LA CONSTANTE Φ Y SUS IMPLICACIONES EN EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD

Mercedes Gómez Bello

13 de octubre de 2011

LA CONSTANTE Φ Y SUS IMPLICACIONES EN EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD

Mercedes Gómez Bello

Trabajo de Grado
MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.

Director

Profesor Doctor AGUSTÍN MORENO CAÑADAS

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá

LA CONSTANTE Φ Y SUS IMPLICACIONES EN EL ESTUDIO DE LA PROPORCIONALIDAD

Mercedes Gómez Bello

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá

Índice general

RESUMEN **7**

INTRODUCCIÓN **9**

1. Reseña histórica de la proporción áurea **11**
1.1. La sección áurea y el número de oro 11
1.2. El rectángulo áureo 12
1.3. Reseña histórica de la proporción áurea 13

2. Φ en la geometría **22**
2.1. Preliminares 22
2.1.1. Razón 22
2.1.2. Proporción geométrica 22
2.1.3. Sección áurea 23
2.2. Construcción geométrica de la proporción áurea Φ 23
2.2.1. Rectángulo áureo 25
2.2.2. Estrella Pitagórica 27
2.2.3. Espiral de Durero 29

3. Algunas aproximaciones al valor de Φ **30**
3.1. Definiciones 30
3.1.1. Sucesión 30
3.1.2. Sucesión convergente 31
3.1.3. Sucesión acotada 31
3.1.4. Sucesión creciente 32
3.1.5. Sucesión decreciente 32
3.1.6. Sucesión de Cauchy 33
3.2. Algunos teoremas relacionados con Φ 33

3.2.1. Sucesión de Fibonacci 36
3.2.2. Fórmula de Binet 38
3.2.3. Progresión geométrica de Φ 39
3.3. Un problema abierto con Φ 40

4. Φ en la naturaleza, el arte y la arquitectura 42
4.1. Sucesión de Fibonacci y su relación con la naturaleza 42
4.1.1. El problema de los conejos 42
4.1.2. Filotaxia 44
4.1.3. Árbol genealógico de las abejas 45
4.2. La espiral de Durero en algunos organismos vivientes 46
4.3. La proporción áurea en el arte 46
4.3.1. Leonardo Da Vinci 46
4.3.2. Obra de Seurat 47
4.4. Proporción áurea en la cerámica 47
4.5. Análisis áureo del cuerpo humano 48
4.6. La proporción áurea en la arquitectura y la escultura 51
4.6.1. Partenón 51
4.6.2. Coliseo Romano 52
4.6.3. Canon tibetano de Buda 53
4.7. La sección áurea en la música 53

5. Enseñanza de la proporción áurea en la educación básica secundaria y media 55
5.1. Estándares 56
5.2. TIC'S en la educación básica, secundaria y media 61

BIBLIOGRAFÍA 64

ANEXOS 67

ANEXO 1: Filotaxia 67

ANEXO 2: Espirales en la Filotaxia 74

ANEXO 3: Crecimiento de conchas de molusco 78

ANEXO 4: Curvatura de un cuerno 80

ANEXO 5: Programas fuente **82**

Resumen

Palabras claves:

Proporción, constante Φ, segmento áureo, rectángulo áureo, estándares curriculares.

Abstract

In this research project is studied the $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ constant from some aspects of geometry and the mathematical analysis. Indeed, there are shown different contexts in which can be found some behaviors and approaches to the Φ number, also known as "golden ratio" or "golden number".

Resumen

En este trabajo se estudia la constante $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ desde algunos aspectos de la geometría y el análisis matemático. Además se muestran diferentes contextos en los cuales se pueden encontrar comportamientos y aproximaciones al número Φ, también conocido como razón áurea, proporción áurea o número de oro.

En la Geometría, Φ ha estado presente desde la antigüedad. Es así como en los *Elementos* de Euclides se define como *la división de un segmento en media y extrema razón* y a partir de esta relación se puede construir un rectángulo áureo, un triángulo áureo y la espiral de Durero como se mostrará en el Capítulo 2 de este trabajo.

Dentro del análisis matemático se han encontrado varias aproximaciones a la constante Φ, tal es el caso de las sucesiones infinitas $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ y $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$ que convergen a Φ, la sucesión de Fibonacci, la fórmula de Binet y la progresión geométrica de Φ que se estudiarán en el Capítulo 3.

Por otra parte en el capítulo 4 se muestra cómo la proporción áurea está presente en la naturaleza, específicamente en la concha del nautilus pompilius,

la reproducción de conejos y de abejas, el crecimiento y formación de algunas plantas (Filotaxia) y las dimensiones del cuerpo humano. También se identifica a Φ en algunas obras de arte, en cerámica, en arquitectura y en la música.

Por último, con el fin de brindar una herramienta basada en las competencias básicas, en los estándares y lineamientos curriculares en matemáticas y en las TIC'S este trabajo anexa un video como propuesta didáctica para la enseñanza - aprendizaje de la proporción áurea en la educación básica secundaria y media.

Introducción

Cuando se intenta dar significado y mostrar aplicaciones de algún concepto matemático trabajado en la educación básica, en muchas ocasiones se hace necesario un trabajo tanto teórico como práctico, donde las temáticas abordadas no se den de una forma fragmentada e irreconocible para los estudiantes, sino por el contrario reflejen una interrelación con su entorno y hasta con su propio cuerpo, para llegar a la solución de diferentes situaciones problema tanto en su diario vivir como dentro de la matemática misma.

En el trabajo con los Estándares y Lineamientos curriculares se abordan diferentes temáticas de una manera sistemática, algorítmica y muchas veces sin aplicaciones ya sean dentro de la matemática misma como en el entorno del estudiante [28]. Tal es el caso del trabajo con las razones y proporciones, los números irracionales y las construcciones geométricas. Por tanto este proyecto pretende estudiar la constante Φ en su definición geométrica, revisar algunas aproximaciones en el análisis matemático e identificar diferentes fenómenos naturales, obras de arte, de arquitectura y de música en los cuales está presente la proporción áurea, para finalizar con una propuesta didáctica (video) para la educación básica secundaria y media.

La propuesta didáctica pretende fortalecer el trabajo con la proporción áurea y con ella el concepto de razón, proporción, número racional e irracional desde un aspecto numérico, métrico y geométrico con actividades que buscan mostrar una metodología de trabajo distinta que motive y lleve a la apropiación de los conceptos por parte de los estudiantes para que sean capaces de utilizarlos tanto dentro del aula como dentro de su cotidianidad, logrando identificar la constante Φ en diferentes contextos, dando solución a diferentes situaciones problema y ayudando a la comprensión de otros conceptos trabajados en otras áreas del conocimiento.

La constante Φ, también conocida como proporción áurea, proporción sagrada, divina proporción o número de oro ha estado presente desde la antigüedad y se ha estudiado desde diferentes disciplinas acompañada de los conceptos de armonía, belleza y proporción. En el primer Capítulo de este trabajo se muestra una reseña histórica de la proporción áurea, la cual podemos iniciar

en el año 4500 A. C. con la pirámide de Gizeh, pasando por Pitágoras, Euclides, Leonardo de Pisa, Luca Pacioli hasta llegar al siglo XX con artistas como Dalí, Seurat, Severini y finalizar con los textos de Ghyka, Le Corbusier, Huntley entre muchos otros.

En el Capítulo 2 se muestran inicialmente algunas definiciones preliminares de la geometría relacionadas con el concepto de proporción áurea. Luego se realizan algunas construcciones de figuras geométricas como el segmento áureo, rectángulo áureo, estrella pitagórica, triángulo áureo y espiral de Durero.

El Capítulo 3 inicia con la definición de sucesión, sucesión convergente, sucesión acotada, sucesión creciente, sucesión decreciente y sucesión de Cauchy que se utilizan luego en las pruebas de algunos teoremas y proposiciones. Además se muestran algunas relaciones importantes que satisfacen el número Φ y finaliza con un problema abierto.

El Capítulo 4 muestra algunos ejemplos en los que aparece la proporción áurea. Se inicia con la sucesión de Fibonacci en la naturaleza, luego se muestra la ocurrencia de la espiral de Durero en algunos organismos vivientes, posteriormente se realiza un análisis de la proporción de las dimensiones del cuerpo humano, de algunas obras de arte, y de algunas construcciones arquitectónicas para finalizar con un segmento de la obra musical de Bartók.

En el último Capítulo se parte con algunos conceptos, definiciones y relaciones concernientes a la educación básica secundaria y media con el fin de realizar un pequeño recorrido por los Estándares Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) relacionados con la proporción áurea. Además se hace un análisis de la manera en que se abordan y se trabajan conceptos como razón y proporción en algunos textos guía trabajados en el aula.

Los anexos mostrados en este trabajo fueron realizados con el simulador *Wolfram CDF player* basado en el paquete *Mathematica*, de hecho, al final se anexan algunos de los programas fuentes. Las imágenes mostradas corresponden a simulaciones en Filotaxia (Anexo 1), en el crecimiento en forma de espiral en la Filotaxia (Anexo 2), crecimiento de conchas de moluscos (Anexo 3), curvatura de un cuerno (Anexo 4) y los respectivos programas fuente de los anexos anteriores (Anexo 5).

Capítulo 1

Reseña histórica de la proporción áurea

En este capítulo se presentará inicialmente una breve definición de la proporción áurea, el rectángulo áureo y el número de oro, conceptos que serán ampliados en el capítulo 2. Luego se mostrará un recorrido histórico en el cual la proporción áurea Φ ha estado presente.

1.1. La sección áurea y el número de oro

La sección áurea es la división armónica de un segmento en media y extrema razón. Luego si A es el segmento mayor y B el segmento menor se establece la siguiente proporción:

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A}$$

que puede interpretarse como: el segmento menor es al segmento mayor como el segmento mayor es a la totalidad. Esta proporción se conoce como proporción áurea, Figura 1.1. Además si en la proporción áurea A=1, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$B^2 + B - 1 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación es el número irracional

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749894\ldots$$

Se simboliza con la letra griega Φ (Phi) en honor al escultor griego Fidias. En 1509 el monje Fray Luca Paccioli lo denominó **la divina proporción** [16].

1.2. El rectángulo áureo

Un rectángulo áureo se puede construir con el siguiente procedimiento, Figura 1.1:

a. Construya un cuadrado ABEF

b Marque el punto medio G del segmento AB

c. Trace el segmento GE

d. Haciendo centro en G y con radio GE y empezando en E trace con el compás, en el sentido horario, un arco hasta encontrar la prolongación de la recta que pasa por AB. Llame C a este punto.

e. Dibuje el rectángulo que tiene como base el segmento AC y como altura el segmento AF.

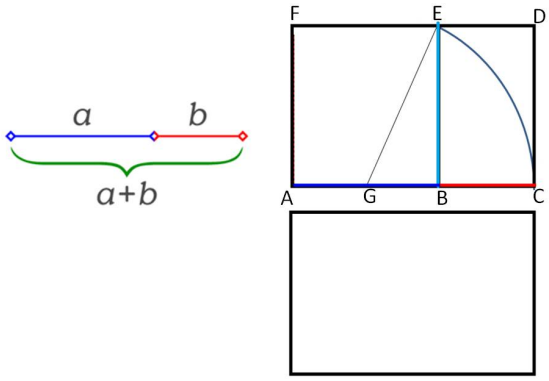


Figura 1.1: Segmento y Rectángulo áureo

Nótese que si el lado del cuadrado ABEF mide 2 unidades, el lado mayor del rectángulo ACDF mide $1+\sqrt{5}$, ya que por el teorema de Pitágoras el segmento GE= $\sqrt{GB^2+BE^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$=GC. Por otro lado,

AC=AG+GC=$1+\sqrt{5}$ y por lo tanto $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$ es la razón entre la longitud de los lados AC y AB del rectángulo.

1.3. Reseña histórica de la proporción áurea

La proporción áurea, también conocida como proporción sagrada o número de oro, ha estado presente desde la antigüedad. Es así como desde el año 4500 A.C. (aproximadamente) los egipcios construyeron la pirámide de Gizeh. Según el historiador griego Herodoto ésta pirámide de base cuadrada fue construida de modo que la medida de la superficie de una cara triángular fuese igual al cuadrado de la altura de la pirámide. En tal caso, se puede inferir que si la medida del lado de la base es 2; entonces, la altura de cualquier cara lateral es Φ y la altura de la pirámide es $\sqrt{\Phi}$, de la siguiente manera: Figura 1.2 [14].

Sea X la altura de la cara triángular y H la altura de la pirámide (como se muestra en la Figura 1.2), entonces se cumplen las siguientes identidades:

$$\frac{2X}{2}=X=H^2 \tag{1.3.1}$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Pitágoras para encontrar la altura de la pirámide se obtiene $H^2=X^2-1^2$. Por (1.3.1) esta igualdad se convierte en la ecuación de segundo grado $X^2-X-1=0$ que tiene como raíz positiva a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$.

En las construcciones realizadas por los griegos también se puede identificar la proporción áurea Φ. Una de las construcciones más sobresalientes es el Partenón mostrado en la Figura 1.3 y estudiado con mayor detalle en el capítulo 4.

El filósofo y matemático griego Pitágoras pensaba que el mundo estaba regido según un orden numérico, donde sólo había espacio para los números racionales positivos. Sin embargo la estrella pentagonal, Figura 1.4, que era el símbolo de los pitagóricos, presenta características que mostraban una aproximación a Φ [1].

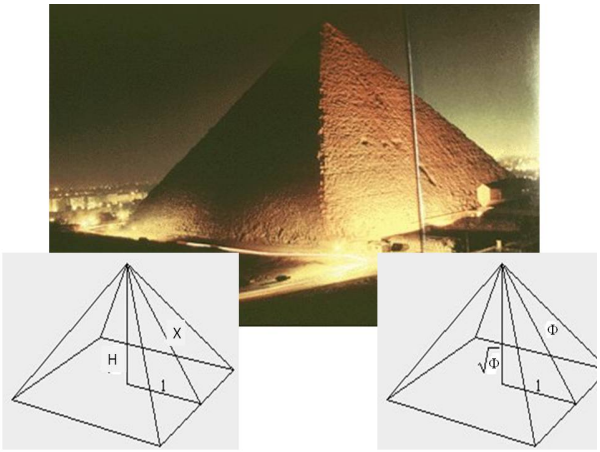


Figura 1.2: Pirámide de Gizeh

Por otra parte en los elementos de Euclides se encontraron algunas de las primeras aproximaciones al número Φ. Euclides trabajó en cuatro libros de sus Elementos lo que se conocía como "división de una recta en media y extrema razón"; Por ejemplo en el libro II y en el libro VI (proposiciones 11 y 30 respectivamente) trabaja la proporción áurea de dos maneras distintas; en el libro IV (proposiciones 10 y 14) aplica la proporción áurea en la construcción de un triángulo isósceles y de un pentágono regular, mientras que en el libro XIII demuestra algunas propiedades de los segmentos y las aplica en la construcción de poliedros en relación con las aristas de los cinco sólidos regulares que se pueden inscribir en una esfera [1].

Luego de Euclides la sección áurea fue abordada por Hipsicles, pero sólo a partir de la traducción por parte de los árabes de los Elementos de Euclides. Φ alcanzó una gran difusión dentro de la comunidad matemática. En la Edad Media, se llegó a considerar la sección áurea como algo de origen divino. Además los artistas de la época del Renacimiento la contemplaban como la encarnación de la lógica divina [6].

En el siglo XII Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, muestra una sucesión de números en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores, llamada "la sucesión de Fibonacci" que está íntimamente relacionada con la serie Φ. Esta es una sucesión infinita de números naturales cuyos dos primeros términos son el número 1 y a partir de ahí cada elemento se obtiene sumando los dos anteriores, para obtener la siguiente sucesión

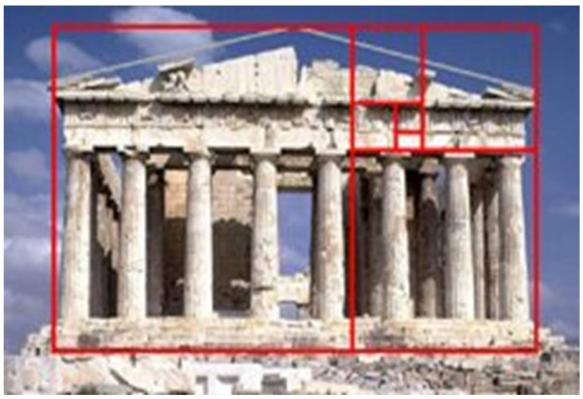


Figura 1.3: Paternón

$$f_n = \{1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad 89, \quad \ldots\};$$

al realizar el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor, el número obtenido se aproxima a Φ como se muestra a continuación

$$\begin{gathered}
1{:}1{=}1 \\
2{:}1{=}2 \\
3{:}2{=}1{,}5 \\
5{:}3{=}1{,}666\ldots \\
8{:}5{=}1{,}6 \\
13{:}8{=}1{,}625 \\
21{:}13{=}1{,}61538\ldots \\
34{:}21{=}1{,}61904\ldots \\
55{:}34{=}1{,}61764\ldots \\
89{:}55{=}1{,}61818\ldots \\
\vdots \\
\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \tfrac{t_n}{t_{n-1}} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.
\end{gathered}$$

Ya en el siglo XVI Luca Pacioli, autor del libro *La divina proporción*, enfatiza diferentes concepciones pitagóricas, místicas y platónicas de la sección áurea,

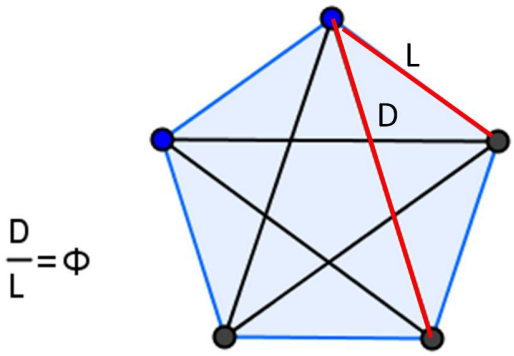


Figura 1.4: Estrella pentagonal

puesto que en el capítulo seis exalta la proporción áurea escribiendo párrafos como:

"Esta nuestra proporción, oh excelso Duque, es tan digna de prerrogativa y excelencia como la que más, con respecto a su infinita potencia, puesto que sin su conocimiento muchísimas cosas muy dignas de admiración, ni en filosofía ni en otra ciencia alguna, podrían venir a luz. Y, ciertamente, esto le es concedido como don por la invariable naturaleza de los principios superiores, según dice nuestro gran filósofo Campano, famosísimo matemático, a propósito de la décima del decimocuarto, máxime cuando se ve que ella hace armonizar sólidos tan diversos, ya por tamaño, ya por multitud de bases, y también por sus figuras y formas, con cierta irracional sinfonía, según se comprenderá de nuestras explicaciones, y presenta los estupendos efectos de una línea dividida según esa proporción, efectos que verdaderamente deben llamarse no naturales sino divinos" [1].

En este párrafo Pacioli hace referencia al libro XIV de los Elementos que actualmente ya no se atribuye a Euclides sino a Hipsicles. Así *La Divina Proporción* trata a la proporción como uno de los temas de mayor interés en el Renacimiento, no sólo en la matemática sino en la mayoría de las ciencias y la concepción del universo. Pacioli enfatiza en la armonía entre las proporciones para hacer un trazado del hombre perfecto que luego, en 1509, plasmaría en dibujos el artista Leonardo da Vinci, uno de los cuales se

ilustró en la caratula del libro que se muestra en la Figura 1.5. La relación Φ está presente en esta obra ya que se encuentra al realizar el cociente entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia del hombre dibujado.

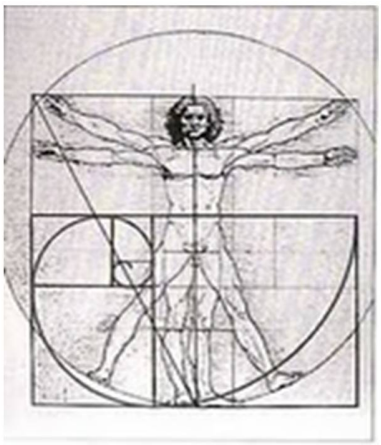


Figura 1.5: Hombre de Vitruvio, Caratula del libro *La divina proporción*

Luego en 1947 Dalí realiza un cuadro llamado *el mito de Leda*, mostrado en la Figura 1.6, en el cuadro se puede identificar la proporción áurea puesto que refleja un análisis geométrico basado en el pentagrama pitagórico [2].

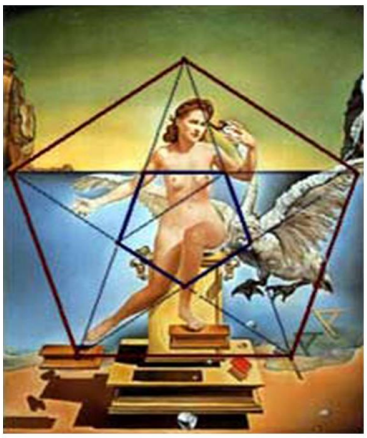


Figura 1.6: Cuadro de Dalí *El mito de Leda*

Entre 1845 y 1914 se editaron en Alemania 12 obras aproximadamente, iniciando con la obra de Zeising hasta la obra de Theodore Cook, en las cuales se destaca la teoría de uno de los fundadores de la psicofísica y representante de la estética experimental Theodor Fechner. En 1876, Fechner realizó varios ensayos en los que aplicó algunos métodos experimentales en la estética; en uno de ellos, le hacía escoger a un grupo de personas el rectángulo de mayor preferencia entre diferentes alternativas, el rectángulo con mayor selección fue aquel en el que sus lados tenían como razón $\frac{34}{21} = 1,619$ que se aproxima a Φ.

Estos ensayos los continuaron Witmar en 1894, Lalo en 1908 y Thorndike en 1917, con resultados muy próximos a los de Fechner [10] quien estudió a Φ en el arte y en la naturaleza.

A finales del siglo XIX el artista francés George Seurat en sus obras utiliza una figura geométrica, llamada composición armónica, dividiendo los laterales de sus cuadros en media y extrema razón creando secciones áureas [2].

A principios del siglo XX, en octubre de 1912, se inauguró en la Galerie La Boétie de París una exposición que llevó el nombre de *La Section d'Or*, en esta exposición se presentaron obras como *Las bellas ciclistas* de Fernand Léger (1881-1955), donde la composición se rige por un círculo en el que inscribe un pentágono pitágorico, figura 1.7.

También se expusieron obras de Gleizes, Metzinger, Lhote, Duchamp, Duchamp-Villon, La Fresnaye, Marcoussis, Archipenko, Laurencin, Picabia Henri Valensi, Kupka, Villon, Gris, etc., aunque no figuraba ninguna de Picasso o de Braque, quienes fueron artistas de gran influencia en el origen del cubismo. Picasso y Braque, crearón un nuevo lenguaje entre el espectador y las obras de arte, basadas en el manejo de diferentes conceptos geométricos como: volumen, formas, perspectiva, movimiento, espacio, color, etc. Allí el espectador tiene que reconstruir la obra de pintura en su mente para poder comprenderla [1].

En octubre de 1919, Archipenko, Gleizes y Survage fundaron una segunda Section d'Or con el fin de dar a conocer las obras de artistas innovadores de cualquier nacionalidad, realizando la primera exposición en marzo de 1920 en la galería La Boétie.

En 1921, Gino Severini publica un libro en París titulado *Du Cubisme au Classicisme*, y subtitulado *Esthétique du compas et du nombre*. En el capítulo

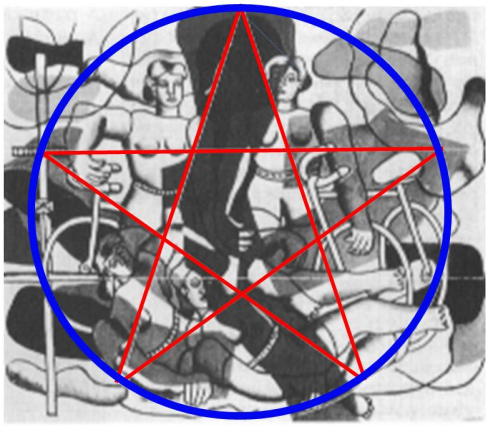


Figura 1.7: Cuadro de Léger *las bellas ciclistas*

III, dedicado a las *proporciones y a su aplicación en el arte*, se detalla la división de una recta en media y extrema razón así como la relación del número de oro con la serie de Fibonacci. El autor considera en este libro que una estética basada en el número es verdadera porque es conforme a las leyes a través de las cuales el espíritu comprende y explica el universo desde Pitágoras y Platón [6].

En la música también se ha visto la presencia de la sección áurea. Un ejemplo está en la obra *Primer cuarteto de cuerdas* de Béla Bartók, en 1908, en la cual se integran movimientos pentatónicos y afinidades. La característica principal de su técnica obedece a las leyes de la Sección de oro en todos sus elementos; por ejemplo, en todas las unidades de la "Sonata para dos pianos y percusión", desde el conjunto de la obra hasta las más pequeñas células, están divididas según la regla de la sección áurea. Así, la sección áurea del primer movimiento indica el centro de gravedad del movimiento: es el inicio de la repetición. Como el movimiento está constituido por 443 compases, y 443 x 0,618 = 274, la repetición empieza precisamente en el compás 274 (cuando la distancia del segmento entero constituye la unidad, la longitud del segmento mayor es 0,618 y la del segmento menor es 0,382). Otras obras de Bartók que permiten el mismo tipo de análisis están el "Castillo de Barbazul" (1911), la "Música para cuerdas, percusión y celesta" (1936) y el "Concierto para Orquesta" (1943) [1]; en el capítulo cuatro de este trabajo se analizará la proporción áurea en algunas obras de Bartók.

En 1927 Matila Ghyka publica en Paris *L'Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts* una obra de síntesis a la que seguirá en 1931, el definitivo *Le Nombre d'Or* una recapitulación tanto histórica como matemática en la que se muestra una relación entre la morfología física y biológica y las formas creadas por el hombre; también compara las estructuras y arquitecturas naturales y las construcciones de diferentes artistas [6].

En la década de los años treinta continua el interés por la proporción áurea con la obra de Charles Funk-Hellet, en la que aplica el número de oro al análisis de la pintura del Renacimiento y la obra del escultor húngaro E. Beothy que muestra La Serie d'Or de una manera matemática, desarrollando un método para ser utilizado en todas las artes plásticas.

En los años cuarenta se destacan tres obras: la de Elisa Maillard [15] que presenta un conjunto de diagramas basados en la sección áurea con los que analiza pinturas de Fra Angelico, Botticelli o Durero, e iglesias bizantinas y romanas; *Le Nombre d'Or* de Don Neroman [19] y la obra de Otto Hagenmaier [9]. Además un importante artículo de Manning Robertson [22] sobre la sección áurea como matriz proporcional en la arquitectura y la pintura.

En 1950 se publica *El Modulor*, con el que Le Corbusier culmina una larga serie de estudios sobre los trazados reguladores y las propiedades de la sección áurea para llegar a *une mésure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique* obra en la que muestra a Φ en la arquitectura [7].

Para los años sesenta se destaca *Les Cahiers du Nombre d'Or* de Elisa Maillard que, aplicando sus diagramas, analiza la obra de Durero, figura 1.8, las iglesias bizantinas, las iglesias de los siglos XII al XV, la obra de Boticelli y el Partenón. En 1963, Charles Bouleau publica *Charpentes, La géométrie secrète des peintres*, en el que estudia desde los frisos del Paternon hasta la distribución de los elementos plásticos de artistas como Mondrian o Villon [7].

En 1970 se publica la obra de Huntley [10] que muestra la belleza matemática de la divina proporción; poco después, en la Sorbona se presenta una tesis doctoral de Nicolae Opritescu [1] sobre el problema de la organización plástica de las imágenes, en una estructura rítmica basada en la sección áurea, en

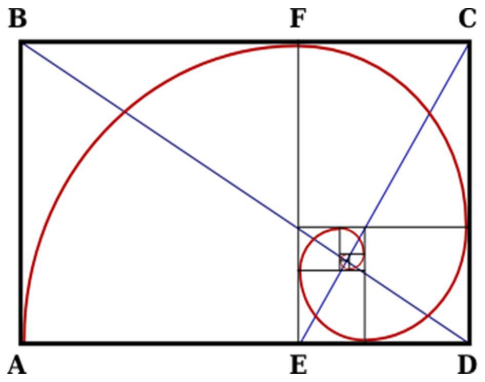


Figura 1.8: Espiral de Durero

las películas de Eisenstein como *Ivan el terrible*; y en 1973 Marius Cleyet-Michaud [4] publica una síntesis de los diferentes aspectos del número de oro.

En 1993 en la obra de Jacques Thomas *La divine proportion et l'art de la géométrie* muestra algunos conceptos de la geometría a partir de la proporción áurea [25]. Dos años después, Huntley publica una nueva versión de su libro *La divina proporción* precedido por un estudio de Marguerite Neveux, historiadora del arte, que muestra al número de oro desde la tradición pitagórica hasta las obras de Seurat y Le Corbusier, con un énfasis en la estética científica alemana y francesa del último tercio del siglo XIX [20].

En 1997, Aldo Scimove publica la obra *La historia cultural de un leitmotiv de la matemática* que trabaja la sección áurea [24].

Capítulo 2

Φ en la geometría

Este capítulo inicia con algunas definiciones preliminares relacionadas con el concepto de proporción áurea. Luego se realizan algunas construcciones de figuras geométricas en las cuales está presente la sección área.

2.1. Preliminares

2.1.1. Razón

Es la comparación cuantitativa entre dos cosas o cantidades que pertenecen a la misma clase o especie, luego si AB y CD son segmentos de recta, la razón notada como $\frac{AB}{CD}$ o $\frac{a}{b}$, si a y b son las longitudes de estos segmentos con la misma unidad de medida, es la medida del segmento AC=a si CB=b es tomado como unidad de medida.

2.1.2. Proporción geométrica

Euclides define una proporción como *la igualdad entre dos razones*. Si se establecen dos razones $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ entre dos magnitudes (objetos comparables o cantidades) A y B por un lado, y las dos magnitudes C y D por el otro, la igualdad de $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (A es a B como C es a D) significa que las cuatro magnitudes A, B, C, D están conectados por una proporción. Si A, B, C, D son los segmentos de líneas rectas con medidas de longitud a, b, c, d, se tiene entre estas medidas la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ la proporción geométrica, llamada **discontinua**, cuando a, b, c, d son diferentes entre sí y la proporción geométrica

continua si dos de estos números son idénticos. La proporción continua típica es por lo tanto $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ o $b^2 = ca$.

$b = \sqrt{ac}$ es conocida como *la media proporcional o geométrica* entre a y c. La proporción geométrica, discontinua o continua, se utiliza con gran frecuencia en la estética, especialmente en la arquitectura [6].

2.1.3. Sección áurea

En la proporción continua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ se puede obtener una simplificación al reducir la cantidad de términos, reducir de tres a dos términos, si se hace $c = a + b$ esta proporción continua se convierte en

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a+b} \quad \text{o} \quad (\frac{b}{a})^2=\frac{b}{a}+1$$

Si $\frac{b}{a} = x$ se obtiene la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$ que tiene como raíz positiva a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, razón conocida como *sección de oro* y simbolizada con la letra griega Φ. Esta proporción, escrita en los elementos de Euclides como *división en media y extrema razón* hace parte de algunos resultados en el análisis que se mostrarán en el capítulo 3 de este trabajo.

2.2. Construcción geométrica de la proporción áurea Φ

En la construcción geométrica de $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se inicia con el segmento de mayor longitud AB para construir un segmento menor BC tal que $\frac{AB}{BC} = \Phi$, Figura 2.1. También se puede hacer el proceso inverso, es decir, iniciando con el segmento AC para colocar el punto B de tal forma que lo divida en dos segmentos: AB y BC cuya razón sea el Φ, Figura 2.2.

La Figura 2.3 muestra otra construcción para ubicar el punto B sobre el segmento AC de tal forma que $\frac{AB}{BC} = \Phi$

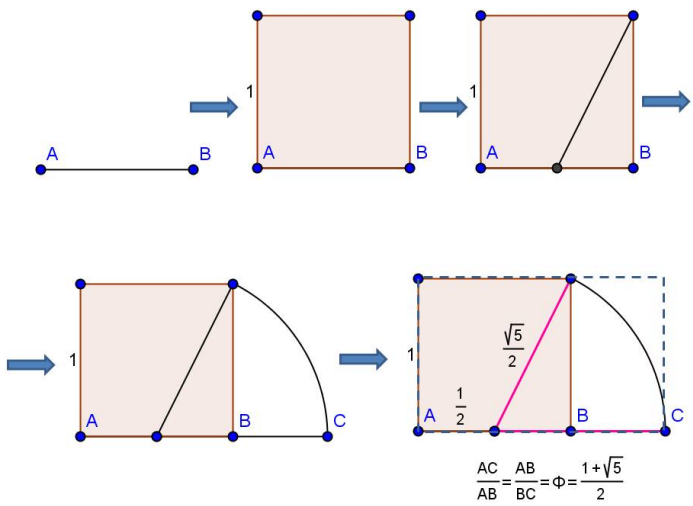


Figura 2.1: Construcción segmento BC tal que $\frac{AB}{BC} = \Phi$

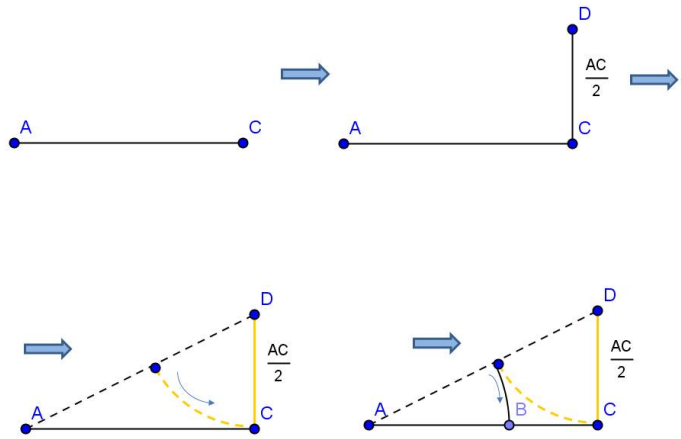


Figura 2.2: Ubicación del punto B sobre el segmento BC tal que $\frac{AB}{BC} = \Phi$

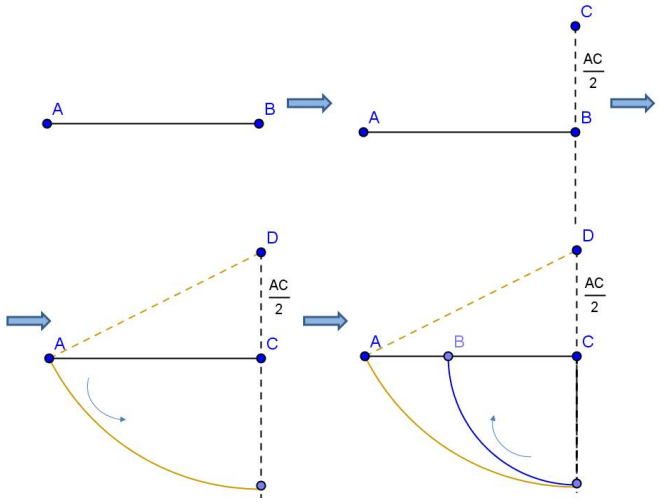


Figura 2.3: Ubicación del punto B sobre el segmento AC tal que $\frac{AC}{AB} = \Phi$

2.2.1. Rectángulo áureo

Es un rectángulo en el que la razón entre el lado de mayor longitud y el de menor longitud es igual a $\Phi = 1,618\ldots$. Una propiedad de este rectángulo es que al construir un cuadrado sobre el lado de menor longitud, el rectángulo BCDE que queda después de la construcción tambien es un rectángulo áureo semejante al inicial como se muestra en la Figura 2.4. Este proceso se puede realizar indefinidamente y los rectángulos formados van a conservar esta propiedad. Además las superficies de los cuadrados y las superficies de los rectángulos forman una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{\Phi^2}$, Figura 2.5.

La Figura 2.6 muestra otro ejemplo en el que esta propiedad se mantiene, allí se muestran tres líneas horizontales que están separadas por intervalos cuya razón es Φ.

Rectángulo $\sqrt{5}$

Si se hace la construcción del rectángulo áureo hacia los dos lados de un cuadrado, el área total del rectángulo es $\sqrt{5}$, es decir, sus lados están en proporción 1 a $\sqrt{5}$ como se muestra en la parte superior de la Figura de 2.7.

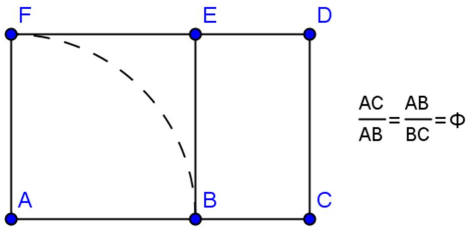


Figura 2.4: Rectángulos áureos ACDF y BCDE

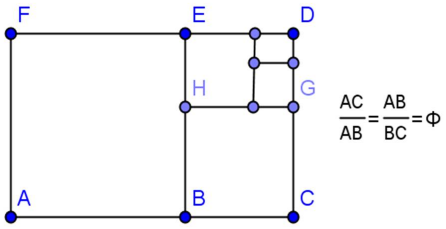


Figura 2.5: Rectángulos áureos

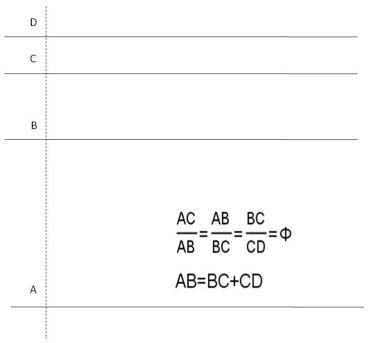


Figura 2.6: Líneas separadas por intervalos con razón igual a Φ

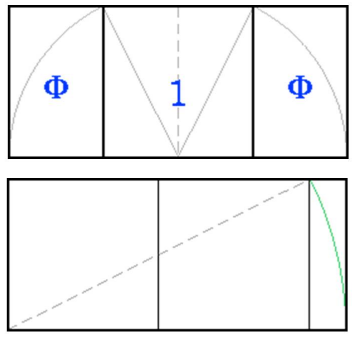


Figura 2.7: Rectángulo $\sqrt{5}$

También se puede construir un rectángulo $\sqrt{5}$ si se coloca un doble cuadrado. Por el Teorema de Pitágoras se comprueba que la medida de su diagonal es $\sqrt{5}$ como se muestra en la parte inferior de la Figura 2.7.

2.2.2. Estrella Pitagórica

Otra de las propiedades geométricas de $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la relación que tiene con el pentágono regular y con la estrella pentagonal o pentagrama, Figura 2.8, puesto que desde la misma construcción del pentágono Φ está presente, como se puede ver en la siguiente ecuación de la medida del lado del pentágono regular p_r

$$p_r = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

En la Figura 2.9, AP es el lado del pentágono regular y AD es el lado del decágono regular. Si el lado de la estrella pentagonal se simboliza con p_s ,d_r el lado del decágono regular, d_s el lado de la estrella decagonal, R el radio del círculo circunscrito se tiene que

$$p_s = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \frac{p_s}{p_r} = \Phi$$

Esto muestra la relación entre la diagonal del pentágono regular, sus lados, Φ y la simetría pentagonal en general. Además $d_r = \frac{R}{\Phi}$ y $d_s = R.\Phi$ en donde se observa que el lado del decágono regular, el radio del círculo circunscrito y el lado de la estrella decagonal forman la progresión de Φ [6].

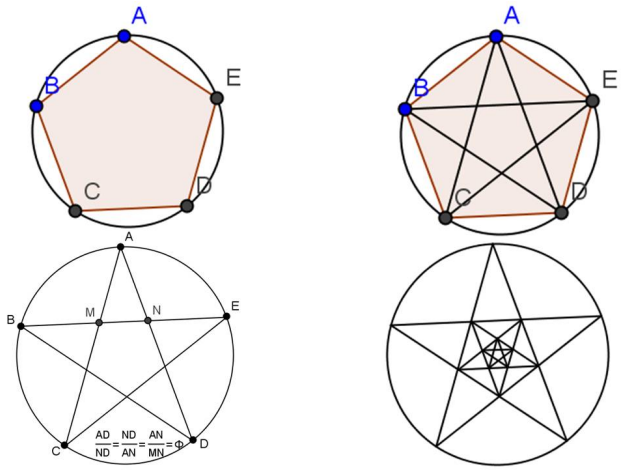


Figura 2.8: Pentágono regular y estrella pitagórica

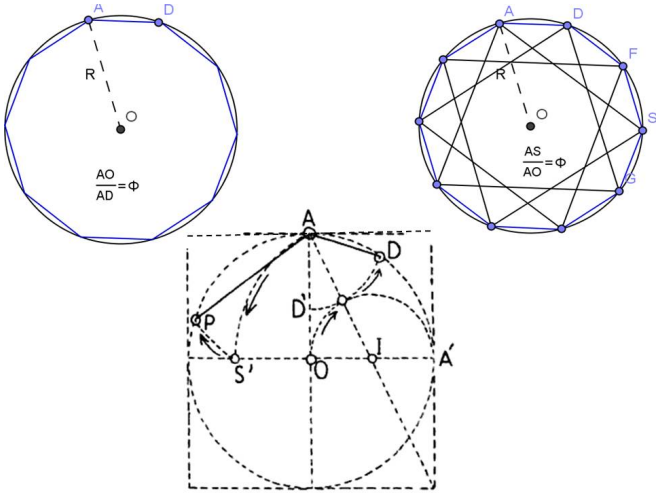


Figura 2.9: Decágono regular, estrella decagonal y Φ

2.2.3. Espiral de Durero

Alberto Durero (1471-1528) pintor renacentista y matemático publica en 1525 una obra titulada *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*. En esta obra se muestra cómo trazar con regla y compás algunas espirales y entre ellas la espiral gnómica basada en el número de oro, o mejor dicho, en los rectángulos áureos que se conoce como la Espiral de Durero.

La espiral de Durero se obtiene a partir de una sucesión de rectángulos áureos encajados al unir mediante un arco de circunferencia dos vértices opuestos de cada uno de los cuadrados, utilizando como centro de la misma otro de los vértices del mismo cuadrado, obteniendo una curva muy similar a una espiral logarítmica, Figura 2.10.

Otra espiral gnómica basada en el número áureo es la que se construye tomando como base un triángulo isósceles que tiene los dos ángulos de la base de 72 grados y dividir en dos uno de los ángulos de la base, se obtiene otro triángulo de oro que es similar al primero. A partir de cada triángulo se construye otro triángulo isósceles siguiendo el mismo procedimiento. La espiral se forma uniendo por medio de un arco de circunferencia exterior, los vértices del lado más pequeño en cada triángulo, Figura 2.10.

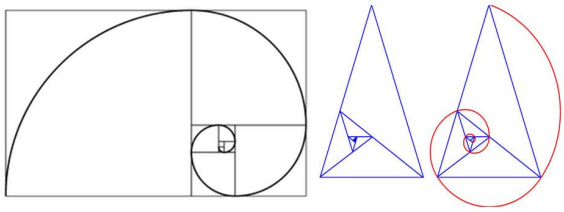


Figura 2.10: Espiral de Durero y triángulos de oro

Capítulo 3

Algunas aproximaciones al valor de Φ

Este capítulo inicia con la definición de sucesión, sucesión convergente, sucesión acotada, sucesión creciente, sucesión decreciente y sucesión de Cauchy que se utilizan luego en las pruebas de algunos teoremas y proposiciones. Además se muestran algunas relaciones importantes que satisfacen el número Φ.

3.1. Definiciones

3.1.1. Sucesión

Una sucesión de números reales es una función del tipo:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto f(n) = a_n$$

en donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Una sucesión también se puede notar como: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nota 3.1. En este trabajo $\mathbb{R}$ es un espacio métrico con la métrica usual del valor absoluto.

3.1.2. Sucesión convergente

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{R}$ converge a un punto $p \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mid p - p_n \mid < \varepsilon$ para cada $n \geq N$.

En el caso que se pueda decir que $\{x_n\}$ converge a p, o que p es el límite de $\{x_n\}$ se puede escribir como:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \quad \text{o} \quad x_n \longrightarrow p \text{ cuando } n \to \infty.$$

Si $\{x_n\}$ no es convergente se dice que es *divergente*.

Proposición 3.2. *Si el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe en $\mathbb{R}$, este es único.*

Demostración. Se supone que p_1 y p_2 son límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N_1$ entonces $\mid p_1 - a_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$, y si $n \geq N_2$ entonces $\mid p_2 - a_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$ por tanto si $n \geq N$ se tiene que:

$\mid p_1 - p_2 \mid \leq \mid p_1 - a_n \mid + \mid a_n - p_2 \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ para todo ε. Entonces $p_1 = p_2$.
$\square$

Ejemplo

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ya que para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Luego si $n > N$ entonces $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\varepsilon}$ y por tanto $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

3.1.3. Sucesión acotada

Sea A un subconjunto de números reales y M un número real positivo. Se dice que A es acotado si existe un M tal que para todo $x \in A$ se verifica que $|x|$ es menor o igual que M. Esto es:

A es acotado $\Longleftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A, |x| \leq M)$.

Proposición 3.3. *Toda sucesión convergente en $\mathbb{R}$ es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\mid p - x_n \mid < \varepsilon$.

Fijando $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $\mid p - x_n \mid < \varepsilon$. Por lo tanto

$$|x_n| = |x_n - p + p| \leq |x_n - p| + |p| < \varepsilon + |p|.$$

Luego si $M_1 = \varepsilon + |p|$, $M_2 = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_0-1}|\}$ y $M = max\{M_1, M_2\}$ entonces $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde se concluye que x_n es acotada. $\square$

3.1.4. Sucesión creciente

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente si y sólo si $x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_n \leq \cdots$, es decir, $x_n \leq x_m$ si $n \leq m$.

3.1.5. Sucesión decreciente

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente si y sólo si $x_1 \geq x_2 \geq \cdots x_n \geq \cdots$, es decir, $x_n \geq x_m$ si $n \leq m$.

Sucesión monótona:

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se dice monótona si y sólo si es creciente o decreciente.

Proposición 3.4. *Toda sucesión monotona y acotada es convergente en* $\mathbb{R}$

Demostración. Inicialmente se supone que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada en $\mathbb{R}$, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existen $L, M \in \mathbb{R}$ tales que $L < a_n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Luego existe $a = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad de aproximación, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_r$.
Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, tenemos que $a - \varepsilon < a_r \leq a_m$ si $m > r$
De otro lado, $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$ (ya que $a = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$).
Así, $\mid a_m - a \mid < \varepsilon$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

3.1.6. Sucesión de Cauchy

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ es de Cauchy si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $\mid a_n - a_m \mid < \varepsilon$.

Que se puede interpretar como la distancia entre los elementos a_n y a_m de la sucesión se hace arbitrariamente pequeña si n y m son lo suficientemente grandes.

Proposición 3.5. *Toda sucesión convergente es de Cauchy*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ es una sucesión convergente hacia a, para cada $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ luego $\mid a - x_n \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ entonces ($n > N$ y $p > N$) y por la desigualdad triangular [13]

$$\mid x_n - x_p \mid \leq \mid x_n - a \mid + \mid a - x_p \mid \to 0. \qquad \square$$

Sin embargo, el enunciado recíproco no siempre es válido y no toda sucesión de Cauchy es convergente: la sucesión de números racionales $\{1, \frac{3}{2}, \frac{17}{2}, \ldots\}$ definida por $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$ para $n \geq 2$ con $x_1 = 1$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no es convergente, pues su límite es el número irracional $\sqrt{2}$.

3.2. Algunos teoremas relacionados con Φ

Esta sección inicia con dos teoremas en los que se prueba que las sucesiones infinitas $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ y $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$ convergen al número Φ. Luego se muestra la sucesión de Fibonacci, la fórmula de Binet, la progresión geométrica de Φ y un problema abierto sobre el comportamiento de las cifras decimales del número Φ.

Teorema 3.6. *Si $\{S_n\}$ es una sucesión de números reales para los que $S_0 = 1$, $S_1 = \sqrt{1+S_0} = \sqrt{2}$, y $S_n = \sqrt{1+S_{n-1}}$ para todo $n > 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \Phi$*

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ es un caso particular de la identidad general publicada por Nathan Altshiller-Court [3].

Demostración. $S_n = \sqrt{1+S_{n-1}}$ es monótona.

Prueba por induccción
i) $S_0 = \sqrt{1} = 1$ y $S_1 = \sqrt{1 + S_0} = \sqrt{2}$ luego $S_1 > S_0$
ii) Se supone que $S_n > S_{n-1}$ y se probará que $S_{n+1} > S_n$. Veamos:
$S_n > S_{n-1}$ por hipotésis de inducción,
$S_n + 1 > S_{n-1} + 1$ adicionando 1,
$\sqrt{S_n + 1} > \sqrt{S_{n-1} + 1}$ sacando raíz cuadrada. Luego
$S_{n+1} > S_n$. Por tanto S_n es acotada.

El número 2 es una cota superior, luego $S_n < 2$.
Prueba por induccción
i) $S_0 = 1 < 2$
ii) Se supone que $S_n < 2$ y se probará que $S_{n+1} < 2$, veamos
$S_n < 2$ por hipótesis de inducción,
$1 + S_n < 3$ adicionando 1,
$\sqrt{1 + S_n} < \sqrt{3}$ sacando raíz cuadrada,
$S_{n+1} < \sqrt{3} < 2$.
Por tanto $S_{n+1} < 2$.

Así por proposición 3.4 $\{S_n\}$ es monótona y acotada por tanto es una sucesión convergente.
Ahora como $\{S_n\}$ es una sucesión convergente, por proposición 3.5 es una sucesión de Cauchy y tiene un límite. Sea L=$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ entonces se tiene que: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sqrt{1 + \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}}$.
Además $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$ (para todo $N \in \mathbb{N}, \mid a_n - a_{n-1} \mid < \varepsilon$). Por lo tanto:
$L = \sqrt{1 + L}$,
$L^2 = 1 + L$,
$L^2 - L - 1 = 0$.
La ecuación $L^2 - L - 1 = 0$ tiene como raíces

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \tag{3.2.1}$$

de donde la raíz positiva $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$. $\square$

Teorema 3.7. *La sucesión* $S_n = [1; 1, 1, 1, \ldots] = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$ *converge a* Φ

Demostración. Si x es un segmento áureo en el cual $x = a + b$, Figura 3.1, se obtiene que $b = x - a$.

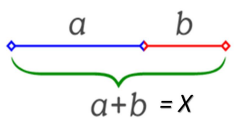


Figura 3.1: Segmento áureo x

Como x es un segmento áureo se tiene que $\frac{b}{a} = \frac{a}{x}$ que es igual a tener $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$, si se reemplaza a b por $x - a$ se obtiene:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{b} \Longrightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{x-a} \Longrightarrow x(x-a) = a^2 \Longrightarrow a^2 + ax - x^2 = 0.$$

Utilizando la ecuación cuadrática se llega a:

$$a = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+4x^2}}{2} = \frac{-x \pm \sqrt{5x^2}}{2} = x\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $a > 0$ se toma solo el valor positivo, es decir,

$$a = x\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \tag{3.2.2}$$

de 3.2.2 se obtiene $\frac{a}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, luego, $\frac{x}{a} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}}$; racionalizando el denominador se llega a

$$\frac{x}{a} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4}.$$

Por tanto

$$\frac{x}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi. \tag{3.2.3}$$

Por otra parte como $x = a+b$ y al dividir por a en ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$\frac{x}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}, \tag{3.2.4}$$

además como x es un segmento áureo $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$ reemplazando a $\frac{a}{b}$ en 3.2.4 se obtiene

$$\frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{x}{a}}. \tag{3.2.5}$$

Utilizando el mismo mecanismo recursivo se obtiene:

$$\tfrac{x}{a} = 1 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{x}{a}}} = 1 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x}{a}}}} = \ldots$$

luego la razón áurea es una fracción continua y como se indica en 3.2.3 esta fracción converge a Φ, luego

$$\tfrac{x}{a} = 1 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Por último como de 3.2.3 se tiene que $\frac{x}{a} = \Phi$ la expresión 3.2.5 queda $\frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{\Phi}$, por consiguiente $\frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{\Phi}$ y al desarrollar esta fracción continua se puede observar que converge a Φ

$$\tfrac{x}{a} = 1 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}} = \Phi. \qquad \square$$

Las siguientes relaciones son consecuencia de los resultados anteriores:

3.2.1. Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci inicia con 1, y cada término siguiente es la suma de los dos anteriores

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad ,\ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

De donde $u_1 = 1, \quad u_2 = 1 \quad$ y para $n \geq 2 \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

El siguiente teorema establece la relación entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Teorema 3.8. *Sean u_n y u_{n+1} términos de la sucesión de Fibonacci, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi.$$

Demostración. Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de Fibonacci y $\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de recurrencia de los cocientes. Entonces si $b_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = L.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n+u_{n-1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{u_{n+1}}{u_n}) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$= 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \frac{1}{L} = L.$$

Luego

$1 + \frac{1}{L} = L$ que equivale a la ecuación $L^2 - L - 1 = 0$ cuya raíz positiva es

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = L. \qquad \square$$

Esta serie ocurre frecuentemente en Botánica, por ejemplo la serie:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{8}{13}, \quad \frac{13}{21}, \quad \frac{21}{34}, \quad \frac{34}{55}, \quad \frac{55}{89}, \quad \frac{89}{144}, \quad \frac{144}{233}, \quad \frac{233}{377}, \quad \ldots$$

aparece continuamente en la distribución de ramas, hojas y semillas. Así, las razones $\frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}$ o $\frac{89}{144}$ aparecen en la intersección de las curvas de un girasol en estado de madurez, la última razón se presenta en los girasoles con mayor variedad. Las razones $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$ aparecen en los conos de las semillas de abetos y la razón $\frac{21}{34}$ en las flores llamadas margaritas. En el capítulo 4 se ampliará la relación entre la sucesión de Fibonacci, Φ y la Botánica.

La relación entre la sucesión de Fibonacci y la serie Φ no solamente esta presente en el crecimiento de las hojas de las plantas sino en el ángulo constante que se forma entre las hojas o ramas y el tronco para obtener la máxima exposición de luz vertical, este ángulo esta dado por

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \qquad \alpha + \beta = 360^\circ$$

se puede ver que β divide a la circunferencia de acuerdo a la sección áurea, es decir $\beta = \frac{360°}{\Phi}$ luego $\beta = 220°$ 29' 32" y $\alpha = \frac{\beta}{\Phi}$ =137° 30' 27" 95. Church llamo a α como el *ángulo ideal*, pues fue él quien descubrió que es el ángulo que proporciona la mejor distribución entre las hojas. La prueba matemática fue dada por Wiesner en 1875 [6].

3.2.2. Fórmula de Binet

Teniendo en cuenta 3.2.1 la expresión $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se puede expresar como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (-1)^{n+1} \frac{\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}}{(-1)^n \cdot \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}.$$

simplificando se obtiene:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}.$$

Si $\beta < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^n = 0$; luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha = \Phi.$$

Ahora en 3.2.1 al realizar la sustracción entre α y β se obtiene que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, para los $(n+1)$ términos de la sucesión de Fibonacci se puede escribir a u_n como:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2.6}$$

La ecuación 3.2.6 se conoce como la *fórmula de Binet* [10].

Escribiendo $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \Phi'$ en 3.2.6 se obtiene:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Phi'^n).$$

3.2.3. Progresión geométrica de Φ

La sucesión de Fibonacci tiene el mismo comportamiento que la proporción geométrica de Φ: $1 \quad \Phi \quad \Phi^2 \quad \Phi^3 \quad \ldots \quad \Phi^n \quad \ldots$, puesto que cada término es la suma de los dos anteriores, veamos:

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398875\ldots$ que se aproxima a 1.618

$\Phi^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = 2{,}61803398875\ldots$

$\frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803398875\ldots$

notese que $\Phi^2 = \Phi + 1$; $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$ y así sucesivamente, de manera general $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$.

Esta misma relación se cumple cuando los exponentes son negativos, es decir,

$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ que se puede escribir como $\Phi^1 = \Phi^0 + \Phi^{-1}$, $\Phi^{-2} = \Phi^{-3} + \Phi^{-4}$ o también $\frac{1}{\Phi^2} = \frac{1}{\Phi^3} + \frac{1}{\Phi^4}$ y así sucesivamente.

Luego esta progresión tiene la propiedad de ser al mismo tiempo aditiva y geométrica, un ejemplo de esta propiedad esta en botánica, en el crecimiento de organismos.

Teorema 3.9. *La serie* $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^n} = \Phi$

Demostración. Como $\frac{1}{\Phi} < 1$ entonces S converge. Luego

$S = \frac{1}{1-\frac{1}{\Phi}} - 1$; por tanto

$S = \frac{\Phi}{\Phi-1} - 1 = \frac{1}{\Phi-1}$ reemplazando a Φ por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se obtiene

$S = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5})} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$ $\square$

3.3. Un problema abierto con Φ

Los estándares de matemáticas, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, estan organizados en cinco formas de pensar matemáticamente [28]. Dentro de ellas se encuentra el pensamiento variacional, el cual incluye los siguientes elementos: procesos de cambio, concepto de variable, estableciemiento de patrones, modelos matemáticos y el álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio. En el capítulo 5 de este trabajo se hace una descripción de cada pensamiento.

El estudio de las cifras decimales de Φ, puede usarse en el aula como una herramienta para la consecución de patrones involucrando las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC'S). De hecho, uno de los problemas más interesantes relacionado con las cifras de Φ tiene que ver con el estudio de su normalidad. Esto es, establecer si en una base específica, las cifras decimales de Φ siguen una distribución uniforme. A continuación se da la definición formal de número normal y algunos ejemplos de este tipo de constantes.

Definición

Sea $b > 1$, $b \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros) y $x \in \mathbb{R}$. Consideremos la sucesión de cifras de x en la base de numeración b. Si s es una sucesión finita de cifras en base b, escribiremos $N(s, n)$ para expresar el número de apariciones de la sucesión s entre los n primeras cifras de x. El número x se considera normal en base b si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(s,n)}{n} = \frac{1}{b^k}$$

para cada sucesión s de longitud k. Es decir, la probabilidad de encontrar la sucesión s entre las dígitos de x es precisamente la esperada si la sucesión de dígitos ha sido producida completamente de forma aleatoria. El número x es un número normal (o un número absolutamente normal) si es normal en cualquier base b [18].

Ejemplos

1. El número de Champernowne: 0,123456789101112131415161 7..., contiene en su desarrollo decimal la concatenación de todos los números naturales ordenados, es normal en base 10, veamos:

Si se denota una secuencia de dígitos como $[a_0, a_1, ...]$, entonces, en base 10, cabría esperar que, en un número normal, la aparición de las secuencias $[0], [1], [2], ..., [9]$ tuviera lugar una vez cada diez, que la de las secuencias $[0, 0], [0, 1], ..., [9, 8], [9, 9]$ se produjeran una vez cada cien, y análogamente cualquier secuencia de n cifras se producirá una vez cada 10^n.

Es precisamente así como se define la constante de Champernowne. Se puede crear análogamente constantes de Champernowne que son normales en otras bases, por ejemplo en base 2 y en base 3 se tiene $C_2 = 0,11011100101110111\ldots$ y $C_3 = 012101112202122\ldots$ respectivamente [12].

2. La constante de Copeland - Erdos: 0.235711131719232931374143..., contiene la concatenación de los números primos en base 10 y es normal en base 10. En 1945 Copeland y Ërdos demostraron que este número es normal en todas las bases.

No se ha podido demostrar la normalidad de Φ, ni la de constantes como: $\sqrt{2}, \pi, e$ y $ln(2)$; aunque se ha llegado a la conjetura que todos ellos lo son. David H. Bailey y Richard E. Crandall conjeturaron en 2001 que "todo número algebraico irracional es normal"; no se conoce ningún contraejemplo pero tampoco se conoce un solo caso de número irracional algebraico que sea normal en alguna base [12].

Nota 3.10. En febrero de de 2008 Alexis Irlande, profesor de la Universidad Nacional de Colombia calculó 17,000,000,000 de decimales del número áureo, utilizando un programa computacional escrito en lenguaje C. Con los 17.000.000.000 se obtuvieron algunas estadísticas para el número de ocurrencias de una o más cifras y estadísticas por tamaño de frecuencia, por ejemplo, para secuencias de tamaño 1, el valor esperado Φ es normal entre los decimales 9355 y 54.520 [11].

Capítulo 4

Φ en la naturaleza, el arte y la arquitectura

En este capítulo se mostrarán algunos ejemplos en los que aparece la proporción áurea. Se inicia con la sucesión de Fibonacci en la naturaleza, luego se muestra la ocurrencia de la espiral de Durero en algunos organismos vivientes, posteriormente se realiza un análisis de la proporción de las dimensiones del cuerpo humano, de algunas obras de arte, y de algunas construcciones arquitectónicas para finalizar con un segmento de la obra musical de Bartók.

4.1. Sucesión de Fibonacci y su relación con la naturaleza

La sucesión de Fibonacci se puede identificar en la disposición de las hojas, la forma y crecimiento de algunas plantas así como en el comportamiento genealógico de algunas especies como se muestra a continuación.

4.1.1. El problema de los conejos

El problema de los conejos se propuso por primera vez en 1202 y fue resuelto por Fibonacci, este problema se centra en la cantidad de parejas de conejos que nacen generación tras generación, es decir, la cantidad de parejas de conejos que habrá en una granja luego de transcurrido un año (12 meses), teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

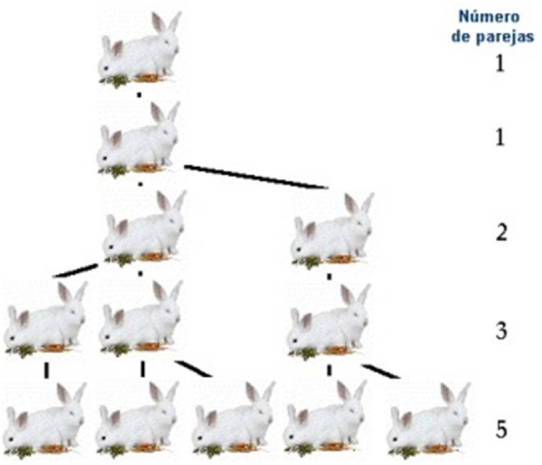


Figura 4.1: Problema de los conejos

1. Los conejos alcanzan la madurez sexual a la edad de un mes, es decir cada pareja al mes tiene una nueva pareja de conejos.

2. El periodo de gestación de los conejos es de un mes.

3. Los conejos no mueren.

4. La hembra siempre da a luz una pareja de conejos de sexos opuestos.

Mes	Número de parejas
enero	1
febrero	1
marzo	2
abril	3
mayo	5
junio	8
juio	13
agosto	21
septiembte	34
octubre	55
noviembre	89
diciembre	144

Nótese que cada mes, el número de parejas es la suma de los números de los 2 meses anteriores, Figura 4.1:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ donde } u_0 = 0, u_1 = 1$$

La sucesión de los números de parejas de conejos es la sucesión de Fibonacci.

4.1.2. Filotaxia

La filotaxia es una rama de la botánica que estudia la disposición de las hojas a lo largo de los tallos. Esta disposición permite que las hojas capten de una manera uniforme la luz y el aire, siguiendo una trayectoria en forma de hélice y de manera ascendente, como se muestra en la Figura 4.2 [17].

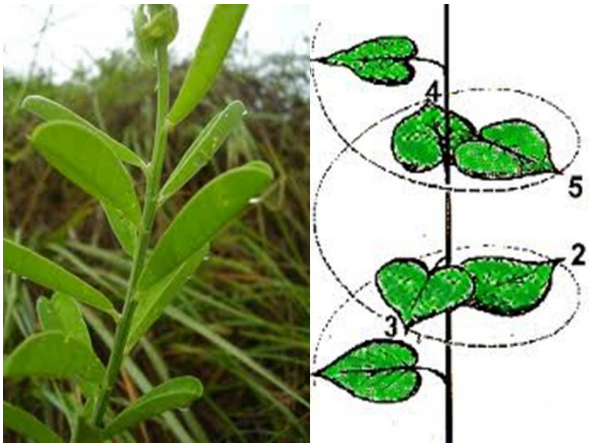


Figura 4.2: Filotaxia

Si se toma la hoja de un tallo y se cuenta el número de hojas consecutivas (n) hasta encontrar otra hoja con la misma orientación este número, por lo general, es un término de la sucesión de Fibonacci. Además si mientras se cuentas las hojas se va girando el tallo, el número de vueltas (m) que se deben dar a dicho tallo para llegar a la siguiente hoja con la misma orientación, también es un término de la sucesión de Fibonacci. La razón $\frac{m}{n}$ contiene tanto en el numerador como en el denominador un término de la sucesión de Fibonacci.

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{8}{13}, \quad \frac{13}{21}, \quad \frac{21}{34}, \quad \frac{34}{55}, \quad \frac{55}{89}, \quad \frac{89}{144}, \quad \frac{144}{233}, \quad \frac{233}{377}, \quad \ldots$$

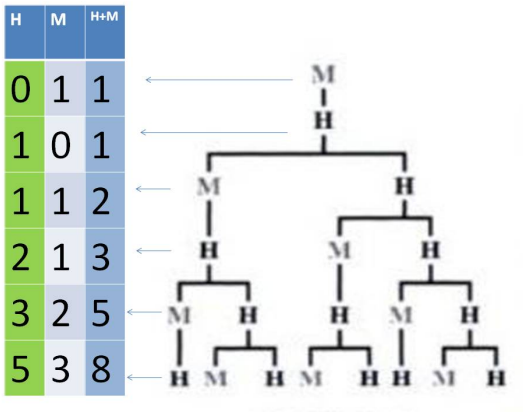


Figura 4.3: árbol genealógico de una abeja macho

Por otra parte, los términos de esta serie de fracciones se encuentran entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, puesto que las hojas sucesivas están separadas entre sí por un mínimo de un tercio de una circunferencia, asegurando la máxima iluminación y el aire para cada base de la hoja, formando ángulos "ideales" entre las hojas o ramas y el tronco como se mencionó en el Capítulo 3.

En casi todo el crecimiento de las plantas los nuevos brotes salen en ángulo de cerca de 137,5° con respecto a la anterior por encima del suelo. Pero entre cada brote, el tallo principal o tronco ha crecido diferentes cantidades. En los anexos 1 y 2 se muestra cómo el ángulo de divergencia afecta la distribución de los pétalos, hojas y flores y el efecto que esto tiene en el crecimiento y formación de especies dentro de la botánica [27].

4.1.3. Árbol genealógico de las abejas

La sucesión de Fibonacci aparece en la tabla genealógica de las abejas de una colmena. La abeja macho, conocida como "zángano" proviene de un huevo que no ha sido fertilizado. Luego una abeja macho tiene un sólo progenitor: la abeja hembra. Por otra parte las abejas hembras conocidas como "reina" o "trabajadora" se incuban de huevos fertilizados. Luego una abeja hembra tiene dos progenitores que son la abeja macho y la abeja hembra. La figura 4.3 muestra el árbol genealógico de varias generaciones de una abeja macho.

En la tabla de la izquierda de la Figura 4.3 se puede observar la sucesión de Fibonacci tanto para de hembras (H), el total de machos (M) como para la

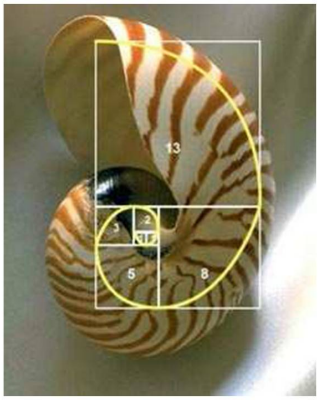


Figura 4.4: Concha del molusco nautilus pompilius

suma de hembras y machos (H+M) generación tras generación.

4.2. La espiral de Durero en algunos organismos vivientes

La estructura espiral de Durero aparece en muchas conchas de moluscos como la del *nautilus pompilius* mostrado en la figura 4.4. Este molusco existe en los mares de Filipinas. Esta forma de espiral de la concha de nautilus pompilius también está presente en algunas construcciones arquitectónicas como el Museo Guggenheim de New York, diseñado por el arquitecto estadounidense Frank Lloyd (1869-1959) [14].
En los anexos 3 y 4 se muestra el crecimiento en forma de espiral de una concha de molusco y de un cuerno, variando la edad y la curvatura respectivamente.

4.3. La proporción áurea en el arte

4.3.1. Leonardo Da Vinci

El artista italiano del Renacimiento Leonardo da Vinci(1452-1519), consideró la proporción áurea en muchas obras, una de ellas *La última cena*, que aún se conserva. En ella el rectángulo $\sqrt{5}$ se centra en el Cristo; además su traza determina otro cuadrado central que está en proporción áurea con las

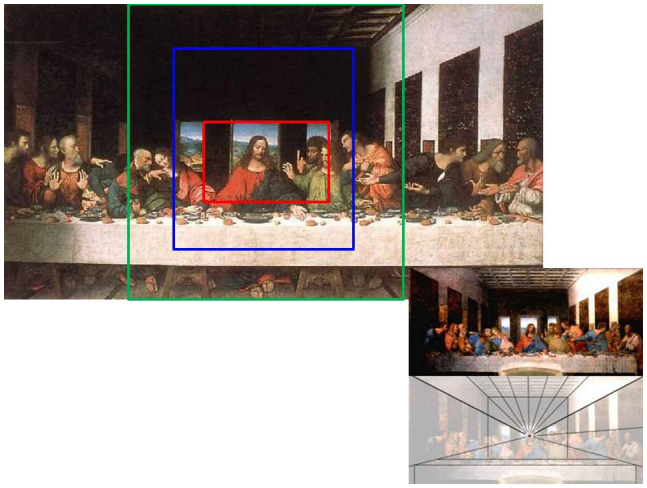


Figura 4.5: La Última Cena - Leonardo da Vinci

longitudes sobrantes a los lados. En el cuadrado central, se inscribe un cuadrado más pequeño donde se pueden encontrar 4 rectángulos áureos y a su vez la figura de Cristo se inscribe en otro rectángulo áureo delimitado por la ventana del fondo como se puede ver en la Figura 4.5.

4.3.2. Obra de Seurat

En la figura 4.6 se muestra la obra *Le Chahut* del artista francés Georges Seurat, iniciador de una corriente artística denominada el "neoimpresionismo", realizada en el último tercio del siglo XIX. En esta obra se considera en primer lugar los dos ejes AB y CD que dividen la tela simétricamente vertical y horizontalmente; a continuación, las divisiones según la sección áurea: EF, GH, IJ y KL; las líneas de los rectángulos secundarios ST, UV, MN, OP. Finalmente, las diagonales GJ, AL, 1L, CH, que dan las inclinaciones de las cabezas de los bailarines, del movimiento de las piernas, y la dirección del mástil del contrabajo [1].

4.4. Proporción áurea en la cerámica

La obra de cerámica mostrada en la Figura 4.7 es una crátera de la cultura cretense de finales de la edad de Bronce. Esta crátera cretense se puede

Figura 4.6: Obra de Seurat: Le Chahut

inscribir en dos conjuntos de rectángulos áureos que rotan conjuntamente al rededor del eje longitudinal de la vasija.

Los rectángulos áureos más pequeños contienen los hombros, la cabeza y las asas. Mientras que los rectángulos áureos con mayor área contienen la parte más voluminosa. Por otra parte, la razón entre el ancho de la abertura (A) y la altura total (B) es el número Φ [5].

4.5. Análisis áureo del cuerpo humano

El hombre de Vitruvio de Leonardo Da Vinci mostrado en la Figura 1.5 recoge algunas ideas claves del pensamiento renacentista. En esta figura aparece un hombre inscrito en un cuadrado y en un círculo, e intenta mostrar las proporciones áureas que hay en un cuerpo humano.

La Figura 4.8 muestra alguna de las proporciones del cuerpo humano, en esta figura se puede observar la razón áurea de la siguiente manera:

1. h es la altura total y a es la altura del ombligo, medida desde la planta de los pies, o también la longitud desde la parte más alta de la cabeza hasta la punta de los dedos de las manos, medida con los brazos estirados y pegados al cuerpo.

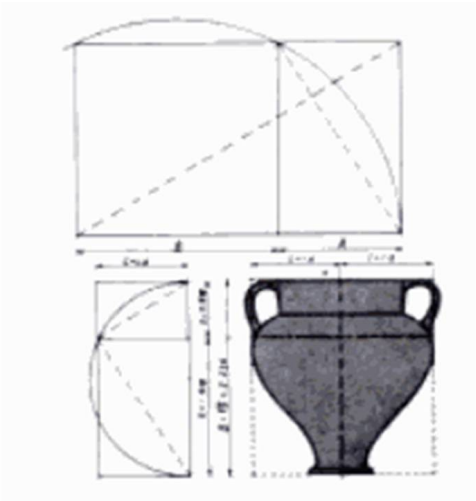


Figura 4.7: Vasija cretense

2. b es la distancia desde la parte superior de la cabeza al codo, y b es la sección áurea de a.

3. c es la longitud desde el codo hasta la punta de los dedos, y también el ancho de hombros. d, que es la sección áurea de c, es la longitud desde el codo hasta el comienzo de la mano en la muñeca, y también el ancho de la cintura.

4. e es la distancia entre el ombligo y la rodilla, y su sección áurea f , es la distancia desde la rodilla a la planta de los pies [23].

En el rostro también se encuentran diferentes relaciones áureas. La Figura 4.9 muestra un rostro relajado, con una sonrisa natural, los puntos formados por las pupilas y los extremos de la boca determinan un cuadrado, cuyo lado, h, coincide con la altura de la oreja.

La sección áurea de h, a, es el ancho de nariz, distancia entre cejas, distancia entre ojos, distancia entre el extremo de la boca y la barbilla. La sección áurea de a, b , es la distancia entre orificios nasales y también la longitud del ojo. La sección áurea de b, c, es la distancia entre nariz y boca y también el ancho del ojo.
La longitud total de la cara y el ancho total de la cara están en la proporción áurea; es decir, el rostro se puede inscribir en un rectángulo áureo. Además

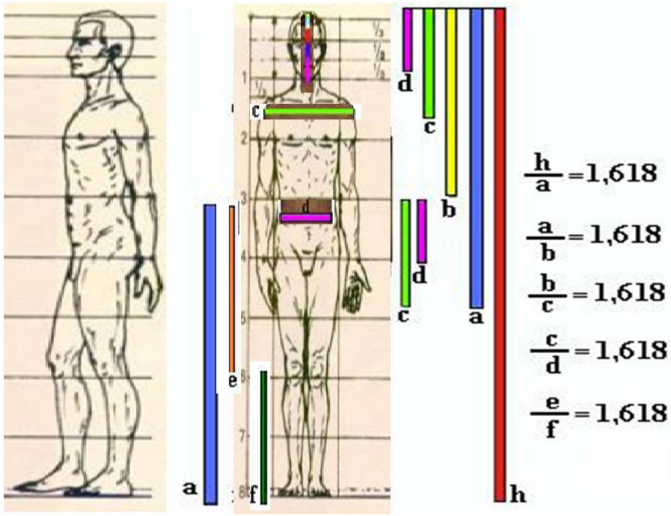


Figura 4.8: Proporciones en el cuerpo humano

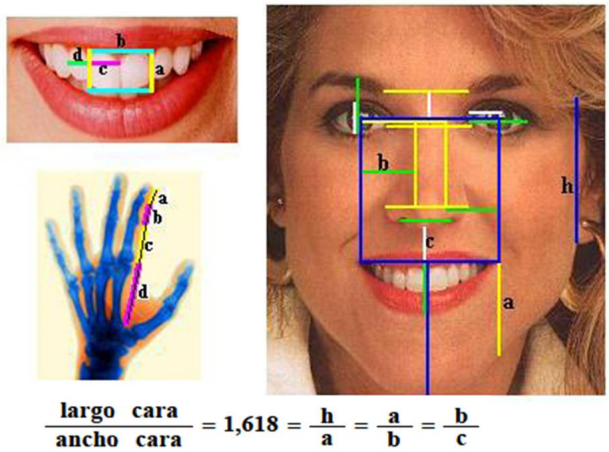


Figura 4.9: Proporciones en el rostro

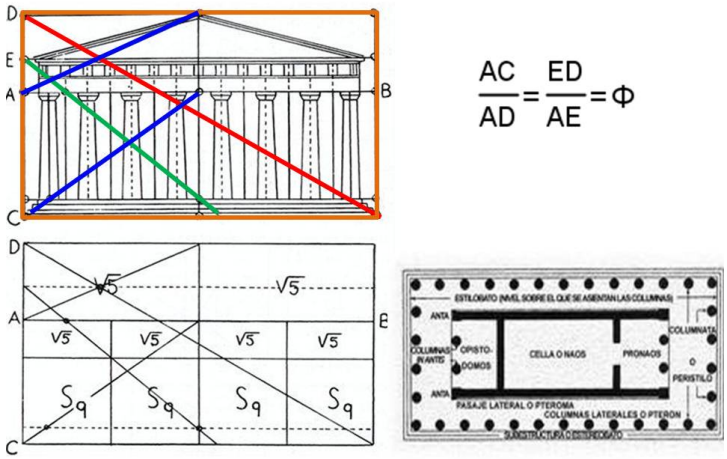


Figura 4.10: Partenón

los dientes siguen la proporción áurea, y así los dos incisivos superiores están inscritos en un rectángulo de oro. El ancho del primer diente incisivo y el ancho del diente que le sigue están en relación áurea. Por otra parte en las manos las falanges también están en proporción áurea.

4.6. La proporción áurea en la arquitectura y la escultura

4.6.1. Partenón

El Partenón de Atenas es un templo construido en el siglo V a. C.; según Matila Ghyka, J. Hambridge curador de Antigüedades griegas del Museo de Boston realizó una análisis de la "simetría dinámica" de la fachada de este templo, la cual se puede encuadrar en un rectángulo áureo, en este rectángulo se marcan las principales proporciones por medio de cuatro diagonales. En la Figura 4.10, se ilustra la forma en la que este procedimiento puede ser llevado a cabo [6].

Por otra parte se estableció que la altura de las columnas del Partenón equivale a 5,5 veces el ancho de la base de la columna. Además, los capiteles

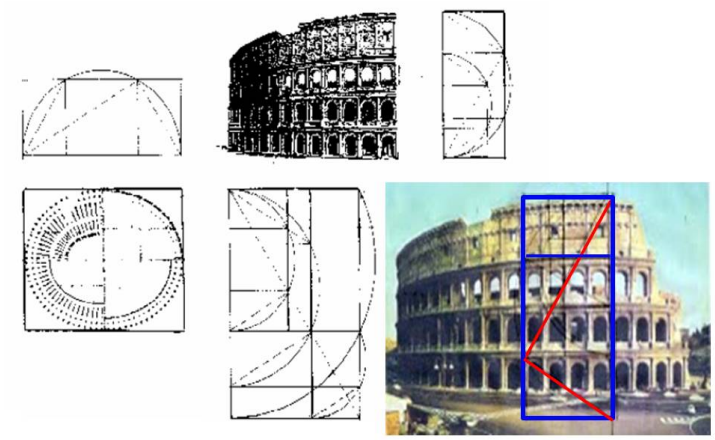


Figura 4.11: Anásis áureo Coliseo Romano

son losas cuadradas que descansan sobre formas cuyos contornos se asemejan a dos manos extendidas. La parte superior de los capiteles de las columnas está cerca del punto de la sección áurea de la altura total, y las líneas centrales de las dos columnas de las esquinas, más las líneas del piso y la parte superior del entablamiento forman un rectángulo de $\sqrt{5}$, que consta de dos rectángulos áureos recíprocos [26].

En la parte derecha de la Figura 4.10 se encuentra un plano del Partenón que corresponde a dos rectángulos áureos. Allí se puede observar que el naos o cella y el tesoro o cámara de la virgen corresponden a la proporción áurea.

4.6.2. Coliseo Romano

El Coliseo Romano fue terminado por Domiciciano en el año 82 d. C. La estructura del Coliseo tiene 48 metros de alto, 188 m. de largo y 156 m. de ancho. El estudio proporcional del Coliseo muestra que el plano se encuadra en dos rectángulos áureos y que el ancho de la elipse gigante que forman la pared exterior se relaciona con el ancho de la arena central en la proporción de $\sqrt{5}$ generada por dos rectángulos áureos recíprocos como se muestra en la Figura 4.11 [26].

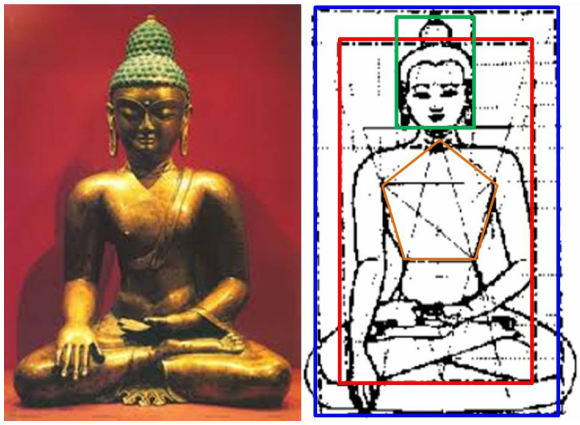


Figura 4.12: Buda y canon tibetano

4.6.3. Canon tibetano de Buda

En el canon tibetano de Buda mostrado en la figura 4.12 se puede encuadrar en 3 rectángulos áureos, uno dentro del otro. El rectángulo de mayor área encierra toda la figura, desde el punto superior de la cabeza hasta la base, incluyendo las rodillas; el rectángulo que le sigue en área al mayor, se extiende desde la parte superior de la cabeza hasta las piernas, tocando la mano derecha y el codo; y el rectángulo de menor área encierra la cabeza. Aparecen también dos triángulos que van desde el mentón hasta las piernas y dibujan un pentágono central y dentro de él una estrella pentagonal, los vértices del pentágono coinciden con el mentón, la cintura y las axilas.

4.7. La sección áurea en la música

El músico húngaro Béla Viktor János Bartók, conocido como Béla Bartók (1881-1945), se destacó como compositor, pianista e investigador de música folclórica del oriente de Europa. Bartók fue uno de los fundadores de la etnomusicología, basada en las relaciones que unen la etnología y la música.

Al rededor de 1915 Bartók desarrolló un método basado en la razón áurea y en la sucesión de Fibonacci para integrar elementos de su música como: escalas, estructuras de acordes con los motivos melódicos apropiados, proporciones de longitud, tanto de la obra en general como los de la exposición, desarrollo,

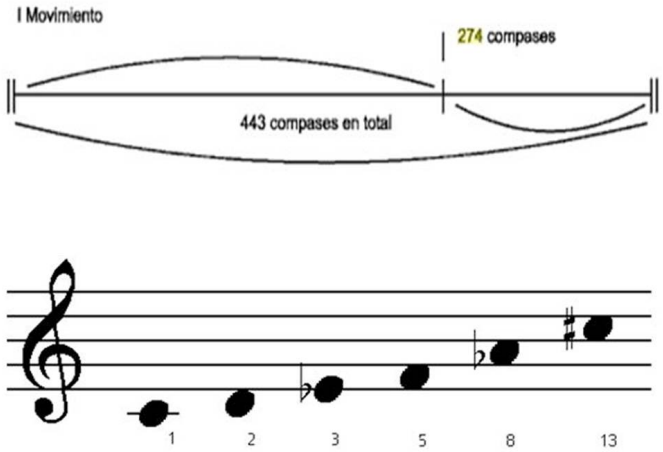


Figura 4.13: Proporción áurea y sucesión de Fibonacci en composiciones de Bartók
—

reexposición, frases de conexión entre movimientos, etc. [8].

En la forma y la armonía de la obra *Sonata para dos pianos y percusión* se puede identificar la proporción áurea, en el primer movimiento que consta de 443 compases, si se multiplica este número por 0.618034 se obtiene el compás 274, el cual será el punto donde justamente se inicia la reexposición del tema principal de la sonata (la forma sonata está basada en dos temas musicales diferentes que se exponen, se desarrollan y se reexponen), parte superior de la Figura 4.13.

Por otra parte en la composición para piano *Allegro Bárbaro* Bartok utiliza los términos de la sucesión de Fibonacci 2, 3, 5, 8 y 13 en diversas ocasiones durante la pieza en el uso de los acordes. En semitonos 2 es una segunda mayor, 3 es una tercera menor, 5 es una cuarta, 8 es una sexta menor y 13 es una octava aumentada como se muestra en la parte inferior de la Figura 4.13.

Capítulo 5

Enseñanza de la proporción áurea en la educación básica secundaria y media

En este capítulo, se muestran algunos conceptos, definiciones y relaciones concernientes a la educación básica secundaria y media; con el fin de realizar un pequeño recorrido por los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN) relacionados con la proporción áurea. Así mismo, se hace un análisis de la manera en que se abordan y se trabajan conceptos como razón y proporción en algunos textos guía de secundaria. Además, se describe la importancia del uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC'S) dentro del aula. En particular, el uso del computador es una herramienta fundamental para estudiar la consecución de patrones en las cifras decimales de Φ. Por último, se hace una breve reseña de cómo se usan estas tecnologías en dos instituciones latinoamericanas para estudiar las propiedades de la constante Φ.

La propuesta didáctica de este trabajo es un video con el que se pretende incentivar el estudio de la proporción a través de la constante Φ. De esta forma, se quiere evidenciar, que la constante Φ se puede constituir en un pretexto para el uso de este tipo de tecnologías en la educación básica, secundaria y media.

5.1. Estándares

Un estándar en educación específica lo mínimo que el estudiante debe saber y ser capaz de hacer para el ejercicio de la ciudadanía, el trabajo y la realización personal. El estándar es una meta y una medida; es una descripción de lo que el estudiante debe lograr en una determinada área, grado o nivel; expresa lo que debe hacerse y lo bien que debe hacerse.

Por otra parte los Lineamientos Curriculares son directrices generales sobre el currículo; son la filosofía de las áreas y los estándares están fundamentados en ellos, pero son más precisos, son para cada grado y dentro del grado para un desempeño concreto. Las evaluaciones, tanto internas como externas, se harán con base en ellos y serán revisados periódicamente.

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el currículo a todo lo largo de la educación básica y media se compone de los siguientes elementos: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; y procesos matemáticos. Los estándares se aplican para cada uno de los elementos enunciados [28].

La proporción áurea se puede trabajar en gran parte de los elementos del currículo; puesto que ellos se relacionan con el concepto de medida, razón y proporción. Además, desde la representación decimal de Φ se pueden observar regularidades y establecer patrones. A continuación se describen los cinco pensamientos:

1. **Pensamiento numérico y sistemas numéricos.** Comprensión del número, su representación, las relaciones que existen entre ellos y las operaciones que con ellos se efectúan en cada uno de los sistemas numéricos. Se debe aprovechar el concepto intuitivo de los números que el niño adquiere desde antes de iniciar su proceso escolar en el momento en que empieza a contar, y a partir del conteo iniciarlo en la comprensión de las operaciones matemáticas, de la *proporcionalidad* y de las fracciones. Mostrar diferentes estrategias y maneras de obtener un mismo resultado. Cálculo mental. Logaritmos. Uso de los números en estimaciones y aproximaciones.

2. **Pensamiento espacial y sistemas geométricos.** Examen y análisis de las propiedades de los espacios en dos y en tres dimensiones, y las formas y figuras que éstos contienen. Herramientas como las transformaciones, traslaciones y simetrías; las relaciones de congruencia y semejanza entre formas y figuras, y las nociones de perímetro, área y volumen. Aplicación en otras áreas de estudio.

3. **Pensamiento métrico y sistemas de medidas.** Comprensión de las características mensurables de los objetos tangibles y de otros intangibles como el tiempo; de las unidades y patrones que permiten hacer las mediciones y de los instrumentos utilizados para hacerlas. Es importante incluir en este punto el cálculo aproximado o estimación para casos en los que no se dispone de los instrumentos necesarios para hacer una medición exacta. Margen de error. Relación de la matemática con otras ciencias.

4. **Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.** Situaciones susceptibles de análisis a través de recolección sistemática y organizada de datos. Ordenación y presentación de la información. Gráficos y su interpretación. Métodos estadísticos de análisis. Nociones de probabilidad. Relación de la aleatoriedad con el azar y noción del azar como opuesto a lo deducible, como un patrón que explica los sucesos que no son predecibles o de los que no se conoce la causa. Ejemplos en situaciones reales. Tendencias, predicciones, conjeturas.

5. **Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.** Procesos de cambio. Concepto de variable. El álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio. Relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas. Modelos matemáticos. Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación la constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen escenarios en la vida práctica como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones.

Es muy importante lograr que la comunidad educativa entienda que las matemáticas son accesibles y aun agradables si su enseñanza se da mediante una adecuada orientación que implique una permanente interacción entre el

maestro y sus alumnos y entre éstos y sus compañeros, de modo que sean capaces, a través de la exploración, de la abstracción, de clasificaciones, mediciones y estimaciones, de llegar a resultados que les permitan comunicarse, hacer interpretaciones y representaciones; en fin, descubrir que las matemáticas están íntimamente relacionadas con la realidad y con las situaciones que los rodean, no solamente en su institución educativa, sino también en la vida fuera de ella [29] y la proporción áurea es un concepto que puede trabajarse en todos estos campos.

A continuación se mostrarán algunos estándares en los cuales se puede trabajar explicita e implícitamente la proporción áurea en la educación básica, secundaria y media dentro las diferentes formas de pensar matemáticamente.

Estándares de primero a tercero

- *Pensamiento numérico y sistemas numéricos.*

  Estándar 11: Resolver problemas aditivos de composición y transformación, en la estructura de estos problemas corresponde a la relación parte parte todo.

  Estándar 12: Resolver y formular problemas de proporcionalidad. En estos primeros grados de la Educación Básica Primaria, los problemas de proporcionalidad modelan relaciones entre dos variables. Relacionando, por ejemplo, dos magnitudes como peso y precio; altura y talla; etc.

- *Pensamiento variacional.*

  Estándar 1: Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).

- *Pensamiento métrico.*

  Estándar 3: Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo con el contexto.

Estándares de cuarto a quinto

- *Pensamiento numérico y sistemas numéricos.*

  Estándar 6: Resolver y formular problemas aditivos de composición, transformación, comparación e igualación. En los problemas de comparación el enunciado de los problemas de comparación modela la relación entre dos cantidades para establecer la diferencia entre ellas.

  Estándar 2: Analizar y explicar las distintas representaciones de un mismo número (naturales, fracciones, decimales, porcentajes).

- *Pensamiento métrico.*

  Estándar 3: Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y en las ciencias. El estándar está relacionado con el uso y sentido de los números en distintos contextos. En especial en los contextos de las ciencias son varios los números que podemos asignar al valor numérico de una cantidad que representa su medida.

- *Pensamiento variacional.*

  Estándar 2: Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.

- *Pensamiento aleatorio.*

  Estándar 5. Comparar y describir la distribución de un conjunto de datos.

Estándares de sexto a séptimo

- *Pensamiento numérico y sistemas numéricos.*

  Estándar 1: Utilizar números (fracciones, decimales, razones , porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.

  Estándar 8: Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. Estándar 10: Hacer conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores. (Estudio de las cifras decimales del número áureo).

- *Pensamiento espacial y sistemas geométricos.*

  Estándar 4: Predecir y comparar los resultados de aplicar diferentes movimientos en el plano sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

Estándares de octavo a noveno

- *Pensamiento numérico y sistemas numéricos.*

  Estándar 1: Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

- *Pensamiento espacial y sistemas geométricos.*

  Estándar 3: Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

- *Pensamiento métrico.*

  Estándar 3: Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.

A continuación, se muestran dos cuadros que contienen un análisis de los estándares relacionados con los conceptos de razón y proporción en dos textos de secundaria. En el cuadro 1, se trabaja el estándar 8 "Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa"; del pensamiento numérico para los grados sexto y séptimo. Figura 5.1.

En el cuadro 2, se trabaja el estándar 3 "Aplico y justifico criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas"; del pensamiento espacial para los grados octavo y noveno. 5.1

Al realizar el análisis de los textos se puede observar que el concepto de proporción áurea no se incluye. Además, se carece de representaciones geométricas y situaciones problema en diferentes contextos en los cuales se involucra el concepto de proporción, sólo se trabaja desde el pensamiento numérico y geométrico. Por otro lado, no se evidencia el uso de las TIC'S dentro del aula de clase.

Texto	Grado	Capítulo	Temas trabajados	Descripción
Nuevas matemáticas. Editorial Santillana	6	4	Porcentaje	Es trabajado como una forma de expresar fracciones decimales cuyo denominador es 100. No hay definición previa de razón ni de proporción
	7	4	Razones y proporciones	Se define la razón como el cociente indicado entre dos números a y b $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$. Y la proporción como una igualdad entre dos razones, no hay definición como comparación de magnitudes o de cantidades.
			Proporcionalidad directa e inversa	Cuando se habla de proporcionalidad directa se hace referencia a dos magnitudes en donde si una aumenta la otra también, mientras que en la proporcionalidad inversa se realiza el producto entre los valores de las magnitudes para determina si hay constante.
			Aplicaciones de proporcionalidad	Se enfatiza en la regla de tres simple, regla de tres compuesta, repartos proporcionales, porcentaje e interés simple.
		5	Pensamiento geométrico	No existen construcciones geométricas relacionadas con proporcionalidad, se realizan construcciones con regla y compás de triángulos y se dan algunas características de medida de ángulos y clasificación en los triángulos.
GLIFOS PROCESOS MATEMÁTICOS	6	3	Tablas de proporcionalidad	Se trabajan en tres páginas magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, definiéndolas como el aumento o disminución de las magnitudes.

Figura 5.1: Cuadro 1

5.2. TIC'S en la educación básica, secundaria y media

Las Tecnologías de la Información y Comunicación, TIC'S son herramientas teórico conceptuales, soportes y canales que procesan, almacenan, sintetizan, recuperan y presentan información de la forma más variada. Los soportes han evolucionado en el transcurso del tiempo (telégrafo óptico, teléfono fijo, celulares, televisión) ahora en ésta era se puede hablar de la computadora y de la Internet. El uso de las TIC'S representa una variación notable en la sociedad y a la larga un cambio en la educación, en las relaciones interpersonales y en la forma de difundir y generar conocimientos [28].

Las TIC'S impactan los estándares educativos y lo hacen en mayor grado cuando existe en las escuelas un terreno fértil para hacer uso efectivo de

Texto	Grado	Capítulo	Temas trabajados	Descripción
Nuevas matemáticas. Editorial Santillana	8	10	Criterios congruencia de triángulos	Se enuncian los tres criterios en la página 268, no se establecen como proporcionalidad sino como instrumentos para demostrar teoremas relacionados con las propiedades de los triángulos
	9	8	Métodos de demostración	Se inicia con proposiciones lógicas y cuantificadores para llegar a algunos métodos de demostración como el directo y reducción al absurdo.
			Semejanzas	Se da una definición de **razón** entre dos cantidades como el cociente entre estas, de **proporción** como la igualdad entre dos razones. Se ejemplifican dichos conceptos con comparaciones entre cantidades geométricas y entre segmentos. También se define el teorema de Tales con algunas de sus propiedades.

Figura 5.2: Cuadro 2

éstas. En los últimos años se han realizado diferentes estudios del uso del video en el aula, en estos estudios se demuestra la conveniencia de usar videos en la educación básica con el objeto de cumplir las metas y logros de los aprendizajes propuestos. Conveniencia que se fundamenta principalmente en el potencial de expresión y comunicación que ofrece el video y en el hecho de que vivimos en un mundo que es cada vez más visual y los jóvenes se sienten muy cómodos en él.

Los conceptos fundamentales son las bases sobre las que se construyen las TIC'S; el computador, las redes, los sistemas de información, la representación digital o binaria de la información, los modelos, el pensamiento algorítmico y la programación son algunos de ellos. Si las TIC'S no evolucionaran, el conocimiento de estos conceptos sería innecesario; bastaría saber usar los equipos y el software; pero las TIC cambian permanentemente y una buena comprensión de sus fundamentos permite estar preparado para las innovaciones y adaptarse rápidamente para aprovechar las nuevas oportunidades [32]. En partícular, como se describió en el Capítulo 3 de este trabajo, el estudio de la normalidad de Φ puede constituirse en un medio para el uso del computador en el aula de clase.

TIC´S en la proporción áurea

Se han realizado algunas unidades interactivas para el estudio de la relación de la belleza en el arte con la proporción áurea, así como sus propiedades matemáticas. A continuación se muestra una breve descripción de dos entidades que usan las TIC´S para estudiar las propiedades de la constante Φ.

- *Universidad Nacional Autónoma de México UNAM.*

  El instituto de matemáticas de la UNAM creó un Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora (PUEMAC). En su página de internet el instituto afirma "El proyecto PUEMAC surge de la inquietud de mostrar las matemáticas de una manera amable y atractiva a un público amplio y con intereses variados; surge de la convicción de que al presentar las matemáticas de esta manera, los estudiantes y el público verán nacer curiosidades e intereses que podrán canalizarse después hacia las rutas de la enseñanza formal y la investigación; surge ante la escasez de materiales adecuados en los medios electrónicos que exploten las magníficas posibilidades

que ofrece el software público en la red global para la enseñanza y la divulgación"[30].

Dentro de los recursos de geometría, para los niveles de secundaria, bachillerato y licenciatura el proyecto PUEMAC incluye la definición de proporción áurea, algunas propiedades matemáticas, el rectángulo áureo, la sucesión de Fibonacci, el pentagrama y la espiral logarítmica.

- *Instituto de profesores Artigas.*

  El Instituto de Profesores Artigas destinado a la formación de docentes para la enseñanza media y que depende de la Administración Nacional de Educación Pública de Uruguay creo un blog con experiencias de aula. La experiencia de aula titulada "PRESENTACIÓN Y REPRESENTACIÓN DEL MUNDO POR IMÁGENES ¿EL HOMBRE ES LA MEDIDA?", involucra a la proporción áurea mostrando al hombre como un canon de belleza y sus cambio a través de la historia. Además, muestra la sección áurea, la sucesión de Fibonacci, registro de medidas, búsqueda de la proporción divina en distintos reinos de la naturaleza, la espiral de Durero y la construcción del compás áureo. [31]

Con el ánimo de contribuir a desarrollar una cultura escolar dispuesta a la adopción activa de estándares en matemáticas y en las TIC'S en este trabajo se utilizan diferentes herramientas que ayudan al manejo de las TIC'S; dentro de ellas, está el simulador *Wolfram CDF player* basado en el paquete *Mathematica*, usado para simular imágenes en Filotaxia, en el crecimiento y forma de algunos organismos vivientes. Además la propuesta didáctica de este trabajo es un video que contiene actividades para realizar dentro del aula que llevan a los estudiantes a identificar la constante Φ en diferentes contextos dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje para la educación secundaria básica y media.

Bibliografía

[1] C. Bonell, *La divina proporción, las formas geométricas*, Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2000.

[2] C. Bouleau, *Tramas. La geometría secreta de los pintores*, Akal S.A., Madrid, 1996.

[3] C. Carcagno, *Introducción a las propiedades matemáticas de la Gran Pirámide*, Monografía. Universidad de Buenos Aires, 1976.

[4] M. Cleyet-Michaud, *Le Nombre d'Or*, Presses Universitaires de France, París, 1973.

[5] G. Doczy, *El poder de los límites*, Pax, México, 2004.

[6] M. C. Ghyka, *The geometry of art and life*, Vol. I, Barcelona, 1978.

[7] ———, *Le Corbusier's Modulor and the Concept of Golden Mean*: *The Architectural Review* **614** (febrero de 1948). p. 39-55.

[8] M. Godínez C., *Los números también se pueden escuchar*, Laberintos ITAM. http://laberintos.itam.mx/files/289.pdf.

[9] O. Hagenmaier, *Der Goldene Schnitt. Ein Harmoniegesetz und seine Anwendung*, Vol. 7, H. Moos, Paris, 1963.

[10] H. E. Huntley, *The divine proportion*, Dover Publications, New York, 1970.

[11] A. Irlande, *17 000 000 000 decimales de la proporción áurea* (2008). Página Universidad Nacional de Colombia. http://matematicas.unal.edu.co/airlande/phi.html.es.

[12] D. Khoshnevisan, *Probability*, Vol. 80, Americam Mathematical Society, USA, 2007.

[13] J. Lelong-Ferrand, *Curso de matemáticas, Tomo II, análisis*, Reverté S.A., Barcelona, 1980.

[14] M. Livio, *La proporción áurea; la historia de phi*, Ariel S.A., Barcelona, 2002.

[15] E. Maillard, *Du Nombre d'Or: Diagrammes de chefs d'oeuvre*, Vol. 26, André Cournon, Paris, 1943.

[16] M. Marin Uribe, *Aproximación a los números irracionales*, Universidad de Medellín, Colombia, 2006. Primera edición.

[17] C. Miller and Hornsby Heeren, *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, Pearson Addison Wesley, México, 2006.

[18] M. A. Morales M., *Porque todo tiende a infinito*: *Número normal*, Universidad de Granada (2008). http://gaussianos.com/numero-normal/.

[19] D. Neroman, *Le Nombre d'Or à la portée de tous*, Dervy, Paris, 1946.

[20] M. Neveux., *Construction et Proportion: Apports germaniques de la section d'or au nombre d'or*, Université de Paris **I, 55** (1991).

[21] L. Rendón and M. Zuluaga, *Análisis*, Universidad Nacional de Colombia, 2000. http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/lrendon.html.

[22] M. Robertson, *The Golden Section or Golden Cut. The Mystery of Proportion in Design*, R.I.B.A. Journal (1948), 536-545.

[23] M. Rodríguez F., *El número de oro es irracional*, Sección bilingüe del Gymnázium Park Mládeze, Eslovaquia, 2002.

[24] A. Scimove, *La sezione aurea*, Promopress, Palermo, 1997.

[25] J. Thomas, *La divine proportion et l'art de la géométrie*, Archè, Milán, 1993.

[26] Y. Toledo A., *Sección áurea en el arte, arquitectura y música.* http://matematicas.uclm.es/itacr/webmatematicas/trabajos.pdf.

[27] S. Wolfram, *Wolfram CDF player*, Wolfram research, 1987. http://www.wolfram.com/company/background.html.

[28] Ministerio de Educación Nacional, *Estándares Curriculares, un compromiso con la excelencia*, Al tablero www.mineducacion.gov.co (2002).

[29] Ministerio de Educación Nacional. MEN., *La Revolución Educativa. Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje. Educación básica y media*, www.colombiaaprende.edu.co (2003).

[30] J. Galaviz, *PUEMAC. La razón áurea*, Instituto de matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México (2004). http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/aurea/html/aurea.html.

[31] M. Posada, *Comunicación visual. Experiencias de aula*, Instituto de profesores Artigas. Uruguay (2010). http://eliposada.blogspot.com/p/experiencias-de-aula.html.

[32] EDUTEKA, *Estándares en TIC para estudiantes, docentes y directivos*, http://www.eduteka.org/modulos (2009).

ANEXOS

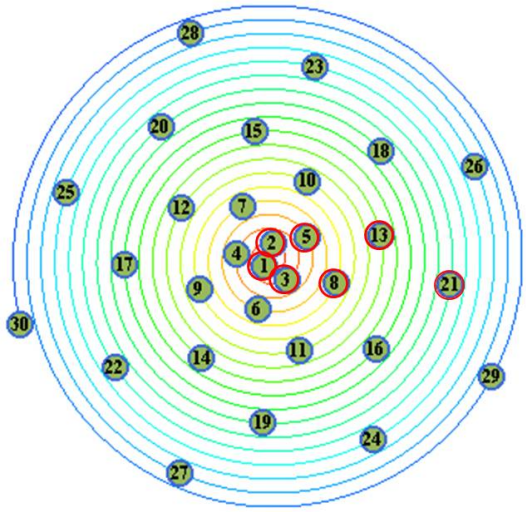
Los anexos mostrados en este trabajo fueron realizados con el simulador *Wolfram CDF player* basado en el paquete *Mathematica*, de hecho, al final se anexan algunos de los programas fuentes. Las imágenes mostradas corresponden a simulaciones en Filotaxia y en el crecimiento en forma de espiral de algunos organismos vivientes.

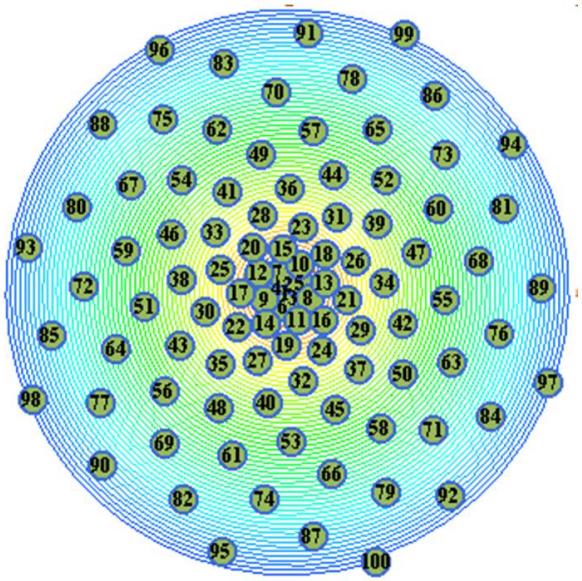
Anexo 1: Filotaxia

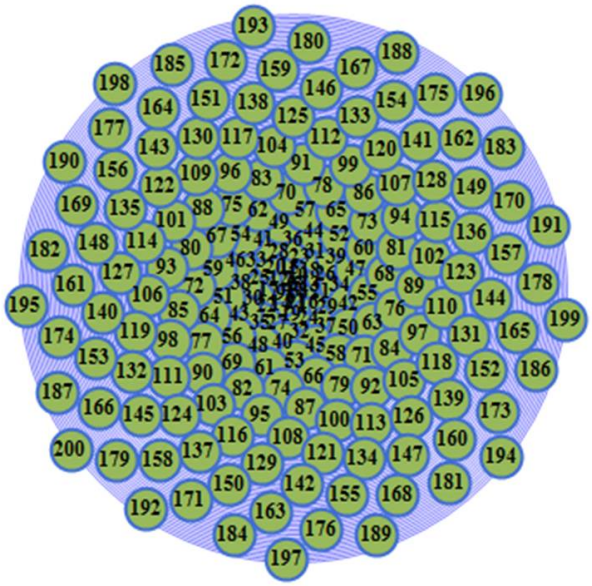
Las siguientes ilustraciones visuales reflejan cómo el ángulo de divergencia afecta la distribución de los pétalos, hojas y flores en la botánica.

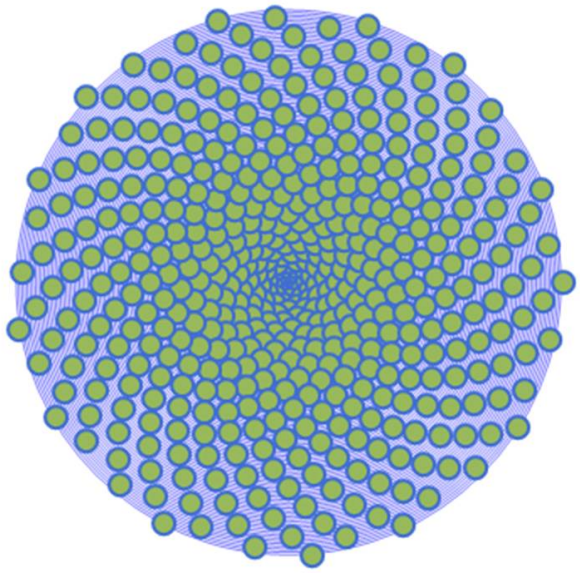
En la configuración inicial de Wolfram Demonstrations Project en la sección "Phyllotaxis Explained" el ángulo de divergencia es 0,618 que corresponde al inverso de Φ, es decir, $\Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi} = 0,618....$ Por otra parte al observar la espiral de crecimiento que se va formando en la disposición de los puntos o semillas, girando a la izquierda y la derecha, se encuentran dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci cuyo contorno fue resaltado con color rojo en la primera imagen.

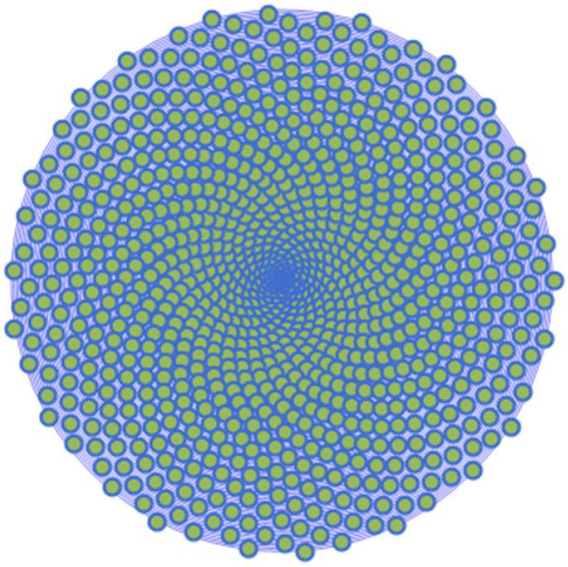
A continuación se muestran algunas imágenes en las que se deja constante el ángulo $\frac{1}{\Phi}$ y se varia la cantidad de semillas: 30, 100, 200, 500 y 1000 respectivamente. Nótese la similitud en la disposición de las semillas de la simulación con 1000 semillas y el girasol.


28
23
20
15
18
26
25
10
12
7
13
2
5
4
1
3
8
17
21
9
6
30
11
16
14
22
29
19
24
27

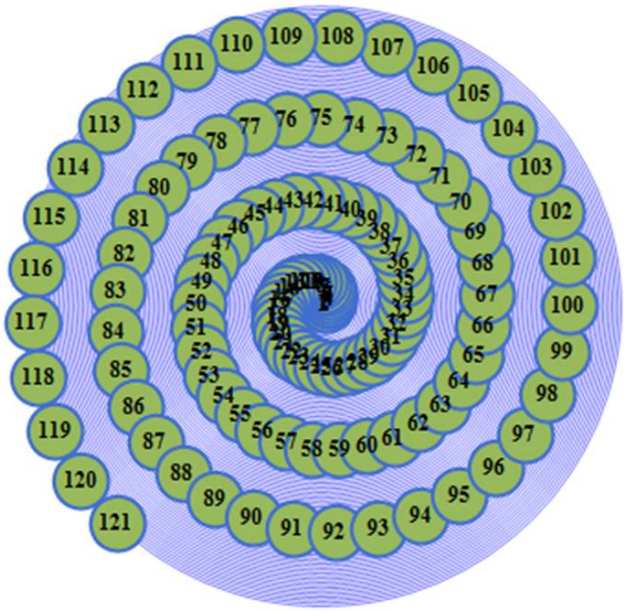

91
99
96
83
78
70
86
88
75
62
57
65
94
49
73
67
54
44
52
41
36
80
60
81
28
31
23
39
46
33
93
59
20
15
18
47
68
26
10
25
12
7
72
38
42
25
13
34
89
17
9
6
43
8
21
51
30
55
22
14
11
16
85
29
42
76
64
43
19
24
35
27
37
50
63
32
97
98
77
56
48
40
45
84
58
71
69
53
61
90
66
82
74
79
92
87
95
100

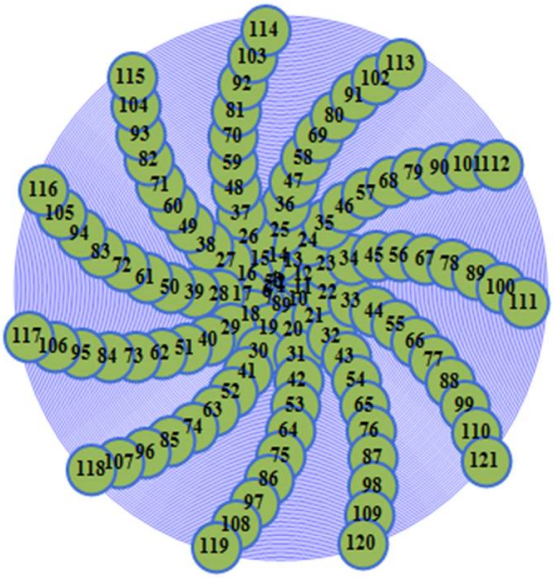


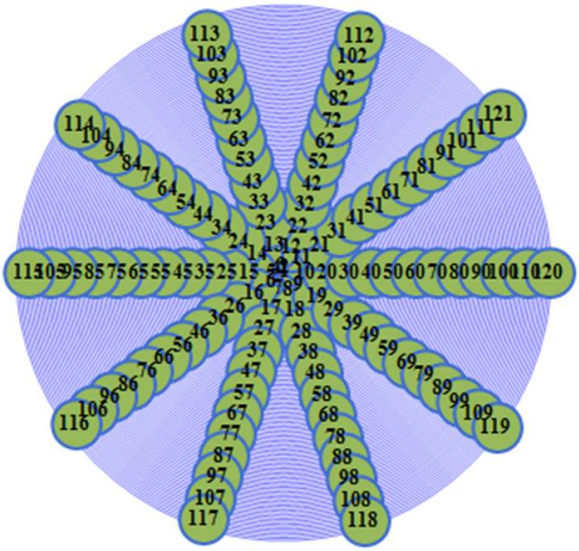


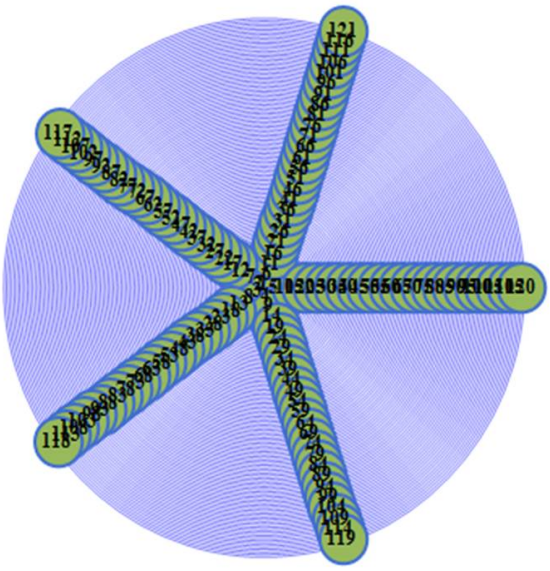


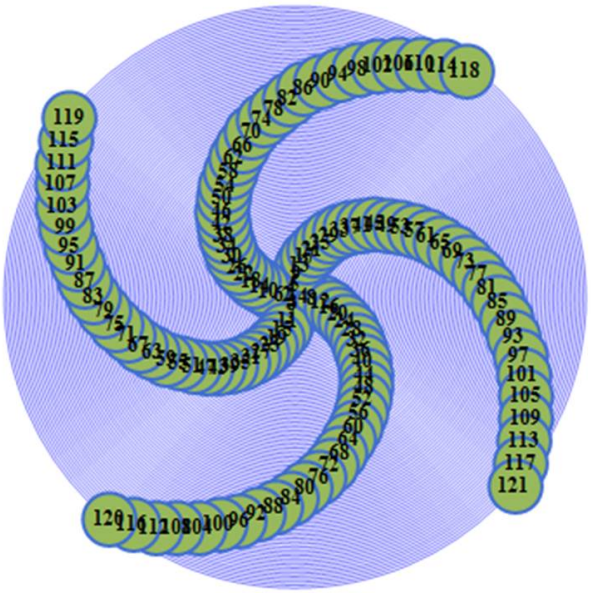
En las siguientes imágenes se deja constante el número de semillas (121) y el tamaño de las flores (11) y se varia el ángulo de divergencia: 0,03 - 0,09 - 0,1 - 0,2 - 0,247 y 0,95 respectivamente (en donde 360°=1).

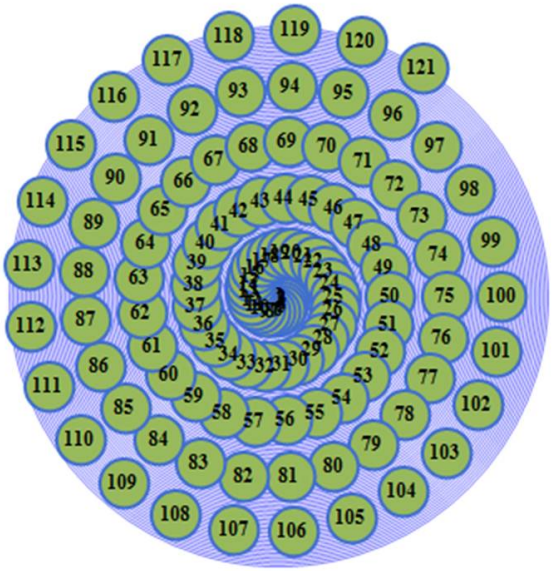






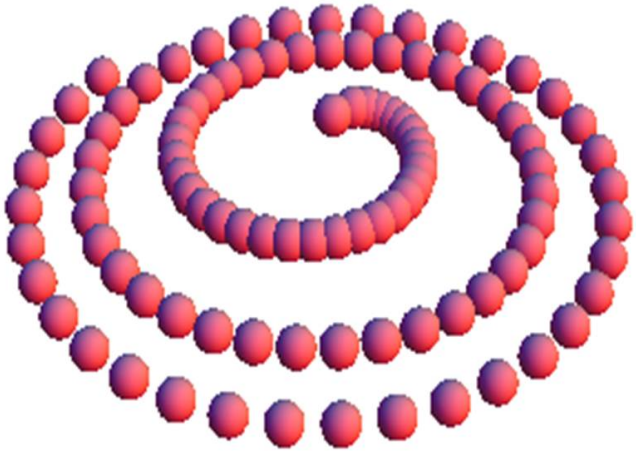


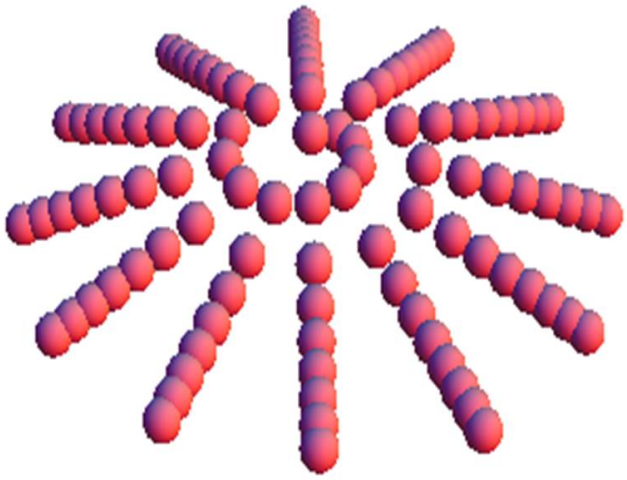

119
115
111
107
103
99
95
91
87
83
79
75
71
67
63
59
55
51
47
43
39
35
31
27
23
19
15
11
7
3
1
5
9
13
17
21
25
29
33
37
41
45
49
53
57
61
65
69
73
77
81
85
89
93
97
101
105
109
113
117
121
118
114
110
106
102
98
94
90
86
82
78
74
70
66
62
58
54
50
46
42
38
34
30
26
22
18
14
10
6
2
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60
64
68
72
76
80
84
88
92
96
100
104
108
112
116
120

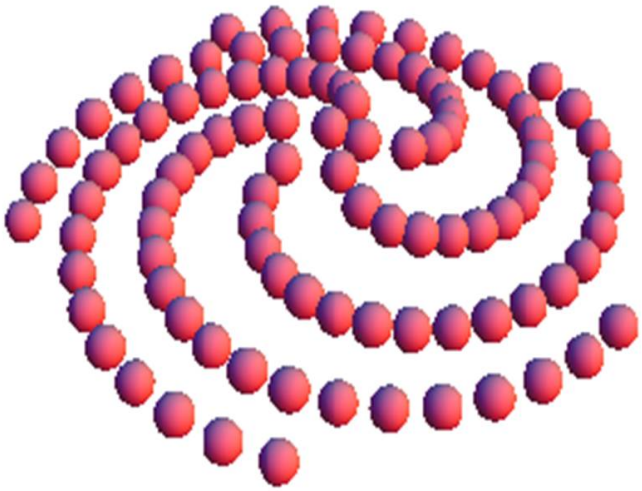


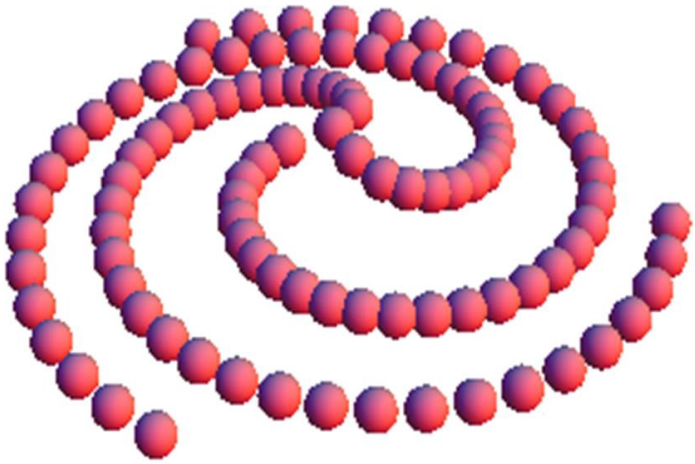
ANEXO 2: Espirales en la Filotaxia

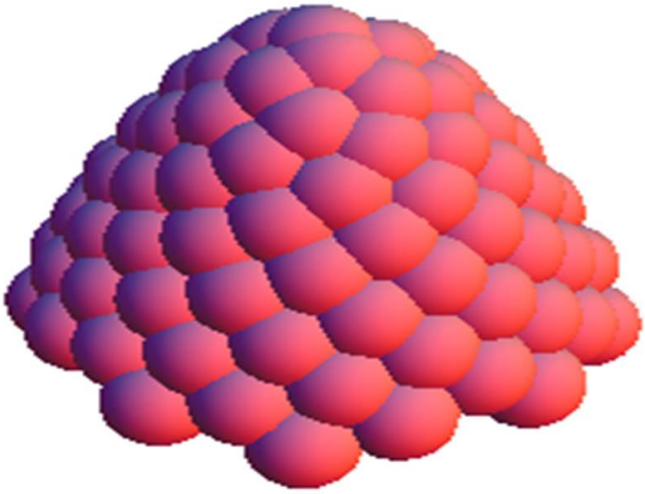
Las siguientes imágenes, en tres dimensiones, muestran cómo las flores toman forma de espiral cuando se deja constante el número de elementos y se varia el ángulo: 0°, 10°, 30°, 70° y 137,5°.







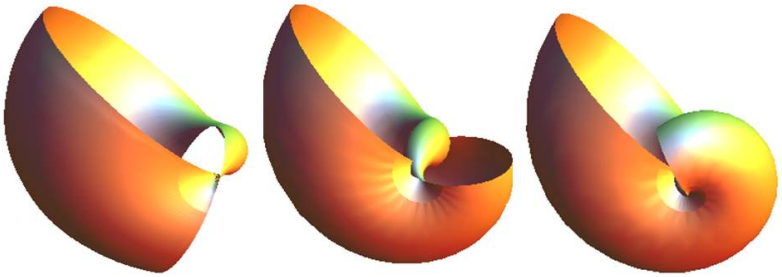


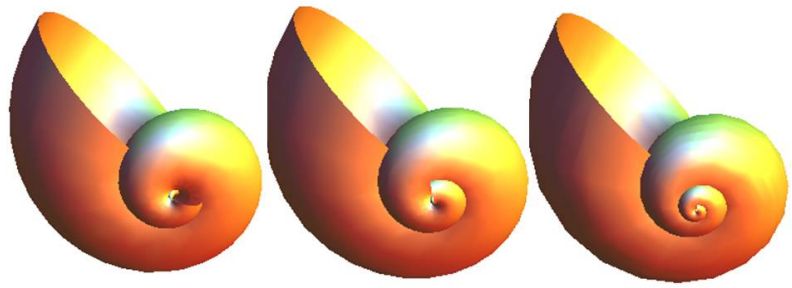


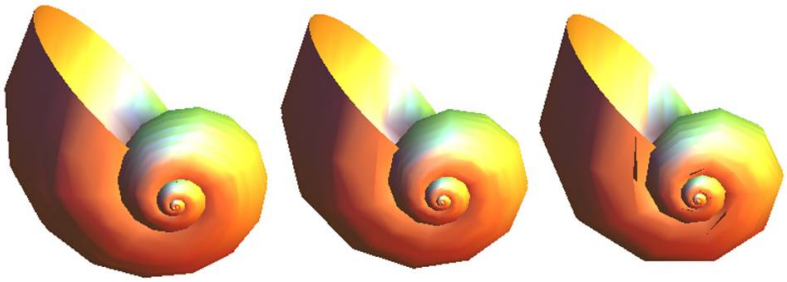
ANEXO 3: Crecimiento de conchas de molusco

El material nuevo de las conchas es progresivamente añadido en el extremo abierto de la concha. Los reguladores de control de la cantidad de material agregado en cada etapa en diferentes puntos alrededor de la abertura, la línea del centro indica el progresivo desplazamiento lateral de la abertura. Todas las conchas producidas por la adición de material de acuerdo con reglas fijas de la naturaleza que se muestran aquí tienen la propiedad de que a lo largo de su crecimiento se mantiene la forma de espiral.

A continuación se muestra el crecimiento de una concha de molusco variando la edad en meses: 2, 4, 6, 10, 12, 18, 24, 30, y 36, vistas de izquierda a derecha.

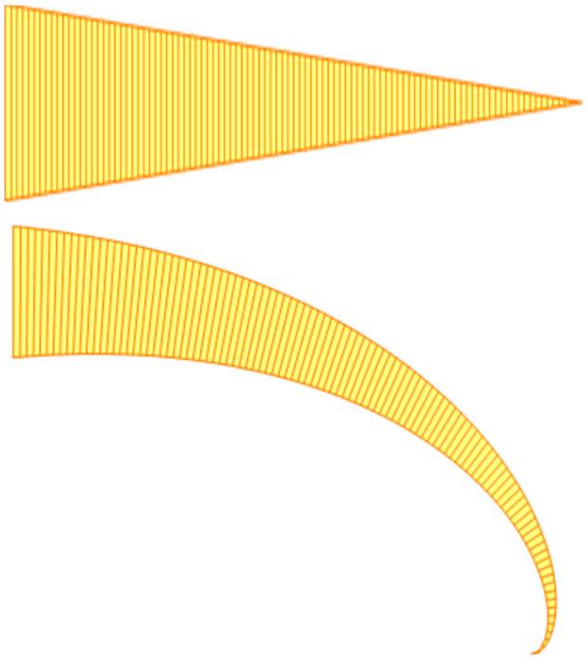


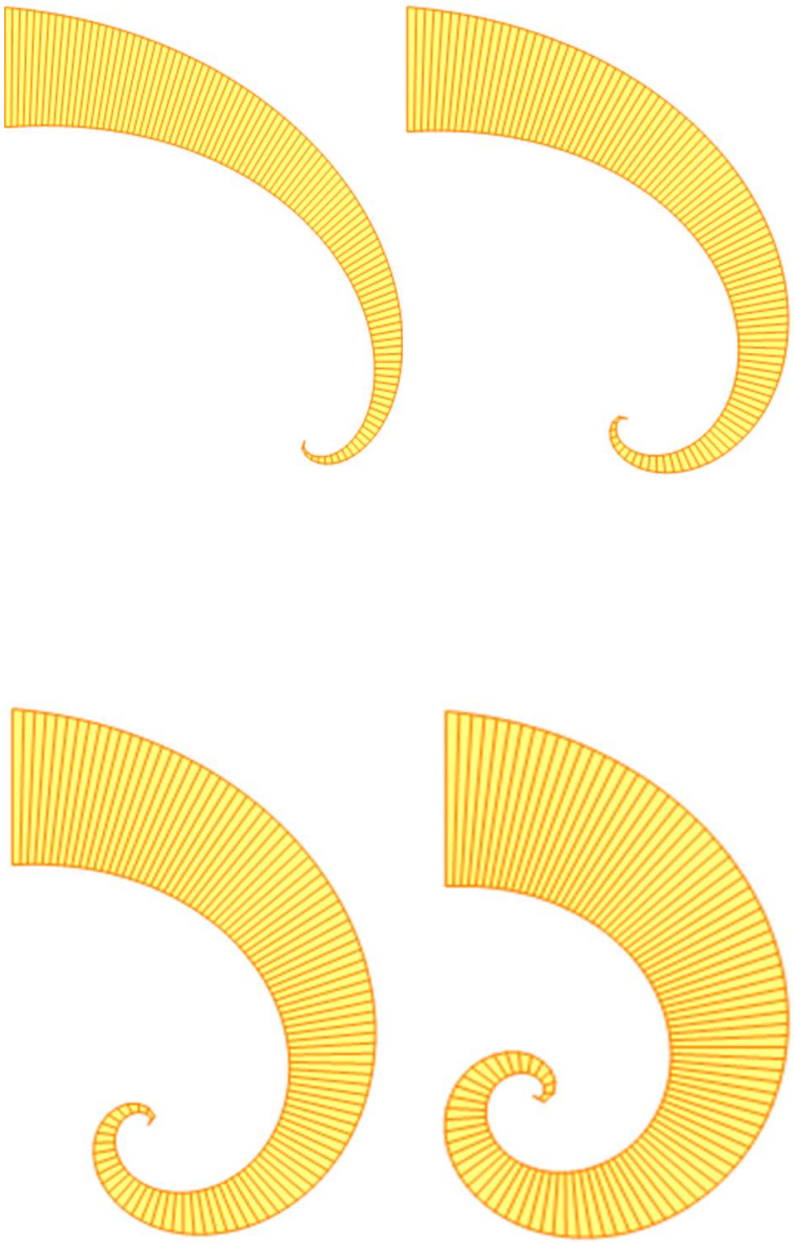




ANEXO 4: Curvatura de un cuerno

Los cuernos se curvan porque un lado crece más rápido que el otro. A continuación se cambiará la curvatura para ver las diferentes formas que puede tener un cuerno, a medida que se aumenta la curvatura del cuerno se va formando una espiral. Curvaturas: 0 - 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,5 - 0,75 - 1 respectivamente.





ANEXO 5: Programas fuente

A continuación se mostrarán los programas fuente de las simulaciones realizadas en *Wolfram CDF Player*

1. *Filotaxia*

```
Manipulate [
Semillas =
Graphics[{EdgeForm[{Thick, RGBColor[.25, .43, .82]}],
FaceForm[RGBColor[.6, .73, .36]],
Table[{Disk[r {Cos[ r k 2 [Pi] ], Sin[ r k 2 [Pi] ]}, s]}, {r,n}]}]];
If[spi,
Show[If[n < 101,
PolarPlot[1/2/k/Pi[Θ], {[Θ], 0, 2nkPi},
Axes ⟶ False, ColorFunction ⟶
```

```
Function[{x, y, [Θ]}, Hue[k [Θ]]]],
Graphics[{Lighter[Blue, .5],
Table[Circle[{0, 0}, i], {i, 1, n, n/100}]}] ,

semillas,
If[n < 301,
Graphics[
Table[Text[Style[r, Bold, 12],
r { Cos[ r k 2 Π ], Sin[ r k 2 Π ]}], {r, n}]], {}],
ImageSize ⟶ {350, 350}],
Show[florets, ImageSize ⟶ {350, 350}]],
Style["optical illusion", Bold],
{{n, 100, "number of florets"}, 1, 1000, 10,
Appearance ⟶ "Labeled", ImageSize ⟶ Tiny},
{{s, 5, "floret size"}, 1, 50, 1, Appearance ⟶ "Labeled", ImageSize ⟶
Tiny},
{{spi, False, "growth spiral"}, {True, False}},
{{k, .618, "angle of divergence"}, 0.001, 1, 0.001,
Appearance ⟶ "Labeled", ImageSize ⟶ Tiny},
TrackedSymbols ⟶ True, ControlPlacement ⟶ Left]
```

2. *Espirales en la Filotaxia*

```
Manipulate [
Graphics3D[
{Pink, Table[ Sphere[Sqrt[i] {Sin[i (a Degree)], Cos[i (a Degree)],−pN[i +
1^−10]^e}, size], {i, 0, n}]}]],
ImageSize ⟶ {450, 300}, Boxed ⟶ False,
PlotRange ⟶ {{-Sqrt[n] - size, Sqrt[n] + size}, {-Sqrt[n] - size, Sqrt[n] +
size}, All},

{{n, 100, "number of elements"}, 1, 250, Appearance ⟶ "Labeled"},
{{size, 1.5, "radius of each element"}, 0.1, 3,}
```

{{a, 137.5, “angle”}, 0, 180,
Appearance ⟶ “Labeled”},
{{p, 0.3, “pointiness”}, 0, 2, Appearance ⟶ “Labeled”},
{{e, 0, “pointiness exponent”}, 0, 0.65, Appearance ⟶ “Labeled”}]

3. *Crecimiento de conchas de molusco*

Manipulate[ParametricPlot3D[a^t { Cos[t] (1 + c (Cos[e] Cos[Θ] + d Sin[e] Sin[Θ])),
Sin[t] (1 + c (Cos[e] Cos[Θ] + d Sin[e] Sin[Θ])),
b + c (Cos[Θ] Sin[e] - d Cos[e] Sin[Θ])},
{Θ, -Pi, Pi}, {t, -tmax, 0},

PlotStyle ⟶ Directive[Opacity[1 - tr], Lighter[Yellow, .3], Specularity[White, 10]],
Axes ⟶ None, ViewPoint ⟶ {1, 1, -3}, Boxed ⟶ False,
PlotRange ⟶ All, ImageSize ⟶ {400, 450},
Mesh ⟶ None, MaxRecursion ⟶ ControlActive[0, Automatic]],

{{a, 1.2, “vertical scale”}, 1.05, 1.65, ImageSize ⟶ Small},
{{b, 2, “stretch angle”}, 0, 6, ImageSize ⟶ Small},
{{c, 1.5, “thickness”}, 0.4, 1.6, ImageSize ⟶ Small},
{{d, 1, “mouth size”}, 1, 4, ImageSize ⟶ Small},
{{e, 1.2, “mouth angle”}, 0, 1.2, ImageSize ⟶ Small}, Delimiter,
{{tmax, 25, “age”}, 6, 50, ImageSize ⟶ Small}, Delimiter, {{tr, 0, “transparency”}, 0, 1, ImageSize ⟶ Small},
ControlPlacement ⟶ Left, AutorunSequencing ⟶ {1, 3, 5}]

4. *Curvatura de un cuerno*

Cuerno[n: 20, r: 1.2, Θ: .08, Φ: .08] :=
Module[{x = y = {{0, 0}}, rot, m, offset, w, Dd},

```
Do[AppendTo[x, Last[x] + r {Cos[Π - Θ], Sin[Π - Θ]}];
AppendTo[y, Last[y] + {Cos[Π + Φ], Sin[Π] + Φ}];
rot = Π/2 - If[♯ [[2]] > 0, ArcCos[♯[[1]]], -ArcCos[♯[[1]]]] § @
(Last[x] - Last[y]) (√((Last[x] − Last[y]).(Last[x] − Last[y]))));

m = {{Cos[rot], -Sin[rot]}, {Sin[rot], Cos[rot]}}; x = (m.♯) § @ x; y = (m.♯)
§ @ y, {n}];
w = (Last[x] - Last[y]);
Dd = DiagonalMatrix[{1/w[[2]], 1/w[[2]]}];
x = Dd. ♯) § @ x;
y = Dd. ♯) § @ y;
offset = Last[y];
x = (♯) - offset) § @ x; y = (♯) - offset) § @ y;
Graphics[{Lighter[Yellow, .5],
Table[Polygon[x[[i]], x[[i + 1]], y[[i + 1]], y[[i]]], i, n],
Orange, AbsoluteThickness[.25],
Table[Line[x[[i]], x[[i + 1]], y[[i + 1]], y[[i]]], {i, n}]},
AspectRatio ⟶ Automatic, PlotRange ⟶ {{-1/4, 6.5}, {-3, 1}},
ImageSize ⟶ 150*{3.5, 2}, Frame ⟶ False]]

Manipulate[
Horn[n, c + 1],
{{c, 0.1, "horn curvature"}, 0, 1},
Delimiter,
{{n, 50, "number of segments"}, 20, 100, 1}, SaveDefinitions ⟶ True]
```