UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal por medio de tareas que enfatizan la constante de proporcionalidad

Susana Betancur Peláez

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2019

Aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal por medio de tareas que enfatizan la constante de proporcionalidad

Susana Betancur Peláez

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Gilberto de Jesús Obando Zapata

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Medellín, Colombia

2019

Resumen

El concepto de función lineal, a pesar de ser uno de los ejes conceptuales que guarda mayor trascendencia en la educación matemática, genera múltiples dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes, debido a que su estudio suele llevarse a cabo desde un enfoque tradicional que enfatiza la mecanización de procedimientos y la aplicación de algoritmos, sin realizar una construcción conceptual de la función ni de la función lineal como tal. Por ello en este trabajo se propuso presentar a los estudiantes de Noveno grado de la Institución Educativa Débora Arango Pérez, algunas tareas (término acuñado desde la Teoría de la Actividad) de proporcionalidad directa que enfatizan la constante de proporcionalidad y parten de situaciones cotidianas, encontrando que la idea de relación funcional está presente en los estudiantes de manera cualitativa, específicamente la de relación funcional de tipo lineal, y que su identificación se promueve tras el contacto con situaciones de cambio, variación y movimiento.

Palabras clave: Función Lineal, análisis funcional, proporcionalidad directa, constante de proporcionalidad, Teoría de la Actividad, actividad matemática, tarea.

Abstract

The linear function concept, despite of being one of the core ideas that provide the greatest transcendence in math education, generates multiple difficulties in students' comprehension due to its study is used to be carried out from a traditional approach that is emphasized in procedure mechanization and algorithm application, without making a conceptual construction of the function nor the linear function itself. That is why in this dissertation, some direct proportionality tasks, term taken from the Theory of the Activity, that emphasize the proportionality constant and they start from current situations, were proposed to be presented to Débora Arango Pérez Educational institution ninth graders, finding that the functional relation idea is immersed in a qualitative way in the students, specifically the linear type functional relation, and its identification is promoted through the contact of change, variation and movement situations.

Key words: Lineal function, functional analysis, direct proportionality, fixed proportional value, Activity Theory, mathematic activity, assignment.

Contenido

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

La mayoría de las dificultades que presentan los estudiantes con las Matemáticas están relacionadas con el desarrollo de procesos de enseñanza centrados en la resolución de operaciones y la aplicación de algoritmos de manera repetitiva. En el caso de las funciones, y de manera más particular, de la función lineal, los estudiantes se adiestran en la aplicación de fórmulas y la realización de procedimientos operativos para formular ecuaciones que relacionen dos variables, representar la función gráficamente en el plano cartesiano, calcular numéricamente su pendiente, o para encontrar el valor de la variable dependiente para determinado valor de la variable independiente.

Sin embargo, cuando se les indaga a los estudiantes por la idea de función salen a relucir dificultades para dar alguna respuesta. Lo mismo sucede cuando se les pide enunciar ejemplos de situaciones reales donde se pueda apreciar una función lineal o la utilidad de ésta para analizar alguna situación del entorno.

A propósito, Sierpinska (citado en Ruiz, 1994) menciona que algunos obstáculos que pueden encontrarse en la comprensión de la función por parte de los estudiantes responden a aspectos como la dificultad para explicar los cambios que se dan en una relación funcional, el limitado uso de la expresión analítica de la función que sirve como herramienta para modelizar situaciones de la vida real, la dificultad para identificar no sólo lo que cambia sino también cómo cambia, el escaso uso de contextos que flexibilicen el uso de diferentes modos de expresión y representación, y la primacía de la definición “teórico-conjuntista de función” que limita su comprensión al campo formalista.

En el mismo texto la autora afirma que la enseñanza de las Matemáticas “ha deformado el objeto función adaptándolo fuertemente a sus necesidades de evaluabilidad “rompiendo epistemológicamente” con los problemas y contextos a los que estuvo ligada esta noción desde su nacimiento” (Ruiz, 1994, p.277).

Trigueros (2009) explica que incluso en niveles universitarios la enseñanza de las Matemáticas se desarrolla de manera tradicional, haciendo énfasis en el uso de definiciones y teoremas, situación a la que no escapa el concepto de función.

En esta misma línea, Betancur (2013) al referirse a la enseñanza del concepto de función sostiene que los procesos que para este efecto se llevan a cabo, “están más cercanos de la formalización que de la experimentación, logrando mostrar un conocimiento acabado que conduce de manera inmediata a la memorización y mecanización de definiciones y procedimientos” (p.2).

Introducción

Bien, tras el objetivo de establecer bases sólidas para el proceso de conceptualización de la función lineal en estudiantes de grado Noveno de la Institución Educativa Débora Arango Pérez, se proponen algunas tareas desde la Teoría de la Actividad, perspectiva que tiene su cuna en la Teoría Cultural de la Objetivación (Radford 2006-2017). Dichas tareas son formuladas a partir de situaciones cotidianas, y enfatizan la constante de proporcionalidad para que los estudiantes identifiquen relaciones funcionales de tipo lineal. Posteriormente se analiza la actividad matemática que los chicos desarrollan cuando tienen contacto con las tareas. Es necesario resaltar que el interés de este trabajo se limita al reconocimiento de dichas relaciones y no llega hasta la construcción del concepto de función, ni de función lineal.

El Capítulo I del presente documento hace una presentación del planteamiento del problema y los objetivos establecidos, junto con la justificación que los soporta. Se incluye además el referente teórico que apunta la Teoría de la Actividad y la Teoría Cultural de la Objetivación, tal y como se mencionó un par de líneas atrás, al igual que el soporte conceptual matemático sobre el cual se edifica la propuesta. El Capítulo II incluye el diseño metodológico que se sitúa en un enfoque cualitativo, en concordancia con el cual se asume un método inductivo de corte crítico social que hace posible identificar problemáticas en el escenario educativo, generar reflexiones y emprender acciones de mejoramiento. Los instrumentos de recolección de la información consistieron en entrevistas a los estudiantes, pruebas diagnósticas y varias pruebas (que se denominarán tareas en concordancia con la Teoría de la Actividad).

El último capítulo reúne todo lo relacionado con la intervención hecha a los estudiantes, así como conclusiones, recomendaciones y referencias.

1. Capítulo I. Diseño Teórico

1.1. Selección y delimitación del tema

Aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal a partir de tareas que enfatizan la constante de proporcionalidad, formuladas desde situaciones cotidianas.

1.2 Planteamiento del problema

1.2.1 Descripción del Problema.

Bien se sabe que el campo conceptual de las funciones constituye una de las dimensiones fundamentales en las Matemáticas, pues alrededor de él se edifica una amplia cantidad de conceptos y procesos de razonamiento que son la puerta de entrada a las Matemáticas superiores. Tal y como sucede con otros objetos matemáticos, la enseñanza de las funciones se desarrolla generalmente por medio de estrategias que acentúan el uso de definiciones formales y procedimientos algorítmicos para la resolución de ejercicios rutinarios donde se pide encontrar algún resultado, prestando poca atención a la construcción conceptual que se esconde detrás de la idea de función. Esto hace que en la mayoría de los casos los estudiantes realmente no comprendan qué es una función, aunque puedan tener una gran capacidad operativa para resolver ejercicios aplicativos (MEN, 2006-2008).

El problema general en la escuela consiste en que se ha centrado el interés en que los estudiantes aprendan la definición de función como conjunto de pares ordenados, lo cual genera importantes repercusiones pedagógicas como la dificultad para comprender un concepto de tal formalidad, la imposibilidad de ver en la función un concepto matemático que atrapa la variación y el cambio, y la dificultad para construir interrelaciones con otras ciencias (MEN, 2006, p.128).

Al respecto, Azcárate (1992-1996), Sierpinska (1985-1988) & Ruiz (1998) (citados por Roldán 2013), han manifestado que:

> Tradicionalmente en la escuela los maestros centran su interés en mostrar el aspecto algebraico del concepto dejando de lado en muchas ocasiones un análisis profundo y detallado sobre los elementos propios que permitan consolidar un concepto con suficiente significado para ser aprendido convenientemente. Consecuencia de esto es que los estudiantes en muchos casos terminan teniendo la posibilidad de repetir rutinas sobre objetos algebraicos que poco sentido tienen para ellos. (p.47)

Si se analiza este hecho es posible entender que la dificultad para la conceptualización de la función no se limita a los últimos años de la educación Básica o a la Media, grados en los que tradicionalmente se ha considerado que debe ser abordado este concepto (MEN, 2008). La dificultad va más allá y se extiende desde los primeros grados escolares donde se aborda la multiplicación como suma de sumandos iguales y no como proporcionalidad directa (Betancur, S., Gallego, J., Restrepo, D. & Tapias, J., 2014). Este elemento constituye el suelo sobre el cual se instala la idea de función ya que contiene la noción de correspondencia entre dos magnitudes que varían de manera interrelacionada.

Tal y como se encuentra enunciado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas:

> El estudio de las funciones en la educación básica secundaria tiene más sentido si se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio, como se propuso en la Renovación Curricular. Es importante que los alumnos se sensibilicen ante los patrones que se encuentran a diario en diversas situaciones, a describirlos y a elaborar modelos matemáticos de esos patrones y a establecer relaciones. Si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas, como se ha hecho tradicionalmente, se está

> privando al alumno de la experiencia de modelación para llegar a esos sistemas simbólicos. (MEN, 1998, p.80)

Resulta necesario iniciar el recorrido por el mundo de las funciones no desde su definición formal y el reconocimiento de los algoritmos para calcular algún valor desconocido, sino a partir de la identificación de relaciones entre dos magnitudes, entendiendo de qué manera varía cada magnitud en su interior y cómo esto afecta la variación de la otra.

Se debe resaltar que uno de los tipos de relación entre dos magnitudes, es la relación funcional y puede presentarse de diversas formas, siendo una de ellas la proporcionalidad directa, la cual juega un papel importante en la comprensión de las demás formas de relación ya que en ella se pueden apreciar con mayor claridad los patrones y regularidades en fenómenos de variación. “La proporcionalidad directa es un caso particular de la función lineal, importante en la modelación de variados fenómenos” (Posada & Villa, 2006, p.174).

Este hecho centra la mirada en la función lineal – que puede interpretarse como “un modelo matemático que atrapa la variación y el cambio de magnitudes que se relacionan a través del cociente constante entre sus respectivas diferencias” (Posada & Villa, 2006, p.5,66)- debido no sólo a que en ella se encuentra la proporcionalidad directa -que como se manifestó antes, facilita la identificación de regularidades en fenómenos de cambio-, sino que además abre la puerta al estudio de situaciones cotidianas donde se presentan esos fenómenos de cambio.

Aparece en el panorama la idea de comenzar el estudio de las funciones a partir del reconocimiento de relaciones funcionales de tipo lineal, enfatizando la identificación de la constante de proporcionalidad que correlaciona dos magnitudes distintas, para así comprender la manera en que a partir de cierto proceso de transformación que hace aumentar o disminuir una cantidad de una magnitud, se genera que otra cantidad de una segunda magnitud igualmente se transforme. En este caso se dice que las dos magnitudes covarían o mejor aún, que están correlacionadas cuando se puede determinar o cuantificar la manera en que la variación de las cantidades en una magnitud afecta la variación de las cantidades en la otra.

Generalmente las acciones encaminadas a la enseñanza de la función son realizadas al margen de la experimentación de situaciones que permitan que la idea de función adquiera sentido, lo cual se convierte en un obstáculo a la hora de abordar y comprender el concepto. De allí la necesidad de propiciar el contacto con situaciones extraídas del entorno cercano a los estudiantes, para que sea posible atribuir un sentido a las relaciones funcionales y con ello comprenderlas de manera más clara (Sierpinska, retomado por Betancur, 2013).

1.2.2 Formulación de la pregunta.

¿De qué manera las tareas de proporcionalidad directa que enfatizan la constante de proporcionalidad promueven una aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal?

1.3 Justificación

El trabajo alrededor de las funciones resulta fundamental para el aprendizaje de las matemáticas por tres razones primordiales. En primer lugar, da cumplimiento a uno de los principales objetivos de la educación matemática, consistente en desarrollar los cinco pensamientos matemáticos, a saber: Numérico, Espacial, Variacional, Métrico y Aleatorio. Algunos ejemplos que permiten ilustrar lo anterior son: el tratamiento aritmético que requiere una función, el cálculo de áreas y su modelación, el análisis variacional que implica cualquier función, el proceso de medición como actividad que atribuye significado a los datos y valores matemáticos, y el análisis funcional para el cálculo de probabilidades.

En segundo lugar, el estudio de las funciones abre la posibilidad de desarrollar una actividad matemática que tome como referente el entorno del estudiante y algunas situaciones cotidianas marcadas por la variación y el cambio que se presentan dentro de ese entorno. Así pues, es sencillo encontrar situaciones de la vida diaria que sirvan como excusa para el estudio de las funciones, tales como fenómenos físicos sobre movimiento, prácticas agrícolas como el crecimiento de las plantas en el transcurso del tiempo o la optimización del terreno para la siembra de cosechas, actividades económicas como el cobro de servicios públicos en relación con el consumo por mes, aspectos sociales y económicos como el crecimiento demográfico, entre otros; que permiten un acercamiento a las Matemáticas del entorno de los individuos.

El potencial del estudio de las Matemáticas del entorno es amplio, por lo que han surgido diversas investigaciones a su alrededor. Puntualmente en lo que respecta al aprovechamiento de los fenómenos y las situaciones de cambio y variación de la vida cotidiana para la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, cabe mencionar algunos trabajos de grado de Maestría que se han construido en el país, como son: *Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes de grado décimo al generar modelos lineales (Bossio, 2014), Aproximación a las funciones desde la modelación de situaciones cinemáticas de física con estudiante de grado noveno de básica secundaria de la Institución Cocorná (Giraldo, 2012), Modelado de funciones: Una propuesta didáctica mediada por diversos contextos de las ciencias naturales (Medina, 2012), Algunas herramientas de la Interdisciplinariedad para la comprensión del Concepto de función lineal (Gómez, 2011).*

En tercer lugar se ubica la gama de oportunidades que ofrece el hecho de que las funciones puedan ser expresadas desde distintas formas de representación, como son gráfica, tabular, algebraica y por medio del lenguaje natural; lo que facilita una mejor comprensión del concepto pues tal y como lo indica Duval (citado por

Posada & Villa, 2006), el uso de un solo registro de representación no permite la comprensión del objeto matemático, lo que sugiere que la utilización de varios registros de representación fortalece la comprensión de un concepto.

Es importante resaltar que contrario a lo que comúnmente puede creerse, el estudio de las funciones no corresponde exclusivamente a los grados Noveno, Décimo y Once; comienza desde los niveles iniciales con la construcción conceptual de la multiplicación como proporcionalidad directa, que sirve como soporte para la identificación y análisis de relaciones de variación, las cuales a su vez son la puerta de entrada al mundo de las funciones en su expresión formal.

En relación con lo anterior, el Ministerio de Educación Nacional afirma:

> Así, sin negar que el estudio formal de este concepto (función) requiere de elementos teóricos abstractos y por tanto sólo sería pertinente en los últimos grados de escolaridad, también se considera posible generar contextos a través de los cuales se logra dar inicio a su comprensión desde los primeros años. Una de ellas, como se mostró en capítulos anteriores, es a través del razonamiento proporcional, de actividades centradas en el estudio de patrones y regularidades, desde actividades que atrapen aspectos de la generalidad desde los fenómenos de variación, etc. (MEN, 2006, p.129)

Es por todo lo anterior que antes de abordar las funciones de manera formal y operativa, resulta fundamental conceptualizar la idea de función como tal a través de la identificación de relaciones funcionales en diferentes contextos, en lo posible provenientes de la cotidianidad.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General.

Analizar la manera en que las tareas multiplicativas de proporcionalidad directa que enfatizan la constante de proporcionalidad hacen posible una aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal, en estudiantes de Noveno grado de la Institución Educativa Débora Arango Pérez.

1.4.2 Objetivos Específicos.

- Diagnosticar la forma en que los estudiantes resuelven tareas provenientes de situaciones cotidianas que contienen relaciones de variación.

- Caracterizar la actividad matemática relacionada con la función lineal que desarrollan los estudiantes al resolver tareas multiplicativas de proporcionalidad que enfatizan la constante de proporcionalidad.

1.5 Marco Referencial

1.5.1 Referente Antecedentes.

Se toma como referente para el desarrollo de este trabajo la tesis de Maestría titulado *A medida como instrumento mediador para o ensino da multiplicaçao no ensino fundamental,* Quintero (2016). Allí se presenta una propuesta para la enseñanza de la multiplicación en los primeros grados escolares a partir del concepto de medida, entendiendo la multiplicación como un isomorfismo de medidas y con el objetivo de plantear situaciones que permitan desarrollar el pensamiento multiplicativo, el cual constituye uno de los principales intereses de la educación matemática.

Ahora bien, en el ámbito local ha habido también interés por esta cuestión, principalmente en la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, donde hace aproximadamente media década se han construido múltiples trabajos de grado alrededor de esta perspectiva. En primera instancia hablaremos del trabajo de pregrado titulado *Los Medios Culturales Semióticos: Una posibilidad para aproximarse a la Multiplicación,* Betancur, S., Gallego, J., Restrepo, D. & Tapias, J. (2014), el cual fue elaborado por la autora del presente trabajo en colaboración con otros docentes de matemáticas.

Este trabajo se enmarca dentro de la Teoría de la Actividad, perspectiva de la cual se desprende la Teoría Cultural de la Objetivación (Radford 2006-2017) y que hace énfasis en la actividad del individuo como escenario para el aprendizaje, en este caso, de la multiplicación concebida como proporcionalidad directa. Aquí se propone un par de tareas para analizar el uso de los Medios Culturales Semióticos por parte de los estudiantes y la influencia que éstos tienen en su aprendizaje.

Dicho trabajo sirve como base para el presente, en el cual se pretende darle continuidad haciendo énfasis en esta ocasión al tipo de tareas que, al enfatizar la constante de proporcionalidad, posibilitan una aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal, lo que a su vez permitiría una sólida construcción del concepto de función lineal.

Otro trabajo de pregrado que sirve como antecedente es *El aprendizaje de la multiplicación a partir de tareas de proporcionalidad directa*, Quintero & Mejía (2014), donde se analiza la actividad matemática de estudiantes de Educación Primaria a partir de tareas propuestas por las docentes, conceptualizadas desde la multiplicación como proporcionalidad directa y que tratan de fortalecer la dialéctica entre lo individual y lo social.

En el nivel de Posgrado también han surgido propuestas como la tesis de Maestría *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional*, Torres (2013), también de la Universidad de Antioquia, y la tesis doctoral *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica*, Obando (2015), de la Universidad del Valle.

La primera analiza los procesos, instrumentos y objetos de conocimiento que ponen en juego estudiantes de Básica Primaria en el tratamiento de situaciones de multiplicativas del tipo de isomorfismo de medidas. La segunda hace una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad desde una perspectiva histórico-cultural centrada en la medición y la comparación.

Es importante mencionar que el doctor Obando ha hecho otros aportes al campo en colaboración con destacados investigadores de la educación matemática, las cuales han impulsado sin duda la conceptualización de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación desde un enfoque histórico-cultural. Tal es el caso de trabajos como Profesora*, ¿Qué es multiplicar?*, Obando (2017); *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte*, Obando, G., Vasco, C. & Arboleda, C. (2014) y *Razón, proporción, proporcionalidad: Configuraciones epistémicas para la Educación Básica*, Obando, G., Vasco, C. & Arboleda, C. (2015).

Los trabajos mencionados en el párrafo anterior representan un esfuerzo por definir conceptos como razón, proporción y proporcionalidad, importantes a la hora de hablar de multiplicación como proporcionalidad directa, en busca de trascender el tradicional e insuficiente modelo de multiplicación como suma de sumandos iguales. Lo anterior constituye un antecedente para el presente trabajo debido a que la edificación del concepto de función lineal emerge de elementos como razón, proporción y proporcionalidad, o que implica que parte de la comprensión de la multiplicación desde esta perspectiva.

Finalmente, se toma como referente la tesis de Maestría en Docencia de las Matemáticas titulada *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*, Posada, F. & Villa, J. (2006), donde se diseña e implementa una propuesta didáctica para la aproximación al concepto de función lineal tomando como referentes la variación, la modelación matemática y los registros semióticos de representación.

1.5.2 Referente Teórico.

En primer lugar, respecto al enfoque histórico-cultural, debe mencionarse que es una perspectiva que hace énfasis en la influencia que el entorno histórico, social y cultural tiene sobre el aprendizaje, el saber y el conocimiento de los individuos. Así, se reconoce que los procesos de construcción de conocimiento y adquisición de aprendizajes no tienen lugar exclusivo en la actividad mental del sujeto, sino que parten del entorno mismo en que éste se desenvuelve, considerando los objetos y las interacciones que establece con sus pares.

El principal representante de este enfoque es el psicólogo Lev Vygotsky (1972-1988) quien habla de la influencia del entorno histórico, social y cultural en el desarrollo de los individuos. Su trabajo fue nutrido por colaboradores y por múltiples teóricos en diferentes lugares y épocas hasta la actualidad, donde esta perspectiva ha cobrado fundamental importancia a la hora de pensar los factores que influyen en el desarrollo de un individuo.

A partir del enfoque histórico-cultural han surgido algunas perspectivas como la Teoría Cultural de la Objetivación, formulada por Luis Radford. De manera muy general, ésta propone que el aprendizaje es una adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por elementos social y culturalmente construidos, (Radford, 2006). Según esto, el pensamiento no sólo tiene lugar en el cerebro del individuo, sino también en el entorno en que éste se desenvuelve y los artefactos presentes en él cuyos significados culturalmente constituidos mediatizan ese pensamiento.

Dentro de la Teoría de la Objetivación se ubican tres conceptos claves: Saber, Conocimiento y Aprendizaje (Radford, 2013). En primer lugar, el concepto de saber dentro de esta teoría deja de lado la concepción de transmisión para asumir la idea de proceso de acción y reflexión determinado social y culturalmente; más precisamente, el saber consiste en una secuencia de acciones instauradas en prácticas sociales que impulsan la reflexión del sujeto. En segundo lugar, el conocimiento es “el contenido concreto conceptual” (Radford, 2013, p. 13) que resulta de la mediación generada por la actividad definida histórica y culturalmente. Así, la actividad del sujeto hace posible el conocimiento y éste a su vez permite el saber en una relación bidireccional que se mueve en ambos sentidos. Finalmente, en cuanto al aprendizaje es preciso retomar lo planteado por Radford y sus colaboradores:

> El aprendizaje es visto como una “adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modelos epistémicoculturales históricamente formados” (Radford, 2006a, p.105). Este aprendizaje no es

> una mera imposición o transmisión de contenidos conceptuales, sino que consiste (…) en un proceso social de dotación de significados dentro de una actividad mediatizada por la interacción social, artefactos y signos de naturaleza diferente (símbolos matemáticos, lenguaje, gestos, etc). (Guzmán, Miranda & Radford, 2007, p.8, 10).

Al hablar de Teoría Cultural de la Objetivación aparecen los conceptos de cultura e historia, así como el de Sistemas Semióticos de Significación Cultural. Luis Radford presenta la postura histórica y transformadora que sobre el concepto de cultura asumió Marx, quien la concibe como una entidad dinámica creada por los individuos y que en un movimiento dialéctico ofrece a ellos las condiciones para que creen sus propios sistemas de pensamiento. El concepto de cultura depende de la forma en que se conciben el individuo y la relación individuo-colectivo, por ello las culturas son diferentes y la producción del saber así como el saber mismo, también son diferentes y afectan de manera particular a los individuos (Radford, 2014).

En cuanto a la historia, en el mismo texto el autor esboza la postura de Kant quien la pone en movimiento alrededor de la idea de razón que se desarrolla a su vez por autorregulación. Posteriormente presenta la propuesta de Marx donde la historia y la razón son mutuamente constitutivas y presentan una relación dialéctica, por lo cual se habla de historias en lugar de historia. La historia depende de las razones contextuales que la generan, es decir, ideas, hechos y desarrollos prácticos. Así, la historia es un medio para comprendernos como seres históricos (Radford, 2014).

Por otra parte, la práctica social está inmersa en sistemas simbólicos que la organizan; esto es lo que recibe el nombre de Sistemas Semióticos de Significación Cultural (Radford, 2014). Estos Sistemas cumplen tres funciones: (1) entender el mundo como objeto de conocimiento, (2) analizar las formas de acción como productoras de significados, y (3) comprender que la cultura organiza las relaciones de los individuos entre ellos y con el mundo. Para entender mejor estas funciones, es prudente retomar lo que al respecto postula Radford:

> (1) una tiene que ver con las ideas que una cultura se hace respecto a la naturaleza del mundo (la dimensión ontológica) y cómo el mundo puede ser (o no) objeto de conocimiento; (2) la segunda función ofrece formas de conducta y de acción (a veces implícitas, a veces explícitas) que son productoras de significados. Es aquí donde aparece la frontera siempre borrosa entre la conducta ética y moral (los límites de lo permitido); (3) la tercera función tiene que ver con la manera en que la cultura organiza y legitima las relaciones de los individuos con el mundo y entre ellos. (Radford, 2014, p.10)

Ahora, en cuanto al concepto de Objetivación específicamente, entiéndase como el proceso de toma de conciencia subjetiva del objeto cultural; es un proceso social y progresivo donde el individuo toma conciencia de “algo” frente a él, notando gradualmente su generalidad mientras le atribuye sentido. Esta idea de objetivación es coherente con lo planteado en Betancur et al. (2014), donde el término Objetivación refiere al aprendizaje que resulta de dotar de sentidos y significados los objetos culturales para reflexionar sobre ellos.

Quiere decir esto que la Objetivación bajo ninguna circunstancia es un proceso individual, siempre es de carácter social e implica ser-con-otros, esto es aprender a estar con otros y abrirse a sus conciencias; a propósito, una de las premisas de la Teoría cultural de la Objetivación sostiene que “el individuo es individuo en tanto que es ser-con-otros” (Radford, 2006, p.125).

La Teoría Cultural de la Objetivación en el contexto particular del aprendizaje de las matemáticas, sostiene que éste implica la relación del sujeto consigo mismo y con los objetos culturalmente construidos, a partir de lo cual adquiere su experiencia personal. En este sentido, el aprendizaje matemático es facilitado por la relación con el otro, que en el aula de clase se genera en la dinámica del trabajo grupal donde se promueven la discusión y el intercambio de ideas, necesarios para esa construcción personal que debe realizar el individuo.

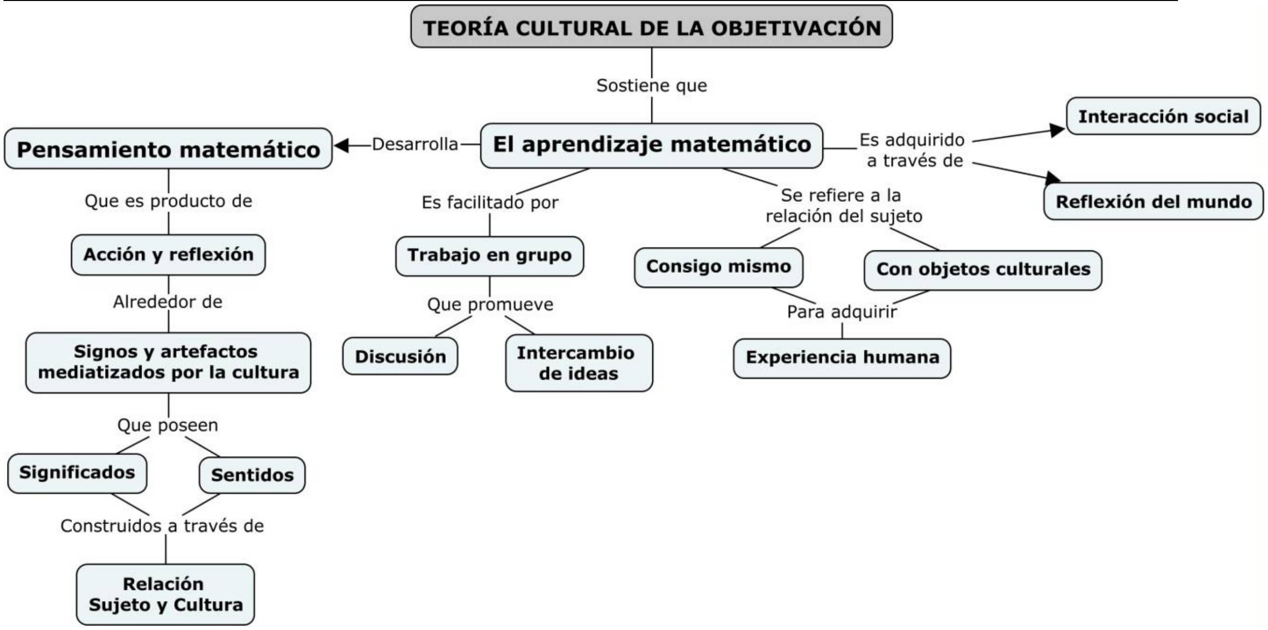
Dentro de la teoría aparecen los conceptos de pensamiento y aprendizaje, entendiendo el primero como “una práctica social y una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. (…) Por su parte el aprendizaje se trata de dotar de sentidos a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura” (Radford, 2006, p.107).

El aprendizaje se adquiere en la relación entre la interacción social y la reflexión del mundo, que actúa de manera biunívoca debido a que la interacción se desarrolla y se caracteriza a partir de las construcciones mentales e individuales que han realizado los sujetos con base en su experiencia. Pero a su vez, las nuevas reflexiones y la toma de conciencia emergen de esa interacción social. De este modo, para entender la cognición de un individuo es necesario entender la cognición del grupo social.

Ahora, el pensamiento es el producto de la acción y la reflexión alrededor de signos y artefactos mediados por la cultura, los cuales poseen significados y sentidos construidos a través de la relación entre el sujeto y la cultura. De allí la importancia de favorecer procesos en el aula que abran espacio a la interacción con el otro, y que propicien el contacto del sujeto con signos y artefactos que movilicen la elaboración y reelaboración de sentidos y significados, para lo cual es necesario recrear situaciones que resulten cotidianas y cercanas a los estudiantes.

La Figura 1 resume los anteriores planteamientos.

Figura 1. Gráfico: Teoría Cultural de la Objetivación.



Fuente: Elaboración del autor

En esta línea, y en términos de Radford (2006), la Objetivación implica la adquisición del saber mediante un proceso de elaboración activa de significados. De esta idea se deduce entonces que hacer matemáticas en términos de objetivación va más allá de resolver problemas, lo cual no sería un objetivo sino un medio para reflexionar, es decir, para generar pensamiento. El objetivo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no se limita pues a la aproximación de algún concepto ni al adiestramiento en la resolución de problemas; "apunta a la elaboración por parte de del alumno de una reflexión definida como relación común y activa con su realidad histórico-cultural. (…) Aprender matemáticas no es simplemente aprender a hacer matemáticas (resolver problemas) sino aprender a ser en matemáticas" (Radford, 2006, p.114).

¿Y qué es eso de "ser en matemáticas"? Es aprender a reflexionar en concordancia con un pensamiento que se ha constituido de manera histórica y ha tomado su forma gracias a la influencia cultural del entorno donde ha emergido. Esto puede apreciarse de manera más clara al pensar que un alumno que resuelva problemas, pero no sea capaz de explicarse ante otros individuos o comprender las formas en que ellos solucionan esos mismos problemas, entonces no logra *ser en matemáticas*.

Por otra parte, y resaltando que la relación entre el individuo y el entorno se teje gracias a la actividad que el primero ejecuta en el segundo, es preciso referirse a la Teoría de la Actividad (T.A en adelante), la cual tiene sus inicios varias décadas atrás con la obra de Vygotski, quien tras el interés de entender el desarrollo psicológico de los individuos, propuso como unidad de análisis la actividad de los mismos, dando así los primeros cimientos de la T.A, que posteriormente fue desarrollada en gran medida por Leontiev.

La T.A. “busca analizar el desarrollo del pensamiento dentro de las actividades prácticas sociales” (Sannino, A., Daniels, H. & Gutiérrez, K, s.f)., ya que es la actividad el motor que permite estructurar el desarrollo de una persona y su conciencia, e incluso transformar la realidad misma.

Además, la T.A considera “la psiquis como producto derivado del desarrollo de la vida material externa que en el curso del desarrollo histórico social se transforma en actividad interna, es decir, en actividad de la conciencia” (Martínez M., 1999, p.37). De este modo la actividad inicial y básica es la externa y es en ella que se basa la actividad interna que concluye en la conciencia

En este marco, la Actividad según Martínez (1999), se entiende como:

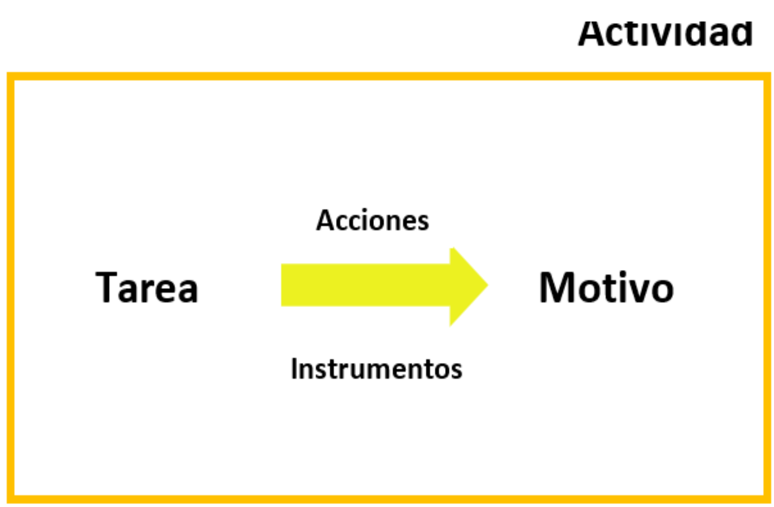
> La actividad del sujeto parte de una necesidad, de una carencia del objeto por parte del individuo. Pero para ello es condición esencial que el objeto haya tenido y tenga su existencia propia en la realidad exterior. A partir de ese hecho se generan ciertas acciones que obedecen a determinados motivos, los cuales, a su vez, se vinculan con los fines de la actividad misma. En este sentido, la actividad es acción con finalidad. Si la actividad pierde su motivo, puede transformarse en acción y ésta si se modifica su finalidad puede convertirse en operación. (p.92)

En el marco de la Teoría de la Actividad aplicada a la educación matemática, el primer eslabón de la cadena de la actividad que desarrolla el individuo es lo que denominaremos tarea, y que puede entenderse como toda aquella elaboración que promueve en el individuo el desarrollo de acciones físicas e intelectuales. La tarea es diseñada por el docente con un motivo para propiciar ciertas acciones en el sujeto alrededor de los objetos matemáticos, y para evidenciar los procesos que desarrolla en la ejecución de las acciones en busca del motivo.

> Pero, el individuo pocas veces asume el mismo motivo del docente y crea otro(s) diferente(s) en el mismo marco de la tarea y, por ende, de los objetos matemáticos involucrados, aunque muchas veces no se hagan explícitos para él. La tarea es el punto de partida de la actividad pues desencadena una serie de acciones para alcanzar el motivo propuesto. Durante este proceso surge la objetivación de los conocimientos socialmente construidos inmersos en la tarea; y todo esto a su vez constituye lo que conocemos como actividad (Betancur et al. 2014).

La Figura 2 ilustra la organización de la actividad:

Figura 2. Gráfico: Actividad.



Fuente: Elaboración del autor

Por otra parte, y según lo planteado dentro de la Teoría de la Actividad, una vez es propuesta la tarea, se utilizan los instrumentos disponibles para llevar a cabo las acciones del individuo. Con esto se hace referencia a los Medios Culturales Semióticos, entendidos como el conjunto de objetos, artefactos, términos lingüísticos, gestos y signos que se utilizan con el fin de evidenciar el proceso que se desarrolla alrededor de los motivos de acción de los individuos. Según Betancur et al. (2014) esto implica que la forma en que los individuos perciben el mundo y objetivan el conocimiento es a través de las creencias, valores, prácticas sociales, signos y artefactos, que surgen en la actividad mediada social y culturalmente.

Debe resaltarse que el término tarea es empleado en este trabajo para referirse al material de diagnóstico y de intervención que se presentó a los estudiantes.

Considérese que al hablar de artefactos se hace referencia a los objetos físicos con que se realiza alguna tarea, los cuales se convierten en instrumentos cuando son dotados de sentidos y significados por el hombre, en el marco del desarrollo de su actividad. Los instrumentos son empleados de diversas formas que dependen de las características sociales de los alumnos, del docente y del contexto dentro del cual se lleva a cabo el proceso educativo, pues la manera de utilizar esos artefactos varía de una comunidad a otra, e incluso de escuela a escuela.

Cuando los artefactos son empleados por el estudiante adquieren un significado particular que, a su vez, le permiten atribuir un sentido a los objetos matemáticos con que el individuo se enfrenta, así como los procesos que desarrolla alrededor de ellos. Esto quiere decir que el uso de los artefactos puede facilitar la comprensión por parte del estudiante, lo que hace manifiesta la trascendencia de la actividad que éste realiza con ayuda de dichos artefactos.

Desde esta perspectiva para este trabajo se plantea la necesidad de atribuir sentido e identificar relaciones funcionales de tipo lineal, para lograr así su objetivación y posteriormente construir el concepto de función lineal y objetivarla también, aunque es preciso aclarar que el propósito de la propuesta no se extiende hasta ese punto.

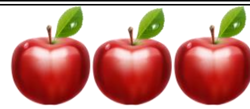
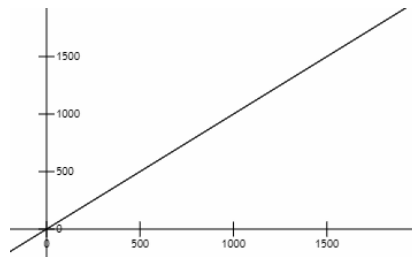
De esta manera, el análisis de lo realizado por los estudiantes a través de las tareas se hace a partir de los Medios Culturales Semióticos que ponen en juego los estudiantes. A mayor uso de Medios Culturales Semióticos, mayor cantidad de sentidos y significados se movilizan, logrando una mejor objetivación del reconocimiento de relaciones funcionales de tipo lineal.

Con el fin de nutrir el uso de estos medios, es preciso que las tareas abran posibilidad al uso de diferentes formas de representación de las situaciones de variación y cambio, ya que de esta forma pueden generarse más sentidos y significados. En este punto puede traerse a colación lo planteado por Duval respecto a que un objeto puede representarse a través de varios registros, a decir: lenguaje común, representación icónica, lenguaje algebraico y representación gráfica.

La Tabla 1 ilustra a través de un ejemplo los tipos de representación plateados por el autor:

Tabla 1. Registros de Representación.

Registro	**Representación**
Lenguaje común	Juan reúne dinero según la cantidad de manzanas que vende, siendo $500 el valor unitario.
Icónico	 $500  $1000

	 $1500
Algebraico	$y = 500x$
Gráfico	

Fuente: Elaboración del autor

Duval (citado por MEN, 2003), explica que “Si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que el autor llama <<Registros de representación>> o <<registros semióticos>>, no parece posible aprender y comprender dicho contenido” (pág. 54). Añade, citado por Posada & Villa (2006), que el uso de un solo registro de representación no permite la comprensión del objeto matemático.

Finalmente y en correspondencia con lo abordado en este referente teórico, a la hora de analizar la actividad de los estudiantes desencadenada a partir de las tareas que hacen parte de la propuesta, se toman en cuenta los siguientes aspectos: Interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante, uso de instrumentos y artefactos, y tipos de representaciones empleadas.

Se hace énfasis también en los elementos que caracterizan la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, considerados en la Tabla 2, que sirve como uno de los recursos de análisis de dicha actividad y que además de lo concerniente a la actividad como tal desde el enfoque de la Teoría de la Actividad, incluye el uso de representaciones empleadas por los jóvenes.

Tabla 2. Formato de identificación de elementos constitutivos de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes.

Identificación de elementos constitutivos de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes	
Tarea	
Motivo del docente	
Motivo asumido por el estudiante	
Acciones	
Instrumentos	
Representaciones empleadas	

Fuente: Elaboración del autor

1.5.3 Referente Conceptual-Disciplinar.

Las Matemáticas representan dificultades al interior de las aulas debido a la perspectiva que generalmente se ha asumido para su tratamiento, consistente en la memorización de algoritmos y la resolución de ejercicios que poco significado tienen para los estudiantes. A propósito, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas expresan:

> Algunos docentes encuestados las asumen (las Matemáticas) como un cuerpo estático y unificado de conocimientos, otros las conciben como un conjunto de estructuras interconectadas, otros simplemente como un conjunto de reglas, hechos y herramientas; hay quienes las describen como la ciencia de los números y las demostraciones. (MEN, 1998, p.9)

No puede negarse que este enfoque genera resultados positivos en el adiestramiento de los estudiantes en términos de operatividad, pero la construcción conceptual de los objetos matemáticos pasa a un segundo plano, lo que imposibilita atribuir sentidos y significados que permitan comprender la presencia y utilidad de esos objetos de conocimiento en situaciones y contextos concretos, y obstaculizando de este modo aprendizajes significativos.

El estudio de las funciones no se escapa de este hecho; su enseñanza es regularmente orientada a partir de un enfoque de conjuntos y de par ordenado, desconociendo su esencia que se atribuye a la idea de variación y cambio.

La perspectiva de la enseñanza tradicional algorítmica y memorística de las funciones no sólo impide una sólida construcción del concepto de función y una interpretación de su utilidad en situaciones concretas, sino que además limita el desarrollo de habilidades del pensamiento e imposibilita el establecimiento de relaciones con otras ciencias donde también juegan un papel trascendental las funciones. En este punto cabe retomar nuevamente lo expresado Sierpinska (citado por Ruiz,1994) respecto a que la enseñanza de las funciones al margen de la experimentación, ignora el papel de las Matemáticas dentro de las ciencias y genera conocimientos “fragmentados que terminan por convertirse en obstáculos a la hora de abordar otros conceptos” *(Ruiz, 1994, p.2).*

A propósito cabe mencionar lo expuesto por López y Sosa (2008) (citados por Vranker, S.; Engler, A.; Grampieri, M. & Müller, D, 2015):

> La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de construcción del concepto de función;

> las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes (p.2).

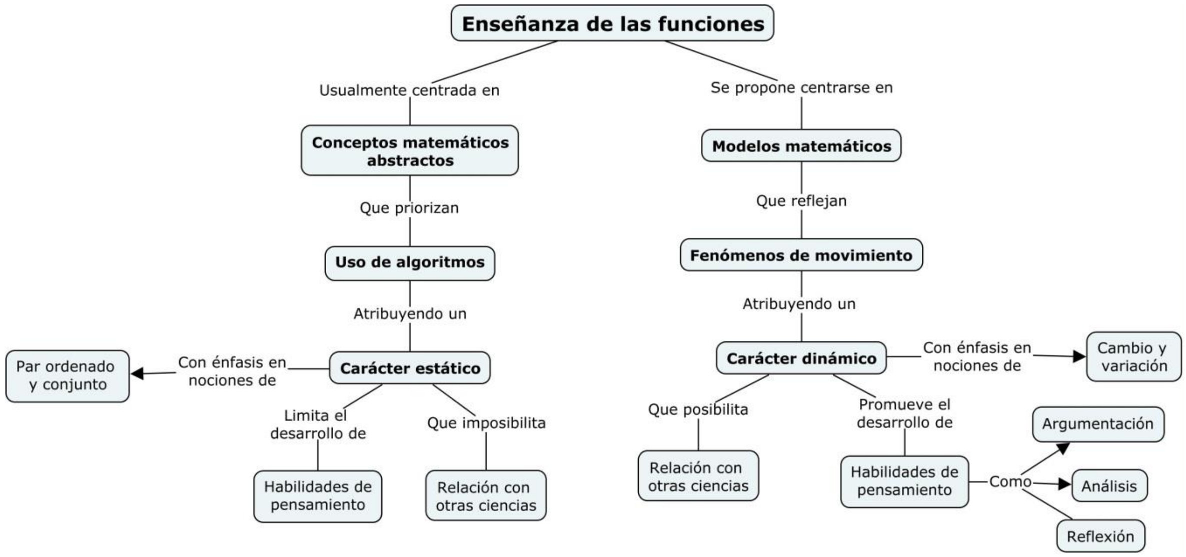
De manera relacionada, Posada & Villa (2006) retoman las ideas de Sierpinska (1992) argumentando que:

> Los estudiantes en el aula de clase deberían interesarse más por la variación y la búsqueda de relaciones, que por el trabajo con definiciones y ejemplos prototipo (…) La enseñanza de las funciones deben aparecer primero como modelo de relaciones, como herramienta para la descripción y la predicción, análogo a como se presentó en la historia. (p.10)

Este modelo de enseñanza se contrapone a las actuales propuestas que invitan a centrar los procesos de aprendizaje en modelos matemáticos que reflejan fenómenos de movimiento, es decir, que tiene un carácter dinámico al hacer énfasis en las nociones de cambio y variación. Esta vía promueve el desarrollo de habilidades del pensamiento como la argumentación, el análisis, la reflexión, la predicción, la inferencia, entre otras; al tiempo que teje conexiones con diversas áreas del saber.

Obsérvese la Figura 3 donde se sintetizan algunas ideas sobre esta proposición.

Figura 3. Gráfico: Perspectiva en la enseñanza de las funciones.



Fuente: Elaboración del autor

Ahora bien, entendiendo el concepto de variación como dependencia entre magnitudes, es posible comprender la incidencia que ésta juega dentro del proceso de construcción del concepto de función, ya que hace foco en la idea de movimiento observable en el entorno y en diferentes ámbitos de la realidad, y que además abre espacio a todo un proceso de reflexión en torno a lo que sucede en ese movimiento; qué cambia, cómo lo hace y de qué manera. En relación con esto, Vranker, S.; Engler, A.; Grampieri, M. & Müller, D (2015) aportan:

> Las nociones de variación y cambio son fundamentales en el pensamiento y lenguaje variacional, centrándose en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando lo que cambia, cuantificando ese cambio y analizando cómo se dan esos cambios. (p.48)

Continuando con esta línea, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se afirma que “es en el contexto del estudio matemático del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que configura el cálculo” *(MEN, 1998, p.72).* En el mismo texto se explica que la variación se encuentra interrelacionada con varios núcleos conceptuales matemáticos, para los cuales sirve como base; ellos son:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos finitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes.
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.
- Modelos matemáticos de tipo de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado. (MEN, 1998, p.72)

Así pues, la variación juega un rol importante en el aprendizaje de las funciones, pues tal y como se ha explicado, es fácil de percibir y entender en contextos reales, al tiempo que promueve el fortalecimiento de múltiples habilidades del pensamiento, así como el potenciamiento del comunicación matemática a través de diversos formas y sistemas de representación.

En este punto cabe traer a colación lo que Posada & Villa (2006) sostienen al respecto:

> El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación (gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales) para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión. (p.62)

El estudio de la variación trae consigo todo un universo de posibilidades en términos de aprendizaje, ejemplo de lo cual se sintetiza en la Figura 4:

Figura 4. Gráfico: Estudio de la variación.

Fuente: Elaboración del autor

Ahora bien, tal y como se ha mencionado, la variación es una dependencia entre magnitudes. Centremos la mirada en los contextos donde varían dos magnitudes diferentes, por ejemplo, magnitud A: camisetas, magnitud B: precio por unidad (Tabla 3):

Tabla 3. Variación de magnitudes.

Magnitud A	Magnitud B
Camisetas	Precio por unidad ($)

a_1	1	b_1	12.000	Cantidades
a_2	2	b_2	24.000	
a_3	3	b_3	36.000	

Fuente: Elaboración del autor

Las cantidades al interior de la magnitud A se relacionan entre sí de cierta forma que determina a su vez la relación entre las cantidades de la magnitud B, lo que claramente muestra una interrelación entre ambas magnitudes. Para abordar esto, es pertinente recurrir al texto "*El niño, las Matemáticas y la Realidad"* (Vergnaud, 1991) referente a las relaciones multiplicativas que se presentan entre dos magnitudes o espacios de medida en sus propios términos.

Para este autor, las relaciones multiplicativas son aquellas que involucran una multiplicación o una división. Existen dos tipos de estas relaciones: el Producto de Medidas y el Isomorfismo de las Medidas. El primero de ellos consiste en una relación ternaria entre tres cantidades de las cuales una es el producto de las otras dos, sirviendo como ejemplo el área de una superficie rectangular que resulta del producto entre el largo y el ancho de la superficie.

Por su parte, el Isomorfismo de las Medidas es una relación entre dos magnitudes que se correlacionan, como se puede ver en la Tabla 4.

Tabla 4. Isomorfismo de las Medidas.

Camisetas	**Precio por unidad ($)**
1 $\rightarrow$	12.000
3 $\rightarrow$	X

Fuente: Elaboración del autor

Es este tipo de relación multiplicativa la que interesa en el presente trabajo porque sirve como base para el análisis de relaciones funcionales de tipo lineal y para la construcción del concepto de función lineal. Cada tipo de cantidad es denominado por el autor como **Espacio de Medida**. Así, en la Tabla 5 aparecen dos espacios de medida, una correspondiente a camisetas y la otra al valor de éstas. Para pasar de una cantidad a otra dentro del mismo espacio de medida, se aplica un Operador Escalar, que según el sentido de su uso puede ser multiplicación o división.

Tabla 5. Operador escalar.

Camisetas	Precio por unidad ($)
1	12.000
3	X

x3

÷3

Fuente: Elaboración del autor

Puede apreciarse en la Tabla 6 que a cada cantidad del espacio de medida Camisetas se relaciona con otra cantidad del mismo espacio mediante el operador escalar.

Tabla 6. Correspondencia entre cantidades.

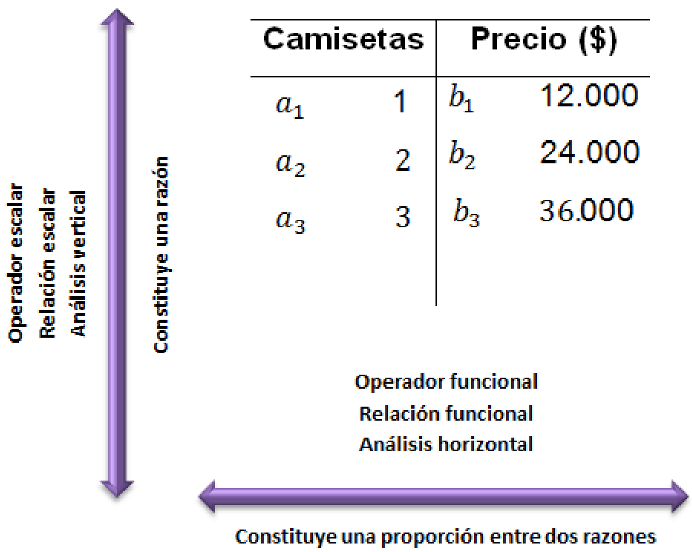
Camisetas	Precio por unidad ($)
1 →	12.000
3 →	X

Fuente: Elaboración del autor

Existe también un operador que hace posible pasar de una cantidad del espacio de medida camisetas a una cantidad del espacio de medida precio por unidad, denominada Operador Funcional.

Existen otras formas de denominar los operadores Escalar y Funcional, como se aprecia a continuación (Tabla 7):

Tabla 7. Denominaciones de operadores escalar y funcional.



Camisetas		Precio ($)	
a_1	1	b_1	12.000
a_2	2	b_2	24.000
a_3	3	b_3	36.000

Fuente: Elaboración del autor

Nuestro interés se centra en el operador funcional, que puede también nombrarse como relación funcional o análisis horizontal.

Esta relación que pone en correspondencia ambas magnitudes resulta de generar un cociente entre una cantidad de la magnitud B y la que le corresponde de la magnitud A, veamos (Tabla 8):

Tabla 8. Cociente entre cantidades.

Camisetas		Precio ($)	
a_1	1	b_1	12.000
a_2	2	b_2	24.000
a_3	3	b_3	36.000

Fuente: Elaboración del autor

Sea R la relación entre ambas magnitudes.

$$R = \frac{b_1}{a_1}$$

Lo que aplicado al ejemplo, es:

$$R_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{12.000}{1} = 12.000$$

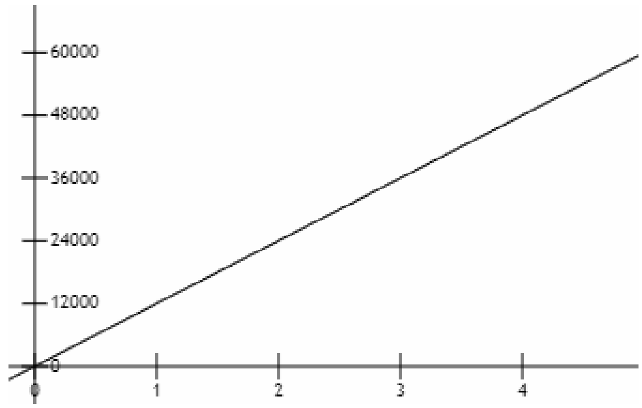
$$R_2 = \frac{b_2}{2} = \frac{24.000}{2} = 12.000$$

$$R_3 = \frac{b_3}{a_3} = \frac{36.000}{3} = 12.000$$

Obsérvese que el valor de R siempre es el mismo, sin importar el par de cantidades que se tomen en el cociente; quiere decir que R es **constante**. Además, R equivale al valor del precio por unidad de las camisetas del ejemplo.

Este R define de manera cuantitativa la relación entre la magnitud A: camisetas y la magnitud B: precio por unidad, mediante una relación funcional de tipo lineal, donde a medida que aumenta la cantidad de camisetas, aumenta también su precio, y que representada gráficamente determina una línea recta, es decir una función lineal (Figura 5).

Figura 5. Representación gráfica de la función lineal.



Fuente: Elaboración del autor

Ese R que relaciona cada cantidad de la magnitud A con una cantidad de la magnitud B mediante un cociente $R = \frac{b_1}{a_1}$, y que es constante para todos los cocientes $\frac{b_i}{a_i}$, (donde a_i y b_i son parejas de valores correspondientes), se denomina **constante de proporcionalidad** o coeficiente de proporcionalidad según el autor que lo aborde.

La constante de proporcionalidad establece pues la relación entre las cantidades de diferentes variables. A propósito, explica Torres (2013):

> Este coeficiente de proporcionalidad lo que establece es la razón entre un par de valores correspondientes, uno de cada variable. Pero lo fundamental es que este operador función o coeficiente de proporcionalidad es universal, es decir, para la misma situación dada, la razón entre cualquier par de valores correspondientes, uno de cada variable, es la misma.

> Dicho de otra manera, el coeficiente de proporcionalidad es la propiedad invariante que relaciona las dos variables entre sí estableciendo una proporcionalidad directa entre ellas. Este coeficiente de proporcionalidad puede ser usado como un transformador, esto es, que dada una cantidad en una de las variables y este coeficiente de proporcionalidad, entonces se puede aplicar este coeficiente a la cantidad dada, para obtener como resultado la cantidad correspondiente en la otra variable. (p.52)

En este sentido, la identificación de la constante de proporcionalidad es la base para comprender la relación de covariación entre magnitudes, equivalente a la relación funcional de tipo lineal y que es la base para la construcción del concepto de función lineal. De allí la necesidad de analizar contextos de variación entre magnitudes a partir de una perspectiva de dependencia para conceptualizar, comprender y en un sentido más amplio, objetivar la idea de función lineal.

Respecto al concepto de función lineal, Posada & Villa (2006) afirman que “el concepto de función lineal puede interpretarse como un modelo matemático que atrapa la variación y el cambio de magnitudes” (p.5). Más adelante agregan que la función lineal implica:

> Una correlación entre cambios, procesos, reglas y patrones que modelan la covariación entre dos cantidades de magnitud de igual o distinta naturaleza, cuando esta covariación es lineal (…) Es un modelo matemático que atrapa la variación entre dos cantidades de magnitud que se relacionan a través del cociente constante entre sus respectivas diferencias. (p.66)

Este enfoque hace necesario propiciar procesos que tengan su inicio con la idea de multiplicación desde una perspectiva de proporcionalidad directa, fortaleciendo así el análisis funcional en torno a la forma en que las cantidades al interior de las magnitudes varían y cómo esto genera una covariación entre las magnitudes. Es ésta la puerta de entrada al campo de las funciones, iniciando con la idea de función lineal como base para la comprensión de las demás funciones, y de este modo, el ingreso al universo del cálculo.

La función lineal es sin duda uno de los conceptos más importantes dentro de las matemáticas, ya que sirve como motor del Álgebra, el cálculo, el análisis matemático y la modelación de situaciones, lo que teje la conexión con el entorno y la realidad.

1.5.4 Referente Legal.

Tabla 9. Normograma.

DOCUMENTO RECTOR	TEXTO DE LA NORMA	CONTEXTO DE LA NORMA
Lineamientos Curriculares de Matemática (1998)	*“Es en el contexto del estudio matemático del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que configura el cálculo”.* (p.72).	Los elementos conceptuales abordados en estos documentos sirven como fundamento para el diseño de las tareas que hacen parte de la propuesta, desde la fase de diagnóstico hasta la intervención aplicada. Los textos presentan importantes aportes que soportan la perspectiva variacional desde la cual se
	“El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de	

	cambio y variación de la vida práctica". (p.73).	propone en el presente trabajo generar una aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal, desde un enfoque sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje.
	"Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas". (p.72-73)	
Estándares Básicos de Competencias (2006)	El pensamiento variacional *"tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros*	

	simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (…)*Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas”.* (p.66).	
Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2016)	*“Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación”.* (p.70)	
	“Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones”. (p.76)	
	“Resuelve problemas mediante el uso de las	

	propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes". (p.77)	

Fuente: Elaboración del autor

1.5.5 Referente Espacial.

La Institución Educativa Débora Arango Pérez está ubicada en la Calle 18 N° 103 – 160 del corregimiento de Altavista, vereda Altavista. Es una de las ocho veredas que hacen parte de este corregimiento que se encuentra situado al suroccidente del Municipio de Medellín. Es una institución de carácter oficial que atienden los grados de Preescolar a Once, en las jornadas de mañana, tarde y jornada única. Es uno de los diez Colegios de Calidad construidos con los recursos económicos donados por las Empresas Públicas de Medellín por motivo de su aniversario número 50.

Altavista es un lugar azotado por la violencia desde hace varias décadas atrás, siendo escenario de situaciones de abuso y amenaza para sus habitantes. Por ello la institución opera bajo el modelo de Escuela Abierta, el cual considera elementos como el espacio público para el disfrute de todos, la ciudad como escenario para aprender a vivir, y la escuela como lugar donde se gestan futuros posibles. Estos lineamientos pretenden que la institución se constituya como un espacio de inclusión que permita contrarrestar las dificultades de segregación y violencia que afectan la comunidad.

En sus pocos años de funcionamiento la institución ha logrado dar cumplimiento a sus objetivos y se ha convertido en un referente de tolerancia, inclusión y oportunidad no sólo para los estudiantes sino también para sus familias.

Los procesos educativos que en la institución de adelantan dejan en segundo plano el objetivo de cumplir con un plan de estudio, para centrarse en el interés de generar espacios donde los estudiantes desarrollen habilidades y competencias para generar impactos positivos en su entorno y contribuir con su mejoramiento. La pregunta por la formación del Ser predomina en esta institución.

2. Capítulo II. Diseño Metodológico: Investigación Aplicada

2.1 Enfoque

El presente trabajo se enmarca dentro de una perspectiva cualitativa que consiste en observar, analizar e interpretar la realidad (Martínez, 2011), en este caso relacionada con la actividad matemática que desarrollan los estudiantes de Noveno grado de la Institución Educativa Débora Arango Pérez alrededor de tareas multiplicativas construidas por la docente, que apuntan a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal.

Se asume además un enfoque de Investigación Acción Educativa, cuyo interés apunta a la reflexión alrededor de la acción en el escenario educativo; esto es analizar la propia práctica docente, identificar problemáticas y emprender acciones para mejorarla, lo cual es absolutamente coherente con el propósito de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia.

Según Kurt Lewin (citado por Restrepo, 2004) la Investigación Acción Educativa o Investigación Acción Pedagógica como él la denomina, experimenta tres fases fundamentales: la reflexión alrededor de un problema paralela a la recolección datos para su análisis, la planeación y aplicación de acciones, y la investigación del impacto de esas acciones.

Se pretende pues transitar por estas tres fases para comprender mejor la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función lineal, a partir del reconocimiento de relaciones funcionales de tipo lineal, y así generar propuestas de acción pedagógica que permitan contrarrestar de alguna manera las dificultades que se experimentan en este campo.

2.2 Método

En concordancia con el enfoque cualitativo que se asume para este trabajo, se elige trabajar bajo el método inductivo que permite hacer reflexiones del acto educativo para plantear propuestas de acción partiendo de lo particular hasta llegar a lo general, lo cual constituye un tratamiento holístico de la información. Es necesario resaltar que con “llegar a lo general” no se pretende hacer generalizaciones poblacionales de tipo estadístico, pues esto correspondería al método deductivo; la generalización inductiva consiste en formular proposiciones que puedan aplicarse a la muestra seleccionada en el propósito de plantear rutas de acción que puedan contribuir con el fenómeno educativo de tal modo que afecte la mayor cantidad posible de individuos.

El método inductivo es de corte crítico social, lo cual implica centrar la mirada en las dinámicas de una sociedad; esto incluye sus actores y las relaciones que se tejen entre ellos, a partir de esas condiciones particulares que atribuye el contexto en que se encuentran inmersos de acuerdo con factores geográficos, políticos, temporales, económicos, entre otros (Alvarado y García, 2008). Por esto, aunque se aborden una misma problemática en contextos socioculturales distintos, las conclusiones que se generen serán radicalmente diferentes.

Además de las características relativas al entorno social, existen ciertas particularidades que corresponden a las dinámicas institucionales, por lo que incluso al interior del mismo círculo social se aprecian profundas divergencias entre dos instituciones educativas distintas.

En el caso del presente trabajo se pretende analizar el grupo Noveno 1 de la Institución Educativa Débora Arango Pérez, para formular conclusiones que puedan realizar aportes a la enseñanza de la función lineal comenzando por la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal en situaciones cotidianas de variación y cambio.

2.3 Instrumentos de recolección de información y análisis de información

Se utilizan tanto fuentes primarias como secundarias para la recolección de la información. En las fuentes primarias se incluyen entrevistas realizadas a los estudiantes, pruebas diagnósticas al inicio y al final del proceso, y varias pruebas (que se denominarán tareas en concordancia con la Teoría de la Actividad que se elige como línea conceptual para entender la enseñanza y el aprendizaje, y que se aborda en el apartado Marco Teórico) diseñadas por la docente y aplicadas a los estudiantes que conforman la muestra.

Es necesario resaltar que, debido al tipo de investigación, la observación constituye un instrumento fundamental de recolección de información ya que permitirá reunir información que permitan describir e interpretar la realidad estudiada que corresponde a las situaciones que se desencadenan cuando los estudiantes se enfrentan a tareas de multiplicativas de variación y cambio proyectadas a la identificación de relaciones funcionales lineales (Martínez, 2011).

En este sentido, los elementos que son susceptibles de ser observados son las interacciones entre los estudiantes y de éstos con el docente, los recursos tangibles e intangibles que utilizan a la hora de resolver las tareas, el lenguaje verbal y no verbal empleado, y en general las dinámicas sociales que se presentan en la resolución de las tareas, así como el tratamiento que allí se hace de los objetos matemáticos. La dinámica de recolección de la información consiste en hacer observaciones presenciales y aplicar tareas en formato físico para ser resueltas por los estudiantes, recursos éstos con los que posteriormente se construye un texto que reune los elementos observados y los análisis que sobre ellos se realicen.

En lo que respecta a las fuentes secundarias, se emplea el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la institución donde se ejecuta el trabajo, modelos de actividades implementadas en otros contextos, documentos rectores del Ministerio de Educación Nacional (MEN) como Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), Estándares Básicos de Competencia, entre otros.

En cuanto al procedimiento para el tratamiento y análisis de la información, debe mencionarse que en primer lugar se hace un diagnóstico para determinar la forma en que los estudiantes resuelven tareas donde varían dos cantidades. Posteriormente se diseñan y aplican tareas con variaciones lineales y variaciones no lineales, con el objetivo de identificar diferencias entre ambos tipos de variabilidad y características de linealidad. Finalmente se presentan tareas que enfatizan la constante de proporcionalidad, centrándose así en el análisis funcional de tipo lineal. Es necesario resaltar que las diferentes tareas se desenvuelven alrededor de situaciones cotidianas para los estudiantes.

2.4 Población y Muestra

La población con la cual se ejecuta el trabajo corresponde al grado Noveno de la Institución Educativa Débora Arango Pérez, de la cual se elige como muestra los 27 estudiantes que conforman el grupo Noveno 1, cuyas edades oscilan entre los 14 y 17 años.

Las dificultades a nivel social y económico que azotan esta población, afectan de manera significativa el proceso de formación de los jóvenes en lo referente a la posibilidad de contar con elementos necesarios para suplir sus necesidades básicas, situación que influyen significativamente en su compromiso y motivación con escuela, e incluso con la permanencia en ella.

2.5 Delimitación y alcance

El alcance del presente trabajo consiste en el diseño y aplicación de tareas multiplicativas que enfatizan la constante de proporcionalidad y parten de contextos cotidianos, como estrategia para lograr una aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal; lo cual constituye la base para la construcción del concepto de función. Debe aclararse que este trabajo no pretende llegar hasta la construcción como tal del concepto de función lineal; espera generar aproximaciones en cuanto a la identificación de relaciones funcionales.

A partir de la aplicación de las tareas y el análisis de la actividad matemática desencadenada alrededor de ellas, se pretende reconocer algunos aspectos que deben tenerse en cuenta cuando se pretende realizar análisis funcionales lineales.

El análisis de los anteriores elementos permite entender un poco la manera en que las situaciones cotidianas de variación y cambio promueven el establecimiento de relaciones funcionales, y cómo específicamente las tareas que a partir de allí se diseñan y, enfatizan la constante de proporcionalidad, propician el análisis funcional de tipo lineal que a su vez es el primer peldaño en la conceptualización de la función lineal.

2.6 Cronograma

Tabla 10. Cronograma.

Fase	Objetivos	Actividades
Fase 1: Caracterización	Diagnosticar la forma en que los estudiantes resuelven tareas provenientes de situaciones cotidianas que contienen relaciones de variación.	1.1. Rastreo bibliográfico sobre la Teoría de la Objetivación y la Teoría de la Actividad que de allí se desprende, además de los elementos matemáticos que soportan la variación como eje para la construcción del concepto de función. 1.2. Determinación de objetivos general y específicos del trabajo.
Fase 2: Diseño	Diseñar tareas multiplicativas de proporcionalidad que enfatizan la constante de proporcionalidad, que aporten elementos para caracterizar la actividad matemática de los estudiantes al resolverlas	2.1. Diseño de una tarea diagnóstica para observar la manera en que los estudiantes analizan situaciones de variación. 2.2. Diseño de tareas que enfatizan la constante de proporcionalidad para promover el análisis funcional.
Fase 3:	Presentar a los estudiantes las tareas	3.1. Resolución de las tareas por parte de los estudiantes.

Intervención	diseñadas y observar la actividad matemática que desarrollan a partir de ellas.	
Fase 4: Análisis, conclusiones y recomendaciones	Caracterizar la actividad matemática relacionada con la función lineal que desarrollan los estudiantes al resolver tareas multiplicativas de proporcionalidad que enfatizan la constante de proporcionalidad.	4.1. Análisis de los aspectos observados durante la resolución de las tareas desde la óptica de la Teoría de la Actividad y el análisis funcional. 4.2. Formulación de conclusiones y recomendaciones sobre el trabajo.

Fuente: Elaboración del autor

3. Capítulo III. Sistematización de la intervención

3.1 Diseño de las tareas

- **Diagnóstico**

Es necesario iniciar aclarando que todas las tareas, tanto de diagnóstico como de desarrollo, fueron realizadas en pequeños subgrupos, con el fin de propiciar la discusión entre sus miembros alrededor de las situaciones planteadas, en coherencia con la teoría sociocultural del aprendizaje.

En primer lugar, se diseñó la tarea diagnóstica “Un día de trabajo” (ver Anexo 1) elaborada con el objetivo de observar la manera en que los estudiantes del grupo Noveno 1 reconocen la variación entre dos variables o magnitudes. El análisis del diagnóstico no sólo indagó por los aspectos matemáticos que se pusieron en juego a la hora de resolver la tarea, sino también por las características de la actividad matemática desencadenada, esto desde la óptica de la Teoría de Actividad.

La tarea diagnóstica presenta una situación en la que es necesario determinar el salario diario que recibirá una persona que trabaja como auxiliar de construcción transportando bultos de cemento desde un camión hasta el sitio de la construcción. La primera parte de la tarea plantea que el salario diario depende de una base de $20000 más $400 por cada bulto de cemento transportado. La segunda parte cambia el dinero base a $12000 y la comisión por cada bulto transportado a $600. En ambos momentos de la tarea los estudiantes debían analizar el salario recibido a partir de cierta cantidad de bultos de cemento transportados, así como determinar la cantidad de bultos correspondiente a cierto dinero recibido. Luego de analizar cada momento de la tarea, se pedía establecer cuál sistema de pago era más rentable para el trabajador.

Además, el análisis se orientó a que los estudiantes utilizaran diferentes registros de representación en concordancia con lo planteado por Duval (2003).

La situación descrita en la tarea surge de la realidad cercana a los estudiantes, pues varios de ellos trabajan en este oficio para contribuir económicamente en sus hogares. Los sistemas de pago tomados en la situación son tomados de situaciones reales experimentadas por un par de estudiantes que en conversaciones con la docente compartieron su experiencia.

La aplicación de esta primera tarea tuvo una duración de 220 minutos, distribuidos en dos bloques de 110 minutos cada uno.

- **Desarrollo**

La fase de desarrollo contó con el diseño de tres tareas: “Actividad inicial Salario Mínimo”, “Actividad N°.2 Salario Mínimo” y “Actividad final: Comparando-ando”.

En la primera de ellas, “Actividad inicial Salario Mínimo” (ver Anexo 2), se pide al estudiante suponer que es mayor de edad y comenzará a vivir solo. Se encuentra cursando grado Undécimo y trabajará en un lugar donde le pagan el salario mínimo vigente para el año 2018, el cual, incluyendo el subsidio de transporte, corresponde a $869.453.

El estudiante debe organizar sus finanzas de tal modo que el dinero le alcance para pagar alimentación, vivienda, salud, transporte, educación, recreación, vestuario y los gastos extraordinarios que puedan surgir. Dentro de la tarea se propone un formato tabular donde para 28 días se debe registrar la distribución del salario entre los gastos básicos. Cada día y según la distribución que el estudiante haga de su salario, el monto inicial va disminuyendo. El objetivo es que el dinero alcance para los 28 días y atienda todos los gastos básicos hasta el final. Así, esta tarea se basa en el análisis de la variación entre magnitudes a partir del comportamiento del gasto diario que se hace para cada necesidad (alimentación, vivienda, salud, transporte, educación y otros gastos emergentes).

El planteamiento de la tarea surge del interés por propiciar una reflexión sobre el salario mínimo colombiano vigente para el año 2018. El ejercicio de análisis que plantea la tarea intenta que los jóvenes dimensionen los gastos que implica sostener un hogar y reflexionen sobre las posibilidades y limitaciones de cubrir dichos gastos con el salario mínimo.

La tarea está diseñada de tal forma que el estudiante hipotético deba realizar varios procesos de análisis y toma de decisiones sobre la situación hipotética. Inicialmente es necesario distribuir el salario entre los gatos básicos considerando cuáles de ellos requieren mayor inversión. Después se debe distribuir el valor asignado a cada gasto entre los 28 días, para finalmente analizar la manera en que el dinero disminuye tras el paso de los días. Se puede ver entonces que esta tarea exige atender varios procesos de variación de manera simultánea.

Esta tarea requirió un tiempo de realización de 6 horas dividas en 3 bloques de 2 horas cada uno. Para el desarrollo de la totalidad de la tarea, los estudiantes se reunieron en equipos de tres integrantes, esto con el fin de generar discusiones entre pares para luego tomar cada decisión. Debido a que la tarea consiste en una situación cercana a los estudiantes que tiene que ver con el uso del dinero en los gastos básicos de una casa, se supone que los estudiantes, desde su experiencia, pueden aportar puntos de vista diferentes que, a su vez, permitan analizar la situación planteada desde distintos focos para la posterior toma de decisiones.

Por otra parte, la “Actividad N°.2 Salario Mínimo” (Anexo 3), da continuidad a la anterior, pero haciendo énfasis en la variable vivienda y la relación funcional entre las magnitudes A: días transcurridos y B: dinero restante luego de realizar el gasto diario correspondiente a vivienda.

$$\left(R = \frac{b_1}{a_1}\right)$$

Dicha tarea tuvo un tiempo de realización de 4 horas segmentadas en dos bloques iguales.

La tarea lleva al estudiante a identificar y analizar la relación funcional desde distintos sistemas de representación. Además busca que haga comparaciones entre las representaciones de una variación constante y una no constante.

En el Momento 1, numeral 1, se pide que el estudiante elabore un registro tabular que relacione los días de la primera semana con el dinero restante luego de realizar el gasto diario de vivienda (el que cada equipo de trabajo definió en la Actividad Inicial: Salario Mínimo). En el numeral 2, el estudiante debe pasar la información representada de forma tabular a una gráfica de su elección, con el fin no sólo de cambiar el registro de representación, sino también de promover la elección de una gráfica que pueda representar adecuadamente la información. En el numeral 3 se le indica construir un diagrama de puntos y líneas con la misma información; esto para que en el hipotético caso que la gráfica elegida no represente adecuadamente la información, mediante el diagrama de puntos, se logre una organización de la misma.

En el numeral 4.2, a partir del diagrama de puntos y líneas, el estudiante debe predecir el comportamiento de la gráfica para las cuatro semanas del mes, analizando si se mantiene igual o experimenta algún tipo de cambio. Se espera aquí que el estudiante asuma que dicha gráfica mantendrá el mismo comportamiento a lo largo de las cuatro semanas.

El numeral 5 presenta un formato de tabla para fortalecer el registro tabular ideado por los estudiantes en el numeral 1, introduciendo una columna con el cociente entre dinero restante y día transcurrido, con el fin de que los estudiantes identifiquen que el cociente va a ser igual para cualquier día del mes.

Esta misma estructura se desarrolla en el Momento 2, pero en esta ocasión con los gastos extras, que cada equipo definió de manera particular según lo consideró, y que, a diferencia de los gastos de vivienda, no mantienen un comportamiento constante durante el mes.

Finalmente, la tarea indaga por una comparación entre las representaciones gráficas del Momento 1 y el Momento 2, con el propósito de que los estudiantes identifiquen una diferencia entre el comportamiento constante de los gastos de vivienda y el inconstante de los gastos extra. Nótese que esta tarea hace énfasis en el paso de un registro de representación a otro; básicamente del tabular al gráfico.

La última tarea "Actividad final: Comparando-ando" (Anexo 4) plantea dos situaciones; una primera sobre los ingresos de una persona que moviliza pasajeros en su vehículo y la segunda relacionada con la variación que sufren las dimensiones de un rectángulo de área fija cuando la base comienza a variar. Esto para que el estudiante compare las diferencias entre una situación basada en una relación funcional lineal y otra de tipo cuadrático.

Es importante mencionar que la parte de la tarea concerniente al transporte de pasajeros se basa en una modalidad de transporte público informal que es bastante común en el corregimiento de Altavista, conocida allí como "Colectivos".[1]

Los cuatro primeros numerales corresponden al trabajo con las áreas de los rectángulos. En el primero de ellos los estudiantes deben dibujar todos los rectángulos posibles que cumplan con ciertas áreas dadas. Se espera que el estudiante, a medida que realice los dibujos, observe cómo varía la altura en función de la longitud de la base. Además, se pretende observar si a la hora de determinar las longitudes de los lados de los rectángulos, los estudiantes consideran cantidades continuas.

El numeral 2 pide determinar las longitudes de todos los rectángulos posibles de área 72 cm^2 , pero en esta ocasión sin realizar ningún dibujo. Esto para que el estudiante deduzca un procedimiento general que permita encontrar dichas longitudes, el cual muy posiblemente tenga que ver con combinaciones entre los

[1] La modalidad de transporte informal conocida como "Colectivos" consiste en el uso de vehículos particulares para prestar un servicio público que realiza un recorrido estándar desde cierto punto del corregimiento de Altavista hasta el barrio Belén, por lo cual cobran $2.000 a cada pasajero que se movilice en dicho trayecto sin importar la distancia que recorra.

divisores del área dada. Nuevamente se espera en esta parte que se consideren también cantidades continuas.

En el numeral 3 se pregunta qué pasa con la altura de los rectángulos cuando la base cambia, manteniendo la misma área, esperando que los estudiantes identifiquen la relación inversamente proporcional que allí se genera. El numeral 4 indica la construcción de un diagrama cartesiano que relacione las longitudes de la base y la altura de un rectángulo con área 72 cm^2, para con él observar una curva cuadrática, diferente a las lineales que se han trabajado durante la intervención.

El numeral 5 plantea la situación relacionada con el transporte en “Colectivo”, en el cual se cobran $2.000 por pasajero que utilice el servicio. Se pide en este punto construir un diagrama cartesiano que relaciones cantidad de pasajeros y dinero recolectado. Esta gráfica es de tipo lineal.

Por último, el numeral 6 alude a la comparación entre los gráficos cartesianos elaborados en los numerales 4 y 5, pretendiendo que se identifiquen las diferencias entre el primero que es cuadrático y el segundo que es lineal.

Dicha tarea empleó para su desarrollo 2 bloques de 2 horas cada uno.

Como se puede apreciar, las diferentes tareas que hacen parte de este trabajo giran alrededor del dinero, su consecución mediante el trabajo y su distribución para los gastos de la vida cotidiana. Se eligió esta temática porque los procesos de análisis que se desenvuelven a partir de ella, son desarrollados con mayor facilidad y eficacia, ya que desde pequeños los individuos adquieren un sentido del valor del dinero, lo que hace más sencillo comprender las situaciones matemáticas que se basan en este aspecto.

3.2 Resultados y análisis de la intervención

Como se dijo anteriormente sobre la tarea “Un día de trabajo”, los sistemas de pago presentados en la situación son tomados de situaciones reales experimentadas por un par de estudiantes que en conversaciones con la docente compartieron su experiencia. El hecho de que el contexto de la tarea fuera cercano a los chicos, despertó interés en ellos para analizar cuál sistema de pago era más conveniente.

Durante la realización de la tarea pudieron observarse los siguientes elementos desde la Teoría de la Actividad (Tabla 11).

Tabla 11. Identificación de elementos de la actividad matemática en la tarea diagnóstica.

Identificación de elementos constitutivos de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes	
Tarea	Determinar el salario diario obtenido por una persona que trabaja transportando bultos de cemento, considerando un sueldo básico y una comisión por cada bulto de cemento transportado.
Motivo del docente	Que el estudiante analice la variación entre las magnitudes. Observar la forma en que el estudiante analiza dicha variación y la actividad matemática que se desencadena en dicho proceso.
Motivo asumido por el estudiante	Determinar cuál oferta laboral es más conveniente.
Acciones	• Discusión estudiante-estudiante y estudiante-docente. • Realización de cálculos numéricos. • Explicación verbal de la situación. • Representación escrita de la situación.

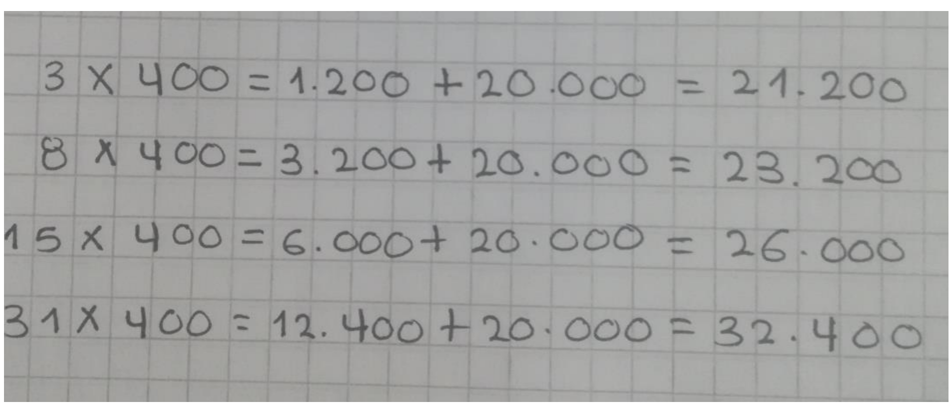
4. Trabajo Final

Instrumentos	• Movimientos corporales para explicar la manera en que varían las cantidades. • Lápiz y papel. • Calculadora.
Representaciones empleadas	• Lenguaje verbal. • Representación gráfica. • Representación tabular.

Fuente: Elaboración del autor

En el marco del momento 1 de la tarea, respecto al primer numeral donde se pedía determinar el salario a partir de ciertas cantidades de bultos transportados (ver anexo 1), la mayoría de los estudiantes coincidieron en multiplicar la cantidad de bultos por el valor de la comisión ($400) y al resultado sumarle los $20000 del sueldo básico, tal y como se puede ver en la Figura 6:

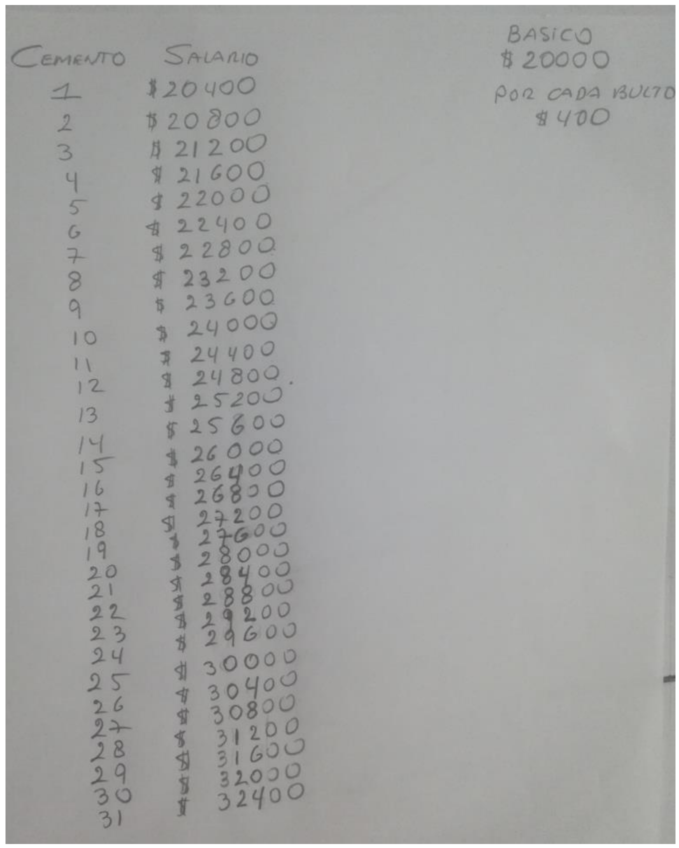
Figura 6. Elaboración 1 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

En un par de grupos los chicos comenzaron a escribir en una hoja un bosquejo de tabla donde relacionaban el salario recibido al transportar un bulto, incluyendo el sueldo básico; luego para 2 bultos, luego para 3, y así de manera consecutiva. Uno de los grupos continuó así hasta llegar a 31, que era la mayor cantidad de bultos planteada en el numeral (Figura 7).

Figura 7. Elaboración 2 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Pero el otro grupo que optó por esta estrategia, la consideró poco práctica y extensa, y se generó la Escena 1:

Escena 1

-Estudiante A: "Esto (la tabla) está muy demorado y hay que llegar hasta 31".
-Estudiante B: "¿Entonces qué hacemos? ¿Lo dejamos sólo hasta el 15?"
-Estudiante A: "No…hay que hacerlo completo (Observa la tabla en silencio durante varios segundos) Pues dejemos lo que tenemos y para el 31 escribamos el procedimiento".

- Estudiante B: "Pues sí, es que yo no sé por qué nos pusimos a hace todo eso, si con el procedimiento era suficiente".

A continuación, escriben el procedimiento consistente en multiplicar 31 por 400 y luego sumarle a esto 20000.

Puede verse que los estudiantes identifican de manera verbal el procedimiento general que les permite resolver el problema e identificar relaciones lineales. Así, aunque dicho procedimiento es expresado mediante el lenguaje natural, es una clara muestra de que los estudiantes van más allá de la solución de casos concretos e identifican procedimientos generales

La estrategia empleada evidencia además que la representación tabular resulta mucho más comprensible para los chicos de este grupo, ya que les permite observar cómo varía el salario recibido a medida que varía la cantidad de bultos transportados, considerando en cada caso el salario básico de $20.000. Para la construcción de la representación tabular propuesta por estos estudiantes, es necesario identificar que el sueldo devengado al transportar un bulto de cemento, aumenta $400 cada que se aumenta un bulto, tal y como se puede ver en la Escena 2:

Escena 2

Docente: (Observando la representación tabular elaborada por los estudiantes (Figura7)) "¿Cómo están construyendo esta tabla?"
Estudiante A: "Ponemos la cantidad de cemento y lo que se ganaría uno cargando esos bultos".
Docente: "Pero si se transporta un bulto de cemento, la comisión es $400 y ustedes en la tabla tiene que se ganarían $20.400".
Estudiante A: "Es que ahí (en la tabla) están incluidos los $20000 básicos".
Docente: "Muy bien. ¿Y cómo varía el salario según la cantidad de bultos transportados?".
Estudiante A: "¿Cómo así?".
Docente: (Señalando la tabla) "¿De qué forma cambia el salario recibido cuando se aumenta un bulto de cemento?".

Estudiante B: "Cada que se pone otro bulto, la plata aumenta $400".
Docente: "¿Y siempre aumenta lo mismo o hay algún caso en que esa cantidad sea diferente?".
Estudiante B: "No, siempre aumenta $400".
Docente: "¿Por qué ese valor es constante?".
Estudiante B: "Porque la comisión siempre es la misma".

Nótese que los estudiantes han identificado un elemento constante que es la comisión por bulto transportado, lo cual puede observarse de manera más formal en la Tabla 12:

Tabla 12. Cantidad de bultos/Comisión por bulto.

Cantidad de bultos		Comisión por bulto ($)	
a_1	1	b_1	400
a_2	2	b_2	800
a_3	3	b_3	1200

$$\frac{\boldsymbol{a_n}}{\boldsymbol{b_n}} = \mathbf{400}$$

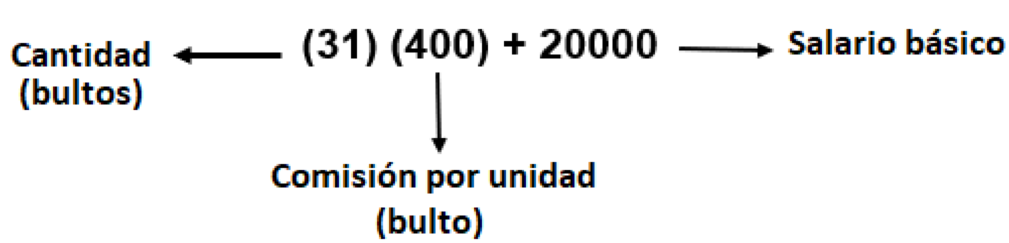
Fuente: Elaboración del autor

Hay pues en la elaboración de los estudiantes, un reconocimiento de la función de las cantidades involucradas, donde el salario recibido depende de un valor constante que es el salario básico ($20000) más el producto de la comisión por bulto ($400) y la cantidad de bultos transportados. Así, el salario recibido varía (aumentando en este caso) en función de la cantidad de bultos transportados.

La identificación de la función por parte de los estudiantes se puede ver en expresiones de la Escena 2 como *“Es que ahí (en la tabla) están incluidos los $20000 básicos”*, donde reconocen el elemento constante que aporta el cargo básico. También el fragmento donde el estudiante dice *“Cada que se pone otro bulto, la plata aumenta $400”* y después de la pregunta de la docente *“¿Y siempre aumenta lo mismo o hay algún caso en que esa cantidad sea diferente?”*, agrega *“No, siempre aumenta $400”*; aquí reconoce que el valor de la comisión es constante y que a mayor número de bultos transportados, mayor es la comisión y mayor el salario total recibido. Así, los estudiantes identifican de manera verbal el procedimiento general para dar solución a la situación, que aunque no sea expresado de mamera algebraica, constituye una generalización y el inicio de la comprensión de las relaciones lineales.

Por otra parte, es posible determinar que en este proceso la construcción de la representación tabular juega un papel importante, ya que facilita el reconocimiento de las variables que intervienen en la situación y la forma en que se comportan, para luego llegar a la realización del procedimiento general que consiste en la siguiente relación (Figura 8):

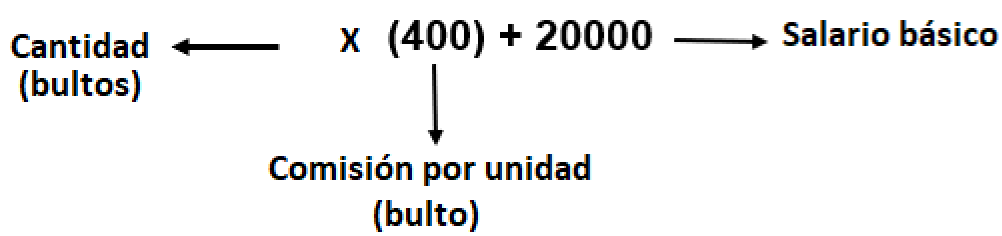
Figura 8. "Procedimiento" elaborado por los estudiantes.



Fuente: Elaboración del autor

Como ya se dijo, detrás de esto se esconde una generalización (Figura 9), aunque los estudiantes no la expresen de manera algebraica. Si bien la expresión algebraica de la Figura 9 no es construida por los estudiantes, hay un reconocimiento de la función de las cantidades involucradas, tal y como se mencionó un par de líneas atrás.

Figura 9. Generalización del "procedimiento" elaborado por los estudiantes.



Fuente: Elaboración del autor

El numeral 2 indagaba por la cantidad de bultos transportados conociendo el salario recibido. Aquí se pedía realizar un procedimiento inverso que generó cierto grado de dificultad para los estudiantes. De los 8 grupos de trabajo, 3 dejaron de resolver este numeral. Otros tres grupos realizaron procedimientos consistentes en dividir el valor del salario dado entre 400 que es la comisión por bulto, omitiendo el sueldo básico que era un elemento constante de la situación.

En uno de estos grupos se presentó la Escena 3:

Escena 3

-Estudiante A: “Nos equivocamos”.
-Estudiante B: “¿Por qué?.
-Estudiante A: “No tuvimos en cuenta los 20000”.
-Estudiante C: “¿Cuáles 20000?”.
-Estudiante A: “Los que le pagan diario sin importar los bultos que cargue”.

-Estudiante C: "¡Ah, sí! ¿Entonces hay que restarle primero esos 20000 a los 39200 y lo que dé ya sí se divide entre 400?".
-Estudiante A: "Sí".

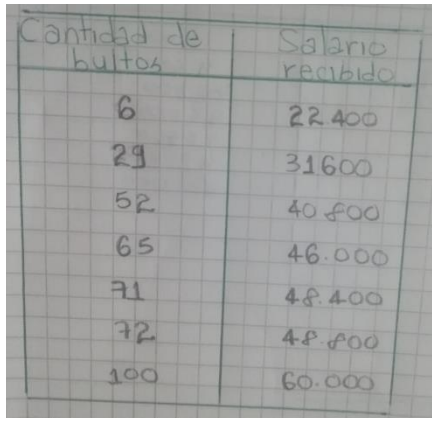
Lo ocurrido en este grupo muestra que, aunque de manera inicial no consideraron el salario básico de $20000, logran identificar el error y corregirlo de manera adecuada. Así, están relacionando simultáneamente todas las condiciones de la situación (cantidad de bultos, comisión, cargo básico) y pueden realizar el procedimiento inverso al planteado en el anterior numeral.

Las Escenas 1 y 2 muestran que el intercambio de ideas y la discusión entre pares contribuye significativamente a la comprensión, la construcción de ideas, la identificación de errores y su corrección. Al resolver las tareas de forma grupal, los estudiantes tienen la posibilidad de expresar sus puntos de vista, escuchar los de sus pares, aceptarlos o refutarlos con argumentos, pueden además proponer la realización de acciones y el uso de instrumentos, y debatir sobre su pertinencia para la consecución de los motivos trazados en las tareas. El trabajo en grupo facilita la identificación de errores y la proposición de vías para solucionarlos, proceso en el cual, la intervención del docente también juega un papel importante.

Los dos equipos restantes acertaron en la respuesta. Uno de ellos restó rápidamente los 20000 del cargo básico a los 39200 del salario recibido, para posteriormente dividir el resultado obtenido entre los 400 de la comisión por bulto transportado. El otro equipo fue el que había construido, para el numeral anterior, el bosquejo de tabla hasta 31 bultos, simplemente buscó allí la cantidad de bultos que correspondía a los $39200.

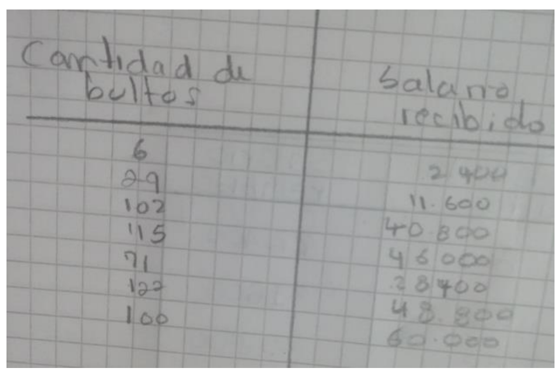
A la hora de completar la tabla del numeral 3 la mayoría de los grupos demostraron comprensión de la situación y rellenaron los espacios correctamente. Dos grupos mostraron no haber considerado en sus cálculos el cargo básico de $20000 (Figura 10 y Figura 11).

Figura 10. Elaboración 3 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

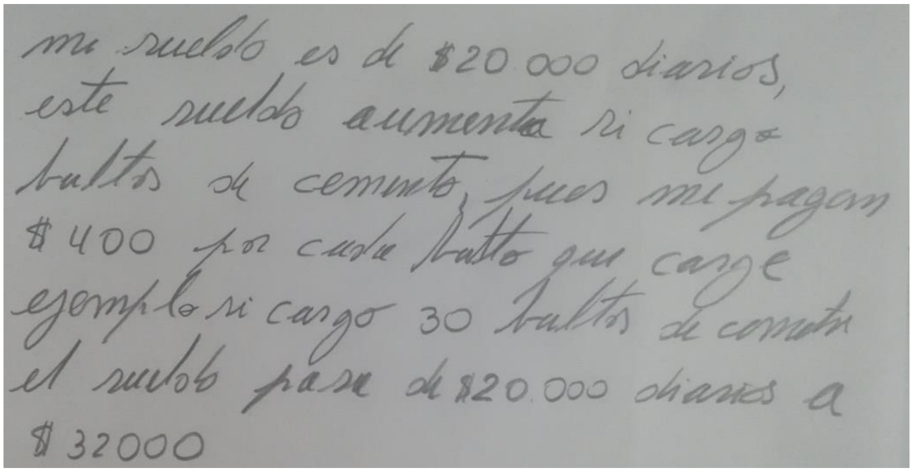
Figura 11. Elaboración 4 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Para el numeral 4 debían explicar la relación entre el salario diario recibido y la cantidad de bultos transportados, pero no se delimitaba la forma de hacerlo. El grupo que previamente elaboró una tabla con la relación hasta 31 bultos de cemento transportados (Figura 7), para este numeral respondió “ver la tabla del punto 1”. Todos los demás grupos optaron por el uso del lenguaje natural (Figura 12 y Figura 13), expresando en sus propias palabras la relación planteada.

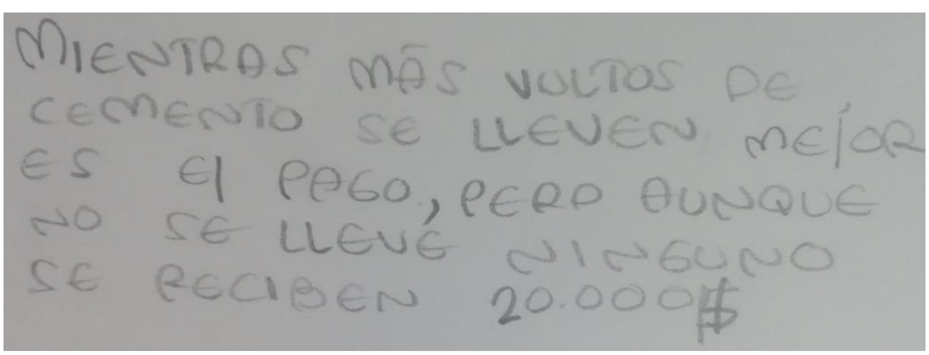
Figura 12. Elaboración 5 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.


mi sueldo es de $20.000 diarios,
este sueldo aumenta si cargo
bultos de cemento, pues me pagan
$400 por cada bulto que carge
ejemplo si cargo 30 bultos de cemento
el sueldo pasa de $20.000 diarios a
$32000

Fuente: Elaboración de los estudiantes

En la Figura 12 uno de los estudiantes manifiesta que recibe un sueldo diario de $20000, que aumenta al cargar los bultos de cemento, pues recibe $400 por cada uno. Esta expresión permite ver que se reconoce que la cantidad de dinero aumenta en función de la cantidad de bultos transportados y que ese aumento opera de manera constante, ya que la comisión por bulto siempre es $400. Además, se está considerando el salario básico de $20000; es decir, la expresión reúne todas las variables que intervienen en la situación.

Figura 13. Elaboración 6 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.


MIENTRAS MÁS VULTOS DE
CEMENTO SE LLEVEN MEJOR
ES EL PAGO, PERO AUNQUE
NO SE LLEVE NINGUNO
SE RECIBEN 20.000$

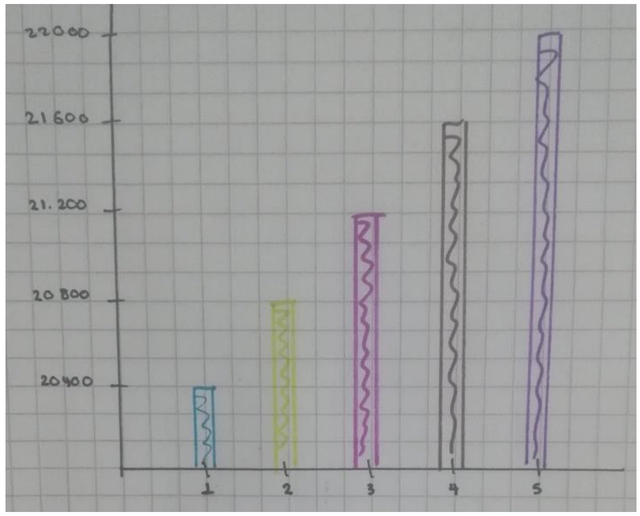
Fuente: Elaboración de los estudiantes

La Figura 13 permite observar que en este equipo logran establecer la relación a mayor cantidad de bultos de cemento transportados, mayor cantidad de dinero recibido, es decir, hay una comprensión de la variación lineal entre las magnitudes. En este equipo también reconocen el sueldo básico que se recibe por día.

El lenguaje natural permite explicar con facilidad una situación, ya que con él se hace uso de términos cotidianos para el estudiante, que hacen posible evidenciar de manera más clara la idea construida. Además, en muchas ocasiones, mientras un individuo expresa una idea haciendo uso del lenguaje natural, realiza movimientos corporales (que también son Sistemas Culturales Semióticos) para apoyar lo expresado. Un ejemplo de esto es el movimiento de una mano hacia arriba cuando se habla de un aumento, o para abajo cuando es una disminución. Todo esto permite apreciar cómo el estudiante realiza el proceso de objetivación de un objeto de conocimiento, en este caso, la relación funcional de tipo lineal.

El último numeral del primer momento pedía expresar la misma relación de manera gráfica, sin especificar qué tipo de gráfica. Dos grupos retomaron la tabla del numeral 3, 3 grupos construyeron diagrama de puntos, dos equipos utilizaron un diagrama cartesiano donde se observó la recta generada por los datos, y el último equipo realizó un diagrama de barras (ver Figura 14 y Figura 15).

Figura 14. Elaboración 7 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

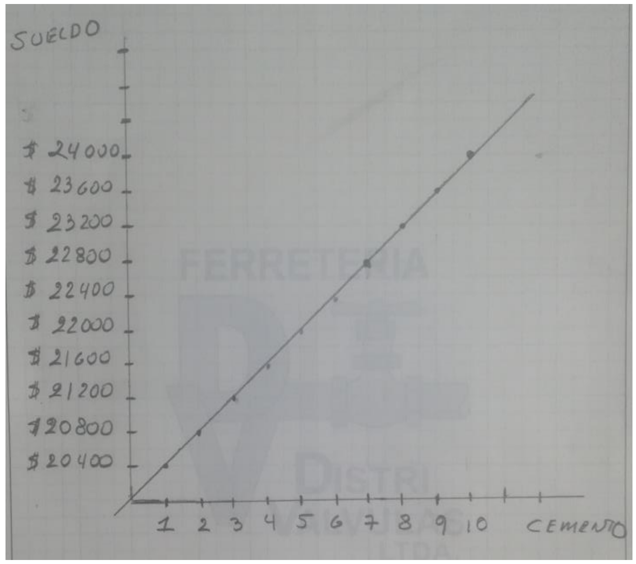
Respecto a la Figura 14 se preguntó a los integrantes del equipo ¿Por qué eligieron este tipo de diagrama para representar la información?, a lo que contestaron “Porque es más fácil ver la información así”. Esta opción puede deberse a que desde los primeros grados escolares los estudiantes tienen contacto con diagramas de barras, por lo que se sienten más familiarizados con ellos. Además, el diseño visual de este tipo de diagrama es más llamativo y tal y como lo expresaba el estudiante, este hecho puede facilitar la representación de la información.

También se generó el diálogo de la Escena 4, donde se aprecia que a medida que el estudiante dialoga con la docente, logra una mejor lectura de la gráfica construida por él mismo, pues pasa de ver el crecimiento de las barras en términos de “cuadritos” a verlo en términos de dinero, puntualmente de los $400 de comisión por bulto cemento transportado. El estudiante reconoce también que el crecimiento de las barras es constante porque la comisión por bulto también lo es, y que, en caso que dicha comisión variara por alguna razón, el crecimiento de las barras no se comportaría de manera constante.

Escena 4

Docente: “¿Cómo puede leerse este gráfico (Figura 14)?”.
Estudiante: “¿Cómo así profe?”.
Docente: “¿Qué indican las barras?”.
Estudiante: “Que la plata va aumentando”.
Docente: “¿Y cómo aumenta la plata?”.
Estudiante: (Permanece en silencio) “Profe, ¿cómo así?”.
Docente: “¿Qué hace que el dinero aumente?”.
Estudiante: “¡Ah!, pues que se carguen más cemento”.
Docente: “Entonces, ¿quieres decir que mientras más bultos se transporten, más dinero se recibe’”.
Estudiante: “¡Claro!”.
Docente: “¿Y ese aumento de dinero siempre se comporta igual?”.
Estudiante: “Sí”.
Docente: “¿Cómo lo sabes?”.
Estudiante: “Porque por cada costal de cemento pagan lo mismo”.
Docente: “¿Y ese “aumento igual” cómo puede verse en la gráfica?”.
Estudiante: (Observa la gráfica por un momento) “Porque cada barra crece. tres cuadritos (renglones) más que la anterior”.
Docente: “¿Por qué tres cuadritos?”.
Estudiante: “Porque aquí (señala el eje Y) cada número está separado del otro por tres cuadritos”.
Docente: “Pero entonces ¿qué representan esos tres cuadritos ahí (señalando el eje)?”.
Estudiante: “Los $400 que pagan por cada costal de cemento”.
Docente: “Si este eje representa el dinero, ¿cuánto crece cada barra con respecto a la anterior?”.
Estudiante: “Profe, tres cuadritos”.
Docente: “Mira que el eje Y representa el dinero, no “cuadritos””.
Estudiante: “Ah bueno, entonces crece $400 pesos en comparación con la que está antes”.
Docente: “Será que si pagaran diferente la comisión por cada bulto, ¿la forma en que crecen las barras cambiaría?”.
Estudiante: “No entiendo la pregunta”.
Docente: “Si por ejemplo pagaran $400 por el primer bulto, $500 por el segundo, otro valor por el tercero y así sucesivamente, ¿las barras crecerían siempre la misma medida con respecto a la anterior?”.
Estudiante: “¡Ah no!, crecerían diferente. Estas crecen igual porque siempre pagan lo mismo”.

Figura 15. Elaboración 8 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Respecto a la Figura 15, si bien es cierto que muestra una línea recta, debe anotarse que tiene problemas de construcción debido a que la recta no pasa por el origen, por lo que no representa una variación directamente proporcional. Aparentemente la recta sí pasa por el origen, pero si se analizan los valores de lo ejes es posible observar que no es cierto. Debido a esto se generó la Escena 5:

Escena 5

Docente: "¿Esta gráfica pasa por el origen?".
Estudiante A: "Sí profe".
Docente: "¿Seguro?".
Estudiante A: (Señalando la recta) "Sí, mire".
Docente: "Mira los valores del eje Y, ¿cuál es la escala?".
Estudiante A: "¿Cómo así que la escala?".
Estudiante B: "Pues, cuántos números hay entre cada punto. 400, profe".
Docente: "Si el primer valor del eje Y es $20400 y teniendo en cuenta que la escala es de 400, ¿cuál sería el valor anterior a ese?".
Estudiante A: "$20800".
Estudiante B: "No, $20000".
Estudiante A: "¡Ah, sí!".

Docente: "Bien, si el primer valor del eje Y es $20400 y el valor anterior a ese es $20000, entonces ¿cuál es el error?"
Estudiante A: "Ninguno".
Docente: "Analicen la situación con lo que les estoy diciendo".
Estudiante B: (Después de observar la gráfico por un momento) "¡Ya sé! El problema es que si el valor anterior a $20400 es $20000, quiere decir que ese $20000 iría en el origen, y pues no puede ir ahí porque el origen siempre es cero".

A propósito, debe mencionarse que inicialmente los estudiantes no observan ningún error en la gráfica, pero tras la intervención de la docente mediada por preguntas, logran determinar la inconsistencia. Este hecho muestra que la interacción entre estudiantes y estudiante-docente es fundamental en el proceso de comprensión. Se aprecia además que la suma de factores como dichas interacciones, los sistemas de representación, los movimientos corporales, entre otros, sumados contribuyen a la objetivación del conocimiento.

Ahora, sobre el momento 2 de la tarea, se planteaba una nueva opción de pago consistente en un sueldo básico de $12000 y una comisión de $600 por bulto transportado. En este punto se indagaba por la opción de pago más rentable para el trabajador y se pedía justificar por qué. Algunos equipos respondieron que se inclinaban por la primera opción, pues con el sólo hecho de presentarse al trabajo asegurarían los $20000 de cargo básico, mientras que en la segunda opción la cifra se reducía sustancialmente.

Uno de los episodios observados en esta parte fue el siguiente (Escena 6):

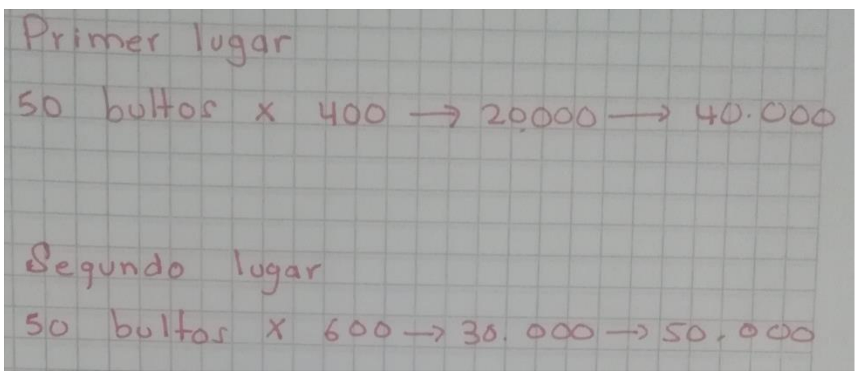
Escena 6

-Docente: "¿Por qué escogieron la primera opción laboral?"
-Estudiante A: "Porque con el sólo hecho de ir al trabajo ya uno se gana $20.000, y en la otra parte casi la mitad".
-Docente: "Pero no están tomando en cuenta las comisiones"
-Estudiante B: "Pero es que uno no sabe cuántos bultos va a llevar, entonces es mejor asegurar los $20.000".

-Docente: "¿Y si analizan la diferencia de dinero recibido en ambos trabajos al transportar alguna cantidad determinada de cemento?".
-Estudiante B: "¿Cómo así?".
-Estudiante A: "Pues que supongamos que vamos a cargar por ejemplo 30 bultos y miremos cuánto ganaríamos en las dos partes".
-Estudiante B: "Pero 30 es muy poquito…Yo he cargado hasta 70 en un día".
-Estudiante C: "Yo una vez cargué 80, pero me quedó doliendo el cuerpo como dos días".
-Estudiante A: "Por eso, entonces supongamos que se llevan pues 50 bultos y miremos cuánto se recoge en ambas partes".

Después de esto efectuaron el procedimiento mencionado y encuentran que la segunda opción de pago es más rentable (Figura 16).

Figura 16. Elaboración 9 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

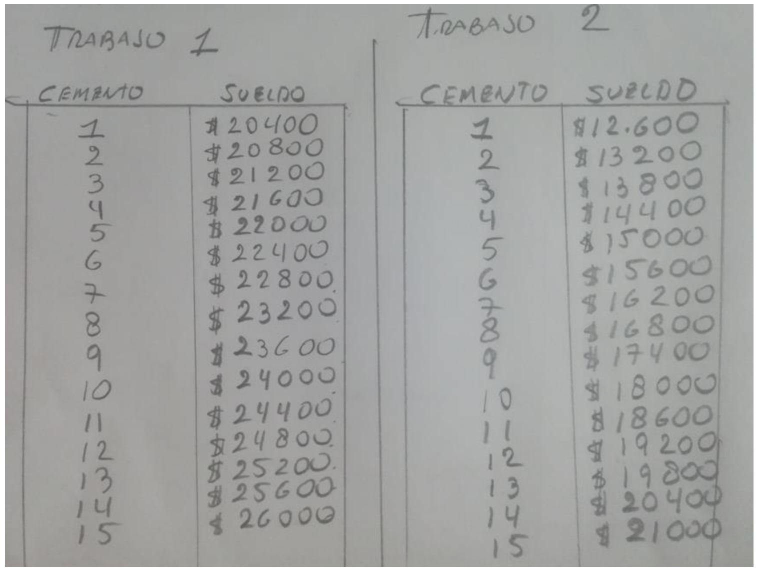
Sobre la Figura 16 y respecto a la estrategia utilizada por los estudiantes, se aprecia que optan por multiplicar la cantidad de bultos de cemento por el valor de la comisión por unidad para luego sumarle al resultado el salario básico; esto para ambas opciones de trabajo. La ejecución de este cálculo con la información de la primera oferta de trabajo se realiza adecuadamente, multiplicando 50 por 400 para obtener 20000 y luego sumarle los otros 20000 que corresponden al salario básico. Pero en el cálculo para la segunda oferta laboral, hay un error, pues a los 30000 resultantes de multiplicar 50 por 600 debían sumarle 12000 que es el salario básico, y en lugar de esto le sumaron 20000.

Ahora, sobre la Escena 6, debe resaltarse que la elección hecha de manera inicial se basó exclusivamente en una de las variables: el cargo básico, desconociendo que el componente central de la tarea: la variación entre las magnitudes bultos de cemento y comisión. Pero luego de la intervención de la docente, y la conversación generada alrededor de ella, los estudiantes seleccionan una estrategia para considerar la variación entre ambas magnitudes.

Por otra parte es fundamental señalar que cuando el Estudiante B dice*: "Pero es que uno no sabe cuántos bultos va a llevar, entonces es mejor asegurar los $20.000",* deja ver que el estudiante habla, no desde la idealidad de la situación matemática, sino desde la realidad de lo que puede presentarse en la vida diaria, pues puede ser que desde su experiencia sea más probable que el número de bultos cargado en un día no supere el punto de equilibrio en que la segunda propuesta se hace más rentable que la primera. De manera más profunda, esto muestra que cierto tipo de imaginarios sociales determina las formas de razonamiento matemático y por ende las decisiones que se toman en una situación real o hipotética.

Continuando con lo observado en la resolución de este numeral, se encontró que un equipo construyó un pequeño registro tabular para cada situación, determinando el salario para cierta cantidad de bultos de cemento, para de este modo establecer comparaciones más precisas entre el salario obtenido en cada sistema de pago (Figura 17).

Figura 17. Elaboración 10 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



TRABAJO 1		TRABAJO 2	
CEMENTO	SUELDO	CEMENTO	SUELDO
1	$20400	1	$12.600
2	$20800	2	$13200
3	$21200	3	$13800
4	$21600	4	$14400
5	$22000	5	$15000
6	$22400	6	$15600
7	$22800	7	$16200
8	$23200	8	$16800
9	$23600	9	$17400
10	$24000	10	$18000
11	$24400	11	$18600
12	$24800	12	$19200
13	$25200	13	$19800
14	$25600	14	$20400
15	$26000	15	$21000

Fuente: Elaboración de los estudiantes

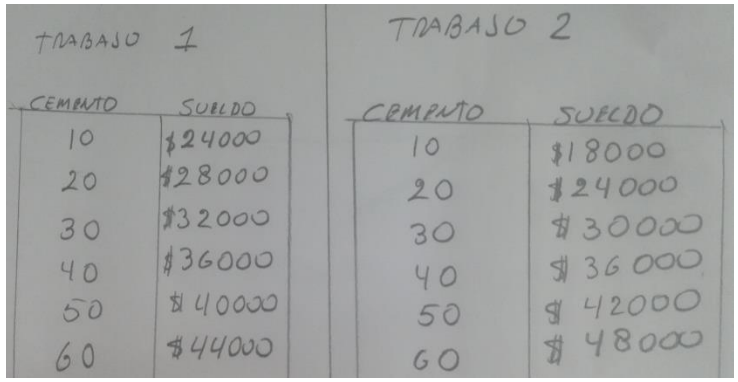
Estas tablas mostraron que, al transportar hasta 15 bultos, la primera oferta laboral generaba mayores ingresos. Pero luego se desarrolló la siguiente conversación (Escena 7):

Escena 7

> *-Estudiante A: "Con el primer trabajo se recoge más plata, pero mira que aumenta más rápido la cantidad de plata en el segundo (trabajo). Yo creo que si se transportan más bultos de cemento en el trabajo dos, al final se recoge más plata ahí".*
> *-Estudiante B: "Entonces hagamos otra vez las tablas pero pongamos los número del cemento de 5 en 5 (el estudiante guarda silencio mientras observa las representaciones tabulares)… o mejor de 10 en 10 para que se vea más la diferencia".*

Posteriormente hacen una nueva representación tabular (Figura 18):

Figura 18. Elaboración 11 de los estudiantes -Tarea diagnóstica.



TRABAJO 1

CEMENTO	SUELDO
10	$24000
20	$28000
30	$32000
40	$36000
50	$40000
60	$44000

TRABAJO 2

CEMENTO	SUELDO
10	$18000
20	$24000
30	$30000
40	$36000
50	$42000
60	$48000

Fuente: Elaboración de los estudiantes

Al observar las nuevas representaciones, el grupo reafirma que la segunda oferta laboral permite recibir un mejor salario que la primera. Es importante resaltar que este grupo tuvo la capacidad de reconocer que al considerar pequeñas cantidades de bultos de cemento se tenía mayor beneficio con el primer sistema de pago, pero vieron también que las ganancias se incrementaban más rápidamente en el segundo sistema de pago, lo cual los llevó a pensar que para hacer la comparación tabular que estaban proponiendo, debían tomar cantidades mayores de unidades (bultos) de cemento.

Lo anterior se respalda con la Escena 8, que se generó cuando la docente observa el trabajo de los estudiantes, donde se observa que el equipo de trabajo logra identificar las variables que hacen que la segunda opción laboral sea más rentable.

Escena 8

Docente: "¿Por qué elaboraron 2 tablas?".
Estudiante: "Es que en la primera empezamos a mirar cuánto se ganaba en cada trabajo, levando bultos de uno en uno. Vimos que obviamente en el primer trabajo se empieza ganado más que en el otro porque en el primero de entrada uno ya recibe $20000 y en el otro sólo $12000. Pero cuando ya se han llevado varios bultos, empieza a verse que la plata aumenta más rápido en el segundo trabajo".

Docente: "¿Cómo se dieron cuenta de esto?".
Estudiante: "Por ejemplo, si se lleva un solo bulto en el primer trabajo, se gana $20400 y en el segundo trabajo $12600. Pero si uno mira cuando se llevan 6 bultos, en l primer trabajo se ganan $22400 y en el segundo $15600".
Docente: "Pero se sigue recibiendo más dinero con el segundo, ¿no?".
Estudiante: "No…bueno, sí, pero si sólo se fueran a mover esos 6 bultos y uno va a cargar muchos más. Uno ve que es mejor el segundo trabajo porque la diferencia que hay entre lo que se gana llevando un bulto y llevando 6 en el primer trabajo, es de $2000. Y si compara eso mismo en el segundo trabajo, la diferencia es $3000".
Docente: "¿Entonces qué hace que sea mejor la segunda opción?".
Estudiante: "Que mientras más bultos se muevan en el segundo trabajo, más rápido aumenta la plata por que ahí pagan más por cada bulto".
Docente: "¿Entonces para qué la segunda tabla?".
Estudiante: "Porque en esa pusimos de 10 en 10 los bultos para ver mejor que en el segundo trabajo aumenta más rápido la plata".

Los demás grupos coincidieron en tomar una cantidad arbitraria de bultos de cemento y realizar el cálculo del salario obtenido en cada sistema de pago. Estos grupos seleccionaron el número de bultos en todos los casos por encima de 50, pues según explicaron, es la cantidad de bultos de cemento que generalmente logran transportar cuando laboran en esta actividad. De este modo, todos estos grupos determinaron que la segunda propuesta de pago era más beneficiosa. Una vez más los imaginarios sociales influyen en la toma de decisiones y en los razonamientos matemáticos, incluso cuando las situaciones matemáticas son un tanto idealizadas. Por otra parte se resalta nuevamente que debido a que el planteamiento de la tarea tiene su base en una situación real y cercana para los estudiantes, resulta más llamativa para ellos, y su análisis se facilita.

En términos generales, esta tarea diagnóstica permitió observar la importancia del uso de varios sistemas de representación para comprender la situación planteada, especialmente representaciones tabulares, gráficas y en lenguaje natural. Por otra parte, permitió apreciar que las interacciones entre estudiantes y los diálogos con la docente promueven un análisis más profundo de las situaciones, además de permitir observar en cierta forma los procesos de pensamiento y reflexión que están desarrollando los estudiantes. Otro aspecto evidenciado y que se mencionó un par de párrafos atrás, es la influencia de los imaginarios sociales en la toma de decisiones y los razonamientos matemáticos de los estudiantes. Todo esto deja vislumbrar el valor de los Medios Culturales Semióticos en el aprendizaje de los estudiantes.

Fue posible identificar también que para el caso de las magnitudes A: Bultos de cemento y B: Salario diario, resultaba más sencillo determinar el valor de una cantidad de la magnitud B a partir de la que le corresponde de la magnitud A. El proceso inverso generó mayores dificultades.

También debe mencionarse que se observó que los jóvenes determinaron con facilidad que a medida que aumentaba la cantidad de bultos de cemento transportados, aumentaba también el salario diario; es decir, pudieron percibir la covariación. Además, pudieron determinar que la comisión por bulto es un elemento constante en la situación, que genera un crecimiento también constante en el dinero recibido. Por otro lado, se resalta que, aunque los estudiantes no hayan llegado a un tratamiento algebraico de la tarea, sí logran acercamientos importantes en el reconocimiento cualitativo de la relación funcional.

Por otra parte, se observa que representaciones como las tablas y los cálculos aritméticos específicos, permitieron a los estudiantes identificar las relaciones generales entre las variables, las cuales fueron expresadas verbalmente en un procedimiento general. Esto es importante porque permite evidenciar que los estudiantes comprenden las variables, las relaciones entre las cantidades, y logran expresar esto en un cierto nivel de generalidad.

Finalmente, y retomando la Tabla 11, los elementos identificados en la actividad matemática desarrollada en la tarea diagnóstica, son de manera sintética los que se señalan a continuación, resaltando que a lo largo del análisis de la tarea se explicaron de manera más amplia:

- El motivo de la docente apuntó a propiciar que los estudiantes analizaran la variación inmersa en la situación, y observar la manera en los estudiantes realizan ese análisis, considerando las acciones, instrumentos y registros de representación empleados para ello.

- El motivo de los estudiantes consistió en determinar la opción de pago más beneficiosa en una situación que es cotidiana para ellos y que refiere a una de las modalidades de trabajo más comunes en el sector, incluso para menores de edad. Esto hizo que la toma de decisiones para aproximarse al motivo fuera más sencilla para ellos y basada en argumentos justificados.
- En cuanto a las acciones realizadas, se resaltan las interacciones desarrolladas al interior de cada equipo, como se puede ver en las diferentes escenas presentadas en el texto. Desde el momento de la planeación de la intervención, se definió realizar las tareas en equipos justamente para propiciar esas interacciones, pues cuando la toma de decisiones requiere el punto de vista de dos o más personas, surge un intercambio de ideas donde se aceptan o rechazan los postulados de los demás compañeros haciendo uso de la argumentación y la justificación; cuando se logra elegir una decisión, el equipo está de acuerdo y ha determinado que es la más provechosa para alcanzar el motivo impuesto dentro de la tarea.

  Otro tipo de interacción es el que se da entre los estudiantes y la docente, el cual además de permitirle a la segunda entender mejor el porqué de las estrategias y decisiones empleadas por el equipo para la consecución de su motivo en la tarea, hace posible insinuar a los estudiantes vías de acción para tal fin y para apoyar el alcance del motivo impuesto por la docente en la misma tarea.

  Dentro de las acciones también se destacan la realización de cálculos numéricos (básicamente sumas y multiplicaciones) que en su mayoría fueron hechos con ayuda de la calculadora. También, las explicaciones verbales que en algunos momentos hicieron los estudiantes a la docente sobre la actividad matemática que estaban realizando, y el marcado uso de representaciones escritas de distintos tipos para comprender mejor la situación planteada en la tarea. Estas representaciones escritas básicamente consistieron en registros gráficos y tabulares.

- Los instrumentos para la acción observados fueron: algunos movimientos corporales (movimiento de la mano hacia arriba para indicar aumento, y hacia abajo para hablar de disminución), uso de lápiz y papel, uso marcado de la calculadora incluso para cálculos básicos de suma entre dos cantidades.
- Las representaciones empleadas fueron de tipo gráfico, tabular y lenguaje natural, cuyo análisis puede verse a lo largo del texto junto a las Figuras que evidencian su uso.

Pasemos ahora a la tarea "Actividad inicial Salario Mínimo".

Tabla 13. Identificación de elementos de la actividad matemática en la tarea "Actividad inicial Salario Mínimo".

Identificación de elementos constitutivos de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes	
Tarea	Distribuir el salario mínimo para todos los gastos del mes y analizar día a día cómo se gasta es dinero.
Motivo del docente	• Que el estudiante analice la variación entre las magnitudes. • Observar la forma en que el estudiante analiza dicha variación y la actividad matemática que se desencadena en dicho proceso. • Tener un primer contacto con la constante de proporcionalidad.
Motivo asumido por el estudiante	Repartir del dinero entre los gatos básicos de la forma más adecuada.
Acciones	• Discusión estudiante-estudiante y estudiante-docente. • Realización de cálculos numéricos. • Explicación verbal de la situación.

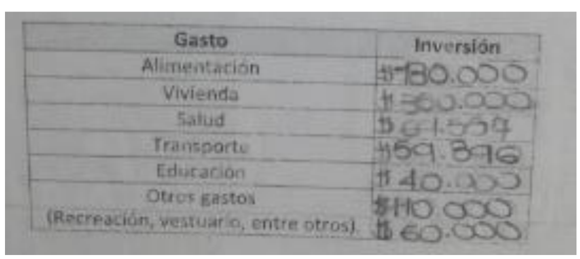
4. Trabajo Final

	• Representación escrita de la situación.
Instrumentos	• Movimientos corporales para explicar la manera en que varían las cantidades. • Lápiz y papel. • Calculadora.
Representaciones empleadas	• Lenguaje verbal. • Representación gráfica. • Representación tabular.

Fuente: Elaboración del autor

Lo primero que debían hacer los estudiantes era distribuir el salario mínimo entre los gatos básicos de alimentación, vivienda salud, transporte, educación, y gastos extra. Los estudiantes intentaron ser muy objetivos a la hora de realizar la distribución y varios de ellos evidenciaron un conocimiento de los costos de esos gastos. Las Figuras 19 y 20 muestran ejemplos de la distribución de los gastos que hizo un par de equipos.

Figura 19. Elaboración 1 de los estudiantes-Actividad inicial Salario Mínimo.



Gasto	Inversión
Alimentación	$180.000
Vivienda	$360.000
Salud	$61.559
Transporte	$59.896
Educación	$40.000
Otros gastos (Recreación, vestuario, entre otros)	$110.000 $60.000

Fuente: Elaboración de los estudiantes

Figura 20. Elaboración 2 de los estudiantes-Actividad inicial Salario Mínimo.

Gasto	Inversión
Alimentación	280.000
Vivienda	300.000
Salud	69 557
Transporte	117.600
Educación	60000
Otros gastos (Recreación, vestuario, entre otros).	42.300

Fuente: Elaboración de los estudiantes

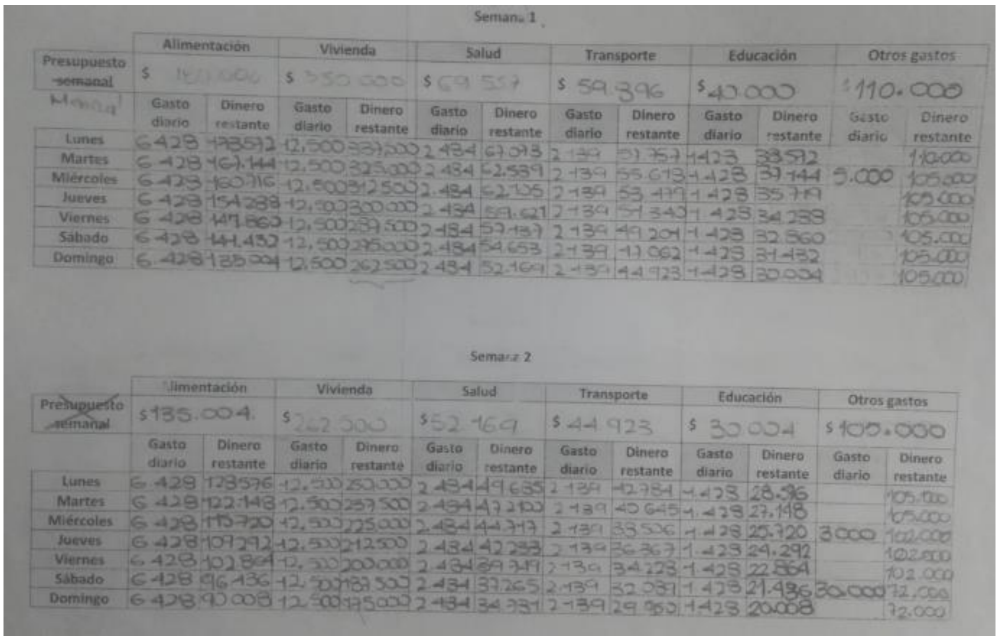
Una vez distribuido el dinero entre los gastos básicos del mes, debían comenzar a llenar las tablas donde se pedía especificar el gasto diario correspondiente a cada necesidad (alimentación, vivienda salud, transporte, educación, y gastos extra) y el dinero restante que quedaba cada día después de hacer el gasto diario; esto para cada una de las necesidades básicas y para 28 días del mes.

El procedimiento más recurrente para esta parte consistió en tomar el valor asignado a la necesidad básica y dividirlo entre los 28 días del mes, asumiendo así que cada día se gastaría la misma cantidad de presupuesto y siendo esto una constante de proporcionalidad. Luego, comenzando desde el día 1, restaban al valor asignado para el mes, el gasto diario constante que calcularon y el valor resultante sería el dinero restante para cubrir esa necesidad durante el mes. Luego repetían el procedimiento con cada uno de los días, siendo posible así observar cómo disminuía el dinero restante a medida que disminuían también los días del mes (ver Figura 21).

En lo relativo al final del mes, casi todos los grupos terminaron de gastar el dinero el día 28 que era el último, quedando con cero pesos disponibles. Esto responde a que dichos equipos seleccionaron el mismo gasto diario para todos los días, realizando así repartos exactos.

Sin embargo, algunos equipos no establecieron el mismo gasto diario para todos los días, argumentado que, por ejemplo, en el caso de la alimentación, no siempre se consumen los mismos alimentos y por tanto no siempre se invierte la misma cantidad de dinero (ver Figura 22). Este hecho muestra una vez más cómo las condiciones sociales que tienen relación con las situaciones que se plantean a los estudiantes, son determinantes en el tipo de razonamientos matemáticos que ellos formulan y, por ende, en la forma como resuelven los problemas a los que se enfrentan.

Figura 21. Elaboración 3 de los estudiantes-Actividad inicial Salario Mínimo



Semana 1

Presupuesto semanal	Alimentación		Vivienda		Salud		Transporte		Educación		Otros gastos	
	$ 180.000		$ 350.000		$ 69.557		$ 59.396		$ 40.000		$ 110.000	
Mensual	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante
Lunes	6.428	173.572	12.500	337.500	2.484	67.093	2.139	57.257	1.428	38.572		110.000
Martes	6.428	167.144	12.500	325.000	2.484	62.559	2.139	55.618	1.428	37.144	5.000	105.000
Miércoles	6.428	160.716	12.500	312.500	2.484	62.135	2.139	53.479	1.428	35.719		105.000
Jueves	6.428	154.288	12.500	300.000	2.434	59.621	2.139	51.340	1.428	34.288		105.000
Viernes	6.428	147.860	12.500	289.500	2.484	57.137	2.139	49.201	1.428	32.860		105.000
Sábado	6.428	141.432	12.500	275.000	2.484	54.653	2.139	47.062	1.428	31.432		105.000
Domingo	6.428	135.004	12.500	262.500	2.484	52.169	2.139	44.923	1.428	30.004		105.000

Semana 2

~~Presupuesto semanal~~	Alimentación		Vivienda		Salud		Transporte		Educación		Otros gastos	
	$135.004		$ 262.500		$52.169		$ 44.923		$ 30.004		$ 105.000	
	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante
Lunes	6.428	128.576	12.500	250.000	2.484	49.685	2.139	42.784	1.428	28.576		105.000
Martes	6.428	122.148	12.500	237.500	2.484	47.2100	2.139	40.645	1.428	27.148		105.000
Miércoles	6.428	115.720	12.500	225.000	2.484	44.717	2.139	38.506	1.428	25.720	3000	102.000
Jueves	6.428	109.292	12.500	212.500	2.484	42.233	2.139	36.367	1.428	24.292		102.000
Viernes	6.428	102.864	12.500	200.000	2.434	39.749	2.139	34.228	1.428	22.864		102.000
Sábado	6.428	96.436	12.500	187.500	2.434	37.265	2.139	32.089	1.428	21.436	30.000	72.000
Domingo	6.428	90.008	12.500	175.000	2.484	34.331	2.139	29.950	1.428	20.008		72.000

Fuente: Elaboración de los estudiantes

En la Figura 22 puede apreciarse que los estudiantes dividieron el valor seleccionado para cada gasto, entre los 28 días del mes, con ayuda de la calculadora. Este instrumento tuvo un significativo uso durante la realización de la tarea por parte de los distintos grupos de trabajo, facilitando la realización de los cálculos.

Llama la atención que, para el caso de la vivienda y la educación, inicialmente algunos equipos como éste no asignaron ningún gasto diario expresando que el arriendo se paga una sola vez al mes, y la educación es gratuita. Alrededor de lo anterior se generaron las Escenas 9 y 10:

Escena 9

Docente: "¿Por qué no pusieron ningún gasto diario para la vivienda?".

Estudiante A: "Porque el arriendo no se paga diario; se paga una sola vez al mes".

Docente: "Se paga una vez al mes, pero en ese pago se incluye el valor correspondiente a todos los días del mes".

Estudiante A: "Ah, pues sí…es lo mismo que pasa con los servicios…no había caído en cuenta".

Docente: "Y cómo van a calcular el gasto diario para vivienda?".

Estudiante B: "Toca dividir los $350000 entre 28".

Escena 10

Docente: "¿No asignaron dinero para los gastos de educación?".

Estudiante A: "No profe".

Docente: "¿Por qué?".

Estudiante B: "Porque como este colegio es público, entonces no se paga nada".

Docente: "Pero aunque el colegio sea público, hay otros gastos que se hacen relacionados con la educación".

Estudiante B: "¿Qué gastos?".

Docente: "Por ejemplo lo que comes en los descansos, los materiales que utilizas para hacer algunos trabajos".

Estudiante A: "¡Ah, sí!".

Docente: "¿Qué otros gastos pueden estar relacionados con la educación?".

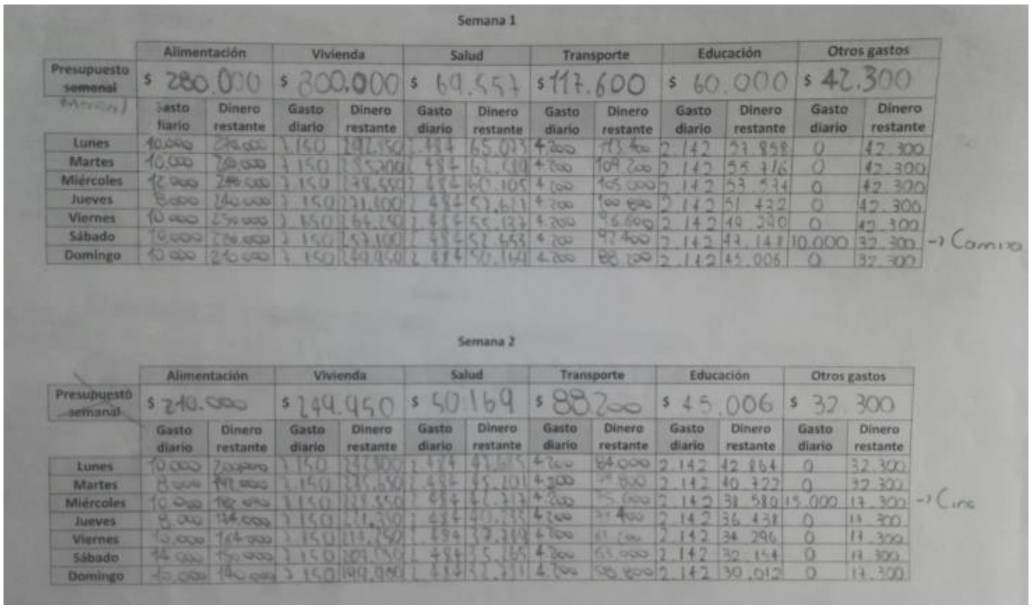
Estudiante A: "Por ejemplo los que tiene que subir en bus hasta la casa".

Estudiante B: "También los cuadernos, la maleta, el uniforme".

Estudiante A: "Pero los uniformes duran mucho tiempo, entonces eso no lo tomemos en cuenta en las cuentas que vamos a hacer".

En ambas escenas se aprecia que hay una toma de conciencia gracias a la intervención que hace la docente, lo que muestra el profundo valor de las interacciones entre pares y con la docente en el proceso de toma de decisiones para la consecución del motivo (tanto del estudiante como de la docente) dentro de la tarea, que finalmente repercute en la objetivación.

Figura 22. Elaboración 4 de los estudiantes-Actividad inicial Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

La Figura 22 presenta el caso de un equipo que no designó el mismo gasto diario para alimentación, argumentando lo expresado en la Escena 11:

Escena 11

Docente: "¿Por qué asignaron diferentes valores al gasto diario de alimentación?".

Estudiante: "Porque no todos los días se come lo mismo, entonces el precio de la comida que se compra un día puede ser diferente al que se compra otro día".

Docente: “¿Cómo compran el mercado en tu casa?, ¿seleccionan un día para ir a comprar todo lo del mes o todos los días compran algo?”.
Estudiante: “Casi que día por medio mi mamá compra las cosas”.

Lo anterior muestra de nuevo la influencia de las condiciones sociales de los estudiantes en el análisis que hacen de las situaciones matemáticas y los razonamientos que de allí surgen.

En la Figura 21 se observa de manera directa que, al haber asignado un gasto diario igual para la alimentación, aparece una constante, lo cual no sucede en la Figura 22. Sin embargo, debe resaltarse que, aunque en la Figura 22 no se haya asignado el mismo gasto diario para la vivienda, no significa que el estudiante no perciba una constante, sino que analizan otros elementos de la situación con base en su experiencia diaria, que les permite determinar que en la vida cotidiana un gasto de ese tipo puede fluctuar según las condiciones diarias.

La única variable que en todos los grupos de trabajo recibió el mismo gasto diario para los 28 días del mes fue la vivienda, pues según explicó uno de los estudiantes, *“el arriendo que cobran por todos los días del mes, entonces todos los días valen lo mismo”.* Este hecho permite ver que, para el caso de la vivienda, los estudiantes identifican un elemento constante que es el gasto diario y un elemento variante que es el dinero restante.

Sobre la variable gastos extra, es necesario mencionar que desde el planteamiento de la tarea se proponían ciertos gastos como recargas de saldo para el celular, compra de ropa y ocio, las cuales debían ser incluidas en la tabla de los gastos extra y tomadas en cuenta en el análisis de gastos para dicha variable. Sólo un par de equipos atendieron la instrucción; los demás no consideraron los gastos propuestos desde el planteamiento de la tarea.

Los interrogantes finales apuntaban a reflexionar en torno a la pertinencia del salario mínimo colombiano para satisfacer las necesidades básicas, a través de cuestionamientos como si consideran suficiente el monto para cubrir todos los gastos mensuales o qué valor le asignarían a ese salario para mejorar el bienestar del ciudadano promedio. Todos los grupos coincidieron en que no es suficiente el salario mínimo y respecto a la cantidad mínima que consideran necesaria, varios equipos concordaron en $1200000. algunos de los argumentos que a propósito presentaron los estudiantes, fueron:

- *“Realmente el salario mínimo no alcanza para todos los gastos porque si los cálculos que hicimos en la actividad hacían que al final del mes quedáramos sin nada de plata, imagínese cómo hace por ejemplo mi papá que gana eso y tiene que mantenernos a mi hermana y a mí. Entonces los gatos se multiplican por tres…bueno, no todos, pero sí algunos como la comida, el transporte y lo de la educación. A mi papá le toca trabajar los festivos en la cantera para ajustar”.*
- *“A nosotros nos alcanzó el salario para todos los gastos, pero si en el mes pasa alguna cosa diferente como una enfermedad o que por los aguaceros aparezca otra gotera, o cosas así, no habría plata para pagar eso”.*
- *“Puede que esa plata (el salario mínimo) alcance para los gastos normales, pero uno no podría hacer nada diferente como salir, comer algo un fin de semana o estrenar”.*
- *“Ese salario es muy poquito, yo sé porque mi mamá tiene que trabajar en dos partes para que alcance para comprar todo lo de la casa”.*

Ahora, sobre el $1200000 que varios propusieron para el salario mínimo, se retoman las Escenas 12 y 13, para ilustrar un poco los elementos sociales que influyen en la toma de decisiones por parte de los estudiantes.

Escena 12

> *Estudiante A: “El salario es $869453, digamos que $870000, ¿cuánto ponemos que debería ser?”.*

Estudiante B: “Como repartimos los gastos nos da exacto y no sobra nada, pero miremos qué podría pasar de raro en el mes y que se necesite plata”.

Estudiante A: “Supongamos que uno se enferme, entonces tiene que comprar alguna medicina de $30000”.

Estudiante C: “Puede que a uno se le rompa la sudadera del uniforme, que vale como $45000”.

Estudiante A: “Si uno quiere ahorrar algo de plata, debe guardar por lo menos $10000 mensual”.

Estudiante C: “Yo en el mercado me gastaría más plata, porque así como lo pusimos no daría para comprar casi nada. Entonces yo le subiría $100000”.

(Uno de los estudiante suma los nuevos valores)

Estudiante B: “Y pongámosle más a los gastos extra”.

(El Estudiante B suma los nuevos valores)

Estudiante B: “Así sería $1145000. Ajustemos $1200000 con un poquito para gastos extra”.

Escena 13

Estudiante A: “En este punto hay que decir cuál valor creemos que debería tener el salario mínimo, ¿cuál escogemos?”.

Estudiante B: “Yo digo que debería ser mucha más plata?”.

Estudiante C: “¿Cuánta más?”.

Estudiante B: “No sé”.

Estudiante A: “Subámosle la plata a cada gasto”.

Estudiante B: “Me parece bien, ¿pero cuánto?, ¿$100000 a cada cosa?”

Estudiante C: “No, ya queda muy alto y eso tan alto no lo van a poner”.

Estudiante A: “Entonces subamos $100000 más la alimentación y también la salud”

Estudiante C: “Otros $50000 la vivienda, para que quede como lo que pagamos en mi casa (350000)”.

Estudiante B: "$40000 más para transporte, porque uno no sabe que tenga que bajar a Medellín varias veces. Y pongamos también $40000 más a la educación porque a uno siempre le piden alguna cosa como cartulina o cosas así".

Estudiante A: "Aumentemos también los gastos extras".

Estudiante C: "Espere miremos cuánto va hasta ahí".

(Suman los valores)

Estudiante B: "$1160000".

Estudiante C: "Ah bueno, entonces dejemos en $1200000 y serían $40000 para gastos extra".

A continuación, algunas ideas generales de la observación de la ejecución de la tarea:

- En uno de los equipos el dinero presupuestado para transporte fue insuficiente, evidenciándose en cantidades negativas que aparecieron al final del mes. Los estudiantes identificaron el hecho y explicaron a la docente que dichas cantidades negativas representaban una deuda. Se resalta la comprensión de los números enteros en el análisis de la situación.

Figura 23. Elaboración 5 de los estudiantes-Actividad inicial Salario Mínimo.

Semana 4

	Alimentación		Vivienda		Salud		Transporte		Educación		Otros gastos	
Presupuesto semanal	$ 70.000		$ 149.850		$ 15.395		$ 29.400		$ 15.018		$ 5.300	
	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante
Lunes	12.000	58.000	7.150	142.700	2.484	12.911	4.200	25.200	2.142	12.876	0	5.300
Martes	10.000	48.000	7.150	135.500	2.484	10.427	4.200	21.000	2.142	10.734	0	5.300
Miércoles	8.000	40.000	7.150	128.400	2.484	7.943	4.200	16.800	2.142	8.592	0	5.300
Jueves	14.000	56.000	7.150	121.250	2.484	5.459	4.200	12.600	2.142	6.450	0	5.300
Viernes	10.000	36.000	7.150	114.100	2.484	2.975	4.200	8.400	2.142	4.308	0	5.300
Sábado	6.000	30.000	7.150	106.950	2.484	491	4.200	4.200	2.142	2.166	5.000	300
Domingo	10.000	70.000	7.150	99.300	2.484	-1993	4.200	0	2.142	24	0	300

Fuente: Elaboración de los estudiantes

- Algunos estudiantes explicaron luego de completar las tablas, que podían llenarse de nuevo considerando que hay ciertos gastos que no se generan durante el fin de semana, como los relativos a educación y transporte. Sin embargo, no realizaron una redistribución de los gastos ya que la tarea no contenía ningún numeral que lo indicara, y ellos se limitaron a responder los interrogantes incluidos en la guía de trabajo que se les entregó.
- El análisis de la tarea centró la atención de los jóvenes y motivó su resolución porque representaba para ellos una realidad muy concreta relacionada con la economía del hogar.
- Los estudiantes piensan la situación matemática desde su condición actual de vida y utilizan su experiencia como foco para apreciarla. Esto hace que el sentido que los estudiantes le atribuyen a la tarea muchas veces sea diferente al que le da el docente; de ahí la importancia del diálogo y el intercambio de ideas, como recurso para apreciar las razones que llevan al estudiante a resolver el problema de determinada manera.
- Esta tarea tiene importancia en el proceso de formación de los estudiantes porque a pesar de presentar una situación con información hipotética, pone a los jóvenes frente a la realidad de cómo se consigue el dinero y cómo se gasta en un hogar.
- El análisis que los estudiantes hicieron de la variable vivienda es diferente a las demás variables, porque, tal y como se mencionó antes, reconocen un elemento constante en su cobro.
- Con gran facilidad e incluso antes de recurrir a la construcción de la tabla, los jóvenes relacionaron las magnitudes A: días transcurridos y B: dinero restante luego de realizar el gasto diario, comprendiendo que su variación se da disminuyendo el dinero disponible a medida que disminuyen también los días del mes.
- Los registros de representación que se utilizaron durante el desarrollo de la tarea fueron la representación tabular y el lenguaje natural. El primero de ellos fue impuesto por la misma tarea, pues todo el análisis se debía realizar con ayuda del formato tabular dado. En cuanto al lenguaje natural, se resalta

el uso que se hace de él en las interacciones que emergieron entre los integrantes de los diferentes equipos y que fueron fundamentales para la toma el análisis de las situaciones y la toma de decisiones. Igualmente, esta forma de presentación se pone en juego en las interacciones con la docente, que como se ha mencionado, tiene influencia en la forma en que los estudiantes resuelven la tarea.

- El uso de la calculadora como instrumento para la acción fue muy marcado, permitiendo realizar de manera ágil y acertada los cálculos, que básicamente consistieron en repartos y sustracciones.
- Respectos a la actividad matemática observada, los elementos observados que hasta este punto se han explicado, guardan bastante similitud con los identificados en la Actividad inicial Salario Mínimo.

Hablemos ahora de la tarea denominada “Actividad N°.2 Salario Mínimo”. Veamos el esquema de identificación de los elementos de la Teoría de la Actividad:

Figura 24. Identificación de elementos de la actividad matemática en la Actividad N°2 Salario Mínimo.

Identificación de elementos constitutivos de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes	
Tarea	Analizar los gastos mensuales correspondientes a vivienda y compararlos con los gastos extras.
Motivo del docente	• Que el estudiante analice la variación entre las magnitudes. • Observar la forma en que el estudiante analiza dicha variación y la actividad matemática que se desencadena en dicho proceso.

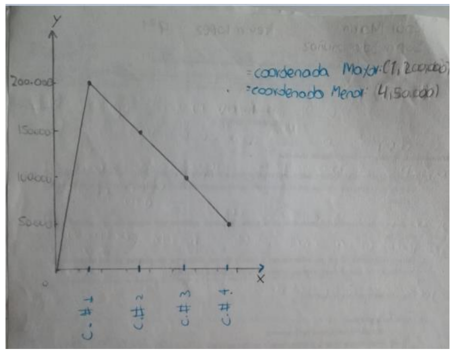
	• Tener un primer contacto con la constante de proporcionalidad al observar diferencias entre la gráfica de una relación lineal y una que no lo es.
Motivo asumido por el estudiante	Representar gráficamente el comportamiento del dinero correspondiente a Vivienda y gastos extras.
Acciones	• Discusión estudiante-estudiante y estudiante-docente. • Realización de cálculos numéricos. • Explicación verbal de la situación. • Representación escrita de la situación.
Instrumentos	• Movimientos corporales para explicar la manera en que varían las cantidades. • Lápiz y papel. • Calculadora.
Representaciones empleadas	• Lenguaje verbal • Representación gráfica. • Representación tabular.

Fuente: Elaboración de los estudiantes

Esta tarea es continuación de la anterior, pero ahora el análisis se centra en la variable vivienda, identificada por todos los equipos como un gasto diario constante.

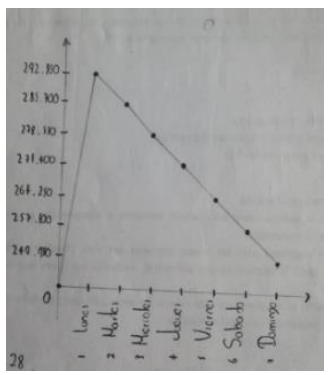
En el primer momento de la tarea debía representarse la relación entre los días de la primera semana con el dinero restante luego de realizar el gasto diario, esto de manera tabular y gráfica. Respecto a la representación gráfica, un numeral dejaba abierta la elección del tipo de gráfica y el siguiente especificaba que fuese de puntos (ver Anexo 4).

Figura 25. Elaboración 1 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Figura 26.Elaboración 2 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

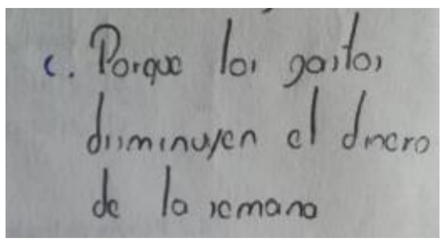
Como se puede observar en las Figuras 25 y 26, el tipo de gráfica seleccionada por los estudiantes fue de puntos y líneas, al igual que lo hicieron en la actividad diagnóstica, ya que resulta más familiar para ellos y por tanto se sientes más seguros a la hora de elaborarla.

Uno de los equipos (ver Figura 26) asignó nombres a los días en lugar de números, lo que muestra que hay claridad en la relación cualitativa entre días y dinero restante, pero representa una dificultad para solucionar algunos de los posteriores numerales de la tarea, donde se pide calcular el cociente entre dinero restante y día transcurrido.

Luego de construir las gráficas se preguntaba por su forma y se indagaba por qué consideraban que tenían dicha forma. En este punto los jóvenes coincidieron en que la gráfica tiene forma de una línea recta inclinada hacia la derecha, lo que determina una disminución del dinero restante para el mes y que responde a que el dinero disminuye con el paso de los días. De este modo identificaron la correlación entre las variables días transcurridos y dinero restante, pero aún sin identificar una expresión algebraica para representar dicha correlación.

Las siguientes imágenes muestran un par de respuestas de los estudiantes sobre este punto:

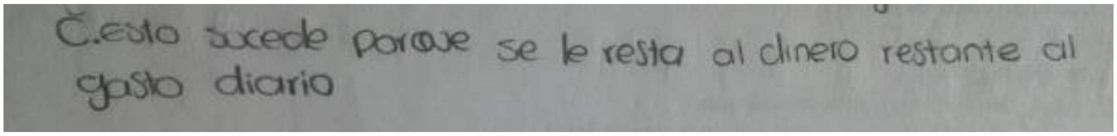
Figura 27. Elaboración 3 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

En la Figura 27 el estudiante escribe *“Porque los gastos disminuyen el dinero de la semana*”; cuando la docente le pidió que explicara su enunciado de manera verbal, indicó: *“Cada que uno gasta, el dinero que le queda disminuye*”. Así, lo que intentó expresar el estudiante apuntó a que, a mayor inversión en los gastos diarios, menor dinero restante, pero como puede verse, la expresión verbal que empleó no logró transmitir adecuadamente la idea. De ahí la importancia del valor del diálogo entre docente y estudiante para lograr una comprensión significativa de los razonamientos que surgen en la resolución de la tarea.

Figura 28. Elaboración 4 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

El estudiante de la Figura 28 expresa “Esto sucede porque se le resta al dinero restante al gasto diario” y nuevamente se evidencia dificultades en el uso de las expresiones verbales. Cuando la docente dialoga con el estudiante ve que ha comprendido la relación consistente en que mientras aumenta el gasto hecho con el pasar de los días, disminuye el dinero disponible para el resto del mes; pero el lenguaje utilizado deja ver algunas dificultades para expresar esta idea. Cuando este estudiante aclaró la idea escrita, se valió de sus manos para apoyar la idea, como se precia en la Escena 14. Esto muestra el uso de formas culturales de acción, como lo son los movimientos corporales, en el análisis y el razonamiento que los estudiantes realizan en torno a las situaciones matemáticas y que les facilitan su comprensión y expresión.

Escena 14

Estudiante: “Mientras pasan más días, se gasta más dinero (mueve la mano izquierda hacia arriba), pero disminuye (mueve la mano derecha hacia abajo) el dinero disponible para el mes”.

Ahora bien, continuando con el análisis de la tarea, se retoma la siguiente conversación sostenida entre la profesora y una estudiante (Escena 15):

Escena 15

Estudiante: “Al dinero restante le estoy restando el día”.
Docente: “¿Sí le estás restando al dinero el día?”
Estudiante: “Sí”
Docente: “¿Cuánto me da por ejemplo 3 días menos $20000 pesos?”
Estudiante: “No se pueden restar”.
Docente: “¿Por qué no?”
Estudiante: “Porque son cosas diferentes”.

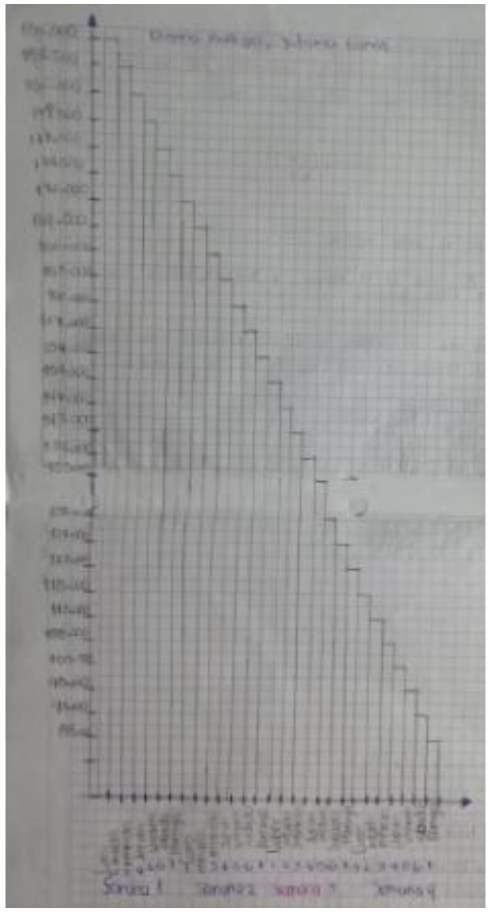
> *Docente: "¿Entonces en el caso de la situación de la vivienda por qué dices que al dinero restante le restas el día?"*
> *Estudiante: "¡Ah sí! Entonces lo que se resta es lo que se gasta todos los días, cada día".*

A propósito de la Escena 15 se debe resaltar que cuando el estudiante dice *"Al dinero restante le estoy restando el día",* no está expresando correctamente la relación, aunque pueda inferirse que sí la haya comprendido. La intervención de la docente permite la toma de conciencia (esto es la objetivación) de la palabra, y con ello, de la relación identificada en la situación. Así, se subraya que la tarea presentada por sí sola al estudiante, sin propiciar el uso de instrumentos, la realización de acciones, el desarrollo de interacciones, y en general, el uso de Medios Culturales Semióticos no podría alcanzar los mismos resultados en términos de la consecución de los motivos del docente.

Cuando se preguntó si la forma de la gráfica cambiaría o se mantendría en caso de completarla para todo el mes, todos los equipos expresaron verbalmente que se mantendría igual debido a que el gasto diario era constante, entonces la relación entre ambas magnitudes también era constante, aunque como ya se ha manifestado, no expresan esta relación de forma algebraica. Esto muestra que, aunque los estudiantes identifiquen y expresen de manera cualitativa la relación y no cuantitativa, están evidenciando una conciencia de la conservación de una cantidad constante que se conserva a lo largo del tiempo.

No obstante, llama la atención el grupo que no respondió de manera verbal y que prefirió construir una gráfica que relacionara todos los días del mes:

Figura 29. Elaboración 5 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

El equipo recurre a ayudas gráficas para tener una perspectiva más clara de la situación, pero como puede apreciarse en la Figura 29, se designan los días con nombres en lugar de números. Al respecto es preciso enunciar que expresar los días de esta manera y no numéricamente, no es tan determinante hasta el momento ya que aún no se está haciendo énfasis en el cociente constante (razón). Sin embargo, cuando se trate de calcular la pendiente de la gráfica, este hecho sí puede representar una dificultad.

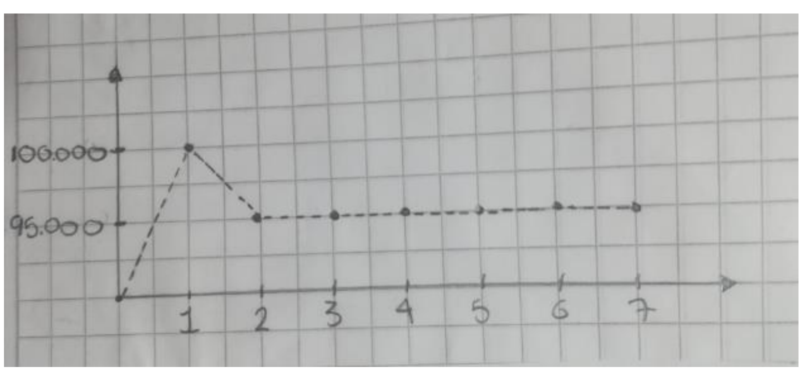
En el numeral que se indaga por un procedimiento para determinar la inclinación de la gráfica, los jóvenes propusieron en su mayoría medir el ángulo formado entre la recta y alguno de los ejes cartesianos, y detectaron que la inclinación de la recta es igual en todos sus puntos.

El segundo momento de esta tarea contenía planteamientos similares al primero, pero alrededor de los gastos extras, con el fin de evidenciar una situación donde la variación entre las magnitudes no se da de manera constante, como sí es el caso de la vivienda.

Empleando procedimientos y registros similares a los del primer momento, llegaron a la conclusión de que las gráficas que ejemplificaban la relación eran diferentes (ver Figuras 30, 31 y 32). A propósito, algunos estudiantes expresaron:

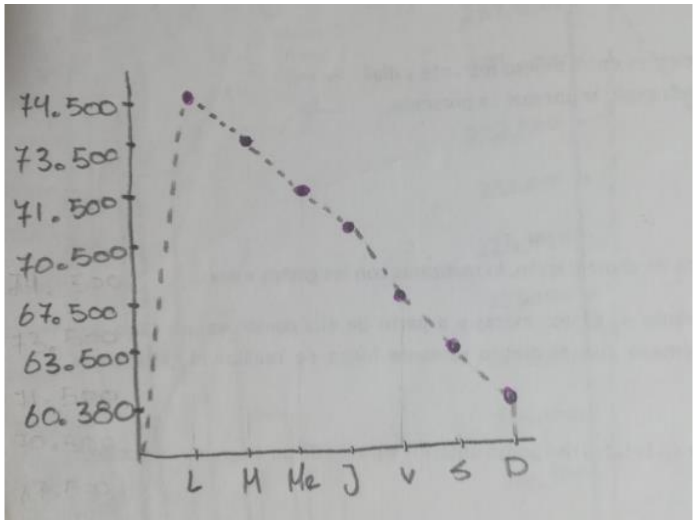
- *"Mientras en una (gráfica) el comportamiento es siempre igual, en la otra siempre hay cambios".*
- *"En la vivienda la gráfica es recta, pero en los gastos extras tiene puntos de subida y bajada".*
- *"La primera gráfica (vivienda) es igual en todos los puntos, pero en la segunda los puntos no tienen nada en común (ver gráfica 31)".*
- *"La vivienda representa un línea recta porque cada día se paga lo mismo, pero los gatos extras tienen una gráfica que empieza subiendo, luego tiene un pedazo recto, luego baja y al final hace otra recta. Esta gráfica no se comporta igual que la de vivienda porque todos los gatos extras son diferentes (ver Figura 32)".*

Figura 30. Elaboración 6 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



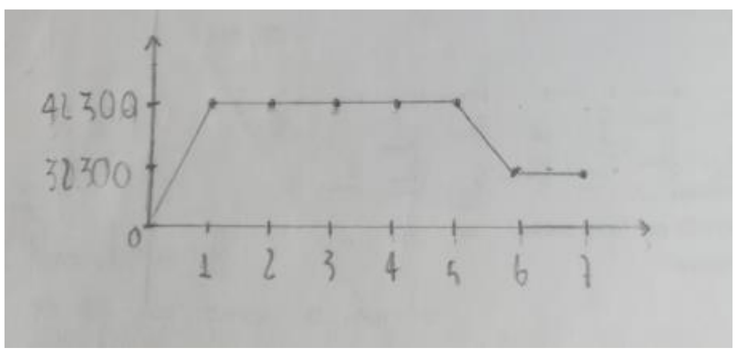
Fuente: Elaboración de los estudiantes

Figura 31. Elaboración 7 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Figura 32. Elaboración 8 de los estudiantes-Actividad N°2 Salario Mínimo.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Tanto en las escenas referenciadas como en las Figuras 30, 31 y 32 se puede ver que de manera clara los estudiantes identifican un comportamiento lineal y constante en la gráfica correspondiente a los gastos de vivienda, contrario a lo que sucede con la gráfica de gastos extras. Los términos utilizados por ellos para explicar esta diferencia permiten ver que identifican esa linealidad y comportamiento constante en el caso de la vivienda, aunque cuando hablan de los gastos extra no encuentran un término para indicar que hay variabilidad en los puntos de la gráfica.

Vemos pues que la idea de relación funcional lineal está presente en los estudiantes de manera cualitativa, lo cual se puede observar cuando utilizan expresiones como “el comportamiento es igual”, “la gráfica es igual en todos sus puntos”, y que la diferencian de una situación no lineal al decir por ejemplo “los puntos no tienen nada en común”, “la gráfica sube y baja”, entre otros. Como se ha dicho antes, es claro que no han logrado establecer esas relaciones funcionales de forma cuantitativa, pero hay un avance significativo en lo que tiene que ver con el reconocimiento de cantidades que varían de manera correlacionada y la diferencia con situaciones en las que este tipo de variación no se da.

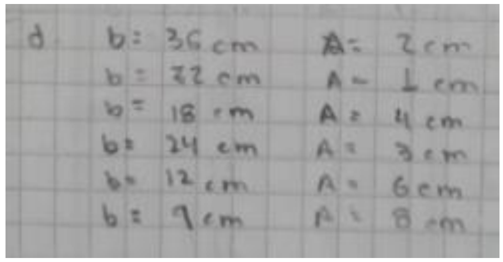
Otros aspectos observados en esta tarea se describen a continuación:

- Los estudiantes muestran mayor tendencia construir diagramas de puntos y líneas cuando se les pide representar gráficamente la información.
- Se evidencia claridad en la forma de ubicar las cantidades de cada magnitud en los ejes de los gráficos cartesianos.
- En algunos casos cuando se pedía identificar una relación, los estudiantes no entendían qué se les estaba preguntando. Era necesario establecer una conversación con ellos para clarificar la situación.

La última tarea “Actividad final: Comparando-ando” consistía en comparar la representación gráfica de dos situaciones. La primera tenía que ver con la variación de la altura de rectángulos cuando se modificaba la base, pero se conservaba el área. La segunda se basaba en la representación gráfica de los ingresos de una persona que trabaja transportando pasajeros en su vehículo y que cobra $2000 por viaje.

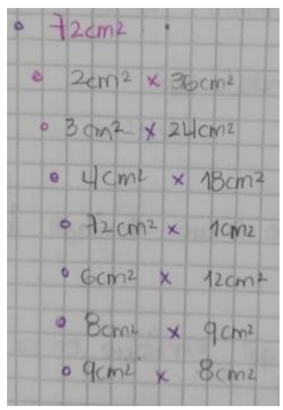
La primera situación comenzó con la construcción de rectángulos en tamaño real (con centímetros como unidad de medida) para observar claramente qué sucede con la altura cuando se construyen rectángulos con la misma área, pero diferente base. Después se daba la medida de un área para determinar sin dibujar, las longitudes de todos los rectángulos que es posible construir con la misma área; las Figuras 33 y 34 muestran las dimensiones de los rectángulos de área $72cm^2$.

Figura 33. Elaboración 1 de los estudiantes-Actividad Comparando-ando.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Figura 34. Elaboración 2 de los estudiantes-Actividad Comparando-ando.

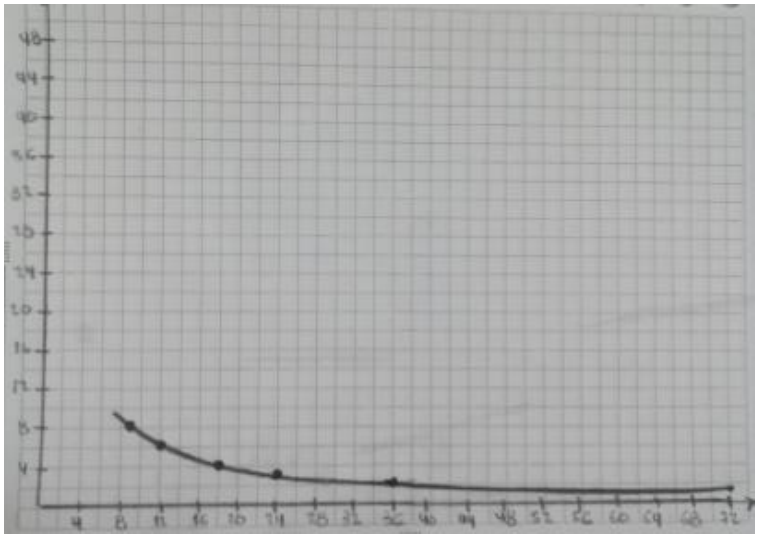


Fuente: Elaboración de los estudiantes

Cabe resaltar que como se puede apreciar en las Figuras 33 y 34, las dimensiones que encontraron los estudiantes para los rectángulos de área $72cm^2$ fueron todas enteras. Al respecto debe mencionarse que, aunque la docente mencionó que tuvieran en cuenta que también existen cantidades racionales que pueden generar rectángulos de dicha área, no se profundizó este punto durante la intervención.

El paso siguiente era representar esa información en una gráfica en el plano cartesiano.

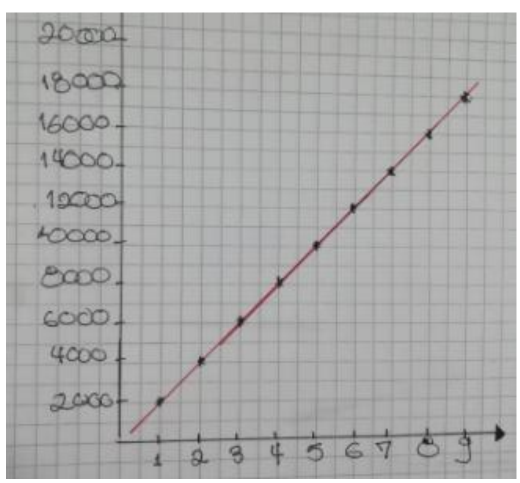
Figura 35. Elaboración 3 de los estudiantes-Actividad Comparando-ando.



Fuente: Elaboración de los estudiantes

Sobre la segunda situación, no se observó ninguna dificultad; todos los grupos construyeron con facilidad los diagramas y como puede verse en la Figura 35, las gráficas muestran la curva que corresponde a la situación de las dimensiones de la base y la altura de rectángulos con la misma área.

Figura 36. Elaboración 4 de los estudiantes-Actividad Comparando-ando.



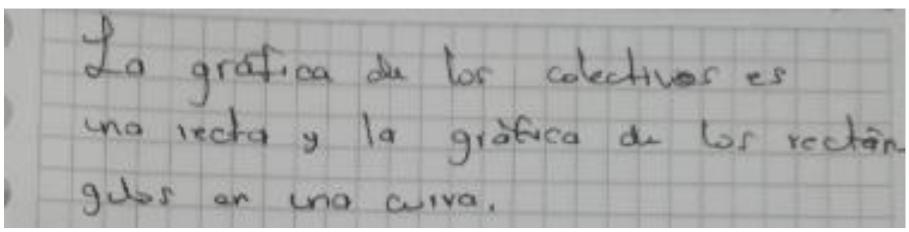
Fuente: Elaboración de los estudiantes

Para el momento de la tarea donde se presentaba la situación del transporte en “Colectivo” (ver Anexo 4), los estudiantes no tuvieron dificultad para construir la gráfica lineal que representa la situación (Figura 36).

Ya teniendo ambos gráficos el estudiante debía analizar las diferencias existentes entre ellos e intentar explicar por qué se presentan. El objetivo de esta comparación se dirige a que identifiquen la diferencia entre la gráfica que se forma con las longitudes de los rectángulos de una misma área, y la función lineal que determina el costo por pasaje de la situación planteada, para así fortalecer la comprensión de la relación funcional de tipo lineal.

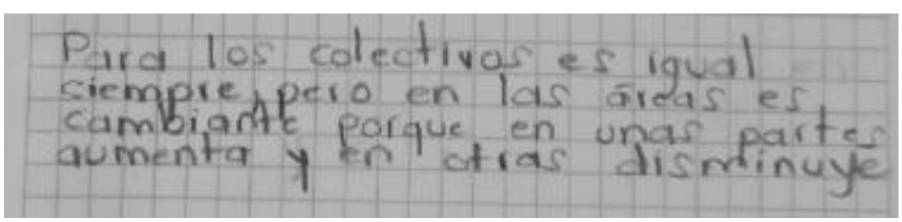
A propósito de la comparación algunos respondieron (Figuras 37, 38 y 39):

Figura 37. Elaboración 5 de los estudiantes-Actividad Comparando-ando.



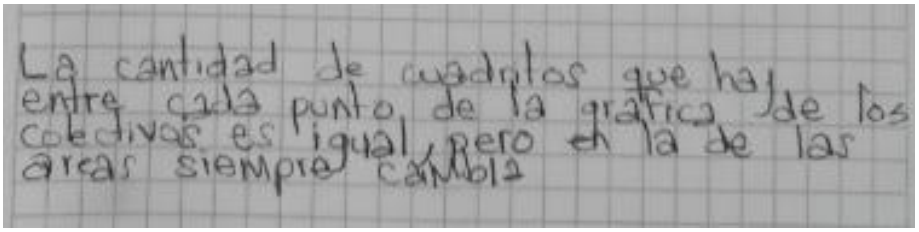
Fuente: Elaboración de los estudiantes

Figura 38. Elaboración 6 de los estudiantes-Actividad Comparando-ando.



Fuente: Elaboración del autor

Figura 39. Elaboración 7 de los estudiantes-Actividad Comparando-ando.



Fuente: Elaboración del autor

Cuando ellos identifican que hay cambios diferentes en la gráfica de la situación de los rectángulos, pero que no se presentan cambios en la gráfica lineal del costo por pasaje, están reconociendo una variación constante, que es la base de los comportamientos lineales.

Es necesario resaltar que, de todas las tareas analizadas, esta última aborda puntualmente la proporcionalidad directa, sin embargo, luego de su ejecución puede afirmarse que la comprensión de los estudiantes sobre lo que es una constante de proporcionalidad (o la pendiente de una línea recta) tiene aún muchas limitaciones, pero es un paso en el proceso de su comprensión. Hasta este punto los estudiantes están en condiciones de determinar qué magnitudes intervienen en una situación, así como expresar cualitativamente la forma en que varían y en relación con quién lo hacen. Pueden además diferenciar cuando en la variación hay elementos constantes y cuando no los hay, y cómo esto puede apreciarse de una gráfica. No obstante, como y se dijo, no han logrado llegar a un tratamiento cuantitativo de estos elementos ni a la noción de constante de proporcionalidad.

3.3 Conclusiones y Recomendaciones

3.3.1 Conclusiones.

Para concluir, la implementación de las tareas hizo posible observar que las situaciones de variación y cambio extraías de contextos reales promueven y facilitan la identificación de magnitudes, la interdependencia entre ellas, la forma en que una varía y genera cambios en la otra, los elementos constantes de se dan en esa covariación. Es decir, que a partir del estudio del cambio y la variación se logra una aproximación a la identificación de relaciones funcionales. Cuando en esas relaciones aparece además un elemento constante permite pasar de una cantidad de la primera magnitud a una de la segunda, lo que en algunos casos corresponde a la constante de proporcionalidad, y abre un camino directo a las relaciones funcionales de tipo lineal.

Sin embargo, aunque en el trabajo realizado es claro el papel de la variación constante (esto es la pendiente de la recta), se mostró poco sobre la constante de proporcionalidad como tal. No obstante, se percibe una serie de aproximaciones a esa relación constante, más en un sentido cualitativo que cuantitativo, pero no menos importante. Así pues, no se llegó directamente a la constante de proporcionalidad, pero sí se desarrolló un importante y necesario proceso para posteriormente llegar a ese punto.

Varias ideas se desprenden de la anterior afirmación. Por una parte, está el hecho de que cuando las tareas presentadas a los estudiantes retoman elementos del entorno, como la tarea del transporte de los bultos del cemento o las del salario mínimo, o la situación del transporte en “Colectivo”, la comprensión se ve favorecida porque los elementos puestos en juego en la situación tiene un sentido para los estudiantes, que a su vez facilita la atribución de sentidos y significados a los objetos matemáticos que se abordan dentro de la tarea. Esto es, que las condiciones sociales y los imaginarios que de ellas se desprenden, determinan en gran medida la manera en que los estudiantes analizan la tarea, toman decisiones tras el objetivo de alcanzar el motivo delimitado por ellos al interior de la tarea, y en general, construyen sus razonamientos matemáticos.

En el caso particular de este trabajo, el componente del dinero, que fue transversal a las tareas propuestas, hizo que los jóvenes comprendieran mejor las situaciones, que se motivaran a resolver las tareas y que le dieran un sentido y un uso a los objetos matemáticos que giran en torno a las relaciones funcionales de tipo lineal.

Así las cosas, se percibió que la idea de relación funcional está presente en los estudiantes de manera cualitativa, específicamente la de relación funcional de tipo lineal, y que su identificación se promueve tras el contacto con situaciones de cambio, variación y movimiento. Esto responde a que analizar una situación que contiene información cotidiana para el individuo, que tiene que ver con su día a día y que él comprende, facilita la comprensión de los elementos matemáticos que allí se encuentran inmersos.

Respecto a la constante de proporcionalidad, es importante entender su función de conector entre dos magnitudes. Cuando el estudiante identifica que existen dos magnitudes y que al variar una de ellas la otra también lo hace, ya está estableciendo una relación funcional. Pero cuando además tiene la capacidad de cuantificar esa relación entre las magnitudes que se da entre una cantidad de la primera magnitud y otra de la segunda cantidad, es ahí cuando habla implícitamente de constante de proporcionalidad, gracias a lo cual puede pasar de la identificación de relaciones funcionales a la construcción del concepto de función lineal.

Sin embargo se debe resaltar que todas las tarea dejan ver que los estudiantes toman conciencia de un proceso en el que hay una variación constante, lo cual es una manera cualitativa de aproximarse a una idea de pendiente mas no de constante de proporcionalidad.

Es preciso mencionar que el desarrollo de esta propuesta permitió ver que la comprensión lograda por estudiantes sobre las relaciones funcionales fue movilizada por:

- El uso de distintos sistemas de representación (básicamente tabular, gráfico y lenguaje natural), donde el paso de uno a otro fortalece la comprensión de los estudiantes. Un ejemplo de esto es que, como pudo apreciarse en el análisis de las acciones y representaciones elaboradas por los estudiantes, en algunas ocasiones se construían representaciones gráficas para expresar una relación, pero luego de esbozar esa misma idea mediante lenguaje natural -y viceversa-, la comprensión de la idea lograba ser más puntual. Sin embargo y referente a la representación en lenguaje natural, se debe mencionar que pudieron observarse dificultades para expresar verbalmente algunas ideas, aunque a través del diálogo con la docente pudiera verse claridad en dichas ideas.

- El trabajo en equipo que promueve la interacción entre pares y con ello, la discusión, el planteamiento de ideas y aceptación o rechazo de ellas con argumentos justificados, la toma de decisiones considerando diferentes puntos de vista, el reconocimiento de errores, entre otros.
- La interacción con la docente como instrumentos para profundizar en algunas ideas, considerar otras vías de acción y cuestionar las acciones propias de los estudiantes en la realización de la tarea.
- El uso de instrumentos como la calculadora, que facilita la realización de cálculos de distintos tipos.
- Las formas culturales de hacer y los imaginarios sociales que determinan en gran medida las acciones y el uso de los instrumentos por parte de los estudiantes. Por ejemplo, las estrategias utilizadas para hacer la distribución del dinero, los referentes sociales sobre los aspectos que intervienen en una situación como la compra de mercado en un hogar, el promedio de bultos que un obrero puede transportar en una construcción, entre otros.
- La realización de acciones apoyadas en gestos o movimientos corporales para expresar una idea de manera más clara.

Entonces, ¿Qué características debe tener una tarea para facilitar una aproximación a la identificación de relaciones funcionales de tipo lineal? Primero que todo debe partir de situaciones concretas de variación, debe incentivar en los estudiantes el uso de diversas formas de representación de las relaciones entre los elementos que allí se relacionan, debe también llevarlo a cuestionarse sobre qué varía, cómo varía, qué afecta dicha variación; pero además es necesario que abra espacio al trabajo con el otro y a la construcción mancomunada del conocimiento.

De este modo se encuentra válido proponer como estrategia la implementación de tareas multiplicativas formuladas a partir de situaciones cotidianas, que enfatizan la variación constante entre magnitudes (y algunas de ellas la constante de proporcionalidad como en el caso de este trabajo), para propiciar una aproximación al análisis funcional lineal.

3.3.2 Recomendaciones.

Lo planteado en esta propuesta exige necesariamente asumir una postura social del aprendizaje, por lo que el trabajo en grupo es una de las herramientas fundamentales. El trabajo en equipo abre espacio para el diálogo reflexivo mediante el cual un individuo complemente al otro, lo apoya, lo refuta, y de manera conjunta encuentran caminos de acción.

Aunque el uso de las TIC no se retomó en este trabajo debido a las limitadas condiciones a nivel de recursos de la institución educativa donde se realizó la intervención, las TIC constituyen un elemento que puede fortalecer el análisis funcional con ayuda de artefactos digitales que amplían las posibilidades de representar los objetos matemáticos, manipularlos, analizarlos y reflexionar en torno a ellos.

Por otra parte, debe mencionarse que el tiempo de desarrollo de las tareas es extenso pero necesario para que los procesos sociales de construcción del aprendizaje y del pensamiento se desarrollen de manera adecuada. Como ya se dijo, las dinámicas sociales que se generan en el proceso de resolución de las tareas son sumamente enriquecedores.

Finalmente es fundamental insistir en que en el presente trabajo el papel de la variación constante es claro, pero no se alcanza la construcción de la idea de constante de proporcionalidad. No obstante, la aproximación cualitativa que se logra a esa relación constante es trascendental para llegar la constante de proporcionalidad como tal y al tratamiento cuantitativo de las relaciones funcionales de tipo lineal. Así pues, queda abierto el camino para dar continuidad a este trabajo y alcanzar la formalización de la constante de proporcionalidad y la función lineal, considerando la postura histórico cultural abordada y la perspectiva del tratamiento de situaciones de variación y cambio a partir de situaciones cotidianas.

Referencias

Alvarado, L. y García, M. (2008). Características más relevantes del paradigma socio-crítico: su aplicación en investigaciones de educación ambiental y de enseñanza de las ciencias realizadas en el Doctorado de Educación del Instituto Pedagógico de Caracas. *Revista Universitaria de Investigación*, *Año2*(2), p. 187-202.

Betancur, S., Gallego, J., Restrepo, D. y Tapias, J. (2014). *Los Medios Culturales Semióticos: Una posibilidad para aproximarse a la multiplicación* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Betancur, Y. (2013). *Una propuesta metodológica para enseñar el concepto de función desde la experimentación* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Guzmán, J., Miranda, I. y Radford, L. (Diciembre de 2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), p. 5-30.

Martínez, J. (2011). Métodos de Investigación Cualitativa. *Revista de la Corporación Internacional para el Desarrollo Educativo, julio*(08), p. 1-33.

Martínez, M. (1999). El enfoque sociocultural en el estudio del desarrollo y la educación, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 1(1), p. 16-36.

Mejía, S. y Quintero, S. (2014). *El aprendizaje de la multiplicación a partir de tareas de proporcionalidad directa* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2006).*Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

5. Referencias

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (Marzo de 2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), p. 59-82.

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2013). Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (26), p. 977-986.

Obando, G. (2013). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica* (Tesis doctoral). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Posada, F. y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Quintero, L. (2016). *La medida como instrumento mediador para la enseñanza de la multiplicación en la Enseñanza Fundamental* (Tesis de maestría). Universidad Federal do ABC, São Paulo, Brasil.

Radford, L. (2006). Elementos de una Teoría Cultural de la Objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (número especial), p. 103-129.

Radford, L. (2013). Cultura e historia: dos conceptos difíciles y controversiales en las aproximaciones contemporáneas en la educación matemática, *Práticas culturais e educação matemática*, p. 49-68.

5. Referencias

Radford, L. (2013). Tres conceptos clave de la Teoría de la Objetivación: Saber, Conocimiento y Aprendizaje, *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, p.5-44.

Restrepo, B. (2004). La investigación-acción educativa y la construcción del saber pedagógico, *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal, (7), p. 45-55.*

Ruiz, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Sannino, A., Daniels, H. y Gutiérrez, K. (2009). Activity Theory Between Historical Engagement and Future-Making Practice. En Sannino, A., Daniels, H. y Gutiérrez, K. (Ed.), *Learning and expanding with Activity Theory* (pp. 1-18). New York, USA: Cambridge University Press.

Torres, M. (2013). *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Innovación Educativa, 9 (46), p.75-87.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Vrancken, S., Engler, A., Giampieri, M. y Müller, D. (Agosto-Febrero de 2015). Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades, *Revista Digital: Matemática, Educación e internet*, 15(1), p. 1-20.

A. Anexo 1: Tarea diagnóstica “Un día de trabajo”.

Tarea diagnóstica
“Un día de trabajo”

Momento 1

Juan Esteban trabaja algunos días del mes como auxiliar de construcción, transportando bultos de cemento desde el camión hasta el lugar de la construcción. El salario que recibe cada día laborado es el resultado de un sueldo básico de \$20000 y una comisión de \$400 por cada bulto transportado. Según esto determina:

1. ¿Cuánto recibe Juan Esteban si transporta 3, 8, 15 y 31 bultos de cemento?
2. Si Juan Esteban recibió como pago \$39200, ¿cuántos bultos transportó?
3. Completa la siguiente tabla:

Cantidad de bultos transportados	Salario recibido
6	
29	
	\$40800
	\$46000
71	
	\$48800
100	\$60000

4. Explica la relación entre el salario diario recibido por Juan Esteban y la cantidad de bultos transportados.
5. Explica la misma relación de manera gráfica.

Momento 2

Juan Esteban recibe una nueva oferta de trabajo en una construcción cercana. En este caso le ofrecen un sueldo básico de $12000 y una comisión de $600 por bulto transportado.

Responde: ¿Cuál oferta crees que pueden generar mejores ingresos? ¿Por qué?

B. Anexo 2: Actividad N°1. Salario mínimo.

ACTIVIDAD N°1
SALARIO MÍNIMO

Nombres: ____ **Grupo:** _____
____
____

Supongamos que eres mayor de edad y comenzarás a vivir solo. Estás en grado Once y trabajarás en un lugar donde te pagan el salario mínimo vigente para el año 2018, el cual incluyendo el subsidio de transporte corresponde a $869.453.

Debes organizar tus finanzas de tal modo que el dinero te alcance para pagar alimentación, vivienda, salud, transportes, educación, recreación, vestuario y los gastos extraordinarios que puedan surgir.

Tratando de ser lo más objetivo posible, describe cuánto dinero debes invertir en cada uno de los aspectos mencionados por mes, teniendo en cuenta que no recibirás ningún dinero extra.

Gasto	Inversión
Alimentación	
Vivienda	
Salud	
Transporte	
Educación	
Otros gastos (Recreación, vestuario, entre otros).	

Luego completa las siguientes tablas para las 4 semanas del mes. Ten en cuenta que además, debes realizar los gastos extras que se detallan a continuación. Ubícalos en las respectivas tablas y considéralos a la hora de hacer tus cuentas.

- **Martes de la semana 1:** Recarga del celular por $5000.
- **Miércoles de la semana 2:** Recarga del celular por $3000.

- **Sábado de la semana 2:** Salida nocturna con amigos; gasto de $30.000
- **Jueves de la semana 3:** Ida a cine; gasto de $20.000
- **Lunes de la semana 4:** Compra de camiseta por $15.000
- **Domingo de la semana 4:** Ida a cine; gato de $17.000

Anexos

Semana 1

	Alimentación		Vivienda		Salud		Transporte		Educación		Otros gastos	
Presupuesto semanal	$		$		$		$		$		$	
	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante
Lunes												
Martes												
Miércoles												
Jueves												
Viernes												
Sábado												
Domingo												

Semana 2

	Alimentación		Vivienda		Salud		Transporte		Educación		Otros gastos	
Presupuesto semanal	$		$		$		$		$		$	
	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante
Lunes												
Martes												
Miércoles												
Jueves												
Viernes												
Sábado												
Domingo												

Semana 3

	Alimentación		Vivienda		Salud		Transporte		Educación		Otros gastos	
Presupuesto semanal	$		$		$		$		$		$	
	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante
Lunes												
Martes												
Miércoles												
Jueves												
Viernes												
Sábado												
Domingo												

Semana 4

	Alimentación		Vivienda		Salud		Transporte		Educación		Otros gastos	
Presupuesto semanal	$		$		$		$		$		$	
	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante	Gasto diario	Dinero restante
Lunes												
Martes												
Miércoles												
Jueves												
Viernes												
Sábado												
Domingo												

Luego de completar las tablas responde:

1. ¿El salario mínimo te alcanza para todos los gastos?
2. ¿Cuánto invertiste en todos los gastos?
3. ¿Te queda libre al finalizar el mes?, ¿cuánto?
4. ¿Es posible realizar los gastos extra que tienes pensado?
5. ¿Qué estrategias utilizarías para ahorrar dinero?
6. ¿Consideras que el salario mínimo colombiano es suficiente para satisfacer las necesidades de una persona?
7. ¿Cuánto dinero crees que requiere un colombiano promedio para suplir sus necesidades básicas?
8. Si en tus manos estuviera, ¿qué valor de asignarías al salario mínimo colombiano?

C. Anexo 3: Actividad N° 2. Salario Mínimo

ACTIVIDAD N°2
SALARIO MÍNIMO

Momento 1: Analicemos los gastos de vivienda

1. Observa la información correspondiente a vivienda y a partir de ella construye una tabla que relacione los **días** de la primera semana con el **dinero restante** luego de realizar el gasto diario que le asignaste a cada día.

2. Representa la información contenida en la tabla del punto anterior por medio de una gráfica de tu elección.

3. Ahora representa la misma información a través de un diagrama de puntos (si en el numeral 2 construiste un diagrama de puntos, no es necesario volver a hacerlo).

4. A partir del diagrama resuelve:

4.1 Observa la gráfica

- **a)** Une todos los puntos del diagrama.
- **b)** ¿Qué forma tiene la gráfica trazada por los puntos?
- **c)** ¿Por qué crees que tiene esa forma?

4.2 Proyecta los gastos del mes en la gráfica

- **a)** ¿Consideras que la gráfica representa algún aumento o disminución en los valores que relaciona? Explica tu respuesta.
- **b)** Si completaras el diagrama para las cuatro semanas del mes, ¿tendría la misma forma o cambiaría?, ¿por qué? Si consideras que cambiaría, explica cómo crees que sería y trata de dibujarla.
- **c)** En caso de completar el diagrama para las cuatro semanas, ¿en qué coordenada se ubicaría el punto máximo de la gráfica? ¿en cuál el mínimo?

4.2 Otros interrogantes…

- **a)** ¿Para qué valor del eje X, el eje Y sería igual a cero?
- **b)** ¿Por qué la gráfica no presenta ningún valor negativo?
- **c)** ¿Qué procedimiento utilizarías para determinar la inclinación de la gráfica? Explícalo a través de tus propias palabras y luego resuélvelo.

5. Completa la tabla que realizaste en el numeral 1 con ayuda de la siguiente estructura:

Alimentación		
Día	**Dinero restante**	$\dfrac{\textbf{Dinero restante}}{\textbf{Día}}$

Luego responde:

a) ¿Qué relación encuentras en los cocientes entre dinero restante y día?
b) Si encontraste alguna relación, intenta explicar por qué se presenta.

Momento 2: Revisemos los gastos extras

El mismo trabajo que realizaste con los gastos de alimentación, lo realizarás con los gastos extras.

1. Observa la información correspondiente a gastos extras y a partir de ella construye una tabla que relacione los **días** de la primera semana con el **dinero restante** luego de realizar el gasto diario correspondiente a cada día.

2. Representa la información contenida en la tabla del punto anterior a través de un diagrama de puntos.

3. A partir del diagrama resuelve:

3.1 Observa la gráfica

a) Une todos los puntos del diagrama.
b) ¿Qué forma tiene la gráfica trazada por los puntos?
c) ¿Por qué crees que tiene esa forma?

3.2 Proyecta los gastos del mes en la gráfica

a) ¿Consideras que la gráfica representa algún aumento o disminución en los valores que relaciona? Explica tu respuesta.

b) Si completaras el diagrama para las cuatro semanas del mes, ¿tendría la misma forma o cambiaría?, ¿por qué? Si consideras que cambiaría, explica cómo crees que sería y trata de dibujarla.
c) En caso de completar el diagrama para las cuatro semanas, ¿en qué coordenada se ubicaría el punto máximo de la gráfica?, ¿en cuál el mínimo?

3.2 Otros interrogantes…

a) ¿Para qué valor del eje X, el eje Y sería igual a cero?
b) ¿Por qué la gráfica no presenta ningún valor negativo?

4. Completa la tabla que realizaste en el numeral 1 con ayuda de la siguiente estructura:

Gastos extras		
Día	**Dinero restante**	$\frac{\textbf{Dinero restante}}{\textbf{Día}}$

Luego responde:

a) ¿Qué relación encuentras en los cocientes entre dinero restante y día?
b) Si encontraste alguna relación, intenta explicar por qué se presenta.

Momento 3: Comparemos los gatos de alimentación y los gastos extras

1. Compara la gráfica trazada en el diagrama de puntos sobre alimentación con la gráfica sobre gastos extras; ¿qué tienen en común?, ¿qué diferencias presentan? Si consideras necesario, puedes utilizar dibujos o esquemas para ilustrar tus hallazgos.
2. ¿Qué similitudes y/o diferencias observas en los cocientes entre dinero restante y día, en las tablas de alimentación y gastos extras? ¿Qué explicación darías?

D. Anexo 4: Actividad final "Comparando-ando"

Actividad final.
"Comparando-ando"

1. Dibuja en medidas reales todo los rectángulos que tengan las siguientes áreas:

   a) 9 cm^2
   b) 18 cm^2
   c) 19 cm^2
   d) 24 cm^2

2. Sin dibujar, determina las dimensiones de todos los rectángulos que es posible construir que tengan como área $72\ cm^2$ .Especifica en cada cado el valor de la base y de la altura.

3. ¿Qué pasa con la altura cuando la base aumenta su longitud?, ¿qué pasa con la altura cuando la base disminuye su longitud?

4. Representa mediante un diagrama cartesiano la relación entre las longitudes de la base y la altura de los rectángulos con área 72 cm^2 que encontraste en el inciso e del numeral 2.

5. Oscar trabaja manejado un "colectivo" en Belén Altavista. Cada pasajero que transporta debe pagar $2000 por su viaje. Representa en un diagrama cartesiano la relación entre cantidad de pasajeros y dinero recolectado.

6. Compara ambos diagramas; ¿Qué diferencias presentan y por qué?