UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Operaciones básicas de números racionales aplicados en el planteamiento y resolución de problemas de ciencias en los grados sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen

Alber Rosado Torres

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2018

Operaciones básicas de números racionales aplicados en el planteamiento y resolución de problemas de ciencias en los grados sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen

Alber Rosado Torres

Trabajo final de maestría presentado como requisito para optar al título de

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director
Armando Reyes
Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2018

Dedicatoria

Ante todo, a Dios que da aliento de vida, a mis padres, por su ejemplo de honradez y trabajo, a mi esposa Diana y mis hijas: Sherys María y María Salomé, bendiciones de Dios.

Agradecimientos

Primeramente a Dios que me dio la capacidad de perseverar. Mis sinceros agradecimientos a mi director de trabajo final de maestría, Armando Reyes, Doctor en Ciencias Matemáticas, por sus observaciones claras y precisas; a la docente pensionada Myriam Margarita Acevedo Caicedo, Magister en Matemáticas, quien direccionó y reestructuró la propuesta de trabajo final; a la docente Angélica Sibelys Márquez Calderón, Licenciada en Matemáticas, por acoger las recomendaciones y llevar a la práctica la propuesta metodológica. Finalmente a los estudiantes de los grados sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen, por su atención y esfuerzo en el desarrollo de la estrategia de aprendizaje.

Resumen

Este trabajo final plantea la resolución de problemas matemáticos aplicando operaciones básicas con números racionales en los contextos de las ciencias naturales, mediante la cual el docente reconoce en los estudiantes los errores, los preconceptos y el uso de números racionales en el entorno local. Busca orientar a los estudiantes hacia la adquisición del conocimiento interdisciplinar en temas específicos de operaciones con números racionales y procesos físico-químicos del contenido programático de los grados sexto y séptimo del currículo elaborado por los docentes de la Institución Educativa Virgen del Carmen del corregimiento de Azúcar Buena de Valledupar. Para alcanzar este objetivo, se diseña una secuencia de problemas, los cuales con la orientación del docente pretenden mejorar en los estudiantes las competencias interpretativas, argumentativas y propositivas

Palabras claves: Resolución de problemas, números racionales, interdisciplinariedad y contexto.

Abstract

This final work proposes solving mathematical problems by applying basic operations with rational numbers in the Natural Sciences contexts, through which the teacher recognizes in the students the errors, the preconceptions and the use of rational numbers in the local environment. It seeks to guide students towards the acquisition of interdisciplinary knowledge on specific issues of operations with rational numbers and physical-chemical processes of the program content of the sixth and seventh grades of the curriculum prepared by the teachers of the Educational Institution Virgen del Carmen of the district of Azúcar Buena of Valledupar. To achieve this goal, a sequence of problems is designed, which with the guidance of the teacher aim to improve students' interpretive, argumentative and proactive competences.

Keywords: Problem solving, rational numbers, interdisciplinary and context.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

Este documento es una continuación y profundización de un trabajo de grado titulado "*Propuesta metodológica para la enseñanza de operaciones con números racionales a partir de errores aplicando estrategias de aprendizaje autónomo en los grados séptimos*"[1], el cual se realizó en la especialización en pedagogía para el desarrollo del aprendizaje autónomo otorgada por la Universidad Abierta y a Distancia – UNAD en el año 2006, y junto a esto la experiencia en la orientación de las áreas de matemáticas de séptimo y química de décimo durante los años 2005 al 2010 en la Institución Educativa Camilo Namen Frayja de Chimichagua – Cesar. En la actualidad, el rol que desempeño es de rector de la Institución Educativa Virgen del Carmen, de Valledupar – Cesar, y la intención fue asesorar a la docente asignada en matemáticas, así como participar en el desarrollo de las clases antes y durante la aplicación de la secuencia de problemas, en los que se contextualizaron y aplicaron conocimientos de matemáticas y ciencias naturales, implementando la estrategia de resolución de problemas con operaciones que involucran números racionales; para esto, fue necesario partir de diagnósticos de errores de aprendizaje y estrategias de aprendizaje activo para superarlos. Al implementar la estrategia de resolución de problemas con los estudiantes de los grados de la básica secundaria se busca mejorar el desarrollo de pensamientos interdisciplinarios,

[1] Rosado, Alber. Propuesta metodológica para la enseñanza de operaciones con números racionales [Trabajo de especialización]. Unad. 2007.

puesto que, en este nivel de educación formal es cuando se comienza de manera independiente a profundizarse en las áreas fundamentales y obligatorias, con la desventaja en que se empiezan a fragmentar los conocimientos, es decir, a estudiarse individualmente cada disciplina con un docente por cada asignatura, sin profundizar en la interrelación entre las ciencias o el trabajo en equipos de docentes, tal como se da en situaciones de la vida laboral de muchas empresas, entidades, gremios o familias. Se hicieron intervenciones con pruebas diagnósticas, planteamiento y resolución de problemas aritméticos asociados a las operaciones básicas de los números racionales aplicados en contextos específicos de ciencias naturales, teniendo como referente; estrategias de aprendizaje activo de autores como E. Morín (1999), D. Ausubel (1968), H. Aebli (1988), L. Rico (1995), teoría de G. Polya (2002) y teorías de aprendizaje interdisciplinar.

En la revisión de la bibliografía se encontraron investigaciones o trabajos finales de maestría como la tesis "*Unidad Didáctica: Fracciones"* (León, G. 2011)[2], de España en la que se presenta un análisis del desarrollo histórico del concepto de fracción, se caracterizan algunas dificultades relacionadas con la fracción y se propone trabajar una unidad didáctica en un ambiente de resolución de problemas usando como herramienta de apoyo las TICS. La investigación de (Perera P. & Valdemoro M. 2008)[3] de México en "*Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado"*, que consta de un programa de enseñanza integrado con actividades que giran en torno a varios escenarios afines a la vida real de los niños. Allí, se exhibe cómo las actividades propiciaron en el estudiante la construcción de la noción de fracción y el reconocimiento de algunos de sus

[2] León, G. (2011). Trabajo final de master. Unidad didáctica: Fracciones. (Tesis de Maestría). Universidad de Granada. España.

[3] Perera P. & Valdemoro M. 2008. Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. Educación matemática, vol. 21, núm. 1, abril de 2009, pp. 29-61

significados (relación parte-todo, medida, cociente intuitivo y rudimentos de operador multiplicativo). Serrano, Natalia de España presenta un trabajo de Fin de Grado titulado: "*TIMSS, una prueba internacional de diagnóstico de matemáticas: experimentación y análisis sobre el número racional*"[4], la cual contiene análisis de la prueba internacional de diagnóstico de matemáticas en educación primaria, se desarrolló el tópico matemático las fracciones y los números decimales. Se consultó la tesis: "*Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales*[5]" (Morales, R. 2014) de Colombia, que hace referencia al componente histórico, en ella se documentan ampliamente las dificultades de aprendizaje del concepto y estructura de las fracciones. Por otro lado, Sánchez, M.[6] de Colombia plantea el trabajo titulado "*Re-construyendo los números racionales*", el cual tiene como propósito centrar las nociones sobre fracciones en contextos concretos, teniendo en cuenta la idea de reparto y medida, con materiales continuos y discretos de las fracciones (Sánchez, M., 2012). También, Hurtado, M, 2012[7] de Colombia realiza una experiencia de trabajo final de maestría titulada: "*Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto del colegio San Agustín de Aguazul Departamento de Casanare*", en la que expresa que los estudiantes no logran dar significado a las fracciones, y si bien logran realizar operaciones, presentan dificultades en el momento de comprender los enunciados de los problemas y aplicar las fracciones para resolverlos.

[4] Serrano, Natalia. (2014).TIMSS, una prueba internacional de diagnóstico de matemáticas: experimentación y análisis sobre el número racional. Universidad de Zaragoza. España. [Trabajo de pregrado].
[5] Morales, R. (2014). Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales. Colombia.
[6] Sánchez, Mario. (2012).Re-construyendo los números racionales. (Tesis de Maestría). Unal. Bogotá.
[7] Hurtado, M. (2012). Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto. (Tesis de Maestría). Unal. Bogotá.

Con respecto a trabajos en investigaciones interdisciplinarias, se encontró un documento de la UNESCO (Morín, E. 1999)[8] donde se recomienda trabajar una integralidad multidisciplinar articulando los contenidos de ciencias naturales y otras ciencias en la básica de educación formal. En los estándares básicos para el área de ciencias naturales, se sugiere trabajar interdisciplinariamente la biología, la física y la química[9], este es un referente de orientaciones curriculares sobre la integración de las ciencias. Teniendo en cuenta las referencias anteriores, y en la experiencia que tuve como docente de la básica secundaria, he podido observar que las ciencias se enseñan aisladamente, sin ninguna interrelación de los planes de estudio de cada área de conocimiento, y muchas veces se adopta el esquema del libro de la editorial más influyente o a criterio del docente, el cual trata de acercarse a las orientaciones de los lineamientos y estándares básicos de matemáticas y ciencias naturales, pero realmente en matemáticas no se logra establecer la coherencia vertical y horizontal entre los estándares, ni se sugieren actividades de manera continua que interrelacionen las diferentes ciencias. Así también en las ciencias naturales se enseñan de manera desarticulada o independiente los procesos biológicos, químicos y físicos.

Dentro de los planes de mejoramiento institucional elaborados por los docentes de los grados sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen, se detalla un diagnostico que tiene en cuenta que el corregimiento de La Mesa, tiene como actividad económica principal la agricultura y la ganadería y la institución educativa cuenta con una articulación con el SENA, que permitió crear un plan de estudio con áreas optativas de ciencias agropecuarias y emprendimiento, esto requiere de currículos que permitan articular los contenidos de diferentes asignaturas. En la institución encontramos que de la población total

[8] Morín, Edgar, (1990), Introducción al pensamiento complejo, Ed. Gedisa, Paris, p. 16
[9] MEN. Estándares básicos de competencias, en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Documento No. 3. 1ed. Bogotá: MEN, 2006. p.103

de estudiantes de los grados 6 y 7, un 30% son indígenas, el 43% tienen extra edad, el 90% pertenecen al nivel socioeconómico de estrato 1, más del 60% tienen un rendimiento académico entre bajo y básico, según reporte del sistema de evaluación institucional[10]. Con respecto al desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas se evidencian diversas dificultades en el dominio numérico. Una en particular es la relacionada con la comprensión del concepto de fracción (racional positivo), ya que les asignan significados incorrectos, no establecen relaciones entre las partes del número, y no los asumen como números racionales y muy pocas veces se articulan contenidos de matemáticas con ciencias naturales. Lo anterior origina errores y dificultades para representar, operar, plantear y resolver problemas que involucran racionales positivos. Surge entonces la siguiente pregunta:

¿Cuáles características debe tener una estrategia didáctica que permita a los estudiantes de los grados sexto y séptimo plantear y resolver problemas de ciencias naturales que requieran para su solución de las operaciones básicas de los números racionales?

Para responder la pregunta planteada se propone diseñar una secuencia didáctica que parta del análisis de los errores y dificultades que evidencian los estudiantes respecto al concepto de número racional, sus operaciones, el desarrollo histórico de este concepto y que incorpore situaciones problema en diversos contextos, enfatizando especialmente en el entorno próximo y el contexto de las ciencias naturales, así como en el uso de los números racionales como cociente y opcional como medida. Los objetivos que persigue este trabajo se establecen de la siguiente manera:

---

[10] Tomado de sistema de matrícula institucional (SIMAT) y sistema de evaluación institucional

Objetivo general. Elaborar una secuencia de problemas en contextos de ciencias naturales y del entorno que permitan a los estudiantes de sexto y séptimo grado comprender y aplicar las operaciones con números racionales.

Objetivos específicos

- Identificar algunas dificultades de los estudiantes de sexto y séptimo grado, respecto al planteamiento y resolución de problemas con números racionales, aplicados en ciencias naturales.
- Determinar aspectos históricos, epistemológicos, disciplinares y didácticos que se relacionen con la secuencia de problemas aplicados en ciencias naturales.
- Seleccionar o construir problemas, no rutinarios, de diferentes niveles de complejidad, relacionados con ciencias naturales, que requieran aplicar las operaciones básicas de números racionales.
- Evaluar o aplicar la secuencia de problemas con los estudiantes de sexto y séptimo grado.

El contenido de este trabajo final se ha organizado de la siguiente manera: primero, se presenta el capítulo 1, donde se construyó un marco histórico y epistemológico, el capítulo 2, que desarrolla los componentes disciplinares y didácticos que incluye la teorización, el aprendizaje por resolución de problemas y se discriminan los contenidos matemáticos sobre los cuales se realizó la intervención, específicamente para lineamientos ministeriales del área de matemáticas y ciencias naturales. En el capítulo 3, se presenta el diseño y la implementación de la estrategia didáctica en los grados sextos y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen. El capítulo 4, corresponde al informe del trabajo final como resultado de las anteriores etapas para procesamiento de la información, mientras que el capítulo 5, corresponde a las conclusiones y recomendaciones que se desprenden del trabajo realizado.

1. Marco histórico y epistemológico

Desde la antigüedad el hombre necesitó medir longitudes, áreas, tiempo, masas, etc., medidas que requerían mayor precisión. Al enfrentarse a esto en la vida cotidiana, transcurrieron periodos largos donde descubrieron que no era suficiente poder contar con los números naturales para hacerlo de manera exacta, ya que estas medidas eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma pero que no eran números naturales. Dentro de las primeras civilizaciones que usaron fracciones se menciona la cultura babilónica entre el periodo de 2000–1800 a.c (Sánchez, 2012)[11].

> "Uno de los inconvenientes que existió fue el hecho que los naturales y fracciones eran representados de la misma forma: el punto separador de naturales y fracciones no era escrito, sino que quedaba aclarado por el contexto. Así por ejemplo,  , servía no solo para representar 2.60 + 2, sino además $2+2.60^{-1}$ o también 2.60^{-1} $+2.60^{-2}$. Algunas de las fracciones más sencillas venían representadas por símbolos especiales, como por ejemplo:
>
>  Para ½.
>
>  Para 1/3 y
>
>  Para 2/3". (p.15)

Esta cita en particular, se refiere al trabajo de los babilonios con las fracciones en los textos grabados en tablillas de arcilla, usando un principio de notación

[11] Sánchez M. 3. Op. Cit., p. 103. En: http://corsaria.zonalibre.org/archives/099558.html en diciembre de 2011.

posicional y de base 60. Las fracciones sexagesimales, es decir, los números menores que uno expresados en términos de potencias de 60, 60^{-1}, 60^{-2}, etc., pero en las que los denominadores simplemente se sobreentendían, se siguieron usando por los griegos y en la Europa renacentista hasta finales del siglo XVI, y que fueron reemplazadas por las fracciones decimales. Por su parte, Los antiguos egipcios desarrollaron sus propios sistemas de escritura, uno de ellos y el más antiguo, es la escritura jeroglífica de tipo pictórico, y en el Papiro de Ahmes o Rhind, se expresa en forma de sumas de fracciones unitarias, todas las fracciones de numerador 2 y de denominador impar comprendidos entre 3 y 101, es decir, fracciones del tipo $2/n$, donde n es un número impar. El símbolo usado para la representación de la fracción se reconoce como ***ro*** () y correspondía a una boca que indicaba la cantidad de grano (volumen) que podía contener un bocado, una parte, una fracción[12]. Obsérvese su representación en la figura 1-1.

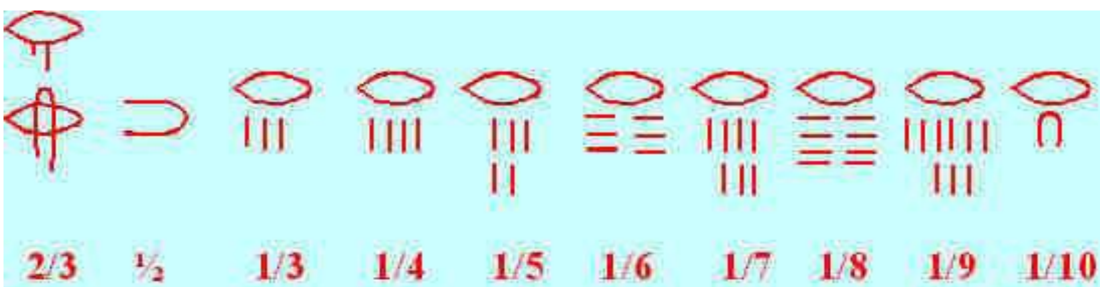
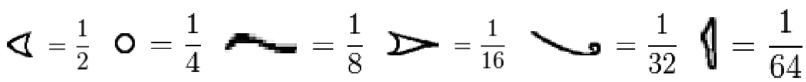


Figura 1-1. Escritura egipcia de números racionales
Fuente: (Hurtado, 2012)

Los egipcios utilizaron un complejo sistema para representar fracciones en medidas agrarias de superficie y volumen, basado en las potencias de 1/2. Los signos de las fracciones mayores fueron tomados de las partes que componían el

[12] Hurtado, María. Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto. [Tesis de maestría], Unal. Bogotá. 2012 .p. 20.

jeroglífico del Ojo de Horus[13] como se observa en la figura 1-2. Cada fracción se representaba mediante una grafía del jeroglífico del ojo:



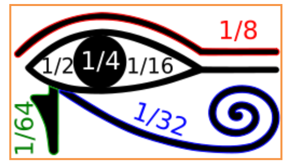


Figura 1-2. El Ojo de Horus.
Fuente: (Ordoñez, 2012)

El concepto de fracción desde su origen respondió a la necesidad de repartir objetos entre varias personas: El problema de distribuir 1, 2, 6 ó 7 hogazas de pan entre 10 personas, es una de las situaciones resueltas en el Papiro de Ahmes [14] y es una de las referencias históricas más antiguas de la aparición de este concepto.

Obsérvese la tabla 1-1, que es parte de la tablilla egipcia la resolución del problema 1:

Tabla 1-1. Tabla egipcia

1/ 10	1/10
2/10	1/5
6/10	1/2 + 1/10
7/10	2/3 + 1/30
8/10	2/3 + 1/10 + 1/30
9/10	2/3 + 1/5 + 1/30

Fuente: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

La forma en la que el escriba Ahmes comprueba el resultado para el caso de n=1, el problema 1 es la siguiente resolución: Cada hombre recibe 1/10 de hogaza. Multiplica 1/10 por 10:
1----------1/10
2----------1/5
4----------1/5 1/10 1/10
8----------2/3 1/10 1/30
En efecto siguiendo el método de multiplicación hace 8 + 2 = 10 ----> 1/5 + 2/3 + 1/10 + 1/30 = 1 luego la solución es correcta, pues 10 * 1/10 = 1.

[13] Ordóñez, Martha E. La fracción, elemento dialogante en el contexto matemático. [Tesis de maestría], Unal. Bogotá. 2012 .p. 29.
[14] http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

En la tesis doctoral de Quispe refiere aportes de la cultura griega en la que según Boyer (1996) citando a Euclides (330 a.c – 275 a.c) que escribe en los *Elementos* (V.3), "Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo" (p. 83); y la noción "razón" centrada en la correspondencia entre pares de números, tiende a poner el énfasis en los aspectos teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida[15]. En Euclides también encontramos el desarrollo de las fracciones continuas el cual se da en dos instancias, producto de la separación que establece para las magnitudes y los números. La primera tiene que ver con las magnitudes, en los libros V, VI y X. La segunda instancia corresponde a los libros VII, VIII y XIX, que tratan de la teoría de números. El algoritmo de Euclides, desarrollado en los Elementos, para hallar el máximo común divisor entre dos números enteros, es un método que permite encontrar la fracción continua de un número racional. Este algoritmo se presenta en el libro VII de los Elementos a través de la siguiente proposición:

- Proposición VII: Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede la unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

La siguiente proposición del libro X, expresan la antiphaeresis, la cual corresponde a la versión para magnitudes de la proposición anterior

- Proposición X: Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad, y de la que queda, una magnitud mayor.

[15] Quispe, Wenceslao. La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con sus operaciones básicas y propiedades elementales. [Tesis Doctoral] Universidad Nacional De Educación Enrique Guzmán y Valle. Lima – Perú. Recuperado de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/Tesis-Wenceslao.pdf.

En este contexto histórico mencionamos que dentro de la cultura griega la escuela pitagórica tuvo sus aproximaciones a los números racionales positivos, encontrándose al mismo tiempo el problema de las cantidades inconmensurables. Al respecto tenemos los siguientes conceptos:

Magnitud. Es un concepto indefinido en la antigüedad, servía para referirse a las longitudes, las áreas, los volúmenes, el tiempo, los pesos, etc., esto es, todo aquello que fuera contable o medible.

Magnitudes conmensurables. Para medir se requiere comparar dos magnitudes, una de ellas se escoge como unidad y en los pitagóricos la unidad debía caber un número exacto de veces en cada una de las magnitudes que se estaban comparando. A esa relación se asignaba como *razón*, entre los números encontrados. Así, se denominan magnitudes conmensurables aquellas para las cuales existe una medida común (unidad de medida, en caso contrario se llamaban inconmensurables[16]**.** Por ejemplo en la figura 1-3, la relación entre los segmentos AB y CD. Este es un posible origen o inicio de los números racionales positivos.

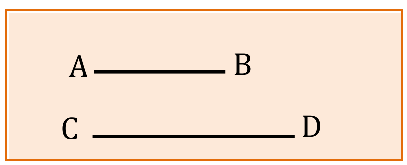


Figura 1-3. Inicios de los números racionales positivos
Elaboración propia

Para los pitagóricos, los números eran únicamente los números naturales y una razón entre dos números no era número sino una fracción y la fracción no era considerada como número. Las fracciones concretas, utilizadas para expresar partes de una unidad monetaria o de una medida, se utilizaban en el comercio, pero tales usos comerciales de la aritmética quedaban fuera del marco de la academia griega propiamente dicha. Por lo tanto, los pitagóricos

[16] Sánchez M. Op. Cit., p.7.

se vieron desagradablemente sorprendidos por el descubrimiento de que algunas razones no podían expresarse por medio de dos números naturales, por no encontrarse una medida común, como por ejemplo la razón de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles a un cateto; llamaron razones conmensurables a las que se podían expresar por medio de números naturales, lo que significaba que las dos cantidades venían medidas por una unidad común. Una razón entre magnitudes inconmensurables recibió el nombre de alogos (inexpresable) o también las llamaron arretos (no tiene razón). También el matemático Diofanto (siglo III, d.c), es uno de los primeros matemáticos griegos que trató las fracciones como números, por ejemplo uno de sus discípulos[17] escribió en su tumba a manera de epitafio plantea un problema de su vida y muerte aplicando "fracciones algebraicas". Véase dicho problema en la siguiente figura 1-4:

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de ella; después, durante la doceava parte de su vida, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una forma desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirlo, llorándolo, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad".

Solución:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+5+4=x$$

$$\frac{2x+x}{12}+\frac{2x+7x}{14}+9=x$$

$$\frac{3x}{12}+\frac{9x}{14}+9=x$$

$$\frac{3.14x+12.9x}{12.14}+9=x$$

$$\frac{42x+108x}{168}+9=x$$

$$\frac{150x}{168}+9=x$$

$$\frac{25x}{28}+9=x \;\rightarrow\; x-\frac{25x}{28}=9$$

$$x-\frac{25x}{28}=9$$

$$\frac{28x-25x}{28}=9$$

$$\frac{3x}{28}=9; x=\frac{9.28}{3}=\frac{252}{3}=$$

$$84\ años$$

Figura 1-4. La Vida de Diofanto
Fuente: Elaboración propia.

[17] Diaz, Faberth, Quijano Maria, et al. Nuevo pensamiento matemático 8. Ed. Libros &libros S.A. Bogotá. P.146.

Investigaciones de Castaño (2014), mencionan que *"a principios del siglo XV, el árabe* Al Kashi *fue quien generalizó el uso de los números decimales tal como los conocemos hoy. De acuerdo con Tamayo et al. (2011), Las matemáticas árabes tienen un auge importante en el manejo de los números racionales e introducen una notación más actual"*[18]*.* El sistema hindú-árabe que utilizamos para escribir números hoy, tiene tres aspectos: valor de lugar, base 10 y el hindú-árabe símbolos para los números 0-9. La primera de estas tres es la más importante, que es el sistema de valor de lugar decimal para escribir números naturales, incluyendo el uso de cero, originado en la India en el siglo VII, y fue completamente desarrollado en el siglo VIII. La primera obra árabe que utilizó el sistema indio para escribir números enteros es Kitab Al-jam Wal-tafriq bi Hisab al Hind de Al-Khwarizmi, que dio algoritmos para suma, resta, multiplicación, división y la traducción latina de este trabajo ayudó a difundir el sistema de valores de lugar decimal, y la interpretación latina del nombre de al-khwarizmi finalmente se convirtió en la palabra "algoritmo"[19].

Gerbert de Aurillac (c. 946-1003 a.c), que más tarde se convirtió en el papa Sylvester II, fue uno de las primeras personas en introducir el sistema de valor de lugar decimal para escribir números enteros (aunque no el número cero, y no fracciones decimales). Gerbert aprendió este material de maestros árabes mientras residía en España, que en parte estaba bajo el control árabe de la época. Este sistema también fue promovido por Leonardo de Pisa[20] (Fibonacci) en su Liber abaci, el cual introdujo el concepto de números quebrados o números "ruptus", empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

---

[18] Castaño, Néstor, Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. [tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Manizales. 2014, p. 26.

[19]Bloch, Ethan. The real numbers and real analysis. DOI 10.1007/978-0-387-72177-4 Springer science+business media, LLC. 2011. P.53-54.

[20] Ordóñez, M. Op. Cit., p. 7.

Posteriormente, el uso de la fracciones decimales fue introducido en las matemáticas europeas por el matemático e ingeniero flamenco Simón Stevin (1548 –1620) en su De Thiende (el arte de las décimas), publicado en 1585. Dicho tipo de fracciones ya se habían utilizado por los matemáticos chinos en el siglo XIII, por el rabino Immanuel Bonfils de Tarascón en 1350, por el matemático alemán Christoff Rudolff en 1530, y por el francés F. Viète en 1579. El uso generalizado de las fracciones decimales en las matemáticas europeas se remonta directamente a Stevin, especialmente después que John Napier (1550-1617) modificase la notación con el punto decimal (o la coma).

El primero en trabajar sobre la definición formal de número racional y el estudio de sus propiedades fue Martin Ohm en un trabajo de 1822. Luego en 1860, Weierstrass definió los racionales como parejas de naturales y los negativos como otro tipo de parejas de naturales. Weierstrass no consideró necesario aclarar la naturaleza de los números naturales. Sin embargo el problema clave para la construcción del sistema de los números racionales consistía en fundamentar los enteros ordinarios por algún procedimiento y en establecer sus propiedades.

La mejor aproximación a los números enteros, a finales del siglo XIX, consistía en introducirlos mediante un conjunto de axiomas. Para ello entre los que impulsaron la formalidad de los números racionales tenemos a Peano, Frege y Russell quienes se dieron a la tarea de aclarar este concepto. El enfoque más utilizado para construir los números racionales fue el presentado por Giuseppe Peano *(1858 – 1932)", (*Kline, 1992.)[21], quien escribe que buscando la precisión del razonamiento, utilizaba grandes dosis de simbolismo, partió de conceptos no definidos como conjunto, número natural, sucesor y pertenecer a; dio cinco axiomas para los números naturales, adoptó los axiomas de reflexividad, simetría y transitividad para la igualdad, definió la adición, la

[21] Kline, M. (1992): El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Vol.1. Alianza universidad, nº 715, Madrid

multiplicación y expuso todas las propiedades acostumbradas para los números naturales. A partir de los números naturales y sus propiedades, se pueden definir primero los enteros positivos y negativos como un nuevo conjunto de números, cada uno de ellos como un par ordenado de números naturales; y dados los enteros, se introducen los números racionales como pares ordenados de enteros destacando el denominador no nulo.

La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros. Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, como fracción y con notación decimal periódico. Como puede observarse, la representación matemática del racional y operatoria viene empleándose desde la antigüedad, con algunas modificaciones, dependiendo de la cultura, lo que puede aportar información que reflejan las dificultades de comprensión y los periodos prolongados para su construcción y formalización.

En la exploración bibliográfica, se revisaron algunos errores cognitivos relacionados con las operaciones entre números racionales, produciendo confusiones en los registros de representación mental de los estudiantes debido a fallas en la estructura curricular y metodológica de enseñanza (Rosado, 2007. p.102), porque la mayoría de los conceptos relacionados con los números racionales aparecían separados en todos los cursos sin ningún vínculo con otros conceptos matemáticos y otras ciencias y mucho menos con el significado de número racional dentro del entorno familiar y escolar. También, el estudiante tiene poca preocupación sobre cómo se usa los números racionales en la vida diaria y se aprecian dificultades relacionadas con la adición, en la que usualmente los estudiantes suman numeradores y suman denominadores, asumiéndolos como números naturales independientes (preconceptos aprendidos en básica primaria)[22] y no como componentes inseparables de una fracción, posiblemente porque no logran dar significado al concepto de número racional y su algoritmo de adición y propiedad distributiva, al punto que no distinguen entre las clases de número, operaciones y propiedades. Existen muchas investigaciones que categorizan los errores en las operaciones de números enteros y racionales, entre ellas: "Radatz *(*1979*),* Rico *(*1992*)* y Astolfi *(*1999*),* referida a los conjuntos numéricos. En la misma dirección, se pronuncia el documento No 3 de los estándares básicos de competencias[23] que hace referencia a las dificultades relacionadas con la reconceptualización de los números racionales, en el cual se plantea que:

> …las primeras situaciones llevan al número racional como medidor o como operador ampliador o reductor (algunos de estos últimos considerados a veces también como "partidores" o "fraccionadores" de la unidad en partes iguales), representado usualmente por una fracción como "¾", o por un decimal como "0,75", o por un porcentaje como "el 75%". Las otras situaciones llevan al número racional como razón, expresado a veces por frases como "3 de 4", o "3 por cada 4", o "la relación de 3 a 4", o por la abreviatura "3:4" (p.59).

La comprensión del concepto de número racional exige que el docente tenga pleno dominio de los diversos contextos, así mismo que sus actividades de aula sean coherentes y abarquen diversidad de situaciones, donde el estudiante pueda diferenciar el contexto, realizar acercamientos a la interdisciplinariedad y por ende el significado de la fracción, que según Fandiño (2005)[24] citado por (Hurtado, 2012, p.22) destaca 14 conceptos o significados sobre fracción:

1. La fracción como parte de un todo; a veces continuo, a veces discreto.
2. La fracción como cociente.
3. La fracción como razón.
4. La fracción como operador.
5. La fracción en probabilidad.
6. La fracción en los puntajes.

[22] Rosado A. Op. Cit., p. 102.
[23] MEN. Documento N° 3. Op. Cit., p. 59.
[24] Hurtado M. Op. Cit., p. 22.

7. La fracción como número racional.
8. La fracción como punto de una recta orientada.
9. La fracción como medida.
10. La fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo.
11. La fracción como porcentaje.
12. La fracción en el lenguaje cotidiano.
13. La conceptualización de la fracción en la teoría de Vergnaud.
14. La conceptualización signo – objeto de Duval.

En el aspecto de interdisciplinariedad, podríamos considerar la hipótesis que al estudiar las ciencias de manera desarticulada, hace que en alguna medida el aprendizaje del estudiante sea descontextualizado y con cierta dificultad para aprender y aplicar los conocimientos científicos. Es así como se tuvo en cuenta observaciones del plan de estudio de la institución que promueven actividades para la enseñanza fragmentada de contenidos aislados; no se identifica el rol de cada área en la formación de los estudiantes ni la relación entre los aprendizajes desde las diferentes áreas. Los docentes diseñan las programaciones y planes de aula de sus asignaturas sin tener en cuenta los contenidos de las otras asignaturas, no se socializan y se enseñan los mismos conceptos desde las diferentes asignaturas. Los docentes evitan compartir experiencias, conocimientos y tienden a subestimar el trabajo de los colegas. La deficientes formación disciplinar y pedagógica y la falta de vocación dificultan la aplicación de estrategia didácticas que estimulen motivación en los estudiantes. Se utilizan estrategias didácticas que no tienen en cuenta los ritmos de aprendizaje ni los intereses de los estudiantes ni la calidad de educación que han recibido y que estimulan la memorización de fórmulas y conceptos aislados considerados como verdades acabadas, el MEN en el documento No. 3[25] de los estándares menciona que “…se enseña y se aprende en forma segmentada, se separan las disciplinas antes de reconocer sus solidaridades, se fragmentan los problemas más que vincularlos e integrarlos...” (p.103).

[25] MEN. Documento N° 3. Op. Cit., p.103.

Estas evidencias observables en el contexto escolar de la Institución Educativa Virgen del Carmen impulsan la implementación del trabajo de grado, de tal manera que permita paulatinamente crear un cambio estructural en nuestro Proyecto Educativo Institucional (PEI) enmarcado en estrategias didácticas que permitan disminuir estos obstáculos o problemática institucional que busque resolver la necesidad de potencializar una enseñanza interdisciplinar que desarrolle el pensamiento complejo desde la niñez a la adolescencia.

2. El concepto de número racional desde los números naturales

En este capítulo se comenta la estructura formal de los números naturales, enteros y racionales desde el pensamiento de Giuseppe Peano, quien implementa un sistema axiomático, partiendo de teoría de conjuntos y relaciones de equivalencia. Iniciamos con los números naturales y terminamos con la construcción formal de los números racionales y sus propiedades, para luego proponer la estrategia didáctica de la enseñanza de operaciones básicas con números racionales a partir de problemas que involucren ciencias naturales desarrolladas en la básica secundaria, usando el concepto de racional como cociente.

2.1 Números naturales

Desde sus orígenes el hombre ha utilizado herramientas intangibles como el pensamiento racional para contar. En este acontecer de necesidades básicas para vivir, se presentaron dificultades en el orden discreto y continuo, es decir, contar objetos que a simple vista están separados o que su esencia es unidades independientes a contar materiales que no se distinguen en unidades separadas, puesto que su esencia es continua (magnitud) y para lo cual se necesita mayor exactitud en la técnica de conteo o de medición. Además se convivía con la influencia de aspectos culturales, religiosos e idealistas que hacían que la evolución de las ciencias fuese más lenta, en el caso de la Matemática se negaban ciertos aportes conceptuales y procedimentales (como los números negativos) que permitían organizar y estructurar el pensamiento matemático. Peano fue uno de los matemáticos que impulso la construcción formal de la teoría de números que a continuación se comenta de manera sucinta.

2.1.1 Relaciones de equivalencia

Una relación de equivalencia es la correspondencia que existe entre los elementos de dos conjuntos y se debe cumplir que la relación sea reflexiva, simétrica y transitiva.

Se parte de un conjunto no vacío representado por A, entonces los elementos $a, b \in \mathrm{A}$ y procedemos a establecer los teoremas siguientes:

Teorema. Los números a, b, c y d son elementos del conjunto A, tenemos que los pares ordenados $(a, b) = (c, d)$ siempre que $a = c$ y $b = d$, se tiene el producto cartesiano AXA definido como:

$$\boxed{\mathrm{AXA} = \{(a, b) : a, b \in \mathrm{A}\}}$$

Y el producto cartesiano entre dos conjuntos A y B se define como:

$$\boxed{\mathrm{AXB} = \{(a, \mathrm{b}) : a \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}}$$

Una relación binaria R en un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano AXA[26]. Y es una relación de equivalencia si cumple las siguientes propiedades:

Reflexiva: $a\mathrm{R}a$ para todo $a \in \mathrm{A}$

Simétrica: Si $a\mathrm{R}b$ entonces $b\mathrm{R}a$.

Transitiva: Si $a\mathrm{R}b$ y $b\mathrm{R}c$ entonces $a\mathrm{R}c$

[26] Ferreira, Jamil. A construção dos números. Textos Universitários, Sociedad Brasilera de Matemáticas. Rio de Janeiro, 2010. p.21-33

Sea $a \in \mathrm{A}$, se define el conjunto: $\bar{a} = \{x \in \mathrm{A},\ x\mathrm{R}a\}$

2.1.2 Axiomática de Peano.

En 1889, Giusepe Peano propuso un conjunto de cinco axiomas con los cuales es posible deducir los números naturales y las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación. Peano define el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales que comienza en cero y prosigue de uno en uno tendiente al infinito. Existe un conjunto $\mathbb{N}$ y una función s: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ que verifica:

a) Existe un elemento de $\mathbb{N}$ al que llamaremos cero (0), esto es, $0\in\mathbb{N}$
b) Existe la llamada aplicación siguiente s: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, $\forall\, \mathrm{n}\in\mathbb{N}$, $s(\mathrm{n})\in\mathbb{N}$
c) El cero, no está en la imagen de s, es decir $\forall\, \mathrm{n}\in\mathbb{N}$, $s(\mathrm{n})\neq 0$
d) La aplicación siguiente s es inyectiva, ósea que a elementos distintos de un conjunto les corresponden elementos distintos de otro conjunto.
e) Se verifica la inducción de:
   - $0 \in \mathrm{X}$
   - Si $k \in \mathrm{X}$ entonces $s(k) \in \mathrm{X}$, siendo $\mathrm{X} = \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ se llama el conjunto de los números naturales que es infinito si existe una función inyectiva f:$\mathbb{N}\rightarrow\mathrm{X}$. Sea s:$\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ la función que asigna el siguiente, entonces: $s(n) \neq n$, para todo $n\in\mathbb{N}$ y la $\mathrm{Imag}(s) = \mathbb{N}/\{0\}$. Los números naturales son un conjunto que tiene un elemento, el cero (Axioma.1), que no es siguiente de ningún otro (Axioma. 3), es decir, se trata del primer elemento del conjunto, y todos los demás elementos tienen cada uno un elemento siguiente (Axioma. 2), de modo que dos elementos distintos tienen siguientes distintos (Axioma.4). El axioma 5 es importante por dotarnos de un método de demostración de propiedades, ya que nos indica que todo conjunto A al que pertenezca el cero, y tal que todo elemento de A tiene siguiente en A, necesariamente ha de coincidir con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Es lo que se acostumbra a denominar método simple de inducción completa.

2.1.3 Operaciones con números naturales

Sea la adición de dos números naturales m y n, la cual denotamos $m+n$, se define como:

2.1.3.1 Adición. Es la operación matemática que aplica la axiomática de Peano, como la función siguiente y desglosamos así:

$m + 0 = m$;

$m + s(n) = s(m + n)$

Si se define como $Sm = \{n \in \mathbb{N}: m + n$ está definida$\}$ y $s(0) = 1$

Proposición. Por inducción de Peano, para todo número natural m, se tiene que $s(m) = 1 + m$ y $s(m) = m + 1$, por tanto $m + 1 = 1 + m$.

$$sig(0) = 1; sig(1) = 1 + 1 = 2; sig(2) = 2 + 1 = 3: sig(3) = 3 + 1 = 4$$

Tomemos m, n y p como números naturales arbitrarios, entonces las propiedades para la adición están definidas por:

- Propiedad asociativa: $m + (n + p) = (m + n) + p$.
- Propiedad modulativa: $m + 0 = 0 + m$
- Propiedad conmutativa: $n + m = m + n$
- Propiedad cancelativa: *Si* $m + p = n + p$ entonces $m = n$

2.1.3.2. Multiplicación. La multiplicación de los números naturales m y n, se denotada por $m.n$, y se definen las propiedades así:

- Propiedad asociativa: $m(np) = (mn)p$
- Propiedad modulativa: Existe $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1.n = n.1 = n$
- Propiedad conmutativa: $nm = mn$
- Propiedad cancelativa: Si $mn = 0$ entonces $m = 0$, ó $n = 0$, es decir, el elemento nulo $m.0 = 0$
- Propiedad distributiva: Sea $m.(n + 1) = m.n + m$, también $m(n + p) = mn + mp$

2.1.3.3. Relaciones de orden en los números naturales.

Definición. Tenemos los elementos $m, n \in \mathbb{N}$, diremos que $m\mathrm{R}n$ si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que: $n = m + p$, R es una relación de orden en $\mathbb{N}$.

Proposición. Para cada $n \in \mathbb{N}/\{0\} = \mathbb{N}^*, n > 0$. $s(n) > n$.

(Ley de tricotomía) Para cada par de números naturales m, n, se tiene una y solo una de las siguientes posibilidades: $m < n$, $m = n$ y $m > n$

Teorema. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ entonces:

- $a \leq b$ implica que para todo $c,\ a + c \leq b + c$
- $a \leq b$ implica que para todo $c,\ a\,c \leq bc$

2.2 Números enteros

Su construcción está basada en los números naturales[27], donde se establece una relación de equivalencia en el conjunto del producto cartesiano de $\mathbb{N}\mathrm{X}\mathbb{N}$.

Teorema. El símbolo de la relación de equivalencia usado por Ferreira, denotado por $\sim$ en $\mathbb{N}\mathrm{X}\mathbb{N}$ definida por $(a, b) \sim (c, d)$ siempre que $a + d = b + c$; es una relación de equivalencia, que se convierte en clase de equivalencia si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

a) **Reflexiva**. Escribiremos que el par ordenado $(a, b) \sim (a, b)$, siempre y cuando $a + b = b + a$ esto es cierto por propiedad conmutativa de los números naturales.

b) **Simetría**. Para verificar esta propiedad establecemos que si la relación $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$.

   Por definición: $(a, b) \sim (c, d) \rightarrow a + d = b + c$.

   Por igualdad $b + c = a + d$,

[27] Ferreira. Op. Cit., p. 42-56.

Por propiedad conmutativa de $\mathbb{N}$, $c + b = d + a$,

Reorganizando por definición tenemos $(c, d) \sim (a, b)$ comprobándose la relación simétrica.

c) **Transitiva**. Si se tiene las hipótesis de las relaciones de las parejas ordenadas $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$.

Por definición de la tercera relación encontramos que $a + f = b + e$ y será la tesis que queremos demostrar:

Por definición de la primera y segunda relación tenemos:

$$1)\ (a, b) \sim (c, d) \Rightarrow a + d = b + c$$

$$2)\ (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow c + f = d + e$$

Si a la expresión o implicación 1) le sumamos f y e en ambos lados tenemos:

$$((a + d) + f) + e = ((b + c) + f) + e$$

Aplicamos propiedad conmutativa y asociativa:

$$(a + f) + (d + e) = (b + e) + (c + f)$$

De la implicación 2) sabemos que $c + f = d + e$ entonces simplificamos por propiedad cancelativa de los números naturales y se verifica $(a + f) = (b + e)$.

Toda relación de equivalencia $\sim$ genera una partición del conjunto y genera una clase de equivalencia, la cual se denota por el par ordenado con una raya encima[28] $\overline{(a, b)}$, es decir:

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \mathrm{X} \mathbb{N} : (x, y) \sim (a, b)\}$$

Las particiones del conjunto $\mathbb{N} \mathrm{X} \mathbb{N}$ se indican de la siguiente manera:

[28] Ibid., p. 42.

$\overline{(0,0)} = \overline{(1,1)}$; $\overline{(2,1)} = \overline{(1,0)}$; $\overline{(0,1)} = \overline{(1,2)}$

Observemos la figura 2-1:

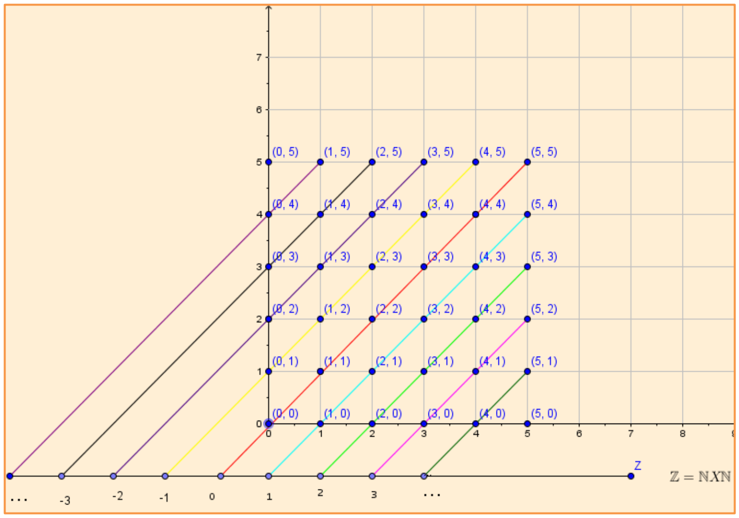


Figura 2-1. Particiones de los números enteros
Elaboración propia (aplicación GeoGebra)

Definición. El conjunto cociente $\mathbb{N}X\mathbb{N}/\sim$ formado por las relaciones de equivalencia de las parejas ordenadas con raya encima $\overline{(x,y)}$ se denota[29] por $\mathbb{Z}$ y será llamado el conjunto de los números enteros. Es decir:

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}X\,\mathbb{N}/\sim) = \{\overline{(x,y)} : (x,y) \in \mathbb{N}X\mathbb{N}\}$$

2.2.1 Adición de números enteros

Dadas las clases de equivalencia formada por los pares ordenados $\overline{(a,b)}$ y $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, definimos la adición de $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}$ como la clase de equivalencia formada por la suma de componente a componente:

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$$

---

[29] Ibid., p. 42.

Teorema. Si las clases de equivalencia, es decir, el conjunto de pares ordenados $\overline{(a,b)}$=$\overline{(a',b')}$ y $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, entonces $\overline{(a,b)}$+$\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}$ +$\overline{(c',d')}$, esto se define como las clases de equivalencias:

$$\overline{(a+c, b+d)} = \overline{(a'+c', b'+d')}$$

Definición. La operación de adición en $\mathbb{Z}$ es asociativa, conmutativa, tiene $(0,0)$ como elemento neutro, satisface la ley cancelativa. Adicionalmente se cumple la propiedad del elemento opuesto o inverso aditivo.

Definición. Dados $\propto, \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $\propto + \beta = \overline{(0,0)}$ entonces a β se le llama el inverso aditivo de $\propto$: Por la unicidad del inverso aditivo podemos introducir el símbolo $-\propto$ y decir que éste será el inverso aditivo de $\propto$; es decir: $\propto + (-\propto) = \overline{(0,0)}$. Es decir, si $\propto = \overline{(a,b)}$ entonces $-\propto = \overline{(b,a)}$. Por la existencia y unicidad del opuesto podemos definir una nueva operación en $\mathbb{Z}$, así:

Definición. La **sustracción** en $\mathbb{Z}$, denotada por (-) se define de la siguiente manera, si $\propto, \beta \in \mathbb{Z}$ entonces: $\propto - \beta = \propto + (-\beta)$.

2.2.2 Multiplicación de números enteros

Definición. Dadas las clases de equivalencia $\overline{(a,b)}$ y $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ definimos el producto de estas clases de equivalencia igual a que la primera componente es la suma de los productos de componentes a componentes y la segunda componente es la suma de los productos de componentes cruzados así:

$$\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)}$$

Teorema. La multiplicación en $\mathbb{Z}$ es conmutativa, asociativa y tiene a $\overline{(1,0)}$ como elemento neutro. Además, es distributiva con respecto de la adición.

Finalmente, si $\propto, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, con $\gamma \neq \overline{(0,0)}$, y $\propto\beta = \beta\propto$ entonces $\propto = \beta$

Relación de orden en $\mathbb{Z}$. Tomemos las clases de equivalencia correspondientes a los pares ordenados $\overline{(a,b)}$ y $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, escribimos $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ si $a+d \leq b+c$. Similarmente, como en el caso de los números naturales, se define $\geq, <, >$.

Teorema. La relación recién definida es una relación de orden (Reflexiva, antisimétrica y transitiva). Además, dados $\propto, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$,

1. $\propto \leq \beta$ implica que $\propto + \gamma \leq \beta + \gamma$
2. $\propto \leq \beta$ y $\gamma \geq \overline{(0,0)}$ implica que $\propto\gamma \leq \beta\gamma$

Ley de Tricotomía. Para cada $\propto \in \mathbb{Z}$, ocurre una y solo una de las siguientes situaciones $\propto = \overline{(0,0)}$, ó $\propto < \overline{(0,0)}, \propto > \overline{(0,0)}$.

Definición. Al tener el par ordenado $(a,b) \in \mathbb{Z}$, decimos que:

1. La clase de equivalencia $\overline{(a,b)}$ es positivo si $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$.
2. La clase de equivalencia $\overline{(a,b)}$ es negativo si $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$.
3. La clase de equivalencia $\overline{(a,b)}$ es no negativo si $\overline{(a,b)} \geq \overline{(0,0)}$.
4. La clase de equivalencia $\overline{(a,b)}$ es no positivo si $\overline{(a,b)} \leq \overline{(0,0)}$.

Intuitivamente la clase de equivalencia $\overline{(a,b)}$ representa la diferencia $a - b$. Si $\overline{(a,b)}$ es positivo, entonces $a > b$, lo que implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + m$; por definición $\overline{(a,b)} \sim \overline{(m,0)}$ siempre que se cumpla que $a + 0 = b + m$ lo que equivale a decir que $\overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$. Análogamente si (a,b) es negativo. Por lo que:

$$\mathbb{Z} = \{\overline{(0,m)} : m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\overline{(0,0)} \cup \overline{(m,0)} : m \in \mathbb{N}^*\}$$

Teorema. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(m) = (m,0)$. Entonces f es inyectiva y se cumplen las siguientes propiedades:

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$
2. $f(mn) = f(m)f(n)$
3. Si $m \leq n$, entonces $f(m) \leq f(n)$.

Definición. Existe un X que es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$. Se dice que X está acotado inferiormente si existe $\propto \in \mathbb{Z}$ tal que $\propto \leq x$ para todo $x \in \mathrm{X}$: En estas condiciones a $\propto$ le llamamos cota inferior de X. Similarmente se definen las cotas superiores.

Teorema. (Principio de buena ordenación) Sea $\mathrm{X} \subset \mathbb{Z}$, no vacío y acotado inferiormente. Entonces X posee elemento mínimo.

Colorario. Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < x \leq 1$*:* Entonces $x = 1$

Colorario. Sean $n, x \in \mathbb{Z}$ tales que $n < x \leq n + 1$*:* Entonces $x = n + 1$

Definición. Sea $x \in \mathbb{Z}$. Definimos el valor absoluto de x, denotado por $|x|$, como:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Definición. Un elemento $x \in \mathbb{Z}$ se dice que es invertible si existe $y \in \mathbb{Z}$, tal que $xy = 1$. (0 no tiene inverso).

Proposición[30] Los únicos elementos invertibles en $\mathbb{Z}$ son 1 y -1.

2.3 Concepto de número racional

Una interpretación del número racional es la referida al cociente de dos números enteros a y b, con b diferente de cero, siendo a, el numerador y b, el denominador representado así: $[\frac{a}{b}]$. El término racional hace referencia a una "ración" o parte de un todo; el conjunto de los números racionales se designa con la letra "$\mathbb{Q}$" por "quotient" que significa "cociente" en varios idiomas europeos[31]. Fandiño cita a Thomas Kieren en uno de sus constructos para definir los números

[30] Ferreira. Op. Cit., p. 56.
[31] http://www.monografias.com/trabajos42/numeros-racionales/numeros-racionales.shtml

racionales y hace referencia a las interpretaciones como: parte-todo, cociente, operador y razón.

2.3.1 Construcción formal de los números racionales

Los números racionales se pueden representar con expresiones de la forma $\frac{x}{y}$, dónde $x, y \in \mathbb{Z}$, con $y \neq 0$. En la construcción de los números racionales reemplazaremos $\frac{x}{y}$ por el par ordenado (x, y). Entonces, se define la siguiente relación en pares de enteros.

Definición[32]**.** Se tiene que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. La relación de equivalencia en $\mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$ está definida por $(x,y) \asymp (z,w)$ si y sólo si $xw = yz$, para todo par ordenado $(x, y), (z, w) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$. Siempre que los componentes $x, z \in \mathbb{Z}$ y $w, y \in \mathbb{Z}^*$. El conjunto del producto cartesiano de los números enteros, diferentes del cero, para la segunda componente se representa así:

$$\boxed{\mathbb{Z}X\mathbb{Z}^* = \{(x, y) /\ x \in \mathbb{Z} \text{ y } y \in \mathbb{Z}^*\}}$$

Definimos las clases de equivalencias denotadas con el par ordenado entre corchetes $[(x, y)]$ con la expresión siguiente:

$$\boxed{[(x, y)] = \{(z, w) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^* |\ x.w = y.z\}}$$

Las clases de equivalencia podemos observarlas en el plano cartesiano como puntos discretos sin incluir el 0 en la segunda componente o en el par (0,0):

[32] Bloch E. Op. Cit., p. 27.

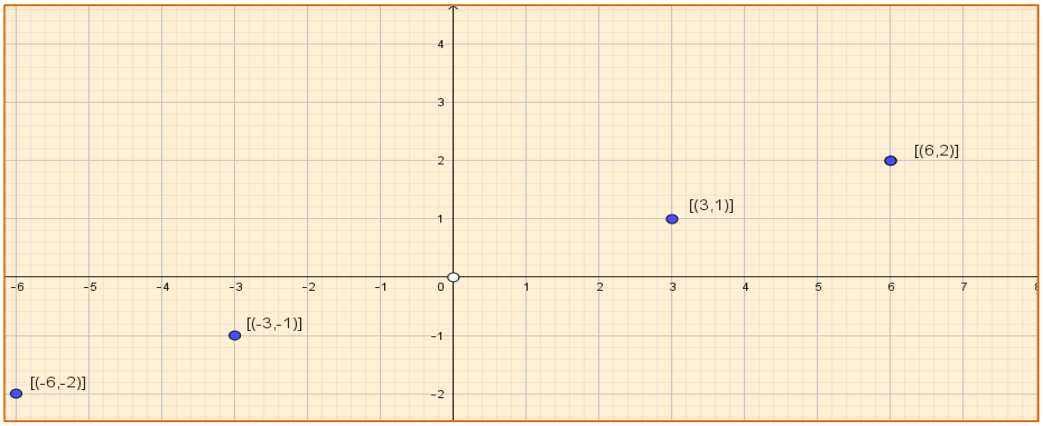


Figura 2-2. Clase de equivalencias de números racionales.
Elaboración propia (aplicación GeoGebra)

Teorema. La relación representada por el símbolo usado por Bloch $\asymp$ es una relación de equivalencia para la construcción de los números racionales, siempre y cuando verificamos que se cumplan las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad. Tomemos los pares ordenados $(x, y), (z, w) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$, y se estipula que $x, z \in \mathbb{Z}$ y $w, y \in \mathbb{Z}^*$. Según la definición $(x, y) \asymp (x, y) \rightarrow xy = yx$, por propiedad reflexiva de la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

Simetría. Tomemos los pares ordenados $(x, y), (z, w) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$ y $(x, y) \asymp (z, w)$, y también $(z, w) \asymp (x, y)$, entonces de la primera expresión, $xw = yz$, por definición o hipótesis, luego reorganizando la expresión $yz = xw$ y $zy = wx$ por propiedad conmutativa, lo que nos lleva a $(z, w) \asymp (x, y)$ por definición.

Transitividad. Tomemos los pares ordenados $(x, y), (z, w), (u, v) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$. Supongamos que $(x, y) \asymp (z, w)$ y $(z, w) \asymp (u, v)$, entonces $(x, y) \asymp (u, v)$, por definición se tiene que $xw = yz$ y $zv = wu$. Aplicamos propiedades de los números enteros, multiplicando en ambos lados $(xw)v = (yz)v$ y $y(zv) = y(wu)$, lo que implica que $(xv)w = (yz)v$ y $(yz)v = (yu)w$, por tanto, $(xv)w = (yu)w$. Sabemos que $w \neq 0$, y por lo tanto deducimos que $xv = yu$, Se sigue que $(x, y) \asymp (u, v)$.

Definición[33]**.** El conjunto de números racionales, denotado $\mathbb{Q}$, es el conjunto de clases de equivalencia de $\mathbb{Z}$X$\mathbb{Z}$* representada por pares ordenados $[(x,y)]$ con respecto a la relación de equivalencia $\asymp$.

$$\mathbb{Q}=(\mathbb{Z}\text{X}\mathbb{Z}^*)/\asymp=\{[(x,y)]/x\in\mathbb{Z} \text{ y } y\in\mathbb{Z}^*\}$$

Por ejemplo si tomamos el par ordenado (a,b) y el cual representa la clase de equivalencia $[(a,b)]$, entonces:

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\text{X}\mathbb{Z}^* \,/\, (a,b)\asymp(x,y)\}$$

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\text{X}\mathbb{Z}^* \,/\, ay=bx\}$$

$$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\text{X}\mathbb{Z}^* \,/\, y=\frac{b}{a}x\}$$

Los elementos $\bar{0}$, $\bar{1}\in\mathbb{Q}$ están definidos por $\bar{0}=[(0,1)]$ y $\bar{1}=[(1,1)]$.

Sea $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}-\{\bar{0}\}$

Operaciones binarias de suma y multiplicación. Las operaciones binarias de suma y multiplicación en $\mathbb{Q}$ se definen por:

Adición: $[(x,y)]+[(z,w)]=[(xw+yz,yw)]$

Multiplicación: $[(x,y)].[(z,w)]=[(xz,yw)]$

Para todos $[(x,y)],[(z,w)]\in\mathbb{Q}$.

- La operación unaria (-) en $\mathbb{Q}$ se define por $-[(x,y)]=[(-x,y)]$ para todos $[(x,y)]\in\mathbb{Q}$.
- La operación unaria ($^{-1}$) en $\mathbb{Q}^*$ se define por $[(x,y)]^{-1}=[(y,x)]$ para todos $[(x,y)]\in\mathbb{Q}^*$.

[33] Ferreira, Op. Cit., p.63.

- La relación $<$ en $\mathbb{Q}$ se define por:
  a) $[(x,y)] < [(z,w)]$ si y sólo si $xw < yz$ cuando $y > 0$ y $w > 0$ ó cuando $y < 0$ y $w < 0$.
  b) $[(x,y)] < [(z,w)]$ si y sólo si $xw > yz$ cuando $y > 0$ y $w < 0$ ó cuando $y < 0$ y $w > 0$, para todos $[(x,y)], [(z,w)] \in \mathbb{Q}$.
- La relación $\leq$ en $\mathbb{Q}$ se define por $[(x,y)] \leq [(z,w)]$ si y sólo si $[(x,y)] < [(z,w)]$ ó $[(x,y)] = [(z,w)]$, para todos $[(x,y)], [(z,w)] \in \mathbb{Q}$.

Teorema. Las operaciones binarias suma y multiplicación, las operaciones unitarias (-) y ($^{-1}$), y la relación$<$, todas en $\mathbb{Q}$, están bien definidas.

Vamos a mostrar que la multiplicación ($\cdot$) y la resta (-) están bien definidas. Sea $(x,y),(z,w),(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}$ X $\mathbb{Z}^*$.

Tenemos que $[(x,y)] = [(a,b)]$ y que $[(z,w)] = [(c,d)]$. Por hipótesis sabemos que $(x,y) \asymp (a,b)$ y $(z,w) \asymp (c,d)$.

Por consiguiente, 1. $xb = ya$ y 2. $zd = wc$.

Mediante la multiplicación de estas dos ecuaciones y reorganizando algunas obtenemos:

1. $xb = ya$, Multiplicamos por z en ambos lados de la igualdad

$(xb)z = (ya)z$

3. $(xz)b = (zy)a$. Aplicando propiedad asociativa y conmutativa de $\mathbb{Z}$

Hacemos lo mismo para la segunda definición

2. $zd = wc$, multiplicamos y en ambos lados de la igualdad

$(zd)y = (wc)y$

$(zy)d = (yw)c$. Aplicando propiedad asociativa y conmutativa de $\mathbb{Z}$

4. $(zy) = \frac{(yw)c}{d}$, remplazando en la primera expresión, tenemos:

$$(xz)b = \frac{(yw)c}{d}a$$

$$(xz)bd = (yw)ca$$

$(xz)\,(bd) = (yw)\,(ac)$, y esto implica que $[(xz, yw)] = [(ac, bd)]$. Por lo tanto está bien definido.

También, $xb = ya$ deducimos que $(-x)b = y(-a)$, y por lo tanto $[(-x, y)] = [(-a, b)]$. Por lo tanto (-) está bien definido.

Propiedades fundamentales de los números racionales[34]. La idea de la demostración del siguiente teorema es reformular las cosas en términos de números enteros, es decir, cada letra representa un par ordenado y luego usar los hechos apropiados que ya hemos visto sobre los enteros.

Teoremas. Sea $r, s, t \in \mathbb{Q}$ existen las siguientes propiedades:

De la adición:

1. Asociativa: $(r + s) + t = r + (s + t)$.
2. Conmutativa: $r + s = s + r$
3. Modulativa Elemento neutro: $r + \bar{0} = r$
4. Invertiva o inverso aditivo: $r + (-r) = \bar{0}$

De la multiplicación:

5. Asociativa: $(rs)t = r(st)$
6. Conmutativa: $rs = sr$
7. Modulativa o identidad: $r.\bar{1} = r$
8. Invertiva: Si $r \neq \bar{0}$, entonces $r\,.\,r^{-1} = \bar{1}$
9. Distributiva: $r\,(s + t) = rs + rt$

De orden:

10. Tricotomía: Precisamente uno de $r < s$ ó $r = s$ ó $r > s$
11. Transitiva : Si $r < s$ y $s < t$, entonces $r < t$
12. Aditiva: Si $r < s$ entonces $r + t < s + t$

---

[34] Bloch E. Op. Cit., p. 29.

13. Multiplicación: Si $r < s$ y $t > \bar{0}$, entonces $rt < st$

14. $\bar{0} \neq \bar{1}$ (No trivialidad).

Probaremos las partes (4), (7), (10) y (13). Supongamos que: $r = [(x, y)]$, que $s = [(z, w)]$ y que $t = [(u, v)]$ para algunos $x, z, u \in \mathbb{Z}$ y $y, w, v \in \mathbb{Z}^*$.

A lo largo de esta prueba se hace uso de las propiedades de los enteros.

(4) $r + (-r) = \bar{0}$ (Invertiva).

Por la definición de negación y adición de números racionales vemos que $r + (-r) = [(x,y)] + [(-x, y)] = [xy + (-x)\, y, yy)] = [(0, yy)] = \bar{0}$,

(7) $r.\bar{1} = r$ (Identidad).

Usando la definición de $\bar{1}$ y la multiplicación de números racionales vemos que $r.\bar{1} = [(x,y)]\,.[(1,1)] = [(x.1, y.1)] = [(x,y)] = r$.

(10) Necesitamos demostrar que precisamente uno de $r < s,$ o $r = s$ o $r > s,$ se mantiene. (Tricotomía). Ahí dos casos.

Primero, supongamos que $y > 0$ y $w > 0$, o que $y < 0$ y $w < 0$.

Entonces la ley tricotomía para los enteros indica que precisamente uno de $yz < xw$ o $yz = xw$ o $yz > xw$ se mantiene.

Si $yz < xw$ entonces $r = s$ por la definición de equivalencia.

Si $yz = xw$, entonces $r < s$ por la definición de la relación < para los números racionales. El segundo caso, donde $y > 0$ y $w < 0$, o donde $y < 0$ y $w > 0$, es similar al primer caso.

(13) Si $r < s$ y $t > \bar{0},$ entonces $rt < st$ (Ley de multiplicación para orden).

Supongamos que $r < s$ y $t > \bar{0}$. Hay cuatro casos:

Primero, supongamos que $y > 0$ y $w > 0$, o que $y < 0$ y $w < 0$, y supongamos que $v > 0$.

Por la definición de menor que < para los números racionales, la desigualdad $t > \bar{0}$ implica $v.0 < u.1$, lo que implica $0 < u$.

Por lo tanto $uv > 0$, de nuevo usando la definición de menor que < para números racionales, la desigualdad $r < s$ implica $yz > xw$.

Entonces $(yz)\,(uv) > (xw)\,(uv)$, y $(zu)\,(yv) > (xu)\,(wv)$. Puesto que $v > 0$, tenemos que $y > 0$ y $w > 0$ implican $yv > 0$ y $wv > 0$, y $y < 0$ y $w < 0$ implican $yv < 0$ y $wv < 0$. Luego deducimos de la definición de menor que < para números racionales que $[(xu, yv)] < [(zu, wv)]$.

En la definición de multiplicación de números racionales sabemos que $rt = [(x,y)].[(u,v)] = [(xu,yv)]$ y $st = [(z,w)].[(u,v)] = [(zu,wv)]$, y que completa el primer caso. Los otros tres casos, que dependen de si cada uno de y, w y v es positivos o negativos, son similares al primer caso.

Cualquier conjunto con dos operaciones binarias que satisface las propedades (1) al (9) se llama un "campo", y cualquier campo que también tiene una relación que satisface las partes (10) al (14) de estos teoremas se llama un "campo ordenado".

Debido a la forma en que construimos los números racionales a partir de los enteros, estos dos conjuntos son totalmente disyuntos. Sin embargo, podemos encontrar una copia del conjunto de enteros dentro el conjunto de números racionales identificando cada número entero x con el número racional $[(x,1)]$, donde pensamos informalmente de $[(x,1)]$ como representando la fracción $\frac{x}{1}$.

Véase en el siguiente teorema que conserva los números 0 y 1, las operaciones binarias adición y multiplicación y la relación menor que.

Teorema[35]. Sea $i\colon \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ definido por $i(x) = [(x, 1)]$ para todo $x \in \mathbb{Z}$

1. La función i: $\mathbb{Z}$-$\mathbb{Q}$ es inyectiva.
2. $i(0) = \bar{0}$ y $i(1) = \bar{1}$
3. Sea $x, y \in \mathbb{Z}$. Entonces
   a. $i(x + y) = i(x) + i(y)$.
   b. $i(-x) = -i(x)$.

[35] Ibid., p.30.

c. $i(xy) = i(x).i(y)$.

d. $x < y$ si y sólo si $i(x) < i(y)$.

4. Para cada $r \in \mathbb{Q}$ hay $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $y \neq 0$ y $r = i(x)\ (i(y))^{-1}$.

Probaremos la parte (4).

(4) Sea $r \in \mathbb{Q}$ entonces $r = [(x,y)]$ para algunos $(x,y) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$, entonces tenemos $i(x) = [(x,1)]$ y $i(y) = [(y,1)]$, como $y \neq 0$, vemos que $[(y,1)] \neq \bar{0}$. Por lo tanto, $i(y) \in \mathbb{Q}^*$. Se deduce que:

$i(x)\ (i(y))^{-1} = [(x,1)].[(y,1)]^{-1} = [(x,1)].[(1,y)] = [(x.1, 1.y)] = [(x,y)] = r$.

Definición. La operación binaria (-) en $\mathbb{Q}$ se define por $r - s = r + (-s)$ para todos $r, s \in \mathbb{Q}$. La operación binaria (÷) en $\mathbb{Q}^*$ Se define por $r \div s = rs^{-1}$ para todo $r, s \in \mathbb{Q}^*$, también dejamos que $0 \div S = 0.S^{-1} = 0$ para todos los $s \in \mathbb{Q}^*$. El número $r \div s$ también se denomina $\frac{r}{s}$.

Observe que si $b \in \mathbb{Q}$ entonces $0 - b = -b$, y si $b \neq 0$ entonces $\frac{1}{b} = b^{-1}$

Pensando en los enteros como contenidos dentro de los números racionales, la función i entonces se convierte en la función que toma cada entero a sí mismo. Podemos entonces combinar la definición con el teorema anterior para ver que para cada $r \in \mathbb{Q}$ hay $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $b \neq 0$ y $r = a/b$. Y pensar en cada entero $n \in \mathbb{Z}$ como identificado con la fracción $n/1$. Por lo tanto, ahora hemos completado el círculo en nuestra discusión de los números racionales, y hemos recuperado nuestra intuición original.

Noción de números racionales como fracción. Además, por el planteamiento (4), Vemos que el número racional a/b, es el mismo que el número racional $[(a,b)]$. Podemos entonces reformular la definición en el siguiente teorema,

Teoremas. Se tiene que los números $a, c \in \mathbb{Z}$ y $(b, d) \in \mathbb{Z}^*$.

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $ad = bc$
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{db}$, $(a,b) + (c,d) = (ad + bc, db)$

3. $-\frac{q}{b} = \frac{-a}{b}$
4. $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
5. Si $a \neq 0$, entonces $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$
6. Si $b > 0$ y $d > 0$, o si $b < 0$ y $d < 0$, entonces $a/b < c/d$, si y sólo si $ad < bc$; si $b > 0$ y $d < 0$, o si $b < 0$ y $d > 0$, entonces $a/b < c/d$, si y sólo si $ad > bc$.

2.3.2 Representación de números racionales.

El concepto de numero racional adopta diversas formas de representación las cuales pueden ser verbal, numérico, gráfico, etc. Observemos por ejemplo los numéricos y gráficos:

Representación numérica: Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir varias formas de expresar el mismo concepto:

1. Notación usual: ½, una fracción se representa por números que están escritos uno sobre otro y que se hallan separados por un segmento de recta horizontal.

2. Decimal: 0.5, 3. Porcentaje: 50%.

4. Sistema sexagesimal (Horario) 12:15:30.

5. Equivalencia: $1/2 = 2/4$.

6. Número mixto: 3/2=1+1/2.

Representación gráfica: Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir dos casos: Representaciones gráficas continua y discretas:

En las gráficas continuas las hay con modelos de área y lineales como ejemplo en las lineales se puede visualizar las fracciones a lo largo de una recta.

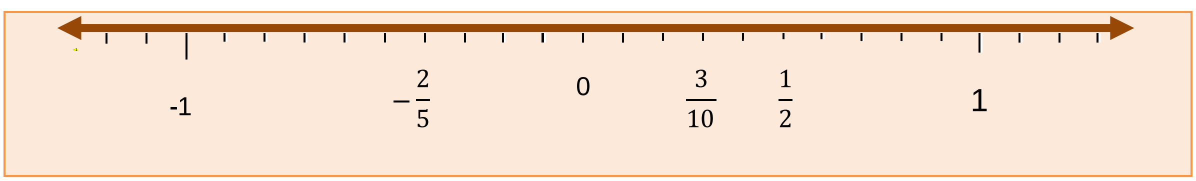


Figura 2-3. Representación de números racionales en recta numérica. Elaboración propia

Una representación gráfica discreta es contar de una agrupación de cuatro variedades de frijoles revueltas la parte de frijoles rosados del total que se observa en la foto o figura 2- 4, que es igual a $\frac{9}{35}$ de frijoles:

Figura 2-2. Representación racional discreta.
Elaboración propia (Fotografía variedades de frijoles)

A continuación se describe brevemente cada operación según el procedimiento utilizado en la escuela que hace parte de la didáctica tradicional para la enseñanza de los números racionales y como se mencionó anteriormente podemos utilizar los números racionales exactamente como aprendimos a usarlas en escuela primaria, aunque con el conocimiento de que existe un fundamento para todo lo que aprendimos y que no es un procedimiento improvisado sino una compleja construcción formal de teoría de números, dicha teoría conlleva a establecer una transposición didáctica cuidadosa que no tergiverse los fundamentos, es decir, que por lo abstracto y complejo del pensamiento numérico se establezca una didáctica de la matemática como disciplina que garantice la comprensión de la misma. Entonces teniendo en cuenta lo anterior revisamos los algoritmos y procedimientos para resolver operaciones con números racionales en la básica secundaria de la siguiente manera:

Adición y sustracción: Con la construcción formal de los números racionales podemos verificar la adición y sus propiedades, así como, entender que la resta es una forma de sumar, puesto que, no es por casualidad que se puede proceder con la adición según sea el caso de las segundas componentes del par ordenado o denominadores como se conoce en la escuela. Cabe destacar que los enteros pueden ser positivos o negativos y diferentes de cero en los denominadores o segundas componentes.

Igual denominador: Para sumar racionales con igual denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $con\ b \neq 0$.

Con la definición formal de los números racionales se verifica que existen relaciones de equivalencias que generan e identifican clases de equivalencia que mantienen las operaciones de adición y multiplicación, así como también las relaciones de orden y que todas interconectadas conservan las propiedades de los números racionales cuya representación como par ordenado $[(a,b)]$ es igual a la expresión de uso cotidiano $\frac{a}{b}$, que se implementó por tradición cultural y por didáctica (recordemos que Fibonaci propuso esta representación), entonces esto conlleva a la reformulación de cada definiciones y teoremas como por ejemplo sumar con igual denominador $[(a,b)] + [(c,b)] = [(ab\ + bc, bb)] = [(a + c)b, bb)] = [(a + c, b)].[(\ b, b)] = (a + c), b)]$, por definición de multiplicación y teniendo en cuenta que la clase de equivalencia $[(\ b, b)] = [(1,1)] = \overline{1}$, se aplica propiedades asociativas, conmutativas, distributiva y modulativa para llegar a la conclusión de que sumar racionales con igual denominador, es sumar los numeradores y se deja el mismo denominador.

Distinto denominador: Para esto se usa el algoritmo deducido en la construcción de la adición de los números racionales, el cual establece la relación de equivalencia, donde se multiplica numerador del primer $\mathbb{Q}$ por denominador del segundo $\mathbb{Q}$ y el numerador del segundo $\mathbb{Q}$ por el denominador del primer $\mathbb{Q}$ y como denominador del resultado el producto de los denominadores de los dos $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\ con\ d\ y\ b \neq 0\ \therefore [(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc, bd)]$$

Multiplicación de racionales. Para multiplicar dos racionales se multiplican sus numeradores y sus denominadores por separado, teniendo así el numerador y el denominador del racional producto. $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}= \frac{ac}{bd} \therefore [(a,b)].[(c,d)] = [(ac,bd)]$.

División de racionales. Multiplicar aplicando la propiedad invertiva de la multiplicación, es decir, numerador por denominador y denominador por numerador: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}= \frac{ad}{bc} \therefore [(a,b)] \div [(c,d)] = [(a,b)].[(d,c)]$

2.4 Estrategias didácticas y contexto

Una intención de los procesos de enseñanza es experimentar una real transposición didáctica para acercar a los estudiantes a un aprendizaje concreto de los conocimientos científicos y la transferencia de los mismos, es decir, que el estudiante pueda ser matemáticamente competente con lo aprendido, para esto se usan herramientas didácticas como las estrategias de aprendizaje preinstruccionales, coinstruccionales y postinstrucionales. Algunas de ellas son la resolución de problemas, elaboración de mapas conceptuales o flujogramas, la planeación de secuencias didácticas referenciadas por teorías de Frida Díaz, David Ausubel, George Polya y John Flavell, que con sus aportes teóricos se buscó articular los contenidos de matemáticas y ciencias naturales.

También, es necesario reconocer el contexto escolar interno y externo a las instalaciones, específicamente de los grados sexto y séptimo, encontramos en el corregimiento de La Mesa, que la actividad económica principal es la agricultura y la institución educativa cuenta con una articulación con el SENA, que permitió crear un plan de estudio con áreas optativas de ciencias agropecuarias y emprendimiento, esto requiere de currículos que permitan articular los contenidos para desarrollar una misión institucional pertinente y eficiente. Son muchos los factores externos que causan su efecto en los procesos de enseñanza – aprendizaje los cuales se han mencionado e influyen directamente en los resultados de las evaluaciones externas del ICFES. Para dar estructura a la propuesta se tomaron los referentes curriculares del Ministerio de Educación Nacional en su Documento No. 3[36]: Estándares básicos de competencias de matemáticas y ciencias. En las matemáticas específicamente del pensamiento numérico se toma el estándar de los grupos de sexto a séptimo que dice:

- *“Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida”.*

Y articularlo con el estándar del entorno físico de ciencias naturales que expresa:

- *“Clasifico y verifico las propiedades de la materia y clasifico materiales en sustancias puras o mezclas.”*

Todo esto con el fin de integrar los contenidos de las matemáticas y las ciencias naturales, además, contextualizarlos al entorno donde viven los estudiantes, ver las siguientes tablas 2-1 y 2-2.

Tabla 2-1. Estándares de pensamientos matemáticos de sexto a séptimo

Pensamiento Numérico	**Pensamiento Espacial**	**Pensamiento Métrico**	**Pensamiento Aleatorio**
Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas <u>con medidas dadas.</u>	Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

Fuente: Documento No 3. Estándares básicos de competencias de matemáticas

[36] MEN. Documento No 3. Op cit., p.84-85 y p. 136-137

Tabla 2-2. Estándares de ciencias naturales de sexto a séptimo

Establezco relaciones entre las características macroscópicas y microscópicas de la materia y las propiedades físicas y químicas de las sustancias que la constituyen				
Me aproximo al conocimiento como científico(a) natural	Manejo conocimientos			
	Entorno vivo	Entorno físico	Ciencia, tecnología y sociedad	Desarrollo compromisos personales y sociales
Realizo mediciones con instrumentos y equipos adecuados a las características y magnitudes de los objetos y las expreso en las unidades correspondientes.	Explica la función del suelo como depósito de nutriente	Clasifica y verifica las propiedades de la materia. Clasifica materiales en sustancias puras o mezclas.	Identifica recursos renovables y no renovables y los peligros a los que están expuestos debido al desarrollo de los grupos humanos.	Escucho activamente a mis compañeros y compañeras, reconozco otros puntos de vista, los comparo con los míos y puedo modificar lo que pienso ante argumentos más sólidos.

Fuente: Documento No 3. Estándares básicos de competencias de ciencias naturales

La estrategia de aprendizaje que se aplica es el planteamiento y resolución de problemas según Polya (2002), que sirvió de referente para otros investigadores como Schoenfeld (1988) citado por Santos Trigo (1997), el cual menciona que: "*Los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clases que presente un microcosmos de la cultura matemática*, esto es, clases donde los valores de la Matemática como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana[37]. Godino (2002) afirma que la resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje, los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo, mediante la resolución de problemas matemáticos[38].

[37] Santos, L. (1997).Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. En: http://fractus.uson.mx/geometria/UnidadIII/Lectura9b.pdf.
[38] Morales R. Op cit., p.52.

Polya (2002)[39], expresa que con preguntas de sentido común y generales, el estudiante mantiene el interés por resolver el problema, puesto que el estudiante debe **comprender el problema** y desear resolverlo exponiendo los datos conocidos, el dato desconocido, las condiciones reflejadas en el problema, que pueda ver diversas alternativas de solución, dibujar una figura, selección de signos indicativos, signos operativos, signos de agrupación y contextualizando aspectos que sea conocidos por los estudiantes. Polya sostiene que la estrategia a seguir corresponde a **elaborar un plan**, tarea que no es nada fácil para los estudiantes, sin embargo, se debe sustentar en los preconceptos, como por ejemplo la experiencia que adquiere con resolución de problemas similares, siempre con la guía de preguntas que direccionen hacia la solución más adecuada. Una vez adelantada estas etapas se procede a **ejecutar el plan,** pues tener bien identificado el plan no garantiza su solución y es precisamente en donde el estudiante empieza a desarrollar estrategias metacognitivas como revisar sus preconceptos, habilidades de análisis, confiar en el plan que trazo y ejecutarlo tal como lo planteó. Precisamente, al ejecutar el plan al pie de la letra le permite reflexionar hacia la última etapa que es la **revisión de la solución**. Polya dice que el estudiante debe desarrollar una visión retrospectiva al punto que "reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas". La resolución de problemas[40] según el documento de los estándares básicos de competencias es un proceso que debería estar "presente durante todas las actividades curriculares de matemáticas en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y del contexto de otras ciencias, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad".

[39] Polya, George. (2002). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas, 1965 (reimp 2002) p. 28 – 40.
[40] MEN. Documento No 3. Op cit., p.52.

En cuanto a referentes didácticos con respecto a la investigación sobre la relación de la matemática con otras ciencias, se citaron ideas generales de un artículo de Rodríguez (2011) en la revista de didáctica de las matemáticas "Números"[41], que dice: *"La geometría de Euclides, trae consigo en sus investigaciones un estudio sobre la naturaleza del espacio*, *comenzando allí a emerger la física. Existió la necesidad de la construcción y la medida de terrenos, entre otras* aplicaciones", en este artículo se manejan conceptos de transdisciplinariedad, biomatemática y se comenta cómo desde Pitágoras se estableció una interrelación entre la Matemática, Música y Física con números racionales, teniendo en cuenta que en la antigüedad posiblemente no se estudiaban las ciencias de manera aislada. En este sentido, citando a Hans Aebli nos dice que la falta de relación entre áreas, una secuencia incorrecta entre niveles o una excesiva fragmentación de las actividades, especialmente en las etapas superiores de escolarización, pueden hacer que la tarea de detectar qué conocimientos previos son importantes para entrar en contacto con los nuevos contenidos sea difícil o sumamente costosa para el estudiante.

Para el desarrollo del trabajo final de maestría y dentro de los aspectos didácticos se pueden usar herramientas como las estrategias de aprendizaje generales mencionadas por Díaz Frida[42], las cuales se pueden emplear en tres etapas o momentos como son: estrategias preinstruccionales, coinstruccionales y postinstrucionales, las cuales se pueden apreciar en el siguiente mapa conceptual:

---

[41] Rodríguez, M (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. Recuperado el 16 de noviembre de 2015 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_01.pdf
[42] Díaz-Barriga, Frida y Gerardo Hernández Rojas (2001). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México: McGraw-Hill

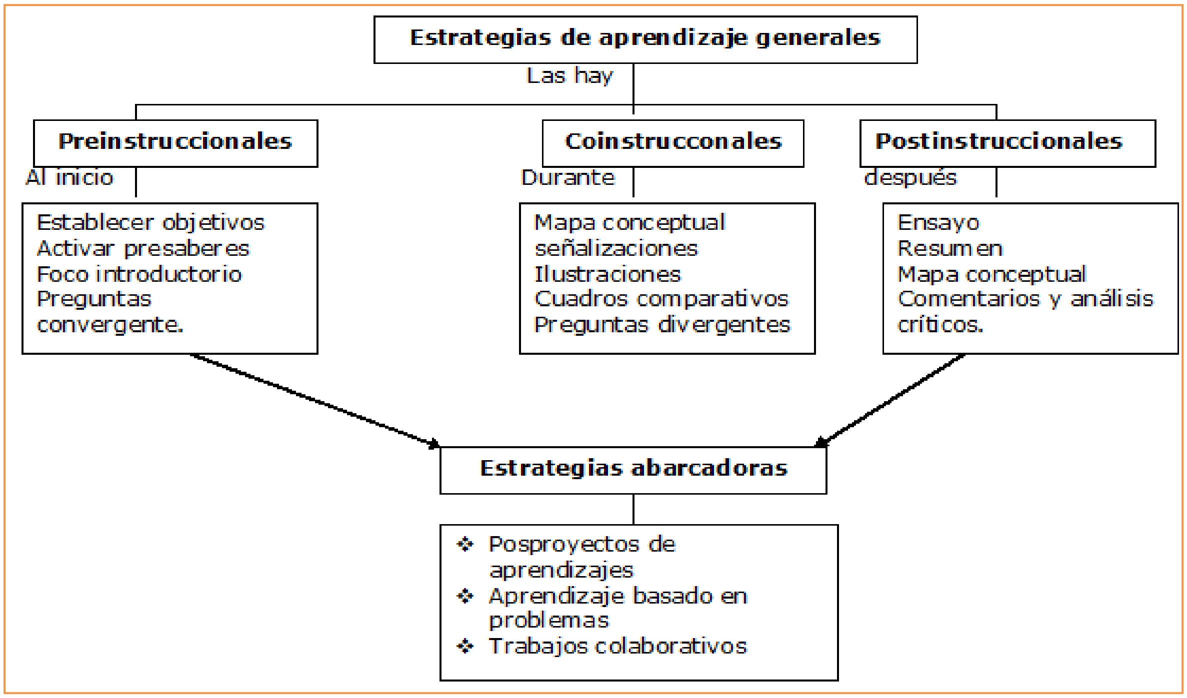


Figura 2-3. Mapa conceptual de estrategias de aprendizaje generales
Elaboración propia de conceptualizaciones de Frida Díaz

De las estrategias de aprendizaje generales y la aplicación de la teoría de resolución de problemas, se puede profundizar en la cuarta etapa de Polya de examinar la solución del problema para guiar a los estudiantes hacia procesos metacognitivos, entendiéndose metacognicion como la define (Flavell, 1993)[43]. Ésta puede dividirse en dos ámbitos de conocimiento:

> **Conocimiento Metacognitivo**: Está estructurado a partir de tres tipos de variables o categorías: **Variable de Persona:** Tiene que ver con el conocimiento que la persona posee acerca de sus saberes, capacidades, limitaciones. Pero también tiene que ver con el conocimiento que la persona tiene sobre los conocimientos, habilidades y limitaciones de las otras personas con las cuales interactúa. **Variable de tarea:** Tiene que ver sobre el conocimiento y la conciencia que un estudiante posee acerca de las características intrínsecas de las tareas, procedimientos, condiciones, requisitos, suficiencia de conocimientos previos y de éstas en relación con él mismo. **Variable de estrategia:** Tiene que ver con los conocimientos que el estudiante posee sobre las estrategias y técnicas que maneja y utiliza ante las diferentes situaciones cognitivas (aprender, comprender,

[43] Flavell, J. H. (1993). El desarrollo cognitivo. Madrid: Visor.

> analizar, inferir, solucionar problemas, generalizar…) y la calidad de los resultados que tales estrategias le arrojan. **Experiencias metacognitivas:** conocidas como experiencias conscientes sobre asuntos cognitivos o afectivos (pensamientos, vivencias, sentimientos…). Aquí es importante aclarar que para que una experiencia clasifique como metacognitiva, es necesario que posea relación con una situación, tarea o empresa cognitiva. Ejemplos de ello: sentir que es difícil comprender determinada situación de aprendizaje; Comprender que no se tienen los suficientes elementos previos para abordar determinada tarea. (p.8)

En la medida en que el estudiante va tomando conciencia del proceso de la metacognición, mejora su conocimiento y su experiencia, se muestra más capacitado para responder apropiadamente a las experiencias metacognitivas, entonces le es posible, cambiar las metas, depurar su conocimiento metacognitivo, reconsiderar estrategias, controlar ejecutivamente la cognición"

El siguiente mapa conceptual resume la estrategia de metacognicion:

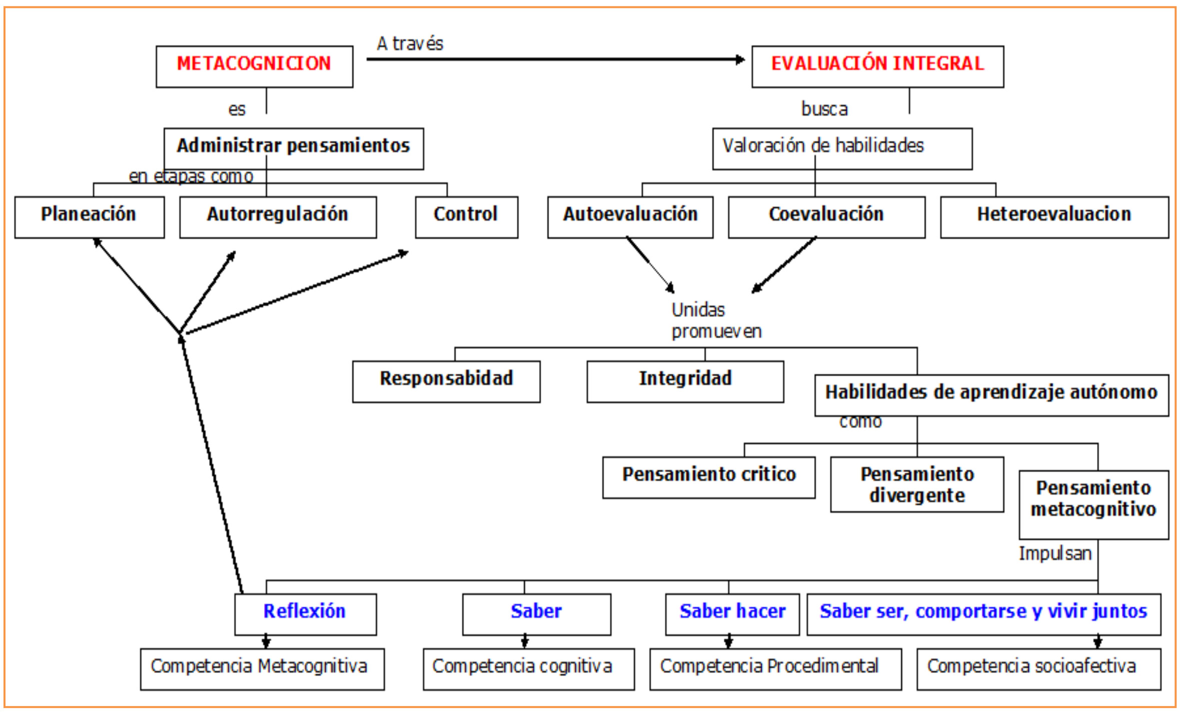


Figura 2-4. Mapa conceptual de metacognicion.
Elaboración propia

Existe la recomendación de desarrollar un pensamiento complejo (Morin, 1994) en los estudiantes y una forma de aprender, que pueda potenciarse mediante la interdisciplinariedad proponiendo actividades concretas que se caracterizaran por ser realista, contextualizadas, de trabajo cooperativo, utilizar contenidos de diferentes asignaturas. Al respecto, Jurjo Torres. (1994)[44] citado en el Documento No 3 del MEN, recuerda que:

> La enseñanza basada en la interdisciplinariedad tiene un gran poder estructurante ya que los conceptos, marcos teóricos, procedimientos, etc., con los que se enfrenta el estudiantado se encuentran organizados en torno a unidades más globales, a estructuras conceptuales y metodológicas compartidas por varias disciplinas (p.102).

Los estudiantes con sus conocimientos previos analizan la situación planteada y determinan en qué aspectos debe profundizar para llegar a su solución, no solo en relación con los esquemas conceptuales sino también a los procedimientos o estrategias que utilizan normalmente, así como a los valores, actitudes y normas asimiladas. De esta manera se obtiene un cambio no solo conceptual, sino metodológico y actitudinal.

En cuanto al contexto encontramos aportes del documento de los estándares básicos de competencias del ministerio de educación nacional el cual refiere que hay tres contextos distintos pero muy relacionados entre sí.

1) Contexto inmediato o contexto de aula, creado por la disposición de las paredes, ventanas, muebles y materiales, por las normas explícitas o implícitas con las que se trabaja en clase y por la situación problema preparada por el docente.
2) El contexto escolar o contexto institucional, configurado por los escenarios de las distintas actividades diarias, la arquitectura escolar, las tradiciones y los saberes de los estudiantes, docentes, empleados administrativos y directivos, así como por el PEI, las normas de convivencia, el currículo explícito de las distintas áreas curriculares y el llamado “currículo oculto” de la institución.

[44] Torres, J. (1994) Globalización e interdisciplinariedad: el currículo integrado. Morata. Madrid, pág.75. En Documento No. 3. Estándares básicos de competencias de ciencias. p.102

3) El contexto extraescolar o contexto sociocultural, conformado por todo lo que pasa fuera de la institución en el ambiente de la comunidad local, de la región, el país y el mundo.

   En cierta manera se propone tener en cuenta estos contextos sociales al momento de diseñar problemas de aprendizaje de las ciencias en mención.

3. Diseño metodológico

La investigación es de carácter descriptiva, realizamos observaciones directas, aplicación de cuestionarios diagnósticos y resolución de problemas por estudiante individualmente y en grupo aplicados al contexto local y de aula integrando ciencias naturales relacionando números racionales y sus operaciones empleando el concepto de cociente y opcional medida. Para alcanzar los objetivos específicos, se propone lo siguiente:

Para el logro del objetivo 1. Identificar algunas dificultades de los estudiantes de sexto y séptimo grado, respecto al planteamiento y resolución de problemas con números racionales aplicados en ciencias naturales. Se revisaron referencias bibliográficas, se diseñaron dos pruebas diagnósticas de 5 puntos cada una para identificar errores y dificultades, que contengan problemas de interpretación y conocimientos de números racionales y otra con problemas de planeación, argumentación y proposición de operaciones con números racionales del contexto local e interdisciplinario. Ver anexo B.

Para el logro del objetivo 2. Determinar aspectos históricos, epistemológicos, disciplinares y didácticos que se relacionan con la secuencia de problemas. Se construyeron los marcos teóricos con la revisión de fuentes bibliográficas de matemáticas y ciencias naturales acordes a operaciones con números racionales y a la estrategia de aprendizaje de planteamiento y resolución de problemas.

Para el logro del objetivo 3. Seleccionar o construir problemas, no rutinarios, de diferentes niveles de complejidad, relacionados con otras ciencias, que requieran aplicar las operaciones básicas de números racionales. Se hizo el análisis estadístico descriptivo de las pruebas diagnósticas para detección de errores y dificultades de los estudiantes, que unido al marco teórico, permitió estructurar los problemas de diferentes niveles de complejidad para la enseñanza de dichas operaciones, aplicados en ciencias naturales.

Se llevó al aula de clase situaciones que representan el entorno de los estudiantes y así acercarlo a la comprensión del concepto y de las operaciones con números racionales partiendo de su propia realidad; haciendo énfasis en el concepto de número racional como cociente y opcional como medida. Salvador Llinares (1997)[45], citando a Kieren (1976) establece que el concepto de fracción dependía de varios subconstructos, y que su entendimiento en general, consistía en ganar una comprensión de los diferentes significados así como sus interrelaciones. En caso específico de nuestro colegio se observan debilidades en el desarrollo curricular de dichos conceptos, de tal manera que por la complejidad de la enseñanza de las fracciones y sus conceptualizaciones de números racionales algunos docentes inician en el grado cuarto los procesos de enseñanza de las fracciones principalmente desde el concepto parte – todo descuidado las otras interpretaciones y la pertinencia necesaria para mejorar a corto y largo plazo los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en este campo numérico.

La teoría de número racionales nos muestra que el constructo parte – todo se relaciona con los otros constructos, pero el docente podría usar con más frecuencia las interconexiones entre parte – todo, cociente y medida en contextos continuo y discreto que nos permiten plantear resolución de problemas operando con adición y multiplicación de números racionales. En la educación básica cuando se habla de un contexto continuo para las fracciones, se usan las

[45] Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). Fracciones: La relación parte-todo. Madrid: Síntesis.

magnitudes de área y longitud y para los contextos discretos, se hace referencia a conjuntos con elementos que puedan separarse y manejar con los números naturales, de tal manera que se evidencia poco uso de unidades de volumen, masa, velocidad, etc., en situaciones que son contextos continuos y ameritan mayor complejidad. Salvador Llinares citando a Kieren (1980), refiere que en la interpretación de fracción como cociente se asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro (división indicada). Dividir una cantidad en un número de partes iguales dadas. El constructo número racional como cociente muestra relaciones de equivalencia, con unas operaciones de adición y multiplicación, que cumplen ciertas propiedades que le dan al conjunto la estructura de cuerpo conmutativo.

Para el logro del objetivo 4. Evaluar la secuencia de problemas con los estudiantes de sexto y séptimo grado. Se estructuraron y aplicaron las secuencias didácticas donde se privilegia el concepto de número racional como cociente, que permitió, de acuerdo al nivel educativo y al nivel de complejidad, una participación activa de los estudiantes. Ver anexo C.

3.1 Paradigma crítico-social

Introduciremos la autorreflexión critica en los procesos de la enseñanza y aprendizaje del conocimiento en matemáticas y ciencias naturales y tendrán en cuenta principios como comprender la realidad y el contexto local en el aprendizaje de las ciencias de manera práctica, participativa y de trabajo colaborativo durante el desarrollo de la secuencia didáctica donde se privilegia el concepto de numero racional como cociente dentro de la programación de aula.

3.2 Tipo de investigación

La investigación-acción educativa (I-A-E) según (Restrepo, 2002), expone un paradigma crítico-social que busca formar al maestro como investigador de su propia práctica, reflexionando continuamente, para posteriormente efectuar acciones en búsqueda de mejorar el aprendizaje del docente y los estudiantes.

3.3 Método

Desarrollaremos el método crítico social, ya que revisa su reflexión en el quehacer docente y plantea nuevas alternativas que parte de lo particular hasta llegar a lo general (inducción) y de lo general para llegar a lo particular (deducción). En síntesis, lo que busca el método es realizar un desarrollo de los objetivos específicos de forma jerárquica a partir de un primer momento que es el diagnóstico y su correspondiente análisis porcentual, identificando algunos casos de estudiantes con fortalezas y otros con dificultades de aprendizaje. En un segundo momento, identificamos todas las acciones posibles, para consolidar elementos comunes del diagnóstico y tomar los elementos para la intervención con la secuencia didáctica donde se privilegia el concepto de número racional como cociente y opcional medida se construyen las actividades a realizar en cada fenómeno educativo. En un tercer momento, se evaluarán los resultados, llevados a la práctica por medio de una validación de las secuencias didáctica.

3.4 Instrumento de recolección de información

Se tienen fuentes primarias como, cuestionarios diagnósticos y guías entre otras. Las fuentes secundarias son libros, revistas, prensa, la información obtenida en internet, bases de datos, entre otros. Para el tratamiento y procedimiento para el análisis de la información, se procesa y tabula la información con herramienta informática de Excel y análisis estadístico descriptivo sin profundizar en lo cuantitativo, puesto que se tendrá en cuenta otras investigaciones como referentes para identificar las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las operaciones básicas con números racionales.

3.5 Población y muestra

Para el análisis estadístico se consideró que por ser una sola institución educativa que posee una población estudiantil de 480 estudiantes desde preescolar a undécimo (en su mayoría un grupo por grado) se podría aplicar el estudio a los dos grados de sexto y séptimo y por el bajo tamaño de la muestra el análisis estadístico sea porcentual y descriptivo.

Población: La población que recibe las clases de la temática en cuestión va desde cuarto grado de primaria hasta octavo grado de secundaria alrededor de 170 estudiantes. Sin embargo, se tuvo en cuenta la población de los grados sexto y séptimo sobre el cual se desarrolló el Trabajo Final.

Muestra: Tres grados de básica secundaria (601, 602 y 701 para un total de (88 estudiantes) de 21, 23 y 44 estudiantes respectivamente) y cuyas edades oscilan según el grado y grupo donde cursa así:

Sexto A (601) rango de edad (9 – 14)

Sexto B (602) rango de edad (10 – 17)

Séptimo A (701) rango de edad (10 – 17)

3.6 Delimitación y alcance

Aplicamos una secuencia de problemas de ciencias y del entorno local, donde se requiere para su solución operaciones básicas con números racionales, este referente está ubicado en el plan de estudio de matemáticas en el contenido de la unidad II Números Racionales, específicamente en el subtema de operaciones básicas, donde se privilegia el concepto de numero racional como cociente, opcionalmente como medida y transversalmente se toman contenidos del plan de estudio de ciencias naturales en procesos biológicos, físicos y químicos.

4. Informe del trabajo final

Inicialmente se generó un dialogo abierto con los estudiantes en cada uno de los grados y el dialogo más común que atrajo la atención fue los cultivos agrícolas, los paseos o salidas pedagógicas y las comidas; permitiendo identificar el contexto regional como ir al rio los fines de semana y de almuerzo hacer sopa de mondongo y arroz de fideo o mirar los cultivos de maíz, yuca, etc.. Algunos estudiantes comentaron sobre los ingredientes para sopa refiriéndose a palabras como: kilo, libra, onza, pedazos, trozos, etc. Entonces propusimos (maestrante y docente) indagar competencias de resolución de problemas que aborden estos conceptos de ciencias naturales y operaciones con números racionales.

4.1 Diseño de pruebas diagnósticas

Se diseñaron dos cuestionarios diagnósticos para la exploración de pre saberes de los estudiantes de los grados sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen, los cuales miden la comprensión de resolución de problemas del contexto sociocultural y las ciencias naturales desde unos niveles de complejidad inferiores a superiores. Estos cuestionarios van a medir los conocimientos previos de los estudiantes en aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales en temáticas específicas de los números racionales y clasificación de la materia y sus propiedades, con el fin de diagnosticar errores y plantear una secuencia de problemas que permitan a los estudiantes poner en práctica estrategias de aprendizaje para mejorar sus competencias básicas en las dos áreas de conocimiento.

4.1.1 Cuestionario diagnóstico No. 1

Cada situación tiene un propósito, y se persigue que el estudiante muestre sus capacidades para resolver problemas del contexto, de diferentes niveles de comprensión. Las situaciones son las siguientes:

En nuestro corregimiento es común que los padres envíen a los hijos a comprar en la tienda del vecino los alimentos para las diferentes comidas. Algunas veces con lista de productos y otras veces los niños aprenden de memoria en el momento que van a comprar en la tienda. Pedrito es un niño aventajado que no necesita lista de compra y memoriza todo. La mamá de Pedrito va preparar una deliciosa sopa de mondongo

Fuente: http://www.cocinasemana.com/

La mamá lo envía a comprar lo siguiente:

- Una pata de res de dos kilogramos.
- Medio kilogramos de panza.
- Un kilogramo y medio de yuca.
- Tres cuartos de kilogramos de zanahoria.
- Un cuarto de kilogramo de habichuelas
- Seis mazorca.

De acuerdo al texto anterior, conteste las siguientes preguntas:

1. En el mismo orden de la lista escribe como se representa el número o cantidad que corresponde a cada ingrediente.

____
____
____
____

2. ¿Cuáles diferencias tienen dichos números entre sí?

____

3. Ordene los números de mayor a menor.

____

4. Un agricultor siembra 1/6 de su campo con maíz y 2/6 con yuca. Expresa en número la parte del terreno que está sembrado y luego has una gráfica que represente la siembra.

____

5. En un estanque se atrapo una arroba de pescado, luego un cuarto de arroba se devolvió al estanque por baja talla. Del total de la pesca se tomó la sexta parte para consumo de su familia y el resto lo vende a $ 45.000 la arroba. ¿Cuánto dinero se pagó por la compra?

____

6. Un terreno está dividido en cinco partes iguales para sembrar fríjol, arroz, yuca, plátano y papa.

- De estos cultivos, ¿cuánto terreno está sembrado de granos y cuanto de bastimento?

____
____

¿Cuánto terreno está sembrado de tubérculos?

____
____

¿Cuánto terreno está sembrado de leguminosa?

____
____

- ¿Cuánto terreno está sembrado de cereales?

____
____

¡Éxitos!

- La primera situación problema se subdivide en tres preguntas las cuales miden desempeños básicos de reconocimiento de símbolos de los diferentes números incluidos en el problema. La segunda busca que el estudiante identifique los diferentes tipos de números y su relación de orden. Aunque es una situación parte – todo lo que se requiere es que el estudiante identifique números naturales, enteros y racionales en un contexto continuo en el que se puede usar el pensamiento geométrico – espacial para representar áreas.

- El problema No. 4, indaga sobre la adición de racionales homogéneos y su representación gráfica, en contextos de procesos biológicos y físicos.
- El problema No. 5, plantea la necesidad de un análisis más complejo que requiere de sustracción, división y multiplicación de racionales heterogéneos, en contextos de procesos biológicos y físicos. Relacionado con la producción piscícola dentro del programa de articulación con el SENA.
- El problema No. 6, trata aspectos de adición de racionales homogéneos teniendo en cuenta aspectos geométricos, biológicos y agrícolas.

4.1.2 Cuestionario diagnóstico No. 2

Aunque en el cuestionario diagnostico No. 1, se empieza a evidenciar la dificultad de enfrentar resolución de problemas con el cuestionario diagnostico No. 2, se busca conocer como el estudiante esquematiza, realiza bosquejos y plantea operaciones para organizar los pasos necesarios en la solución de un problema que pueda sustentarse en la estrategia de Polya.

Este cuestionario tiene como objetivo conocer preconceptos del estudiante en cuanto a su capacidad de planear y organizar ideas para abordar problemas. Consta de dos situaciones problemas las cuales indagan la capacidad de los estudiantes para organizar, planear y resolver ordenadamente problemas cotidianos en el contexto sociocultural y componentes conceptuales interdisciplinares, es decir, indaga algunos conceptos de ciencias naturales y contiene información de datos discretos y continuos, sin embargo, explora competencias únicamente para planear, sin profundizar en operaciones numéricas. Las situaciones son las siguientes:

Ana se prepara una limonada en un vaso de 10 onzas de agua, una cucharita de limón, tres cucharitas de azúcar y cuatro cubitos de hielo para que quede bien helada. Cuando se disponía a bebérsela llegaron sus dos hermanos menores y le pidieron un poco, para responder puedes guiarte con la capacidad de los vasos desechables como lo muestra la figura.

Fuente. https://articulo.mercadolibre.com.

Teniendo en cuenta lo anterior, conteste las siguientes preguntas:

1. Describa una estrategia organizada acerca de cómo se prepara una limonada, que permita conocer las cantidades de los ingredientes.______
2. ¿Qué tema específico de ciencias naturales se puede asociar a este problema y que tipo de combinación se da entre el agua y el limón?___________________
3. ¿Cuáles inconvenientes podría tener Ana al momento de preparar la limonada? _____________________
4. ¿Qué tendría que hacer Ana para darle limonada a sus hermanos en cantidades iguales y le quede para ella? ____________________________
5. Representa con un dibujo y las cantidades que dividió entre ellos. .___________________________

En el patio de la casa de Luis hay una huerta que es un terreno abonado de seis metros cuadrados para la siembra de verduras. Las semillas que tienen son tomate, cebolla y ají pimentón. Escriba una estrategia para organizar la siembra del terreno

.________________________________

¡Éxitos!

- La pregunta 1 le exige a los estudiantes que propongan una estrategia para preparar una limonada conociendo las cantidades. Lo que se persigue es que mencione ordenadamente los procesos o pasos para su elaboración.
- La pregunta 2 mide un nivel interpretativo en el contexto de las ciencias naturales en procesos químicos, donde el estudiante por lo menos mencione las palabras relacionadas con el tema como por ejemplo mezcla, ácido u otros términos asociados a la química. El estudiante debe identificar las cantidades, el número con que se representa la cantidad, dibujar o hacer un bosquejo del experimento e identificar temas asociados de ciencias naturales.
- En la pregunta 3 el estudiante retroalimenta la estrategia planteada anteriormente y prevé posibles fallas o equivocaciones en el proceso.
- La pregunta 4 se refiere al tema específico de los números racionales, se espera que el estudiante identifique dichos números y describa una división.
- La pregunta 5 referida a la pregunta anterior verifica el nivel de interpretación y representación gráfica del estudiante al resolver el problema.

En la segunda situación problema se le presenta un contexto agrícola de medición de superficie de un terreno para sembrar. El estudiante traza un plan y propone una solución teniendo en cuenta la medida y la división del terreno.

4.2 Resultados de los cuestionarios diagnósticos

Una vez aplicados los cuestionarios diagnósticos en los tres grados de básica secundaria. Se realiza el correspondiente análisis porcentual que refleja los datos en una tabla de dos filas, los números de la primera fila corresponden a cada problema o pregunta del cuestionario diagnóstico y la segunda el porcentaje obtenido, para luego representarlo en un diagrama de barras.

4.2.1 Resultados del grado 6A

4.2.1.1 Cuestionario No. 1.

Tabla 4-1. Porcentaje de aciertos cuestionario No. 1 Grado 6A

Problemas	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de aciertos	26,3	10,5	0,0	21,1	0,0	10,5

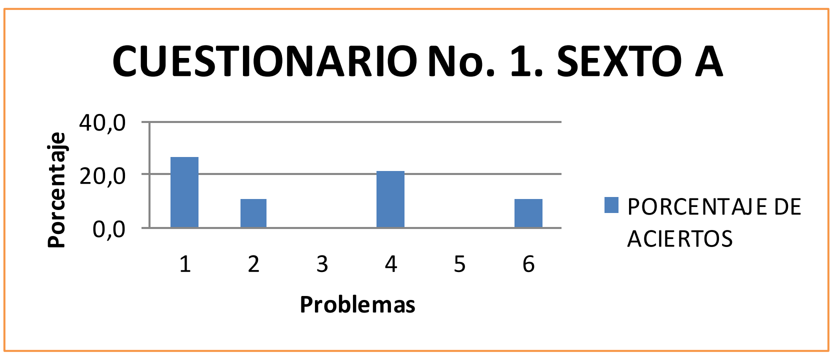
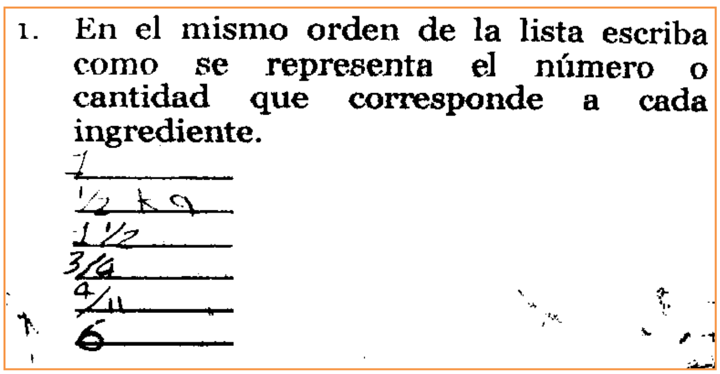


Figura 4-1. Diagrama de barras del cuestionario No. 1. Grado 6A

De acuerdo a los datos anteriores, se observa que en la primera pregunta sólo el 26,3% de los estudiantes del grado sexto (A) logró representar correctamente los símbolos numéricos, en la segunda el 10,5% logra diferenciarlos de acuerdo a los tipos de números, pero en la tercera no logran establecer una relación de orden de mayor a menor. Esto demuestra la dificultad que existe en la comprensión de los números naturales y racionales en cuanto a su visión de conjunto contenido uno en el otro respectivamente, puesto que, el estudiante de lo aprendido de los números naturales en su paso por la básica primaria, posiblemente ha creado un obstáculo epistemológico al no dar el paso para la construcción de los números racionales y a esto se le puede agregar la necesidad de aumentar sus competencias de argumentación y proposición como consecuencia de unas prácticas de aula y estrategias de aprendizaje deficientes. Observamos, por ejemplo, la respuesta de un estudiante con respecto a la pregunta 1, donde confunde cuatro onzas con cuatro onceavos:


1. En el mismo orden de la lista escriba como se representa el número o cantidad que corresponde a cada ingrediente.

1
1/2 kg
1 1/2
3/4
4/11
6

Figura 4-2. Rta pregunta 1 del cuestionario No.1, estudiante del grado 6A.

Analicemos por ejemplo la pregunta N° 1, que exige un nivel de competencia interpretativo, donde el grado de complejidad no requiere mucho esfuerzo, sin embargo, solo el 26,3% lo alcanzan, esto nos da a entender que el 73,7% de los estudiantes no lo logra porque poseen dificultades para representar los números racionales y sus diversos significados. Una posible categoría de dificultad es la referida por Radatz, que refiere la existencia de errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

En el problema 4, sólo el 21,1% representa una gráfica e intuye la respuesta correcta. Resaltamos por ejemplo el estudiante que respondió según se observa en la figura 4-3, este estudiante aprovecha las líneas horizontales de la guía y aproxima los espacios con líneas curvas, trazadas por él, en respuesta a la división del terreno, luego, hace los pictogramas que representan lo sembrado luego, una parte con maíz, dos con yuca y tres sin sembrar. Aunque es un contexto de parte todo continuo el análisis se centra en la posibilidad de plantear la operación de adición de números racionales homogéneos, lo cual no hizo, pero el dibujo es una buena aproximación. Todos los estudiantes no plantearon la adición y simplificación requerida y el porcentaje corresponde a respuestas gráficas como la que se menciona. En general, los estudiantes tienen dificultades para plantear y resolver problemas de nivel básico relacionando operaciones con racionales. En los problemas 5 y 6 se espera un nivel de desempeño más alto, pero debido a la dificultad anterior no logran resolver el problema 5.

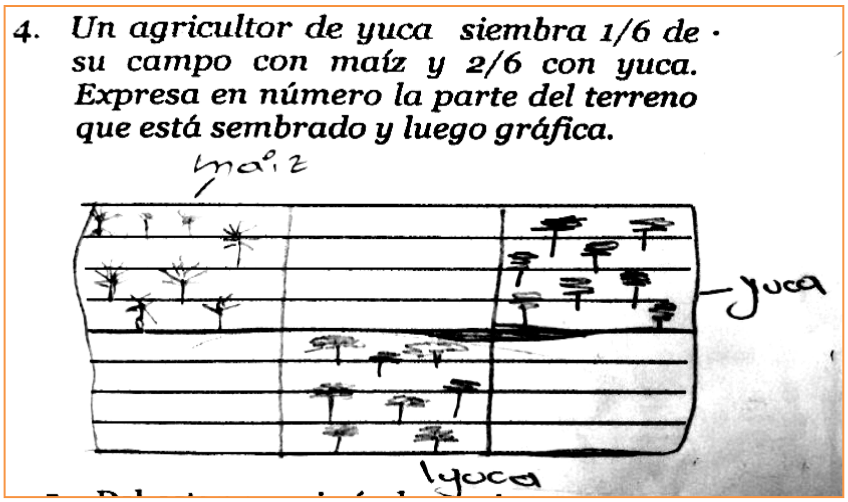


Figura 4-3. Rta al problema 4 del cuestionario No 1, estudiante del grado 6A

En términos generales hemos encontrado que para el grado 6A una categoría de dificultades es la referida por Radatz, en cuanto a que los errores se presentan debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Como se mencionó anteriormente, otra posible causa es poseer dificultades de comprensión, puesto que se observa un bajo nivel de competencias interpretativas o literales, limitándose para alcanzar un nivel más complejo.

El grado sexto A, según los resultados del cuestionario diagnostico No. 2 presenta bajas competencias de planeación y resolución de problemas, puesto que la prueba exige competencias de argumentación y proposición y en su mayoría no se evidencia.

4.2.1.2 Cuestionario No. 2.

Tabla 4-2. Porcentaje de aciertos cuestionario No. 2. Grado 6A

Problemas	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de aciertos	36,82	5,3	0,0	10,5	5,3	21,1

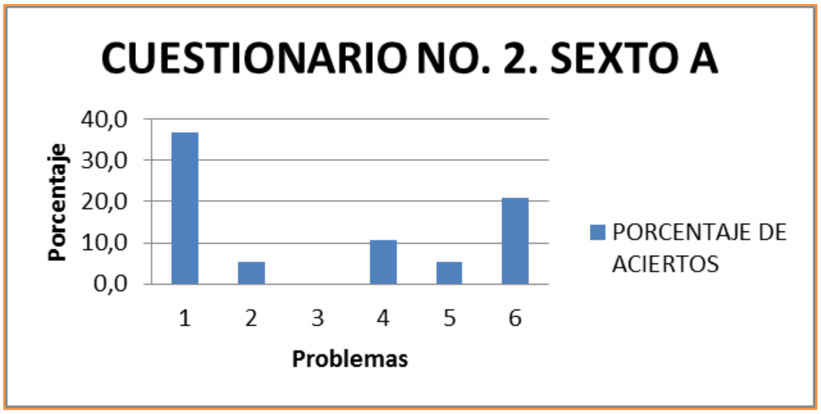
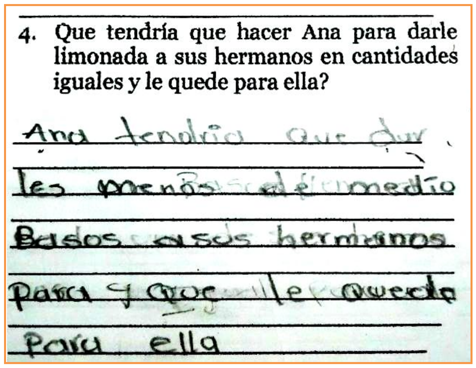


Figura 4 - 4. Diagrama de barras del cuestionario No.2. Grado 6A

Sólo el 36,82% de los estudiantes traza una estrategia semiorganizada para resolver el problema. Sin embargo, no describen el proceso de medida de los ingredientes. El 5,3% asocian ideas con el término o concepto de acidez del limón; tienen dificultades para reflexionar en retrospectiva, es decir, unas débiles competencias metacognitivas. Hay que tener en cuenta que el cuestionario N°2, tiene como objetivo identificar competencias para plantear y resolver problemas, que con las sugerencias de Polya, permite asociar el concepto de metacognicion y encontramos que existen debilidades en este aspecto por factores atribuibles a la inexistente apropiación de estrategia de aprendizaje y estrategias de enseñanza interdisciplinar, es decir, la institución educativa y por ende el cuerpo docente no presenta propuestas curriculares que permitan un mayor uso de la resolución de problemas y la integralidad de las ciencias como modelo pedagógico. Por un lado los estudiantes de la básica no reciben una enseñanza interdisciplinaria y por otra no se les enseña en profundidad la estrategia de resolución de problemas, así como otras estrategias de aprendizaje. Sabemos que existen muchos factores que inciden en la formación académica o rendimiento escolar, pero no es el interés en este trabajo. El bajo desempeño de competencias argumentativas y propositivas de los estudiantes es evidenciable en las soluciones de los dos cuestionarios diagnóstico. Siguiendo con el análisis porcentual encontramos que el 10,5% de los estudiantes realiza una aproximación al uso de división relacionándolo con los términos de los números racionales y se usan respuestas como se observa en la figura 4-5.


4. Que tendría que hacer Ana para darle limonada a sus hermanos en cantidades iguales y le quede para ella?

Ana tendría que dar
les menos del medio
Basos a sus hermanos
para q que le quede
para ella

Figura 4-5. Rta de la pregunta 4 del cuestionario No 2, estudiante del grado 6A

Se observa que existe una idea de división indicada o cociente de una cantidad a repartir, es decir, el estudiante sabe que para darle limonada a los hermanos de Ana y le quede a ella necesariamente les toca menos de la mitad de un vaso y hace el conteo menor que la unidad. Y prueba de esto, es que solo el 5,3% de los estudiantes respondió satisfactoriamente a la pregunta 5, donde se pueden representar a través de un dibujo las cantidades. En el problema No. 6 existen dificultades en el uso y aplicación del concepto de área, específicamente de terrenos y su distribución para siembra de verduras, según el problema se observa que el 21,1% de los estudiantes hacen representaciones y distribuciones aproximadas de la medida del terreno; sin embargo, no se describen la estrategia ni establecen diferencias entre las unidades de medida de longitud y área, una posible causa es la ausencia de la enseñanza del pensamiento métrico y superar el error propuesto por Radazt véase las figuras 4-6 y 4-7, donde se hace el dibujo cuadrangular, pero no se describe la estrategia y el estudiante asume que todos los lados del terreno tienen seis metros lineales cada uno, mientras que la siguiente figura 4-7, no representa área y hace una descripción de bajo nivel cognitivo o posiblemente la dificultad lingüística de los estudiantes que pertenecen a la etnia aruhaca.

Los estudiantes Aruhacos vienen de una escuela indígena que maneja un proyecto educativo comunitario – PEC con un plan de estudio propio, con énfasis en sus costumbres y tradiciones que en cierta medida dificulta en ellos el aprendizaje de las ciencias.

Figura 4-6. Rta al problema 6 del cuestionario No 2, estudiante del grado 6A

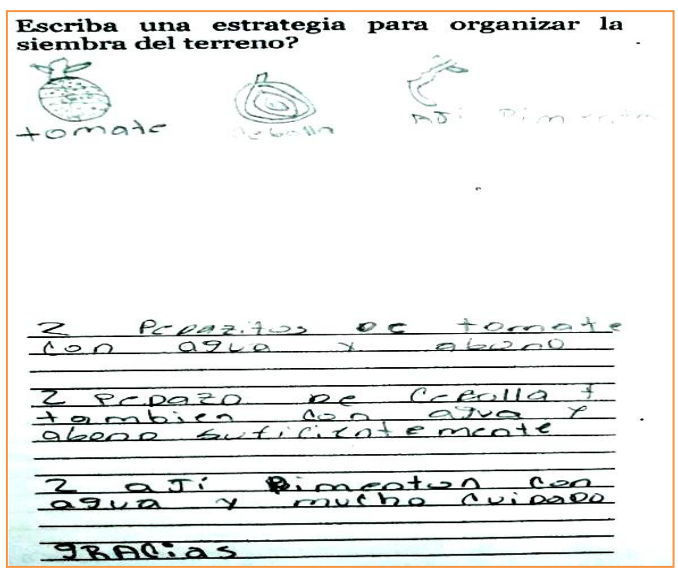


Figura 4-7. Rta al problema 6 del cuestionario No 2, estudiante del grado 6ª

4.2.2 Resultados del grado 6B

4.2.2.1 Cuestionario No. 1.

Tabla 4-3. Porcentaje de aciertos cuestionario No. 1. Grado 6B

Problemas	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de aciertos	42,1	10,5	0,0	0,0	0,0	0,0

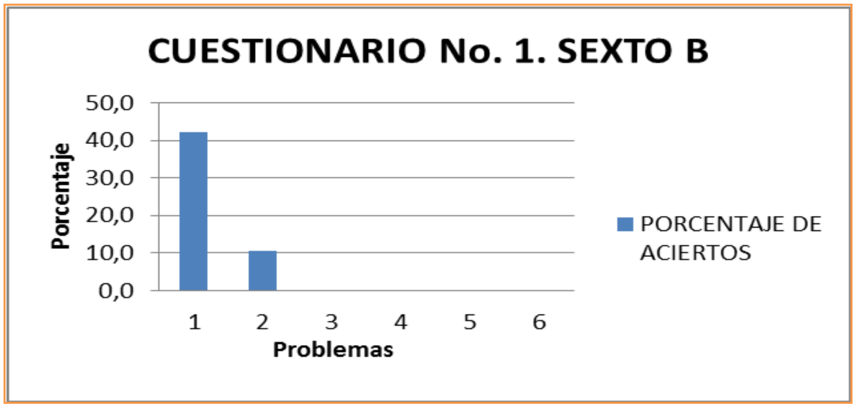


Figura 4-8. Diagrama de barras del cuestionario No.1. Grado 6B

En la figura 4-8, se observa que el 42,1% de los estudiantes logra representar o escribir los símbolos numéricos y el 10,5% clasificarlos. A pesar de presentar un mayor porcentaje de competencias interpretativas y escritura de los números con respecto a los otros grados; es muy alto el porcentaje de estudiantes que no interpretan y resuelven los problemas. Las razones que se asocian a esta dificultad son similares a las del grado 6A. Los estudiantes tienen dificultades para establecer una relación de orden de mayor a menor, y el total de los estudiantes tienen dificultades para resolver los problemas 4, 5 y 6. Se podría suponer que los estudiantes se portaron renuentes a resolver los problemas 3, 4, 5 y 6, pero en realidad no se acordaban de la temática o tienen la necesidad de retroalimentar los contenidos con el fin de enfrentar las dificultades y recibir la orientación y enseñanza del docente. En el grado sexto B, se presentan dificultades similares a las del grado sexto A, teniendo el grado sexto B, unos resultados de nivel de comprensión más bajo.

4.2.2.2. Cuestionario No. 2.

Tabla 4-4. Porcentaje de aciertos cuestionario No. 2. Grado 6B

Problemas	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de aciertos	15,8	0,0	0,0	5,3	10,5	5,3

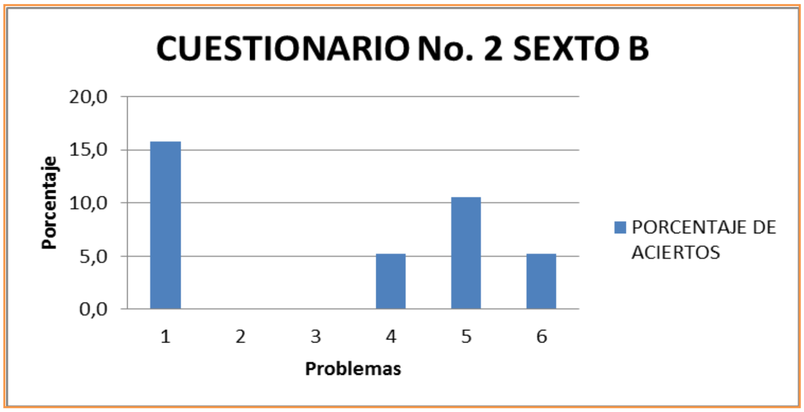


Figura 4-9. Diagrama de barras del cuestionario No.2. Grado 6B

En la figura 4-9, se observa que sólo el 15,8% de los estudiantes del grado sexto B traza una estrategia para resolver el problema, pero no describen el proceso de medida de los ingredientes; tienen dificultades para identificar conceptos de ciencias naturales y retroalimentar o recordar los contenidos y procesos, y entre el 5,3% y 10,5% de los estudiantes resuelven de manera regular los problemas 4, 5 y 6, pero en general, poseen dificultades para plantear y resolver problemas. Argumentamos los mismos errores en sus síntomas y causas igual que en los otros grados, las dificultades de los estudiantes del grado 6B para la aplicación de resolución de problemas son ocasionados por diferentes factores entre ellos el desconocimiento de la estrategia de resolución de problemas, puesto que los docentes de la básica no les han enseñado dicha estrategia.

4.2.3 Resultados del grado 7A

4.2.3.1 Cuestionario No. 1.

Tabla 4-5. Porcentaje de aciertos cuestionario No. 1. Grado 7A

Problemas	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de aciertos	14,6	4,9	4,9	9,8	2,4	4,9

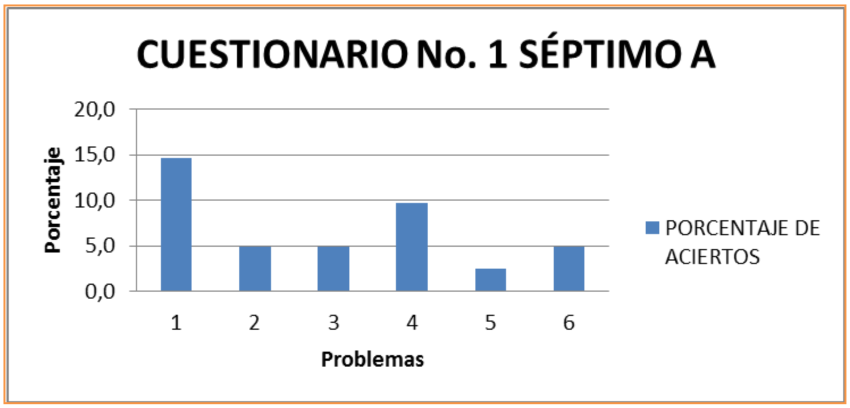


Figura 4-10. Diagrama de barras del cuestionario No.1. Grado 7A

De acuerdo a los datos anteriores, se observa que en las tres primeras preguntas, sólo el 14,6% de los estudiantes del grado séptimo (A) logró representar correctamente los símbolos numéricos, el 4,9% logra diferenciarlos de acuerdo a los tipos de números, y el 4,9% establece una relación de orden de mayor a menor. Observamos que los porcentajes de acierto de los problemas 4, 5 y 6 con un 9,8%, 2,4% y 4,9% respectivamente son muy bajos, debido a la dificultad de resolver problemas de mayor complejidad, aunque hay estudiantes que respondieron todas las preguntas y problemas existen dificultades de aprendizaje que ameritan mayor atención para corregir. En la figura 4–11, un estudiante responde acertadamente la pregunta 1, puesto que representa el símbolo del número racional $\frac{3}{4}$ y en la pregunta 3 lo ratifica representándolo como mayor que $\frac{1}{2}$, lo que demuestra que posee buenas competencias interpretativas. En términos generales los resultados del grado 7A, comparados con los grados sextos, son bajos, evidenciando que a pesar de estar en un grado superior y haber abordado los contenidos de números enteros y racionales, existen dificultades similares a las comentadas anteriormente referidas a la comprensión, el uso y aplicación de operaciones con números racionales durante el desarrollo del proceso de formación de la básica secundaria.

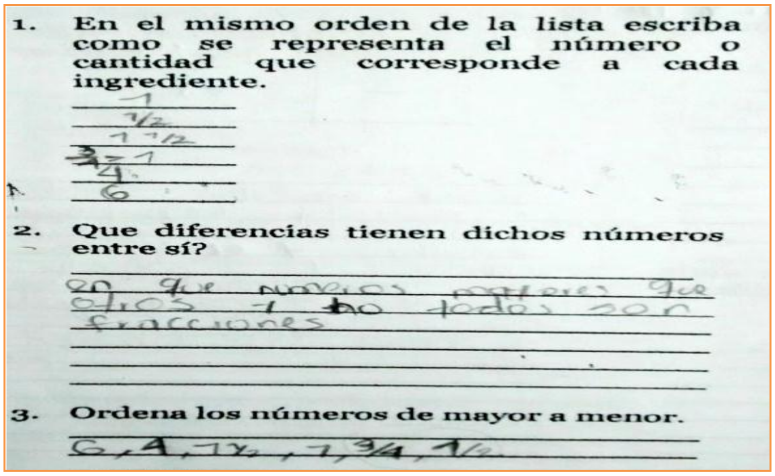


Figura 4-11. Rtas de 1 a 3 del cuestionario No 1, estudiante del grado 7ª

4.2.3.2 Cuestionario No. 2.

Tabla 4-6. Porcentaje de aciertos cuestionario No. 2. Grado 7A

Problemas	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de aciertos	7,3	7,3	4,9	4,9	12,2	29,3

Figura 4-12. Diagrama de barras del cuestionario No.2. Grado 7A

Aunque en este grado encontramos estudiantes que respondieron todas las preguntas, en general sólo el 7,3% traza una estrategia semiorganizada para resolver el problema; sin embargo, no describen el proceso de medida de los ingredientes. El 7,3% asocian ideas con el término o concepto de acidez del limón. A la preguntas 3 y 4, sólo el 4,9% contestó aproximando términos asociados a la temática, pero se refleja unas débiles competencias metacognitivas, en el sentido de extrapolar y reflexionar lo aprendido en años anteriores. El 12,2% representa con un dibujo las cantidades a dividir, y el 29,3% se aproxima a una descripción organizada para la siembra de un terreno. Sin embargo, la tendencia general muestra la necesidad de desarrollar competencias en planteamiento y resolución de problemas. A continuación se aprecian algunas de las descripciones que dan los estudiantes: En la figura 4-13 se evidencian algunos conocimientos agrícolas y el estudiante expresa cuales actividades se requieren; haciendo mención de fertilizantes naturales o químicos, es decir, posee alguno preconceptos que ayudaría a articular los conocimientos de ciencias. El estudiante presenta argumentos descriptivos con algunas oraciones coherentes y otras con dificultades de coherencia en la redacción.

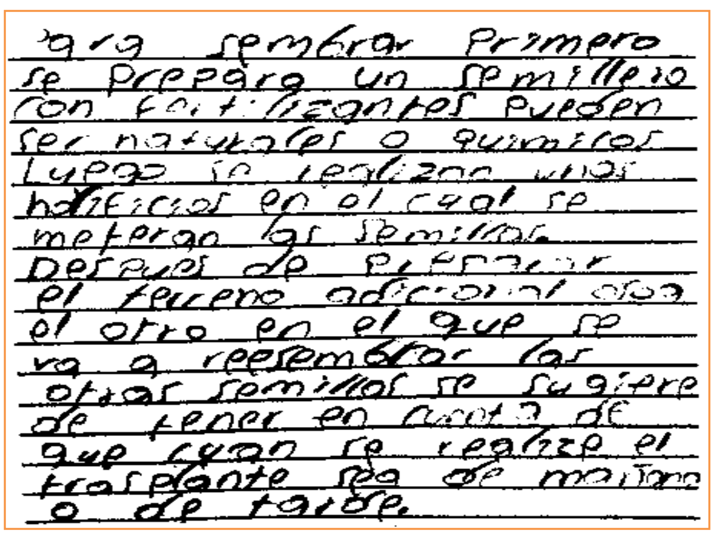
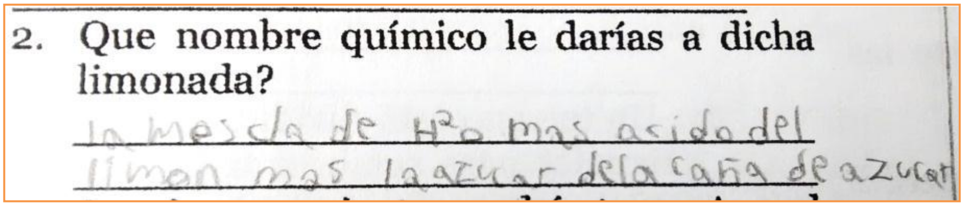

para sembrar primero
se prepara un semillero
con fertilizantes pueden
ser naturales o quimicos
Luego se realizan unos
hoficios en el cual se
meteran las semillas
despues de preparar
el terreno adicional otro
el otro en el que se
va a reesembrar las
otras semillas se sugiere
de tener en cuenta de
que cuan se realize el
trasplante sea de mañana
o de tarde.

Figura 4-13. Rta al problema 6. Cuestionario No.2. Grado 7A

En la figura 4-14, el estudiante emplea el término mezcla y representa la fórmula del agua con un superíndice, lo que podría indicar que el estudiante posee preconceptos que favorecerían la enseñanza articulada de las ciencias. Encontramos ideas de organización y planeación que es uno de los objetivos a fortalecer en este trabajo de grado, como es mejorar las competencias argumentativas y propositivas con la estrategia de resolución de problemas e interdisciplinariedad.

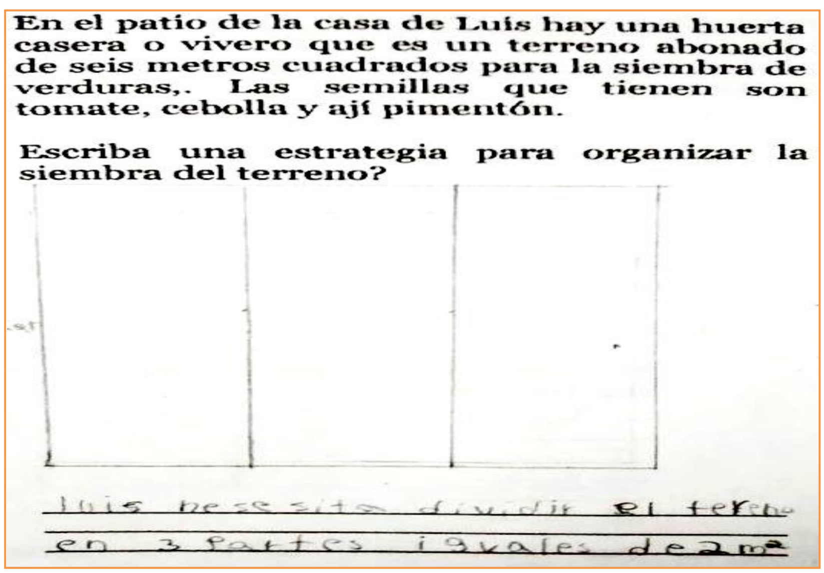


2. Que nombre químico le darías a dicha limonada?

la mescla de H^2o mas asido del limon mas la azucar dela caña de azucar

Figura 4-14. Rta al problema 2. Cuestionario No.2. Grado 7A

En la figura 4-15 el estudiante representa un dibujo representativo del terreno dividido en tres partes iguales de 2 metros cuadrados cada uno (usando el símbolo de la unidad de medida con un superíndice) correspondiente a cada área de terreno para la verdura que va a sembrar, es decir, en la estrategia que plantea no hace descripción detallada de actividades sin embargo, sintetiza lo necesario para que se organice la siembra asumiendo el terreno rectangular dividido en tres partes iguales y hace un dibujo claro con información que demuestra competencias argumentativas y propositivas



En el patio de la casa de Luís hay una huerta casera o vivero que es un terreno abonado de seis metros cuadrados para la siembra de verduras,. Las semillas que tienen son tomate, cebolla y ají pimentón.

Escriba una estrategia para organizar la siembra del terreno?

Luis nesesita dividir el tereno en 3 partes iguales de $2m^2$

Figura 4-15. Rta al problema 6.Cuestionario No.2. Grado 7A

4.3 Diseño y aplicación de secuencia didáctica

Teniendo en cuenta los el análisis de los cuestionarios diagnósticos, los componentes históricos, pedagógicos y disciplinares, se diseñaron varias guías de aprendizajes que demarcan el propósito, objetivos, tiempos para ejecutar las actividades y estándares básicos de competencias de matemáticas y ciencias naturales, lo cual tiene como primera etapa una estrategia preinstruccional para trazar el camino a seguir en la planeación, y como estrategia coinstruccional la resolución de problemas durante el desarrollo de las guías seguido de una estrategia postinstruccional que es una autoevaluación (ver anexo C). Se diseñaron tres guías adicionales (que corresponden a los anexos M, N y O), para seguir profundizando en la estrategia de secuencia didáctica pero que no se aplicaron en aula y responden a una ampliación o mejoramiento de las dos primeras guías de aprendizaje. En las guías se establece un plan de actividades que comprende cinco secciones de iniciación, estrategia de aprendizaje activo, planteamiento y resolución de problemas, diálogo de saberes y evaluación formativa.

Contenido de la guía:

- **Iniciación:** Se hace una ambientación y motivación que genere en los estudiantes el interés por el tema, así como la indagación de sus ideas y preconceptos que generalmente están impregnados de creencias, errores y conocimiento común. Luego, se les presentan los contenidos o conceptualizaciones organizadas de las áreas de ciencias naturales y matemáticas en los temas específicos.

- **Aprendizaje activo:** Se generan problemas cotidianos donde se involucran los conceptos anteriores, teniendo presente el esquema organizado de Polya, desde unos niveles básicos de aprendizajes y se plantean tres problemas en el contexto de las ciencias naturales en cuanto a medidas de volumen. Se proyectó una secuencia de aprendizaje transversal e interdisciplinario con temas de magnitudes volumétricas y el concepto de mezcla heterogénea que podría articularse con aspectos de historia de las matemáticas como por ejemplo que los egipcios usaron un complejo sistema para representar fracciones en medidas agrarias de superficie, volumen y como lo llevaban a la práctica (en los anexos se hace la propuesta de dos secuencias más sobre el principio de Arquímedes y la corona de Heron). Ver anexo N.

- **Planteamiento y resolución de problemas:** En esta sección se instruye a los estudiantes para que ellos mismos piensen y diseñen sus propios problemas donde se requiera la aplicación de temas interdisciplinarios ya vistos en clase anteriormente.
- **Diálogo de saberes**: A partir de la sección anterior generar diálogos y comentarios de los problemas que los estudiantes formularon. Se culmina con procesos de autoevaluación enfocada a los procesos ejecutados anteriormente.
- **Evaluación formativa:** Enfocada en tres categorías de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.

4.4 Análisis de la secuencia didáctica

4.4.1 Observaciones generales en aula

Se constató que en los grados sexto y séptimo existen las mismas dificultades, observándose un mejor desempeño en sexto A, seguido de séptimo A. En general, observamos que los estudiantes poseen poca motricidad y disciplina al tomar apuntes o captar ideas de las explicaciones del docente, y se han acostumbrado con mayor frecuencia a dar respuestas a preguntas cerradas, es decir, de nivel literal o interpretativo, una de las posibles causas es debido a que algunos docentes desarrollan clases demasiado magistrales con un alto empleo de preguntas de este tipo. Como por ejemplo cuando se les pregunta a los estudiantes: ¿Alcen la mano los que dicen que…? Y al no haber respuesta el mismo docente termina dándole las respuestas. Esta actitud no conduce al aprendizaje significativo, sino a un pensamiento memorístico de primer nivel de complejidad. Verificamos que los estudiantes poseen dificultades para identificar la unidad (en este caso unidades de volumen) y realizar divisiones, entonces la docente buscó ejemplos que por las características de la explicación ocasionan pensamientos de bajo nivel de comprensión. Se observó que en procura de articular los temas interdisciplinariamente pone el ejemplo: "Una persona que tiene dolor de estómago, busca un Alka-Seltzer con agua para beber como remedio", y les hace una pregunta cerrada:

--¿Qué hizo la persona con el Alka-Seltzer y el agua? o una pregunta de complete ¿Está haciendo una _______? Para luego, pasado un minuto o menos, si los estudiantes no dan con la respuesta, el mismo docente termina completando la respuesta: es una <u>mezcla</u> refiriéndose a la combinación del agua y el_Alka-Seltzer. En este momento la docente busco articular temas de química hacia conceptualizaciones de mezcla, acidez, etc. Otros ejemplos de preguntas usadas que son importantes, pero de bajo nivel de comprensión o que se abusa en su uso durante la clase son:

-¿Qué entiendes por numero racional?

-¿Qué indica el número de abajo o de arriba?

-¿Este racional es propio o impropio?, -¿Cuándo es propio?

4.4.2 Análisis de integración de áreas

Cuando hubo que articular temas de matemáticas y ciencias naturales existió la tendencia en abordar la clase magistral de definir los conceptos y dar ejemplos de los diferentes tipos de mezclas homogéneas y heterogéneas (aceite y agua, arroz de pollo, etc.), para aclarar la confusión a preguntas de los estudiantes del uso de estas palabras, se resalta la intención de diferenciar los conceptos en los dos ámbitos de matemáticas y ciencias naturales. De esta manera se explica el empleo de los conceptos de homogéneo y heterogéneo en los dos contextos de matemáticas y química. El uso de los conceptos de mezclas en química resulta complejo para los estudiantes, que no diferencia entre volumen, masa, materia, sustancia, sustancia pura y mezclas. Al enfatizar y profundizar en el tema específico de la aplicación de matemáticas y ciencias naturales dentro de una estrategia pedagógica, evidenciamos las siguientes dificultades o necesidades de mejoramiento:

- Existe un rechazo por parte de los estudiantes de aprender de varias asignaturas al mismo tiempo, lo que amerita un trabajo arduo de renovación curricular desde preescolar a undécimo que involucre la interdisciplinariedad no solo con proyectos transversales sino desde todas las áreas.
- Se observa la necesidad de formación en didáctica de la interdisciplinariedad, puesto que al asociar dos asignaturas los docentes involucrados trabajarían en equipo desde su asignación académica, pero previamente han planeado el proyecto de aula integrando los contenidos y evaluaciones pertinentes, este trabajo nos mostró debilidades del investigador y docentes involucrados. Se convierte en una novedad para la Institución Educativa Virgen del Carmen que amerita experimentación a largo plazo, lo que repercute en planeación e institucionalización curricular.
- Las situaciones problemas interdisciplinares ameritan mayor profundización y corrección de formulación y articulación de contenidos. Por ejemplo se mencionan conceptos como materia, masa, volumen, etc., que son conceptos complejos para los estudiantes y exigen un alto grado de explicación o transposición didáctica al punto que al estudiante le quede claro el manejo de los números racionales y su uso en estos conceptos de las ciencias naturales. La mayoría de los estudiantes no discriminan entre átomo, sustancia y materia, que sería interesante que se trabajen fundamentalmente desde el grado sexto o desde la primaria.
- Cuando se dictan los contenidos, se aprecia que los estudiantes poseen poca habilidad lectoescritora y la necesidad de dominar y tener claridad en las

definiciones o conceptos asociados a los contextos de las ciencias, de aula, institucional y sociocultural.

- En el quehacer docente para orientar en su especialidad y referenciar otras ciencias no se use demasiadas preguntas cerradas que conlleva a respuestas poco argumentadas. También, debe reforzar la motivación al inicio y durante el desarrollo de la clase.
- El estudiante debe tener un mayor compromiso para realizar las actividades en casa, y evitar la predisposición de hacer trampas en las secuencias, actividades, evaluaciones y en los trabajos en grupo.

4.4.3 Análisis de errores más comunes

Logramos constatar algunos tipos de errores que han sido profundizados en otras investigaciones, de los cuales mencionamos algunos en párrafos anteriores y que hacen parte de una teoría de errores de aprendizaje según las categorías desarrolladas por Radatz[46] que aún se siguen presentando, tales como se citan en el trabajo de (Morales, 2014):

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.
2. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios:
    - Realiza operaciones y usa notaciones de la aritmética en forma defectuosa.
    - Presenta un conocimiento inadecuado de conceptos matemáticos que no permiten la solución de diversas situaciones problema.
    - Al obtener un resultado en diferentes operaciones no determina la pertinencia del mismo.

[46] Morales, R. Op cit., p.62.

- Interpreta y usa inadecuadamente una definición matemática asociada al concepto de número racional.
- Utiliza un algoritmo adecuado en la solución de un problema aritmético, pero lo aplica en forma defectuosa.
- Usa un algoritmo inadecuado para resolver un problema aritmético.
- Utiliza en forma adecuada un algoritmo para la solución de un problema aritmético, pero no llega a su solución.
- Realiza operaciones en forma defectuosa al no realizar las respectivas conversiones de unidades.

- Se encontró dificultades de aprendizaje de los procedimientos de planeación y operaciones matemáticas según Polya, y por ende no los saben aplicar (ejemplo en una multiplicación se les olvida las unidades que lleva y algunos estudiantes no se saben las tablas de multiplicar), confunden los procedimientos, los invierten, no saben algunas propiedades y por ende no las aplican en las operaciones tal como lo refiere Radatz.
- Observamos métodos de conteo de nivel muy bajos (como por ejemplo contar con los dedos o haciendo rayitas). Esto también ocasiona lentitud en los procedimientos. Se les complica la división por varias cifras, lo que demuestra la dificulta de asociar el número racional como una división.
- Existe la necesidad de usar más el término racional que fraccionario en su visión de conjunto, de tal manera, que ayude a superar los errores conceptuales y procedimentales como el de caer en el conjunto de los números naturales cuando se está trabajando con los números racionales. Así como articular los pensamientos matemáticos específicamente el numérico y el métrico con el fin de profundizar en las magnitudes y sus unidades de medida.

Observemos en las figuras 4-16, 4-17 y 4-18, la participación de una estudiante del grado sexto A, quien desarrolla de manera autónoma el problema de rutas de recolección de leche. Igualmente la figura 4-19 nos muestra la manera como lo resolvió en la guía impresa. De estas observaciones se aprecia que existe un método de hacer los problemas demarcado en el pensamiento numérico de los números naturales. Se aprecia que la estudiante hace una multiplicación, una suma y después resta de números naturales según el proceso operatorio aprendido en básica primaria, es decir, que prevalecen los últimos tres años de educación básica primaria en operatoria con números naturales.

Figura 4-16. Estudiante del grado 6A solucionando problemas en el tablero

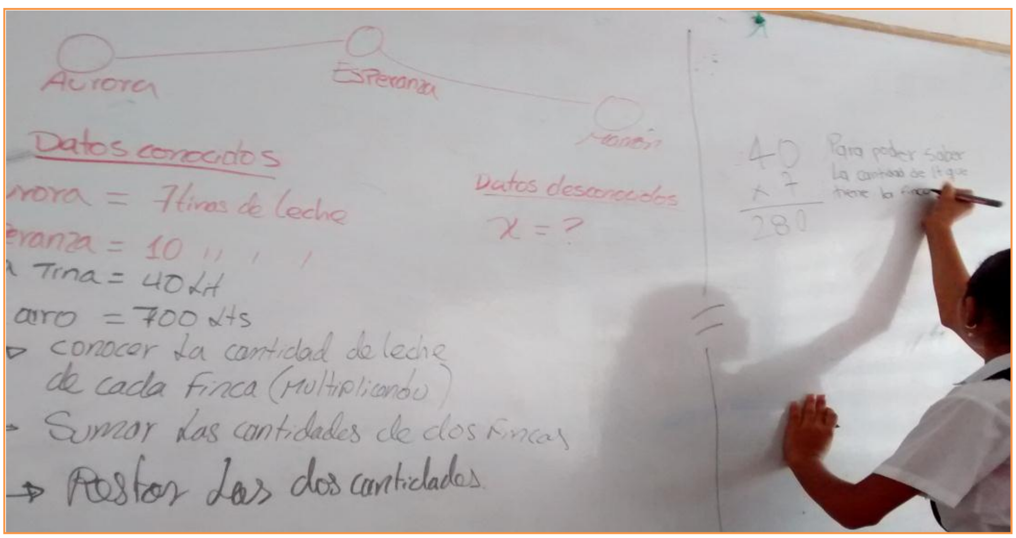


Figura 4-17. Estudiante del grado 6A solucionando problemas en el tablero.

La estudiante encuentra que con la multiplicación de 40 litros que tiene una tina, por 7 tinas, da como resultado 280 litros (ella no tienen en cuenta la relación entre las unidades de magnitud y los números), es decir, las magnitudes y los procesos de simplificación: (40 lt/~~tn~~).(7~~tn~~) = 280 lt, ósea , 280 litros de leche que se recogen en la finca La Aurora, hace lo mismo con la finca La Esperanza, suma las dos cantidades y se las resta a la capacidad máxima del vehículo. Hace todo sin tener en cuenta que la pregunta le exige la respuesta en número de tina, es decir, un número racional, un medio ($\frac{1}{2}$) de la capacidad de una tina de leche. Al obtener la diferencia deduce que en la finca El Mamon se recogen 20 litros y que eso equivale a media tina de leche, pero no lo representa como número racional.

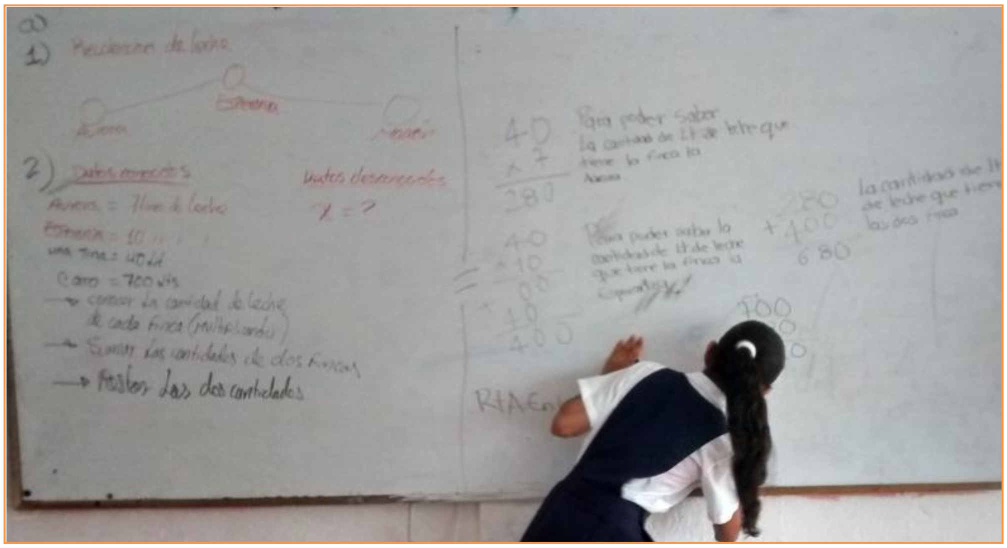
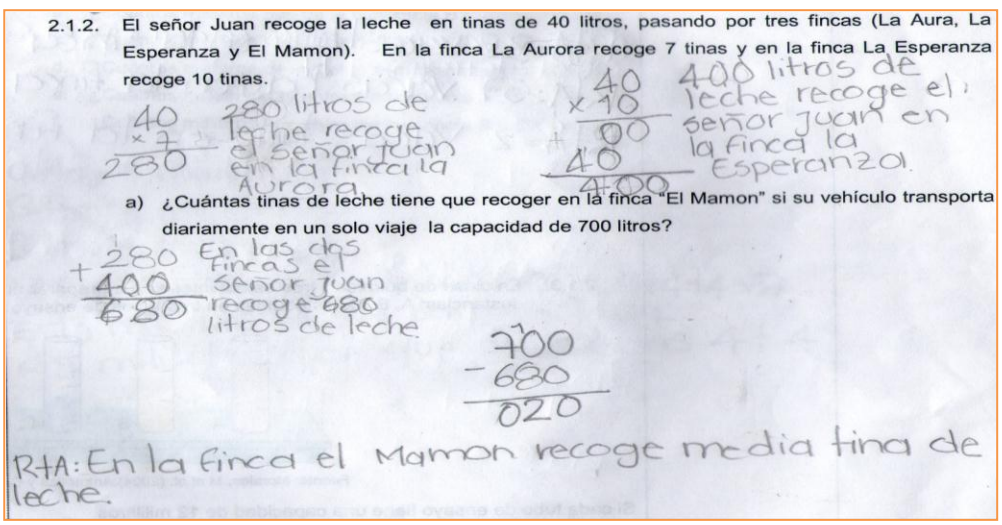


Figura 4-18. Estudiante del grado 6A solucionando problemas en el tablero.



2.1.2. El señor Juan recoge la leche en tinas de 40 litros, pasando por tres fincas (La Aura, La Esperanza y El Mamon). En la finca La Aurora recoge 7 tinas y en la finca La Esperanza recoge 10 tinas.

40 × 7 = 280 — 280 litros de leche recoge el señor Juan en la finca la Aurora

40 × 10 = 400 — 400 litros de leche recoge el señor Juan en la finca la Esperanza.

a) ¿Cuántas tinas de leche tiene que recoger en la finca "El Mamon" si su vehículo transporta diariamente en un solo viaje la capacidad de 700 litros?

280 + 400 = 680 — En las dos fincas el señor Juan recoge 680 litros de leche

700 − 680 = 020

R+A: En la finca el Mamon recoge media tina de leche.

Figura 4-19. Estudiante del grado 6A solución del problema en el tablero.

Lo mismo sucede cuando se plantea una división. Como se muestra en la figura 4-20, existen unos preconceptos arraigados de lo aprendido en primaria sobre las cuatro operaciones básicas que los limita a seguir el mismo esquema de trabajo, sin el interés de ampliar el pensamiento matemático de los números enteros y racionales.

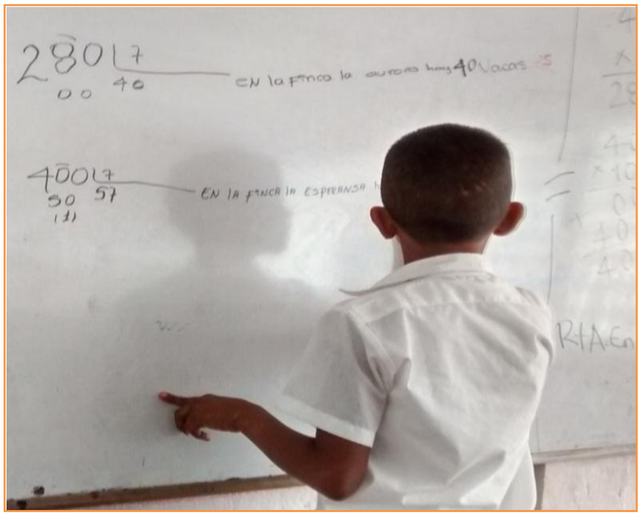
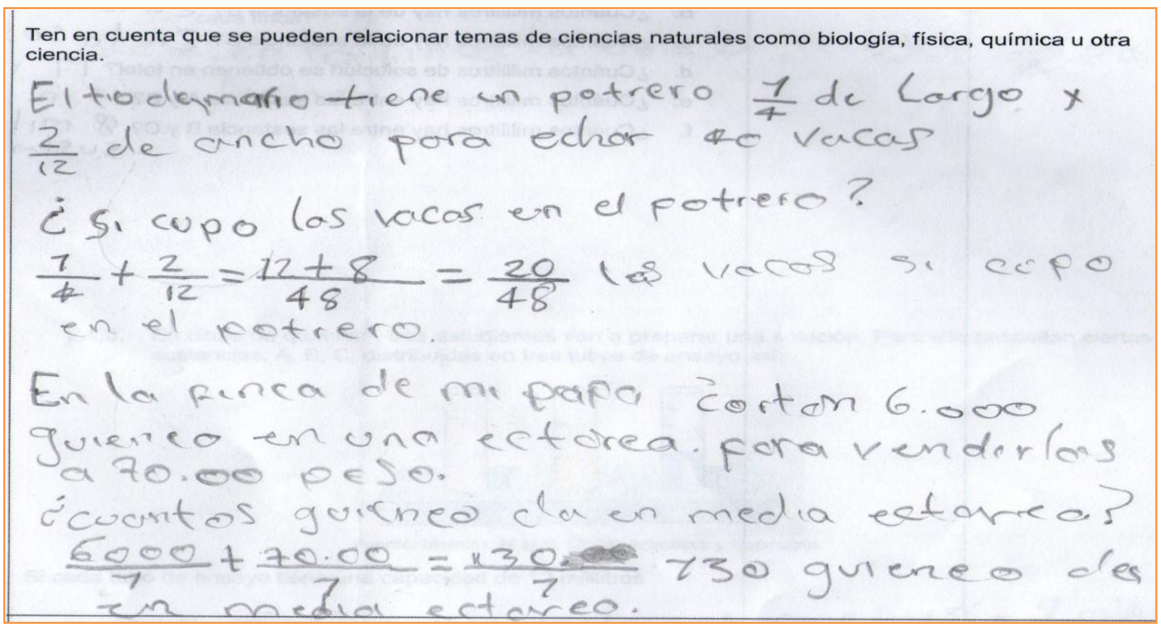


Figura 4-20. Estudiante del grado 6A solucionando problemas en el tablero



Ten en cuenta que se pueden relacionar temas de ciencias naturales como biología, física, química u otra ciencia.

El tio de mario tiene un potrero $\frac{1}{4}$ de Largo x $\frac{2}{12}$ de ancho para echar 40 vacas

¿si cupo las vacas en el potrero?

$\frac{1}{4}+\frac{2}{12}=\frac{12+8}{48}=\frac{20}{48}$ las vacas si cupo en el potrero.

En la finca de mi papa corton 6.000 guineo en una ectorea. para venderlos a 70.00 peso.

¿cuantos guineo da en media ectarea?

$\frac{6000}{7}+\frac{70.00}{7}=\frac{130}{7}$ 130 guineo da en media ectareo.

Figura 4-21. Estudiante del grado 6A planteando problemas en la guía.

En cuanto a plantear y resolver problemas elaborados por los mismos estudiantes observamos que hacen el esfuerzo de plantearlo, pero sin dominio del campo numérico en sus conceptos y operaciones. Observamos la figura 4-21 que el estudiante toma las medidas de un potrero con números racionales para hallar el área, sin apropiación del concepto y relación de orden de los números racionales y aplica el algoritmo de la suma de números racionales heterogéneos, desconociendo el concepto de área y la operación matemática para determinarla. Sin embargo, hace el esfuerzo de manejar el contexto agropecuario. La dificultad de comprensión del concepto de área asociado a la operación de multiplicación de números racionales, se evidencia al aplicar el algoritmo de adición de números racionales heterogéneos.

Las figuras 4-22, 4-23 y 4-24 corresponden a evidencias de las orientaciones de la docente y la participación de un estudiante del grado sexto 6B. En la participación se aprecia la aplicación de las primeras etapas del método de resolución de problemas de Polya, donde el joven hace un dibujo ilustrativo.

Figura 4-22. Docente dando orientaciones sobre la guía de aprendizaje.

Figura 4-23. Estudiante del grado 6B solucionando problemas en el tablero

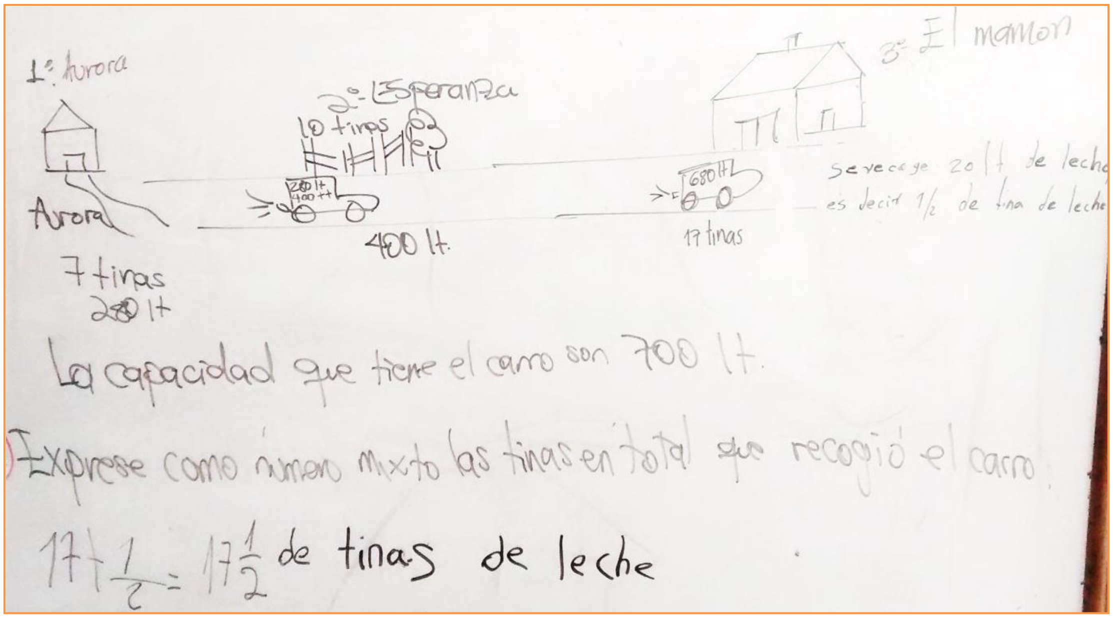


Figura 4-24. Estudiante del grado 6B solucionando problemas en el tablero

En las figuras 4-25 y 4-26 de estudiantes del grado séptimo 7A, se observa la intención de plantear problemas sin el dominio del concepto de número racional, las dificultades de su uso, el concepto de unidad y reparto equitativo y comete errores usando el concepto parte todo continuo a pesar de estar avanzados en la programación de operaciones con números racionales y mixtos

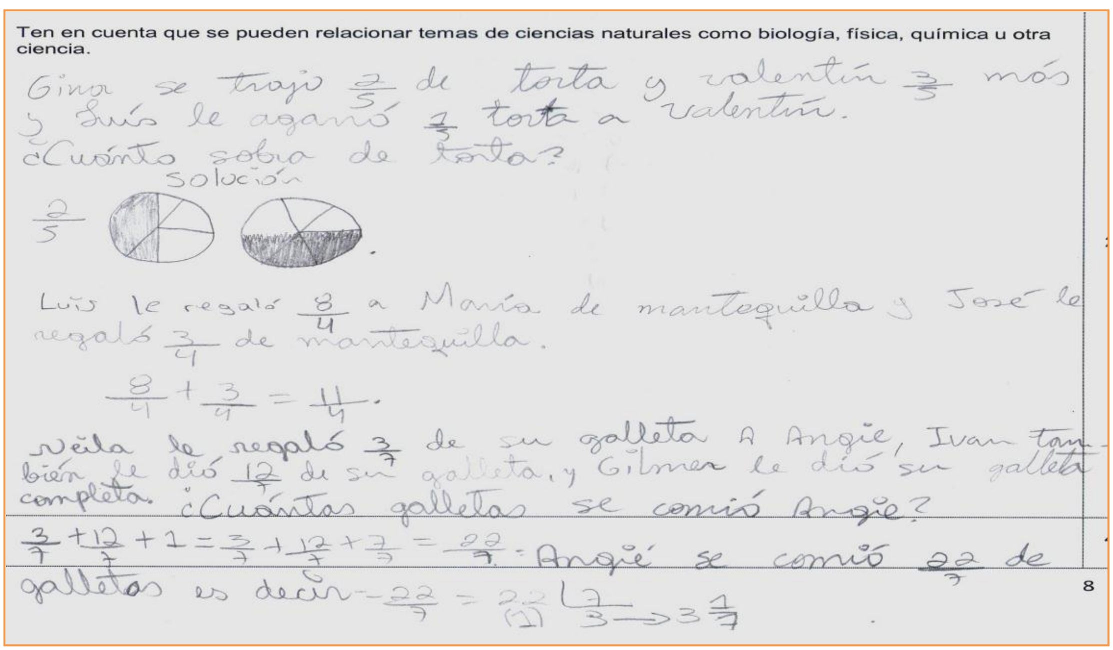
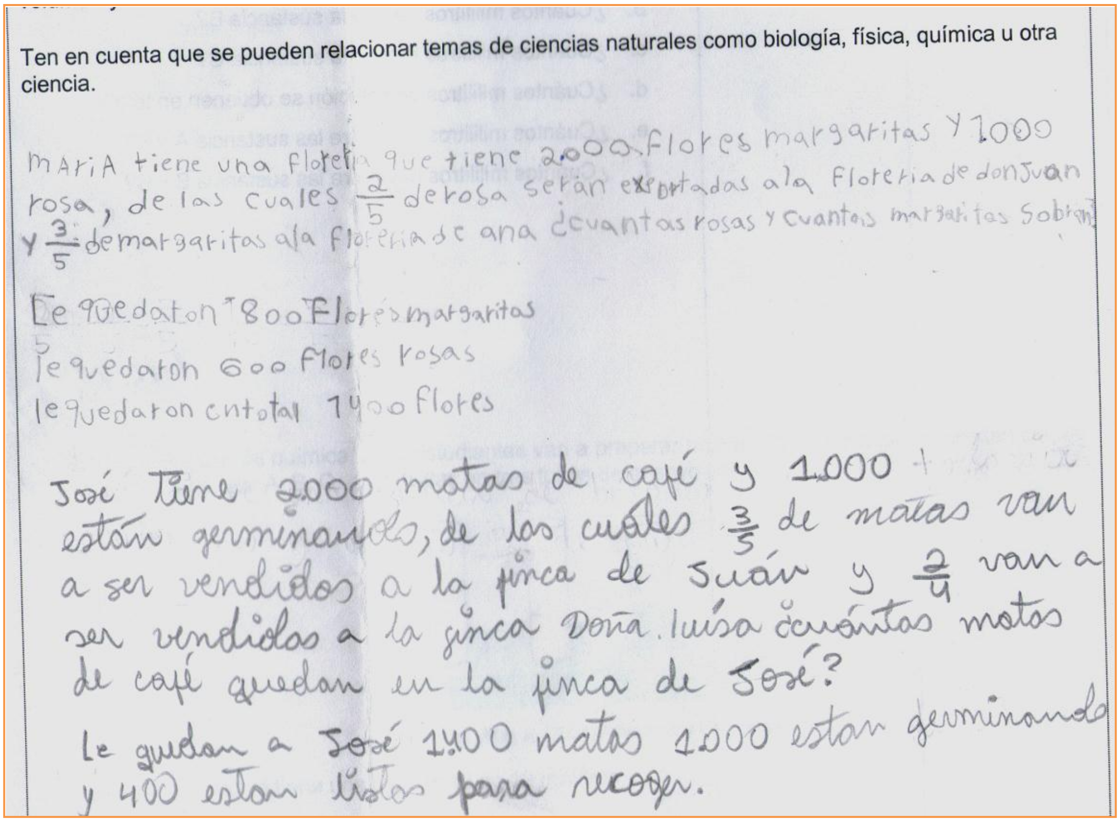


Figura 4-25. Estudiante del grado 7A planteando problemas.

El estudiante trata de plantear problemas de soluciones fáciles y casi siempre demuestra competencias de nivel inferior, siempre cae en el constructo parte todo y cometen los mismos errores.


Ten en cuenta que se pueden relacionar temas de ciencias naturales como biología, física, química u otra ciencia.

mAriA tiene una floreria que tiene 2000 flores margaritas y 1000 rosa, de las cuales $\frac{2}{5}$ de rosa serán exportadas ala Floreria de donJuan y $\frac{3}{5}$ de margaritas ala floreria de ana ¿cuantas rosas y cuantas margaritas sobran

Le quedaron 800 Flores margaritas

le quedaron 600 Flores rosas

le quedaron entotal 1400 flores

José Tiene 2000 matas de café y 1.000 están germinando, de los cuáles $\frac{3}{5}$ de matas van a ser vendidos a la finca de Juán y $\frac{2}{4}$ van a ser vendidos a la finca Doña luisa ¿cuántas matas de café quedan en la finca de José?

Le quedan a José 1400 matas 1000 estan germinando y 400 estan listos para recoger.

Figura 4-26. Estudiante del grado 7A planteando problemas.

En cuanto a aspectos auto evaluativos, se aprecia en las figuras 4-27 y 4-28, que los estudiantes son conscientes de la falta de atención por el desorden e impulso de hacer trampa, aunque los problemas les motivan por ser cotidianos buscan la manera de copiarse. En estas autoevaluaciones, observamos como los factores socio afectivos influyen en la labor de enseñanza – aprendizaje, los cuales deben ser un referente para la planeación del docente. Encontramos lo siguiente aportes de los estudiantes:

Tabla de autoevaluación y Coevaluación N° 1

Tus opiniones	Sugerencias o recomendaciones
1. ¿Qué opinas del trabajo de tus compañeros? Qué no trabajan, y no hacen Tareas se pasan recochando y en el cambio de hora salen para fuera a comprar.	¿Qué sugieres o recomiendas? Yo sugiero qué los niños del Colegio no malgasten su vida haciendo cosas malas y se dediquen todo su tiempo ó parte de su tiempo en los estudios para qué no caigan en los vicios y en los malos caminos para qué cuándo lle-guen a grande sean profesiona-les y tengan con qué susten-tarse con sus familiares...!
2. ¿Cómo se relacionan los problemas con los números racionales? Porqué se relacionan con la vida coti-diana y son buenos porqué nos ayu-dan a relacionar algo con otra cosa.	
¿Qué aprendes de los problemas? Aprendo mucho con los problemas porqué me ayudan a solucionar muchas cosas en la vida cotidiana	

Figura 4-27. Estudiante del grado 7A planteando autoevaluación y evaluación

Tabla de autoevaluación y Coevaluación N° 1

Tus opiniones	Sugerencias o recomendaciones
1. ¿Qué opinas del trabajo de tus compañeros? yo o pino que el trabajo de algunos de mis compañeros si es malo por que en bes de Pensar Se copian.	¿Qué sugieres o recomiendas? yo Surgiero y recomiendo q' nos Pongan manodiura Por q' no nos estamos Portando como debemos Por q' si el Profe Sale crer un mandado casi más de la mitad esta haciendo de sorden como tambien nos deben reforsar más Los Profesores ayudarnos un poquito más como Por ejemplo uno de ellos Matematica, Ingles, Español. eso es Lo que yo Surjiero en My Respuesta.
2. ¿Cómo se relacionan los problemas con los números racionales? Los Problemas Se relacionan con Los números racionales de acuerdo a nuestra vida cotidiana y otras Cosas	
¿Qué aprendes de los problemas? yo aprendo de Los Proble más Por que Cuando Pasan Los cosas lla es de ma siado para arepentirse Por ejemplo cuando no ases Los tareas ó actividad q' nos deja el Profe (a).	

Figura 4-28. Estudiante del grado 7A planteando autoevaluación y evaluación.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Este trabajo final permitió identificar dificultades de aprendizaje en los estudiantes de los grados sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen, tanto en las operaciones con números racionales como en los conceptos de materia y sus propiedades. Estos errores han sido ampliamente estudiados por diversos investigadores como Gastón Bachelard, Guy Brousseau, Saturnino de la Torre, L. Rico, Radatz, Astolfi entre otros, y se refieren a la incomprensión conceptual y procedimental de los diversos significados de los números racionales. Igualmente, a manera de dificultades de enseñanza de las ciencias desde la didáctica, es frecuente encontrar que los docentes desarrollan las asignaturas de manera individual e independiente, sin establecer planes de clase que integren varias asignaturas. Una posible causa es que no se promueve el trabajo interdisciplinario, de tal manera que los contenidos a enseñar se integren y evalúen los aprendizajes de manera articulada. Por estos motivos, encontramos planes de estudio que ameritan una actualización pertinente acorde con los lineamientos y estándares básicos de competencia en lo referente a procedimientos que contengan coherencia horizontal y vertical para los contenidos de matemáticas, procedimientos para el aprendizaje articulado de los procesos biológicos, físicos y químicos en los contenidos de ciencias naturales y trabajar en equipo de docentes que articulen contenidos de las diferentes asignaturas.

En cuanto a la exploración de los antecedentes históricos, se observó que en la cultura egipcia se utilizaban los números racionales para medir acontecimientos, espacios o construcciones de la realidad cotidiana. Sin embargo, en la ejecución del trabajo final de maestría, se tuvo la dificultad de incluir e implementar una secuencia didáctica de la historia de la matemática y las ciencias naturales al momento de la ejecución de la secuencia de problemas y se diseñó secuencias en el uso de la historia de los números racionales que se anexan como propuestas que no se desarrollaron en el aula.

A nivel didáctico, la aplicación de la herramienta implementada por G. Polya permitió adaptar diálogos pedagógicos diferentes que permitieron crear conciencia de autoaprendizaje y trabajo en grupo, Esto se logra a través de preguntas orientadoras. Esta estrategia amerita un proceso progresivo y constante de enseñanza y aprendizaje para que permita adquisición de conocimientos más complejos de permanencia en la memoria a largo plazo de los estudiantes, para superar errores de aprendizajes que se han adquirido en algunos momentos o situaciones del sistema de enseñanza tradicional. Esto lleva a mirar la posibilidad de proponer cambios estructurales del modelo pedagógico institucional, un mayor compromiso y capacitación de docentes en enseñanza integral de las ciencias (opción de postgrados en didácticas de las ciencias) y por ende cambios en el currículo agregando el componente interdisciplinar. Aunque diseñar problemas de diferentes niveles de complejidad relacionando varias ciencias no es fácil y se convierte en un reto de permanente formación y puesta en escena por el docente, quien puede proyectar metas para realizar experiencias significativas a largo plazo que permitan evidenciar que la resolución de problemas utilizando contenidos interdisciplinarios podría mejorar los procesos de aprendizaje y las competencias básicas de los estudiantes.

Como se expresó anteriormente, es necesario un cumplimiento más pertinente de los lineamientos y estándares para la organización de contenidos relevantes por grado con la posibilidad de articular temas de varias asignaturas de manera sincrónica y asincrónica. En este caso, se indagaron las posibles articulaciones de asignaturas que dictan diferentes docentes de la Institución con miras a desarrollar un trabajo con enfoque interdisciplinario en la enseñanza de las matemáticas; se hizo el acercamientos entre la matemática y las ciencias naturales que con el diseño de la secuencia didáctica se permitieron observar las dificultades de los estudiantes en el desarrollo de resolución de problemas en diferentes contextos de las ciencias. En cuanto a los aspectos conceptuales en la solución de problemas con números racionales, se evidencian que los estudiantes continúan presentando dificultades al momento de hacer particiones en cantidades inexactas nos enfrentamos a la dificultad de proponer estrategias efectivas. Precisamente Polya (1965) expresa que el docente muchas veces *se limita a buscar los problemas planteados en los libros y se queda ahí, sin buscar otros referentes teóricos, pedagógicos, didácticos e históricos y mucho menos plantear los propios con las variables del contexto donde se vive*. Las pruebas diagnósticas son esenciales para planear la secuencia didáctica y permiten trazar un horizonte curricular, ya que permiten analizar la problemática de aprendizaje y la metodología de enseñanza. No obstante, estos procesos no garantizan que los estudiantes tengan una apropiación e interiorización del conocimiento científico de manera inmediata, más aun cuando ellos son reincidentes en las dificultades de aprendizaje, puesto que existen muchos factores asociados o distractores que inducen a los estudiantes a no aprender o a cometer errores permanentemente sin ninguna conciencia de superación o auto superación.

En síntesis en el desarrollo interdisciplinar se podrían plantear muchas hipótesis de trabajo verificables en periodos más largos de implementación como por ejemplo:

- Que la integración de dos o más áreas mejora el desempeño académico de los estudiantes y por ende la ejecución de los contenidos programáticos son más eficientes y pertinentes.

Como profesional no licenciado considero que una de mis fortalezas son los conocimientos en el área de la química, sin embargo, para la enseñanza de ella y en general de las ciencias encontré muchas deficiencias en mis competencias disciplinares y didácticas que ameritan una mejor preparación y profundización, en consecuencia también tengo la necesidad de mejorar desempeños profesionales en didáctica de las matemáticas. Por eso, el interés esta direccionado hacia la enseñanza de la interdisciplinariedad, que con el estudio de la maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales se abrió el espacio propicio para descubrir y mejorar aprendizajes en ciencias, específicamente en la matemática, puesto que no conocía de fundamentos históricos, didácticos y disciplinares de la construcción de la teoría de números racionales. Y al elegir estas asignaturas de matemáticas se presentaron dificultades y resistencias a desaprender y cambiar muchos preconceptos erróneos, como por ejemplo: imaginar que siempre existió una sola representación de números racionales y un procedimiento para sumar fracciones, que existían desde antes de la era cristiana, desconocía lo lento que fue la evolución de la construcción formal de la teoría de números, la resistencia al cambio de los pensamientos dogmáticos de algunos matemáticos antiguos (como en un tiempo los griegos negaban la existencia de los números racionales y solo consideraban las magnitudes conmensurables y en otra época los números que marcaban diferencia absurda eran negados por obtener resultados o cantidades negativas) también, desconocía que la influencia de la religión, costumbres y tradiciones culturales hacían lento los avances de las ciencias. Adquirir estos conocimientos permitió explorar un poco más al dominio disciplinar de la construcción formal de los números naturales, enteros y racionales desde los axiomas de Peano, es así, que se revisó conceptos de teoría de conjuntos, funciones, relaciones y clases de equivalencias de los números, sus operaciones y propiedades.

5.2 Recomendaciones

En atención a los resultados de este trabajo final de maestría se recomienda:

1. Planear y anticiparse a las acciones de los estudiantes frente a una tarea, preparando organizadamente con base en el diagnóstico de aprendizaje individual del estudiante y teniendo en cuenta la articulación de los conceptos en diferentes áreas de conocimiento.
2. Emplear permanentemente un aprendizaje estratégico metacognitivo que al estudiante le permita habituarse en su propio autoaprendizaje y autoevaluación, que indague sus conocimientos previos, sus actitudes, creencias en el contexto escolar y familiar, donde se desenvuelve, para tenerlos como puntos de referencia en la preparación de planes de estudios y preparación de clases.
3. Diseñar y acondicionar el ambiente escolar con herramientas heurísticas y lúdicas de aprendizaje, teniendo en cuenta que todos los estudiantes en un mismo grado tienen diferentes mentalidades y niveles de conocimientos. Dicha preparación de clase debe contener actividades de análisis y reflexión de situaciones vividas por los estudiantes para que activen cognitivamente su pensamiento, y le induzcan a renovar sus conocimientos previos al hacer practica la solución de las actividades.

   Un posible esquema de trabajo sería el siguiente:

   1. Motivación y ambientación como estrategia preinstruccional.
   2. Establecer estándares y logros como estrategia preinstruccional.
   3. Aplicación de estrategias de aprendizaje coinstruccional
      - 3.1. Resolución de problemas.
      - 3.2. Mapas conceptuales y diagramas de flujo.
   4. Retroalimentación continúa como estrategia postinstruccional
   5. Sistema de evaluación como estrategia postinstruccional (con Matriz interdisciplinar por cada proceso evaluativo)
      - 5.1. Autoevaluación.
      - 5.2. Coevaluación.
      - 5.3. Heteroevaluación.

Bibliografía

1. Bayona, A & Rodríguez, R. (2007). Explora 7. Bogotá, Colombia. Educar.
2. Beskin, N. Fracciones maravillosas. Ed. MIR. Moscú. 1987.
3. Boyer, C. B. (1987). Historia de las Matemáticas. Madrid: Alianza Editorial
4. Bloch, Ethan. The real numbers and real analysis. DOI 10.1007/978-0-387-72177-4 Springer science+business media, LLC. 2011. New York Dordrecht Heidelberg London. P.53-54.
5. Campanario, José y Moya, A. (1999). ¿Cómo enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas. Enseñanza de las Ciencias 17, 179-192.
6. Castaño, Néstor. Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Manizales. 2014, p. 25.
7. De La Torre, Saturnino. Aprender de los Errores. En: Torres, Myriam. Teoría del Error Aplicada al Aprendizaje Autónomo. Epdaa. Santa fe de Bogotá, D.C. Unad _ Cafam. 1999. p. 215-380.
8. Del Puerto, Silvia et al. Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. En: Epdaa. Curso de investigación Evaluativa [En línea]. (Feb _ jun de 2007). Disponible en: (www.rieoei.org/deloslectores).
9. Díaz, Faberth, Quijano María, et al. Nuevo pensamiento matemático 8. Ed. Libros &libros S.A. Bogotá. P.146.
10. Díaz-Barriga, Frida y Gerardo Hernández Rojas (2001). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México: McGraw-Hill.

11. Euclides libro VII. Credos. 1991.
12. Ferreira, Jamil. A construção dos números. Textos Universitários, Sociedad Brasilera de Matemáticas. Rio de Janeiro, 2010.p.21–33, 42-76.
13. Flavell, J. H. (1993). El desarrollo cognitivo. Madrid: Visor.
14. Hurtado, María. Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto. [Tesis de maestría] Unal. Bogotá. 2012.
15. Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de número racionales positivos. En: dedialnet.unirioja.es/descarga/articulo/209691.pdf
16. Gairín, J. M. (2001). Una interpretación de las fracciones egipcias desde el papiro de Rhind. (24), 649-684. Recuperado de dialnet.unirioja.es /descarga/articulo/ 460372.pdf.
17. Godino, J. y Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing (pp. 149-168). Ottawa, Ont.: Legas.
18. Guzmán, Miguel. Enseñanza de las ciencias y la matemática recuperado en http://www.rieoei.org/rie43a02.pdf.
19. Kieren, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En Carpenter, T. P., Fennema, E. & Romberg T. A. (eds.), Rational Numbers: An Integration of the Research (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
20. Kline, M. (1992): El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Vol.1. Alianza Universidad, n. º 715, Madrid.
21. León, Gloria. (2011). Trabajo Final de Master. Unidad Didáctica: Fracciones.(Tesis de Maestría). Universidad de Granada. España.
22. López, J.F. (2012). Enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo. Universidad Nacional de Colombia. http://www.bdigital.unal.edu.co/5922/1/8410009.2012.pdf

23. MEN. (2006). Documento No 3. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.

24. Ministerio de Educación del Ecuador. Didáctica de las Matemáticas 2011.pag 166.

25. Morales, Raúl. (2014). Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales. (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales. Colombia.

26. Morales, M et al. (2004).Aritmética y Geometría. Bogotá, Colombia: Santillana.

27. Morín, Edgar, (1990), Introducción al pensamiento complejo, Ed. Gedisa, Paris, p. 16

28. Morin, Edgar. Los siete saberes necesarios para la educación del futuro. Bogotá, Magisterio, 2001.

29. Ordóñez, Martha E. La fracción, elemento dialogante en el contexto matemático. [Tesis de maestría], Unal. Bogotá. 2012 .p. 29.

30. Perera P. & Valdemoro M. 2008. Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. Educación Matemática, vol. 21, núm. 1, abril de 2009, pp. 29-61

31. Polya, George. (2002). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas, 1965 (reimp 2002) PP. 28 – 40.

32. Quispe, Wenceslao. La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con sus operaciones básicas y propiedades elementales. [Tesis Doctoral] Universidad Nacional De Educación Enrique Guzmán y Valle. Lima – Perú. Recuperado de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/Tesis-Wenceslao.pdf.

33. Rodríguez, M (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. Recuperado el 16 de noviembre de 2015 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_01.pdf.

34. Rosado, Alber. Propuesta metodológica para la enseñanza de operaciones con números racionales [Trabajo de especialización]. Unad. 2007. p.102.

35. Sánchez, Mario. (2012).Re-construyendo los números racionales. (Tesis de maestría). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/7271/.

36. Santos, L. (1997).Principios y métodos de la Resolución de Problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado 16 de noviembre de 2015 de http://fractus.uson.mx/geometria/UnidadIII/Lectura9b.pdf.

37. Santos, L. M. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. Extraído el día 10 de diciembre del 2006 desde www.geocities.com/ discendi2/tm/tm0b.html.

38. Serrano a, Natalia. (2014).TIMSS, una prueba internacional de diagnóstico de matemáticas: experimentación y análisis sobre el número racional. Universidad de Zaragoza. España. [Trabajo fin de grado].

39. Torres, J. (1994) Globalización e interdisciplinariedad: el currículo integrado. Morata. Madrid, pág.75. En Documento No. 3. Estándares básicos de competencias de ciencias. P.102

40. Torres Ortega, Rodolfo**,** Unidad de aprendizaje b. Unad. Epdaa. Bogotá D.C. 2006. Consultado en: (www.unad.edu.co)

WEBGRAFIA

1. http://biblioteca.clacso.edu.ar/gsdl/collect/ar/ar013/index/assoc/D4608.dir/sec10004a.pdf.
2. http://unesdoc.unesco.org/images/0007/000708/070823sb.pdf.
3. http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm.
4. www.bdigital.unal.edu.co/1411/3/02CAPI01.pdf.Interdisciplinariedad y currículo: construcción de proyectos escuela
5. http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/TesisWenceslao.df
6. http://www.epsilones.com/paginas/t-historias1.html#historias-ojohorus
7. https://www.youtube.com/watch?v=JOkVfu2FxpA

8. http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/r_aurea.htm
9. http://www.comocubriruncuerpo.org/proporciones-del-cuerpo-humano-1-da-vinci-y-vitruvio/
10. http://rieoei.org/experiencias36.htm
11. http://runachayecuador.com/refcale/index.php/didascalia/article/view/446/300
12. http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/handle/10185/18691/MY151241_2017.pdf?sequence=3&isAllowed=y
13. https://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/numeros
14. http://www.monografias.com/trabajos42/numeros-racionales/numeros-racionales.shtml
15. https://www.portaleducativo.net/primero-medio/23/numeros-racionales-representacion-en-la-recta-numerica
16. https://www.yumpu.com/es/document/view/14170026/la-simbolizacion-de-las-fracciones-departamento-de-matematica
17. https://www.sistemamatriculas.gov.co/
18. https://www.lifeder.com/bioelementos/

A. Anexo: Plan y cronograma de actividades

Se presentan las etapas, los objetivos y actividades que componen el trabajo final.

Planificación de actividades

Etapas	Objetivos	Actividades
Etapa 1: Exploración diagnostica y estado del arte.	Identificar y caracterizar metodologías para la enseñanza a través de resolución de problemas con operaciones básicas de los números racionales.	Revisión bibliográfica sobre referentes históricos, epistemológicos, disciplinares y didácticos del tema. Revisión bibliográfica de los documentos del MEN enfocados a los estándares. en la enseñanza la matemática y ciencias naturales en grado sexto y séptimo.
Etapa 2: Diseño	Construir actividades como cuestionarios diagnósticos y secuencia didáctica para resolver problemas de matemáticas donde se privilegia el concepto de número racional como cociente aplicado en ciencias naturales.	Diseño y construcción de actividades para evaluación de los preconceptos. Diseño y construcción de guías de clase para el planteamiento y resolución de problemas aplicados en ciencias naturales operando con números racionales según el concepto de cociente.
Etapa 3: Intervención en el aula.	Aplicar las actividades propuestas por medio de una secuencia didáctica en los grupos de sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen.	Intervención de la estrategia didáctica de enseñanza propuesta.
Etapa 4: Evaluación	Evaluar el desempeño de la estrategia didáctica planteada como secuencia didáctica en los grupos de sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen.	Construcción y aplicación de actividades evaluativas durante la implementación de la estrategia didáctica propuesta. Realización del análisis de los resultados obtenidos al implementar la estrategia.
Etapa 5: Conclusiones y Recomendaciones	Determinar el alcance acorde con los objetivos específicos que se plantearon al inicio del trabajo final. Y la profundización en la práctica docente.	5.1 Dar los lineamientos para la posterior implementación de las acciones propuestas.

El cronograma se divide en 24 semanas (6 meses), tiempo que corresponde a dos semestres académicos para la ejecución del trabajo final.

Cronograma de actividades

No	TIEMPO		AÑO 2015								AÑO 2016							
			Octubre				Noviembre				Enero				Febrero -Marzo			
			Semanas				Semanas				Semanas				Semanas			
	ACTIVIDADES		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1.	Definición del área y subárea de investigación, planteamiento del problema y de la pregunta.	P																
		E																
2.	Consulta bibliográfica de antecedentes didácticos, históricos-epistemológicos y disciplinares. Formulación de objetivo general y objetivos específicos.	P																
		E																
3.	Propuesta preliminar del marco teórico. Propuesta del marco metodológico. Descripción de las técnicas y las herramientas para la recolección de datos.	P																
		E																
4.	Elaboración completa de la propuesta de trabajo final. Entrega para su aprobación.	P																
		E																
5.	Construcción del boceto de la propuesta final.	P																
		E																
6.	Entrega de la propuesta preliminar y aprobación.	P																
		E																
7.	Selección de aspectos históricos, epistemológicos, disciplinares y didácticos del objeto en estudio.	P																
		E																
8.	Diseño, aplicación y análisis de prueba diagnóstica.	P																
		E																
9.	Diseño de problemas y situaciones del entorno próximo y las ciencias naturales de acuerdo al tema de matemáticas.	P																
		E																
10.	Diseño y aplicación secuencia didáctica acordes a la temática donde se privilegia el concepto de número racional como cociente en estudio.	P																
		E																
11.	Escritura del documento final y entrega.	P																
		E																
INDICE DE CONVENCIONES																		
P	TIEMPO PROGRAMADO																	
E	TIEMPO EJECUTADO																	

B. Anexo: Pruebas o cuestionarios diagnósticos de matemáticas

Cuestionario No. 1

Consigna: "Averigüe lo que el estudiante ya sabe y enséñele en consecuencia"

D. Ausubel

NOMBRES Y APELLIDOS________________________GRADO_____

Cómo abordar resolución de problemas aplicando ciencias

En la región Caribe, y especialmente en nuestra zona es común que los padres envíen a los hijos a comprar en la tienda del vecino los alimentos para las diferentes comidas. Algunas veces con lista de productos y otras veces los niños aprenden de memoria el listado en el momento que van a comprar en la tienda. Pedrito es un niño aventajado que no necesita lista de compra y memoriza todo. La mamá de Pedrito va preparar una deliciosa sopa de mondongo

Fuente: http://www.cocinasemana.com/

La mamá lo envía a comprar lo siguiente:

- Una pata de res de dos kilogramos.
- Medio kilogramos de panza.
- Un kilogramos y medio de yuca.
- Tres cuartos de kilogramos de zanahoria.
- Un cuarto de kilogramo de habichuelas
- Seis mazorca de maíz.

De acuerdo con el texto anterior, conteste las siguientes preguntas:

7. En el mismo orden de la lista escribe como se representa el número o cantidad que corresponde a cada ingrediente.

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

8. ¿Cuáles diferencias tienen dichos números entre sí?

____
____
____
____
____

9. Ordene los números de mayor a menor.

____
____

10. Un agricultor de yuca siembra 1/6 de su campo con maíz y 2/6 con yuca. Expresa en número la parte del terreno que está sembrado y luego gráfica.

____
____
____
____
____
____
____

11. En un estanque se atrapó, una arroba de pescado, luego un cuarto de arroba se devolvió al estanque. Del total de la pesca tomó la sexta parte para consumo de su familia y el resto lo vende a $ 45.000 por arroba. ¿Cuánto dinero se pagó por la compra?

____
____
____
____
____
____
____

12. Un terreno está dividido en cinco partes iguales para sembrar fríjol, arroz, yuca, plátano y papa.

- De estos cultivos, ¿cuánto terreno está sembrado de granos y cuanto de bastimento?

  ____

  ____

  ¿Cuánto terreno está sembrado de tubérculos?

  ____

  ____

  ¿Cuánto terreno está sembrado de leguminosa?

  ____

  ____

- ¿Cuánto terreno está sembrado de cereales?

  ____

  ____

¡Éxitos!

Cuestionario No. 2

Consigna: "Averigüe lo que el estudiante ya sabe y enséñele en consecuencia"

D. Ausubel

NOMBRES Y APELLIDOS_________________________GRADO_____

Cómo abordar resolución de problemas aplicando ciencias

Ana se prepara una limonada en un vaso de 10 onzas de agua, una cucharita de limón, tres cucharitas de azúcar y cuatro cubitos de hielo para que quede bien helada. Cuando se disponía a bebérsela llegaron sus dos hermanos menores y le pidieron un poco.

Puedes guiarte con la capacidad de los vasos desechables como lo muestra la figura.

Fuente. https://articulo.mercadolibre.com.

Teniendo en cuenta lo anterior, conteste las siguientes preguntas:

1. Describa una estrategia organizada acerca de cómo se prepara una limonada, que permita conocer las cantidades de los ingredientes.

____
____
____
____
____
____
____
____

2. ¿Qué tema específico de ciencias naturales se puede asociar a este problema y que tipo de combinación se da entre el agua y el limón?

____
____
____

3. ¿Cuáles inconvenientes podría tener Ana al momento de preparar la limonada?

____
____
____
____
____

4. ¿Qué tendría que hacer Ana para darle limonada a sus hermanos en cantidades iguales y le quede para ella?

____
____
____
____
____
____
____
____
____

5. Representa con un dibujo y las cantidades que dividió entre ellos.

____
____
____
____
____
____

6. En el patio de la casa de Luis hay una huerta que es un terreno abonado de seis metros cuadrados para la siembra de verduras. Las semillas que tienen son tomate, cebolla y ají pimentón. Escriba una estrategia para organizar la siembra del terreno.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

¡Éxitos!

C. Anexo: Secuencia: Resolución de racionales aplicados en C. Naturales

Guía de aprendizaje No. 1

Tiempo: ___5____ horas

Propósito.

Incentivar a los estudiantes para que reflexionen sobre cómo emplear los números racionales en su vida diaria.

Objetivos específicos

1. Recrear casos de situaciones cotidianas de ciencias naturales aplicando números racionales.
2. Saber cuándo se debe aplicar operaciones básicas de números racionales en cada situación.

Estándares de pensamiento numérico de sexto a séptimo:

Pensamiento Numérico	Pensamiento Espacial	Pensamiento Métrico	Pensamiento Aleatorio
Utilizar números (fracciones, decimales. razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Resolver formular problemas usando modelos geométricos.	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas con medidas dadas.	Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

Logros:

De Sexto

1. Conoce las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con números racionales
2. Formula y resuelve problemas utilizando operaciones con números racionales.

De Séptimo

1. Usa los números racionales en diferentes contextos
2. Resuelve problemas de conteo, utilizando números racionales.

Estándares de Ciencias Naturales:

Al final de séptimo grado

Establezco relaciones entre las características macroscópicas y microscópicas de la materia y las propiedades físicas y químicas de las sustancias que la constituyen

Me aproximo al conocimiento como científico(a) natural	Manejo conocimientos			
	Entorno vivo	Entorno físico	Ciencia, tecnología y sociedad	Desarrollo compromisos personales y sociales
Realizo mediciones con instrumentos y equipos adecuados a las características y magnitudes de los objetos y las expreso en las unidades correspondientes.	Explico la función del suelo como depósito de nutrientes.	Clasifíco y verifíco las propiedades de la materia. Clasifíco materiales en sustancias puras o mezclas.	Identifico recursos renovables y no renovables y los peligros a los que están expuestos debido al desarrollo de los grupos humanos.	Escucho activamente a mis compañeros y compañeras, reconozco otros puntos de vista, los comparo con los míos y puedo modificar lo que pienso ante argumentos más sólidos.

PLAN DE ACTIVIDADES.

Sección	**Descripción**	**Situación problema**	**Ti**
1. Iniciación	1.1 Ambientación y motivación	1.1.1 Exposición introductoria al taller. Estrategia pre instruccional: preguntas cerradas y abiertas de los contenidos específicos del tema. **1.** ¿Qué es materia? ____ ____ ____	

		2. ¿Cómo podrías medirla? ____ ____ ____ **3.** ¿De qué está hecha la materia? ____ ____ De acuerdo a las múltiples respuestas se direcciona el dialogo y el tema hacia el contenido de los números racionales y sus operaciones básicas.	
	1.2. Contenido Interdisciplinario	**CONCEPTUALIZACIÓN** **TEMAS DE QUÍMICA.** **Materia**: se refiere a la substancia de la que todos los objetos están hechos. **Substancia:** elementos o compuestos químicos cuya composición es fija. **Masa:** Es una medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo[47]. **Volumen**: Es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo. El volumen es una magnitud derivada, puesto que se relacionan tres dimensiones de una región del espacio. **Magnitud:** Propiedad de los cuerpos que puede ser medida, como el tamaño, la masa, el peso o la extensión **Capacidad**: Propiedad de poder contener cierta cantidad de alguna cosa hasta un límite determinado.	

[47] Bayona, A & Rodríguez, R. (2007). Explora 7. Bogotá, Colombia. Educar. p.13.

TEMAS DE OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS RACIONALES.

Una interpretación del número racional es la referida al cociente de dos números enteros a y b, con b diferente de cero, siendo a, el numerador y b, el denominador [$\frac{a}{b}$].
El conjunto de los números racionales:

$$Q = \{\frac{p}{q} / p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}$$

Adición y sustracción de números racionales

La adición y sustracción de números racionales con igual denominador, simplemente se mantiene el mismo denominador y sumamos o restamos los numeradores según sea el caso:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Cuando tenemos denominadores de distinto valor, lo que tenemos que hacer es buscar una fracción equivalente, véase:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bb}$$

Multiplicación de números racionales

En primer lugar, se multiplican los numeradores de todos los factores y a continuación el producto resultante se lo utiliza como numerador, luego se multiplican los denominadores y al resultado se lo ubica como denominador sin importar si el valor es igual o distinto, de esta manera:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$$

División de números racionales

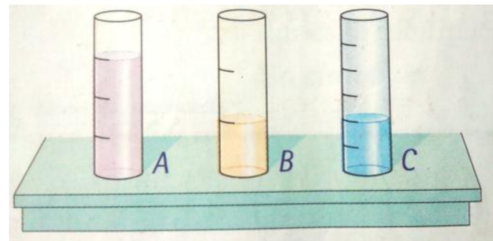
Para dividir los números racionales, tomamos el numerador de la primera fracción y se lo multiplica por el denominador de la segunda fracción y este resultado será utilizado como numerador; a continuación se toma el denominador de la primera fracción y se lo multiplica por el numerador de

		la segunda fracción, y a ese resultado se lo ubica como denominador. Por lo tanto en el caso de la división, el orden de los cocientes si altera el resultado, veamos el siguiente ejemplo: $$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a * d}{b * c}$$	
2. Aprendizaje Activo	2.1.Generación de problemas	Se plantea el siguiente problema e indaga los primeros pasos para resolverlos: 2.1.1. Una botella de gaseosa contiene 1 ¾ lt., se saca la bebida necesaria para llenar 5 vasos de ¼ lt cada uno. ¿Cuánta bebida queda en la botella? La orientación se dará hacia la necesidad de establecer un plan. Comprender el problema: ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ Elaborar un plan: ______________________________ ______________________________	

		____ Ejecutar el plan. ____ ____ ____ ____ ____ Examinar el proceso y resultado. ____ ____ ____ ____ ____ 2.1.2 El señor Juan recoge la leche en tinas de 40 litros, pasando por tres fincas (La Aurora, La Esperanza y El Mamón). En la finca La Aurora recoge 7 tinas y en la finca La Esperanza recoge 10 tinas.	

		a) ¿Cuántas tinas de leche tiene que recoger en la finca "El Mamón" si su vehículo transporta diariamente en un solo viaje la capacidad de 700 litros? b) Si en esa región las vacas proporcionan 7 litros de leche en el día. ¿Cuántas vacas tiene cada finca?	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
2.1.3 En clase de química[48], tres estudiantes van a preparar una solución. Para ello necesitan ciertas sustancias: A, B, C, distribuidas en tres tubos de ensayo así:



Fuente: Morales, M et al. (2004).Aritmética y Geometría.

Si cada tubo de ensayo tiene una capacidad de 12 mililitros

a. ¿Cuántos mililitros hay de la sustancia A?

b. ¿Cuántos mililitros hay de la sustancia B?

c. ¿Cuántos mililitros hay de la sustancia C?

d. ¿Cuántos mililitros de solución se obtienen en total?
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

[48] Morales, M et al. (2004).Aritmética y Geometría. Santillana. Bogotá, Colombia.

		e. ¿Cuántos mililitros hay entre las sustancia A y B? f. ¿Cuántos mililitros hay entre las sustancia B y C?	
3. Planteamiento y resolución de problemas		Proponga tres problemas de la vida diaria que involucre operaciones de números racionales con medida de volumen y como lo resolverías? Ten en cuenta que se pueden relacionar temas de Ciencias Naturales como Biología, Física, Química u otra ciencia.	
4. Diálogo de saberes	Debate en clase		

Tabla de autoevaluación y coevaluación Nº 1

Opiniones	Recomendaciones
1. ¿Qué opinas del trabajo de tus compañeros? 2. ¿Cómo se relacionan los problemas con los números racionales? 3. ¿Qué aprendes de los problemas?	4. ¿Qué recomiendas?

Guía de aprendizaje No. 2

Tiempo: ___5____ horas

Propósito.

1. Reflexionar sobre cómo emplear los números racionales en tu vida diaria.

Objetivos específicos

1. Recrear casos de situaciones cotidianas de ciencias naturales aplicando números racionales.
2. Saber cuándo debes aplicar operaciones básicas de números racionales en cada situación.

Estándares de pensamiento numérico de sexto a séptimo:

Pensamiento Numérico	Pensamiento Espacial	Pensamiento Métrico	Pensamiento Aleatorio
Utilizar números (fracciones, decimales. razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Resolver formular problemas usando modelos geométricos.	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas con medidas dadas.	Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

Logros:

De Sexto

1. Conoce las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con números racionales.
2. Formula y resuelve problemas utilizando operaciones con números racionales.

De Séptimo

1. Usa los números racionales en diferentes contextos.
2. Resuelve problemas de conteo, utilizando números racionales.

Estándares de Ciencias Naturales:

Al final de séptimo grado

Establezco relaciones entre las características macroscópicas y microscópicas de la materia y las propiedades físicas y químicas de las sustancias que la constituyen

Me aproximo al conocimiento como científico(a) natural	manejo conocimientos			
	Entorno vivo	Entorno físico	Ciencia, tecnología y sociedad	Desarrollo compromisos personales y sociales
Realizo mediciones con instrumentos y equipos adecuados a las características y magnitudes de los objetos y las expreso en las unidades correspondientes.	Explico la función del suelo como depósito de nutrientes	Clasifico y verifico las propiedades de la materia. Clasifico materiales en sustancias puras o mezclas.	Identifico recursos renovables y no renovables y los peligros a los que están expuestos debido al desarrollo de los grupos humanos.	Escucho activamente a mis compañeros y compañeras, reconozco otros puntos de vista, los comparo con los míos y puedo modificar lo que pienso ante argumentos más sólidos.

Plan de actividades.

Fases	**Descripción**	**Situación problema**	**Tiempo**
1. Iniciación	1.1 Ambientación y motivación	1.1.1 Exposición introductoria al taller. Estrategia pre instruccional: Lectura.	

		“Un paseo para recordar” Fui con tres amigos a la finca del papá de Pedrito, la cual está a medio kilómetro del puente del rio Cascada Blanca, allí nos encontramos con él y nos bañamos y compartimos una mandarina, pero tenía 11 torrejas y queríamos cantidades por igual.  Fuente: http://w w w .taringa.net/post/imagenes/15556902/Mandarina.html ¿Cuántas torrejas nos toca a cada uno? ¿Qué harías para repartir por igual? ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?	

		En la lectura subraya las palabras que consideres relacionadas con el tema de números racionales, y diga que significado tienen en el relato. ____ Y si la mandarina fuese de oro; ¿Qué tendrían que hacer para que nos toque cantidades iguales?	
	1.2. Planteamiento y resolución de problemas.	En la finca del papa de Pedrito dos cuartos de la tierra están sembrados de mandarina y un cuarto de naranja. • ¿Qué parte de la tierra está sembrada? • ¿Qué parte de la tierra no está sembrada?	

Completa el diagrama de proceso de recolección de la cosecha de mandarina:

Recolección de mandarina
↓
Selección por tamaño y calidad
↓
Lavado
↓
[ ]
↓
[ ]
↓
[ ]

¿En qué parte del proceso se requiere operaciones con números racionales?

		¿Expresa un ejemplo?	
2. Generación cognitiva	Aplicación de conceptos y procedimientos	¿Qué estrategia propondrías para la comercialización y venta de la cosecha de mandarinas? Puedes asociar conceptos de números racionales. __________ __________ __________ __________ __________ __________ __________	
3. Acción participativa	Generación de ideas y problemas	¿A partir de la pregunta anterior, cuál operación de números racionales puedes plantear? __________ __________ __________	

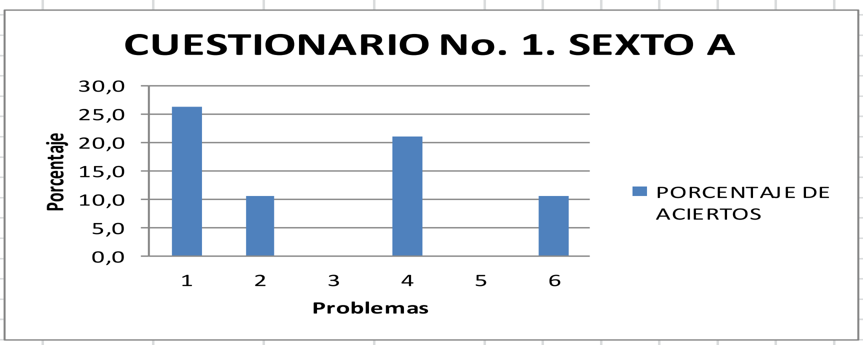
		____ ____ ____ Explica cómo se usan los racionales en tu vida diaria. ___________________________________ Enumera tres casos 1.________________2.________________3._____ ¿Cuál has visto o usado más? ______________	
5. Diálogo de saberes	Debate y evaluación	____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____	

Tabla de autoevaluación y coevaluación Nº 2

Opiniones	**Recomendaciones**
1. ¿Qué opinas del trabajo anterior? __________ __________ __________ 2. ¿Qué aprendes de los problemas? __________ __________	3. ¿Qué recomiendas? __________ __________ __________ __________ __________ __________

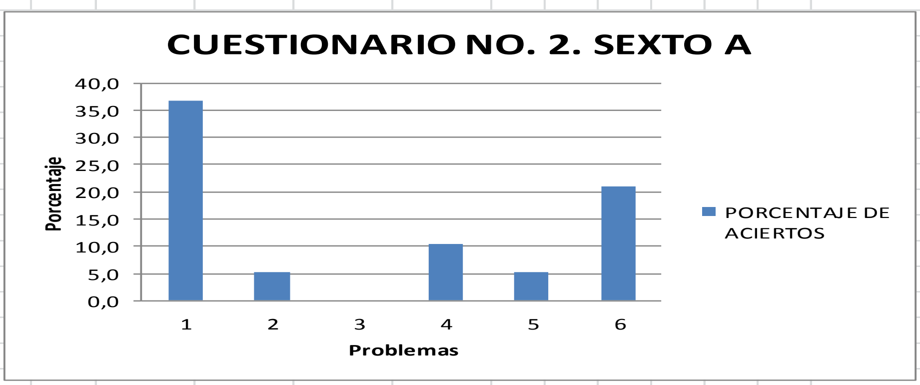
D. Anexo: Resultados de prueba diagnóstica de 6A. Cuestionario No. 1.

						CUESTIONARIO No. 1							
No	GRUP	APELLIDO1	APELLIDO2	NOMBRE1	NOMBRE2	1	2	3	4	5	6	ACIERTOS	NIV
1	601	ALFARO	ARIAS	ADRIAN	YAMIT	1	1	0	0	0	1	2	A
2	601	RUIZ	ARGUELLO	KEVIN	ANDRES	0	0	0	2	0	0	2	B
3	601	TORRES	TORRES	HECTOR	DANILO	2	0	0	0	0	0	2	B
4	601	GUTIERREZ	GUERRA	NAYELIS	CAROLINA	1	0	0	0	0	0	1	B
5	601	MEJIA	CENTENO	KAROL	JULIANA	1	0	0	0	0	1	1	C
6	601	ACUÑA	BENAVIDES	JHORDAN	DAVID	0	0	0	1	0	0	1	D
7	601	REYES	CANO	IVAN	DAVID	0	0	0	1	0	0	1	D
8	601	RIOS	PACHECO	DANIEL		0	1	0	0	0	0	1	E
9	601	ALFARO	ARROYO	ARUNGAMA		0	0	0	0	0	0	0	E
10	601	APARICIO	ARIAS	SERGIO	ANDRES	0	0	0	0	0	0	0	E
11	601	ARROYO	TORRES	GUNCHARU	MAKU	0	0	0	0	0	0	0	E
12	601	GUERRERO	CHOGO	MARLON	JOSE	0	0	0	0	0	0	0	E
13	601	MALO	RAMOS	MUNDUARI	.	0	0	0	0	0	0	0	E
14	601	MIELES	JIMENEZ	KATERIN	DANIELA	0	0	0	0	0	0	0	E
15	601	OÑATE	DAZA	MARIA	DEL ROSARI	0	0	0	0	0	0	0	E
16	601	RIOS	ESPINOSA	MARIA	ALEJANDRA	0	0	0	0	0	0	0	E
17	601	SALAS	PEÑUELA	SARA	SOFIA	0	0	0	0	0	0	0	E
18	601	SIERRA	MERCADO	YANDRIS	CAROLINA	0	0	0	0	0	0	0	E
19	601	TORRES	MERIÑO	BLEIDIS	VANESSA	0	0	0	0	0	0	0	E
	TOTAL ACIERTOS POR PREGUNTA Y GRUPO					5	2	0	4	0	2		
					PORCENTAJ	26,3	10,5	0,0	21,1	0,0	10,5		



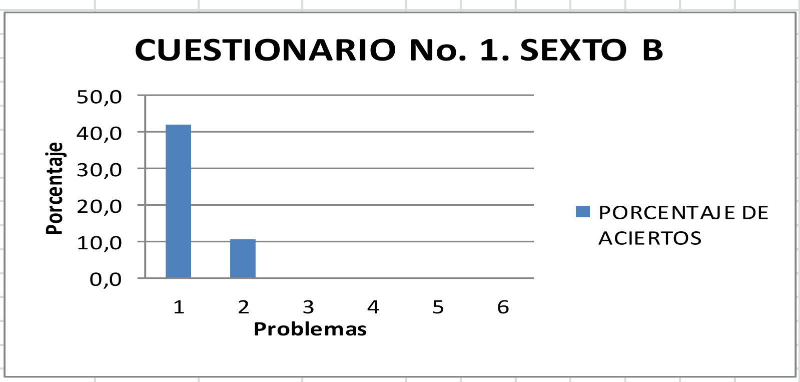
E. Anexo: Resultados de prueba diagnóstica de 6A. Cuestionario No. 2

						Cuestionario No 2						
No	GRUPO	APELLIDO1	APELLIDO2	NOMBRE1	NOMBRE2	1	2	3	4	5	6	NIVEL
1	601	ACUÑA	BENAVIDES	JHORDAN	DAVID	1	0	0	0	1	1	
2	601	ALFARO	ARIAS	ADRIAN	YAMIT	1	0	0	0	0	1	
3	601	OÑATE	DAZA	MARIA	DEL ROSAR	1	1	0	0	0	0	
4	601	RIOS	PACHECO	DANIEL		1	0	0	0	0	1	
5	601	RUIZ	ARGUELLO	KEVIN	ANDRES	0	0	0	2	0	0	
6	601	GUERRERO	CHOGO	MARLON	JOSE	0	0	0	0	0	1	
7	601	GUTIERREZ	GUERRA	NAYELIS	CAROLINA	1	0	0	0	0	0	
8	601	REYES	CANO	IVAN	DAVID	1	0	0	0	0	0	
15	601	RIOS	ESPINOSA	MARIA	ALEJANDRA	1	0	0	0	0	0	
9	601	ALFARO	ARROYO	ARUNGAMA		0	0	0	0	0	0	
10	601	APARICIO	ARIAS	SERGIO	ANDRES	0	0	0	0	0	0	
11	601	ARROYO	TORRES	GUNCHARU	MAKU	0	0	0	0	0	0	
12	601	MALO	RAMOS	MUNDUARINDUA		0	0	0	0	0	0	
13	601	MEJIA	CENTENO	KAROL	JULIANA	0	0	0	0	0	0	
14	601	MIELES	JIMENEZ	KATERIN	DANIELA	0	0	0	0	0	0	
16	601	SALAS	PEÑUELA	SARA	SOFIA	0	0	0	0	0	0	
17	601	SIERRA	MERCADO	YANDRIS	CAROLINA	0	0	0	0	0	0	
18	601	TORRES	MERIÑO	BLEIDIS	VANESSA	0	0	0	0	0	0	
19	601	TORRES	TORRES	HECTOR	DANILO	0	0	0	0	0	0	
	TOTAL ACIERTOS POR PREGUNTA Y GRUPO					7	1	0	2	1	4	
					PORCENTA	36,8	5,3	0,0	10,5	5,3	21,1	



F. Anexo: Resultados de prueba diagnóstica de 6B. Cuestionario No. 1

						CUESTIONARIO No. 1							
No	GRUP	APELLIDO1	APELLIDO2	NOMBRE1	NOMBRE2	1	2	3	4	5	6	ACIER TOS	NIVEL
1	602	FRAGOZO	PADILLA	LUIS	DAVID	1	1	0	0	0	0	2	A
2	602	ARROYO	TORRES	KWARINGAMA		1	0	0	0	0	0	1	B
3	602	GUERA	MALO	JUAN	CARLOS	1	0	0	0	0	0	1	B
4	602	GUERRA	MALO	LUZ	NELY	1	0	0	0	0	0	1	B
5	602	MISAD	TORREGRO!	ALEJANDRA	MARCELA	1	0	0	0	0	0	1	B
6	602	VILLEGAS	DAZA	LUIS	FERNANDO	1	0	0	0	0	0	1	B
7	602	PEREZ	NISPERUZA	ANTONIO	DAVID	1	0	0	0	0	0	1	C
14	602	PEREZ	TORRES	JOSE	EDUARDO	1	0	0	0	0	0	1	E
16	602	POLO	ROMO	CARLOS	ALVERTO	0	1	0	0	0	0	1	E
8	602	ARDILA	GELVES	ANDREA	PAOLA	0	0	0	0	0	0	0	E
9	602	ARIAS	AMAYA	JHOD	DANIEL	0	0	0	0	0	0	0	E
10	602	CACERES	GELVES	OLMER	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	E
11	602	CASADIEGO	GULLOZO	LUIS	CAMILO	0	0	0	0	0	0	0	E
12	602	MARTINEZ	VILLADIEGO	ROBERTO	CARLOS	0	0	0	0	0	0	0	E
13	602	MONTAÑO	QUINTERO	GREICI	LILIANA	0	0	0	0	0	0	0	E
15	602	POLO	CASTRO	ANDRES	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	E
17	602	RAMOS	TORRES	SEYWARIMAKU		0	0	0	0	0	0	0	E
18	602	TORRES	MERIÑO	ANDREA	PAOLA	0	0	0	0	0	0	0	E
19	602	TORRES	TORRES	SEYHARUNYWIA		0	0	0	0	0	0	0	E
	TOTAL ACIERTOS POR PREGUNTA Y GRUPO					8	2	0	0	0	0		
					PORCENTAJ	42,1	10,5	0,0	0,0	0,0	0,0		

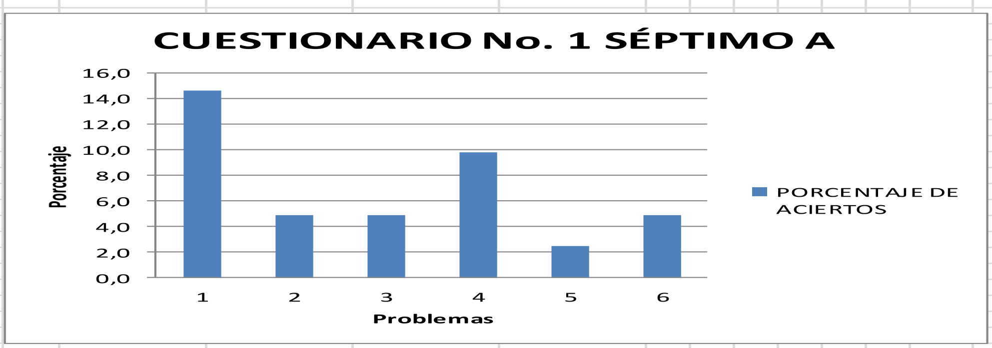


G. Anexo: Resultados de prueba diagnóstica de 6B. Cuestionario No. 2

						CUESTIONARIO No. 2							
No	GRUP	APELLIDO1	APELLIDO2	NOMBRE1	NOMBRE2	1	2	3	4	5	6	ACIERTOS ALUMNO	NIVEL
2	602	GUERA	MALO	JUAN	CARLOS	1	0	0	0	1	1	3	
3	602	VILLEGAS	DAZA	LUIS	FERNANDO	0	0	0	0	1	0	1	
4	602	MISAD	TORREGROSA	ALEJANDRA	MARCELA	0	0	0	1	0	0	1	
5	602	TORRES	TORRES	SEYHARUNYWIA		1	0	0	0	0	0	1	
18	602	RAMOS	TORRES	SEYWARIMAKU		1	0	0	0	0	0	1	
1	602	POLO	ROMO	CARLOS	ALVERTO	0	0	0	0	0	0	0	
6	602	ARDILA	GELVES	ANDREA	PAOLA	0	0	0	0	0	0	0	
7	602	ARIAS	AMAYA	JHOD	DANIEL	0	0	0	0	0	0	0	
8	602	ARROYO	TORRES	KWARINGAMA		0	0	0	0	0	0	0	
9	602	CACERES	GELVES	OLMER	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
10	602	CASADIEGO	GULLOZO	LUIS	CAMILO	0	0	0	0	0	0	0	
11	602	FRAGOZO	PADILLA	LUIS	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
12	602	GUERRA	MALO	LUZ	NELY	0	0	0	0	0	0	0	
13	602	MARTINEZ	VILLADIEGO	ROBERTO	CARLOS	0	0	0	0	0	0	0	
14	602	MONTAÑO	QUINTERO	GREICI	LILIANA	0	0	0	0	0	0	0	
15	602	PEREZ	NISPERUZA	ANTONIO	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
16	602	PEREZ	TORRES	JOSE	EDUARDO	0	0	0	0	0	0	0	
17	602	POLO	CASTRO	ANDRES	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
19	602	TORRES	MERIÑO	ANDREA	PAOLA	0	0	0	0	0	0	0	
	TOTAL ACIERTOS POR PREGUNTA Y GRUPO					3	0	0	1	2	1		
					PORCENTAJE	15,8	0,0	0,0	5,3	10,5	5,3		

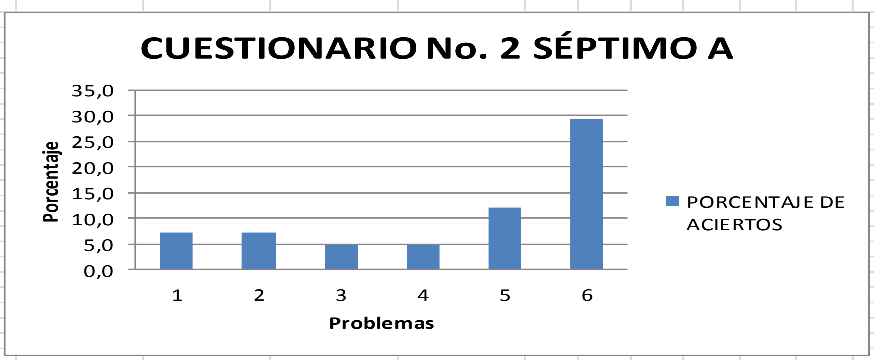
H. Anexo: Resultados de prueba diagnóstica de 7A. Cuestionario No. 1

						Cuestionario No 1							
GRAD	GRUP	APELLIDO1	APELLIDO2	NOMBRE1	NOMBRE2	1	2	3	4	5	6	TOTAL	NIVEL
1	701	ALFARO	ARIAS	CRISTIAN	YAIR	1	0	1	2	0	0	4	
2	701	SOLANO	GONZALEZ	GILMER	ANDRES	1	0	1	0	0	2	4	
3	701	GARCIA	GUTIERREZ	VALERIA	CAROLINA	1	0	0	1	0	0	2	
4	701	TORRES	TORRES	IVAN	JOSE	0	0	0	1	1	0	2	
6	701	CARDENAS	EGUIS	ANDREA	CAMILA	0	1	0	0	0	0	1	
8	701	LARA	ZULETA	JUAN	DAVID	0	1	0	0	0	0	1	
10	701	SIERRA	MERCADO	ANGIE	PAOLA	1	0	0	0	0	0	1	
11	701	TORRES	ARROYO	SEYTUNGUMU		1	0	0	0	0	0	1	
12	701	MONTERO	GUERRA	YINA	LUZ	1	0	0	0	0	0	1	
5	701	ARROYO	TORRES	KUNEYWIN		0	0	0	0	0	0	0	
7	701	DAZA	MIRANDA	VALENTIN	JOSE	0	0	0	0	0	0	0	
9	701	REYES	GUTIERREZ	SNEIDER	JAVIER	0	0	0	0	0	0	0	
13	701	OCHOA	TORRES	TANNERY	DANIELA	0	0	0	0	0	0	0	
14	701	ACOSTA	FLOREZ	MAURICIO	JOSE	0	0	0	0	0	0	0	
15	701	ALFARO	PAYARES	LUISA	DEL CARMEN	0	0	0	0	0	0	0	
16	701	ANAYA	BANQUETT	AURA		0	0	0	0	0	0	0	
17	701	APARICIO	ARIAS	CARMEN	LUCÍA	0	0	0	0	0	0	0	
18	701	BLANCO	DE HOYOS	CAMILO		0	0	0	0	0	0	0	
19	701	CACERES	RINCON	DANIEL	GUILLERMO	0	0	0	0	0	0	0	
20	701	CARRILLO	SERRANO	WILMER		0	0	0	0	0	0	0	
21	701	FRAGOZO	PADILLA	NIELA	ROSA	0	0	0	0	0	0	0	
22	701	GONZALES	DAZA	VALENTINA	LINETH	0	0	0	0	0	0	0	
23	701	LARA	ZULETA	MARIA	ISABELA	0	0	0	0	0	0	0	
24	701	LONDOÑO	ROJAS	SARA	LUCIA	0	0	0	0	0	0	0	
25	701	MAESTRE	MARQUEZ	MOISES	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
26	701	MEDINA	GUTIERREZ	JOSE	ALEJANDRO	0	0	0	0	0	0	0	
27	701	MENDEZ	CACERES	SERGIO	IVAN	0	0	0	0	0	0	0	
28	701	ORTEGA	GUERRA	ANA	LUZ	0	0	0	0	0	0	0	
29	701	PEREZ	NISPERUZA	OSNAIDER	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
30	701	RICHSTER	PEREZ	YESICA		0	0	0	0	0	0	0	
31	701	RODRIGUEZ	DAZA	ODAIR	ENRIQUE	0	0	0	0	0	0	0	
32	701	RODRIGUEZ	DAZA	YEFFRIN	DANILO	0	0	0	0	0	0	0	
33	701	ROPERO	PASOS	DAYANA		0	0	0	0	0	0	0	
34	701	RUIZ	ARGUELLO	AMADA	ROSA	0	0	0	0	0	0	0	
35	701	SANJUAN	NOVA	ERICK	FABIAN	0	0	0	0	0	0	0	
36	701	TORRES	MARQUEZ	EUDE	SENERINGUMU	0	0	0	0	0	0	0	
37	701	TORRES	MARQUEZ	JOSELINO	BUNKUWANAV	0	0	0	0	0	0	0	
38	701	TORRES	TORRES	DWYNEY		0	0	0	0	0	0	0	
39	701	TORRES	TORRES	MICHEL	BALENTINA	0	0	0	0	0	0	0	
40	701	TORRES	TORRES	ZARNEWIN		0	0	0	0	0	0	0	
41	701	TRILLOS	PEÑA	VIVIANA	ESTER	0	0	0	0	0	0	0	
42	701	MALO		SENABI		0	0	0	0	0	0	0	
43	701	HERRERA		LUIS		0	0	0	0	0	0	0	
44	701	CLAVIJO		KEILA		0	0	0	0	0	0	0	
	TOTAL ACIERTOS POR PREGUNTA Y GRUPO					6	2	2	4	1	2		
					PORCENTAJE D	###	4,9	4,9	9,8	2,4	4,9		



I. Anexo: Resultados de prueba diagnóstica de 7A. Cuestionario No. 2.

						Cuestionario No 2							
GRAD(	GRUP(	APELLIDO1	APELLIDO2	NOMBRE1	NOMBRE2	1	2	3	4	5	6	AC	NIVE
1	701	APARICIO	ARIAS	CARMEN	LUCÍA	0	2	0	0	1	1	4	
2	701	ALFARO	ARIAS	CRISTIAN	YAIR	0	1	0	0	1	1	3	
3	701	GARCIA	GUTIERREZ	VALERIA	CAROLINA	1	0	0	0	1	1	3	
4	701	ROPERO	PASOS	DAYANA		0	0	1	1	1	0	3	
5	701	MALO		SENABI		1	0	0	0	1	1	3	
6	701	DAZA	MIRANDA	VALENTIN	JOSE	0	0	0	0	0	2	2	
7	701	MENDEZ	CACERES	SERGIO	IVAN	0	0	0	1	0	1	2	
8	701	FRAGOZO	PADILLA	NIELA	ROSA	1	0	0	0	0	1	2	
9	701	ANAYA	BANQUETT	AURA		0	0	0	0	0	1	1	
10	701	MONTERO	GUERRA	YINA	LUZ	0	0	0	0	0	1	1	
11	701	OCHOA	TORRES	TANNERY	DANIELA	0	0	1	0	0	0	1	
12	701	GONZALES	DAZA	VALENTINA	LINETH	0	0	0	0	0	1	1	
13	701	ORTEGA	GUERRA	ANA	LUZ	0	0	0	0	0	1	1	
14	701	ACOSTA	FLOREZ	MAURICIO	JOSE	0	0	0	0	0	0	0	
15	701	ARROYO	TORRES	KUNEYWIN		0	0	0	0	0	0	0	
16	701	BLANCO	DE HOYOS	CAMILO		0	0	0	0	0	0	0	
17	701	CACERES	RINCON	DANIEL	GUILLERMO	0	0	0	0	0	0	0	
18	701	CARDENAS	EGUIS	ANDREA	CAMILA	0	0	0	0	0	0	0	
19	701	CARRILLO	SERRANO	WILMER		0	0	0	0	0	0	0	
20	701	LARA	ZULETA	JUAN	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
21	701	LARA	ZULETA	MARIA	ISABELA	0	0	0	0	0	0	0	
22	701	LONDOÑO	ROJAS	SARA	LUCIA	0	0	0	0	0	0	0	
23	701	MAESTRE	MARQUEZ	MOISES	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
24	701	MEDINA	GUTIERREZ	JOSE	ALEJANDRO	0	0	0	0	0	0	0	
25	701	PEREZ	NISPERUZA	OSNAIDER	DAVID	0	0	0	0	0	0	0	
26	701	REYES	GUTIERREZ	SNEIDER	JAVIER	0	0	0	0	0	0	0	
27	701	RICHSTER	PEREZ	YESICA		0	0	0	0	0	0	0	
28	701	RODRIGUEZ	DAZA	ODAIR	ENRIQUE	0	0	0	0	0	0	0	
29	701	RODRIGUEZ	DAZA	YEFFRIN	DANILO	0	0	0	0	0	0	0	
30	701	RUIZ	ARGUELLO	AMADA	ROSA	0	0	0	0	0	0	0	
31	701	SANJUAN	NOVA	ERICK	FABIAN	0	0	0	0	0	0	0	
32	701	SIERRA	MERCADO	ANGIE	PAOLA	0	0	0	0	0	0	0	
33	701	SOLANO	GONZALEZ	GILMER	ANDRES	0	0	0	0	0	0	0	
34	701	TORRES	ARROYO	SEYTUNGUMU		0	0	0	0	0	0	0	
35	701	TORRES	MARQUEZ	EUDE	SENERINGUMU	0	0	0	0	0	0	0	
36	701	TORRES	MARQUEZ	JOSELINO	BUNKUWANAW	0	0	0	0	0	0	0	
37	701	TORRES	TORRES	DWYNEY		0	0	0	0	0	0	0	
38	701	TORRES	TORRES	IVAN	JOSE	0	0	0	0	0	0	0	
39	701	TORRES	TORRES	MICHEL	BALENTINA	0	0	0	0	0	0	0	
40	701	TORRES	TORRES	ZARNEWIN		0	0	0	0	0	0	0	
41	701	TRILLOS	PEÑA	VIVIANA	ESTER	0	0	0	0	0	0	0	
42	701	ALFARO	PAYARES	LUISA	DEL CARMEN	0	0	0	0	0	0	0	
43	701	HERRERA		LUIS		0	0	0	0	0	0	0	
44	701	CLAVIJO		KEILA		0	0	0	0	0	0	0	
	TOTAL ACIERTOS POR PREGUNTA Y GRUPO					3	3	2	2	5	12		
					PORCENTAJ	7,3	7,3	4,9	4,9	12,2	29,3		



J. Anexo: Acta de aceptación y compromiso.

El estudiante de la Maestría de Enseñanza de la Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia y los padres de familia y/o acudientes de los estudiantes de los grados sexto y séptimo de la institución Educativa Virgen del Carmen pactan unos compromisos de mutua colaboración para el desarrollo del trabajo final de grado de maestría titulado "**Operaciones básicas de números racionales aplicados en el planteamiento y resolución de problemas de Ciencia"**, el cual consiste en desarrollar los siguientes acuerdos solidarios:

Del docente investigador

1. Informar claramente en qué consiste el trabajo final de grado, en lo concerniente a la aplicación de pruebas diagnósticas y una secuencia didáctica de problemas de ciencias naturales donde para su solución se requieren operaciones básicas con números racionales.
2. Aplicar la estrategia de enseñanza planeada a través de la secuencia de resolución de problemas aplicados en ciencias.

Del padre y/o acudiente

1. Aceptación y aprobación de la propuesta para aplicarla en los estudiantes de sexto y séptimo.
2. Consentimiento del uso de la información y estrategias de enseñanzas dadas a los estudiantes y puedan ser publicadas para uso pedagógico de la institución y de la Universidad Nacional de Colombia.
3. Realizar acompañamiento y seguimiento en casa y en la institución sobre el desempeño de su acudido.

De los estudiantes

1. Resolver los cuestionarios diagnósticos, secuencia didáctica, entrevistas, grabaciones, y participación activa en el proceso que serán tenidas en cuenta para la síntesis del trabajo y puedan ser publicadas para uso pedagógico de la institución y universidad.

Para mayor constancia firman los interesados:

____ ________________

Nombre completo del padre de familia y/o acudiente **Firma**

____ ________________

Nombre del docente **Firma**

K. Anexo: Guía de estrategia de mapa conceptual

MAPA CONCEPTUAL[49]

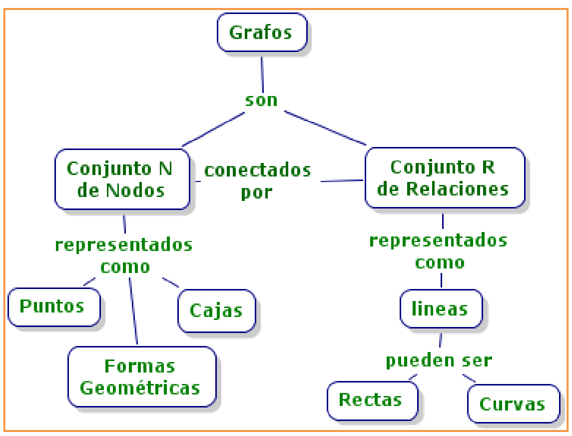
PROPÓSITO: La elaboración de mapas conceptuales como representación gráfica de un pensamiento o de un conocimiento.

1. Activación cognitiva

Resuelva los siguientes requerimientos:

1. Escriba la definición y los componentes del mapa conceptual.
2. Elabore un mapa conceptual de un tema de interés

2. Acceso a la información



Lea el siguiente documento "***Mapa conceptual***": *Los mapas conceptuales son instrumentos sencillos y prácticos, de representación del conocimiento, que permiten transmitir con claridad mensajes conceptuales complejos y facilitar tanto el aprendizaje como la enseñanza.*

Los ***mapas conceptuales*** son **artefactos para la organización y representación del conocimiento**. Tienen su origen en las teorías sobre la psicología del aprendizaje de **David Ausubel** enunciadas en los años 60.

Su objetivo es **representar relaciones entre conceptos en forma de proposiciones**. Los conceptos están incluidos en cajas o círculos, mientras que las relaciones entre ellos se explicitan mediante líneas que unen sus cajas respectivas. Las líneas, a su vez, tienen palabras asociadas que describen cuál es la naturaleza de la relación que liga los conceptos.

---

[49] Torres Ortega, Rodolfo**,** UIA de aprendizaje B. Unad. epdaa. Bogotá D.C. 2006. Consultado en: (www.unad.edu.co)

En este contexto **Joseph D. Novak** define **concepto** como “**una regularidad percibida en sucesos u objetos o registros de sucesos u objetos, designado por una etiqueta**”. La etiqueta de un concepto es usualmente una palabra

Una **proposición** es una “**frase acerca de cierto objeto o suceso en el universo**, que ocurre de forma natural o artificial. Las proposiciones contienen dos o más conceptos conectados con otras palabras que forman una frase coherente”. Se las suele llamar “unidades semánticas”.

Los ***mapas conceptuales*** **se estructuran en forma jerárquica** en la que los conceptos más generales están en la raíz del árbol y a medida que vamos descendiendo por el mismo nos vamos encontrando con conceptos más específicos.

Y es que los ***mapas conceptuales*** **se desarrollaron para comprender los cambios en el tiempo del conocimiento que los niños tenían de la Ciencia**. La idea de Ausubel es que el aprendizaje tiene lugar gracias a la asimilación de nuevos conceptos y proposiciones en marcos de referencia proposicionales ya existentes en la mente del aprendiz.

Por contraposición con el aprendizaje puramente memorístico Ausubel considera que el **aprendizaje coherente requiere tres condiciones:**

- **El contenido ha de estar conceptualmente claro** y ser presentado con lenguaje y ejemplos que el aprendiz pueda relacionar con su base de conocimiento existente.
- El aprendiz debe tener un **conocimiento previo relevante**.
- **Motivación**. El aprendiz debe elegir aprender de forma coherente.

Este tipo de instrumentos, bien diseñados teniendo en cuenta el contexto y la motivación de su audiencia, **constituyen tanto una herramienta de enseñanza como de aprendizaje** que facilita la comprensión y asimilación de los conceptos y sus relaciones.

Aunque su origen está ligado a la enseñanza, **su aplicación en la visualización de información los configura como una herramienta útil para transmitir de forma clara mensajes complejos. Me atrevería a decir que, además, contribuyen notablemente a clarificar las ideas del que construye el mensaje**

3. Generación y uso del conocimiento. **Ahora resuelva las siguientes cuestiones.**

a. ¿A cuáles conclusiones llegué?
b. ¿Qué aprendí?
c. ¿Qué desaprendí?
d. ¿Qué problemas se me presentaron?
e. ¿Qué alternativas planteo para solucionarlos?

4. ***Cierre***. Escriba un ensayo de una página sobre la importancia del mapa conceptual en su ambiente laboral. Consigne en su portafolio los aprendizajes producidos.

L. Anexo: Guía de estrategia de flujograma

ESTRATEGIA DE FLUJOGRAMA

PROPÓSITO: La elaboración de flujogramas como representación gráfica de un conocimiento

1. Activación cognitiva

Resuelva los siguientes requerimientos:

a. Escriba la definición y los componentes de un flujograma.
b. Elabore un flujograma de un tema de interés

2. Acceso a la información

Lea el siguiente documento, "***flujograma***":

¿Qué es?

Según Gómez Cejas, Guillermo. Año 1.997; El Flujograma, es un diagrama que expresa gráficamente las distintas operaciones que componen un procedimiento o parte de este, estableciendo su secuencia cronológica. Según su formato o propósito, puede contener información adicional sobre el método de ejecución de las operaciones, el itinerario de las personas, las formas, la distancia recorrida el tiempo empleado, etc.

***Importancia*:**

Según Gómez Cejas, es importante ya que ayuda a designar cualquier representación gráfica de un procedimiento o parte de este, El flujograma de conocimiento o diagrama de flujo, como su nombre lo indica, representa el flujo de información de un procedimiento.

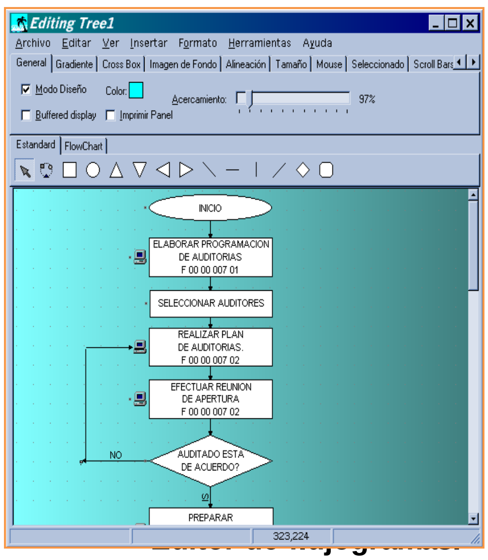
1. Diseño y Elaboración de Flujogramas

Según Gómez Cejas:
Convención para trazar los diagramas:

a. La información para identificar cada diagrama debe ser la siguiente:
    1. Nombre del proceso, indicando los puntos iniciales y finales.
    2. Nombre del departamento o los departamentos involucrados.
    3. Nombre de la persona que preparó el diagrama.
    4. Número de personas o puestos involucrados.
    5. Número de pasos.

b. Identificar cada columna con el nombre de la persona o puestos que realiza cada uno de los pasos.
c. Cada forma debe representarse siempre por un rectángulo de las mismas dimensiones.

b. Cada vez que se crea una forma, se le pone en el original y copias un triángulo negro en la esquina inferior derecha.
c. Cuando las dimensiones del rectángulo lo permitan, es conveniente poner el nombre de la forma en cada paso que aparezca.
d. En cada paso deben presentarse todos los documentos que intervienen.
e. Cuando se muevan juntos, pero no unidos, el transporte se representa por medio de líneas para cada forma o grupo de formas.
f. La secuencia demuestra haciendo que las líneas de transportes tengan una ligera tendencia hacia abajo.
g. El orden cronológico de los pasos se representa por el orden en que aparecen los rectángulos, de arriba hacia abajo.
h. Debe identificarse cada paso con un número y hacer una pequeña descripción del mismo, mediante la escritura del verbo que identifica la acción.



Muestra flujograma elaborado con Paralso "Auditorías Internas"

3. Generación y uso del conocimiento. **Ahora resuelva las siguientes cuestiones.**

a. ¿A qué conclusiones llegué?
b. ¿Qué aprendí?
c. ¿Qué desaprendí?
d. ¿Qué problemas se me presentaron?
e. ¿Qué alternativas planteo para solucionarlos?

4. Cierre

Elabore el flujograma correspondiente al tema “Flujograma”. Consigne en su portafolio los aprendizajes producidos.

M. Anexo: Secuencia: Resolución de racionales aplicados en C. Naturales

http://pijamasurf.com/2012/08/el-ojo-de-horus-es-una-compleja-ecuacion-matematica/

Guía de aprendizaje No. 3

Tiempo: _4_ horas

Objetivos específicos

Reconocer personajes y sucesos históricos que aportaron al desarrollo de la ciencia.
Explicar propiedades de los cuerpos y principios físicos aplicables a estos.
Interaccionar conceptos y cálculos matemáticos asociados a los números racionales.

Estándares de pensamiento numérico de sexto a séptimo:

Pensamiento Numérico	Pensamiento Espacial	Pensamiento Métrico	Pensamiento Aleatorio
Utilizar números (fracciones, decimales. razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Resolver formular problemas usando modelos geométricos.	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas con medidas dadas.	Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

Estándares de Ciencias Naturales de sexto a séptimo:

Establezco relaciones entre las características macroscópicas y microscópicas de la materia y las propiedades físicas y químicas de las sustancias que la constituyen

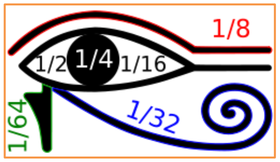
Me aproximo al conocimiento como científico(a) natural	Entorno vivo	Entorno físico	Ciencia, tecnología y sociedad	Desarrollo compromisos personales y sociales
Realizo mediciones con instrumentos y equipos adecuados a las características y magnitudes de los objetos y las expreso en las unidades correspondientes.	Explico la función del suelo como depósito de nutrientes.	Clasifíco y verifíco las propiedades de la materia. Clasifíco materiales en sustancias puras o mezclas.	Identifico recursos renovables y no renovables y los peligros a los que están expuestos debido al desarrollo de los grupos humanos.	Escucho activamente a mis compañeros y compañeras, reconozco otros puntos de vista, los comparo con los míos y puedo modificar lo que pienso ante argumentos más sólidos.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

<table>
<tr><th>Sección</th><th>Descripción</th><th>Situación problema</th><th>Ti</th></tr>
<tr><td>1. Iniciación</td><td>1.1 Ambientación y motivación</td><td>
1.1.1 Introducción.

Contexto histórico (leyendas).
1. Lea el texto El ojo de Horus.

Horus, hijo póstumo de Osiris y educado con sed de venganza por su madre Isis, desafió a su tío Seth, por el asesinato de su padre, y entabló con él un terrible combate. En la refriega, Seth le arrancó un ojo a Horus, lo cortó en seis pedazos y lo esparció por todo Egipto. La asamblea de los dioses decidió intervenir en favor de Horus y le encargó a Toth, maestro supremo de la aritmética, la palabra, la escritura y los escribas, reunir las partes del ojo mutilado y reconstruir con ellas, gracias a sus potentes sortilegios, un ojo sano y completo.



Por eso, el Ojo de Horus, a la vez ojo humano y de halcón, mutilado y restaurado, era uno de los amuletos más importantes para los egipcios, pues se convirtió en símbolo de la integridad física, el conocimiento, la visión total y la fertilidad. Y para que este símbolo mantuviese todos sus sentidos, los escribas utilizaban sus distintas partes para representar las <u>fracciones del héqat</u>, unidad de capacidad que correspondía aproximadamente a 4.784 litros. Si sumamos las seis fracciones del héqat, obtenemos 63/64.

¿Qué pasaría con el 1/64 que falta? La tradición nos da una respuesta: cuando un aprendiz de escriba le planteó la cuestión a su maestro, éste le respondió que el 1/64 que faltaba sería siempre proporcionado por Toth al calculador que se coloque bajo su protección, lo cual podemos interpretar como una prueba de fe o como el pago estipulado para los calculadores por sus servicios.
Tomado de http://www.epsilones.com/paginas/t-historias1.html#historias-ojohorus.

2. Escriba su opinión personal sobre los números referenciados en la lectura.
</td><td></td></tr>
</table>

		______________________________ ______________________________ ______________________________ 3. Comprueba que la suma de las partes del ojo de Horus da $\frac{63}{64}$	
	1.2. Contenido Interdisciplinario	**CONCEPTUALIZACIÓN** **CONCEPTOS DE FISICA Y QUÍMICA.** **Medidas de volumen, peso y capacidad de los sólidos** Los materiales en la naturaleza se encuentran en tres estados: sólido, líquido o gaseoso. Cada uno tiene propiedades o características propias. Las medidas de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso forman parte del sistema métrico decimal. Cuando queremos medir algo tenemos que elegir la unidad de medida adecuada y los instrumentos que nos posibiliten una mayor precisión. Por ejemplo, no podríamos medir el largo del salón de clase usando como unidad el kilogramo, ni decir cuánto pesa un elefante usando el litro o el metro. Del mismo modo, si un joyero necesita saber el peso de un anillo de oro precisa una aproximación más fina que la del vendedor que pesa una bolsa de papas. No nos olvidemos que los resultados de las mediciones son siempre aproximaciones, pues los valores que se obtienen dependen de la habilidad de la persona que mide y de la precisión del instrumento del que se disponga. La forma de algunos objetos les permite contener sustancias; esos objetos se llaman recipientes y de ellos se puede medir tanto su capacidad como su volumen. También se puede conocer el volumen de su contenido. Por ejemplo, una taza vacía tiene un volumen, ocupa un lugar en el espacio y, como es un recipiente, también se pueden medir su capacidad y el volumen del líquido que se desee agregar. En cambio, de otros objetos, como una piedra, solo se le puede medir su volumen. La piedra no es un recipiente. Recordemos que las medidas de longitud sirven para determinar una sola dimensión, por ejemplo, la altura de una persona, un árbol, una casa, etc. Las medidas de área sirven para medir superficies en unidades cuadradas, es decir, en dos dimensiones: largo y ancho, como por ejemplo, la extensión de un lote o una finca. Las medidas de volumen sirven para medir el espacio	

		que ocupa un cuerpo (en tres dimensiones), como el del estanque de peces. Las medidas de peso sirven para medir la fuerza con que la tierra atrae a los cuerpos. Por ejemplo, el peso de un bulto de papa. Las medidas de capacidad sirven para medir los líquidos, como agua, aceite, leche y vino. Tomado de secundaria activa Ministerio de Educación Nacional de Colombia **CONCEPTOS HISTÓRICOS DE OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS RACIONALES.** Los antiguos egipcios desarrollaron sus propios sistemas de escritura, uno de ellos y el más antiguo, es la escritura jeroglífica (por ejemplo la fracción ¼ se escribía con el símbolo (), era de tipo pictórico, como el Papiro de Rhind, donde se expresa en forma de sumas de fracciones unitarias. Los egipcios utilizaron un complejo sistema para representar fracciones en medidas agrarias de superficie y volumen, basado en las potencias de ½. En este mismo papiro se referencia las primeras aproximaciones de la longitud de una circunferencia según se expresa el valor de π como: $2^8/3^4 \sim 3{,}1605$. Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.C.)[50] Utilizó las fracciones en su aproximación del número PI($\prod$). En su obra medición del circulo formulo los límites para pi ($\prod$), así $3\frac{10}{71} < \prod < 3\frac{1}{7}$, y expuso la siguiente proposición "el perímetro de todo circulo es igual al diámetro triplicado con exceso, que es menor que la séptima parte del diámetro pero mayor que diez septuagésimo primero"[51]. Actualmente pi π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro en geometría euclidiana y es aproximadamente igual a 3.14159265358979323846…	
2. Aprendizaje Activo	2.1.Generación de problemas históricos	**1.** Según la conceptualización se puede considerar que pi es un número racional?. Si o No, justifica tu respuesta. ____ ____	

[50] León G. Op cit., p.7.

[51] Beskin, N. Fracciones maravillosas. Ed. MIR. Moscú. 1987. p.11.

____

____

2. La longitud de una circunferencia, según Arquímedes es de los 22/7 de su diámetro. Teniendo en cuenta la aproximación de Arquímedes desarrolla lo siguiente:

a. Calcula la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 70cm..

b. Si el diámetro de la Tierra es aproximadamente de 12.740 Km., ¿cuánto medirá un meridiano terrestre?

____

____

____

____

3. Teniendo en cuenta la conceptualización de medidas de volumen, peso y capacidad de los sólidos y los cálculos que se deriven de los números racionales analizar la siguiente lectura:

El rey Herón le entregó 2 1/2 kg de oro a su joyero para la construcción de la corona real. Si bien ése fue el peso de la corona terminada, el rey sospechó que el artesano, a pesar de haberle entregado una corona de 2 1/2 Kg, lo había estafado sustituyendo oro por plata en el oculto interior de la corona. Le encomendó entonces a Arquímedes que resolviera la duda o problema sin dañar la corona. Un día, mientras tomaba un baño en una tina, Arquímedes se percató de que el agua subía cuando él se sumergía. En seguida comenzó a asociar conceptos: él al sumergirse estaba desplazando una cantidad de agua que equivaldría a su volumen. Consecuentemente, si sumergía la corona del rey en agua, y medía la cantidad de agua desplazada, podría conocer su volumen.

a. Con tus palabras explica el concepto o proposición encontrado por Arquímedes?

		b. ¿Representa con un dibujo la proposición de Arquímedes? c. Investiga el concepto de densidad ____ ____ ____ d. Representa las expresiones matemáticas de la densidad y ¿cómo se relaciona con las propiedades del oro? Y ¿qué números se pueden derivar de los cálculos?	

Autoevaluación y coevaluación

Opiniones	Recomendaciones
1. ¿Qué opinas de los aportes de tus compañeros?	3. ¿Qué aprendes de los problemas?
2. ¿Cómo se relacionan los problemas con los números racionales?	4. ¿Qué recomiendas?

N. Anexo: Secuencia: Resolución de racionales aplicados en C. Naturales

http://www.lacocinademona.com/ensalada-de-frutas/

Guía de aprendizaje No. 4

Tiempo: _4_ horas

Objetivos específicos

Recrear casos de situaciones cotidianas de ciencias naturales aplicando números racionales.

Estándares de pensamiento numérico de sexto a séptimo:

Pensamiento Numérico	Pensamiento Espacial	Pensamiento Métrico	Pensamiento Aleatorio
Utilizar números (fracciones, decimales. razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Resolver formular problemas usando modelos geométricos.	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas con medidas dadas.	Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

Estándares de Ciencias Naturales de sexto a séptimo:

Establezco relaciones entre las características macroscópicas y microscópicas de la materia y las propiedades físicas y químicas de las sustancias que la constituyen

Me aproximo al conocimiento como científico(a) natural	Entorno vivo	Entorno físico	Ciencia, tecnología y sociedad	Desarrollo compromisos personales y sociales
Realizo mediciones con instrumentos y equipos adecuados a las características y magnitudes de los objetos y las expreso en las unidades correspondientes.	Explico la función del suelo como depósito de nutrientes.	Clasifíco y verifíco las propiedades de la materia. Clasifíco materiales en sustancias puras o mezclas.	Identifico recursos renovables y no renovables y los peligros a los que están expuestos debido al desarrollo de los grupos humanos.	Escucho activamente a mis compañeros y compañeras, reconozco otros puntos de vista, los comparo con los míos y puedo modificar lo que pienso ante argumentos más sólidos.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

<table>
<tr><th>Sección</th><th>Descripción</th><th>Situación problema</th><th>Ti</th></tr>
<tr><td>1. Iniciación</td><td>1.1 Ambientación y motivación</td><td>1.1.1 Introducción.

https://w w w .pinterest.cl/explore/brochetas-de-fruta/
Observa la foto de la ensalada de frutas en cubitos (patilla, banano, melón y kiwi) y determina aproximadamente con que numero racional representas la cantidad de cubitos de cada fruta. Asumiendo que las caras son iguales.
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1.2. Contenido Interdisciplinario</td><td>CONCEPTUALIZACIÓN
CONCEPTOS DE BIOLOGIA Y NÚMEROS RACIONALES.
MEZCLAS
La mayor parte de las sustancias que existen en la naturaleza se encuentran en forma de mezcla. El aire que respiramos es una mezcla de gases, como el oxígeno, el nitrógeno, el dióxido de carbono y el vapor de agua. Otros ejemplos de mezclas son: el agua de los mares, el suelo y los jugos. Una mezcla es la unión de dos o más sustancias, llamadas componentes, las cuales conservan sus características iniciales y se pueden separar con facilidad por métodos sencillos. Ejemplo: una ensalada de frutas es una mezcla; si no te quieres comer alguna fruta, se puede separar con el tenedor.</td><td></td></tr>
</table>

BIOELEMENTOS

Los **bioelementos** son los elementos químicos, presentes en seres vivos. La materia viva está constituida por unos 70 elementos, No obstante, alrededor del 99% de la masa de la mayoría de las células está constituida por cuatro elementos, carbono (C), hidrógeno (H), oxígeno (O) y nitrógeno (N), que son mucho más abundantes en la materia viva que se encuentra en la corteza terrestre. La proporción de los diversos bioelementos es muy diferente a la que hallamos en la atmósfera, la hidrosfera o la corteza terrestre; ellos indica que la vida ha seleccionado aquellos elementos que le son más adecuados para formar sus estructuras y realizar sus funciones. Por ejemplo, el carbono representa aproximadamente un 20% del peso de los organismos, pero su concentración en la atmósfera, en forma de dióxido de carbono es muy baja, de manera que los seres vivos extraen y concentran este elemento en sus tejidos.

La siguiente tabla muestra la proporción de algunos bioelementos en el cuerpo humano comparada con la que tienen en el resto de la Tierra:

Elemento	**Litosfera-atmósfera-hidrosfera (%)**	**Cuerpo humano (%)**
Oxígeno(O)	50,02	62,81
Carbono (C)	0,18	19,37
Hidrógeno(H)	0,95	9,31
Nitrógeno (N)	0,03	5,14
Calcio (Ca)	3,22	1,38
Fósforo (P)	0,11	0,64
Azufre (S)	0,11	0,63
Sodio (Na)	2,36	0,26
Potasio (K)	2,28	0,22
Cloro (Cl)	0,2	0,18

Magnesio(Mg)	2,08	0,04
Flúor (F)	0,1	0,009
Hierro (Fe)	4,18	0,005
Aluminio (Al)	7,3	0,001
Manganeso(Mn)	0,08	0,0002
Silicio (Si)	25,8	—

https://www.lifeder.com/bioelementos/

En la tabla anterior se presentan diferentes porcentajes en expresión decimal, las cuales pueden ser representadas como números racionales. La cual se podría desarrollar a través de una conversión que implica operaciones aritméticas.

Te invitamos a que representes los valores de la tercera columna del cuadro anterior en números racionales:

Elemento	**Cuerpo humano (%)**
Oxígeno(O)	
Carbono (C)	
Hidrógeno(H)	
Nitrógeno (N)	
Calcio (Ca)	
Fósforo (P)	
Azufre (S)	
Sodio (Na)	
Potasio (K)	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>Cloro (Cl)</td><td></td></tr>
<tr><td>Magnesio(Mg)</td><td></td></tr>
<tr><td>Flúor (F)</td><td></td></tr>
<tr><td>Hierro (Fe)</td><td></td></tr>
<tr><td>Aluminio (Al)</td><td></td></tr>
<tr><td>Manganeso(Mn)</td><td></td></tr>
<tr><td>Silicio (Si)</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2. Aprendizaje Activo</td>
<td>2.1.Generación de problemas históricos</td>
<td>Ensalada de frutas

Se pretende preparar una deliciosa ensalada de frutas con los siguientes ingredientes:

- 1/2 papaya

- 3 1/2 bananos

- 31/2 manzana

- 1/4 de libra de uvas

Realice y responda:

Divida la porción de papaya en 12 partes iguales. ¿Cómo se denomina a cada trozo de papaya?</td>
<td>60</td>
</tr>
</table>

		Divida cada banano en octavos. ¿Cuántos octavos reunió en total? Divida cada tercio de manzana en 4 partes iguales. ¿Cuántos tercios resultaron en total? Cuente cuántas uvas hay en un cuarto de libra. ¿A qué fracción de libra corresponde cada uva? Consulta si la ensalada de fruta es una mezcla homogénea o heterogénea y qué diferencias hay entre una y la otra? ¿Qué bioelementos contiene cada fruta?	

Autoevaluación y coevaluación

Opiniones	Recomendaciones
5. ¿Qué opinas de los aportes de tus compañeros? 6. ¿Cómo se relacionan los problemas con los números racionales?	7. ¿Qué aprendes de los problemas? 8. ¿Qué recomiendas?

O. Anexo: Secuencia: Resolución de racionales aplicados en C. Naturales

https://www.youtube.com/watch?v=JOkVfu2FxpA

Guía de aprendizaje No. 5

Tiempo: _4_ horas

Objetivos específicos

Recrear casos de situaciones cotidianas de ciencias naturales aplicando números racionales.

Estándares de pensamiento numérico de sexto a séptimo:

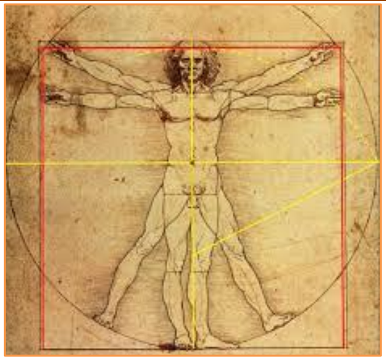
Pensamiento Numérico	Pensamiento Espacial	Pensamiento Métrico	Pensamiento Aleatorio
Utilizar números (fracciones, decimales. razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Resolver formular problemas usando modelos geométricos.	Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas con medidas dadas.	Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

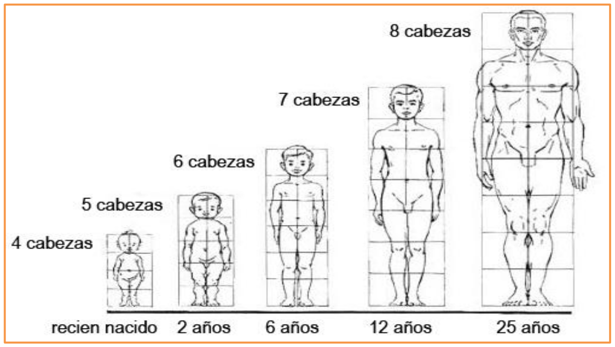
Estándares de Ciencias Naturales de sexto a séptimo:

Establezco relaciones entre las características macroscópicas y microscópicas de la materia y las propiedades físicas y químicas de las sustancias que la constituyen

Me aproximo al conocimiento como científico(a) natural	Entorno vivo	Entorno físico	Ciencia, tecnología y sociedad	Desarrollo compromisos personales y sociales
Realizo mediciones con instrumentos y equipos adecuados a las características y magnitudes de los objetos y las expreso en las unidades correspondientes.	Explico la función del suelo como depósito de nutrientes.	Clasifíco y verifíco las propiedades de la materia. Clasifíco materiales en sustancias puras o mezclas.	Identifico recursos renovables y no renovables y los peligros a los que están expuestos debido al desarrollo de los grupos humanos.	Escucho activamente a mis compañeros y compañeras, reconozco otros puntos de vista, los comparo con los míos y puedo modificar lo que pienso ante argumentos más sólidos.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES.

Sección	Descripción	Situación problema	Ti
1. Iniciación	1.1 Ambientación y motivación	1.1.1 Introducción.  http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/r_aurea.htm El hombre de Vitruvio de Leonardo da Vinci es una de las imágenes más conocidas del arte renacentista, lo cual podría ser un poco sorprendente ya que parece ser sólo un dibujo a lápiz y tinta de un hombre con extremidades superpuestas dentro de un círculo y un cuadrado. Sin embargo, este dibujo es mucho más que eso; es la solución simbólica de Leonardo a un antiguo problema matemático que tuvo cierta importancia también en la alquimia, en lo que se conoce como "la cuadratura del círculo, realizado en escritura especular, corrigió algunas proporciones y añadió otras: Cuatro dedos hacen una palma. Cuatro palmas hacen un pie. Seis palmas hacen un codo. Cuatro codos hacen un paso. Veinticuatro palmas hacen a un hombre. Si separas la piernas lo suficiente como para que tu altura disminuya 1/14 y estiras y subes los hombros hasta que los dedos estén al nivel del borde superior de tu cabeza, has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo y que el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero. Desde la parte superior del pecho al nacimiento del pelo será la séptima parte del hombre completo. • Desde los pezones a la parte de arriba de la cabeza será la cuarta parte.	

		• La anchura mayor de los hombros contiene en sí misma la cuarta parte. • Desde el codo a la punta de la mano será la cuarta parte. • Desde el codo al ángulo de la axila será la octava parte. • La mano completa será la décima parte. • El comienzo de los genitales marca la mitad del hombre. • El pie es la séptima parte. • Desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla será la cuarta parte. • Desde debajo de la rodilla al comienzo de los genitales será la cuarta parte. • La distancia desde la parte inferior de la barbilla a la nariz y desde el nacimiento del pelo a las cejas es, en cada caso, la misma y como la oreja. • Desde el inicio de la rodilla hasta el inicio de la pelvis, será la misma medida del torso. • Desde el centro del pecho hasta la punta de los dedos, será igual a la longitud de toda la pierna. http://www.comocubriruncuerpo.org/proporciones-del-cuerpo-humano-1-da-vinci-y-vitruvio/	
	1.2. Contenido Interdisciplinario	**CONCEPTUALIZACIÓN** **NÚMEROS RACIONALES APLICADOS EN CIENCIAS.**  http://www.comocubriruncuerpo.org/proporciones-del-cuerpo-humano-1-da-vinci-y-vitruvio/	

2. Aprendizaje Activo	2.1.Generación de problemas históricos	**Proporción áurea**[52] En la película *Donald en el país de las matemáticas* se dedica varios minutos a la razón áurea. Ésta se encuentra en la arquitectura, en la naturaleza y el cuerpo humano. Su origen se remonta a los antiguos griegos, quienes pensaban que el rectángulo áureo mostraba la proporción más estética. Un rectángulo áureo se define como un rectángulo cuyas dimensiones satisfacen la ecuación: Longitud / ancho = $\frac{(longitud + ancho)}{longitud}$ Ver la película: *Donald en el país de las matemáticas* 1. Observar el filme *Donald en el país de las matemáticas*. En nuestro propio cuerpo existen relaciones entre la matemática y la naturaleza: 2. Formen parejas. 3. Midan las longitudes que se piden en la tabla. a. Altura de cada integrante (h). b. Distancia entre la planta de los pies y el ombligo (n). c. Distancia entre la cima del cráneo y el ombligo (m). d. Con los datos anteriores, completen la tabla como la siguiente: Cuadro de recepción de la información	

[52] Ministerio de Educación del Ecuador. Didáctica de las Matemáticas 2011.pag 166

h	n	m	$\frac{h}{n}$	$\frac{n}{m}$

Anoten sus conclusiones de acuerdo con los valores obtenidos para h/n y n/m.

4. Busquen las <u>proporciones</u> entre esas medidas y determinen las que se acercan al número áureo.

5. ¿Qué cuerpos son más armónicos?

Durante la época del Renacimiento, las composiciones pictóricas debían ser regidas por la proporción áurea y artistas como Leonardo Da Vinci pintaron todas sus obras basándose en esta relación.

6. Contesten: ¿qué opinan ustedes al respecto? ¿por qué?

		7. Realicen tres mediciones comparativas entre: a. El largo y el ancho de su mano . b. El largo y ancho de su pie. c. El largo y ancho de su tronco. 8. Determinen las proporciones entre estas magnitudes. 9. Comparen las proporciones obtenidas con las del grupo que está trabajando junto a ustedes. 10. Verifiquen cuál respuesta se ajusta más a la razón áurea. 11. Busquen hojas de árboles, frutas o animales pequeños y encuentren la relación entre su ancho y largo y descubran la proporción áurea. 12. Dividan su estatura entre la altura a la que se encuentra su ombligo. Encuentren el promedio del grupo en la clase. ¿A qué valor se aproxima este promedio?	

		13. Inventa tres actividades a partir del concepto de razón áurea.	

Autoevaluación y coevaluación

Opiniones	**Recomendaciones**
9. ¿Qué opinas de los aportes de tus compañeros? 10. ¿Cómo se relacionan los problemas con los números racionales?	11. ¿Qué aprendes de los problemas? 12. ¿Qué recomiendas?