IMPACTO DE LA ASIMETRÍA DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTREADA EN LA POTENCIA ASINTÓTICA DE LA PRUEBA DEL RANGO SIGNADO DE WILCOXON.

MYRIAN ELENA VERGARA MORALES
Código: 832012

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Estadística

Director: JIMMY ANTONIO CORZO SALAMANCA
Dr. Rer. Nat.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Bogotá D.C., Enero de 2007

A la memoria de mi padre.

Contenido

Introducción **i**

1 Muestras de distribuciones simétricas **1**
1.1 Estadísticas de puntajes de rangos 2
1.1.1 Puntajes de Wilcoxon 8
1.1.2 Puntajes Winsorizados 8
1.2 Potencia de la prueba del RSW bajo distribuciones simétricas 9
1.3 Tolerancia de una prueba a la aceptación de la hipótesis nula. 15
1.3.1 Tolerancia a la aceptación de H_0 de la prueba del Signo 17
1.3.2 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba del RSW 18

2 Muestras de distribuciones asimétricas **20**
2.1 Consecuencias de la asimetría sobre las pruebas de rangos . . 20
2.2 Impacto directo de la asimetría sobre la potencia de la prueba RSW 22
2.3 Estimación de la potencia de la prueba del RSW para muestras de distribuciones asimétricas de la DLG 24
2.3.1 La familia de Distribuciones Lambda Generalizada . . 24
2.3.2 Estudio de la potencia asintótica de la prueba RSW . 28
2.4 Primera solución: Simetría Ponderada, Wolfe (1974) 33
2.5 Impacto sobre la potencia de la prueba del RSW bajo simetría ponderada 36
2.6 Segunda solución: Prueba adaptativa, Baklizi (2005) 38
2.6.1 Estadística de la prueba de Baklizi 38
2.6.2 Región Crítica 39
2.6.3 Prueba de Ternas (Randles 1980) 39
2.6.4 Resultados obtenidos por Baklizi 44

2.7 Comparación de la tolerancia a la aceptación de H_0 de las pruebas presentadas hasta aquí. 45

3 Solución propuesta **48**
3.1 Estadística propuesta y resultados básicos 49
3.1.1 Distribución exacta de la estadística y prueba propuesta 51
3.1.2 Momentos y distribución asintótica de la estadística propuesta 52
3.1.3 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba propuesta 54
3.2 Estadística de la prueba RSWW 56
3.2.1 Momentos y distribución asintótica de la estadística utilizada en la prueba RSWW 58
3.2.2 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba del RSWW 59
3.3 Estadística de Baklizi 60
3.3.1 Momentos y distribución asintótica de la estadística utilizada para la prueba de Baklizi 61
3.3.2 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba de Baklizi 62

4 Resultados **64**

5 Conclusiones y expectativas **68**
5.1 Conclusiones 68
5.2 Expectativas de investigación 69

A Algunos resultados de Matemáticas **70**
A.1 Resultados matemáticos 70
A.2 Programa para calcular la desviación estándar de una variable aleatoria con DLG 72
A.3 Código para simular la potencia asintótica de la prueba de RSW 73

Introducción

El impacto de la trasgresión del supuesto de simetría de la distribución muestreada, sobre la calidad de la prueba del Rango Signado de Wilcoxon (RSW) para la hipótesis $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_0 : \theta > 0$ en muestras de distribuciones simétricas, se puede intuir de manera relativamente sencilla: considérese, por ejemplo, que la muestra proviene de una distribución asimétrica con mediana cero y una larga cola a la derecha; entonces esta puede contener cierta proporción de observaciones extremas positivas provenientes de la cola más larga de la distribución, proporción que seguramente crece con la longitud de la cola. Entonces los rangos de dichas observaciones positivas aportarán al valor de la estadística agrandando sus valores al punto que harán rechazar la hipótesis nula de que la mediana de la distribución es cero cuando la distribución muestreada tiene mediana cero. Esto impacta directamente sobre el nivel de significacia de la prueba.

El impacto sobre la potencia de la prueba del RSW no se puede ver tan fácilmente; la primera consecuencia directa es que no se puede calcular explícitamente la potencia asintótica de la prueba, pues para ello se requiere el supuesto de simetría de la distribución muestreada. Por esta razón, el estudio del impacto sobre la potencia de la prueba tuvo que hacerse por medio de simulación de muestras de distribuciones asimétricas de la distribución lambda generalizada, observándose que la prueba se vuelve sesgada, y que el sesgo crece con el grado de asimetría de la distribución muestreada y con el tamaño de muestra; por otra parte, la potencia de la prueba también crece muy rápidamente aún en cercanías de la hipótesis nula, lo cual sería muy bueno si la prueba no fuera sesgada.

Como se puede apreciar el impacto de la asimetría de la distribución muestreada tanto sobre el nivel de significancia como sobre la potencia asintótica de la prueba del RSW es mucho mayor de lo que podía esperarse. Se consultó la bibliografía pertinente para buscar pruebas que no tengan los menciona-

dos problemas encontrándose dos propuestas interesantes. Una basada en la idea de una *simetría ponderada* desarrollada en Wolfe (1974), orientada a conservar dos resultados claves para el desarrollo de la teoría de las pruebas de rangos y que requieren el supuesto de simetría: la independencia entre rangos y signos, y la distribución uniforme de las variables indicadoras que identifican las observaciones positivas. Otra propuesta encontrada es el reciente trabajo de Baklizi (2005) en el que se propone una prueba para la hipótesis $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_0 : \theta > 0$, que no pretende sostener el supuesto de simetría de la distribución muestreada sino utilizar el nivel de asimetría de esta como información en la estadística de prueba. La prueba se basa en una estadística de rangos en la que se incluye una medida de asimetría de la distribución muestreada, que es el valor-p de una prueba de simetría propuesta por Randles, Fligner, Policello & Wolfe (1980).

La anterior revisión de literatura y la comparación de las pruebas mencionadas anteriormente con la prueba del signo, que no requiere el supuesto de simetría de la distribución muestreada, y con la Prueba del RSW winsorizada (RSWW) en términos de su tolerancia a observaciones extremas antes de rechazar H_0, produjo varios resultados interesantes y marcó un camino metodológico para el desarrollo de este trabajo. No solo permitió el cálculo de la media y la varianza asintóticas de la estadística de Baklizi, y el cálculo de la tolerancia de su prueba, que no se encontraban en el artículo original de Baklizi, sino que generó la idea de proponer una prueba que combinara las cualidades de las pruebas del RSWW y de Baklizi, basada en una estadística que podría denominarse una *winsorización* de la estadística de Baklizi debido a que utiliza una modificación de dicha estadística y le quita (winsoriza) peso a los rangos de observaciones extremas.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo se recogen los principales resultados teóricos de las pruebas de rangos bajo el supuesto de simetría de la distribución muestreada; en el segundo se estudia el impacto que sobre la teoría y la calidad de las pruebas recolectadas tiene la transgresión del supuesto de simetría; el capítulo tercero contiene los principales resultados teóricos obtenidos para la estadística y la prueba propuestas. Se demuestran allí varias propiedades de la función de puntajes utilizada en la estadística de prueba, se calculan la media y la varianza asintóticas, su distribución exacta y se demuestra que la distribución de la estadística de prueba, debidamente estandarizada, converge a la distribución normal estándar; se calcula la tolerancia de la prueba a la aceptación de H_0 cuando la muestra contiene observaciones extremas; en

el cuarto capítulo se hace una comparación de la tolerancia de la prueba propuesta con la de todas las pruebas mencionadas, obteniéndose resultados muy favorables para la prueba propuesta. En el capítulo quinto se presentan las conclusiones y expectativas de investigación generadas por el trabajo.

Capítulo 1

Muestras de distribuciones simétricas y estadísticas de puntajes de rangos

En este capítulo se introducen varias estadísticas de puntajes de rangos con sus principales propiedades exactas y asintóticas bajo el supuesto de que la muestra es extraída de una distribución simétrica. Se introduce también el concepto de tolerancia de una prueba a la aceptación de la hipótesis nula que será utilizado para comparar las pruebas presentadas aquí y en el capitulo 2 con la prueba propuesta.

El siguiente es el contexto estadístico y la notación utilizada para definir y presentar las estadísticas de puntajes de rangos. Sea $X_1, \ldots, X_N$ una muestra aleatoria de una distribución continua y simétrica $F(x-\theta)$ tal que $F(0) = 1/2$ de manera única. Se define el rango R_i de $|X_i|$ como el puesto que ocupa $|X_i|$ en la sucesión ordenada de los valores absolutos $|X|_{(1)} \leq \cdots \leq |X|_{(N)}$; esto significa que $|X_i| = |X|_{(R_i)}$. El antirango D_i de $|X|_{(i)}$ se define como el subíndice que tiene la observación de donde proviene $|X|_{(i)}$, es decir, $|X_{D_i}| = |X|_{(i)}$. Se define el rango signado de X_i como el producto $R_i s(X_i)$, donde

$$s(X_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1 Estadísticas de puntajes de rangos

Sea $0 = a(0) \leq a(1) \leq \cdots \leq a(N)$ una sucesión de constantes con al menos una desigualdad estricta. Se define la estadística de puntajes del rango signado como:

$$V = \sum_{i=1}^{N} a(R_i)\, s(X_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i\, s(X_{D_i}) = \sum_{i=1}^{N} a_i W_i. \tag{1.2}$$

Aquí la segunda igualdad se obtiene utilizando el hecho de que $R_{D_i} = i$ (Hajek 1999) y

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{si } |X|_{(i)} \text{ proviene de una observación positiva} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Casos especiales:

1. Si $a(R_i) = 1$ para $i = 1, \ldots, N$ entonces $V = S = \sum_{i=1}^{N} s(X_i)$, cuenta el número de observaciones positivas en la muestra y es la estadística utilizada en la prueba del Signo.

2. Si $a(R_i) = R_i$ para $i = 1, \ldots, N$ entonces $V = W = \sum_{i=1}^{N} R_i s(X_i)$ es la suma de los rangos de las observaciones positivas que se utiliza en la prueba del RSW.

3. Si $a(R_i) = \min\{\frac{R_i}{N+1}, 1-\gamma\}$ para $i = 1, \ldots, N$ entonces

$$V = \sum_{i=1}^{N} \min\left\{\frac{R_i}{N+1}, 1-\gamma\right\} s(X_i)$$

   es la estadística de la prueba del RSWW, prueba que es resistente a observaciones extremas en el sentido de que la decisión de aceptar H_0, se mantiene aun en presencia de valores extremos. En esta estadística se escoge $0 < \gamma < 1$ de manera que se incluyan los rangos del $(1-\gamma)100\%$ de las observaciones positivas con rangos pequeños $(R_i/(N+1) < 1-\gamma)$ y el signo del $(\gamma)100\%$ de las observaciones con rangos grandes $(R_i/(N+1) > 1-\gamma)$.

4. Si $a(R_i) = R_i^p$ para $i = 1, \ldots, N$ entonces V es una estadística propuesta por Baklizi (2005) para la prueba de H_0 que no supone simetría de la distribución muestreada; aquí p es el valor-p de una prueba para simetría propuesta por Randles et al. (1980) y se interpreta como el grado de asimetría de la distribución muestreada.

Los siguientes resultados son consecuencias directas de la simetría de la distribución muestreada F, bajo $H_0 : \theta = 0$:

Teorema 1. *Bajo $H_0 : \theta = 0$, si F es simétrica alrededor de cero entonces $s(X_1), \ldots, s(X_N)$ y el vector de rangos $(R_1, \ldots, R_N)$ son mutuamente independientes.*

Demostración. (Randles & Wolfe 1979) Para demostrar la independencia entre el vector de rangos y los signos es necesario mostrar antes la independencia entre los valores absolutos y los signos de las observaciones. Es decir, que $s(X_i)$ es independiente de $|X_i|$ para todo $i = 1, \ldots, N$. La probabilidad conjunta se calcula así:

$$\begin{aligned} P(s(X_i) = 1, |X_i| \leq x) &= P(X_i > 0, -x \leq X_i \leq x) \\ &= P(0 \leq X_i \leq x) \\ &= F(x) - F(0) \\ &= F(x) - (1/2) \quad \text{bajo } H_0, \\ &= (1/2)(2F(x) - 1) \\ &= (1/2)\left(F(x) - [1 - F(x)\,]\right) \\ &= (1/2)(F(x) - F(-x)) \quad \text{por la simetría de F,} \\ &= P(s(X_i) = 1)P(|X_i| \leq x) \end{aligned}$$

y análogamente

$$P(s(X_i) = 0, |X_i| \leq x) = P(s(X_i) = 0)P(|X_i| \leq x)$$

Por lo tanto $s(X_i)$ y $|X_i|$ para $i = 1, \ldots, N$ son independientes. Esto a su vez implica que $s(X_1), \ldots, s(X_N)$ y el vector de rangos $(R_1, \ldots, R_N)$ son mutuamente independientes, puesto que el vector de rangos $(R_1, \ldots, R_N)$ solo depende de $|X_1|, \ldots, |X_N|$. Con esto queda demostrado el teorema. □

Teorema 2. *Bajo $H_0 : \theta = 0$, si F es continua y simétrica alrededor de cero entonces $W_1, \ldots, W_N$ son i.i.d. con distribución*

$$P(W_i = 0) = P(W_i = 1) = 1/2.$$

Demostración. (Randles & Wolfe 1979) Sea $D = (D_1, \ldots, D_N)$ y $d = (d_1, \ldots, d_N)$. De (1.3) y el teorema anterior se tiene

$$\begin{aligned}
&P(W_1 = w_1, \ldots, W_N = w_N) \\
&\quad = \sum_d P(s(X_{D_1}) = w_1, \ldots, s(X_{D_N}) = w_N \,|\, D = d) P(D = d) \\
&\quad = \sum_d P(s(X_{d_1}) = w_1, \ldots, s(X_{d_N}) = w_N) P(D = d) \\
&\quad = \sum_d \left(\prod_{i=1}^N P(s(X_{d_i}) = w_i) \right) P(D = d) \\
&\quad = \sum_d \left(\prod_{i=1}^N 1/2 \right) P(D = d) \\
&\quad = (1/2)^N \sum_d P(D = d) \\
&\quad = (1/2)^N
\end{aligned}$$

Entonces $P(W_1 = w_1, \ldots, W_N = w_N) = \prod_{i=1}^N P(W_i = w_i)$ y

$$P(W_i = w_i) = 1/2.$$ □

Los dos resultados anteriores garantizan las siguientes propiedades de la estadística de puntajes del rango signado V:

Teorema 3. *Sea $V_1 = \sum_{i=1}^N a_i W_i$ y $V_2 = \sum_{i=1}^N b_i W_i$, donde $W_1, \ldots, W_N$ son variables aleatorias i.i.d. $Bin(1, 1/2)$. Entonces*

$$\begin{aligned}
E[\, V_1 \,] &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \\
Var[\, V_1 \,] &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N a_i^2 \\
Cov[\, V_1, V_2 \,] &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N a_i \, b_i.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Demostración. (Hettmansperger 1984) □

De (1.4) se pueden deducir los valores esperados y varianzas de todos los casos especiales de las estadísticas de rangos signados mencionados anteriormente, en especial los de W del caso 2, que se obtienen cuando $a(R_i) = R_i$

para $i = 1, \ldots, N$, así

$$E[W\,] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} R_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{4}, \tag{1.5}$$

$$Var[W\,] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} R_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{24}. \tag{1.6}$$

Una manera de expresar la estadística de puntajes del rango signado definida en (1.2), que permite encontrar otras propiedades de ella es la siguiente:

Definición 1. *Sea* $a(i) = \phi\left(\frac{i}{N+1}\right)$ *para* $i = 1, \ldots, N$, *tal que* $\phi(u)$ *con* $0 < u < 1$, *es una función no negativa y no decreciente que satisface* $\int_0^1 \phi(u)\,du < \infty$ *y* $0 < \int_0^1 \phi^2(u)\,du < \infty$. *Así la estadística de puntajes toma la forma:*

$$\bar{V} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{R_i}{N+1}\right) s(X_i). \tag{1.7}$$

Se dice que $\bar{V}$ *es la estadística generada por* ϕ *y a* $\phi(\cdot)$ *se le llama función generadora de puntajes.*

Nótese que para $0 < u < 1$ escogiendo $\phi(u) = 1$ y $\phi(u) = \min\{u, 1-\gamma\}$ se obtienen los casos especiales 1 y 3 divididos por N, si $\phi(u) = u$ se da el caso 2 dividido por $N(N+1)$ y seleccionando $\phi(u) = u^p$ se tiene el caso 4 dividido por $N(N+1)^p$.

En el siguiente teorema se encuentran la media y la varianza asintótica de las estadísticas de puntajes y se demuestra que la distribución de $\bar{V}$ debidamente estandarizada converge en distribución a una distribución normal estándar (Hettmansperger 1984):

Teorema 4. *Bajo* $H_0 : \theta = 0$, *si* $\phi(\cdot)$ *genera a* $\bar{V}$, *entonces*

$$E[\bar{V}] = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)\,du \quad si \quad N \to \infty \tag{1.8}$$

$$N\,Var[\bar{V}] = \frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N} \phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right) \longrightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 \phi^2(u)\,du \quad si \quad N \to \infty \tag{1.9}$$

y

$$\frac{\bar{V} - E[\bar{V}]}{\sqrt{Var[\bar{V}]}} \quad o \quad \frac{\sqrt{N}\left(\bar{V} - \frac{1}{2}\int \phi(u)\,du\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\int \phi^2(u)\,du}} \tag{1.10}$$

tienen distribución asintótica normal estándar si satisfacen la condición de Noether:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\max\limits_{1\le i\le N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)}} = 0. \tag{1.11}$$

Demostración. Sea $s(X_i)$ como en (1.1), entonces bajo $H_0 : \theta = 0$ se tiene

$$E[\, s(X_i)\,] = E[\, s^2(X_i)\,] = 1/2 \tag{1.12}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[\,\bar{V}\,] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right) s(X_i)\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right) E\,[\, s(X_i)\,] \\ &= \frac{1}{2}\frac{N+1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right)\frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $N \to \infty$ y usando la definición de integral de Riemann se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} E[\,\bar{V}\,] &= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{N}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right)\frac{1}{N+1} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)\,du \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N\,Var[\,\bar{V}\,] &= N\,Var\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right) s(X_i)\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right) Var[\, s(X_i)\,] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)\left(E\left[\,s^2(X_i)\,\right] - \left\{E\left[s(X_i)\,\right]\right\}^2\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{4}\frac{N+1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)\frac{1}{N+1}
\end{aligned}
$$

Cuando $N \to \infty$, se observa que

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} NVar[\,\bar{V}\,] &= \frac{1}{4}\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{N}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)\frac{1}{N+1}\\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \phi^2(u)\,du
\end{aligned}
$$

La normalidad asintótica de la estadística de puntajes $\bar{V}$ se obtiene por medio de una modificación del Teorema del Límite Central (Teorema A2.)[1] para la cual es necesario demostrar que la función de puntajes ϕ satisface la condición de Noether:

$$
\frac{\max\limits_{1\le i\le N}\phi\left(\frac{i}{N+1}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)}} \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty. \tag{1.13}
$$

Elevando al cuadrado la expresión del lado izquierdo de la ecuación (1.13)

$$
\frac{\phi^2\left(\frac{N}{N+1}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)} = \frac{\frac{1}{N+1}\;\phi^2\left(\frac{N}{N+1}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)\frac{1}{N+1}}.
$$

Cuando $N \to \infty$, el denominador tiende a $0 < \int_0^1 \phi^2(u)\,du < \infty$. Por lo tanto basta probar que el numerador converge a 0. En efecto, si se supone $u > \frac{N}{N+1}$ y dado que ϕ es una función no decreciente y positiva, su cuadrado también es una función no decreciente, entonces

$$
\phi^2(u) > \phi^2\left(\tfrac{N}{N+1}\right).
$$

[1] Ver en el apéndice.

Aplicando el Teorema A3 [2], se obtiene

$$0 \leq \frac{1}{N+1}\,\phi^2\left(\frac{N}{N+1}\right) < \int_{\frac{N}{N+1}}^{1} \phi^2(u)\,du \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

Por lo tanto $\dfrac{\bar{V} - E[\bar{V}]}{\sqrt{Var[\bar{V}]}}$, tiene distribución asintótica normal estándar. □

A continuación se presentan dos ejemplos de estadísticas de puntajes de rangos signados que son generadas por la función de puntajes $\phi(\cdot)$, asociadas a los casos 1 y 3, los cuales satisfacen todas las propiedades anteriormente mencionadas.

1.1.1 Puntajes de Wilcoxon

Sea $\phi(u) = u$ para $0 < u < 1$ la función generadora de puntajes de la estadística del rango signado de Wilcoxon. Se define la estadística $\bar{W}$ por

$$\bar{W} = \frac{1}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{N} R_i s(X_i) \tag{1.14}$$

que es la estadística del RSW dividida por $N(N+1)$.

1.1.2 Puntajes Winsorizados

Sea $\phi(u) = \min\{u, 1-\gamma\}$, con $0 < u < 1$ y $0 < \gamma < 1$, la función de puntajes de la estadística de rango signado de Wincoxon winsorizada, dicha función se ilustra en la Figura (1.1).

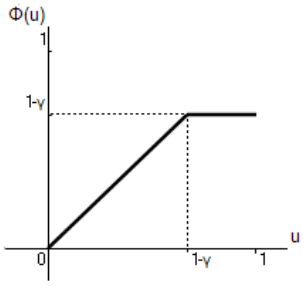


Figura 1.1: Función de puntajes del Rango Signado Winsorizado.

[2] Ver en el apéndice.

Se define la estadística $\bar{T}$ por

$$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \min\left\{\frac{R_i}{N+1}, 1-\gamma\right\} s(X_i) \tag{1.15}$$

que es la estadística del RSWW dividida por N.

1.2 Potencia de la prueba del Rango Signado de Wilcoxon bajo distribuciones simétricas

En esta sección se presenta la prueba del RSW para el problema localización en una muestra bajo el supuesto de simetría de la distribución muestreada y después se da una expresión para su potencia.

Sean $X_1, \ldots, X_N$, una muestra aleatoria de una población con distribución continua $F(x-\theta)$, tal que F es simétrica y $F(0) = 1/2$ de manera única. El interés es probar la siguiente hipótesis sobre la mediana de las observaciones:

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > 0$$

La prueba más conocida para resolver este problema es la prueba del RSW, que utiliza como estadística de prueba el caso especial 2 con $a(R_i) = R_i$ para $i = 1, \ldots, N$, con lo que se obtiene

$$W = \sum_{i=1}^{N} R_i \, W_i$$

donde $W_1, \ldots, W_N$ son variables aleatorias definidas como en (1.3).

La región crítica se construye observando que si muchas observaciones son positivas y grandes es porque $\theta > 0$ hecho que se reflejará en los valores de W pues tenderán a ser más grandes. Consecuentemente, la prueba basada en W rechaza $H_0 : \theta = 0$ en favor de $H_1 : \theta > 0$ para un $\alpha \in (0,1)$ fijo, cuando $W \geq k$. Aquí k se puede determinar construyendo la distribución exacta de W para valores de N moderados de manera que

$$P_{H_0}(W \geq k) = \alpha.$$

Para N grande, k se puede obtener utilizando la aproximación de la distribución de W por la distribución normal así:

$$P_{H_0}(W \geq k) = 1 - \Phi\left(\frac{k - E_{H_0}[W]}{\sqrt{Var_{H_0}[W]}}\right) = \alpha$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución normal estándar, $E_{H_0}[W]$ y $Var_{H_0}[W]$ son como en (1.5) y (1.6) respectivamente.

Entonces, el valor crítico aproximado de la prueba del RSW es:

$$\begin{aligned} k &\doteq E_{H_0}[W] + Z_\alpha \sqrt{Var_{H_0}[W]} \\ &= \frac{N(N+1)}{4} + Z_\alpha \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}, \end{aligned}$$

o bien, después de la corrección por continuidad

$$k \doteq \frac{N(N+1)}{4} + 0.5 + Z_\alpha \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}.$$

Por otra parte, una forma de expresar la estadística de prueba del RSW con el propósito de calcular su media y su varianza bajo la hipótesis alternativa es definiendo W a través de los promedios de Walsh como sigue (Gibbons & Chakraborti 1992, pág 156) :

$$W = \sum_{i \leq j} \sum T_{ij} = \sum_{i<j} \sum T_{ij} + \sum_k T_{kk} \tag{1.16}$$

donde

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{X_i + X_j}{2} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.17}$$

Se definen las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X_1 > 0) \\ p_2 &= P(X_1 + X_2 > 0) \\ p_3 &= P(X_1 + X_2 > 0, X_1 > 0) \\ p_4 &= P(X_1 + X_2 > 0, X_1 + X_3 > 0). \end{aligned}$$

Los momentos de las variables indicadoras T_ij definidas en (1.17) para todos los i, j, k, h distintos son:

$$\begin{aligned} &E[T_{ii}] = p_1 && E[T_{ij}] = p_2 \\ &Var[T_{ii}] = p_1 - p_1^2 && Var[T_{ij}] = p_2 - p_2^2 \\ &Cov[T_{ii}, T_{ik}] = p_3 - p_1 p_2 && Cov[T_{ij}, T_{ik}] = p_4 - p_2^2 \qquad Cov[T_{ij}, T_{hk}] = 0 \end{aligned}$$

La media y la varianza de W en términos los momentos de las T_ij y de p_1, p_2, p_3 y p_4 son:

$$E_{H_1}[W] = N\,E[T_{ii}] + \frac{N(N-1)}{2}E[T_{ij}] = Np_1 + \frac{N(N-1)}{2}p_2 \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} Var_{H_1}[W] &= N\,Var[T_{ii}] + \binom{N}{2}Var[T_{ij}] + 2N(N-1)Cov[T_{ii}, T_{ik}] \\ &\quad + 2N\binom{N-1}{2}Cov[T_{ij}, T_{ik}] + \binom{N}{4}Cov[T_{ij}, T_{hk}] \\ &= Np_1(1-p_1) + N(N-1)p_2(1-p_2)/2 \\ &\quad + 2N(N-1)(p_3 - p_1p_2) \\ &\quad + N(N-1)(N-2)(p_4 - p_2^2) \\ &= Np_1(1-p_1) + N(N-1)(N-2)(p_4 - p_2^2) \\ &\quad + \frac{N(N-1)}{2}\left[p_2(1-p_2) + 4(p_3 - p_1p_2)\right], \end{aligned} \tag{1.19}$$

Si F es simétrica alrededor de cero entonces bajo H_0 las probabilidades p_1, p_2, p_3 y p_4 toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X_1 > 0) = 1/2 \\ p_2 &= P(X_1 + X_2 > 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-x_2}^{\infty} f(x_1)f(x_2)\,dx_1\,dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - F(-x_2)\right]\,f(x_2)\,dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x_2)f(x_2)\,dx_2 = \int_0^1 u\,du = 1/2 \\ p_3 &= P(X_1 + X_2 > 0,\, X_1 > 0) \\ &= \int_0^{\infty}\int_{-x_1}^{\infty} f(x_1)f(x_2)\,dx_2\,dx_1 \\ &= \int_0^{\infty}\left[1 - F(-x_1)\right]f(x_1)\,dx_1 \\ &= \int_0^{\infty} F(x_1)f(x_1)\,dx_1 = \int_{1/2}^1 u\,du = 3/8 \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$
\begin{aligned}
p_4 &= P(X_1 + X_2 > 0,\ X_1 + X_3 > 0) \\
&= P(0 < X_1 + X_2 < X_1 + X_3) + P(0 < X_1 + X_3 < X_1 + X_2) \\
&= P(-X_1 < X_2 < X_3) + P(-X_1 < X_3 < X_2) \\
&= 2P(-X_1 < X_2 < X_3) \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty} f(x_1)f(x_2)f(x_3)\,dx_3\,dx_2\,dx_1 \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-x_1}^{\infty} [1 - F(x_2)]\, f(x_2)f(x_1)\,dx_2\,dx_1 \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-x_1}^{\infty} f(x_2)f(x_1)\,dx_2\,dx_1 - 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-x_1}^{\infty} F(x_2)f(x_2)f(x_1)\,dx_2\,dx_1 \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(-x_1)]\, f(x_1)\,dx_1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1 - [F(-x_1)]^2\right\} f(x_1)\,dx_1 \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1)f(x_1)\,dx_1 - 1 + \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(x_1)]^2\, f(x_1)\,dx_1 \\
&= 2(1/2) - 1 + 1/3 = 1/3
\end{aligned}
$$

Sustituyendo estas probabilidades en las expresiones (1.18) y (1.19) se obtienen los valores de la media y la varianza encontrados en (1.5) y (1.6).

La potencia exacta de la prueba del RSW no se puede obtener dado que la distribución exacta de W no se puede escribir explícitamente bajo la hipótesis alternativa. Tampoco se puede aproximar por el Teorema de Límite Central, porque bajo H_1 no se puede representar a W como una suma de variables aleatorias independientes. Para solucionar este problema se proyecta W vía esperanza condicional sobre una clase de variables aleatorias independientes y se expresa como suma de dichas variables; después se demuestra que la diferencia entre W y dicha suma converge a cero en media cuadrática; al final se muestra que W tiene la misma distribución límite que la suma de sus proyecciones (Hettmansperger 1984, pág 54). Con este método, la potencia de la prueba del RSW se puede aproximar para valores de θ cercanos a cero de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta) &= P\big(\text{Rechazar } H_0 \,|\, H_1 \text{ es cierta}\big) \\
&= P\big(W \geq k \,|\, \theta > 0\big) \\
&\doteq 1 - \Phi\left(\frac{k - E_{H_1}[W]}{\sqrt{Var_{H_1}[W]}}\right) \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

con $E_{H_1}[W]$ y $Var_{H_1}[W]$ dados por la expresión (1.18) y (1.19). Ahora el numerador de la expresión donde se evalúa Φ queda finalmente determinado por

$$k - E_{H_1}[W] = \frac{N(N+1)}{4} + Z_\alpha \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}} - Np_1 - \frac{N(N-1)}{2} p_2$$

$$= Z_\alpha \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}} + \frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{1}{2} - p_2\right) + N\left(\frac{1}{2} - p_1\right) \quad (1.22)$$

En una vecindad de la hipótesis nula se puede aproximar $Var[W]$ bajo H_1 por $Var[W]$ bajo H_0. De esta manera el denominador de (1.21) se sustituye por la raíz cuadrada de la varianza de W bajo la hipótesis nula. Además, realizando una aproximación de p_1 y p_2 por medio de la expansión en Serie de Taylor alrededor de $\theta = 0$, se puede obtener una aproximación de tipo lineal para valores pequeños de θ así,

$$p_1 \doteq \frac{1}{2} + \theta f(0),$$

$$p_2 \doteq \frac{1}{2} + 2\theta f^*(0),$$

donde $f^*(\theta)$ es la convolución de las densidades de X_1 y X_2.

Las aproximaciones anteriores son consecuencia de:

i) Dado que $p_1 = P(X > 0) = 1 - P(X - \theta \leq -\theta) = 1 - F(-\theta)$, al expandir en Serie de Taylor p_1 bajo H_0 resulta la siguiente aproximación

$$p_1 \doteq 1 - F(0) + \theta\, f(0) = \frac{1}{2} + \theta\, f(0).$$

ii) Ahora, a partir de la definición de p_2 y bajo el supuesto de que X_1 y X_2 son independientes, se sigue que

$$\begin{aligned} p_2 &= P(X_1 + X_2 > 0) \\ &= 1 - P(X_1 + X_2 \leq 0) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0-x_1} f_{X_1+X_2}(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0-x_1} f(x_1) f(x_2)\, dx_2\, dx_1 \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) F(-x_1)\, dx_1 \\
&= 1 - F^*(0),
\end{aligned}
$$

donde $F^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(t-x)\, dx$ es la convolución de las distribuciones de X_1 y X_2. Para aproximar $F^*(0)$ es necesario parametrizar p_2 así:

$$p_2 = P(X_1 + X_2 - 2\theta > -2\theta) = 1 - F^*(-2\theta).$$

Expandiendo en Serie de Taylor $F^*(-2\theta)$ alrededor de $\theta = 0$ se obtiene la siguiente aproximación para p_2

$$p_2 \doteq 1 - F^*(0) + 2\theta f^*(0) \tag{1.23}$$

Derivando $F^*(t)$ con respecto a t y bajo condiciones de regularidad (Teorema A4)[3] se obtiene la siguiente expresión para $f^*(t)$,

$$
\begin{aligned}
f^*(t) &= \frac{\partial}{\partial t} F^*(t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(t-x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial t} F(t-x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(t-x)\, dx.
\end{aligned}
$$

Bajo el supuesto de simetría alrededor de cero de la distribución muestreada F, la convolución de las distribuciones de X_1 y X_2 y su derivada evaluadas en cero, pueden expresarse de la forma

$$F^*(0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x)\, dx \quad \text{y} \quad f^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx \tag{1.24}$$

Utilizando la sustitución $u = F(x)$, se obtiene $du = f(x)\, dx$ y por tanto

$$F^*(0) = 1 - \int_0^1 u\, du = \frac{1}{2}.$$

Reemplazando el anterior resultado en la expresión (1.23) se obtiene

$$p_2 \doteq \frac{1}{2} + 2\theta f^*(0).$$

[3] Ver en el apéndice.

Finalmente, la potencia asintótica de la prueba del RSW se puede expresar

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &\doteq 1-\Phi\left(\frac{Z_\alpha\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}+\frac{N(N-1)}{2}\left(-2\theta f^*(0)\right)+N\left(-\theta f(0)\right)}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}}\right)\\ &= 1-\Phi\left(Z_\alpha-\frac{N(N-1)\,\theta f^*(0)+N\,\theta f(0)}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}}\right)\\ &= 1-\Phi\left(Z_\alpha-\frac{N(N-1)\,\theta\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\,dx+N\,\theta f(0)}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}}\right).\end{aligned}$$

1.3 Tolerancia de una prueba a la aceptación de la hipótesis nula.

Existen varias maneras de estudiar las propiedades de una prueba entre las cuales se cuentan los estudios de potencia y de eficiencia relativa. Sin embargo, se introduce la idea de tolerancia de una prueba presentada en Hettmansperger (1984) con el fin de indagar sobre la capacidad de la prueba para resistir observaciones extremas que pueden ocurrir cuando se muestrea de distribuciones no simétricas de mediana cero y que pueden incidir sobre el rechazo de H_0 sesgando la prueba.

Definición 2. *Sea V una estadística de prueba que rechaza $H_0:\theta=0$ a favor de $H_1:\theta>0$ cuando $V\geq k$. Suponga que existe un entero a tal que para valores dados de $x_{a+2},\ldots,x_N$, pueden escogerse los valores restantes $x_1,\ldots,x_{a+1}$ para forzar $V<k$. Sea a^* el entero más pequeño que satisface lo anterior, entonces la tolerancia de la prueba a la aceptación de H_0 se define por (Hettmansperger 1984)*

$$\tau_N(\textit{aceptación})=\frac{a^*}{N}.$$

Dado que V no se puede forzar a aceptar H_0 con a^* o menos observaciones entonces la prueba puede tolerar a lo más a^* observaciones malas. Además, para una muestra dada se puede controlar V si se alteran a^*+1 valores muestrales.

Similarmente, la tolerancia al rechazo de la prueba se define como el entero más pequeño b^* tal que para valores dados de $x_{b^*+2}, \ldots, x_N$, pueden escogerse $x_1, \ldots, x_{b^*+1}$ para forzar $V \geq k$. Entonces

$$\tau_N(\text{rechazo}) = \frac{b^*}{N}.$$

La definición 2, puede extenderse para pruebas de puntajes generales. Si para valores dados de $x_{a+2}, \ldots, x_N$ se toman $x_1, \ldots, x_{a+1}$ valores negativos con valores absolutos grandes, entonces se cumple que

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right) s(X_i) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-a-1} \phi\left(\frac{i}{N+1}\right) \tag{1.25}$$

puesto que, $s(X_i) = 0$, al menos $a+1$ veces. A un nivel de significancia α dado, la prueba no rechaza H_0 si

$$P\left(\bar{V} < k\right) = 1 - \alpha$$

donde k se aproxima a partir de

$$P\left(Z < \frac{k - \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)\,du}{\sqrt{\frac{1}{4N}\int_0^1 \phi^2(u)\,du}}\right) = 1 - \alpha$$

entonces

$$k \doteq \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)\,du + Z_\alpha \sqrt{\frac{1}{4N}\int_0^1 \phi^2(u)\,du},$$

donde Z_α es tal que $P(Z \geq Z_\alpha) = \alpha$. Por lo tanto la región de no rechazo esta dada por

$$\bar{V} < \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)\,du + Z_\alpha \sqrt{\frac{1}{4N}\int_0^1 \phi^2(u)\,du} \tag{1.26}$$

La tolerancia a la aceptación es el más pequeño de los a's y se supondrá que para N grande, a es aproximadamente una proporción ϵ de las observaciones, es decir que $a \doteq \epsilon N$. Por lo tanto ϵ es la **tolerancia asintótica a la aceptación**. Entonces para N grande la expresión (1.25) se aproxima

$$\bar{V} \sim \int_0^{1-\epsilon} \phi(u)\,du \tag{1.27}$$

De esta forma la región de no rechazo queda acotada por las expresiones que aparecen a la derecha de (1.26) y (1.27) para N grande. Entonces ϵ es la solución de la ecuación

$$\int_0^{1-\epsilon} \phi(u)\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)\, du \tag{1.28}$$

puesto que el segundo término de (1.26) tiende a cero.

1.3.1 Tolerancia a la aceptación de H_0 de la prueba del Signo

Sea $S = \sum_{i=1}^N s(X_i)$ la estadística utilizada en la prueba del Signo que rechaza $H_0 : \theta = 0$ en favor de $H_1 : \theta > 0$ cuando $S \geq k$ tal que $P(S \geq k) = \alpha$. Bajo H_0 y (1.12)

$$E[S\,] = E\left[\sum_{i=1}^N s(X_i)\right] = \sum_{i=1}^N E\left[s(X_i)\right] = \frac{N}{2}$$

y

$$Var[S\,] = Var\left[\sum_{i=1}^N s(X_i)\right] = \sum_{i=1}^N Var\left[s(X_i)\right] = \frac{N}{4}.$$

Así la región crítica se puede aproximar por

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left(\frac{S - E[S\,]}{\sqrt{Var[S\,]}} \geq \frac{k - N/2}{\sqrt{N/4}}\right)\\ &\doteq 1 - \Phi\left(\frac{k - N/2}{\sqrt{N/4}}.\right)\end{aligned}$$

Sea Z_α el α-percentil superior de la distribución normal estándar, esto es $\alpha = 1 - \Phi(Z_\alpha)$ entonces

$$\frac{k - N/2}{\sqrt{N/4}} \doteq Z_\alpha$$

y usando el factor de corrección por continuidad

$$k \doteq \frac{N}{2} + Z_\alpha \frac{\sqrt{N}}{2} + 0.5.$$

Para calcular la tolerancia de esta prueba se realiza el siguiente análisis: Primero se fijan $N - k + 1$ observaciones negativas denotadas como X_i^-, entonces

$$S = \sum_{i=1}^{k-2} s(X_i) + \sum_{i=k-1}^{N} s(X_i^-) \leq k - 2 < k.$$

Por tanto para este número fijo de observaciones negativas no se rechaza H_0. Si se fijan ahora $N-k$ observaciones negativas,

$$S = \sum_{i=1}^{k-1} s(X_i) + \sum_{i=k}^{N} s(X_i^-) \leq k-1 < k$$

entonces aún con este número de observaciones negativas no se rechaza H_0. Pero si se fijan $N-k-1$ observaciones negativas,

$$S = \sum_{i=1}^{k} s(X_i) + \sum_{i=k+1}^{N} s(X_i^-) \leq k$$

cabe la posibilidad de que H_0 se rechace cuando $S = k$. Así, el menor número de datos que hace que $S < k$ es $a^* = N-k$ y la tolerancia

$$\begin{aligned}\tau_N(\text{aceptación}) &= \frac{N-k}{N} \\ &\doteq 1 - \frac{1}{N}\left(\frac{N}{2} + Z_\alpha \frac{\sqrt{N}}{2} + 0.5,\right) \\ &\doteq \frac{1}{2} + Z_\alpha \frac{1}{2\sqrt{N}} - \frac{1}{2N}\end{aligned}$$

Cuando N tiende a infinito la tolerancia asintótica para la prueba del Signo es:

$$\tau(\text{aceptación}) = \lim \tau_N(\text{aceptación}) = \frac{1}{2}.$$

En conclusión la tolerancia a la aceptación de H_0 de la prueba del Signo depende del nivel de significancia α y su tolerancia converge por debajo de la mediana.

1.3.2 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba del RSW

Para encontrar la tolerancia asintótica a la aceptación de la hipótesis nula se soluciona la ecuación (1.28), que en este caso toma la forma:

$$\int_0^{1-\epsilon} u\, du = \frac{1}{4}.$$

Evaluando la integral del lado izquierdo de la ecuación se obtiene

$$(1-\epsilon)^2 = \frac{1}{2},$$

despejando la tolerancia asintótica ϵ, se consigue:

$$\epsilon = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Capítulo 2

Muestras de distribuciones asimétricas y consecuencias de la asimetría sobre las propiedades de las pruebas de rangos

En este capítulo se estudia el impacto que tiene el hecho de tomar muestras de distribuciones asimétricas, sobre las propiedades más importantes de las pruebas de rangos, se hace un estudio de la potencia de la prueba de rangos para muestras de distribuciones asimétricas seleccionadas de varios casos de la distribución lambda generalizada, y se presentan dos soluciones reportadas en la literatura para la prueba de la hipótesis $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_1 : \theta > 0$. Especialmente se verá cómo se impactan los cálculos del valor esperado, la varianza y la distribución asintótica de la estadística de prueba bajo H_0 y las complicaciones que surgen para calcular la potencia de la prueba cuando las muestras provienen de distribuciones asimétricas.

2.1 Consecuencias de la asimetría sobre las pruebas de rangos

Sean $X_1, \ldots, X_N$, una muestra aleatoria de una distribución continua $F(x - \theta)$ tal que $F(0) = 1/2$ de manera única. El interés es probar la

siguiente hipótesis sobre la mediana de las observaciones:

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > 0 \tag{2.1}$$

Para probar esta hipótesis comúnmente se utiliza la prueba del Signo que rechaza H_0 a favor de H_1 cuando el número de observaciones positivas en la muestra es muy grande. Por otra parte, si se puede garantizar que F es simétrica alrededor de cero se utiliza la conocida prueba del RSW, que rechaza H_0 a favor H_1 para valores grandes de W definida en (1.14). Lo anterior debido a que cuando $\theta > 0$ la distribución F se traslada hacia la derecha y las observaciones positivas tienen mayores probabilidades de salir en la muestra que las observaciones negativas. Es de resaltar que mientras la estadística de la prueba del Signo sólo cuenta el número de observaciones positivas en la muestra, la estadística de prueba W tiene en cuenta las distancias de las observaciones a cero a través de los rangos.

Si no se puede justificar adecuadamente la simetría de F, las consecuencias sobre la calidad de la prueba del RSW son evidentes. Para visualizarlas se puede suponer que la muestra será tomada de una distribución F con mediana cero que es sesgada a la derecha y tiene función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

la cual se ilustra en la figura 2.1 (tomado de Hettmansperger, 1984).

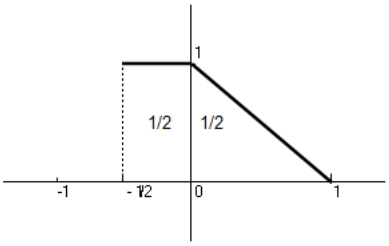


Figura 2.1: Una distribución sesgada a la derecha con mediana θ.

Entonces observaciones mayores que 1/2 tienen probabilidades mayores que cero de ocurrir en la muestra, con lo cual los valores de W tenderán a ser

más grandes y por esto la prueba del RSW tenderá a rechazar $H_0 : \theta = 0$ más frecuentemente, cuando realmente la mediana de F es cero; lo anterior implica un aumento en el nivel de significancia y por tanto hace que la prueba sea sesgada.

Otras consecuencias del impacto de la asimetría de la distribución muestreada F sobre la calidad de la prueba del RSW se mencionan en la siguiente sección.

2.2 Impacto directo de la asimetría sobre la potencia de la prueba RSW

Bajo el supuesto de que F es simétrica alrededor de su mediana cero, se mencionaron en los Teoremas 1 y 2 del capítulo 1, dos resultados fundamentales para el desarrollo de la teoría de pruebas de rangos bajo H_0. Éstos son:

i) $s(X_i)$ y $|X_i|$ para $i = 1, \ldots, N$ son independientes. Por lo tanto existe una mutua independencia entre $s(X_1), \ldots, s(X_N)$ y el vector de rangos $(R_1, \ldots, R_N)$.

ii) Como consecuencia de i), se obtiene que $W_1, \ldots, W_N$ son variables aleatorias i.i.d. $Bin(1, 1/2)$.

Recuérdese que en la demostración de la distribución de los W_i se utiliza el supuesto de simetría alrededor de cero de la distribución muestreada F, y por eso si F no es simétrica no es posible calcular $E[W]$ ni $Var[W]$ como en el Teorema 3. No obstante se puede demostrar que W debidamente estandarizada converge en distribución a la distribución normal estándar.

Adicionalmente, los cálculos para la potencia asintótica $\pi(\theta)$ de la prueba del RSW se complican como se muestra a continuación:

1. Al no tener el supuesto de simetría de la distribución muestreada F, en la ecuación que aproxima a p_2 dada en (1.23), la convolución de las distribuciones y densidades de X_1 y X_2 evaluadas en cero no pueden simplificarse como en (1.24), si no que quedan como sigue:

$$F^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(-x)\,dx \tag{2.2}$$

y

$$f^*(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(-x)\,dx. \tag{2.3}$$

Utilizando la sustitución $u = F(-x)$ en (2.2) se obtiene $du = -f(-x)\,dx$ entonces la convolución de las distribuciones de X_1 y X_2, se puede expresar ahora como

$$F^*(0) = -\int_0^1 u\,\frac{f\left(-F^{-1}(u)\right)}{f\left(F^{-1}(u)\right)}\,du \tag{2.4}$$

Por consiguiente p_2 en la ecuación (1.23) se podría aproximar ahora por:

$$p_2 \doteq 1 + \int_0^1 x\,\frac{f\left(-F^{-1}(x)\right)}{f\left(F^{-1}(x)\right)}\,dx + 2\theta\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(-x)\,dx.$$

De esta forma la expresión (1.22) para el numerador del argumento de Φ en la potencia de la prueba del RSW (1.21) queda modificada también.

2. La segunda consecuencia es que no se puede calcular $E[W]$ y $Var[W]$ bajo H_0, pues como se dijo antes aún expresando W en términos de los T_{ij} el $E[W]$ y la $Var[W]$ quedan dependiendo de las probabilidades p_1, p_2, p_3 y p_4 y para el cálculo de éstos bajo H_0 se requiere el supuesto de simetría de la distribución muestreada como se indicó en (1.20).

3. En consecuencia, la expresión de la potencia $\pi(\theta)$ de la prueba del RSW para muestras de distribuciones asimétricas queda dependiendo de las integrales (2.3) y (2.4), y de los valores de las integrales necesarias para el cálculo de p_3 y p_4, por lo cual calcular los valores de la expresión para la potencia que se obtiene al reemplazar los valores mencionados resulta demasiado complicado. Por esta razón, para ver el impacto de la asimetría en la potencia de la prueba del RSW fue necesario hacer un estudio de la potencia por medio de simulación, a partir de muestras provenientes de algunas distribuciones asimétricas de la familia de Distribuciones Lambda Generalizada (DLG).

2.3 Estimación de la potencia de la prueba del RSW para muestras de distribuciones asimétricas de la DLG

Se introduce una breve descripción de la familia de DLG y de sus propiedades. En seguida se muestran algunos cálculos obtenidos por medio de simulación: primero para el nivel de significancia de la prueba del RSW muestreando de DLG de mediana cero y segundo para la potencia asintótica de la prueba del RSW muestreando de algunas DLG de mediana positiva.

2.3.1 La familia de Distribuciones Lambda Generalizada

Se considera ahora la familia de Distribuciones Lambda Generalizada, DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, identificada por cuatro parámetros e introducida por Ramberg (1972). Esta familia de distribuciones se encuentra representada por la función percentil

$$\begin{aligned} F^{-1}(y) &= x \qquad \text{tal que } F(x) = y \\ F^{-1}(y) &= \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $0 \leq y \leq 1$. Aquí λ_1 y $\lambda_2 \neq 0$ son los parámetros de localización y escala, respectivamente, mientras que λ_3 y λ_4 determinan el sesgo y la curtósis en DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. La función de distribución F para esta familia no tiene una expresión matemática explicita para escribirla.

Utilizando la derivada de la función percentil se obtiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}}, \quad \text{para} \quad x = F^{-1}(y), \tag{2.6}$$

si y sólo si, para todo $y \in [0, 1]$,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3\, y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}} \geq 0.$$

En la siguiente gráfica (figura 2.2) se ilustran algunas regiones que dependen de los parámetros λ_3 y λ_4, donde la función de densidad de la DLG esta bien definida (Karian & Dudewics 2000):

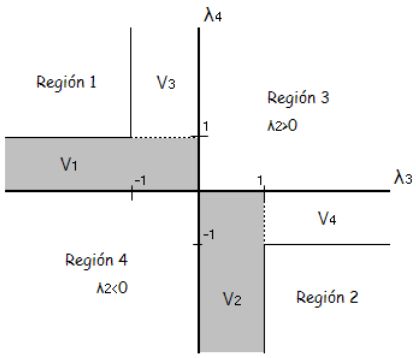


Figura 2.2: Regiones donde DLG es válida.

En las regiones 1 a 4 la función de densidad de la DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ esta bien definida:

$$\begin{aligned}
&\text{Región } 1 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, \lambda_3 \leq -1, \lambda_4 \geq 1\},\\
&\text{Región } 2 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, \lambda_3 \geq 1, \lambda_4 \leq -1\},\\
&\text{Región } 3 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0\},\\
&\text{Región } 4 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Si se cumple la condición:

$$\frac{(1-\lambda_3)^{1-\lambda_3}}{(\lambda_4-\lambda_3)^{\lambda_4-\lambda_3}}(\lambda_4-1)^{\lambda_4-1} < \frac{-\lambda_3}{\lambda_4}$$

entonces la DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ también esta bien definida en las regiones

$$V_3 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, -1 < \lambda_3 < 0, \lambda_4 > 1\},$$

y

$$V_4 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, \lambda_3 > 1, -1 < \lambda_4 < 0\}.$$

Finalmente la DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ no queda bien definida en las regiones sombreadas

$$V_1 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, \lambda_3 < 0,\, 0 < \lambda_4 < 1\}$$

y

$$V_2 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \,|\, 0 < \lambda_3 < 1, \lambda_4 < 0\}.$$

Si $X \sim \text{DLG}(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ entonces $X + \lambda_1 \sim \text{DLG}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. De esta manera es fácil calcular el $k-$ésimo momento si X tiene $\text{DLG}(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$:

$$E(X^k) = \lambda_2^{-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \beta(\lambda_3(k-i)+1, \lambda_4 i + 1) \tag{2.7}$$

donde $\beta(a, b)$ es la función *beta* definida por $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$, de donde $E(X^k)$ existe si y sólo si $\min(\lambda_3, \lambda_4) > -k^{-1}$ (Karian & Dudewics 2000, pág 45).

Por lo tanto, si X tiene $\text{DLG}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, con $\lambda_3 > -k^{-1}$ y $\lambda_4 > -k^{-1}$, los primeros cuatro momentos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (media, varianza, sesgo y curtósis, respectivamente), están dados por (Karian & Dudewics 2000, pág 45)

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mu = E(X) = \lambda_1 + \frac{A}{\lambda_2}, \\
\alpha_2 &= \sigma^2 = E\big[(X-\mu)^2\big] = \frac{B - A^2}{\lambda_2^2}, \\
\alpha_3 &= \frac{E\big[(X-\mu)^3\big]}{\sigma^3} = \frac{C - 3AB + 2A^3}{\lambda_2^3 \sigma^3}, \\
\alpha_4 &= \frac{E\big[(X-\mu)^4\big]}{\sigma^4} = \frac{D - 4AC + 6A^2B - 3A^4}{\lambda_2^4 \sigma^4},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1+\lambda_3} - \frac{1}{1+\lambda_4}, \\
B &= \frac{1}{1+2\lambda_3} + \frac{1}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_3, 1+\lambda_4), \\
C &= \frac{1}{1+3\lambda_3} - 3\beta(1+2\lambda_3, 1+\lambda_4) + 3\beta(1+\lambda_3, 1+2\lambda_4) - \frac{1}{1+3\lambda_4}, \\
D &= \frac{1}{1+4\lambda_4} - 4\beta(1+3\lambda_3, 1+\lambda_4) + 6\beta(1+2\lambda_3, 1+2\lambda_4) \\
&\qquad - 4\beta(1+\lambda_3, 1+3\lambda_4) + \frac{1}{1+4\lambda_4}.
\end{aligned}$$

El sesgo y la curtósis son funciones de λ_3 y λ_4, y no dependen de λ_1 ni de λ_2.

Cuando los parámetros λ_3 y λ_4 que determinan el sesgo y la curtósis coinciden, es decir $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4$, la $\text{DLG}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \lambda)$ es una distribución simétrica.

Si θ es la mediana de una distribución F entonces por definición $F(\theta) = 1/2$. En especial para una DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ esta condición equivale a

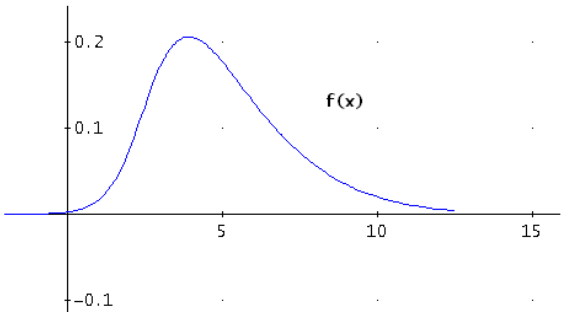
$$\begin{aligned} \theta &= F^{-1}(1/2) \\ &= \lambda_1 + \frac{(1/2)^{\lambda_3} - (1/2)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dados.

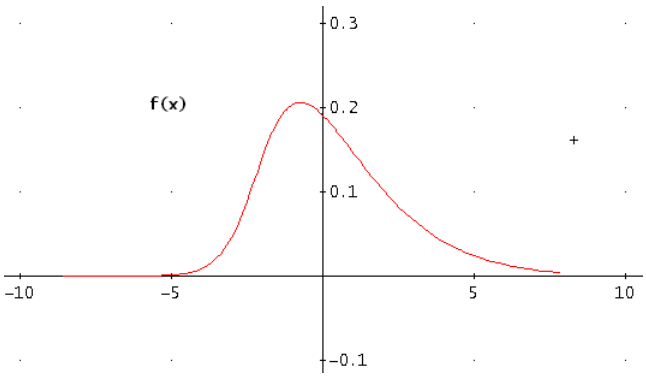
Si se toma como nuevo parámetro de localización $\lambda_1^* = \lambda_1 - \theta$, con θ definido en (2.9), todas las distribuciones de la forma DLG$(\lambda_1^*, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ se generan bajo $H_0 : \theta = 0$. La anterior afirmación se justifica por el siguiente hecho: sea θ^* la mediana de la DLG$(\lambda_1^*, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, entonces por (2.9) se tiene que

$$\begin{aligned} \theta^* &= \lambda_1^* + \frac{(1/2)^{\lambda_3} - (1/2)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \\ &= \lambda_1 - \theta + \frac{(1/2)^{\lambda_3} - (1/2)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \\ &= \theta - \theta = 0. \end{aligned}$$

Para ilustrar lo anterior, se selecciona un caso particular de la DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ con $\lambda_1 = 3.586508$, $\lambda_2 = 0.04306$, $\lambda_3 = 0.025213$ y $\lambda_4 = 0.094029$. Reemplazando estos valores en (2.9), se obtiene que la mediana de la DLG es $\theta = 4.64951059$. Resultado que se puede apreciar en la siguiente gráfica:

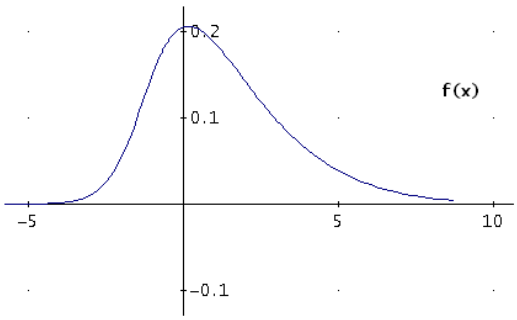


Si ahora se toma como nuevo parámetro de localización $\lambda_1^* = -1,06300259$ y se mantienen los mismos parámetros λ_2, λ_3 y λ_4 de la distribución seleccionada entonces la mediana de la DLG$(\lambda_1^*, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ que se obtiene al reemplazar los valores de los lambdas en (2.9) es $\theta^* = 0$, como se muestra en la siguiente gráfica:



En general, se pueden construir distribuciones de la familia DLG($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, λ_4) que tengan mediana $\theta = \Delta > 0$, definiendo un nuevo parámetro de localización de la forma $\lambda_1^\star = \lambda_1 - \theta + \Delta$ con $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ fijos. Tales distribuciones se generan bajo la hipótesis alternativa.

A partir del caso que se seleccionó para el ejemplo, se construyó una DLG($\lambda_1^\star$, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) con mediana 0.9, dejando los mismos parámetros λ_2, λ_3 y λ_4 y tomando $\Delta = 0.9$. La DLG($\lambda_1^\star, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) se ilustra en la siguiente gráfica:



2.3.2 Estudio de la potencia asintótica de la prueba RSW

El procedimiento realizado para estimar el nivel de significancia y el valor de la potencia de la prueba del RSW para cada $\theta \geq 0$ fijo, fue el siguiente:

1. Se generaron 10000 réplicas de muestras independientes de tamaño N (10, 20 y 50) para cuatro distribuciones obtenidas de DLG con diferentes grados de asimetría (McWilliams 1990). En la siguiente tabla se presentan los valores de los parámetros para los casos seleccionados:

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
Caso 1	0	1	0.00007	0.1
Caso 2	3.586508	0.04306	0.025213	0.094029
Caso 3	0	-1	-0.0075	-0.03
Caso 4	-0.116734	-0.351663	-0.13	-0.195

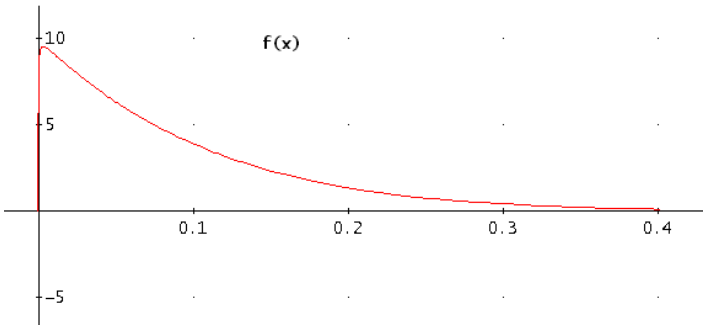
2. Para cada una de las muestras generadas se calculó el valor de la estadística de prueba del RSW. Después se hizo la prueba para un nivel de significancia $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ respectivamente y en cada una de las muestras se determinó el número de rechazos de H_0 bajo estos niveles de significancia.

3. La potencia estimada para la prueba de RSW se calculó como

$$\hat{\pi}(\theta) = \frac{\text{Número de rechazos de } H_0}{\text{Número de réplicas}}.$$

En seguida se describirán los resultados para las estimaciones del nivel de significancia y de la potencia de la prueba para muestras generadas de las distribuciones de los casos 1 y 4. Los resultados obtenidos de los casos 2 y 3 no se presentan en este trabajo porque produjeron resultados similares a los casos 1 y 4 respectivamente.

En el caso 1, la DLG presenta un grado de asimetría fuerte como se puede observar en su forma distribucional ilustrada en la siguiente gráfica:



Para la estimación del nivel de significancia se deja la distribución con mediana cero por el método que se mencionó anteriormente, y para la estimación de la potencia se varía la mediana θ de manera que tome los siguientes valores: 0σ, 0.2σ, 0.4σ, 0.6σ y 0.8σ donde σ denota la desviación estándar de la distribución, que para este caso es $\sigma = 0.08303588$. Este

valor se obtuvo programando la expresión (2.8) en lenguaje "R". En el apéndice A.2 se presenta un segmento de este código que permite calcular la desviación estándar de una DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ a partir de la expresión anteriormente mencionada.

En las siguientes seis tablas se ha ubicado la información así: la columna encabezada con "Theta" contiene los valores de θ para los que se simuló la muestra de la DLG; las siguientes tres columnas encabezadas con "RSW_1", "RSW_5" y "RSW_{10}" indican los niveles de significancia para los cuales se hizo la prueba. Así por ejemplo, en la segunda fila frente al valor (0) se encuentran los niveles de significancia estimados cuando la prueba se hizo a los niveles 1%, 5% y 10%. En las siguientes filas ($\theta > 0$) se observan los valores estimados de la potencia para prueba con niveles de significancia del 1%, 5% y 10%.

Potencias para el caso 1 con N=10

THETA	RWS_1	RSW_5	RSW_10
0	0.012	0.1045	0.1851
0.017	0.054	0.3217	0.4555
0.034	0.241	0.6764	0.7937
0.051	0.71	0.9665	0.9847
0.068	1	1	1

Potencias para el caso 1 con N=20

THETA	RWS_1	RSW_5	RSW_10
0	0.034	0.1501	0.2695
0.017	0.229	0.5241	0.682
0.034	0.731	0.9255	0.9687
0.051	0.994	0.9999	1
0.068	1	1	1

Potencias para el caso 1 con N=50

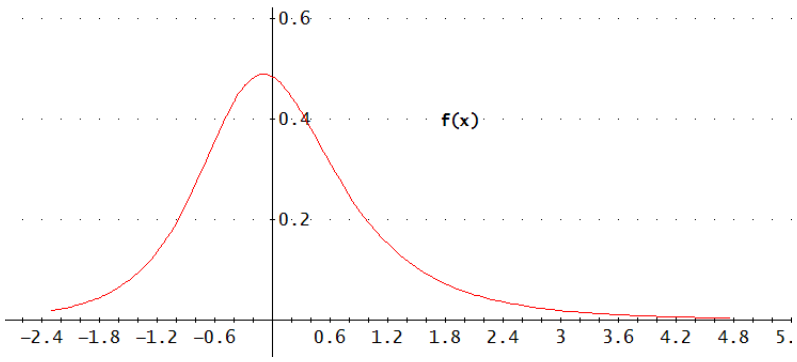
THETA	RWS_1	RSW_5	RSW_10
0	0.097	0.2912	0.4238
0.017	0.67	0.8774	0.9352
0.034	0.995	0.9994	0.9999
0.051	1	1	1
0.068	1	1	1

Se observa que para muestras tomadas de esta distribución asimétrica, existe un aumento en el nivel de significancia de la prueba lo que conduce a que la prueba sea sesgada, es decir cuando la prueba se hace a un nivel de significancia del 5% se obtiene un valor estimado del 10.45% lo cual es una sobre

estimación de α para muestras de tamaño 10, y esta sobre estimación de α es mayor en la medida que aumenta el tamaño de muestra, así por ejemplo para $N = 20$ y $N = 50$ la estimación del nivel de significancia es 15% y 29.1%, respectivamente.

Con respecto a la potencia a medida que el parámetro θ se va alejando con valores pequeños de la hipótesis nula la potencia alcanza a 1 rápidamente, esto sucede debido a que entre más grande es la muestra más observaciones extremas contiene y con esto son más probables valores grandes de W.

El caso 4 de DLG, es una distribución que presenta un grado de asimetría leve, puesto que sus parámetros de sesgo λ_3 y curtósis λ_4 están relacionados en una forma proporcional pequeña, es decir, $\lambda_4 = \kappa\lambda_3$, donde κ para este caso es 1.5. La función de densidad para esta distribución se puede observar en la siguiente gráfica:



Para la estimación del nivel de significancia se deja la distribución con mediana cero bajo el método que se mencionó anteriormente, y para la estimación de la potencia se varia la mediana θ de manera que tome los siguientes valores: 0σ, 0.2σ, 0.4σ, 0.6σ y 0.8σ 1σ, 1.2σ, 1.4σ, 1.6σ, 1.8σ, y 2σ, donde σ denota la desviación estándar de la distribución, que para este caso es $\sigma = 1.199633$.

Potencias para el caso 4 con N=10

THETA	RWS_1	RSW_5	RSW_10
0	0.006	0.0623	0.1175
0.24	0.047	0.2286	0.3444
0.48	0.171	0.5205	0.6553
0.72	0.391	0.7792	0.872
0.96	0.634	0.9216	0.9635
1.2	0.798	0.9761	0.9899
1.44	0.896	0.9934	0.9986
1.68	0.953	0.9979	0.9994
1.92	0.973	0.9999	1
2.16	0.984	0.9998	1
2.4	0.992	0.9999	1

Potencias para el caso 4 con N=20

THETA	RWS_1	RSW_5	RSW_10
0	0.013	0.0694	0.1379
0.24	0.125	0.3538	0.511
0.48	0.481	0.782	0.8843
0.72	0.838	0.9675	0.9883
0.96	0.974	0.9978	0.9993
1.2	0.997	0.9998	1
1.44	1	1	1

Potencias para el caso 4 con N=50

THETA	RWS_1	RSW_5	RSW_10
0	0.018	0.0892	0.163
0.24	0.396	0.6783	0.7977
0.48	0.937	0.9889	0.9968
0.72	0.999	1	1
0.96	1	1	1

A pesar de que las distribuciones de las muestras generadas tienen un grado de asimetría leve, se siguen presentado sesgos en la prueba puesto que los diferentes niveles de significancia estimados son mayores que el nivel prefijado, es decir se observa que para los tamaños de muestra N=10 y N=20 el nivel de significancia del 5% esta estimado alrededor del 6% y para una muestra de tamaño más grande el error en la estimación es aún mayor. La potencia para estos casos aumenta en forma moderada a medida que se va alejando de H_0 pero no tan rápido cuando el tamaño de muestra es pequeño. Cuando aumenta el tamaño de la muestra, la potencia de la prueba tiende a uno rápidamente presentado los mismos problemas que se mencionaron para el caso 1.

Se concluye que el impacto de la asimetría de la distribución muestreada

en la potencia de la prueba del RSW hace que siendo verdadera la hipótesis nula, la prueba no sea capaz de detectarlo con la información contenida en la muestra. Es decir bajo el supuesto de asimetría de la distribución muestreada la prueba del RSW es una prueba sesgada.

Para averiguar soluciones dadas por otros autores a este problema se consultó literatura pertinente, encontrándose que Wolfe (1974) propuso una posible solución basada en una modificación de la idea de simetría de una distribución que él denomina simetría ponderada la cual se presenta en la sección 2.4; también se encontró un reciente trabajo en Baklizi (2005), él propone una estadística de rangos para la prueba de interés que tiene en cuenta el grado de asimetría de la distribución muestreada. Un resumen de este trabajo se presenta en la sección 2.6.

2.4 Primera solución: Simetría Ponderada, Wolfe (1974)

Wolfe (1974) mostró que la independencia entre $s(X_1), \ldots, s(X_N)$ y el vector de rangos $(R_1, \ldots, R_N)$, se conserva bajo un cierto tipo de asimetría llamada por él, *simetría ponderada* alrededor de una constante c, lo cual resuelve parcialmente el problema. Sus principales resultados se transcriben a continuación:

Sea $s(X - c)$ definida por

$$s(X-c) = \begin{cases} 1 & \text{si } X - c > 0, \\ 0 & \text{si } X - c \leq 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Definición 3. *La distribución de una variable aleatoria X se dice que tiene simetría ponderada alrededor de un punto c si existe un número $\lambda > 0$ tal que*

$$P(X - c > z) = \lambda\, P(X - c < -z) \tag{2.11}$$

para todo $z > 0$. [1]

Antes de considerar la caracterización de la distribución simétrica ponderada se hacen notar los siguientes dos hechos que se mencionan en forma de lemas, los cuales servirán para demostrar el resultado principal de Wolfe que es la independencia entre $s(X-c)$ y $|X-c|$ cuando X tiene distribución simétrica

[1] Si $\lambda = 1$, se dice que la distribución de X es simétrica alrededor de c

ponderada alrededor de c. Recuérdese que ésta es una de las consecuencias de la asimetría sobre la teoría de las estadísticas de rangos mencionadas en la sección 2.2

Lema 1. *Si (2.11) es válido para todo $z > 0$ entonces también se cumple para $z = 0$.*

Demostración.

$$P(X - c > 0) = \lim_{N\to\infty} P(X - c > \tfrac{1}{N}) = \lim_{N\to\infty} \lambda\, P(X - c < -\tfrac{1}{N}) = \lambda\, P(X - c < 0). \quad \square$$

Lema 2. *Si (2.11) es válido para todo $z > 0$ y $P(X < c) > 0$ entonces $\lambda = P(X > c)/P(X < c)$ y (2.11) es equivalente a*

$$F(c + z) + \frac{1 - F(c)}{F(c^-)} F\left[(c - z)^-\right] = 1$$

para todo $z > 0$, donde $F(t^-) = \lim_{h\to 0^+} F(t - h)$.

Demostración. Si (2.11) vale para todo $z > 0$ y $P(X < c) > 0$ entonces por el Lema 1 también vale para $z = 0$ y así se obtiene que

$$\lambda = \frac{P(X > c)}{P(X < c)}. \tag{2.12}$$

Ahora si se reemplaza (2.12) en (2.11) se sigue que la simetría ponderada es equivalente a

$$\begin{aligned} P(X - c > z) &= \frac{P(X > c)}{P(X < c)}\, P(X - c < -z) \\ 1 - P(X \le c + z) &= \frac{1 - P(X \le c)}{P(X < c)}\, P(X < c - z) \\ 1 - F(c + z) &= \frac{1 - F(c)}{F(c^-)} F\left[(c - z)^-\right]. \end{aligned}$$ $\square$

Con lo señalado anteriormente, el siguiente teorema caracteriza la simetría ponderada de la distribución muestral.

Teorema 5. *Sea $s(X - c)$ definida como en (2.10), y sea $X - c$ una variable aleatoria tal que c es una constante y $0 < P(X < c) = P(X \le c) < 1$. Entonces $s(X - c)$ y $|X - c|$ son independientes si y sólo si X tiene distribución simétrica ponderada alrededor de c.*

Demostración. $\Leftarrow$) Se verifica primero que $s(X-c)$ y $|X-c\,|$ son variables aleatorias independientes si X tiene distribución simétrica ponderada alrededor de c.

$$\begin{aligned}
P(s(X-c)=1,|X-c\,|\le z) &= P(s(X-c)=1,-z\le X-c\le z)\\
&= P(0<X-c\le z)\\
&= P(X>c)-P(X>c+z)\\
&= P(X>c)\,[\,P(X\le c+z)+P(X>c+z)\,]-P(X>c+z)\\
&= P(X>c)P(X\le c+z)+P(X>c)P(X>c+z)-P(X>c+z)\\
&= P(X>c)P(X\le c+z)+P(X>c+z)\,[\,P(X>c)-1\,]\\
&= P(X>c)P(X\le c+z)-P(X>c+z)P(X\le c)\\
&\quad \text{por hipótesis y por el Lema 1 se tiene,}\\
&= P(X>c)P(X\le c+z)-P(X>c+z)\,\big[\,\tfrac{1}{\lambda}P(X>c)\,\big]\\
&= P(X>c)[\,P(X\le c+z)-\tfrac{1}{\lambda}P(X>c+z)\,]\\
&= P(X>c)[\,P(X\le c+z)-P(X<c-z)\,]\\
&= P(X-c>0)P(-z\le X-c\le z)\\
&= P(s(X-c)=1)P(|X-c\,|\le z).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Ahora se verifica que si $s(X-c)$ y $|X-c\,|$ son variables aleatorias independientes entonces X tiene distribución simétrica ponderada alrededor de c.

Como por hipótesis $s(X-c)$ y $|X-c\,|$ son variables aleatorias independientes entonces

$$\begin{aligned}
P(s(X-c)=1,|X-c\,|\le z) &= P(s(X-c)=1)\,P(|X-c\,|\le z)\\
P(c<X\le c+z) &= P(X>c)\,P(c-z\le X\le c+z)\\
P(X\le c+z)-P(X\le c) &= \big[1-P(X\le c)\,\big]\big[P(X\le c+z)\\
&\qquad -P(X<c-z)\,\big]\\
F(c+z)-F(c) &= [\,1-F(c)\,]\,\big[F(c+z)-F((c-z)^-)\,\big]\\
F(c) &= F(c+z)-\big[\,1-F(c)\,\big]\,\big[\,F(c+z)\\
&\qquad -F((c-z)^-)\,\big]\\
F((c-z)^-)-F(c)F((c-z)^-) &= F(c)-F(c)F(c+z)\\
F((c-z)^-)\frac{1-F(c)}{F(c)} &= 1-F(c+z)\\
F((c-z)^-)\frac{1-F(c)}{F(c^-)} &= 1-F(c+z).
\end{aligned}$$

puesto que $P(X = c) = 0$. Por lo tanto es válido el resultado (Lema 2) y entonces X tiene distribución simétrica ponderada. □

Se concluye que efectivamente se mantiene la independencia entre $S(X_i)$ y $|X_i|$ con lo cual se sostiene toda la teoría desarrollada para el caso de muestras de distribuciones simétricas, pero todo queda dependiendo de la existencia de un $\lambda > 0$ que garantice que la distribución muestreada sea simétrica ponderada. Wolfe ejemplifica el uso del supuesto de simetría ponderada para pruebas de hipótesis de independencia entre los signos y los rangos de las observaciones; pero no explica cómo sería su uso en pruebas de localización.

2.5 Impacto sobre la potencia de la prueba del RSW bajo simetría ponderada

Como se mencionó anteriormente, todos los resultados de la teoría de pruebas basadas en rangos signados para el problema de localización en una muestra con distribución simétrica, son igualmente válidos en distribuciones que cumplen la condición de simetría ponderada. Por tal motivo es posible utilizar los mismos cálculos que se hicieron en (1.22) y (1.19) para obtener una expresión de la potencia asintótica de la prueba del RSW de manera conveniente.

Sea $F(x - \theta)$ una distribución que cumple la condición de simetría ponderada alrededor de θ. Esto es, existe un $\lambda > 0$ tal que

$$P(X - \theta > x) = \lambda\, P(X - \theta < -x)$$

$$F(x) = 1 - \lambda\, F(-x)$$

Calculando la convolución de las distribuciones de X_1 y X_2, resulta

$$\begin{aligned} F^*(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(-x)\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(1 - F(x))\;dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)\,dx\right). \end{aligned}$$

Utilizando la sustitución $u = F(x)$ se obtiene $du = f(x)\,dx$, así que

$$F^*(0) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \int_0^1 u\,du\right) = \frac{1}{2\lambda}.$$

Por otra parte, bajo el supuesto de simetría ponderada de la distribución F, se sabe que $F(x) = 1 - \lambda F(-x)$ y derivando a ambos lados de la igualdad con respecto a x, resulta que

$$f(x)\,dx = -\lambda\, f(-x)(-1)$$

$$\frac{1}{\lambda} f(x) = f(-x).$$

Entonces al calcular la convolución de las densidades de X_1 y X_2 se sigue

$$\begin{aligned} f^*(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(-x)\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx. \end{aligned}$$

Por consiguiente, sustituyendo las anteriores convoluciones en (1.23) se observa que

$$p_2 \doteq 1 - \frac{1}{2\lambda} + 2\theta\, f^*(0).$$

Ahora con respecto a la varianza, en una vecindad de la hipótesis nula se puede aproximar $Var[W]$ bajo H_1 por $Var[W]$ bajo H_0, y p_1 se aproxima tal como se hizo cuando se estaba bajo el supuesto de la simetría de la distribución muestreada.

Por último, la potencia asintótica de la prueba del RSW bajo distribuciones simétricas ponderadas se puede expresar reemplazando en (1.19) y (1.22), por las anteriores aproximaciones calculadas,

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &\doteq 1 - \Phi\left(Z_\alpha + \frac{\frac{N(N-1)}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda} - 2\theta f^*(0)\right) + N\left(-\theta f(0)\right)}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right) \\ &= 1 - \Phi\left(Z_\alpha + \frac{\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{1-\lambda}{2\lambda} - \frac{2\theta}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx\right) - N\,\theta f(0)}{\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}} \right) \end{aligned}$$

Sin embargo, no se conocen muchas distribuciones para las cuales sea posible encontrar el valor de λ que garantiza que éstas sean simétricas ponderadas. Por lo anterior, el uso de la simetría ponderada resulta muy restringido.

2.6 Segunda solución: Prueba adaptativa, Baklizi (2005)

Sea $X_1, \ldots, X_N$ una muestra aleatoria con distribución continua y mediana única θ. Baklizi (2005) considera el problema de probar

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \theta > 0 \tag{2.13}$$

cuando no se tiene el supuesto de simetría de la distribución muestreada.

Él propone una prueba basada en una modificación de la función de puntajes de la estadística de prueba del RSW, que incluye un parámetro p con información sobre el grado de asimetría de la distribución muestreada. Dicho parámetro es el valor p de una prueba para simetría dada por Randles et al. (1980).

2.6.1 Estadística de la prueba de Baklizi

Sea p que denota el valor-p de una prueba de simetría alrededor de un valor desconocido llamada *Prueba de Ternas* propuesta por Randles et al. (1980) que se presenta en la siguiente sección.

La función de puntajes de la prueba propuesta por Baklizi es:

$$\phi(u) = u^p \quad \text{para } 0 < u < 1. \tag{2.14}$$

La estadística de Baklizi es una estadística de puntajes condicionada al valor-p y se obtiene como se anunció en el caso especial 4 de la sección 1.1, por reemplazo de (2.14) en (1.7) con $u = \frac{R_i}{N+1}$, la cual se representa por la siguiente expresión:

$$\bar{B} = \frac{1}{N(N+1)^p} \sum_{i=1}^{N} {R_i}^p s(X_i). \tag{2.15}$$

El valor de p representa el grado de asimetría de la distribución muestreada. Es decir, valores pequeños de p son evidencia de asimetría en la distribución de los datos. En un caso extremo cuando $p \to 0$ los puntajes de la estadística propuesta tienden hacia los puntajes de la estadística del Signo ($\phi(u) = 1$). Por otra parte, si los datos no presentan suficiente evidencia de asimetría entonces p tenderá a ser grande y cuando se aproxima a 1 los puntajes de la estadística de Baklizi se aproximan a los puntajes de

la estadística de Wilcoxon ($\phi(u) = u$). Baklizi aclara que en lugar de p se puede usar cualquier función monótona creciente $g(p)$ tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, como exponente para R_i en (2.14); sin embargo, aclara que obtuvo los mejores resultados para $g(p) = p$.

La ventaja de esta estadística es que adapta sus puntajes fácil y continuamente, según el grado de asimetría en la distribución muestreada indicada, por la magnitud del valor-p de una prueba de ternas para la hipótesis de simetría.

La distribución condicional exacta de la estadística de prueba puede obtenerse de la misma manera que para la estadística del rango signado de Wilcoxon (Gibbons & Chakraborti 1992, pág 159). Las demostraciones que la función de puntajes de Baklizi esta bien definida, el cálculo de la media y varianza condicional de la estadística y que ésta tiene distribución asintótica normal estándar se hacen en la sección 3.3.

2.6.2 Región Crítica

Para un valor de p, se obtienen los puntajes $a(R_i)$ con $i = 1, \ldots, N$. Sea A_i el conjunto de los vectores de puntajes resultantes de todas las posibles asignaciones de signos $(-)$ y $(+)$ a $|X|_{(i)}$ para $i = 1, \ldots, 2^N$. Entonces las probabilidades de cola superior condicionadas al valor de p se obtienen como

$$\alpha = P(\bar{B} \geq b \,|\, p) = \frac{\#(A_i \,|\, \bar{B} \geq b\,)}{2^N}$$

para cualquier real b.

Sea $h(p)$ la función de densidad de probabilidad del valor-p; con el propósito de obtener el tamaño de la prueba es necesario calcular para todo p, la probabilidad

$$P(\text{rechazar } H_0 \,|\, H_0) = \int_0^1 P(B \geq b_p \,|\, p)\, h(p)\, dp = \int_0^1 \alpha\, h(p)\, dp = \alpha.$$

2.6.3 Prueba de Ternas (Randles 1980)

Sea F una función de distribución acumulativa continua con distribución $F(0) = 1/2$. Sea $X_1 \ldots, X_N$ una muestra aleatoria de una población continua con $F(x - \theta)$ donde θ es la mediana de la población. Se considera el problema de probar la simetría de la distribución alrededor de su mediana

desconocida θ.

Sean i, j, k tres enteros distintos tal que $1 \leq i, j, k \leq N$, la terna (X_i, X_j, X_k) es una terna a la derecha si la observación del medio, se encuentra más cerca a la observación más pequeña que a la más grande (ver figura 2.3).

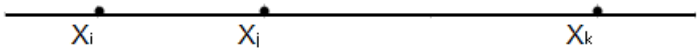


Figura 2.3: Sesgo a la derecha.

La terna (X_i, X_j, X_k) es una terna a la izquierda si la observación del medio, se encuentra más cerca a la observación más grande que a la más pequeña (ver figura 2.4).

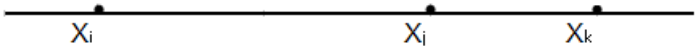


Figura 2.4: Sesgo a la izquierda.

Más específicamente, sea

$$f^*(X_i, X_j, X_k) = \frac{1}{3}\Big[\operatorname{sign}(X_i + X_j - 2X_k) + \operatorname{sign}(X_i + X_k - 2X_j) + \operatorname{sign}(X_j + X_k - 2X_i)\Big]$$

donde $\operatorname{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -1 & \text{si } u < 0 \end{cases}$

Entonces, sin pérdida de generalidad considérese una de las 3! posibles formas como pueden ocurrir las observaciones X_i, X_j y X_k y suponga que $X_i < X_j < X_k$, se obtiene que:

$$\operatorname{sign}(X_i + X_j - 2X_k) = -1, \quad \operatorname{sign}(X_j + X_k - 2X_i) = 1$$

y para el $\operatorname{sign}(X_i + X_k - 2X_j)$ se consideran dos opciones:

- Si hay sesgo a la derecha (figura 2.3) entonces $X_j - X_i < X_k - X_j$ y por esto $\operatorname{sign}(X_i + X_k - 2X_j) = 1$. Así que $f^*(X_i, X_j, X_k) = 1/3$

- Si hay sesgo a la izquierda (figura 2.4) entonces $X_j - X_i > X_k - X_j$ y por esto $\text{sign}(X_i + X_k - 2X_j) = -1$. Ahora $f^*(X_i, X_j, X_k) = -1/3$.

Finalmente, cuando $f^*(X_i, X_j, X_k) = 0$, la terna no es sesgada ni a derecha ni a izquierda y $f^*(X_i, X_j, X_k) = 0$ tiene probabilidad 0 cuando la muestra proviene de una población continua.

La estadística de prueba pertenece a una clase general de estadísticas llamadas estadísticas U y se define así:

$$\hat{\eta} = \binom{N}{3}^{-1} \sum\sum\sum_{1 \le i < j < k < N} f^*(X_i, X_j, X_k),$$

tal que

$$\hat{\eta} = \binom{N}{3}^{-1} \left(\tfrac{1}{3}\right) \Big[(\text{número de ternas a la derecha}) - (\text{número de ternas a la izquierda})\Big].$$

En Hoeffding (1948), se encuentran calculadas la media y la varianza de $\hat{\eta}$:

$$E[\,\hat{\eta}\,] = \eta = P(X_1 + X_2 - 2X_3 > 0) - P(X_1 + X_2 - 2X_3 < 0),$$

$$Var[\,\hat{\eta}\,] = \hat{\sigma}^2 = N\binom{N}{3}^{-1} \sum_{c=1}^{3} \binom{3}{c}\binom{N-3}{3-c}\zeta_c,$$

donde

$$\zeta_c = Var[\,{f_c}^*(X_1, \ldots, X_c)\,]$$

y

$${f_c}^*(x_1, \ldots, x_c) = E[\,f^*(x_1, \ldots, x_c, X_{c+1}, \ldots, X_3)\,].$$

También Hoeffding (1948), demuestra que $\dfrac{\hat{\eta} - \eta}{\sigma/\sqrt{N}}$ tiene distribución asintótica normal estándar.

Si la distribución muestreada es simétrica entonces $X_1 + X_2 - 2X_3$ y $-X_1 - X_2 + 2X_3$ tienen la misma distribución por consiguiente $\eta = 0$. De esta manera, se puede utilizar $\hat{\eta}$ como una estadística para probar las hipótesis,

$$H_0 : \ \eta = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \ \eta \neq 0, \tag{2.16}$$

o posiblemente alternativas a una cola. Vista como una prueba de simetría frente a la asimetría de la distribución muestreada. Aplicando los teoremas

de Lehmann (1951), la prueba resultante es consistente si y sólo si $\eta \neq 0$.

La forma como se definió la función $f^*(\cdot)$ hace que ζ_1, ζ_2 y ζ_3 puedan expresarse en términos de probabilidades y así es posible usar las estadísticas U para estimar estas cantidades de forma consistente. Dado que $\zeta_1 = Var[\, {f_1}^*(X_1)\,]$, con ${f_1}^*(x) = E[\, f^*(x, X_2, X_3)\,]$, entonces

$$\hat{\zeta_1} = \binom{N}{1}^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{f}_1^*(X_i) - \hat{\eta} \right)^2,$$

donde

$$\hat{f}_1^*(X_i) = \binom{N-1}{2}^{-1} \sum_{j<k,\, j\neq i\neq k} \sum f^*(X_i, X_j, X_k),$$

Similarmente, $\zeta_2 = Var[\, {f_2}^*(X_1, X_2)\,]$, con ${f_2}^*(x_1, x_2) = E[\, f^*(x_1, x_2, X_3)\,]$,

entonces

$$\hat{\zeta_2} = \binom{N}{2}^{-1} \sum_{j<k} \sum \left(\hat{f}_2^*(X_j, X_k) - \hat{\eta} \right)^2,$$

donde

$$\hat{f}_2^*(X_j, X_k) = \binom{N-2}{1}^{-1} \sum_{i=1, j\neq i\neq k} f^*(X_i, X_j, X_k),$$

y $\zeta_3 = Var[\, {f_3}^*(X_1, X_2, X_3)\,]$, con ${f_3}^*(x_1, x_2, x_3) = E[\, f^*(x_1, x_2, x_3)\,]$,

entonces

$$\hat{\zeta_3} = \binom{N}{3}^{-1} \sum_{i<j<k} \sum \left(\hat{f}_3^*(X_i, X_j, X_k) - \hat{\eta} \right)^2,$$

donde

$$\hat{f}_3^*(X_i, X_j, X_k) = \binom{N-3}{0}^{-1} f^*(X_i, X_j, X_k)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\hat{\zeta_3} &= \binom{N}{3}^{-1} \sum_{i<j<k} \sum (f^*(X_i, X_j, X_k) - \hat{\eta})^2 \\
&= \binom{N}{3}^{-1} \sum_{i<j<k} \sum {f^*}^2(X_i, X_j, X_k) \\
&\quad - 2\hat{\eta} \binom{N}{3}^{-1} \sum_{i<j<k} \sum f^*(X_i, X_j, X_k) \\
&\quad + \binom{N}{3}^{-1} \binom{N}{3} \hat{\eta}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{N}{3}^{-1}\binom{N}{3}(1/9) - 2\hat{\eta}\hat{\eta} + \hat{\eta}^2 \\
&= 1/9 - \hat{\eta}^2
\end{aligned}
$$

Dado que cada $\hat{\zeta}_i$ es una combinación lineal de estadísticas U se tiene que ellas son estimadores consistentes de sus respectivas $\zeta_i's$.

Para la prueba (2.16) se define la Prueba de Ternas basada en

$$Q = \frac{\hat{\eta}}{\hat{\sigma}/\sqrt{N}}$$

que rechaza la hipótesis de simetría $H_0 : \eta = 0$, si

$$|Q| > Z_{\alpha/2}$$

donde $Z_{\alpha/2}$ es el $\alpha/2-$percentil superior de la distribución normal estándar.

Randles et al. (1980) compara la potencia de la prueba de ternas con otras competidoras por medio de un estudio de Monte Carlo. Entre las competidoras se encuentran: Una prueba que rechaza la hipótesis de simetría si

$$S_1 = \left|\frac{b_1}{\hat{\sigma}_{10}/\sqrt{N}}\right| > Z_{\alpha/2}$$

donde $b_1 = m_3/(m_2)^{\frac{3}{2}}$ tal que m_k es el k-ésimo momento muestral alrededor de la media muestral, y $\hat{\sigma}^2_{10}$ es un estimador consistente de la varianza asintótica de b_1 bajo la hipótesis nula. Otra competidora rechaza la hipótesis nula si

$$S_2 = \left|\frac{b_1}{\hat{\tau}/\sqrt{N}}\right| > Z_{\alpha/2}$$

donde τ es la desviación estándar. Por último, una prueba propuesta por Gupta (1967), que rechaza la hipótesis de simetría si

$$G = \left|\frac{\hat{J} - 1/4}{\hat{\sigma}_{20}/\sqrt{N}}\right| > Z_{\alpha/2}$$

donde $\hat{\sigma}_{20}$ es un estimador de la varianza de J y $\hat{J} = \binom{N}{2}^{-1}\sum_{i<j}\sum \phi(X_i - \hat{\theta}, X_j - \hat{\theta})$, para

$$\phi(X_i - \hat{\theta}, X_j - \hat{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_i < \hat{\theta} < X_j \quad \text{y} \quad \hat{\theta} - X_i < X_j - \hat{\theta} \\ & \text{o} \quad X_j < \hat{\theta} < X_i \quad \text{y} \quad \hat{\theta} - X_j < X_i - \hat{\theta} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $\hat{\theta}$ la mediana muestral. El estudio de simulación realizado por Baklizi (2005) indicó que la prueba de Ternas usando la estimación exacta de la varianza de Q es una herramienta efectiva para detectar distribuciones asimétricas y su rendimiento es considerablemente mejor que cualquiera de las otras pruebas consideradas.

2.6.4 Resultados obtenidos por Baklizi

Baklizi (2005), realizó un estudio de simulación para comparar el tamaño nominal y la potencia de la prueba propuesta por él con otras pruebas de localización como la prueba del Signo (S), la prueba del RSW, la prueba L_1 y la prueba L_2, sugeridos por Lemmer (1993). La primera prueba (L_1) se basa en una estadística de rachas para una prueba de simetría que permite escoger entre la prueba S y la prueba del RSW. La segunda prueba (L_2) se basa en el cálculo de una medida de simetría, utilizándola para escoger la prueba del RSW, si esta medida cae en una región de asimetría o la prueba S en otro caso. Además generó una prueba Bootstrap como otra prueba competidora.

La prueba de Baklizi, la prueba Bootstrap y las pruebas de Lemmer dan un adecuado control en el tamaño de la prueba, es decir, el tamaño de la prueba de Wilcoxon se desvía grandemente del tamaño nominal cuando la distribución muestreada es asimétrica. De hecho, la prueba de Wilcoxon puede utilizarse como una prueba para simetría alrededor de una mediana especifica (Gibbons & Chakraborti 1992, pag 168).

Con respecto a las potencias de las pruebas Baklizi mostró que la prueba Bootstrap es la de peor potencia cuando la distribución muestreada es simétrica y la prueba propuesta por él tiene una potencia muy cercana a la mejor prueba que es la de Wilcoxon. Cuando existe una pequeña desviación en la simetría, Baklizi muestra que su prueba es la más potente, seguida de la prueba L_1 y luego por la prueba Bootstrap. Con una desviación moderada de la simetría, la prueba Bootstrap domina a la prueba L_1 pero no a la prueba propuesta. Cuando la distribución es altamente sesgada todas las pruebas tienen un comportamiento similar en sus potencias, sin embargo la prueba Bootstrap domina ligeramente. En conclusión la prueba de Baklizi resulta ser localmente más potente en una vecindad de la hipótesis nula.

2.7 Comparación de la tolerancia a la aceptación de H_0 de las pruebas presentadas hasta aquí.

Una manera de comparar pruebas cuando existen observaciones extremas en la muestra es, como se dijo en la sección 1.3, por medio de la tolerancia asintótica a la aceptación de la hipótesis nula.

Se presenta en resumen las tolerancias asintóticas a la aceptación de las pruebas: Signo, RSW, RSWW y Baklizi. Las demostraciones se encuentran en el siguiente capítulo.

Pruebas	Tolerancia asintótica a la aceptación
Signo	$\epsilon = \frac{1}{2}$
RSW	$\epsilon = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
RSWW	$\epsilon = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}} & \text{si } \gamma < \frac{1}{3} \\ \frac{1+\gamma}{4} & \text{si } \gamma \geq \frac{1}{3} \end{cases}$
Baklizi	$\epsilon = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}}$

Como se ilustrará, las tolerancias de todas las pruebas que se van a comparar son menores o iguales que $1/2$, que es la tolerancia de la prueba del Signo, prueba que no requiere el supuesto de simetría de la distribución muestreada y mayores o iguales que $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, la cual es la tolerancia de la prueba del RSW, prueba que requiere el supuesto de simetría de la distribución muestreada.

En la gráfica (figura 2.5) se ilustra la tolerancia de la prueba del RSWW, que depende de $\gamma \in (0, 1)$, el número de observaciones recortadas.

Para la prueba del RSWW, a medida que se recortan más observaciones la tolerancia a la aceptación de H_0 aumenta aunque muy lentamente, lo cual hace que se consigan buenas tolerancias sólo cuando se han eliminado muchos datos.

En la gráfica (figura 2.6) se ilustra la tolerancia de la prueba de Baklizi, la cual depende del valor de $p \in [0, 1]$ que representa el grado de asimetría de la distribución muestreada.

Figura 2.5: Tolerancia a la aceptación de la prueba del RSWW

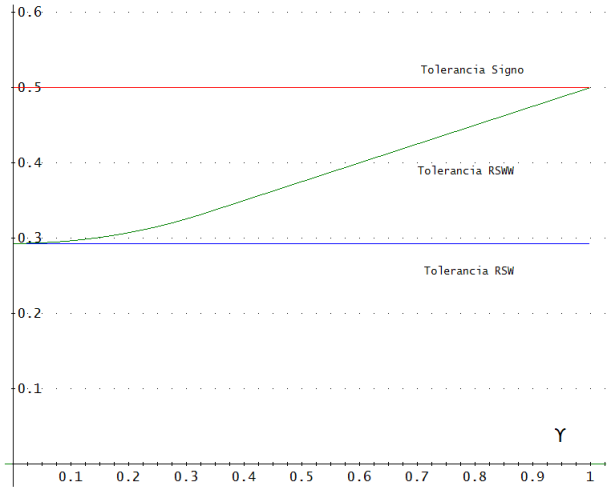
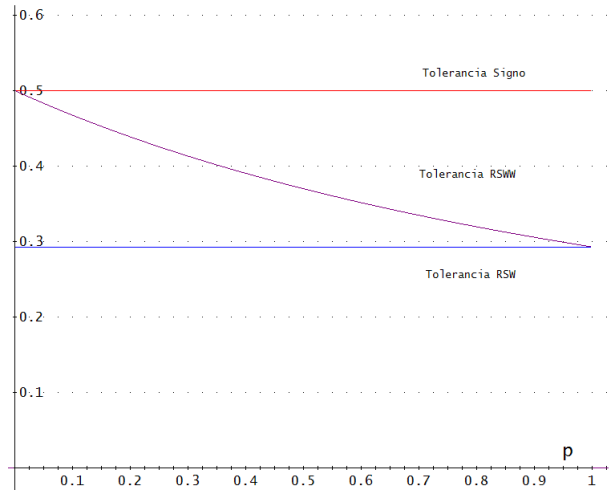


Figura 2.6: Tolerancia a la aceptación de la prueba de Baklizi



Se observa que la prueba es muy tolerante a la aceptación de la hipótesis nula a medida que la distribución muestreada es más asimétrica (es de-

cir, cuando p tiende a 0), puesto que su tolerancia máxima se alcanza en 0.5 cuando $p = 0$; pero pierde tolerancia cuando la distribución se vuelve simétrica (es decir, p tiende a 1), hasta el punto de llegar a la mínima tolerancia que es la tolerancia de la prueba del RSW.

Al comparar las tolerancias de estas pruebas se sigue que: por una parte la estadística de la prueba de RSWW tiene la desventaja que aumenta su tolerancia pero no lo suficiente con pocas observaciones eliminadas (para $\gamma = 0.5$ la tolerancia es menor que 0.4). Por otro lado, la estadística de la prueba de Baklizi es bien tolerante para distribuciones bien asimétricas y disminuye su tolerancia rápidamente como es de esperar para distribuciones con simetría moderada (p alrededor 0.5).

De la comparación se concluye que ni la tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba del RSWW aumenta su tolerancia suficientemente rápido con la proporción de observaciones recortadas, ni la tolerancia de la prueba de Baklizi mantiene su tolerancia con altos niveles de asimetría ($p \in (0, 0.3)$). Esto permite sospechar que una prueba basada en una combinación de las dos estadísticas, es decir, que recorte observaciones y sea sensible a niveles de asimetría puede resultar mejor y es el producto adicional de este trabajo.

Capítulo 3

Solución propuesta: Una prueba basada en una winsorización de la estadística de Baklizi

Como se anunció en el capítulo anterior la propuesta de Wolfe para mitigar el impacto de la asimetría sobre las propiedades de la prueba de rangos para la alternativa de localización sólo resuelve parcialmente el problema, debido a que los resultados quedan dependiendo de la existencia de un $\lambda > 0$, para el cual se puede obtener la simetría ponderada $P(X-c > z) = \lambda P(X-c < -z)$ y por esto queda prácticamente limitada su utilización a distribuciones para las cuales exista dicho λ.

Por otra parte, la prueba de Baklizi es una muy buena solución en la medida en que condiciona los puntajes al nivel de asimetría de la distribución muestreada, a través del valor p obtenido en una prueba sobre la simetría de ésta. Sin embargo, a medida que aumenta el nivel de asimetría de la distribución muestreada la prueba de Baklizi pierde tolerancia a observaciones extremas lo cual aunque es lo esperado, no necesariamente es ventajoso pues depende de la rapidez con que ocurra.

Además, al utilizar la prueba de RSWW para el problema de localización con muestras de distribuciones asimétricas, se puede observar que ésta gana tolerancia con el porcentaje de las observaciones recortadas pero muy lentamente, como se indicó al final de la sección 2.7.

Para optimizar el uso de la información sobre la asimetría que contiene la prueba de Baklizi y la proporción de observaciones recortadas de la prueba del RSWW, se propone aquí una nueva prueba para muestras de distribuciones asimétricas, basada en una estadística que fusiona la estadística de Baklizi y la de Wilcoxon winsorizada. En otras palabras, se hace una modificación y una winsorización de la estadística de Baklizi con el objeto de recortar rangos de observaciones extremas para que la prueba sea más resistente a éstas.

En este capítulo se presenta la forma de la función de puntajes de la estadística propuesta, se demuestra que es una función de puntajes de la forma definida en (1.7), se obtiene su distribución exacta, se calculan su valor esperado y varianza asintóticas, se demuestra que su distribución converge a la distribución normal estándar y se calcula la tolerancia de la prueba propuesta a la aceptación de H_0. También se presentan los mismos resultados para las estadísticas de las pruebas del RSWW y de Baklizi con el objeto de poder compararlas con la prueba propuesta.

3.1 Estadística propuesta y resultados básicos

La estadística propuesta se obtiene utilizando la siguiente función de puntajes:

$$\phi(u) = \min\{u^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\},$$

para $0 < u < 1$ y $0 < \gamma < 1$, función que como se anunció es una forma de winsorizar la estadística de Baklizi. Aquí se utiliza $p/2$ como exponente para garantizar que como se verá más adelante es la única forma para que la estadística propuesta cumpla con la condición de Noether (1.13). Reemplazando esta ϕ en (1.7) se obtiene la estadística propuesta:

$$\bar{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \min\left\{\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\right\} s(X_i). \tag{3.1}$$

Nótese que esta estadística, de manera análoga a como lo hace la estadística de la prueba RSWW, asigna puntajes de la forma $\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}}$ al $(1-\gamma)100\%$ de las observaciones más pequeñas en valor absoluto y $(1-\gamma)$ veces el signo de $(\gamma)100\%$ de las observaciones con valores absolutos grandes.

Ahora para verificar que ϕ está bien definida como función de puntajes, se escribirá de la forma:

$$\phi(u) = \begin{cases} u^{\frac{p}{2}} & \text{si } u \leq (1-\gamma)^{\frac{2}{p}} \\ 1-\gamma & \text{si } u > (1-\gamma)^{\frac{2}{p}} \end{cases}$$

para $0 < u < 1$ y $0 < \gamma < 1$, y se procede como sigue:

i) ϕ es una función no negativa, dado que $0 < u^{\frac{p}{2}} < 1$ y $0 < 1-\gamma < 1$.

ii) Al considerar $0 < p < 1$ se tiene $\frac{1}{2} < 1 - \frac{p}{2} < 1$. Si se supone que $u \leq (1-\gamma)^{\frac{2}{p}}$ entonces

$$\phi'(u) = \frac{p\ u^{\left(\frac{p}{2}-1\right)}}{2} = \frac{p}{2\ u^{\left(1-\frac{p}{2}\right)}} > 0$$

Por lo tanto $\phi^{'}(u) \geq 0$ para todo u. Entonces ϕ es una función no decreciente.

iii) La siguiente condición establece que $\int_0^1 \phi(u)\, du < \infty$. Esto se verifica como sigue:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(u)\, du &= \int_0^1 \min\{u^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\}\, du \\ &= \int_0^{(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}} u^{\frac{p}{2}}\, du + \int_{(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}}^1 (1-\gamma)\, du \\ &= (1-\gamma)\left[1 - \frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right]. \end{aligned}$$

Ahora nótese que

$$0 < \frac{p}{p+2} < \frac{1}{p+2}$$

$$0 < \frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} < \frac{1}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} < \frac{1}{p+2} < 1$$

$$0 < 1 - \frac{1}{p+2}\,(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} < 1 - \frac{p}{p+2}\,(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} < 1,$$

y por lo tanto

$$\int_0^1 \phi(u)\, du < (1-\gamma) < 1.$$

iv) Por último se comprueba que $0 < \int_0^1 \phi^2(u)\,du < \infty$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi^2(u)\,du &= \int_0^1 \min^2\{u^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\}\,du \\ &= \int_0^{(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}} u^p\,du + \int_{(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}}^1 (1-\gamma)^2\,du \\ &= (1-\gamma)^2\left[1 - \frac{p}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right].\end{aligned}$$

Además, puesto que

$$0 < \frac{p}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} < \frac{1}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}$$

$$0 < 1 - \frac{1}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} < 1 - \frac{p}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} < 1$$

$$\begin{aligned}0 < (1-\gamma)^2\left(1 - \frac{1}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right) < \\ (1-\gamma)^2\left(1 - \frac{p}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right) < (1-\gamma)^2 < 1\end{aligned}$$

se obtiene

$$0 < \int_0^1 \phi^2(u)\,du < 1 < \infty. \tag{3.2}$$

Con lo anterior se verifica que la función $\phi(u) = \min\{u^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\}$ efectivamente es una función generadora de puntajes en el sentido de la definición (1.7).

3.1.1 Distribución exacta de la estadística y prueba propuesta

La distribución de M se puede obtener de la siguiente manera:
Se define el conjunto $\Im = \{0,1\}^N$ el cual tiene cardinal $\sharp\Im = 2^N$. Entonces se define la función $M : \Im \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $Z = (Z_1, \ldots, Z_N) \in \Im$, con $Z_i = s(X_i)$:

$$Z \longmapsto M(Z) = \sum_{i=1}^{N} \min\left\{\left(\frac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\right\} Z_i.$$

Si $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$P(M = k) = \frac{\sharp\{Z \in \Im : M(Z) = k\}}{2^N}.$$

Por la construcción de la estadística de prueba se concluye que valores grandes de M reflejan la presencia de observaciones con rangos grandes, y por tanto, la prueba propuesta basada en la estadística M rechaza la $H_0 : \theta = 0$ a favor de $H_1 : \theta > 0$ a un nivel de significancia α cuando $M \geq k$, donde k es tal que

$$P(M \geq k) = \frac{\sharp\{Z \in \Im : M(Z) \geq k\}}{2^N} \leq \alpha.$$

3.1.2 Momentos y distribución asintótica de la estadística propuesta

Los momentos asintóticos de la estadística $\bar{M}$ bajo $H_0 : \theta = 0$, pueden obtenerse aplicando (1.8) y (1.9). Como p es una variable aleatoria, en realidad la media y la varianza asintótica de $\bar{M}$ están condicionadas al valor de p y se calculan respectivamente como sigue:

$$\begin{aligned} E\,[\,\bar{M} \mid p\,] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \min\left\{\left(\tfrac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\right\} s(X_i) \;\middle|\; p\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \min\left\{\left(\tfrac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\right\} E\,[\,s(X_i)\,|\,p\,] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \min\left\{\left(\tfrac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\right\} \frac{1}{N} \\ &\doteq \frac{1}{2}\int_0^1 \min\{u^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\}\, du. \end{aligned}$$

Ahora del Teorema 4 ecuación (1.8) y cuando $N \to \infty$ se obtiene

$$E\,[\,\bar{M} \mid p\,] \doteq \frac{(1-\gamma)}{2}\left[1 - \frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right],$$

$$
\begin{aligned}
N\,Var\,[\,\bar{M}\mid p\,] &= N\,Var\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\min\left\{\left(\tfrac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}},1-\gamma\right\}s(X_i)\;\middle|\;p\right]\\
&= \frac{N}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\min^2\left\{\left(\tfrac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}},1-\gamma\right\}Var\,[\,s(X_i)\,|\,p\,]\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\min^2\left\{\left(\tfrac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}},1-\gamma\right\}\frac{1}{N}\\
&\doteq \frac{1}{4}\int_0^1 \min^2\{u^{\frac{p}{2}},1-\gamma\}\,du.
\end{aligned}
$$

Ahora del Teorema 4 ecuación (1.9) y cuando $N\to\infty$ se obtiene

$$
N\,Var\,[\,\bar{M}\mid p\,]\doteq\frac{(1-\gamma)^2}{4}\left[1-\frac{p}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right].
$$

Como se verificó en i) a iv), ϕ satisface todas las condiciones para ser una función generadora de puntajes. Por tal razón cumple especialmente con la condición de Noether (1.11):

$$
\frac{\max\limits_{1\le i\le N}\phi\left(\frac{i}{N+1}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)}}\xrightarrow{N\to\infty}0
$$

Detalladamente obsérvese que:

$$
\frac{\phi^2\left(\frac{N}{N+1}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)}=\frac{\frac{1}{N+1}\min^2\left\{\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}},1-\gamma\right\}}{\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N}\min^2\left\{\left(\frac{i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}},1-\gamma\right\}}
$$

Cuando $N\to\infty$ el denominador tiende a $0<\int_0^1\min^2\{u^{\frac{p}{2}},1-\gamma\}\,du<1<\infty$ véase la desigualdad (3.2). Por tanto basta ver que el numerador converge a 0. Como $\phi(u)$ es no decreciente, entonces

$$
0\le\tfrac{1}{N+1}\min^2\left\{\left(\tfrac{N}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}},1-\gamma\right\}\le\int_{\frac{N}{N+1}}^{1}\min^2\{u^{\frac{p}{2}},1-\gamma\}\,du \tag{3.3}
$$

Puesto que $0<\int_0^1\min^2\{u^{\frac{p}{2}},1-\gamma\}\,du<\infty$ cuando $N\to\infty$ el lado derecho (3.3) tiende a 0.

Entonces $\bar{M}$ satisface la condición de Nother, por lo tanto del Teorema 4 se concluye que la variable aleatoria:

$$Z = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \min\left\{\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\right\} s(X_i) - \frac{1-\gamma}{2}\left(1 - \frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)}{\frac{1-\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{N}\left(1 - \frac{p}{p+1}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)}}$$

se distribuye asintóticamente como una normal estándar.

3.1.3 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba propuesta

Como se dijo en la sección 1.2, la tolerancia a la aceptación de H_0 es una medida de la capacidad de la prueba para soportar observaciones extrañas provenientes de las colas de distribuciones asimétricas de mediana cero, sin que tenga que rechazar H_0.

Para encontrar la tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 se soluciona la ecuación (1.28) para ϵ, que en este caso toma la forma:

$$\int_0^{1-\epsilon} \min\{u^{\frac{p}{2}}, 1-\gamma\}\, du = \frac{1-\gamma}{2}\left(1 - \frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)$$

Para la solución es necesario considerar dos casos:

i) Cuando $1-\epsilon < (1-\gamma)^{\frac{2}{p}}$, lo cual implica que $\phi(u) = u^{\frac{p}{2}}$ y por tanto basta calcular:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\epsilon} u^{\frac{p}{2}}\, du &= \frac{1-\gamma}{2}\left(1 - \frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right) \\
(1-\epsilon)^{\frac{p+2}{2}} &= \left(\frac{p+2}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\left(1 - \frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right) \\
(1-\epsilon)^{\frac{p+2}{2}} &= \frac{1-\gamma}{4}\left\{p+2-p(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right\} \\
(1-\epsilon)^{\frac{p+2}{2}} &= \frac{1-\gamma}{4}\left\{p\left(1-(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)+2\right\} \\
\epsilon &= 1 - \left[\frac{1-\gamma}{4}\left\{p\left(1-(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)+2\right\}\right]^{\frac{2}{p+2}}.
\end{aligned}$$

Ahora por hipótesis

$$1-\epsilon < (1-\gamma)^{\frac{2}{p}}$$
$$(1-\epsilon)^{\frac{p+2}{2}} < \left((1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p+2}{2}}$$

reemplazando el lado izquierdo de la desigualdad anterior se tiene

$$\frac{1-\gamma}{4}\left\{p\left(1-(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)+2\right\} < (1-\gamma)^{\frac{p+2}{p}}$$
$$p\left(1-(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)+2 < 4\,(1-\gamma)^{\frac{p+2}{p}-1}$$
$$p+2 < p\,(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}+4\,(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}$$
$$\frac{p+2}{p+4} < (1-\gamma)^{\frac{2}{p}}$$
$$\gamma < 1-\left(\frac{p+2}{p+4}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

ii) Cuando $1-\epsilon \geq (1-\gamma)^{\frac{2}{p}}$ se separa la integral así:

$$\int_0^{(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}} u^{\frac{p}{2}}\,du + \int_{(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}}^{1-\epsilon}(1-\gamma)\,du = \frac{1-\gamma}{2}\left(1-\frac{p}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)$$

$$\frac{2}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{p+2}{p}}+(1-\gamma)(1-\epsilon)-(1-\gamma)^{\frac{p+2}{p}} = \frac{1-\gamma}{2}\left(1-\frac{p}{p+2}\,(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)$$

$$(1-\gamma)\left(\frac{2}{p+2}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}-(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}+\frac{p}{2(p+2)}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right) = \frac{(1-\gamma)}{2}-(1-\gamma)(1-\epsilon)$$

$$(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\left(\frac{2}{p+2}-1+\frac{p}{2(p+2)}\right) = \frac{1}{2}-(1-\epsilon)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{p}{2(p+2)}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} = \epsilon.$$

También por hipótesis

$$(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} \leq 1-\epsilon$$

reemplazando por el valor de ϵ

$$(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} \leq 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2(p+2)}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)$$
$$(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} \leq \frac{p+2}{p+4}$$
$$1 - \left(\frac{p+2}{p+4}\right)^{\frac{p}{2}} \leq \gamma$$

Por lo tanto, la tolerancia asintótica a la aceptación de la prueba propuesta es:

$$\epsilon = \begin{cases} 1 - \left[\frac{1-\gamma}{4}\left\{p\left(1-(1-\gamma)^{\frac{2}{p}}\right)+2\right\}\right]^{\frac{2}{p+2}} & \text{si } \gamma < 1 - \left(\frac{p+2}{p+4}\right)^{\frac{p}{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{p}{2(p+2)}(1-\gamma)^{\frac{2}{p}} & \text{si } \gamma \geq 1 - \left(\frac{p+2}{p+4}\right)^{\frac{p}{2}}. \end{cases}$$

Para poder comparar esta tolerancia asintótica con la de las pruebas de Baklizi y el RSWW, se calcularán ahora en las siguientes dos secciones los valores de las tolerancias para estas pruebas sustentando la teoría previa que se requiere para dicho cálculo.

3.2 Estadística de la prueba RSWW

Como se mencionó en el capítulo uno sección 1.1.2, la función de puntajes de la estadística de prueba del RSWW es:

$$\phi(u) = \begin{cases} u & \text{si } u < 1-\gamma \\ 1-\gamma & \text{si } u \geq 1-\gamma \end{cases}$$

En primer lugar se verifica que bajo la definición anterior de ϕ, esta satisface todas las propiedades de una función de puntajes. Esto es:

i) Se observa que ϕ es una función no negativa puesto que $0 < u < 1$ y $0 < 1-\gamma < 1$.

ii) Derivando la función ϕ con respecto a u se encuentra que su derivada $\phi'(u)$ es una función constante no negativa. Es decir,

$$\phi'(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < 1-\gamma \\ 0 & \text{si } u \geq 1-\gamma. \end{cases}$$

De esta manera se puede establecer que $\phi(u)$ es una función no decreciente para todo $0 < u < 1$.

iii) Ahora se demuestra que $\int_0^1 \phi(u)\,du$ converge.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi(u)\,du &= \int_0^1 \min\{u, 1-\gamma\}\,du \\ &= \int_0^{1-\gamma} u\,du + \int_{1-\gamma}^1 (1-\gamma)\,du \\ &= \frac{1-\gamma^2}{2},\end{aligned}$$

como $0 < \gamma < 1$ entonces $0 < 1 - \gamma^2 < 1$, en consecuencia

$$0 < \frac{1-\gamma^2}{2} < \frac{1}{2} < \infty.$$

iv) La siguiente condición indica que $0 < \int_0^1 \phi^2(u)\,du < \infty$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi^2(u)\,du &= \int_0^1 \min^2\{u, 1-\gamma\}\,du \\ &= \int_0^{1-\gamma} u^2\,du + \int_{1-\gamma}^1 (1-\gamma)^2\,du \\ &= \frac{(1-\gamma)^2(1+2\gamma)}{3},\end{aligned}$$

Como $0 < \gamma < 1$, se deduce las siguientes desigualdades:

- $0 < (1-\gamma)^2 < 1$,
- $1 < 1 + 2\gamma < 3$.

De lo anterior puede deducirse que

$$0 < \frac{(1-\gamma)^2}{3} < \frac{(1-\gamma)^2(1+2\gamma)}{3} < (1-\gamma)^2 < 1 < \infty.$$

Con lo cual queda demostrado que la función ϕ es cuadrado integrable.

En consecuencia la estadística de la prueba del RSWW dada en la expresión (1.15), es una estadística generada por la función generadora de puntajes $\phi = \min\{u, 1-\gamma\}$ para $0 < u < 1$ y $0 < \gamma < 1$.

A continuación se presentan algunas propiedades de la estadística de la prueba de RSWW bajo H_0, necesarias para el cálculo de la tolerancia asintótica a aceptación de la hipótesis nula.

3.2.1 Momentos y distribución asintótica de la estadística utilizada en la prueba RSWW

La media y varianza condicional asintótica de la estadística $\bar{T}$ bajo H_0, también se deducen directamente de las fórmulas generales para las estadísticas de puntajes obtenidas en (1.8) y (1.9) como sigue:

La media asintótica,

$$\begin{aligned}
E[\,\bar{T}\,] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\min\left\{\frac{i}{N+1},1-\gamma\right\}s(X_i)\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\min\left\{\frac{i}{N+1},1-\gamma\right\}E\,[\,s(X_i)\,] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\min\left\{\frac{i}{N+1},1-\gamma\right\}\frac{1}{N} \\
\xrightarrow{N\to\infty}\quad &\frac{1}{2}\int_0^1 \min\{u,1-\gamma\}\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{1-\gamma} u\,du + \int_{1-\gamma}^{1}(1-\gamma)\,du\right) \\
&= \frac{1-\gamma^2}{4}.
\end{aligned}$$

La varianza asintótica,

$$\begin{aligned}
NVar[\,\bar{T}\,] &= NVar\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\min\left\{\frac{i}{N+1},1-\gamma\right\}s(X_i)\right] \\
&= \frac{N}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\min^2\left\{\frac{i}{N+1},1-\gamma\right\}Var[s(X_i)] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\min^2\left\{\frac{i}{N+1},1-\gamma\right\}\frac{1}{N} \\
\xrightarrow{N\to\infty}\quad &\frac{1}{4}\int_0^1 \min^2\{u,1-\gamma\}\,du \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^{1-\gamma} u^2\,du + \int_{1-\gamma}^{1}(1-\gamma)^2\,du\right) \\
&= \frac{(1-\gamma)^2(1+2\gamma)}{12}.
\end{aligned}$$

3.2.2 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba del RSWW

La tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba del RSWW se encuentra resolviendo para ϵ la ecuación (1.28), que en este caso toma la forma:

$$\int_0^{1-\epsilon} \min\{u, 1-\gamma\}\, du = \frac{1-\gamma^2}{4}$$

Para la solución es necesario considerar (como se hizó en la tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba propuesta) dos casos:

i) Cuando $1-\epsilon < 1-\gamma$, se tiene que $\phi(u) = u$ y por tanto basta calcular

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\epsilon} u\, du &= \frac{1-\gamma^2}{4}\\ (1-\epsilon)^2 &= \frac{1-\gamma^2}{2}\\ \epsilon &= 1-\sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}}.\end{aligned}$$

ii) Cuando $1-\epsilon \geq 1-\gamma$, se sigue que $\phi(u) = 1-\gamma$, lo cual hace que se separe la integral así:

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\gamma} u\, du + \int_{1-\gamma}^{1-\epsilon} (1-\gamma)\, du &= \frac{1-\gamma^2}{4}\\ \frac{(1-\gamma^2)}{2} + (1-\gamma)(\gamma-\epsilon) &= \frac{1-\gamma^2}{4}\\ \epsilon &= \frac{1+\gamma}{4}.\end{aligned}$$

En el primer caso se indicó que

$$1-\epsilon < 1-\gamma$$

reemplazando el lado izquierdo de la desigualdad por el valor de la tolerancia ϵ, se obtiene

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2}} &< 1-\gamma\\ \gamma &< \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Igualmente, en el segundo caso $\gamma \geq 1/3$. Por lo tanto, la tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba de RSWW es:

$$\epsilon = \begin{cases} 1 - \sqrt{\dfrac{1-\gamma^2}{2}} & \text{si } \gamma < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1+\gamma}{4} & \text{si } \gamma \geq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

3.3 Estadística de Baklizi

En esta sección se verifica que la estadística de la prueba de Baklizi satisface las condiciones de una estadística de puntajes. Se calculan algunas propiedades asintóticas de ella y se culmina con el cálculo de la tolerancia asintótica a la aceptación de la prueba de Baklizi.

Como se indicó anteriormente en (2.15), la estadística de Baklizi tiene función generadora de puntajes de la forma $\phi(u) = u^p$ para $0 < u < 1$ y $0 \leq p \leq 1$. En consecuencia se deducen las siguientes propiedades:

1. $\phi(u)$ es no negativa puesto que $0 < u^p \leq 1$.

2. Ahora por hipótesis $0 < u < 1$ y $-1 \leq p - 1 \leq 0$ lo cual implica que $u^{p-1} \geq 1$. Calculando la deriva de la función $\phi(u)$ se obtiene que $\phi'(u) = p\, u^{p-1} \geq p \geq 0$ para todo $0 < u < 1$. Entonces $\phi(u)$ es no decreciente.

3. Como $0 \leq p \leq 1$, se cumple la siguiente desigualdad $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p+1} \leq 1$. Calculando
$$\int_0^1 \phi(u)\, du = \int_0^1 u^p\, du = \frac{1}{p+1}$$
se puede afirmar que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \phi(u)\, du \leq 1 < \infty$.

4. Además, si $0 \leq p \leq 1$, también se obtiene la desigualdad $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2p+1} \leq 1$. La cual permite concluir que
$$\int_0^1 \phi^2(u)\, du = \int_0^1 (u^p)^2\, du = \frac{1}{2p+1}$$
esta acotada en el intervalo cerrado $[1/3\,, 1]$.

Con lo anterior se verifica que $\bar{B}$ es una estadística generada por la función de puntajes $\phi(u) = u^p$.

3.3.1 Momentos y distribución asintótica de la estadística utilizada para la prueba de Baklizi

Baklizi calcula la media y la varianza exacta de la estadística de prueba. En este trabajo se aporta el cálculo de la media y la varianza asintótica de la estadística $\bar{B}$ bajo H_0 aplicando (1.8) y (1.9) de manera que:
la media asintótica es

$$\begin{aligned} E[\bar{B}\,|\,p\,] &= E\left[\frac{1}{N(N+1)^p}\sum_{i=1}^{N} i^p\, s(X_i)\,\middle|\, p\right] \\ &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{i^p}{(N+1)^p}\, s(X_i)\,\middle|\, p\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi\left(\frac{i}{N+1}\right) E\left[s(X_i)\,|\,p\,\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\phi\left(\frac{i}{N+1}\right)\frac{1}{N} \\ \xrightarrow{N\to\infty} \quad & \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(u)\,du = \frac{1}{2p+2}, \end{aligned}$$

y la varianza asintótica es

$$\begin{aligned} NVar[\bar{B}\,|\,p\,] &= NVar\left[\frac{1}{N(N+1)^p}\sum_{i=1}^{N} i^p\, s(X_i)\,\middle|\, p\right] \\ &= \frac{N}{[N(N+1)^p]^2}\sum_{i=1}^{N}(i^p)^2\, Var[s(X_i)|\,p\,] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N+1}\right)^{2p}\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\phi^2\left(\frac{i}{N+1}\right)\frac{1}{N} \\ \xrightarrow{N\to\infty} \quad & \frac{1}{4}\int_0^1 \phi^2(u)\,du = \frac{1}{8p+4}. \end{aligned}$$

Para establecer la normalidad asintótica se verifica si se cumple la condición de Noether:

$$\frac{\max\limits_{1\leq i\leq N}\left(\frac{i}{N+1}\right)^p}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N+1}\right)^{2p}}} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \tag{3.4}$$

Como se mostró ϕ es una función no negativa y no decreciente entonces ϕ^2 también lo es. Tomando el cuadrado del lado izquierdo de (3.4)

$$\frac{\left(\frac{N}{N+1}\right)^{2p}}{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N+1}\right)^{2p}} = \frac{\frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{2p}}{\frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N+1}\right)^{2p}}$$

Cuando $N \to \infty$ el denominador tiende a $\frac{1}{3} < \int_0^1 \phi^2(u)\,du < 1 < \infty$. Por lo tanto es suficiente ver que el numerador converge a cero. En efecto

$$\frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{2p} \to 0.$$

Entonces la estadística de Baklizi estandarizada,

$$\frac{\bar{B} - \frac{1}{2p+2}}{\frac{1}{\sqrt{(8p+4)N}}}$$

tiene distribución asintótica normal estándar.

3.3.2 Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba de Baklizi

En el artículo de Baklizi no se encuentra hecho un estudio de tolerancia por lo que será un aporte de este trabajo. La tolerancia asintótica a la aceptación de la hipótesis nula de la prueba de Baklizi, ϵ, se encuentra resolviendo la ecuación (1.28) que en este caso toma la forma:

$$\int_0^{1-\epsilon} u^p\,du = \frac{1}{2p+2}$$

Realizando algunos desarrollos algebraicos se llega a

$$(1-\epsilon)^{p+1} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia la tolerancia asintótica a la aceptación de la prueba de Baklizi es

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p+1}} .$$

Capítulo 4

Resultados

Se presentan algunos resultados obtenidos al calcular y comparar la tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba propuesta con sus competidoras para algunos valores de p y γ con el fin de establecer niveles de tolerancia en los que las pruebas competidoras se puedan priorizar.

1. Prueba propuesta *vs*. Prueba del RSWW. Debido a que la tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba propuesta depende de γ y p mientras que la tolerancia de la prueba del RSWW sólo depende de γ, la comparación se hace fijando un valor de γ y calculando la tolerancia de la prueba del RSWW para ese γ y la tolerancia de la prueba propuesta para los distintos valores de p. Los resultados se muestran en la Tabla 1 y se ilustran en la figura 4.1.

   En general se puede afirmar que:

   i) Para cualquier p fijo, la tolerancia asintótica a la aceptación de la prueba propuesta es mayor que la tolerancia de la prueba del RSWW.

   ii) Para p fijo, la tolerancia a la aceptación de H_0 aumenta con el valor de γ en las dos pruebas; es decir cuanto mayor sea el porcentaje de observaciones a las que se asigna $(1-\gamma)s(x)$ en lugar de $\frac{R_i}{N+1}$ o $(\frac{R_i}{N+1})^{p/2}$ más demora la prueba en rechazar la $H_0 : \theta = 0$.

   iii) Cuando p disminuye y γ aumenta, la tolerancia a la aceptación de la prueba propuesta tiende más rápido a $1/2$ que la prueba del RSWW.

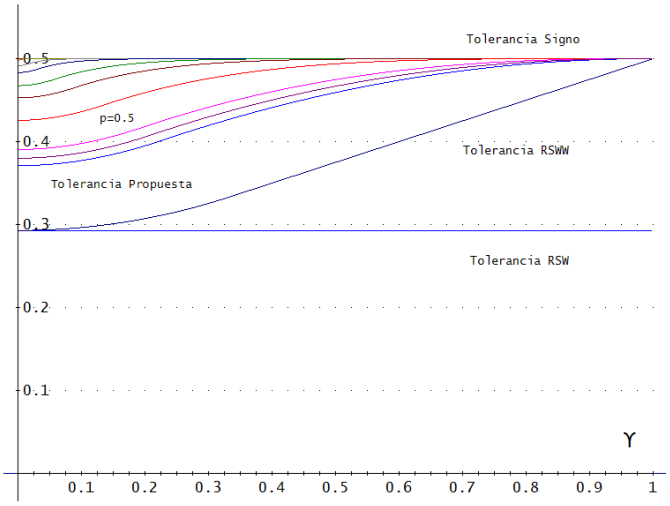
   iv) Para γ por debajo de 0.20, la tolerancia a la aceptación de H_0 de la prueba del RSWW tiende al 31%, mientras que en la prueba

propuesta a medida que p disminuye su tolerancia se acerca al 50%, sin llegar en ningún caso a ser tan pequeña como la del RSWW que apenas llega al 30.72%.

TABLA 1: Tolerancia asintótica a la aceptación H_0 de la prueba propuesta *vs*. la prueba de RSWW

	Prueba del RSWW	Prueba Propuesta								
γ	Tolerancia asintótica a la aceptación ε	Tolerancia asintótica a la aceptación ε								
		p=0,01	p=0,05	p=0,10	p=0,20	p=0,30	p=0,50	p=0,80	p=0,90	p=0,99
0,01	29,29%	49,97%	49,24%	48,37%	46,77%	45,29%	42,58%	39,06%	38,01%	37,11%
0,10	29,64%	50,00%	49,98%	49,71%	48,42%	46,77%	43,61%	39,78%	38,66%	37,72%
0,20	30,72%	50,00%	50,00%	49,97%	49,51%	48,53%	45,90%	41,82%	40,56%	39,49%
0,32	33,01%	50,00%	50,00%	50,00%	49,90%	49,50%	47,86%	44,55%	43,41%	42,40%
0,33	33,25%	50,00%	50,00%	50,00%	49,92%	49,55%	47,98%	44,75%	43,63%	42,63%
0,40	35,00%	50,00%	50,00%	50,00%	49,97%	49,78%	48,70%	46,02%	45,01%	44,10%
0,50	37,50%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	49,94%	49,38%	47,47%	46,67%	45,92%
0,60	40,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	49,99%	49,74%	48,55%	47,97%	47,40%
0,70	42,50%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	49,92%	49,30%	48,93%	48,55%
0,80	45,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	49,98%	49,74%	49,57%	49,36%
0,90	47,50%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	49,95%	49,91%	49,84%
0,99	49,75%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%

Figura 4.1: Representación gráfica de la TABLA 1.



2. Prueba propuesta *vs*. Prueba de Baklizi. Como se menciono anteriormente la tolerancia de la prueba propuesta depende de γ y p, pero la tolerancia de la prueba de Baklizi solo depende de p. Por lo tanto, para compararlas se fija un valor de p para calcular la tolerancia de la prueba de Baklizi y con ese valor se varia γ para calcular la tolerancia de la prueba propuesta. Estos resultados se observan en la Tabla 2.

   Se puede concluir con respecto a la tolerancia de estas dos pruebas que:

   i) Para cualquier p y γ fijo, la tolerancia asintótica a la aceptación de la prueba propuesta es mayor que la de la prueba de Baklizi para cualquier p.

   ii) Para γ fijo, a medida que p disminuye la tolerancia asintótica a la aceptación de las pruebas aumenta.

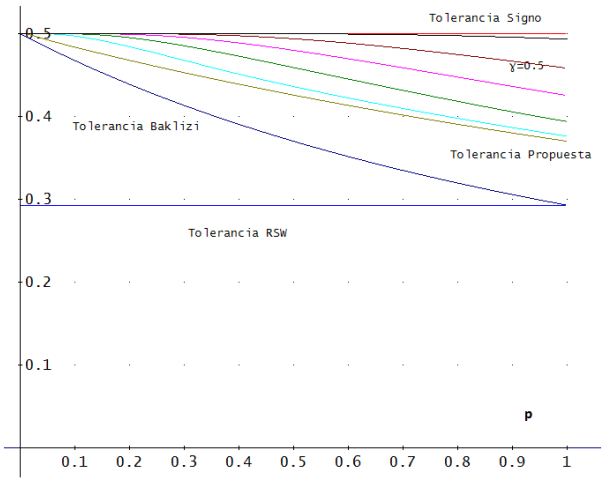
   iii) Cuando p tiende a ser pequeño, la tolerancia asintótica a la aceptación de la prueba de Baklizi tiende a $1/2$ más lentamente que la tolerancia de la prueba propuesta; así mismo cuanto mayor sea γ más rápido llega la tolerancia de la prueba propuesta a $1/2$.

   iv) Cuando p tiende a 1, la tolerancia asintótica a la aceptación de la prueba de Baklizi tiende a la tolerancia de la prueba RSW que es $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, lo cual es de esperar puesto que para p=1 la estadística de Baklizi es exactamente la estadística del RSW.

TABLA 2: Tolerancia asintótica a la aceptación de H_0 de la prueba propuesta *vs*. la prueba de Baklizi.

	Prueba de Baklizi	Prueba Propuesta											
p	Tolerancia asintótica a la aceptación ε	Tolerancia asintótica a la aceptación ε											
		γ=0,01	γ=0,10	γ=0,20	γ=0,32	γ=0,33	γ=0,40	γ=0,50	γ=0,60	γ=0,70	γ=0,80	γ=0,90	γ=0,99
0,01	49,66%	49,97%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
0,05	48,32%	49,24%	49,98%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
0,10	46,75%	48,37%	49,71%	49,97%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
0,20	43,88%	46,77%	48,42%	49,51%	49,90%	49,92%	49,97%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
0,30	41,33%	45,29%	46,77%	48,53%	49,50%	49,55%	49,78%	49,94%	49,99%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
0,50	37,00%	42,58%	43,61%	45,90%	47,86%	47,98%	48,70%	49,38%	49,74%	49,92%	49,98%	50,00%	50,00%
0,80	31,96%	39,06%	39,78%	41,82%	44,55%	44,75%	46,02%	47,47%	48,55%	49,30%	49,74%	49,95%	50,00%
0,90	30,57%	38,01%	38,66%	40,56%	43,41%	43,63%	45,01%	46,67%	47,97%	48,93%	49,57%	49,91%	50,00%
0,99	29,41%	37,11%	37,72%	39,49%	42,40%	42,63%	44,10%	45,92%	47,40%	48,55%	49,36%	49,84%	50,00%

Figura 4.2: Representación gráfica de la TABLA 2.



3. En ningún caso la tolerancia de la prueba propuesta que depende de γ y p es menor que la tolerancia de la prueba del RSW.

De todo lo anterior se puede esperar que aún en condiciones extremas de asimetría que corresponde a valores pequeños de p, la prueba propuesta se mantiene sin rechazar la $H_0 : \theta = 0$.

Capítulo 5

Conclusiones y expectativas de investigación

5.1 Conclusiones

1. La trasgresión del supuesto de simetría de la distribución muestreada, sobre la calidad de la prueba del RSW para la hipótesis $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_0 : \theta > 0$ en muestras de distribuciones simétricas impacta directamente el nivel de significacia de la prueba sesgándola. Esto se pudo observar en las estimaciones obtenidas para el nivel de significancia al muestrear de distribuciones con mediana cero.

2. Al realizar el estudio de la potencia de la prueba de RSW por medio de simulaciones se encontró que el sesgo de la prueba aumenta con el grado de asimetría de la distribución muestreada y con el tamaño de la muestra.

3. La potencia asintótica de la prueba del RSW crece muy rápidamente aún en cercanías de la hipótesis nula, lo cual sería muy bueno si la prueba no fuera sesgada.

4. Entre las pruebas más conocidas se pudo establecer que la prueba del signo es la más tolerante a observaciones extremas, lo cual era de esperar ya que esta prueba no requiere el supuesto de simetría de la distribución muestreada. La menos tolerante por su parte es la prueba del RSW y entre estas dos se encuentra la prueba del RSWW cuyo nivel de tolerancia aumenta, aunque muy lentamente, con el número de observaciones recortadas.

5. La prueba de Baklizi menos conocida en la literatura sobre el tema, aumenta su nivel de tolerancia cuando aumenta el grado de asimetría de la distribución muestreada. Sin embargo, una comparación directa con la prueba del RSWW no es posible en términos de la tolerancia porque cada una de ellas depende de parámetros diferentes.

6. Para la estadística propuesta en este trabajo se logró demostrar importantes propiedades como la media y la varianza asintóticas, y se demostró que su distribución converge asintóticamente a la distribución normal estándar.

7. Para la prueba propuesta se pudo calcular la tolerancia a la aceptación de la hipótesis nula y se comparó con las pruebas mencionadas anteriormente.

8. Para cualquier valor de p, la prueba propuesta supera siempre a la prueba del RSWW alcanzando la tolerancia de la prueba del signo con porcentajes bajos de observaciones recortadas. Aún con bajos grados de asimetría la prueba propuesta mantiene su tolerancia en un mínimo que supera ampliamente al mínimo de la prueba del RSWW.

9. Para cualquier valor de γ, la prueba propuesta resulta más tolerante que la prueba de Baklizi, alcanzando la tolerancia de la prueba del signo mucho más rápidamente que la prueba de Baklizi

5.2 Expectativas de investigación

1. Queda pendiente naturalmente encontrar expresiones exactas o aproximadas para la potencia de la prueba propuesta, o un extenso estudio por métodos de simulación de la potencia o la eficiencia de la prueba propuesta.

2. Como menciona Baklizi (2005) puede ser interesante ensayar otras funciones de p para generar otras pruebas que compitan con la propuesta o aún con la prueba de Baklizi.

Apéndice A

Algunos resultados de Matemáticas

En el apéndice se encuentran los teoremas que se utilizaron como herramienta en algunas demostraciones presentadas en este trabajo. Además se anexa el código que se generó para calcular la potencia asintótica de la prueba del RSW.

A.1 Resultados matemáticos

Teorema A1. Teorema de Límite Central de Lindeberg. Para cada N sean $Z_{1N}, \ldots, Z_{NN}$ variables aleatorias independientes con $E[Z_{iN}] = 0$ y $Var[Z_{iN}] = \sigma_{iN}^2 < \infty$ para $i = 1, \ldots, N$. Sea $B_N^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{iN}^2$. Si para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{B_N^2} \sum_{i=1}^{N} E\left[Z_{iN}^2 I\left(|Z_{iN}| > \epsilon B_N\right)\right] = 0,$$

donde $I(A) = 1$ si A ocurre y 0 en otro caso, entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^N Z_{iN}}{B_N} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1).$$

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en Chung (1968, pág 187). □

Teorema A2. Teorema de Límite Central para estadísticas de puntajes. Suponga $W_1, W_2, \ldots$ variables aleatorias i.i.d con $E[W_i] = 0$ y $Var[W_i] =$

σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$. Se define $S = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} a_i W_i$. Si

$$\frac{\max |\, a_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2}} \to 0, \quad \text{cuando } N \to \infty$$

entonces $\frac{S}{\sqrt{Var[S\,]}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$ con $Var[S\,] = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i^2$.

Demostración. Del Teorema A1, se define $Z_{iN} = \frac{a_i W_i}{\sqrt{N}}$, entonces $E[Z_{iN}] = 0$, $Var[Z_{iN}] = \frac{a_i^2 \sigma^2}{N} < \infty$ y $B_N^2 = \frac{\sigma^2}{N} \sum a_i^2$. Basta con demostrar que se satisface la condición de Lindeberg. Reemplazando en el lado izquierdo de la condición de Lindeberg, Teorema A1, por las variables anteriormente definidas se obtiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sum a_i^2} \sum_{i=1}^{N} E\left[a_i^2 W_i^2 I\left(|W_i| > \epsilon\sigma \frac{\sqrt{\sum a_i^2}}{|a_i|} \right) \right] \\
&\qquad \le \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sum a_i^2} \sum_{i=1}^{N} E\left[a_i^2 W_1^2 I\left(|W_1| > \epsilon\sigma \frac{\sqrt{\sum a_i^2}}{\max |a_i|} \right) \right] \\
&\qquad = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sigma^2} E\left[W_1^2 I\left(|W_1| > \epsilon\sigma \frac{\sqrt{\sum a_i^2}}{\max |a_i|} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

puesto que por hipótesis $\frac{\sqrt{\sum a_i^2}}{\max |a_i|} \to \infty$ cuando $N \to \infty$. Por lo tanto, se satisface la condición de Lindeberg. Entonces $\frac{S}{\sqrt{Var[S\,]}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$. □

Teorema A3. Si $m \le f(x) \le M$ para $a \le x \le b$, entonces

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a).$$

Demostración. Por hipótesis $m \le f(x) \le M$ para $a \le x \le b$, entonces

$$\int_a^b m\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b M\, dx$$

al evaluar las integrales del lado derecho y del lados izquierdo se obtiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Con lo que se concluye el teorema. □

Teorema A4. Sea $h(x,\theta)$ una función absolutamente continua como función de $\theta \in \Omega$, en un intervalo abierto. Suponga $\frac{\partial}{\partial\theta}\,h(x,\theta)$ existe y esta acotada por $q(x)$ para todo $\theta \in \Omega$. Además suponga que $\int \frac{\partial}{\partial\theta}\,h(x,\theta)\,dx$ y $\int q(x)\,dx$ existen. Entonces

$$\frac{d}{d\theta}\int h(x,\theta)\,dx = \int \frac{\partial}{\partial\theta}h(x,\theta)\,dx.$$

Demostración. La demostración de este teorema se puede consultar en Hettmansperger (1984, pág 306). □

A.2 Programa para calcular la desviación estándar de una variable aleatoria con DLG

A continuación se presenta un segmento de código en "R" que permite calcular la desviación estándar de una variable aleatoria con DLG$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dada en la expresión (2.8). Para ello se deben introducir (cambiar) los valores de los parámetros de la DLG cada vez que se ejecute el código:

```
***caso 1****
l1=0 l2=1 l3=0.00007 l4=0.1
***caso 4****
l1=-0.116734 l2=-0.351663 l3=-0.13 l4=-0.195

k=function(x){x^(1+l3-1)*(1-x)^(1+l4-1)}
beta=integral(k,lower=0,upper=1)
beta
B=(1/(1+2*l3))+(1/(1+2*l4))-2*beta
B
A=(1/(1+l3))-(1/(1+l4))
A
var=(B-(A^2))/(l2^2)
var
sigma=sqrt(var)
sigma
```

A.3 Código para simular la potencia asintótica de la prueba de RSW

A continuación se presenta el código en "SAS" que se utilizó para la simulación de la potencia asintótica de la prueba del RSW para diferentes tamaños de muestras obtenidas de distribuciones simétricas y asimétricas seleccionadas de la DLG. Para ello se deben introducir (cambiar) los valores de los parámetros de la DLG cada vez que se ejecute el código:

```
%MACRO POTENCIA(N,NCORR);

proc iml; POT=j(11,4,-99);

lamda1 = 0; lamda2 = 0.197454; lamda3=0.134915; lamda4 = 0.134915;

F=(((0.5)**lamda3 - (0.5)**lamda4)/lamda2);
Med=lamda1+(((0.5)**lamda3 - (0.5)**lamda4)/lamda2); count=0;
EW=(&N.*(&N.+1))/4; VW=(&N.*(&N.+1)*(2*&N.+1))/24; sigma=1;

DO DELTAI=0 TO 2 BY 0.2*sigma;
   L1=deltai-F;

count=count+1;
/*******************************************************
                    Parámetros de DLG
*******************************************************/
   lamda2M1 = 0.197454;
   lamda3M1 = 0.134915;
   lamda4M1 = 0.134915;

R_Wil1=0; R_Wil2=0; R_Wil3=0;

NC=&NCORR; /*Número de corridas*/  n=&N.; /*Tamaño de muestra*/
W=j(NC,1,0); Z=j(NC,1,0); RE_W=j(NC,3,-99); DO SIMU=1 TO NC;
    M11 = j(n,1,0);
    u1 = ranuni(j(n,1,0));

    Do j=1 to n;            /* generacion de los datos */
      M11[j,1] = L1 +
            ((u1[j]**lamda3M1 - (1 - u1[j])**lamda4M1)/lamda2M1);
    end;
   ind=j(N,1,-99);/*Indicadora 1 si la obs es positiva y 0 e.o.c.*/
   Abso=j(N,1,0);
   do i=1 to N;
      if M11[i,1]<0 then ind[i,1]=0;
```

```
      else ind[i,1]=1;
      Abso[i,1]=abs(M11[i,1]);
   end;
   rangos=rank(Abso);        /*Rangos de los valores absolutos*/
   M1=rangos||ind;

/*********************************************************
           Valores de la estadística de Wilcoxon
*********************************************************/
    do j=1 to N;
      W[SIMU]=W[SIMU]+(M1[J,1]*M1[J,2]);
    end;
      Z[SIMU]=(W[SIMU]-EW)/SQRT(VW);

     /************************************************/

     IF Z[SIMU]>2.326348 THEN RE_W[SIMU,1]=1;
     ELSE RE_W[SIMU,1]=0;

     IF Z[SIMU]>1.644854 THEN RE_W[SIMU,2]=1;
     ELSE RE_W[SIMU,2]=0;

     IF Z[SIMU]>1.281552 THEN RE_W[SIMU,3]=1;
     ELSE RE_W[SIMU,3]=0;

     /************************************************/
     IF RE_W[SIMU,1]^=0 THEN R_Wil1=R_Wil1+RE_W[SIMU,1];
     IF RE_W[SIMU,2]^=0 THEN R_Wil2=R_Wil2+RE_W[SIMU,2];
     IF RE_W[SIMU,3]^=0 THEN R_Wil3=R_Wil3+RE_W[SIMU,3];

END; PW1=round(R_Wil1/NC,0.001); PW2=round(R_Wil2/NC,0.001);
PW3=round(R_Wil3/NC,0.001);

 POT[count,1]=deltai; POT[count,2]=PW1; POT[count,3]=PW2;
 POT[count,4]=PW3;
END;

create Potencia&N&NCORR from Pot[colname={theta RWS_1 RSW_5
RSW_10}]; append from pot; QUIT;
%MEND POTENCIA;
%Potencia(10,30000);
```

Bibliografía

Baklizi, A. (2005), 'A Continuously Adaptive Rank Test for Shif in Location', *Australian & New Zealand Journal of Statistics* **47**(2), 203–209.

Chung, K. (1968), *A Course in Probability Theory*, Harcourt, Brace and World, New York.

Gibbons, D. & Chakraborti (1992), *Nonparametric Statistical Inference*, Marcel Dekker, New York.

Gupta, M. (1967), 'An Asymptotically Nonparametric Test of Symmetry', *Annals of Mathematical Statistics* **38**(3), 849–866.

Hajek, J. (1999), *Theory of Rank Test*, 2 edn, Academic Press, New York.

Hettmansperger, T. (1984), *Statistical Inference Based on Ranks*, John Wiley & Sons, New York.

Hoeffding, W. (1948), 'An Class of Statistics with Asymptotically Normal Distribution ', *Annals of Mathematical Statistics* **19**(3), 293–325.

Karian, Z. A. & Dudewics, E. J. (2000), *Fitting Statistical Distributions: the Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods*, Chapman & Hall/CRC, New York.

Lehmann, E. (1951), 'Consistency and Unbiasedness of Certain Nonparametric Test', *Annals of Mathematical Statistics* **22**(2), 165–179.

Lemmer, H. (1993), 'Adaptive Tests for the Median', *IEEE Trans. Reliability* **42**(4), 442–448.

McWilliams, T. P. (1990), 'A Distribution-Free Test for Symmetry Based on a Runs Statistic', *Journal of the American Statistical Association* **85**(412), 1130–1133.

Randles, R., Fligner, M., Policello, G. & Wolfe, D. (1980), 'An Asymptotically Distribution-Free Test for Symmetry Versus Asymmetry', *Journal of the American Statistics Association* **75**(369), 168–172.

Randles, R. & Wolfe, D. (1979), *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, John Wiley & Sons, New York.

Wolfe, D. (1974), 'A Characterization of Population Weighted-Symmetry and Related Results', *Journal of the American Statistics Association* **69**(347), 819–822.