se presentan dos de ellas, que están relacionadas con este trabajo.

1. **Heurística de representatividad**

Al realizar inferencia estadística surgen algunas ideas ligadas al muestreo que son contrarias aparentemente: (1) la muestra proporciona una información “representativa“ de la población, (2) la variabilidad muestral refleja que las muestras varían entre sí. Cuando se olvida alguna de estas dos características, durante los procesos de toma de decisiones, aparecen fallos conceptuales desde el punto de vista probabilístico, como los siguientes:

1.1 Concepciones erróneas sobre el azar: en un experimento aleatorio, la persona con esta heurística espera que una secuencia pequeña de resultados o ensayos represente puntualmente sus características, por ejemplo que se visualice cada uno de los posibles resultados (si se lanza un dado seis veces, esta persona creería que se observarán los resultados del uno al seis). Debido a esta manera errónea de razonar surge la llamada ***falacia del jugador,*** donde la persona con esta concepción ve el azar como un proceso autocorrector en el que el cambio de una dirección induce claramente la desviación en otra dirección para establecer un equilibrio. Por ejemplo, después de lanzar una moneda 10 veces cuyos resultados son (CCSCSCSSSS), esta persona espera que el resultado en el próximo lanzamiento sea cara pues cree que debe haber un equilibrio entre el número de caras y el números de sellos al lanzar la moneda, a pesar de realizar un número reducido de ensayos.

1.2 Falacia de las tasas base: en una toma de decisión bajo incertidumbre con información a priori, la persona que presenta este fallo conceptual calcula una probabilidad simple en lugar de una condicionada, es decir que esta persona ignora la probabilidad a priori de un suceso para calcular una probabilidad posteriormente. El problema más conocido que involucra esa falacia se encuentra en Díaz (2003):

> *Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verde y el 15% Azul. Un testigo identificó el taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?* La mayoría de las personas eligen como respuesta 0.80 (estimación que coincide con la fiabilidad del testigo) y un grupo importante elige 0.50, otros creen que es más probable que el taxi sea Azul que Verde. Al resolver el problema mediante el teorema de Bayes se obtiene que la probabilidad de que el taxi implicado sea Azul es de 0.41. (p. 4)

2. **Disponibilidad**

Consiste en evaluar la probabilidad de un suceso a partir de situaciones que se recuerdan fácilmente, dicha facilidad puede darse por la estructura cognitiva de la persona o diversos factores situacionales (Díaz 2003). A continuación se presentan algunos errores recurrentes, relacionados con esta heurística:

2.1 **Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos:** se basa en la facilidad de las personas de recordar ejemplos cuando la frecuencia de ellos es alta y a su vez se toman como referencia los resultados para dar unos nuevos.

2.2 **Experiencia personal:** Cuando se lleva a cabo algo con otra(s) personas es más sencillo recordar nuestro punto de vista que el de la otra(s) persona(s) y con base en ello tomar nuevas decisiones.

Otros errores en razonamiento

1. **Juicios sobre frecuencias:** Lichtenstein, Slovic, Fischhoff, Layman y Combs (1978, citado en Díaz 2003) realizaron un estudio sobre la estimación de frecuencias de distintas enfermedades y peligros ligados a causas de muerte en Estados Unidos. El estudio mostró que la mayoría de personas tiende a subestimar las frecuencias altas y a sobreestimar las bajas en situaciones aleatorias.

2. **Calibración de juicios:** cuando se pregunta a una persona la estimación de la probabilidad de un suceso y su estimación personal coincide con la obtenida con datos reales, se dice que el juicio de probabilidad de esta persona está bien calibrado**.** Cuando la persona tiene un exceso de confianza sobre sus propios juicios, su estimación de probabilidades falla de manera sistemática, debido a una sobrevaloración de las creencias iniciales, sin tener en cuenta lo que puede estar en contra de ellas.

3. **Sesgo de equiprobabilidad:** una persona que presenta este sesgo considera siempre que todos los sucesos son igualmente probables en cualquier experimento aleatorio. Según Lecoutre (1992) este error conceptual se debe tanto a fallos en razonamiento combinatorio como a la dificultad de la persona para asociar modelos combinatorios a situaciones donde interviene el azar.

4. **"Outcome approach":** cada repetición de un experimento aleatorio se considera de manera aislada, con interés en el resultado observado y sin guardar relación alguna entre repeticiones. Aquí las preguntas relacionas con probabilidad se interpretan de manera no probabilística, dado que la persona cree que no se quiere llegar a la probabilidad de ocurrencia de un suceso sino a predecir exitosamente el resultado de un ensayo simple.

5. **Falacia de la condicional transpuesta:** ocurre cuando la persona no tiene claridad entre el elemento condicionante y el condicionado, por ello considera $P(A|B) = P(B|A)$, discrimina inadecuadamente las dos direcciones de la probabilidad condicional. (Falk 1986 citado en Diaz, Batanero, Contreras y Roa 2012).

6. **Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes:** se tiene la creencia de que dos sucesos son independientes, si y sólo si, estos son excluyentes. Según Kelly y Zwiers (1986 citado en Díaz et al, 2012) esto se puede dar por imprecisión en el lenguaje cotidiano o por falta de comprensión en la persona acerca de la intersección de los sucesos en el espacio muestral.

Confusión entre probabilidad condicional y conjunta

Otra de las causas que genera que se den respuestas incorrectas en los problemas de probabilidad condicional se da por la confusión entre ésta y la probabilidad conjunta, Falk (1986) y Pollatsek (1987) mencionan que algunas de las dificultades que tienen las personas sobre probabilidad condicional se debe a la mala utilización del lenguaje en los enunciados de los problemas referentes a ella, dado que la manera de redacción implica que se cambie o no las tareas que se piden. Por ejemplo, el uso de la letra "y" en este tipo de problemas confunde a las personas entre la probabilidad conjunta y la condicional, por otro lado, está la creencia de interpretar la intersección de sucesos como condicionamiento. Lo anterior da paso a la siguiente falacia:

- **Falacia de la conjunción:** se considera menos probable la unión de dos sucesos o la ocurrencia de cada uno de ellos por separado que la intersección de los mismos. Según Tversky y Kahneman (citados en Contreras, 2011) este error se debe a creer que la conjunción tiene mayor probabilidad en la población que cada evento por separado. De hecho, cuando alguno de los sucesos tiene una probabilidad más alta que el otro, la intersección de los dos pareciera más probable que la del suceso con mayor probabilidad.

- **Falacia del eje de tiempo:** se tiene la creencia errónea de que un suceso que ocurre después de que otro ocurre, no puede afectar la probabilidad del primero. Gras y Totohasina (1995 Citado en Díaz et al 2012) establecen que los estudiantes asocian el orden temporal de los sucesos con el condicionamiento además "no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad"(p.12)

2.4 ANTECEDENTES DE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Osorio & Sierra (2012) estudian la incidencia de la estructura y el contexto en la formulación de problemas de probabilidad condicional de primer nivel y su influencia en el aprendizaje de los estudiantes. Para evidenciar los resultados que genera el contexto diseñaron tres actividades para un experimento de enseñanza, la primera relacionada con un contexto social, la segunda con un contexto industrial y la última con un contexto de diagnóstico (pruebas médicas). Estos autores concluyeron que el enunciado verbal es fundamental para la comprensión del tipo de probabilidad que se pide, y establecen que las tablas de doble entrada y el uso de representaciones gráficas son recursos eficientes para llegar al éxito en los resultados. En cuanto al contexto, mencionan que los problemas relacionados en el contexto industrial tienen mejor resultado que los basados en un contexto de diagnóstico.

Batanero, Contreras y Cañadas (2012) presentan una recopilación de investigaciones sobre la importancia de usar paradojas sencillas como situaciones motivadoras en clase y su influencia potencial en la comprensión de conceptos matemáticos por parte del estudiante así como de las relaciones entre estos conceptos y situaciones problema extra-matemáticos, al realizar una conexión entre la cotidianidad y la historia. Estos autores presentan y analizan la paradoja llamada *el dilema de los prisioneros* y algunas de sus variantes. Identifican los objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos). Muestran cómo esta paradoja evidencia la influencia de las creencias subjetivas en la asignación de probabilidades.

Batanero et. al. exponen posibles dificultades que se pueden presentar al momento de abordar las paradojas y sus implicaciones en la enseñanza. Finalmente, discuten el efecto de la manera de formular los problemas en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

En las fuentes consultadas, no se encontró alguna investigación en Colombia que relacione la enseñanza de la probabilidad condicional con paradojas, y sus posibles resultados en el aprendizaje. Por ello, este trabajo tiene como finalidad establecer la incidencia de la semántica y las posibles ventajas y dificultades que se pueden presentar en la solución de las paradojas.

2.5 LAS PARADOJAS COMO RECURSO DIDÁCTICO

La pregunta base de esta investigación fue: ¿Cómo disminuir los errores y dificultades de la interpretación de la probabilidad condicional? Autores como Tversky & Kahneman (1982), y Carles & Cerdán (2007) (citados por Osorio & Sierra, 2012) aseguran que tratar los aspectos semánticos en los problemas de probabilidad condicional logra disminuir algunos errores, y se podría llegar a una adecuada comprensión e interpretación del concepto en diferentes situaciones de incertidumbre.

Teniendo en cuenta lo anterior, una manera de avanzar en el aspecto semántico, es decir en la comprensión del significado de la probabilidad condicional, puede darse a través de la solución de diversas paradojas sencillas de la antigüedad.

Según Batanero, Contreras, Cañadas & Arteaga (2011), además de hacer parte de la historia de la probabilidad, las paradojas resultan interesantes y motivadoras, dado que desafían la lógica humana, tanto que llegaron a desafiar la lógica de grandes matemáticos. Según estos autores, la paradoja de *las tres tarjetas* es un excelente experimento para tratar la probabilidad condicional y los eventos dependientes.

Por otro lado, resulta sorprendente encontrar que las paradojas llegan a tener un efecto motivador en los estudiantes, lo cual facilita explorar la probabilidad condicional de manera formal (Konold 1994, citado por Batanero, Contreras, Cañadas & Arteaga, 2011), ya que implica una conciencia de las estrategias de razonamiento personal, dando paso a la capacidad de abstracción. El autor menciona que el uso de paradojas habitualmente genera un efecto motivador dado que se obtienen resultados inesperados y sorprendentes, que anima al estudiante a explorar el problema de manera formal.

Por su parte, Lesser (1998) menciona que al utilizar las paradojas de manera inteligente se apoya a una pedagogía constructivista por medio del aprendizaje a partir de las creencias a priori.

Lo anterior motivó a tomar, como recurso didáctico para este trabajo, una variante de la paradoja *la caja de Bertrand*[5], llamada *las tres tarjetas,* propuesta por Shannon y Weaver (1949, citados por Contreras, 2011) en el campo de la psicología para indagar los razonamientos de las personas al tomar decisiones. Esta variante se ha utilizado en investigaciones de didáctica de la estadística para evaluar la comprensión de conceptos probabilísticos, por ejemplo en Batanero, Godino y Roa (2004). Esta última versión se tradujo al portugués para analizar las respuestas dadas por estudiantes de 18 años con formación previa en probabilidad condicional (Ferreira & Fernandes, 2010). Como se

[5] Tenemos tres cajas y cada caja tiene dos cajones con una moneda cada uno: una caja contiene dos monedas de oro, otra caja dos monedas de plata, y la caja final con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma un cajón al azar, y resulta por ejemplo que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro? (Batanero, Contreras, Cezón & Cañadas, 2011.p. 6)

describirá en la sección 3.2, la actividad central de esta propuesta didáctica es una adaptación de una versión en español (Contreras, 2011, p. 315):

> Tomamos tres tarjetas. Misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y seleccionamos una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se muestra uno de los lados y se pregunta a los jugadores por el color de la cara oculta. Se repite el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Se hacen predicciones sobre el color del lado oculto y se gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta. ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?

2.6 METODOLOGÍA: INVESTIGACIÓN ACCIÓN

Este trabajo se desarrolló con la metodología de *investigación acción*, que permite explorar la práctica educativa dentro del aula, siendo el objeto principal mejorarla a través de las acciones, ideas y reflexión que se presentan en el quehacer docente (Carr y Kemmis, 1988). Las actividades se construyen como medio facilitador tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de la noción de la probabilidad condicional.

Según Suárez (2002), desde el ámbito histórico el objetivo primordial de la investigación acción es “resolver problemas prácticos y urgentes, adoptando los investigadores el papel de agentes de cambio, en colaboración directa con aquellas personas a quienes van destinadas las propuestas de intervención” (p.1). En nuestro caso, tal actividad se realiza a través de las tres intervenciones de la docente en un curso de *estadística y probabilidad,* con el fin plantear una propuesta a aquel objeto de investigación que se pretende modificar, en este caso la incidencia de la paradoja de las tres tarjetas como recurso didáctico de aprendizaje.

Se identificó una falencia (baja comprensión de independencia y dependencia de los eventos para resolver problemas) de la cual se ha planteado un problema específico (el poco tiempo que se destina a la enseñanza de la probabilidad condicional en las instituciones) y se llevó a cabo proceso de investigación con el fin de encontrar solución a dicho problema y a construir propuestas que modifiquen el objeto de investigación (la enseñanza de la noción de probabilidad condicional).

Cohen, Manion y Morrison (2004) señalan los rasgos que se debe asumir en la investigación acción:

- Es situacional: existe en un contexto específico, al cual se pretende dar solución.
- Es participativa: Los integrantes de cada equipo toman parte de la investigación.
- Es autoevaluadora: Constantemente se evalúan las modificaciones de la situación en cuestión, y de la misma manera se pretende mejorar la práctica, ya sea explícita o implícitamente.

Estos rasgos permiten un adecuado proceso de intervención e investigación en el aula, el análisis de cada actividad conlleva al diseño de la siguiente, tomando todos los aspectos que se presentan tanto positivos como negativos. Finalmente, es primordial que el docente, evalué la propuesta realizada, extrayendo las dificultades para posibles mejoras y las ventajas para seguir implementándolas.

2.7 OBJETOS MATEMÁTICOS – PROBABILISTICOS DENTRO DEL EOS

El Enfoque de Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) es un marco teórico propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), que surge dentro del seno de la didáctica de las matemáticas, con el objetivo de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático y las diversas herramientas del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para el análisis de esta propuesta, se utiliza una parte de dicho enfoque, referida al *significado de los objetos matemáticos primarios*. Desde el EOS, el significado de un objeto matemático, se determina a partir de un sistema de prácticas, que son realizados por personas o instituciones (grupo de personas con intereses comunes y desarrollo de prácticas matemáticas) al enfrentarse a una situación problema de la cual surge dicho objeto (Godino 2003, citado en Gómez, 2014).

El análisis de la implementación de la presente propuesta utiliza como herramienta la identificación de los siguientes objetos primarios presentes en la tarea probabilística:

Tabla 1 Objetos matemáticos primarios del EOS

OBJETOS	SIGNIFICADO
Lenguaje	Hace referencia a los términos, expresiones, notaciones, gráficos, utilizados para representar los datos del problema y/o darle solución al problema. Dentro del lenguaje para estudiantes de grado noveno se pueden utilizar por ejemplo, las representaciones tabulares y los diagramas de árbol
Situaciones	Se caracteriza por las aplicaciones, extra-matemáticas, tareas, ejercicios entre otros, que promueven una actividad matemática, Por ejemplo en probabilidad, problemas relacionados con los juegos de azar, análisis de los resultados obtenidos en una prueba médica.
Conceptos	Descripciones y/o definiciones de la temática involucrada en la situación problema. Se espera que el estudiante al resolver el problema recuerde y aplique la definición. Por ejemplo, los casos favorables de un suceso, espacio muestral, variable.
Procedimientos	Son las operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo que los estudiantes utilizan para resolver un problema. Por ejemplo un estudiante noveno grado puede resolver un problema de probabilidad condicional a través del diagrama de árbol que representa los posibles resultados en una situación.
Propiedades	Enunciados sobre los conceptos que se utilizan para resolver una situación problema probabilística. Un ejemplo puede ser, la diferencia entre los eventos relacionados con la probabilidad conjunta y condicional en una tabla de contingencia.
Argumentos	Son los enunciados que se utilizan para validar y/o explicar las propiedades o procedimientos utilizados para resolver un problema de probabilidad. Estos pueden ser, inductivos, deductivos, formales e informales.

CAPITULO 3: DISEÑO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Este capítulo se compone de tres partes, cada una ligada a una actividad. La primera de ellas es la prueba diagnóstica que se realiza con el fin de establecer los conocimientos previos que los estudiantes tienen sobre probabilidad. La segunda actividad denominada *la paradoja de las tres tarjetas* es el eje central de la presente propuesta, dado que a partir de ella se desea llegar a la comprensión de la noción de la probabilidad condicional. Finalmente está la actividad de cierre que permite evaluar parcialmente los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de las clases.

3.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA

Un cuestionario de pregunta abierta se diseñó con el fin de determinar conocimientos previos ligados a la noción de probabilidad condicional. El orden de los ítems está dado por un incremento en el nivel de complejidad y se basan en Batanero (2014), Contreras (2011), Díaz (2005, 2014).

El primer ítem, adaptado de un ejercicio de Díaz y De La Fuente (2004), tiene como propósito evaluar la manera de representar un espacio muestral a partir del diagrama de árbol, dado que será un insumo necesario para la actividad central en la presente investigación.

El segundo ítem, creación propia de la autora de la presente investigación, está compuesto por dos preguntas. La primera tiene como objetivo indagar la comprensión de los estudiantes sobre la probabilidad clásica, relacionando los eventos favorables con los eventos posibles, y determinando el espacio muestral numerable y finito en un experimento aleatorio. La segunda pregunta pretende evaluar la comprensión del concepto de dependencia en un experimento aleatorio y el procedimiento que siguen al identificar el espacio muestral restringido.

El tercer ítem, adaptado de una prueba realizada por Contreras (2011), busca evaluar conceptos relacionados con la probabilidad clásica, frecuencial y conjunta, a partir de la interpretación de una tabla de contingencia de doble entrada.

A continuación se presenta un análisis a priopi de la prueba. Primero se expone cada ítem con una posible forma de solución, los contenidos probabilísticos que los constituyen por medio de la guía de reconocimiento de objetos matemáticos de EOS, GROS propuesta por Godino, Batanero y Font (2007).

ANÁLISIS A PRIORI DEL PRIMER ÍTEM

Una empresa fabricante de celulares inteligentes escoge de manera aleatoria 4 celulares para verificar si cumplen o no con las condiciones de calidades requeridas para lograr obtener el certificado de calidad, y de esta manera establecer que fallas están presentando. Para ello clasifican con "S" si cumplen y "N" si no cumplen con las condiciones. ¿Cuáles son las posibles opciones que se pueden dar? (Usa el diagrama de árbol para dar la respuesta).

La Figura 1 es una posible representación de la respuesta esperada. El número de ramificaciones representa las cuatro etapas del experimento compuesto. El espacio muestral compuesto para este experimento será el conjunto *S= {DDDD, DDDN, DDND, DDNN, DNDD, DNDN, DNND, DNNN, NDDD, NDDN, NDND, NDNN, NNDD, NNDN, NNND NNNN}* que se obtiene:

Figura 1 Diagrama de árbol: celulares

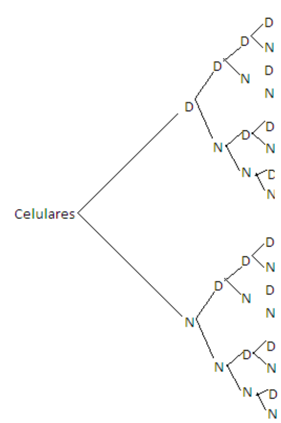


Tabla 2 Objetos matemáticos del primer ítem prueba diagnóstica

Objetos matemáticos que se ponen en juego	**Significado** (Interpretación que se espera del estudiante)
SITUACIÓN PROBLEMA	
Analizar los posibles resultados de un experimento aleatorio compuesto	Hallar las posibles opciones que se pueden dar al escoger cuatro celulares de manera aleatoria determinando si cada uno de ellos cumple o no con las condiciones de calidad, desglosando las posibilidades en un diagrama de árbol.
LENGUAJE	
Natural o cotidiano	El enunciado se expresa en términos de conocidos para los estudiantes. Los resultados posibles se describen con letras del alfabeto, que son conocidas por los estudiantes.
Gráfico	Diagrama de árbol. Representa el experimento y sus resultados
CONCEPTOS O DEFINICIONES	
Experimento Aleatorio	Escoger 4 celulares de manera aleatoria
Evento simple	Cada una de las ramificaciones del árbol sobre el total de opciones.
Espacio muestral	Todos los posibles resultados que se presentan al tomar de manera aleatoria 4 celulares
Evento compuesto	Las posibles combinaciones de escoger un celular defectuoso o no defectuoso en cuatro tomas aleatorias.
PROPIEDADES	
Espacio muestral discreto	Hay un número finito y numerable de elementos.
Número de etapas en el diagrama.	Desglosar cada una de las posibilidades en cada etapa.
PROCEDIMIENTOS	
ARGUMENTOS	
Deductivo	Uso del diagrama en árbol para la visualización de la estructura de la situación y para la obtención de la solución correcta.

ANÁLISIS A PRIORI DEL SEGUNDO ÍTEM

1. La empresa Alquería lanzará al mercado un nuevo producto; para promocionarlo, realizará un concurso en diferentes colegios de Bogotá. El cual consiste en lo siguiente: Cada vez que la empresa vaya a un colegio deberá escoger de manera aleatoria dos estudiantes por curso para tomarles una fotografía con el producto y

subirla a la siguiente página web https://www.facebook.com/Avenaalqueria/info/?tab=page_info; gana el concurso la fotografía que más *likes* tenga; en consecuencia, el curso al que pertenece la foto ganará Ipods para todos los estudiantes. Uno de los primeros colegios escogidos fue el *Grancolombiano*, curso 9E6, el cual consta de 9 hombres y 17 mujeres.

La dinámica para escoger a los estudiantes que aparecerán en la fotografía es así: el promotor de Alquería tiene en una urna el nombre de todos los estudiantes (facilitado por las directivas del colegio), introduce su mano en la urna y escoge un papel al azar; el nombre que aparece en este papel corresponde al primer protagonista de la foto; estando ya este nombre afuera, vuelve a meter mano en la urna y saca al azar otro papel, que corresponde al nombre del segundo integrante de la foto.

- ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione a una mujer, la primera vez que saca al azar un nombre de la urna?
- Supongamos que el primer alumno seleccionado es una mujer ¿Cuál es la probabilidad de que escoja a otra mujer en la segunda extracción?

Se espera que en la primera pregunta el estudiante: halle el cociente entre el número total de mujeres sobre el número total de estudiantes del curso, aplicando la regla de Laplace:

P (mujer)=9/26=0.34 en el primera extracción.

Para la segunda pregunta se espera que el estudiante restringa el espacio muestral inicial, dado que ya ha salido una persona que no vuelve a participar en la selección y además es mujer, aplicando nuevamente la regla de Laplace se obtiene:

P (mujer)= 8/25= 0.32 en la segunda extracción

Tabla 3 Objetos matemáticos del segundo ítem prueba diagnóstica

Objetos matemáticos que se ponen en juego	**Significado** (Interpretación que se espera del estudiante)
SITUACIÓN PROBLEMA	
Valorar probabilidades en un juego de azar compuesto por dos etapas sin reemplazamiento	Hallar la probabilidad de un evento simple (seleccionar a una mujer la primera vez) y un evento dependiente teniendo en cuenta que el espacio muestral cambia (escoger una mujer al azar sabiendo que la primera selección también fue una mujer que ya no entra en juego)
LENGUAJE	
Verbal con expresiones formales	Se usa la palabra probabilidad en las preguntas.
Simbólico	Expresión de sucesos y probabilidades
Numérico	Uso de fracciones para representar las probabilidad de cada suceso de interés.
CONCEPTOS O DEFINICIONES	
Experimento Aleatorio	Elegir al azar el nombre de un estudiante, entre los nombres que están en una urna.
Suceso o evento	Cada uno de los nombres de los estudiantes
Espacio muestral	Conjunto de nombres en la primera extracción
Espacio restringido	Conjunto de nombres en la segunda extracción
Dependencia de eventos	Extracción sin repetición del primer nombre altera la probabilidad de elegir nuevamente a una mujer en la segunda extracción
Probabilidad clásica: Proporción de casos favorables a posibles	Uso de la regla de Laplace: sucesos favorables / sucesos posibles, para dar solución a las preguntas
PROPIEDADES	
Equiprobabilidad	Cada uno de los nombres tiene la misma probabilidad de ser escogidos
Casos favorables Casos posibles.	Resultados que favorecen lo indicado o solicitado, en este caso "ser mujer". Conjunto de nombres.
Regla de Laplace	Nombres de mujeres sobre el número total de nombres del curso.
PROCEDIMIENTOS	
Cálculo formal de la probabilidad	Aplicar la regla de Laplace.

Reducción del espacio muestral	Restar un nombre del total de los mismos para dar solución a la segunda pregunta. .
ARGUMENTOS	
Deductivo	Solución de las preguntas

TERCER ÍTEM

3. La emisora *Oxigeno* preguntó a 2234 de sus oyentes por sus preferencias musicales (el ritmo que más les gusta), obteniendo los siguientes resultados:

	Hombres	Mujeres	Total
Le gusta el reggaetón	450	620	1070
Le gusta la salsa	410	384	794
Le gusta el merengue	140	230	370
Total	1000	1234	2234

Si elegimos al azar uno de estos oyentes:

- ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el reggaetón?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y le guste la salsa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y le guste el merengue?

Para la primera pregunta se espera que el estudiante identifique en la tabla el número de personas que les gusta el reggaetón correspondiente a la última columna de la primera fila y lo divida sobre el total de oyentes que se entrevistó:

P (guste el reggaetón)= 1070/ 2234=0.48

En la segunda pregunta se espera que los estudiantes identifiquen en la tabla el cruce entre la fila de los oyentes que les gusta la salsa con la columna de los hombres, la cual expresa la cantidad de hombres que les gusta la salsa y dividan esta cantidad sobre el total de oyentes entrevistados, hallando la probabilidad conjunta como se muestra a continuación:

$$P\ (H \cap S) = 410/2234 = 0.18$$

La tercera pregunta se puede responder siguiendo un proceso análogo al anterior, obteniendo:

$$P\ (M \cap Me) = 230/2234 = 0.1$$

Tabla 4 Objetos matemáticos del tercer ítem prueba diagnóstica

Objetos matemáticos que se ponen en juego	**Significado** (Interpretación que se espera del estudiante)
SITUACIÓN PROBLEMA	
Valorar probabilidades a partir de la información de una tabla de contingencias	Hallar probabilidades marginales y conjuntas identificando cada uno de los eventos preguntados en la situación.
LENGUAJE	
Verbal con expresiones formales	Se usa la palabra probabilidad en cada pregunta.
Tabular	Tabla de doble entrada.
Numérico	Representa las frecuencias absolutas y relativas observadas de los sucesos definidos, también sus probabilidades.
CONCEPTOS O DEFINICIONES	
Experimento Aleatorio	Preguntar al azar a los oyentes de la emisora.
Espacio muestral	Total de oyentes entrevistados
Evento	Escogencia de una persona en cada extracción.
Frecuencia absoluta de cada evento	Número de personas de cada categoría musical
Probabilidad frecuencial	Números de personas que le guste el reggaetón sobre el total de oyentes encuestados.
Probabilidad conjunta	Probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos (Que sea mujer y le guste el merengue y que sea hombre y les guste la salsa)
PROPIEDADES	
Medida de la probabilidad	Cociente de la fracción correspondiente al suceso pedido.
PROCEDIMIENTOS	
Operaciones aritméticas con números fraccionarios	Identificar la fracción correspondiente a la probabilidad de ocurrencia de un evento pedida y hallando el cociente, realiza la multiplicación de fracciones para hallar la probabilidad conjunta.
Interpretación de la tabla de contingencia	Identificar la probabilidad del suceso pedido según la información del cada fila, columna y celda
ARGUMENTOS	

Deductivo	Solución a cada pregunta según la información suministrada en la tabla.

3.2 PARADOJA: LAS TRES TARJETAS

La actividad central en esta propuesta se inspira en el artículo de Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras (2011), titulado *"La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas"* en el cual se exponen algunas paradojas de la historia como recurso para la enseñanza de la probabilidad. Se tomó una de las variantes de dicha paradoja llamada *las tres tarjetas*, y basado en ésta se construyó un taller cuyo propósito radica en la comprensión de la noción de condicionalidad.

El taller propuesto tiene siete ítems, cuya complejidad aumenta gradualmente, como se observa en el propósito de cada uno.

El primer ítem se propone para determinar si el estudiante hace uso de alguna noción de probabilidad para dar solución a la pregunta o si simplemente utiliza su intuición. Por otro lado permite establecer si la actividad funciona como recurso para el aprendizaje de la noción de condicionalidad, ya que en el análisis de las producciones de los estudiantes se compara lo que el estudiante responde al inicio y al final del taller.

El segundo ítem busca que el estudiante represente por medio del diagrama de árbol el espacio muestral del experimento aleatorio identificando cada una de sus etapas.

Los ítems tres y cuatro se proponen para que los estudiantes identifiquen la dependencia entre los eventos teniendo en cuenta los resultados de los ensayos que se han presentado con anterioridad y de esta manera logren identificar la probabilidad mayor de los eventos presentados.

Los ítems cinco y seis buscan que los estudiantes, trabajando en grupos, comparen los resultados obtenidos en cada ensayo y a partir de la discusión identifiquen el evento que tiene mayor probabilidad.

El séptimo ítem está compuesto por dos preguntas cuyo propósito es hallar dos probabilidades condicionales indicadas en el enunciado, se espera que utilicen el diagrama de árbol. Aquí se pretende que el estudiante logre restringir las posibilidades presentadas en el diagrama de árbol.

A continuación se presenta la actividad:

Vamos a considerar el siguiente experimento aleatorio:

Se tiene una caja encima de la mesa, dentro de la caja hay tres tarjetas. Una es de color azul en ambas caras, otra es de color rojo en ambas caras y otra es de color azul en una cara y rojo en la otra. Una persona toma de manera aleatoria una de las tres tarjetas, luego esa misma persona muestra una de sus caras a otra persona (en este caso los estudiantes). Esta segunda persona tratará de adivinar el color de la cara que no está viendo (le diremos cara oculta). Después de 10 segundos, se le mostrará la cara que estaba oculta, ahí finaliza el experimento y sabremos si adivinó.

Para verificar si todos tenemos claro el experimento vamos a ensayar dos veces, con una modificación: en el momento de adivinar el color de la cara oculta, ustedes levantan la mano cuando yo les pregunte quiénes creen que la cara oculta es de un color o de otro. Noten que cuando se repite el proceso, la tarjeta que se extrae se pone de nuevo en la caja antes del siguiente ensayo.

1. ¿Te inclinarías a elegir el mismo color de la cara mostrada o el color contrario? ¿Te daría lo mismo? ¿por qué?
2. Utilizando el diagrama de árbol, ¿cuáles son los posibles resultados que se pueden dar en el experimento?

Confirmado que se entendió el experimento, vamos a plantear un juego, repetiremos el experimento 12 veces (ensayos) y cada vez que aciertes ganas un punto.

3. En la siguiente tabla lleva el registro de tus predicciones (usa A para Azul y R para Rojo) y puntaje.

ENSAYO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Color de la cara vista													
Predicción de la cara oculta													
Color observado de la cara que estaba oculta													
PUNTOS (1 si acertaste con la predicción, 0 si no)													

4. ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? _____ Si sí usaste una estrategia ¿Cuál fue?
5. Reúnete con 4 compañeros más, ¿quién obtuvo mayor puntaje? ______________________
6. Teniendo en cuenta los puntajes ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?

7. Teniendo en cuenta los resultados de la tabla y/o el diagrama de árbol responde las siguientes preguntas:
   a. Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción)
   b. ¿Cuál es la probabilidad de acertar? (exprésalo en fracción)

ANÁLISIS A PRIORI

La Tabla 5 presenta los objetos matemáticos involucrados en cada uno de los ítems de esta actividad (pág. 36-37). Esta tabla se modificó y completó de la propuesta por Batanero, Contreras y Diaz (2011).

Tabla 5 Objetos matemáticos de la paradoja de las tres tarjetas

Tipo	Objetos matemáticos	Significado	Ítem (pregunta)						
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Situaciones-problemas	Utilizar información previa para predecir el resultado en una segunda etapa de un experimento compuesto cuyas probabilidades cambian según el resultado observado en la primera etapa	Identificar la dependencia de eventos en un experimento compuesto y las probabilidades condicionales que tiene asociadas	x	x	x	x		x	x
Lenguaje	Verbal	Explicación del juego y de la estrategia personal inicial	x		x				
	Gráfico	Diagrama de árbol		x					x
	Tabular	Tabla de resultados en el juego			x				
	Simbólico	Expresar probabilidades							x
	Numérico	Frecuencia (absoluta y relativa) de resultados; probabilidades de sucesos conjuntos y condicionados				x	x	x	
Conceptos	Experimento aleatorio compuesto	Tomar una tarjeta de la caja, mostrar una de sus caras, predecir el color de la cara oculta, finalmente mostrar la cara oculta.			x				
	Sucesos	Tarjetas (R-R) (A-A) (R-A)			x				x
	Espacio muestral	(R-R) (R-R) (A-A) (A-A) (R-A) (A-R)		x					
	Frecuencia relativa	$\frac{N° \ DE \ EXITOS \ DE \ PREDECIR \ LA \ CARA \ OCULTA}{N° \ DE \ ENSAYOS}$			x				
	Convergencia	Tendencia de la frecuencia relativa de un suceso a un valor fijo (su probabilidad teórica)			x	x			
	Intersección de sucesos	Conjunto común de sucesos.							x
	Probabilidad clásica	Medida de la probabilidad de casos favorables a posibles							x
	Estimación frecuencial	Asignación de la frecuencia relativa en el total de ensayos.						x	
	Probabilidad condicional	Probabilidad de ocurrencia de un suceso respecto a la ocurrencia de otro.							x
	Regla de la suma	Probabilidad de ganar.	x						x
	Regla del producto	Probabilidad conjunta, dependencia de eventos							x

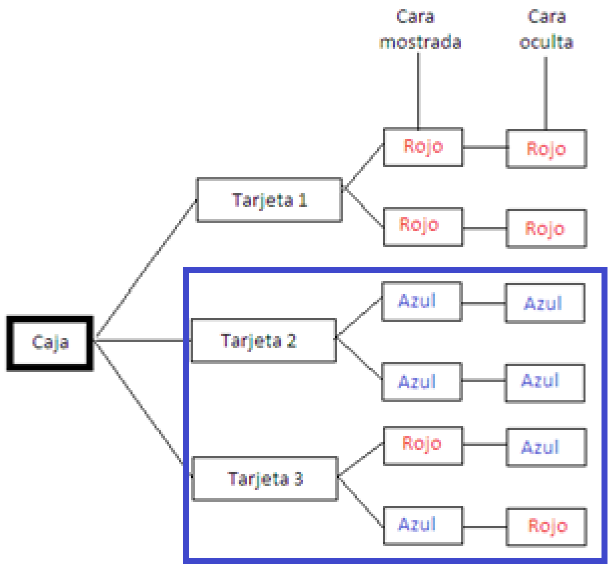
	Variable aleatoria	Número de aciertos en *n* repeticiones del experimento aleatorio.			x				
	Distribución discreta uniforme	Conjunto finito de valores equiprobables, en el experimento aleatorio		x	x				
Procedimientos	Enumeración del espacio muestral.	Establecer el conjunto de elementos simples.		x					
	Construcción de un diagrama de árbol.	Desglosar cada una de las etapas		x					
	Cálculo de probabilidades	Aplicar la regla de Laplace, regla del producto.							x
Propieda-des	Los experimentos son dependientes	El número de caras azules depende de la tarjeta elegida en primer lugar.			x				x
	Reducción del espacio muestral	Conocer que una cara cambia el espacio muestral inicial							x
Argumen-tos	Razonamiento deductivo	Demostración de la solución							x
	Razonamiento empírico	Comparar aciertos (o fallos) cuando se usan distintas estrategias.					x	x	

Algunas posibles soluciones que permiten encontrar la estrategia ganadora, en el sentido de identificar el resultado más probable, se describen a continuación:

Solución a través del diagrama de árbol

El experimento aleatorio consta de tres etapas, como se visualiza en la Figura 2 la primera corresponde a elegir una de las tres tarjetas (R–R) (A–A) (R–A); la segunda, consiste en mostrar una de las caras de la carta elegida, y la última etapa dar a conocer el color que queda en la cara oculta.

Figura 2. Solución a través del diagrama de árbol



El taller establece información adicional (condición), una de las caras que se muestra es azul, por lo cual se está pidiendo hallar una probabilidad condicional, como se evidencia en el árbol de la figura 2 si la cara que se muestra es azul se restringe el espacio muestral quedando tres posibilidades:

- Dos posibilidades para la tarjeta 2 (azul- azul): si se muestra la primera cara azul (segunda etapa del árbol) la cara oculta también será azul (tercera etapa del árbol). Si se muestra la segunda cara azul de la tarjeta, la cara oculta también será azul.
- Una posibilidad para la tarjeta 3 (rojo-azul): si se muestra la cara azul de la tarjeta, la cara oculta será roja.

En consecuencia, la probabilidad de que la cara sea roja si ya se mostró una cara azul será de 1/3 dado que hay tres casos posibles donde la cara mostrada es azul, dos para la tarjeta (Azul | Azul) y uno para tarjeta (Azul | Roja) y un caso favorable de que sea roja. Y la probabilidad de que la cara oculta sea azul dado que la mostrada es azul será de 2/3, que corresponde a la probabilidad de elegir el mismo color de la cara mostrada.

Solución errónea a través de la intuición

Considerar que inclinarse por el mismo color al de la cara mostrada o por el color contrario es igualmente probable, es *P (R|R)= P(R|A), P(R|R)= P(A|R), P(A|A)=P(R|A),* *P(A|A)= P(A|R),* todas ellas iguales a ½, dado que al sacar por ejemplo una cara azul sólo hay dos opciones: que la tarjeta sea (A|A) o (R|A). Se razonaría de manera análoga si se sacara el color rojo.

<u>Solución a través de fórmula:</u>

La siguiente solución se presenta a partir de las fórmulas de probabilidad como parte de la formalidad matemática del docente (Ball, Thames y Phelps, 2008), sin embargo, es importante resaltar que no se espera que los estudiantes lo resuelvan con dicha formalidad, dado que este trabajo pretende llegar únicamente a la noción de probabilidad condicional.

Se calculan las siguientes probabilidades a través de la regla del producto, teniendo en cuenta que la letra A representa la cara azul y la letra R la cara roja

1) $P(R \cap R) = P(R) * P(R \mid R) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2) $P(A \cap A) = P(A) * P(A \mid A) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

3) $P(R \cap A) = P(R) * P(A \mid R) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

4) $P(A \cap R) = P(A) * P(R \mid A) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Al aplicar la definición de la probabilidad condicional para el primer caso se tiene que:

$$P(R \mid R) = \frac{P(R \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R \cap R)}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{P(R \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

De la igual manera se puede calcular el resto de probabilidades condicionadas, en consecuencia se obtiene que hay mayor probabilidad de ganar el juego, si se elige el mismo color de la cara mostrada.

3.3 ACTIVIDAD DE CIERRE

¿Las pruebas médicas para VIH son confiables?

Esta actividad compuesta de ocho ítems se construye con el propósito de ampliar las situaciones donde es útil la probabilidad condicional. En este caso se asoció dicha probabilidad con los resultados de las pruebas de VIH. De manera adicional la actividad busca evaluar la compresión que tienen los estudiantes sobre la probabilidad clásica, frecuentista y conjunta, trabajadas durante el desarrollo de la electiva (ver pág. 7).

Los ítems que se muestran a continuación se diseñaron de menor a mayor complejidad.

El primer ítem tiene como propósito evaluar el conocimiento que el estudiante tiene acerca de la probabilidad clásica, reconociendo el espacio muestral y los eventos favorables de la situación presentada.

El segundo ítem indaga sobre el conocimiento que el estudiante tiene sobre los falsos positivos y negativos en una prueba de VIH, con el fin de contextualizarlos sobre el tema.

El tercer ítem busca que los estudiantes pasen de un lenguaje verbal a uno numérico, extrayendo los datos de información presentada, ubicándolos en una tabla de contingencia.

El cuarto y quinto ítem tienen como objetivo evaluar el conocimiento que los estudiantes tienen acerca de la probabilidad conjunta partiendo de la información dada en una tabla de doble entrada.

El sexto y séptimo ítem se proponen para evaluar la comprensión que los estudiantes tienen sobre la probabilidad condicional y de esta manera establecer si realizan una adecuada reducción del espacio muestral de acuerdo a la información adicional de la pregunta dada.

El último ítem tiene como propósito determinar si los estudiantes distinguen el rol que tiene cada suceso en una probabilidad condicional a partir de la información que se presenta en la pregunta, identificando en una tabla de contingencia el condicionante y el condicionado de manera correcta.

A continuación se presenta el diseño de la actividad presentado a los estudiantes:

¿Las pruebas médicas para VIH son confiables?

El VIH o Virus de la Inmunodeficiencia Humana es un microorganismo que ataca al Sistema Inmune de las personas, debilitándolo y haciéndole vulnerable ante una serie de infecciones, algunas de las cuáles pueden poner en peligro la vida. Se caracteriza clínicamente por una infección asintomática durante un período variable de tiempo debido al equilibrio que se produce entre replicación viral y respuesta inmunológica del paciente. En etapas avanzadas de la infección se rompe este equilibrio aumentando la Carga Viral (CV) y deteriorando la función inmune, lo que favorece la aparición de otras infecciones, clásicas y oportunistas, y de tumores, llegando a la etapa de SIDA (Síndrome de la Inmunodeficiencia Adquirida).[6]

1. En Colombia durante el período 2009-2010, a 423.393 mujeres en control prenatal se les realizó el examen del VIH, de ellas 644 padecían el virus[7]. Si escogiéramos al azar a una de estas 423.393 mujeres ¿Cuál es la probabilidad de que tenga VIH?

2. Supongamos que tenemos una prueba para diagnosticar VIH (la prueba ELISA). Como sabes las pruebas médicas no son infalibles (pueden fallar), a estos fallos se les denomina falso positivo o falso negativo. ¿Sabes qué es un falso positivo? ____ ¿Sabes qué es un falso negativo? _____ Si lo sabes, explica en tus palabras lo que entiendes por cada uno de estos términos.

3. Un estudio realizado en 2009[8] por la Universidad Cooperativa de Colombia en Medellín determinó: En un grupo de estudio de 5.850 personas que se hicieron el examen, la prueba dio resultado positivo en 149 personas, de las cuales se comprobó que 106 lo padecían. Por otro lado, de las pruebas que salieron negativas se concluyó que 6 personas si lo padecían.

Trata de organizar la información anterior en la siguiente tabla:

	Prueba +	Prueba -	Total
Padecen VIH			
No padecen VIH			
Total			

Teniendo en cuenta los resultados de la tabla:

[6] Información tomada de http://www.supersalud.gob.cl/difusion/572/w3-article-592.html
[7] Información obtenida de https://www.minsalud.gov.co/Paginas/ColombiacumpleconindicadorespositivosenlaluchacontraelVIHSida.aspx
[8] http://www.scielosp.org/pdf/rsap/v15n6/v15n6a12.pdf

4. ¿Qué probabilidad hay de tener el virus y que la prueba marque positivo?
5. ¿Qué probabilidad hay de no tener el virus y que la prueba marque positivo?
6. Regularmente, cuando la prueba marca positivo lo que interesa saber es ¿Qué probabilidad hay de tener VIH?
7. De forma análoga, cuando la prueba marca negativo lo que interesa saber es ¿Qué probabilidad hay de tener VIH?
8. Para saber qué tan buena es la prueba interesa saber: si la persona sufre de VIH ¿Cuál es la probabilidad hay de que la prueba marque positivo?

ANÁLISIS A PRIORI

A continuación se presenta un análisis a priopi de la actividad final, en primer lugar se encuentran los contenidos probabilísticos que constituyen cada ítem por medio de la guía de reconocimiento de objetos matemáticos de EOS, GROS propuesta por Godino, Batanero y Font (2007) y en segundo lugar una posible forma de solución para cada uno, finalmente se presentan las categorías de análisis de los ítems.

Tabla 6 Objetos matemáticos de la actividad de cierre

Tipo	Objetos matemáticos	significado	Ítem							
			1	2	3	4	5	6	7	8
Situación-problema	Utilizar información previa para valorar la verosimilitud de un evento (padecer o no una enfermedad), cuya probabilidad cambia según el resultado observado en una prueba (médica).	Analizar la confiabilidad de una prueba de VIH	x	x	x	x	x	x	x	x
Lenguaje	Verbal	Descripción de las situaciones presentadas	x		x					
	Tabular	Tabla de contingencia de los resultados de la prueba.			x					
	Simbólico	Expresar con la notación adecuada las probabilidades de cada pregunta.	x			x	x	x	x	x
	Numérico	Frecuencias (absolutas y relativas) de los resultados de la prueba de VIH en los pacientes; probabilidades de sucesos de interés			x					
Conceptos	Experimento aleatorio	Escoger al azar una de las pacientes embarazadas que se realizaron la prueba.	x							
	Probabilidades marginal y conjuntas	P(VIH): probabilidad de tener VIH. $P(+ \cap VIH)$:probabilidad de que	x			x	x	x	x	

		la prueba marque positive y la persona tenga VIH. $P(- \cap VIH)$: probabilidad de que la prueba marque negativo y la persona tenga VIH. $P(+ \cap VIH')$: probabilidad de que la prueba marque positivo y la persona no tenga VIH. $P(- \cap VIH')$: probabilidad de que la prueba marque negativo y la persona no tenga VIH.								
	Sucesos	-Ser portador de VIH -No ser portador de VIH -Obtener un resultado positivo en la prueba de VIH -Obtener un resultado negativo en la prueba de VIH.			x	x	x	x	x	x
	Espacio muestral	Total de personas que se realizaron la prueba de VIH	x		x					
	Frecuencia absoluta (de cada suceso de interés)	Conteo de personas que presentan cierta característica (la de cada suceso de interés)			x					
	Intersección de sucesos	Conjunto común de sucesos.			x	x	x			
	Probabilidad clásica	Razón entre casos favorables y casos posibles	x							

Tipo	Objetos matemáticos	significado	Ítem							
			1	2	3	4	5	6	7	8
Conceptos	Probabilidad condicional	$P(VIH \mid +)$: probabilidad de tener VIH dado que la prueba marca positivo. $P(VIH \mid -)$: probabilidad de tener VIH dado que la prueba marca negativo. $P(VIH' \mid +)$: probabilidad de no tener VIH dado que la prueba marca positivo. $P(VIH' \mid -)$: probabilidad de tener no tener VIH dado que la prueba marca negativo. $P(+ \mid VIH)$: probabilidad que la prueba marque positivo dado que la persona tiene VIH. $P(- \mid VIH)$: *probabilidad que la prueba marque negativo dado que la persona tiene VIH.* $P(+ \mid VIH')$: *probabilidad que la prueba marque positivo dado que la persona no tiene VIH.* $P(- \mid VIH')$: *probabilidad que la prueba marque negativo dado que la persona no tiene VIH.*						x	x	x

Procedimientos	Organización de frecuencias absolutas en una tabla de contingencias	Extraer los datos presentados en la descripción de la situación y ubicarlos en la tabla de doble entrada			x					
	Reducción del espacio muestral	Identificar que el espacio muestral se reduce al dar una información adicional en la pregunta.						x	x	x
	Cálculo de probabilidades	Aplicar la regla de Laplace, según los datos suministrados en tabla de contingencia.	x			x	x	x	x	x
Argumentos	Razonamiento deductivo	Resolución de las preguntas.	x	x	x	x	x	x	x	x

Descritos los objetos matemáticos de la actividad, se procede a plantear una posible solución formal para cada ítem.

Para el primer ítem se espera que el estudiante identifique el número de mujeres que padecen el virus y el número de mujeres que se realizaron la prueba, y finalmente hallen el respectivo cociente.

$$P(VIH) = \frac{644}{423.393} = 0{,}0015$$

En el segundo ítem, un falso positivo se refiere a la probabilidad de que el resultado de positivo dado que la persona está sana. De manera análoga un falso negativo se refiere a la probabilidad de que la prueba dé negativo dado que la persona padece el virus. Para el tercer ítem se espera que el estudiante extraiga y ubique los datos de la siguiente manera:

	Prueba +	Prueba -	Total
Padecen VIH	106 c_1	6 c_4	112 c_7
No padecen VIH	43 c_2	5695 c_5	5738 c_8
Total	149 c_3	5701 c_6	5850 c_9

Datos de las personas que se realizaron el examen del VIH

Se espera que el estudiante comprenda que dos eventos pueden suceder al mismo tiempo (que el paciente tenga el virus y la prueba haya arrojado un resultado positivo) y por tanto identifique el cruce entre la fila de los pacientes que padecen VIH con la columna de los pacientes que obtuvieron resultado positivo en la prueba (c_1) y lo dividan sobre el total de personal que se realizaron la prueba (c_9).

$$P\ (VIH \cap\ +)= \frac{106}{5850} = 0,018$$

De manera análoga se espera que realicen el mismo razonamiento en el quinto ítem:

$$P\ (VIH'\ +)= \frac{43}{5850} = 0{,}007.$$

Ahora bien, para la sexta y séptima pregunta se espera que el estudiante identifique que el número de posibilidades totales se ha restringido y note la dependencia entre los dos eventos, hallando en el sexto ítem el cociente entre el número de pacientes que están enfermos y la prueba arrojo un resultado positivo (c_1) con el número total de personas que marcaron positivo en la prueba (c_3), y en el séptimo ítem el cociente entre el número de pacientes que están enfermos y la prueba arrojo un resultado negativo (c_4) con el número total de personas que marcaron negativo en la prueba (c_6).

$$P\ (\ VIH|+) = \frac{106}{149} = 0{,}71$$

$$P\ (VIH|-)= \frac{6}{5701} = 0{,}001$$

El último ítem se refiere a otra probabilidad condicional, en la cual se intercambian los roles de los sucesos condicionante y condicionado preguntados en el sexto ítem. Se espera que el estudiante halle el cociente entre el número de pacientes que están enfermos y la prueba arrojo un resultado positivo (c_1) con el número de pacientes que realmente padecen el virus (c_7) utilizando los datos de las personas que se realizaron el examen del VIH (Ver pág 46)

$$P\ (+\ |VIH)= \frac{106}{112} = 0{,}98$$

CAPITULO 4: IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

El capítulo presenta una descripción del desarrollo de la propuesta en cada una de las sesiones realizadas; luego se muestra el análisis de las producciones (soluciones) de los estudiantes de las tres actividades propuestas, exponiendo las categorías de análisis de las mismas.

4.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIZACIÓN DE LAS CLASES

Antes de la aplicación de la presente propuesta fue necesario incluir en las clases de la electiva "desarrollo del pensamiento aleatorio" actividades relacionadas con la probabilidad clásica, frecuencial y conjunta. Se trabajó con tablas de contingencia, histogramas y diagramas de árbol. Lo anterior se realizó con el fin de construir algunos conceptos de probabilidad importantes para comprensión de la probabilidad condicional dada su complejidad.

En la primera fase de abordaje propuesta por Mason, Burton & Stacey (1982) se implementó la prueba diagnóstico de manera individual, cada estudiante tuvo un tiempo estimado de 80 minutos para desarrollar la totalidad de la misma. Al finalizar la prueba se socializó cada uno de los ítems estipulados de acuerdo a las respuestas realizadas por los estudiantes. En este momento se despejaron dudas y se corrigieron errores presentados. Luego de realizar el análisis de la prueba no se consideró necesario realizar actividades complementarías antes de aplicar *la paradoja de las tres tarjetas* puesto que se evidenció que la mayoría de los estudiantes tuvo un buen desempeño en la prueba.

En la fase de ataque (ver pág. 12) se implementó la actividad *de las tres tarjetas;* en el primer momento se leyó el enunciado de juego y se aclararon dudas en cuanto a éste; la primera parte se realizó de manera individual; al llegar a la construcción del diagrama de árbol, varios estudiantes presentaron confusión en cuanto al número de etapas que tenía éste diagrama, por lo cual se volvió a leer el enunciado y enfatizar en cada etapa del experimento. Al empezar las predicciones de la cara oculta en el juego, los estudiantes se

mostraron bastante entusiasmados, pronunciaban en voz alta sus apuestas, lo escribían en su hoja y seguidamente la docente mostraba la cara oculta, los últimos 4 ensayos estuvieron a cargo a los mismos estudiantes.
Al terminar los doce ensayos se realizaron cinco más, que aunque no quedaron registrados permitían que se afianzara la estrategia de cada uno.

Seguido a ello, los grupos de trabajo socializaron sus resultados y obtuvieron una estrategia final, finalmente para el cálculo de las probabilidades condicionales, la docente tuvo que hacer énfasis en que se analizara cuidadosamente el diagrama de árbol y a partir de éste se obtuvieran resultados.

Finalmente en la fase de revisión se aplicó la actividad sobre *las pruebas de VIH.* En un primer momento, algunos estudiantes preguntaron si los datos puestos en los enunciados eran reales; cuando se les preguntó si tenían conocimiento sobre falsos positivos y falsos negativos, se mencionaron algunas conjeturas pero ninguna cierta, por tanto la docente explicó los dos conceptos, lo que condujo a un debate sobre la veracidad de dichas pruebas. En este momento un estudiante toma la vocería y dice que para continuar el debate es mejor terminar la actividad de analizar la confiabilidad de la prueba teniendo en cuenta los resultados que se obtienen al calcular las probabilidades pedidas en la guía, de esta manera se inicia con el cálculo.

Es importante mencionar que al terminar de colocar los datos en la tabla de contingencia, hubo un espacio socializador de ésta, ya que si la tabla no se presentaba de manera correcta, todo el cálculo tendría resultados erróneos. Al terminar la actividad los estudiantes extraen sus propias conclusiones sobre las pruebas y de manera general determinan, que es conveniente realizar la prueba mínimo dos veces cuando ésta arroja un resultado negativo.

4.2 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

A continuación se presenta el análisis de las producciones de los estudiantes, clasificados en categorías para cada ítem, propuesto en la prueba diagnóstica (ver págs. 32-37, o Anexo 1). Estos análisis se realizan con base en los referentes teóricos presentados en el capítulo dos. La actividad se realizó con 26 estudiantes del grupo 9E6.

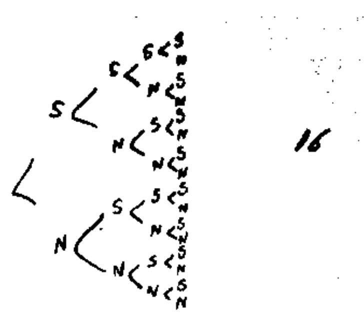
Primer ítem: construcción diagrama de árbol. (Ver enunciado en pág. 81)

Tabla 7 Categorías de análisis: construcción del diagrama de árbol de la prueba diagnóstica

	fr
Construye de manera adecuada el diagrama, hallando todas las posibles combinaciones.	16
Hace cuatro diagramas, un diagrama para cada celular.	1
Realiza dos diagramas, una para defectuosos (cumple todas las condiciones de calidad) y otro para no defectuosos (no cumple con todas las condiciones de calidad).	4
Omite la última etapa del experimento.	1
Realiza el diagrama de manera inadecuada	4
TOTAL	26

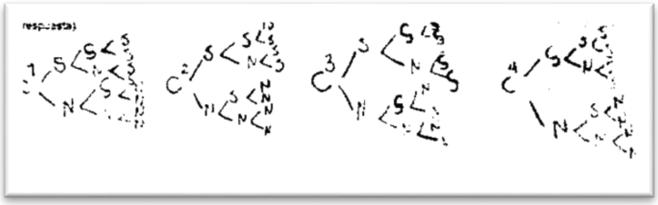
La mayoría de estudiantes solucionan en forma correcta este ítem, obtienen el espacio muestral del experimento a partir de las cuatro etapas que presenta el mismo y expresan las 16 posibles combinaciones que se pueden presentar, de ello se deduce que hay una adecuada comprensión y relación entre el experimento propuesto y su respectivo diagrama de árbol. (Fischbein 1975). Un ejemplo lo encontramos en la figura 3, se recuerda que cada celular se clasifica en “S” si cumple todas las condiciones y “N” si no las cumple en su totalidad.

Figura 2 Ejemplo de diagrama de árbol correcto



Otra parte del grupo comete errores en la construcción del diagrama. En la figura 4 se observa cuatro diagramas compuestos pero sin terminar, de lo cual se puede deducir que hay una idea de experimento compuesto incompleta. Por otro lado, a los estudiantes que no reconocen claramente las etapas dentro del experimento, posiblemente les falta comprensión del experimento compuesto y por el contrario lo perciben como experimentos simples, esto puede ser un indicio de un problema en la composición de las etapas del experimento.

Figura 3 Ejemplo de diagrama por cada etapa



Segundo ítem: probabilidad a priori y dependencia de eventos. (Ver enunciado en págs. 81-82)

Tabla 8 Categorías de análisis: probabilidad a priori

Primera pregunta	fr
Identifica correctamente el espacio muestral Asigna la probabilidad clásica a la elección al azar de una mujer sobre el total de estudiantes del curso.	26
Confunde el valor del numerador con el denominador en la regla de Laplace.	0
Únicamente identifica el número total de mujeres	0
TOTAL	26

El 100% de los estudiantes responden de forma acertada (figura 5), identifican correctamente la relación entre el número de eventos favorables a elegir una mujer y el tamaño del espacio muestral (total de estudiantes que participan en el concurso). En cuanto al cálculo de la probabilidad, hacen uso de la regla de Laplace.

Figura 4 Ejemplo de una solución correcta probabilidad a priori

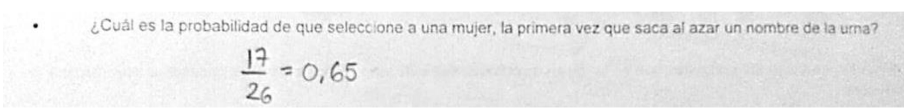


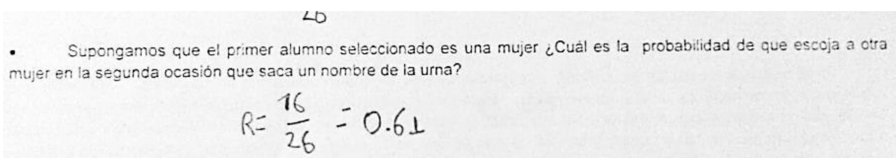
Tabla 9 Categorías de análisis: dependencia de eventos

Segunda pregunta	**fr**
Reconoce el cambio en el espacio muestral ("identificar" el espacio muestral restringido-e.m.r.) para hallar la probabilidad (como consecuencia se identifica la dependencia estadística en los dos sucesos).	19
Fallo al determinar el espacio muestral restringido (muestreo sin reemplazamiento).	4
Confunde los eventos con el espacio muestral	3
TOTAL	26

El 73% de los estudiantes (19) identifica un cambio en el denominador respecto a los casos posibles de que se escoja un nombre, identifican que el primer evento brindó una información sobre la ocurrencia del siguiente evento (dependencia de eventos) y por tanto expresa el cardinal correcto del espacio muestral. En este caso, los estudiantes reconocen el cambio en las probabilidades cuando se realiza un muestreo sin reemplazamiento, y empieza a reconocer que sucesos consecutivos pueden o no ser dependientes según la información que se presenta y el tipo de experimento (Jones, Thornton, Langrall y Tarr 1999).

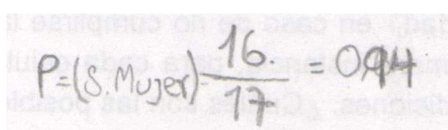
Un 15% de los estudiantes (figura 6) utilizan el mismo denominador en el cálculo de la probabilidad en la segunda etapa, no identifican el cambio del total de casos posibles en un experimento compuesto; aunque identifican los casos favorables de que la persona escogida sea nuevamente mujer, no tienen en cuenta esta información para expresar el espacio muestral restringido. Por otro lado, puede que esto se deba a la incomprensión del experimento compuesto, ya que únicamente se basan en la equiprobabilidad de los eventos en el experimento simple (Lecoutre, 1992).

Figura 5 Ejemplo de la falta de restricción del espacio muestral



Tres estudiantes presentan confusión entre los casos favorables de un evento con el espacio muestral (figura 7); de manera inadecuada establecen una relación entre el número de casos de que sea mujer teniendo en cuenta que el nombre de una mujer ya ha salido con el número total de personas.

Figura 6 Ejemplo de la no identificación de casos posibles



Al momento de socializar los resultados, cuando se preguntó a los estudiantes porqué establecieron esta relación uno de ellos respondió:

“pensé que debía restar el nombre de una mujer y dividirlo por el total de mujeres”

De este tipo de razonamiento se puede deducir que posiblemente el estudiante omite que el espacio muestral está conformado por dos subconjuntos (nombres de hombres y nombres de mujeres), en consecuencia la relación entre casos favorables y espacio muestral es inadecuada.

A manera de conclusión se ven indicios de que la noción de experimento compuesto aún no es lo suficientemente clara y por tanto no se establecen adecuadamente las etapas del mismo y la dependencia de los eventos.

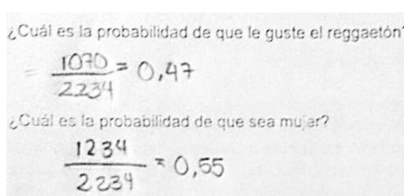
Tercer ítem: Tablas de doble entrada – probabilidad a priori y conjunta. (Ver enunciado en pág. 82)

Tabla 10 Categorías de análisis: probabilidad clásica en tablas de contingencia

Primera y segunda pregunta	fr
Identifica la probabilidad clásica de la situación. Utiliza la regla de Laplace para dar la solución correcta.	15
Identifica correctamente el espacio muestral, pero no reconoce los casos favorables de la situación.	8
Fallo en la identificación de casos favorables o de casos posibles en la regla de Laplace	2
Confunde la probabilidad clásica con la condicional	1
TOTAL	26

La mayoría de estudiantes respondieron de manera correcta, como se evidencia en la figura 8, calculando la probabilidad pedida en las dos preguntas; es decir, que han identificado adecuadamente los casos favorables y los casos posibles, en este sentido tienen la capacidad de leer e interpretar la tabla de contingencia.

Figura 7 Ejemplo de probabilidades clásicas



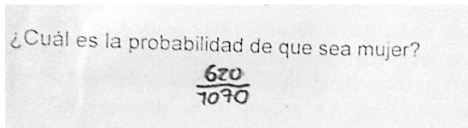
Respuestas incorrectas

Dentro de las respuestas incorrectas surgen las siguientes variantes en cuanto al tipo de razonamiento que los estudiantes utilizan para expresar probabilidades a priori a partir de una tabla de contingencia:

Confusión entre la probabilidad clásica y conjunta (Estrada y Díaz 2007): en este caso los seis estudiantes confunden la probabilidad de que sea mujer con la probabilidad de que sea mujer y le guste el reggaetón, posiblemente esto se puede dar a la dificultad de leer la tabla de doble entrada, dado que, aunque identifica correctamente el tamaño del espacio muestral no identifica la frecuencia marginal pedida.

Confusión entre la probabilidad clásica y condicional (Estrada y Díaz 2007): un ejemplo de ello se observa a continuación:

Figura 8 Ejemplo de probabilidad clásica incorrecta



En la figura 9 se da como respuesta una probabilidad condicional, en este caso la probabilidad de que, sea mujer sabiendo que le gusta el reggaetón. El estudiante demuestra que carece de la capacidad para *“leer entre datos” (Cursio 1989)* dado que no logra encontrar e interpretar los datos de la tabla para encontrar la frecuencia marginal.

Fallo en la identificación de casos favorables o de casos posibles: un estudiante (figura 10), no considera uno de los axiomas de la probabilidad, referido a que la medida de la probabilidad debe estar entre 0 y 1. Posiblemente memoriza la regla de Laplace sin comprender el significado de la misma.

Figura 9 Ejemplo de fallo en la identificación de casos favorables o de casos posibles

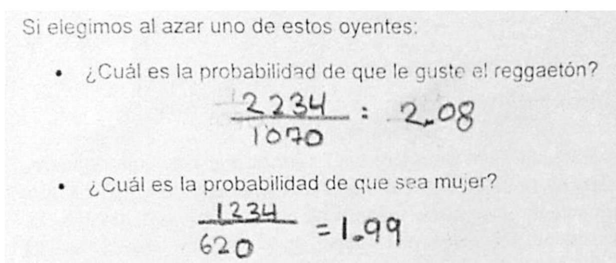


Tabla 11 Categorías de análisis: probabilidad conjunta en tablas de contingencia

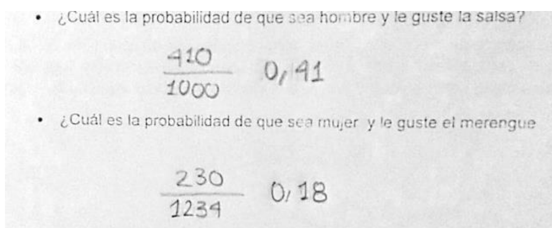
Tercera y cuarta pregunta	**fr**
Identifica la probabilidad de dos eventos simultáneos	21
Utiliza la notación de la intersección de suceso.	
Asigna correctamente las probabilidades, sin embargo falla en el cálculo.	1
Confunde probabilidad conjunta y condicional	4
TOTAL	26

El 81% de los estudiantes logra "leer entre datos" alcanzando el segundo nivel propuesto por (Cursio 1989), logran identificar las frecuencias absolutas referidas a la intersección de dos eventos y las relacionan con el espacio muestral requerido, aplicando la regla de Laplace para expresar y calcular la probabilidad.

Respuestas incorrectas

Confusión entre la probabilidad conjunta y condicional: cuatro estudiantes caen en el mismo error, dando como respuesta una probabilidad condicional en lugar de una probabilidad conjunta. En la figura 11 se evidencia como el estudiante calcula la probabilidad de que le guste la salsa sabiendo que es hombre y la probabilidad de que le guste el merengue sabiendo que es mujer, y no la probabilidad de que a un hombre le guste la salsa y que a una mujer le guste el merengue respectivamente. El estudiante identifica el tamaño del espacio muestral inadecuadamente, escogiendo un subconjunto de la muestra (hombres o mujeres) en lugar de la muestra completa.

Figura 10 Ejemplo de confusión entre la probabilidad conjunta y condicional



Es importante resaltar que cuando se aplicó la prueba los estudiantes no tenían ningún conocimiento sobre probabilidad condicional y aunque las expresiones dadas representan probabilidades condicionales, ellos aún no tienen conciencia de ello.

Consideración general de los tres ítems

Respecto al lenguaje: en el desarrollo de cada uno de los ítems los estudiantes no usaron símbolos para representar sucesos y probabilidades, aunque en muchos casos la solución es correcta; posiblemente esto se dé por la falta de costumbre en los estudiantes de denotar el concepto requerido con notación simbólica (Contreras 2011).

En cuanto al lenguaje numérico todos hacen uso de la fracción para representar la probabilidad de cada suceso.

4.3 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE LA PARADOJA: LAS TRES TARJETAS

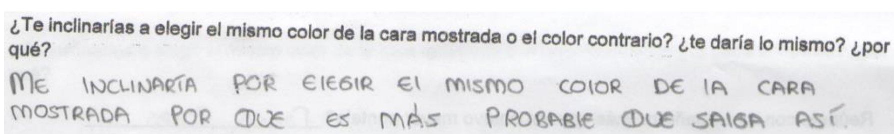
Primer ítem

Tabla 12 Categorías de análisis: elección del color a priori

	fr
Escoge el color de la cara mostrada.	14
Escoge el color contrario a la cara mostrada.	0
Considera que al escoger cualquier color puede ganar porque es un juego de azar.	12
TOTAL	26

El 54% de los estudiantes (14) expresan que se inclinarían por elegir el color de la cara mostrada, con dos tipos de argumentos. En la mayoría éstos casos (10 estudiantes) se observa un razonamiento probabilístico incipiente, utilizan frases como “elegiría el mismo color porque es más probable” sin realizar un proceso probabilístico que sustente su afirmación, un ejemplo de ello se presenta en la figura 12. Los 4 estudiantes restantes de este grupo se basan en creencias personales para esta elección, tal y como se evidencia en la figura 13.

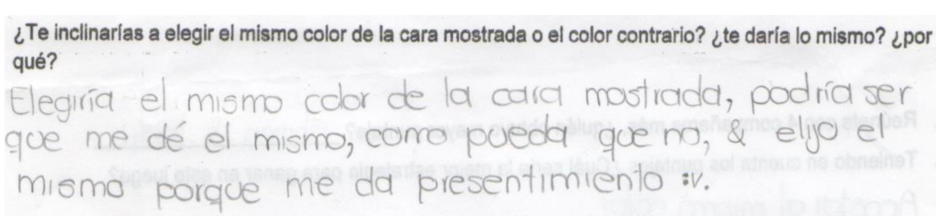
Figura 11 Ejemplo de elección del mismo color



¿Te inclinarías a elegir el mismo color de la cara mostrada o el color contrario? ¿te daría lo mismo? ¿por qué?

ME INCLINARÍA POR ELEGIR EL MISMO COLOR DE LA CARA MOSTRADA POR QUE ES MÁS PROBABLE QUE SALGA ASÍ.

Figura 12 Ejemplo de creencias personales



¿Te inclinarías a elegir el mismo color de la cara mostrada o el color contrario? ¿te daría lo mismo? ¿por qué?

Elegiría el mismo color de la cara mostrada, podría ser que me dé el mismo, como pueda que no, & elijo el mismo porque me da presentimiento :v.

Al 46% restante le es indiferente la elección de cualquier color, dado que considera que la elección de cualquier color tiene la misma probabilidad, la figura 14 evidencia que algunos de estos estudiantes caen en el sesgo de equiprobabilidad y por tanto, falta comprensión en el significado de experimento aleatorio compuesto (Lecoutre, 1992). Estos estudiantes posiblemente asumen el experimento aleatorio como simple y no compuesto, además no identifica la dependencia del color que se muestra con el color oculto. Otro argumento que se presenta es el de la figura 15 que aunque al parecer hay un sesgo de equiprobabilidad por la elección de cualquier color, el estudiante carece de bases probabilísticas en su argumento.

Figura 13 Ejemplo de elección de cualquier color

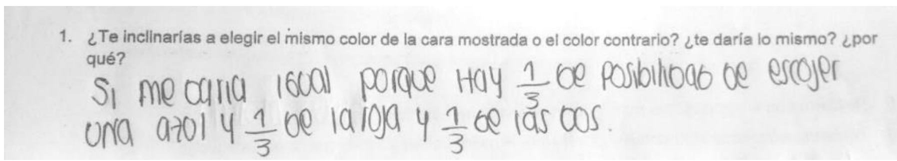
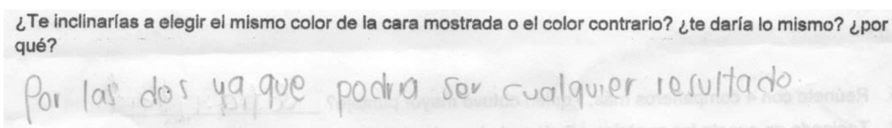


Figura 14 Ejemplo de argumentos sin bases probabilísticas



Segundo ítem

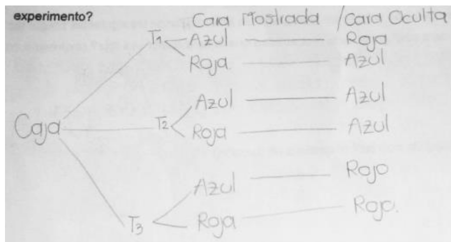
Tabla 13 Categorías de análisis: diagrama de las tres tarjetas

	fr
Construye de manera adecuada el diagrama, hallando todas las posibles combinaciones.	23
Construye parcialmente el diagrama, faltando algunas posibles combinaciones.	3
Realiza tres diagramas, uno para cada tarjeta.	
TOTAL	26

El 88% de los estudiantes (23) reconocen cada una de las etapas del experimento, dado que realizan correctamente el diagrama de árbol. En la figura 16 se evidencia cómo el estudiante obtiene correctamente el espacio muestral del experimento a través de las tres etapas del mismo; se entiende como T_1 como la tarjeta de color azul en una cara y color rojo en la otra, T_2 como la tarjeta de color azul en ambas caras y T_3 como la tarjeta de color rojo en ambas caras.

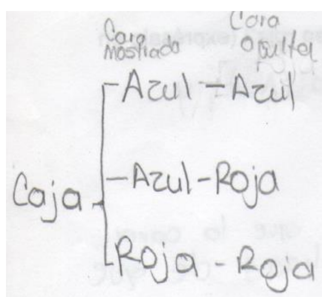
Es preciso resaltar que en el primer ítem se concluyó que los estudiantes no identificaban el experimento compuesto propuesto, sin embargo en este ítem se evidencia que si lo reconocen dado que en su mayoría construyen adecuadamente el diagrama, esta diferencia posiblemente se deba a dos motivos: primero, como se mencionó en la descripción del desarrollo de las clases (inicio de esta sección), para la solución de este ítem se tuvo que leer el experimento varias veces para que se comprendiera el experimento en su totalidad; segundo, posiblemente los estudiantes asocian el *diagrama de árbol* con experimentos compuestos, lo cual hace que el uso de esta representación ayude a identificar la composición del experimento.

Figura 15 Ejemplo de diagrama de árbol correcto de la paradoja



Como se muestra en la figura 17, el resto de estudiantes tiene comprensión parcial de experimento aleatorio compuesto, posiblemente esto se deba a una inadecuada interpretación del enunciado del juego y fallos en la relación entre el reconocimiento de las etapas y su representación en el diagrama.

Figura 16 Ejemplo de diagrama incorrecto



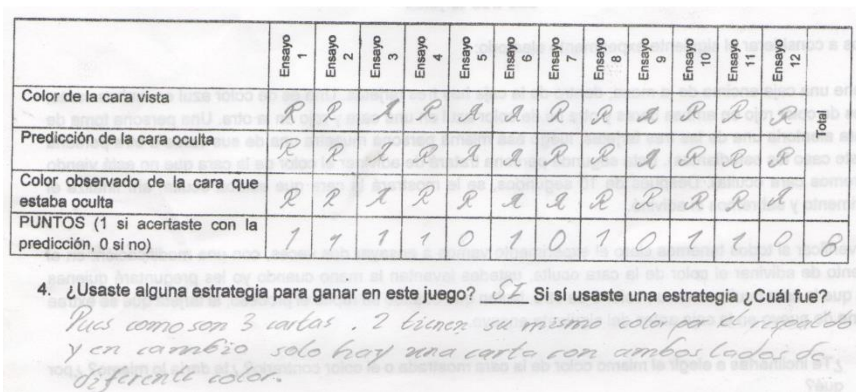
<u>Tercer y cuarto ítem</u>

Tabla 14 Categorías de análisis: uso de estrategia personal en el juego

	fr
Predice de manera correcta la mayoría de los ensayos, y expresa que utilizó una estrategia (formal o intuitiva).	2
Predice correctamente la mayoría de ensayos y expresa que no utilizó una estrategia.	14
Predice incorrectamente el color de la cara oculta y expresa que no utilizó una estrategia.	10
TOTAL	26

Aunque 16 estudiantes aciertan en la mayoría de ensayos, únicamente dos de ellos identifican y/o construyen una estrategia para ganar el juego. En la figura 18 se evidencia que el estudiante reconoce de manera empírica la dependencia del color de la cara mostrada con el color oculto. Los 14 estudiantes restantes no reconocen haber utilizado una estrategia para acertar con su pronóstico, esto puede suceder por la falta de identificación de la dependencia de eventos en cada ensayo (Batanero, Contreras y Díaz, 2011) o porque la estrategia fue intuitiva y les faltó argumentación para redactar el procedimiento seguido.

Figura 17 Ejemplo de estrategia personal para ganar el juego



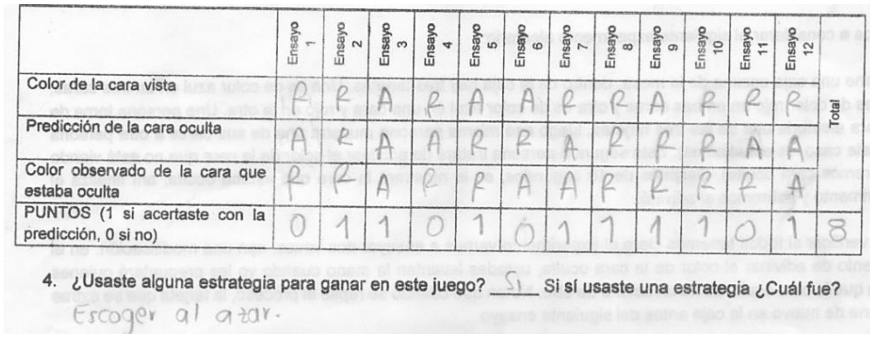
	Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4	Ensayo 5	Ensayo 6	Ensayo 7	Ensayo 8	Ensayo 9	Ensayo 10	Ensayo 11	Ensayo 12	Total
Color de la cara vista	R	R	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	
Predicción de la cara oculta	R	R	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	
Color observado de la cara que estaba oculta	R	R	A	R	R	A	A	R	R	R	R	A	
PUNTOS (1 si acertaste con la predicción, 0 si no)	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	8

4. ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? SI Si sí usaste una estrategia ¿Cuál fue?

Pues como son 3 cartas . 2 tienen su mismo color por el respaldo y en cambio solo hay una carta con ambos lados de diferente color.

Sólo uno de los 10 estudiantes que predicen incorrectamente la mayoría de ensayos expresan no haber usado una estrategia o mencionar que la estrategia es el azar (Figura 19). Esta persona puede estar confundiendo azar con equiprobabilidad como una característica de un experimento aleatorio, ya que sus respuestas en la fila de "predicción de la cara oculta" tienden a compensar la aparición de los dos posibles resultados, mostrando una forma de la heurística de representatividad, la falacia del jugador, descrita en la sección 2.3 (Kahneman, Slovic y Tversky, en 1982 en Díaz, 2003).

Figura 18 Ejemplo de uso del azar como estrategia personal para ganar el juego



	Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4	Ensayo 5	Ensayo 6	Ensayo 7	Ensayo 8	Ensayo 9	Ensayo 10	Ensayo 11	Ensayo 12	Total
Color de la cara vista	R	R	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	
Predicción de la cara oculta	A	R	A	A	R	R	A	R	R	R	A	A	
Color observado de la cara que estaba oculta	R	R	A	R	R	A	A	R	R	R	R	A	
PUNTOS (1 si acertaste con la predicción, 0 si no)	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	8

4. ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? Si Si sí usaste una estrategia ¿Cuál fue?
Escoger al azar.

Es importante resaltar que, cuando los estudiantes predecían el color oculto (en los ensayos) se escucharon opiniones como: *"si sale rojo hay que escoger rojo porque es más probable" o "si sale azul escojo azul porque tiene más posibilidades".* Este tipo de frases muestran que tienen una idea implícita (o intuitiva) de lo que pueda pasar. Prefieren decir que no identificaron ninguna estrategia, ya sea por falta de confianza en su argumento o no saber cómo expresarlo con una fundamentación probabilística.

Quinto y sexto ítem

Tabla 15 Categorías de análisis: análisis de los puntajes como insumo para identificar una estrategia

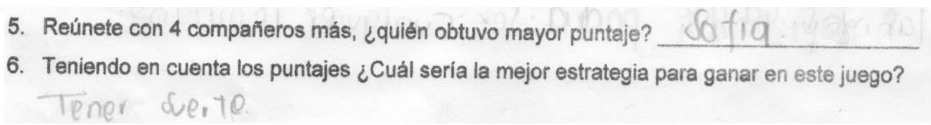
	fr
Hace uso del enfoque frecuencial para determinar la estrategia ganadora (Apostarle al color de cara mostrada).	16
Analiza los resultados de las tablas, sin llegar a establecer una estrategia ganadora	10
TOTAL	26

Según las instrucciones de la actividad, estos dos ítems se responden después de una breve socialización de los resultados previos en grupos conformados por 4 estudiantes, de manera que cuenten con más elementos de análisis y argumentación.

Se observa que la mayoría de los estudiantes (16) llegan a la solución empírica del experimento. El estudiante al analizar detalladamente cada uno de los ensayos de él y sus tres compañeros, usa los datos registrados en la tabla y llega a la solución correcta estimando las probabilidades a partir de la frecuencia relativa. Estos estudiantes reconocen que escoger el color de la cara mostrada en las tarjetas tiene mayor probabilidad en el experimento que escoger el otro color. Sin embargo, faltan argumentos para justificar esta relación, posiblemente esto se deba a una baja comprensión de conceptos, tales como la dependencia de eventos o la restricción del espacio muestral.

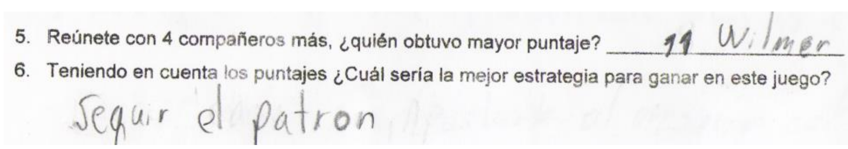
Después de analizar los datos en la tabla, 10 estudiantes no llegan a establecer ninguna estrategia para ganar el juego, posiblemente esto se asocia con el sesgo de equiprobabilidad o a la falacia del eje temporal (ver sección 2.3), donde no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ha ocurrido con anterioridad (Totohasina, 1995, citado en Díaz et al., 2012). Un ejemplo de lo anterior se observa en la figura 20.

Figura 19 Ejemplo de una estrategia ganadora no probabilística


5. Reúnete con 4 compañeros más, ¿quién obtuvo mayor puntaje? Sofia
6. Teniendo en cuenta los puntajes ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?
Tener serto

Confusión con la independencia de ensayos en el juego: en la figura 21 se observa cómo el estudiante percibe de manera inadecuada la independencia de cada ensayo, este estudiante tiene tendencia a predecir el resultado de cada ensayo en función de los resultados anteriores, buscando un patrón dentro de los resultados antepuestos, este razonamiento conduce a lo expresado por Kahneman, Slovic y Tversky (1982, citados en Díaz 2003) referente a la *heurística de la representatividad* (ver sección 2.3), en la que se espera que una seria pequeña de ensayos llegue a una convergencia rápida.

Figura 20 Ejemplo de identificar un patrón como estrategia ganadora


5. Reúnete con 4 compañeros más, ¿quién obtuvo mayor puntaje? 11 Wilmer
6. Teniendo en cuenta los puntajes ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?
Seguir el patron

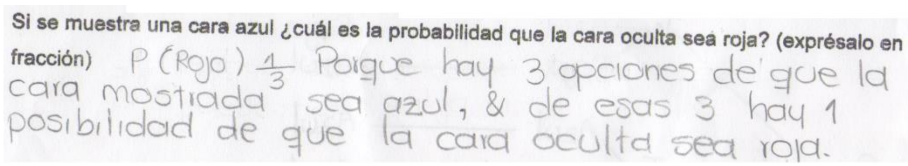
<u>Séptimo ítem, primera pregunta</u>

Tabla 16 Categorías de análisis: obtención de la probabilidad condicionada.

	fr
Reconoce la restricción en el espacio muestral (“identificar” el e.m.r.) para hallar la probabilidad (como consecuencia identifica la dependencia estadística en los dos sucesos), a partir del diagrama de árbol.	14
Determina que el resultado es 1/3 porque hay tres caras rojas en caja; omitiendo la información que se antepone a la pregunta (como consecuencia no identifica la dependencia de los sucesos)	9
Representa la fracción correcta sin ningún argumento.	3
TOTAL	26

Catorce estudiantes se basan en el diagrama de árbol para dar la probabilidad pedida de manera correcta. La figura 22 es un ejemplo de este tipo de respuesta, se refleja cómo el estudiante reconoce que hay limitación en los sucesos posibles (sólo se consideran cartas azules en la cara mostrada), y en consecuencia identifica la restricción del espacio muestral en la segunda ramificación del árbol. Partiendo de los sucesos posibles (denominador) hallan los casos favorables, con la tercera ramificación del árbol, de este razonamiento se deduce que el estudiante comprende la dependencia de los sucesos.

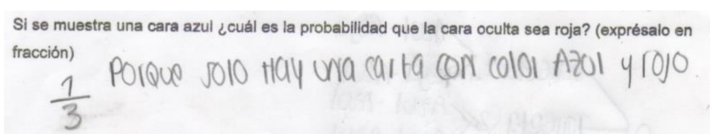
Figura 21 Ejemplo de probabilidad condicional correcta



Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción) P (Rojo) $\frac{1}{3}$ Porque hay 3 opciones de que la cara mostrada sea azul, & de esas 3 hay 1 posibilidad de que la cara oculta sea roja.

Conflicto al identificar las probabilidades de los sucesos en el espacio muestral producto: en los ítems anteriores, la mayoría de los estudiantes identificaron correctamente los sucesos del experimento; aunque esto no asegura que se asigne la probabilidad condicional en forma correcta. Ocho estudiantes dan argumentos como el que se muestra en la figura 23, en la que se asigna la misma probabilidad a los sucesos y no se reconoce que los sucesos (R-R) y (A-A) tienen el doble de probabilidad que el suceso (R-A). Es una muestra de que el sesgo de equiprobabilidad propuesto por Lecoutre (1992) está presente en el razonamiento de los estudiantes.

Figura 22 Ejemplo de interpretación inadecuada



Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción) $\frac{1}{3}$ Porque solo hay una carta con color azul y rojo.

<u>Séptimo ítem, segunda pregunta</u>

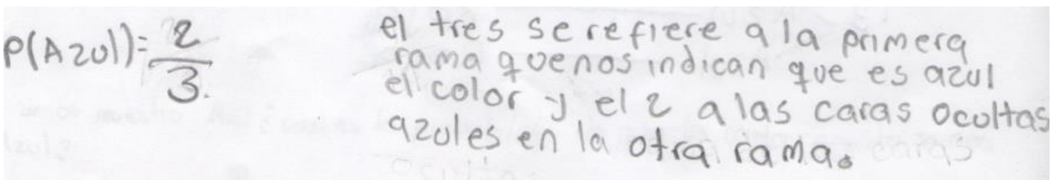
Tabla 17 Categorías de análisis: obtención de otra probabilidad condicionada.

	fr
Reconoce el cambio en el espacio muestral para hallar la probabilidad condicional a partir del diagrama de árbol.	13
Halla la fracción correcta restando la unidad al resultado anterior (1/3).	2
Confunde la dependencia con la independencia de eventos.	3
Representa la fracción correcta sin ningún argumento.	8

La redacción de la pregunta (¿cuál es la probabilidad de acertar?) fue confusa para los estudiantes, por tanto durante su desarrollo se replanteó de la siguiente manera: “si se muestra la cara azul ¿cuál es la probabilidad de que la cara oculta sea azul? ¿Por qué?”.

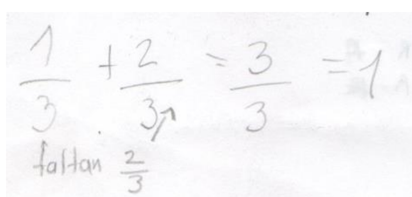
A través de diagrama de árbol 13 estudiantes (ver figura 24) lograron establecer la probabilidad condicional pedida, reconocieron que el color de la cara oculta dependía de las tarjetas que únicamente tuvieran color azul, es decir, que descartaban la posibilidad de que la carta R- R saliera. Al preguntarle a un estudiante por qué determinó que $\frac{2}{3}$ era la probabilidad correcta, éste respondió: "*en la primera rama del árbol se ve que el espacio muestral se delimita por las cartas que tienen sólo azul"*. Se concluye que estos estudiantes reconocen el cambio en el espacio muestral y su restricción, identificando la dependencia estadística de los sucesos.

Figura 23 Ejemplo de razonamiento condicional



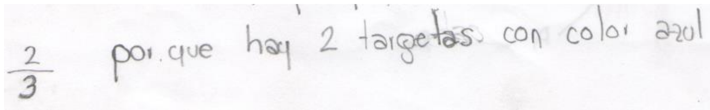
Idea de complemento: los argumentos dados por 2 estudiantes evidencian que comprenden una de las condiciones de un espacio medible, *P* (A^C)*=1 - P(A).* La figura 25 muestra que suma la probabilidad del ítem anterior con la fracción que complementaria para llegar a la unidad. Sin embargo, dichos estudiantes no justifican su respuesta en el ítem anterior, por tanto no se puede asegurar que reconozcan la dependencia de eventos.

Figura 24 Ejemplo de concepto de complemento



Confusión entre la dependencia e independencia de eventos: la figura 26 muestra un ejemplo de los tres estudiantes que utilizaron un razonamiento laplaciano, donde los casos favorables hacen referencia al número de cartas (2) que tienen color azul en sus caras y los casos posibles al número (3) de cartas dentro de la caja. Esto evidencia que falta una adecuada comprensión de experimento compuesto, dado que lo relacionan con un sólo experimento simple y en consecuencia no reconocen que la probabilidad de un evento cambia en cuando es condicionado por otro evento a priori (cara mostrada) y por tanto, el color oculto depende del color de la cara mostrada. (Contreras 2011)

Figura 25 Ejemplo de razonamiento laplaciano



En esta sección se observó que, a lo largo de la actividad, una mayoría de estudiantes identificaron como estrategia ganadora para este juego, elegir el mismo color de la cara mostrada para predecir el color de la cara oculta, y poco más de la mitad encontraron el argumento probabilístico de esta elección. Esta identificación fue relativamente rápida, al inicio sólo dos estudiantes expresaron tener una estrategia (Tabla 14) y al compartir resultados en grupos de cuatro aumenta a 16 (Tabla 15). Los resultados también indican que se requiere un refuerzo del tema para los estudiantes que replicaron los procedimientos sin lograr una comprensión de los conceptos y para quienes permanecieron en su postura inicial de ausencia en el reconocimiento de una estrategia ganadora. Cabe notar que nuestros resultados no son comparables con investigaciones previas que usan esta paradoja con fines evaluativos, como la de Batanero, Godino y Roa (2004) o la de Ferreira y Fernandes (2010), debido a los cambios que se introdujeron para adaptarla como una actividad formativa para estudiantes de grado noveno.

4.4 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE LA ACTIVIDAD DE CIERRE: ¿Son confiables las pruebas médicas para el VIH?

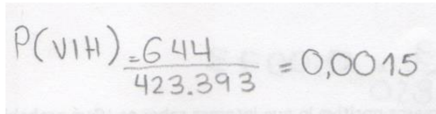
Primer ítem

Tabla 18 Categorías de análisis: probabilidad marginal.

	fr
Reconoce los casos favorables del suceso y los casos posibles	20
Confunde los casos favorables con el número de casos posibles	
TOTAL	20

El 100% de los estudiantes asignó de manera correcta la probabilidad marginal pedida, expresan la probabilidad como el cociente entre los casos favorables de que las mujeres embarazadas padecieran de VIH con el número total de pacientes que se realizaron la prueba; además utilizan una *simbología correcta* para representar esta probabilidad como se muestra en la figura 27. Posiblemente esta adecuada comprensión se deba además a la manera como está planteada la situación, ya que de esto depende en gran medida la interpretación correcta que realicen los estudiantes (Batanero y Díaz 2011).

Figura 26 Ejemplo de probabilidad de padecer VIH en mujeres embarazadas



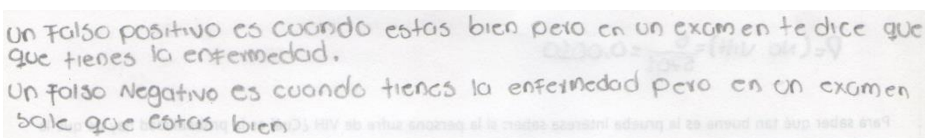
Segundo ítem

Tabla 19 Categorías de análisis: falsos positivos y falsos negativos

	fr
Tiene conocimiento sobre los falsos positivos y negativos.	17
Omite dar una respuesta por falta de conocimiento de los falsos positivos y negativos	3
TOTAL	20

Únicamente tres estudiantes expresaron tener algún conocimiento sobre falsos positivos y falsos negativos, sin embargo era inadecuado. En consecuencia, la docente introduce a los estudiantes en el manejo de estos conceptos y les pide que escriban en su hoja de respuestas lo que entendieron de la explicación. Se obtuvieron respuestas como la mostrada en la figura 28.

Figura 27 Ejemplo de falsos positivos y falsos negativos



Tercer ítem

Tabla 20 Categorías de análisis: organización de datos en la tabla de contingencia

	fr
Extrae los datos del texto y los ubica de manera correcta en la tabla.	18
Realiza algunos cálculos equivocados la tabla.	2
TOTAL	20

La mayoría de estudiantes interpreta correctamente la información dada, extrae los datos que suministra el texto y realiza operaciones básicas (resta) para deducir aquellos datos que no se encuentran de manera explícita. En este momento el estudiante comienza un *proceso de significación,* descrito en Contreras (2011), para efectuar la interpretación del texto y los elementos de la tabla, realizando la lectura de la misma. Identifica las variables del enunciado y los valores de la variable; además realiza un *proceso de particularización* cuando halla y establece las frecuencias dobles, marginales y el total de pacientes en la tabla. Los dos estudiantes que fallan en la ubicación de los datos, sólo lo hacen en una celda por un mal cálculo en la resta correspondiente.

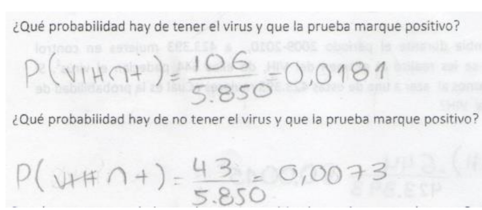
Cuarto y quinto ítem

Tabla 21 Categorías de análisis: probabilidades conjuntas

	fr
Identifica la intersección de sucesos y obtiene la probabilidad conjunta pedida.	16
Confunde la probabilidad clásica con la probabilidad conjunta.	2
Confunde la probabilidad conjunta con la probabilidad condicional	2
TOTAL	20

Las respuestas correctas (16) muestran que estos estudiantes logran *“leer entre datos”*, que en la taxonomía de la comprensión de gráficos de Cursio (1989) es el segundo nivel, dado que los estudiantes logran comparar e interpretar los datos. Ellos identifican (figura 29) las frecuencias absolutas a partir del cruce en la tabla como la intersección de dos eventos, para el cuarto ítem $(VIH\cap +)$, y calculan la probabilidad conjunta como el cociente entre éstos y el número total de pacientes que se realizaron la prueba. Siguen el mismo proceso para el quinto ítem, donde el interés es $P(VIH'\cap +)$; en este último ítem se evidencia que el estudiante usa una notación poco convencional, con $P(\cancel{V}IH\cap +)$ representa la probabilidad de que la persona no tenga VIH y la prueba haya marcado positivo.

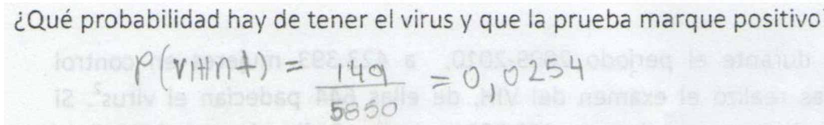
Figura 28 Ejemplo de probabilidades conjuntas



Soluciones incorrectas

Confusión entre la probabilidad clásica y conjunta: La figura 30 muestra una respuesta de los dos estudiantes confunden la probabilidad conjunta de “tener virus y que la prueba marque positivo” con la probabilidad del suceso simple “que la prueba marque positivo”, posiblemente a estos dos estudiantes se les dificulta leer la tabla de manera adecuada y localizar las frecuencias absolutas de los casos favorables y los desfavorables del suceso pedido (Estrada y Díaz, 2007).

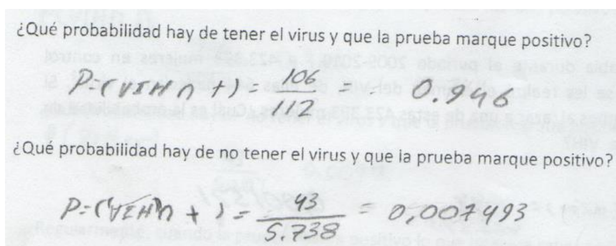
Figura 29 Ejemplo de sustitución de la probabilidad conjunta por la marginal


¿Qué probabilidad hay de tener el virus y que la prueba marque positivo?

$P(VIH \cap +) = \frac{149}{5850} = 0,0254$

Confusión entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional: La figura 31 muestra que un estudiante confunde las probabilidades conjuntas $P(VIH \cap +)$ y $P\,(VIH' \cap +)$, con las probabilidades condicionales $P(+|\,VIH)$ y $P(+|VIH')$ respectivamente. Al calcular la probabilidad conjunta, aunque el estudiante identifica correctamente el cruce entre los pacientes que no tienen el virus con la marcación positiva de la prueba, realiza una restricción de los casos posibles en la situación planteada, que es incorrecta porque no se requería restringir. Se observa que el denominador que usa el estudiante son las frecuencias marginales de los pacientes que padecen de VIH (cuarto ítem) o los que no padecen de VIH (quinto ítem), en lugar del total la muestra.

Figura 30 Ejemplo de sustitución de la probabilidad conjunta por la condicional


¿Qué probabilidad hay de tener el virus y que la prueba marque positivo?

$P{:}(VIH \cap +) = \frac{106}{112} = 0.946$

¿Qué probabilidad hay de no tener el virus y que la prueba marque positivo?

$P{:}(VIH' \cap +) = \frac{43}{5.738} = 0,007493$

Sexto y séptimo ítem

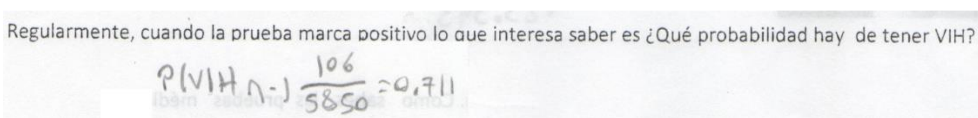
Tabla 22 Categorías de análisis: probabilidades condicionales

	fr
Identifica el espacio muestral correcto y los casos favorables del suceso pedido	16
Confunde la probabilidad condicional con la conjunta en algún ítem	3
Utiliza el espacio muestral completo (no reconoce el e.m.r) para establecer el número de casos totales en la regla de Laplace.	1
TOTAL	20

Los estudiantes que solucionaron adecuadamente estos dos ítems reconocen lo que pide el problema y asocian las probabilidades condicionales de casos específicos. Ellos reconocen el suceso condicionante, “que la prueba marque positivo” en el sexto ítem (“negativo” en el séptimo), y el suceso condicionado “tener VIH”. Además, identifican las frecuencias de cada uno de esos sucesos en la tabla de contingencia y los ubican en forma adecuada como numerador y denominador, realizando un proceso de particularización. Lo anterior muestra que ellos distinguen el espacio muestral restringido y la dependencia estadística entre los dos sucesos.

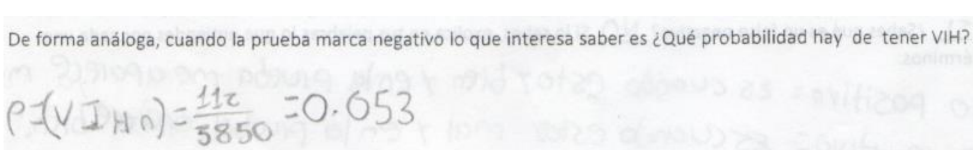
Confusión entre la probabilidad conjunta y condicional: dos estudiantes identifican correctamente el número de casos favorables que pide el problema (figura 32) equivocándose en el cambio del espacio muestral (e.m.r.). El número de casos posibles usado por los estudiantes es el total de la muestra, en lugar de utilizar la frecuencia marginal del total de pruebas que marcan positivo. Se puede deducir que estos estudiantes aún carecen de conocimiento probabilístico para identificar el suceso condicionado y el suceso condicionante (condición), posiblemente relacionado con una falta de comprensión de la dependencia estadística entre sucesos.

Figura 31 Ejemplo de confusión entre la probabilidad condicional y conjunta



Confusión entre la probabilidad clásica y condicional: sólo un estudiante (figura 33) comete este tipo de error, descrito por Estrada y Díaz (2007). El estudiante calcula la probabilidad de que el paciente tenga VIH, en lugar de la probabilidad de que tenga VIH sabiendo que la prueba marco negativa. Este estudiante utiliza la frecuencia marginal (total de pacientes que tienen VIH) como el número de casos favorables, en lugar del total de pacientes que padecen VIH y su resultado fue negativo. Tampoco reconoce el cambio en el espacio muestral, dado que utiliza total del pacientes como los casos posibles. Se nota cierta dificultad para interpretar el enunciado o la tabla de contingencia en relación con la probabilidad que pide el enunciado.

Figura 32 Ejemplo de la identificación del espacio muestral restringido (e.m.r)



Octavo ítem

Confusión entre la probabilidad condicional P(A/B) con su transpuesta P(B/A): al cambiar la $P\,(VIH|+)$ por $P\,(+\,|\,VIH)$ cinco de veinte estudiantes dan una respuesta incorrecta al problema, debido a que confunden estos dos sucesos, es posible que no discriminen adecuadamente las dos direcciones de la probabilidad condicional *P(A/B) y P(B/A),* error denominado *falacia de la condicional transpuesta* (descrito por Falk, 1986). Otra causa posible es la confusión entre las frecuencias marginales de las columnas con las frecuencias marginales de las filas, ligado a una inadecuada lectura e interpretación de la tabla.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones que se derivan de cada una de las partes de este trabajo, en especial la construcción del diseño de actividades y los resultados de la implementación. Se hace énfasis en el efecto que generó en los participantes el desarrollo de la actividad de las tres tarjetas en cuanto al aprendizaje de la condicionalidad, teniendo en cuenta que esa fue la pregunta orientadora para la formulación de esta propuesta didáctica.

Luego se dan a conocer las recomendaciones de aplicación para profesores interesados en replicar la presente propuesta, fruto de las observaciones durante la implementación, que dejó en evidencia sus ventajas y limitaciones. Finalmente se enuncian algunas posibilidades de continuidad del trabajo en una investigación más amplia.

5.1 CONCLUSIONES CON RESPECTO A LOS OBJETIVOS

El objetivo general del trabajo (sección 1.3.1) fue “Diseñar e implementar una propuesta didáctica que facilite a los estudiantes de ciclo cuatro del colegio Grancolombiano comprender la noción de probabilidad condicional a través del análisis de la paradoja de las tres tarjetas.” El cumplimiento de este objetivo se observa a lo largo del trabajo, en particular en los capítulos 3 y 4, donde se muestran las actividades diseñadas y el análisis de las producciones de los estudiantes en cada una. Este objetivo se verifica a través de los tres objetivos específicos (sección 1.3.2) que se muestran a continuación.

El primer objetivo específico era “identificar conocimientos previos que tienen los estudiantes del ciclo cuatro respecto a conceptos de probabilidad, desde el punto de vista clásico y frecuencial”. Para este, se diseñó un cuestionario inicial (sección 3.1) que valoró los procedimientos de los estudiantes en relación con el diagrama de árbol, la regla de Laplace, la dependencia e independencia de eventos y la lectura de tablas de doble entrada.

Los resultados de la prueba diagnóstica se describen y analizan en la sección 4.2.1, donde se concluye de manera general que: a) la mayoría de estudiantes construye de manera correcta el diagrama de árbol, sin embargo se evidenció que se debía reforzar este aspecto; b) aunque gran parte del grupo reconocen la dependencia de eventos, para algunos la idea de experimento compuesto está ausente dado que relacionan cada evento como uno simple y equiprobable; c) la lectura de la tabla de doble entrada facilitó la identificación de las probabilidades clásicas y conjuntas.

Lo anterior implicó que antes de aplicar la actividad de las tres tarjetas fuera necesario desarrollar clases adicionales (que no se muestran en este documento) para reforzar la construcción del diagrama de árbol y la dependencia entre experimentos compuestos.

Respecto al segundo objetivo específico, "estructurar las situaciones (contextos, problemas) que conformarán la propuesta didáctica, teniendo en cuenta la dependencia e independencia estadística entre experimentos", se diseñaron tres actividades relacionadas con el aprendizaje de la probabilidad condicional en estudiantes de grado noveno, estableciendo ítems para la diferenciación entre la dependencia e independencia de eventos. Además, para la enseñanza de estos temas, se involucraron el diagrama de árbol, como una forma de representación gráfica, y las tablas de contingencia, como una forma de representación tabular, que facilitan la comprensión en estudiantes de estas edades (14-16 años) como citan Contreras (2011) y Batanero y Díaz (2012).

Para la prueba diagnóstica y la actividad de cierre, se eligieron temas motivantes teniendo en cuenta los intereses del grupo participante, 26 estudiantes entre 14 y 16 años que viven en el barrio Bosa (ubicado al sur de la ciudad de Bogotá) y estudian en el colegio Grancolombiano. Los contextos se enmarcaron en un concurso de fotografía y redes sociales, un estudio estadístico de pruebas VIH y gustos musicales de estudiantes, con el fin de involucrar a los participantes en las situaciones y que dieran un mayor sentido a los problemas, notando que la probabilidad condicional aparece en su vida cotidiana.

Con relación al último objetivo específico, "evaluar el desarrollo de esta propuesta con estudiantes del último grado de ciclo cuatro del colegio Grancolombiano", se observaron diferentes niveles de aprendizaje, algunos resultados se identificaron al comparar las producciones de los estudiantes en la prueba diagnóstica con los resultados en la actividad de cierre, otros se observaron de forma común en las tres actividades y otros se identifican en las respuestas a la actividad de la paradoja. A continuación se describen los hallazgos en ese orden:

- En la actividad diagnóstico se encontraron errores probabilísticos de tipo conceptual, como expresar una probabilidad mayor que la unidad, al finalizar la actividad de cierre, este tipo de errores no se observaron. Posiblemente se deba a que los estudiantes comprendieron que la probabilidad de un evento debe estar entre 0 y 1.

- Al momento de calcular las probabilidades marginales, conjuntas y condicionales, la tabla de contingencia facilitó que la mayoría de estudiantes identificaran adecuadamente la probabilidad pedida, como se observó en la prueba diagnóstica y en la actividad de cierre. Sin embargo, es evidente que la lectura incorrecta de la tabla (no comprender los datos que se ubican en ésta) implica que el estudiante se confunda al obtener todas las probabilidades, en especial la conjunta y condicional.

Algunas observaciones comunes en el desarrollo de las tres actividades:

- El sesgo de equiprobabilidad estuvo presente, indicando que es difícil para algunos estudiantes comprender que los diversos sucesos que se presentan en un experimento aleatorio pueden tener probabilidades distintas, quizá esto sea consecuencia de una asociación inadecuada entre azar y equiprobabilidad, como citan Batanero y Serrano (1995).

- Los experimentos aleatorios simples son más familiares para los estudiantes, por ello cuando se involucran los experimentos compuestos se causa cierta confusión o poco asimilación al comprender que no todos los eventos tiene la misma probabilidad.

A través del análisis de la actividad de las tres tarjetas, se concluye que:

- La representación gráfica diagrama de árbol es una herramienta eficaz para la comprensión de la condicionalidad, dado que a través de las ramas los estudiantes logran identificar visualmente los sucesos condicionantes y los condicionados.

- La *paradoja de las tres tarjetas* presentada como juego facilitó el desarrollo de la actividad, los estudiantes se mostraron entusiasmados por predecir exitosamente el color de la cara oculta. Se notó la importancia de dar más tiempo para que cada uno analice el total de sus propias predicciones y para realizar más ensayos en el juego, ya que pocos estudiantes tuvieron en cuenta sus predicciones durante el juego para generar una estrategia que les permitiera predecir con éxito. Por otro lado, es interesante para el estudiante descubrir que la estrategia que parecía tener poca lógica (contra-intuitiva) al comienzo del juego, resultó ser la ganadora, reafirmando lo propuesto por Lesser (1998).

- La mayoría de estudiantes llegaron a una argumentación probabilística con respecto a la estrategia para ganar el juego. La comparación entre las respuestas a esta pregunta al iniciar la actividad de las tres tarjetas y al terminar mostró que: (a) Estudiantes que se inclinaron por el mismo color en el primer ítem, finalizaron rectificado su estrategia (escoger el mismo color) usando argumentos probabilísticos que estuvieron ausentes en el comienzo de la misma, como por ejemplo dependencia de eventos. (b) Estudiantes que manifestaron que les era indiferente la escogencia del color, cambiaron su percepción, inclinándose por el color de la cara mostrada, con argumentos que involucran la restricción del espacio muestral y la identificación de la dependencia de los eventos a partir de las ramas del diagrama de árbol. (c) Pocos estudiantes tuvieron dificultades para argumentar probabilísticamente su estrategia.

De acuerdo a lo anterior, se concluye que la presente propuesta es un instrumento de enseñanza que facilita comprender la noción de condicionalidad, la independencia entre los ensayos en un experimento aleatorio y la dependencia entre los eventos de cada ensayo. Además, amplía la visión probabilística del estudiante quien, en principio, relaciona únicamente experimentos aleatorios con la asignación clásica. Se resalta el papel del docente como orientador de todo el proceso, puesto que el objetivo de la actividad se puede perder, al ser un tema un poco complejo, causando confusión en el estudiante.

5.2 RECOMENDACIONES PARA LA APLICACIÓN DE LA PROPUESTA

La propuesta fue diseñada para enseñar la noción de probabilidad condicional en grado noveno. Las sugerencias para un profesor interesado en utilizar esta secuencia, están pensadas en dos caminos: el primero, en el que se adopten las mismas guías de esta propuesta (o con modificaciones menores) y el segundo, en el que se adapten (cambiando las actividades pero conservando los objetivos de aprendizaje en cada guía).

La implementación descrita en el capítulo 4.2 consideró aspectos de logística (no descritos antes) que conllevan a las siguientes recomendaciones:

- Al momento de realizar el juego de las tres tarjetas se aconseja que la persona que esté eligiendo las tarjetas y mostrando las caras no use gafas, ya que el color de la cara oculta se puede reflejar en los lentes y en consecuencia el estudiante dará siempre la predicción correcta.

- Modificar la redacción del último ítem de la actividad de las tres tarjetas "¿cuál es la probabilidad de acertar? Por una pregunta que presente la información adicional (la condición) respecto al color de la cara mostrada. Como se mencionó en la sección 4.2.2, los estudiantes se mostraron confundidos y les causaba gran dificultad resolver la pregunta formulada inicialmente, y fue necesario reestructurarla durante el desarrollo de la actividad.

- Complementar las actividades con más ítems que involucren experimentos aleatorios compuestos, ya que es importante reforzar la noción de dependencia estadística entre los eventos. Es posible que sea necesario destinar una o dos clases adicionales para estos temas.

Si el profesor hace su propia adaptación, al rediseñar las actividades es importante que tenga en cuenta el contexto cotidiano del estudiante, además de sus gustos e intereses. Por ejemplo, se puede cambiar el tipo de música de merengue, reggaetón y salsa por rock, pop o música tropical en la información que se brinda en la tabla de doble entrada. Es primordial que la información que se presenta en los estudios estadísticos sea veraz, ya que esto le da mayor formalidad y seriedad a las actividades que se desarrollan, dado que el estudiante se siente interesado por conocer y/o obtener resultados que sean cercanos a su realidad.

5.3 POSIBILIDADES DE CONTINUIDAD

Este trabajo tiene al menos tres opciones de investigación a futuro, a grandes rasgos se enuncian las siguientes:

La propuesta se podría implementar con diferentes grupos de estudiantes con algunas características similares como el grado de escolaridad (9°) y en un contexto social distinto. Se podría analizar el efecto de la actividad de la paradoja de las tres tarjetas en una muestra más amplia de estudiantes y estudiar aquellos resultados que no se presentaron en esta implementación.

Por otro lado, sería interesante estudiar las ventajas y desventajas de implementar la propuesta a través de algún recurso tecnológico por ejemplo la construcción de un objeto virtual de aprendizaje (OVA) y/o una applet, que muestre la simulación del juego de las tres tarjetas.

Para complementar la evaluación hecha de la comprensión de la noción de probabilidad condicional y algunos conceptos relacionados, se espera realizar una prueba posterior (en 6 o 12 meses) con el mismo grupo de estudiantes. El objetivo de esta nueva valoración sería analizar si la comprensión observada en este trabajo sólo está presente en la memoria a corto plazo de los participantes, o si realmente generó una apropiación del conocimiento que persiste con el tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, L. Rojas, J y Bautista, J. (2010). Teoría de la probabilidad. Universidad de Medellín: Colombia.

Arteaga, P. Batanero, C. Contreras, J. y Díaz, C. (2014). Paradojas En La Historia De La Probabilidad Como Recurso Didáctico. *Revista digital matemática y educación*: España. Recuperado el 16 de septiembre de 2015 en http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TallerParadojas.pdf

Ball, D. Thames, M y Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching. What makes it special?* Journal of Teacher Education, *59*(5), 389-407.

Batanero, C. Contreras, J. Arteaga, P y Cañadas, G. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilón - Revista de Educación Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 16 de septiembre de 2015 en http://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/articulos/2011Epsilom.pdf

Batanero, C. Contreras, J. Cañadas, G. y Gea, M. (2012). El Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas*: España. Recuperado el 20 de septiembre de 2015 en http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Novedades_Batanero.pdf

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. Revista digital Matemática, *Revista digital Matemática, Educación e Internet.* Recuperado el 18 de noviembre de 2015 de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Revistadigital.pdf

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1). Recuperado el 16 de septiembre de 2015 en: http://www.amstat.org/publications/jse/.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. Recuperado el 3 de febrero del 2016 de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf.

Blanco, L. (2004). *Probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia: Colombia.

Canavos, G. (2001). *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos.* Virginia Commonwealth University: México.

Cardona, J & Arias, L. (2008). *Didáctica para la enseñanza de la probabilidad condicional.* Universidad en la Universidad de Pereira.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza*. La investigación-acción en la formación del profesorado. Barcelona: Martínez Roca.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. (2a Edición en colaboración con Marie-Alberte Joshua). Francia: La Pensée Sauvage.

Cohen, L. Manion, L y Morrison, K. (2004). *A guide to teaching Practice*. London and New York: RoutledgeFalmer.

Contreras, J. (2011). Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional (Tesis de doctorado). Universidad de Granada: España.

Cramer, H. (1970) Elementos de la teoría de la probabilidad. Aguilar S.A, sexta edición. Madrid: España.

Cursio, F. (1989). Developing graph comprehension. Reston, VA: N.C.T.M.

Díaz, C (2003). Heurísticas y Sesgos en el Razonamiento Probabilístico. Implicaciones para la Enseñanza de la Estadística. Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Facultad de Psicología. Universidad de Granada, España. Recuperado el 20 de noviembre del 2015 de http://web.udl.cat/usuaris/esi2009/treballs/P1_44.pdf.

Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema,* 26(22), 1207-1226.

De la Fuente, I y Díaz, C. (2004). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. Épsilon, 20(2), (59). Recuperado el 27 julio de 2016, en http://thales.cica.es/~epsilon/art03.htm.

Duran, A y Ferreirós, J. (2001) *El valor de las matemáticas*. Universidad de Sevilla. 164 Páginas. ISBN/D.L: 84-472-0568-1.

Díaz, C y Batanero, C. (2014). Estadística con proyectos. Universidad de Granada: España.

Estrada, A. y Díaz, A. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. UNO 44, 48-58. Recuperado el 20 de marzo de 2016 de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/uno44.pdf.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swif (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297).Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Ferreira Correia, P. y Fernandes, J. (2010) O jogo das fichas coloridas estratégias de resolução de alunos do 12.º ano de escolaridade. Comunicación corta en XXI Seminário de investigação em educação matemática – *SIEM*, Aveiro: Associação de Professores de Matemática. Recuperado el 20 de marzo del 2017 en https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10911/.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Gnedenko, B. (1969). The theory of probability. Mir Publishers. Moscow: Russia.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Recuperado el 2 de enero del 2016 de https://core.ac.uk/download/pdf/12341183.pdf

Gómez, E. (2014). Evaluación y Desarrollo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de la Probabilidad en Futuros Profesores de Educación Primaria (Tesis de doctorado). Departamento de Estadística. Universidad de Granada. Granada.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Tarr, J. E. (1999). Understanding Students probabilistic reasoning. D*eveloping mathematical reasoning in grades*). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lecoutre, M. (1992). Cognitive models and problem spaces in purely random situations. Educational Studies in Mathematics.

Lesser, L. M. (1998). Countering indifference: Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics, 20* (1), 10-12.

Mason J, Burton L. & Stacey K. (1982). *Pensar matemáticamente.* España: Labor S.A.

Mateos, G. (2002). *Evolución histórica de los métodos de decisión a partir de Laplace*. En *Historia de la Probabilidad y la Estadística II.* AHEPE. Delta Publicaciones, Madrid, pp. 139-155. ISBN: 94-933631-2-X

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). Estándares Curriculares de Matemáticas. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Colombia.

Osorio & Sierra (2012). Influencia del contexto en el proceso de resolución de problemas de probabilidad condicional en estudiantes de grado once (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional: Colombia.

Pearson, E. y Kendall, M. (1970): Studies in the History of Statistics and Probability. Vol. I. Ed. Charles Griffin: Londres.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255–269.

Ríos, S. y Ríos, I. (1998). La teoría de la decisión de Pascal a Von Neumann. Curso de conferencias sobre Historia de la Matemática en el siglo XX. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, págs. 11-42.

Suárez, M (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación acción. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias. Vol 1.* Recuperado el 4 de abril de http://msuarez.webs.uvigo.es/WEB_investigacion_Artigo_5.pdf

Zajárov, V. Sevastiánov, B y Chistiakov, V. (1985). Teoría de las probabilidades. Mir Moscú.

ANEXO 1. Prueba diagnóstica

Colegio Grancolombiano

Institución Educativa Distrital

P.E.G:

Hacia una comunidad incluyente, productiva y respetuosa de los derechos humanos

Prueba diagnóstica: Probabilidad y azar

Noveno grado

Nombre: _______________________________ Curso _______

Responda una a una las preguntas que se formulan a continuación, incluyendo todos los pasos necesarios para llegar a la respuesta.

1. Una empresa fabricante de celulares inteligentes escoge de manera aleatoria 4 celulares para verificar si cumplen con las condiciones de calidad requeridas para obtener el certificado de calidad, en caso de no cumplirse las condiciones, la empresa buscará establecer qué fallas se están presentando. En primera instancia, para cada celular analizado se clasifica con "S" si cumple y con "N" cuando no cumple alguna de las condiciones. ¿Cuáles son las posibles opciones que se pueden dar en esta primera etapa de revisión? (Usa como apoyo el diagrama de árbol para llegar la respuesta).

Para los siguientes ítems exprese su resultado tanto en fracción como en decimal.

2. La empresa Alquería lanzará al mercado un nuevo producto. Para promocionarlo, realizará el siguiente concurso con diferentes colegios de Bogotá: La sección de mercadeo de la empresa selecciona una muestra de colegios para visitar; cuando un representante de la empresa llega a un colegio escoge de manera aleatoria a dos estudiantes por curso para tomarles una fotografía con el producto; todas las fotos se suben a la página web siguiente https://www.facebook.com/Avenaalqueria/info/?tab=page_info; gana el concurso la fotografía que más *likes* tenga. El curso al que pertenece la foto ganará Ipods para todos los estudiantes.
La dinámica para escoger a los estudiantes que aparecerán en la fotografía es así: el promotor de Alquería tiene en una urna el nombre de todos los estudiantes (facilitado por las directivas del colegio), introduce su mano en la urna y escoge un papel al azar; el nombre que aparece en este papel corresponde al primer protagonista de la foto; estando ya este nombre afuera, vuelve a meter

mano en la urna y saca al azar otro papel, que corresponde al nombre del segundo integrante de la foto.

Uno de los primeros colegios escogidos fue el *Grancolombiano*, curso 9e6, el cual consta de 9 hombres y 17 mujeres.

- ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione a una mujer, la primera vez que saca al azar un nombre de la urna?

- Supongamos que el primer alumno seleccionado es una mujer ¿Cuál es la probabilidad de que escoja a otra mujer en la segunda ocasión que saca un nombre de la urna?

3. La emisora *Oxigeno* preguntó a sus oyentes por sus preferencias musicales, obteniendo los siguientes resultados:

	Hombres	Mujeres	Total
Le gusta el reggaetón	450	620	1070
Le gusta la salsa	410	384	794
Le gusta el merengue	140	230	370
Total	1000	1234	2234

Si elegimos al azar uno de estos oyentes:

- ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el reggaetón?

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y le guste la salsa?

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y le guste el merengue

ANEXO 2. Actividad central

Colegio Grancolombiano

Institución Educativa Distrital

P.E.G:

Hacia una comunidad incluyente, productiva y respetuosa de los derechos humanos

Las tres tarjetas

Nombre: ____ Curso ___________

Vamos a considerar el siguiente experimento aleatorio:

Se tiene una caja encima de la mesa, dentro de la caja hay tres tarjetas. Una es de color azul en ambas caras, otra es de color rojo en ambas caras y otra es de color azul en una cara y rojo en la otra. Una persona toma de manera aleatoria una de las tres tarjetas, luego esa misma persona muestra una de sus caras a otra persona (en este caso los estudiantes). Esta segunda persona tratará de adivinar el color de la cara que no está viendo (le diremos cara oculta). Después de 10 segundos, se le mostrará la cara que estaba oculta, ahí finaliza el experimento y sabremos si adivinó.

Para verificar si todos tenemos claro el experimento vamos a ensayar dos veces, con una modificación: en el momento de adivinar el color de la cara oculta, ustedes levantan la mano cuando yo les preguntaré quienes creen que la cara oculta es de un color o de otro. Noten que cuando se repite el proceso, la tarjeta que se extrae se pone de nuevo en la caja antes del siguiente ensayo.

1. ¿Te inclinarías a elegir el mismo color de la cara mostrada o el color contrario? ¿Te daría lo mismo? ¿por qué?

2. Utilizando el diagrama de árbol, ¿cuáles son los posibles resultados que se pueden dar en el experimento?

Confirmado que se entendió el experimento, vamos a plantear un juego, repetiremos el experimento 12 veces (ensayos) y cada vez que aciertes ganas un punto.

3. En la siguiente tabla lleva el registro de tus predicciones (usa A para Azul y R para Rojo) y puntaje.

	Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4	Ensayo 5	Ensayo 6	Ensayo 7	Ensayo 8	Ensayo 9	Ensayo 10	Ensayo 11	Ensayo 12	Total
Color de la cara vista													
Predicción de la cara oculta													
Color observado de la cara que estaba oculta													
PUNTOS (1 si acertaste con la predicción, 0 si no)													

4. ¿Usaste alguna estrategia para ganar en este juego? _____ Si sí usaste una estrategia ¿Cuál fue?

5. Reúnete con 4 compañeros más, ¿quién obtuvo mayor puntaje? __________________

6. Teniendo en cuenta los puntajes ¿Cuál sería la mejor estrategia para ganar en este juego?

7. Teniendo en cuenta los resultados de la tabla y/o el diagrama de árbol responde las siguientes preguntas:

   - Si se muestra una cara azul ¿cuál es la probabilidad que la cara oculta sea roja? (exprésalo en fracción)

   - ¿Cuál es la probabilidad de acertar? (exprésalo en fracción)

ANEXO 3. Actividad de cierre

Colegio Grancolombiano

Institución Educativa Distrital

P.E.G:

Hacia una comunidad incluyente, productiva y respetuosa de los derechos humanos

¿Las pruebas médicas para VIH son confiables?

Nombre: ____ Curso _________

El VIH o Virus de la Inmunodeficiencia Humana es un microorganismo que ataca al Sistema Inmune de las personas, debilitándolo y haciéndole vulnerable ante una serie de infecciones, algunas de las cuáles pueden poner en peligro la vida. Se caracteriza clínicamente por una infección asintomática durante un período variable de tiempo debido al equilibrio que se produce entre replicación viral y respuesta inmunológica del paciente. En etapas avanzadas de la infección se rompe este equilibrio aumentando la Carga Viral (CV) y deteriorando la función inmune, lo que favorece la aparición de otras infecciones, clásicas y oportunistas, y de tumores, llegando a la etapa de SIDA (Síndrome de la Inmunodeficiencia Adquirida).[9]

1. En Colombia durante el período 2009-2010, a 423.393 mujeres en control prenatal se les realizó el examen del VIH, de ellas 644 padecían el virus[10]. Si escogiéramos al azar a una de estas 423.393 mujeres ¿Cuál es la probabilidad de que tenga VIH?

2. Supongamos que tenemos una prueba para diagnosticar VIH (la prueba ELISA). Como sabes las pruebas médicas no son infalibles (pueden fallar), a estos fallos se les denomina falso positivo o falso negativo. ¿Sabes qué es un falso positivo? ____ ¿Sabes qué es un falso negativo? _____ Si lo sabes, explica en tus palabras lo que entiendes por cada uno de estos términos.

9 Información tomada de http://www.supersalud.gob.cl/difusion/572/w3-article-592.html
10 Información obtenida de https://www.minsalud.gov.co/Paginas/ColombiacumpleconindicadorespositivosenlaluchacontraelVIHSida.aspx

3. Un estudio realizado en 2009[11] por la Universidad Cooperativa de Colombia en Medellín determinó: En un grupo de estudio de 5.850 personas que se hicieron el examen, la prueba dió resultado positivo en 149 personas, de las cuales se comprobó que 106 lo padecían. Por otro lado, de las pruebas que salieron negativas se concluyó que 6 personas si lo padecían.

   Trata de organizar la información anterior en la siguiente tabla:

	Prueba +	Prueba -	Total
Padecen VIH			
No padecen VIH			
Total			

   Teniendo en cuenta los resultados de la tabla:

4. ¿Qué probabilidad hay de tener el virus y que la prueba marque positivo?

5. ¿Qué probabilidad hay de no tener el virus y que la prueba marque positivo?

6. Regularmente, cuando la prueba marca positivo lo que interesa saber es ¿Qué probabilidad hay de tener VIH?

7. De forma análoga, cuando la prueba marca negativo lo que interesa saber es ¿Qué probabilidad hay de tener VIH?

8. Para saber qué tan buena es la prueba interesa saber: si la persona sufre de VIH ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba marque positivo?

[11] http://www.scielosp.org/pdf/rsap/v15n6/v15n6a12.pdf