

Ejemplo 4.1.1 Para el nudo combinatorio $L = ((-1, -2, 3, 1, -3, 2), (-1, 1, 1))$ tenemos

$$G(L) = \langle x_1, x_2, x_3 : x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}, x_3^{-1}x_1x_3x_2^{-1}, x_2^{-1}x_2x_2x_3^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, L no es equivalente al nudo trivial, ya que su invariante Λ es

$$\left[\left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \right] = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \right].$$

Por tanto L no es un nudo combinatorio clásico.

Ejemplo 4.1.2 Consideremos el código $K = ((-1, 2, 3, -4, -3, 4, 1, -2), (1, 1, -1, -1))$, los arcos de K son: $x_1 = (-1, 2, 3, -4)$, $x_2 = (-2, -1)$, $x_3 = (-3, 4, 1, -2)$ y $x_4 = (-4, -3)$. Los relatores de $G(K)$ son:

$$r_1 : x_3^{-1}x_2x_3x_1^{-1}, \quad r_2 : x_1^{-1}x_3x_1x_2^{-1}, \quad r_3 : x_1x_4x_1^{-1}x_3^{-1}, \quad r_4 : x_3x_1x_3^{-1}x_4^{-1},$$

por tanto,

$$G(K) = \langle x_2, x_3 : x_2x_3x_2 = x_3x_2x_3 \rangle \cong \langle y, z : z^3 = y^2 \rangle.$$

$G(K)$ no es isomorfo a \mathbb{Z} , vease [3]. Y como consecuencia, $[K]$ no es el nudo trivial. Como

$$\Lambda([K]) = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \right],$$

entonces K no es un nudo combinatorio clásico.

Proposición 4.1.5 El movimiento prohibido, vease Figura 1-11, no es consecuencia de los movimientos generalizados de Reidemeister.

Prueba. Supongamos que si lo es, entonces $G(K) \cong \mathbb{Z}$, lo que es un absurdo, ya que el nudo combinatorio del ejemplo anterior tiene grupo que no es isomorfo a \mathbb{Z} . ■

4.1.1.3 Presentación por encima del grupo de un nudo combinatorio

Es esta sección mostraremos como utilizar el grupo de un nudo combinatorio para distinguir nudos virtuales.

Sea K un código y $y_t = \{-t, \dots, -(t+1)\}$, $y_{t+1} = \{-(t+p+1), \dots, -(t+p+2)\}$ dos puentes consecutivos de K . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que K esta dado por

$$K = ((i_1, \dots, -t, \dots, -(t+1), \dots, -(t+p), -(t+p+1), \dots, -(t+p+2), \dots, i_{2n}), E),$$

donde $E = (e_1, \dots, e_m)$ y no hay cruces entre $-(t+i)$ y $-(t+i+1)$, para $i = 1, 2, \dots, p$.

Consideremos el relator

$$\rho_t = w_t^{-1} y_t w_t y_{t+1}^{-1}, \quad \text{con } w_t = y_{a_1}^{e_{t+1}} y_{a_2}^{e_{t+2}} \dots y_{a_p}^{e_{t+p}} y_{a_{p+1}}^{e_{t+p+1}}, \quad (4.1)$$

donde $y_{a_1}, y_{a_2}, \dots, y_{a_{p+1}}$ son puentes de K tales que $-(t+i) \in y_{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, p+1$.

El siguiente teorema provee otra presentación de $G(K)$ que es llamada la **presentación por encima** de $G(K)$.

Teorema 4.1.6 *Sea K un código, tal que $K \neq ((), ())$ y sean y_1, y_2, \dots, y_m los puentes de K , entonces*

$$G(K) \cong \langle y_1, y_2, \dots, y_m : \rho_1, \dots, \rho_m \rangle,$$

con ρ_t dado por (4.1), $t = 1, 2, \dots, m$.

Prueba. Sea $K \neq ((), ())$ un código, $G(K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$ el grupo de K , y $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_v}$ los arcos de K tales que $|x_{i_j}| = 2$, $j = 1, 2, \dots, v$. Para simplificar la notación, sean $x_j = x_{i_j}$, $j = 1, 2, \dots, v$ y $y_u = x_{v+u}$, $u = 1, \dots, m = n - v$ los puentes de K . Por transformaciones de tipo A, podemos suponer que

$$K = ((i_1, \dots, -t, \dots, -(t+1), \dots, -(t+p), -(t+p+1), \dots, -(t+p+2), \dots, i_{2n}), E)$$

$y_t = \{-t, \dots, -(t+1)\}$, $x_i = \{-(t+i), -(t+i+1)\}$, $i = 1, \dots, p$, e $y_{t+1} = \{-(t+p+1), \dots, -(t+p+2)\}$. Sean $y_{a_1}, y_{a_2}, \dots, y_{a_{p+1}}$ los puentes de K tales que $-(t+i) \in y_{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, p+1$. Los relatores de $G(K)$ obtenidos de los cruces $(t+1), (t+2), \dots, (t+p), (t+p+1)$ son:

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= y_{a_1}^{-e_{t+1}} y_t y_{a_1}^{e_{t+1}} x_1^{-1}, & r_{t+i} &= y_{a_i}^{-e_{t+i}} x_{i-1} y_{a_i}^{e_{t+i}} x_i^{-1}, & i &= 2, \dots, p, \\ r_{t+p+1} &= y_{a_{p+1}}^{-e_{t+p+1}} x_p y_{a_{p+1}}^{e_{t+p+1}} y_{t+1}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Del relator r_{t+1} obtenemos que $x_1 = y_{a_1}^{-e_{t+1}} y_t x_{a_1}^{e_{t+1}}$. Reemplazándolo en el relator r_{t+2} concluimos que

$$x_2 = y_{a_2}^{-e_{t+2}} y_{a_1}^{-e_{t+1}} y_t y_{a_1}^{e_{t+1}} y_{a_2}^{e_{t+2}},$$

del relator r_{t+3}

$$x_3 = y_{a_3}^{-e_{t+3}} y_{a_2}^{-e_{t+2}} y_{a_1}^{-e_{t+1}} y_t y_{a_1}^{e_{t+1}} y_{a_2}^{e_{t+2}} y_{a_3}^{e_{t+3}}$$

entonces

$$x_i = y_{a_i}^{-e_{t+i}} \dots y_{a_3}^{-e_{t+3}} y_{a_2}^{-e_{t+2}} y_{a_1}^{-e_{t+1}} y_t y_{a_1}^{e_{t+1}} y_{a_2}^{e_{t+2}} y_{a_3}^{e_{t+3}} \dots y_{a_i}^{e_{t+i}}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (4.3)$$

Ahora, si reemplazamos x_p en el relator r_{t+p+1} obtenemos la relación

$$y_{t+1} = y_{a_{p+1}}^{-e_{t+p+1}} y_{a_p}^{-e_{t+p}} \dots y_{a_3}^{-e_{t+3}} y_{a_2}^{-e_{t+2}} y_{a_1}^{-e_{t+1}} y_t y_{a_1}^{e_{t+1}} y_{a_2}^{e_{t+2}} y_{a_3}^{e_{t+3}} \dots y_{a_p}^{e_{t+p}} y_{a_{p+1}}^{e_{t+p+1}}.$$

Si $w_t = y_{a_1}^{e_{t+1}} y_{a_2}^{e_{t+2}} y_{a_3}^{e_{t+3}} \dots y_{a_p}^{e_{t+p}} y_{a_{p+1}}^{e_{t+p+1}}$, entonces $y_{t+1} = w_t^{-1} y_t w_t$. Puesto que x_1, \dots, x_p sólo aparecen en los relatores r_{t+1}, \dots, r_{t+p} y r_{t+p+1} , respectivamente, entonces

$$G(K) \cong \langle y_1, \dots, y_m : \rho_1, \dots, \rho_m \rangle, \text{ donde } \rho_t = w_t^{-1} y_t w_t y_{t+1}^{-1} \text{ para } t = 1, \dots, m. \quad \blacksquare$$

El siguiente ejemplo nos mostrara lo eficaz que es el teorema anterior para computar el grupo de un nudo combinatorio.

Ejemplo 4.1.3 Sea $K = ((1, 3, -4, -3, 4, 2, -1, -2), (1, 1, 1, 1))$. Entonces

$$G(K) \cong \langle y_1, y_2 : y_1^{(y_2 y_1)} y_2^{-1}, y_2^{(y_1 y_2)} y_1^{-1} \rangle \cong \langle y, z : z^3 = y^2 \rangle \not\cong \mathbb{Z},$$

donde $y_1^{(y_2 y_1)}$ significa $(y_2 y_1)^{-1} y_1 (y_2 y_1)$. Similarmente $y_2^{(y_1 y_2)}$.

Nota 4.1.1 (a) Si $br_v[K] = 1$, entonces $G(K) \cong \mathbb{Z}$. Por tanto, si $[K]$ es un nudo combinatorio clásico con $br[K] = 1$ tenemos que $[K]$ es trivial.

(b) En general, si $br_v[K] = 1$, no necesariamente $[K]$ es trivial. En el Ejemplo 4.2.2 damos una galería infinita de nudos combinatorios de número de puente 1 que no son triviales. Esa galería fue tomada del artículo [15].

Dado un código K , definimos el grupo $G_u(K) = G(K^*)$. El grupo $G_u(K)$ lo llamaremos el **grupo por debajo** de K . Algunas veces llamaremos al grupo $G(K)$ como el **grupo por encima** de K . En general, para los nudos combinatorios esos grupos no son iguales. Por ejemplo, para el nudo combinatorio dado en el Ejemplo 4.1.2, tenemos

$$G_u(K) \cong \mathbb{Z} \text{ y } G(K) = \langle y, z : z^3 = y^2 \rangle \not\cong \mathbb{Z}.$$

En el caso clásico tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.1.7 Si K es un nudo clásico, entonces $G(K) \cong G_u(K)$.

Prueba. Sea K un nudo clásico, entonces $\pi_1(S^3 - K) \cong \pi_1(S^3 - K^*)$. Puesto que $G(K)$ y $G(K^*)$ son presentaciones del mismo grupo, entonces ellos son isomorfos. \blacksquare

Este lema nos permite concluir que el nudo combinatorio del Ejemplo 4.1.2 no es clásico.

4.1.2 Sistemas periferales

Sea $K = ((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, e_2, \dots, e_m))$ un código y $G = G(K)$ su grupo.

Sean $l = x_{k_1}^{e_1} x_{k_2}^{e_2} \dots x_{k_n}^{e_n}$, donde $i \in x_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $p = e_1 + \dots + e_m$. Definamos $l_\alpha = x_{k_1}^{e_1} x_{k_2}^{e_2} \dots x_{k_n}^{e_n} x_\alpha^{-p}$ para todo $\alpha = k_1, k_2, \dots, k_n$.

Lema 4.1.8 Con la notación anterior, $l_\alpha \in [G, G] = G'$ para todo $\alpha = k_1, k_2, \dots, k_n$.

Prueba. Sea $\alpha \in \{k_1, \dots, k_n\}$. Debido a que $G_{ab} \cong \mathbb{Z}$, por Lema 4.1.2, podemos ver a G_{ab} como un grupo cíclico generado por la clase lateral izquierda $x_\alpha G'$ y $x_i G' = x_\alpha G'$, para todo $i \in \{k_1, \dots, k_n\}$, por tanto

$$x_{k_1}^{e_1} x_{k_2}^{e_2} \dots x_{k_n}^{e_n} G' = (x_{k_1}^{e_1} G')(x_{k_2}^{e_2} G') \dots (x_{k_n}^{e_n} G') = x_\alpha^{e_1 + e_2 + \dots + e_n} G',$$

con lo que $l_\alpha = x_{k_1}^{e_1} x_{k_2}^{e_2} \dots x_{k_n}^{e_n} x_\alpha^{-p} \in G'$. ■

Puesto que $x_{k_1}^{e_1} x_{k_2}^{e_2} \dots x_{k_n}^{e_n}$ y $x_{k_t}^{e_t} x_{k_{t+1}}^{e_{t+1}} \dots x_{k_n}^{e_n} x_{k_1}^{e_1} \dots x_{k_{t-1}}^{e_{t-1}}$ representan la misma clase lateral izquierda en G_{ab} , entonces podemos suponer que $l_\alpha = x_{k_1}^{e_1} x_{k_2}^{e_2} \dots x_{k_n}^{e_n} x_\alpha^{-p} = x_{k_t}^{e_t} x_{k_{t+1}}^{e_{t+1}} \dots x_{k_n}^{e_n} x_{k_1}^{e_1} \dots x_{k_{t-1}}^{e_{t-1}} x_\alpha^{-p}$, $t = 1, 2, \dots, n$.

Definición 4.1.3 Sea K un código. Para $\alpha = 1, 2, \dots, n$, a cada arco x_α de K lo llamaremos un **meridiano** de K y lo denotaremos por m_α , a l_α la llamaremos una **longitud** de K . Un sistema periferal de un nudo combinatorio K es la pareja (m_α, l_α) .

En la teoría clásica de nudos, la pareja periferal tiene un rol geométrico muy importante, pero en la teoría de los nudos virtuales aún no tenemos interpretaciones geométricas.

Ejemplo 4.1.4 Sea $K = ((-1, 2, -3, 1, -2, 3), (-1, -1, -1))$. Una longitud para K es $l = x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_3^3 = x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^2$. La Figura 4-1 muestra los pasos para obtener tal longitud en el caso clásico.

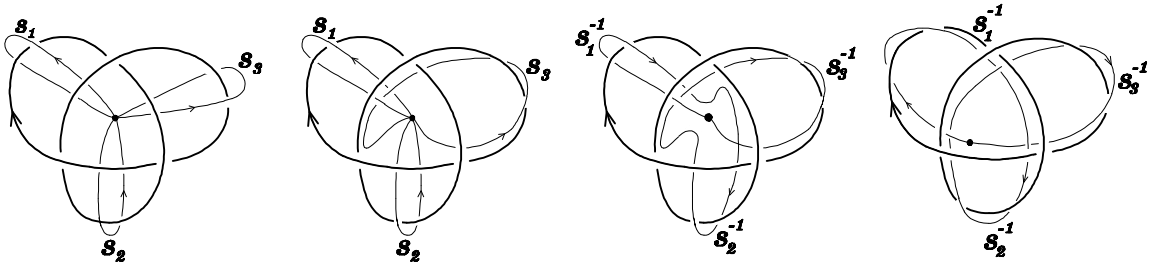


Figura 4-1: Proceso de construcción de una longitud para un diagrama de un nudo clásico.

Diremos que dos parejas periferales (m_i, l_i) y (m_j, l_j) son conjugadas en $G(K)$ si existe $w \in G(K)$ tal que $m_i = w^{-1}m_jw$ y $l_i = w^{-1}l_jw$. Ser conjugado define una relación de equivalencia sobre el conjunto de las parejas periferales de un código nudal K .

Una *estructura periferal* de un nudo combinatorio $[K]$ la definimos como la clase conjugada en $G(K)$ de una pareja periferal de K .

Proposición 4.1.9 *La estructura periferal de un nudo combinatorio es única salvo conjugación.*

Prueba. Sean (x_i, l_i) y (x_j, l_j) dos parejas periferales de un nudo combinatorio $[K]$. Podemos suponer que $j > i$. De los relatores r_{i+1}, \dots, r_j tenemos que

$$x_j = x_{t_j}^{-e_j} x_{t_{j-1}}^{-e_{j-1}} \dots x_{t_{i+1}}^{-e_{i+1}} x_i x_{t_{i+1}}^{e_{i+1}} \dots x_{t_{j-1}}^{e_{j-1}} x_{t_j}^{e_j},$$

donde $v \in x_{t_v}$, $v = i + 1, \dots, j$, así, si $w_1 = w_1(i, j) = x_{t_{i+1}}^{e_{i+1}} \dots x_{t_{j-1}}^{e_{j-1}} x_{t_j}^{e_j}$, entonces $x_j = w_1^{-1} x_i w_1$.

$$l_j = x_{t_{j+1}}^{e_{j+1}} \dots x_{t_n}^{e_n} x_{t_1}^{e_1} \dots x_{t_i}^{e_i} x_{t_{i+1}}^{e_{i+1}} \dots x_{t_j}^{e_j} x_j^{-p} = w_2 w_1 x_j^{-p},$$

donde $w_2 = x_{t_{j+1}}^{e_{j+1}} \dots x_{t_n}^{e_n} x_{t_1}^{e_1} \dots x_{t_i}^{e_i}$. Puesto que $x_j^{-p} = w_1^{-1} x_i^{-p} w_1$, entonces $l_j = w_2 x_i^{-p} w_1 = w_1^{-1} w_1 w_2 x_i^{-p} w_1$. Ahora bien,

$$l_i = x_{t_{i+1}}^{e_{i+1}} \dots x_{t_{j-1}}^{e_{j-1}} x_{t_j}^{e_j} x_{t_{j+1}}^{e_{j+1}} \dots x_{t_n}^{e_n} x_{t_1}^{e_1} \dots x_{t_i}^{e_i} x_i^{-p} = w_1 w_2 x_i^{-p},$$

así que $l_j = w_1^{-1} l_i w_1$, por tanto (x_i, l_i) y (x_j, l_j) son conjugados en $G(K)$. ■

Sea $[K]$ un nudo combinatorio, $G(K)$ su grupo y $(m, l) = (x_i, l_i)$ la estructura periferal de K . La tripleta $(G(K), m, l)$ es llamada el *sistema periferal* de $[K]$. Diremos que dos sistemas periferales $(G(K_1), m, l)$ y $(G(K_2), m', l')$ son isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo $\varphi : G(K_1) \rightarrow G(K_2)$ tal que $\varphi(m) = m'$ y $\varphi(l) = l'$. Del Teorema 4.1.1 y la Proposición 4.1.9, tenemos que el sistema periferal es un invariante de nudos combinatorios.

Por la correspondencia que existe entre los nudos virtuales y los nudos combinatorios, podemos adaptar la definición de sistema periferal a los nudos virtuales.

El teorema que daremos a continuación, conocido como el teorema de Waldhausen, dice que las clases de equivalencia de nudos clásicos están completamente determinadas por el grupo fundamental y el sistema periferal.

Teorema 4.1.10 [48] (Waldhausen) *Sean $[K_1]$ y $[K_2]$ nudos combinatorios clásicos, con sistemas periferales $(G(K_i), l_i, m_i)$, $i = 1, 2$, respectivamente, entonces K_1 se puede transformar en K_2 , mediante un número finito de los movimientos de Reidemeister, si y sólo si los sistemas periferales $(G(K_1), l_1, m_1)$ y $(G(K_2), l_2, m_2)$ son isomorfos.*

Corolario 4.1.11 *Sea K un nudo combinatorio clásico con longitud trivial, entonces K es equivalente al nudo combinatorio trivial.*

Corolario 4.1.12 *Sean K y K' diagramas de nudos clásicos. Si K se puede transformar en K' usando un número finito de los movimientos generalizados de Reidemeister, entonces K se puede transformar en K' usando un número finito de los movimientos de Reidemeister.*

Prueba. Supongamos que K y K' son dos diagramas de nudos clásicos equivalentes, en el sentido virtual. Puesto que el sistema periferal es un invariante de nudos virtuales, entonces K y K' tienen sistemas periferales isomorfos, así, por el Teorema de Waldhausen, K y K' son equivalentes en el sentido clásico. ■

Ejemplo 4.1.5 *Para el nudo combinatorio $K = ((-1, 2, 3, -4, -3, 4, 1, -2), (1, 1, -1, -1))$ tenemos, por un lado que $G(K) \not\cong \mathbb{Z}$, por otro lado la longitud l_1 satisface*

$$l_1 = a_3 a_3^{-1} a_1^{-1} a_1 a_2^0 = e.$$

Por el Teorema de Waldhausen, K no es un nudo combinatorio clásico.

4.1.3 Presentaciones de Wirtinger

Sea G un grupo. Una presentación de Wirtinger para G es una presentación de la forma

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_p : r_1, r_2, \dots, r_q \rangle, \text{ con } r_k = w_k^{-1} x_j w_k x_i^{-1} = x_j^{w_k} x_i^{-1},$$

$1 \leq i, j \leq p$ y w_1, \dots, w_q son palabras en el grupo libre $F(x_1, \dots, x_p)$, no necesariamente diferentes en G .

Diremos que una presentación de Wirtinger es cíclica si es de la forma

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m \rangle, \text{ con } r_i = x_i^{w_i} x_{i+1}^{-1},$$

$i = 1, 2, \dots, m$, $w_1, \dots, w_m \in F(x_1, \dots, x_n)$, no necesariamente diferentes en G .

Una presentación de Wirtinger es realizable si $w_i = x_{k_i}^{\varepsilon_i}$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$.

Notemos que el grupo de un nudo combinatorio está dado por un presentación de Wirtinger realizable, ver Definición 4.1.1.

Definición 4.1.4 *La deficiencia de un presentación finita de un grupo es el número de generadores menos el número de relatores. La deficiencia de un grupo G , $def(G)$, la definimos como la máxima deficiencia de todas las presentaciones finitas de G .*

Del siguiente resultado podemos afirmar que si $[K]$ es un nudo combinatorio entonces $G([K])$ tiene una presentación de Wirtinger realizable de deficiencia 1 o 0.

Teorema 4.1.13 [8] Sea $[K]$ un nudo combinatorio clásico, entonces $G([K])$ tiene una presentación de Wirtinger realizable de deficiencia 1.

El siguiente resultado es central en la teoría de los nudos virtuales.

Teorema 4.1.14 Sea G un grupo con presentación de Wirtinger realizable de deficiencia 0, entonces existe un código K tal que $G(K) \cong G$.

Prueba. Sea G un grupo tal que $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$, con $r_i = x_{k_i}^{-e_i} x_i x_{k_i}^{e_i} x_{i+1}^{-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $x_{n+1} = x_1$ y $e_i \in \{1, -1\}$. Sea K el nudo combinatorio dado por $K = ((A_1, -1, A_2, -2, A_3, -3, \dots, A_i, -i, A_{i+1}, \dots, A_n, -n) (e_1, e_2, \dots, e_n))$, donde $\{A_1\}, \dots, \{A_n\}$ son subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ definidos por $\{A_i\} = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : x_{k_j}^{e_j} = x_i^{\pm 1}\}$. Tenemos que $\cup_{i=1}^n \{A_i\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Es posible que alguno de los A_i sea vacío.

Si $x_1 = \{-n, A_1, -1\}$, $x_2 = \{-1, A_2, -2\}, \dots, x_n = \{-(n-1), A_n, -n\}$, entonces $i \in x_{k_i}$ y

$$G(K) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \rangle,$$

donde $\rho_i = x_{k_i}^{-e_i} x_i x_{k_i}^{e_i} x_{i+1}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_{n+1} = x_1$. Por tanto $G(K) \cong G$. ■

Ejemplo 4.1.6 Sea $G = \langle x_1, x_2, x_3 : x_1^{x_3} x_2^{-1}, x_2^{x_1^{-1}} x_3^{-1}, x_3^{x_2^{-1}} x_1^{-1} \rangle$, entonces: $r_1 = x_1^{x_3} x_2^{-1}$, $r_2 = x_2^{x_1^{-1}} x_3^{-1}$ y $r_3 = x_3^{x_2^{-1}} x_1^{-1}$, de donde $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{3\}$ y $A_3 = \{1\}$. Por tanto, si $K = ((-1, 2, -2, 3, -3, 1), \{-1, 1, -1\})$, entonces $G(K) = G$. Mas aún, una estructura periferal para K es $(x_1, x_2^{-1} x_3 x_1^{-1} x_1) = (x_1, x_2^{-1} x_3)$.

Teorema 4.1.15 Sea G un grupo con presentación de Wirtinger cíclica de deficiencia 0 o 1, entonces existe un código nudal K tal que $G(K) \cong G$.

Prueba. Supongamos que G tiene una presentación de la forma $\langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$, donde $r_i = w_i^{-1} x_i w_i x_{i+1}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Sea $w_n = (w_1 w_2 \dots w_{n-1})^{-1}$, entonces G es isomorfo a $\langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, \mathbf{r}_n \rangle$, con $\mathbf{r}_n = w_n^{-1} x_n w_n x_1^{-1}$. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que G tiene deficiencia 0.

Supongamos que $w_i = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$, donde $k = k(i)$, y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{1, -1\}$, entonces

$$x_{i+1} = x_{i_k}^{-\varepsilon_k} \dots x_{i_2}^{-\varepsilon_2} x_{i_1}^{-\varepsilon_1} x_i x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}.$$

Sea $y_{(i,0)} = x_i$, $y_{(i,1)} = x_{i_1}^{-\varepsilon_1} y_{(i,0)} x_{i_1}^{\varepsilon_1}$, \dots , $y_{(i,k-1)} = x_{i_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}} y_{(i,k-2)} x_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}}$. Por transformaciones de Tietze, G es isomorfo a la presentación

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n, y_{(1,0)}, \dots, y_{(n,k(n))} : r_1, r_2, \dots, r_n, R \rangle,$$

donde $R = \{y_{(i,0)}, y_{(i,r)}^{-1} x_{i_r}^{-\varepsilon_r} y_{(i,r-1)} x_{i_r}^{\varepsilon_r}\}_{r=1, \dots, k(i)-1}^{i=1, \dots, n}$. Así que,

$$G \cong \langle y_{(1,0)}, \dots, y_{(i,0)}, \dots, y_{(i,k(i)-1)}, \dots, y_{(n,k(n))} : \mathbf{T} \rangle,$$

con

$$\mathbf{T} = \left\{ y_{(i,r)}^{-1} y_{(i,r,0)}^{-\varepsilon_r} y_{(i,r-1)} y_{(i,r,0)}^{\varepsilon_r} \right\}_{i=1,2, \dots, n}^{r=1,2, \dots, k(i)-1},$$

que es una presentación de Wirtinger realizable; por el Teorema 4.1.14, existe un nudo combinatorio K tal que $G(K) \cong G$. Del Teorema 4.1.14, si G es un grupo con una presentación de Wirtinger realizable de deficiencia 0, entonces G es el grupo de un nudo combinatorio. ■

Ejemplo 4.1.7 Sea $G = \langle x_1, x_2, x_3 : x_1^{-1} x_3^2, x_2^{-1} x_1^2, x_3^{-1} x_2^2 \rangle$.

Sean $y_1 = x_3$, $y_2 = x_2^{-1} y_1 x_2$, $y_3 = x_1$, $y_4 = x_3^{-1} y_3 x_3$, $y_5 = x_2$, $y_6 = x_1^{-1} y_5 x_1$. Entonces G tiene la siguiente presentación,

$$\begin{aligned} & \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 : y_3^{-1} y_2^{y_5}, y_5^{-1} y_4^{y_1}, y_1^{-1} y_6^{y_3}, y_2^{-1} y_1^{y_5}, y_4^{-1} y_3^{y_1}, y_6^{-1} y_5^{y_3} \rangle \cong \\ & \cong \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 : y_1^{-1} y_6^{y_3}, y_2^{-1} y_1^{y_5}, y_3^{-1} y_2^{y_5}, y_4^{-1} y_3^{y_1}, y_5^{-1} y_4^{y_1}, y_6^{-1} y_5^{y_3} \rangle. \end{aligned}$$

Así, si $K = ((-1, 4, 5 - 2, -3, 1, 6 - 4, -5, 2, 3 - 6), \{1, 1, 1, 1, 1, 1\})$ entonces $G(K) \cong G$.

Consideremos la siguiente definición.

Definición 4.1.5 Sea $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_p : r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ una presentación de Wirtinger. Definimos el grafo $I(G)$ tal que sus vértices son etiquetados con x_1, x_2, \dots, x_p , y $x_i x_j$ es una arista de $I(G)$ si y sólo si existe un relator en $\{r_1, r_2, \dots, r_q\}$ de la forma $x_i^w x_j^{-1}$.

Lema 4.1.16 Sea G un grupo con presentación de Wirtinger de deficiencia 0, entonces $I(G)$ no es un árbol.

Prueba. Puesto que G tiene deficiencia 0, entonces el número de vértices de $I(G)$ es igual a su número de aristas, por tanto $I(G)$ no puede ser un árbol. ■

Teorema 4.1.17 Si G es un grupo con presentación de Wirtinger de deficiencia 0 ó 1 tal que $G_{ab} \cong \mathbb{Z}$, entonces G es el grupo de un código nudal.

Prueba. Sea $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_p : r_1, r_2, \dots, r_q \rangle$ una presentación de Wirtinger, donde $q = p$ ó $q = p - 1$. Si repetimos uno de los relatores de G , entonces podemos suponer que G tiene deficiencia 0.

Puesto que $G_{ab} \cong \mathbb{Z}$, entonces todos los x_i son conjugados en G , mediante relaciones que están en el conjunto de relatores de la presentación de G , así que $I(G)$ es un grafo conexo.

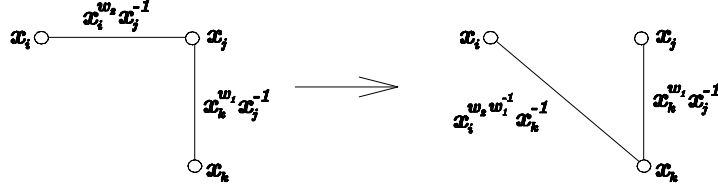


Figura 4-2: Operación sobre el grafo $I(G)$

Consideremos las operaciones sobre el grafo $I(G)$, mostradas en la Figura 4-2, $I(G)$ puede ser transformado, usando un número finito de los movimientos mostrados en la Figura 4-2, en un ciclo C_p tal que $V(C_p) = V(I(G))$ y $|E(C_p)| = |E(I(G))|$. En efecto, por el Lema 4.1.16, $I(G)$ debe tener un ciclo que denotaremos por $C_a = x_{i_1} \dots x_{i_a} x_{i_1}$, ahora bien, si $V(C_a) = V(I(G))$ y $|E(C_a)| = |E(I(G))|$ listo; si no, entonces debe existir un un vértice x_{i_j} tal que la arista $x_{i_j} x_{i_{a+1}} \notin E(C_a)$, considerando reenumeración de los vértices de C_a , podemos suponer que $x_{i_j} = x_{i_a}$.

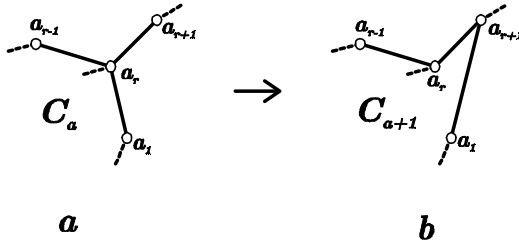


Figura 4-3: Construcción del ciclo C_{a+1} a partir del ciclo C_a .

Con esta notación el grafo $I(G)$ localmente tiene la forma que se muestra en la Figura 4-3 *a*. Aplicando una operación de las mostradas en la Figura 4-2, construimos el ciclo $C_{a+1} = x_{i_1} \dots x_{i_{a+1}} x_{i_1}$ que se muestra en la Figura 4-3 *b*. Siguiendo con este razonamiento construiremos un ciclo $C_p = x_{i_1} \dots x_{i_p} x_{i_1}$, de donde $V(C_p) = V(I(G))$ y puesto que las operaciones empleadas no alteran el número de aristas, entonces $|E(C_p)| = |E(I(G))|$.

Supongamos que $C_p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} x_{i_1}$, si denotamos $y_t = x_{i_t}$, $t = 1, 2, \dots, p$, entonces $C_p = y_1 y_2 \dots y_p y_1$ y las correspondientes operaciones sobre los relatores de G dan una presentación cíclica de G . Luego, por el Teorema 4.1.15, G es un grupo de un nudo combinatorio. ■

Ejemplo 4.1.8 El grupo Baumslag-Solitar $G = \langle x, y : x^{-1} y^2 x = y^3 \rangle$ es el grupo de un nudo combinatorio. Puesto que,

$$G \cong \langle x, y, y_1, y_2 : y = x^{-1} y^2 x y^{-2}, y_1 = x, y_2 = y^2 x y^{-2} \rangle,$$

Entonces, $G \cong \langle y_1, y_2 : y_2 = y_1^{(y_1^{-1}y_2)^{-2}}, y_1 = y_2^{(y_1^{-1}y_2)^2} \rangle$.

Si $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2x_1y_2^{-1}$, $x_3 = y_1^{-1}x_2y_1$, $x_4 = y_2x_3y_2^{-1}$, $x_5 = y_2$, $x_6 = y_1x_5y_1^{-1}$, $x_7 = y_2^{-1}x_6y_2$ y $x_8 = y_1x_7y_1^{-1}$, entonces

$G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 : x_8^{x_5}x_1^{-1}, x_1^{x_5^{-1}}x_2^{-1}, x_2^{x_1}x_3^{-1}, x_3^{x_5^{-1}}x_4^{-1}, x_4^{x_1}x_5^{-1}, x_5^{x_1^{-1}}x_6^{-1}, x_6^{x_5}x_7^{-1}, x_7^{x_1^{-1}}x_8^{-1} \rangle$.

Si tomamos $K = ((-1, 3, 5, 6, 8, -2, -3, -4, -5, 1, 2, 4, 7, -6, -7, -8), (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1))$, entonces G es el grupo de K .

El correspondiente nudo virtual lo mostramos en la Figura 4-4. Note que se trata de un nudo de 2 puentes.

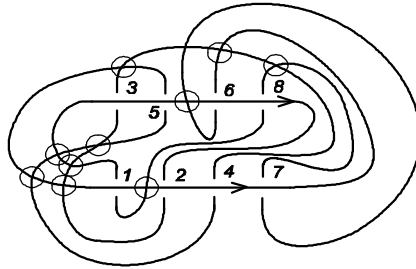


Figura 4-4: Un diagrama asociado al grupo Baumslag-Solitar.

4.2 Polinomios invariantes de nudos virtuales

En esta sección estudiaremos algunos polinomios invariantes de nudos virtuales: Los Λ -polinomios; que es un conjunto formado por tres polinomios propuesto por nosotros y obtenidos del invariante Λ ; el polinomio P de Henrich [15] y [16], el polinomio Z de Sawollek, [36] y [21], y el polinomio de Jones para nudos virtuales. La definición que daremos del polinomio de Jones es a través del polinomio bracket de Kauffman [25], [10], [11], [19] y [20].

4.2.1 Polinomios invariantes asociados a Λ

Como veremos en el Capítulo 5, la tripleta Λ es un invariante muy fuerte de nudos virtuales; y todo ese poderío descansa en sus irreducibles, vease Definición 3.2.4, los cuales no son difíciles de encontrar. Para facilitar, aún más, la tarea que tienen los irreducibles en el sentido de distinguir nudos virtuales, en esta sección definiremos un conjunto formado por tres polinomios, que denominamos los Λ -polinomios de un nudo combinatorio $[K]$, obtenidos a partir de un irreducible de $\Lambda([K])$.

Usaremos las tripletas para dar una definición alternativa del polinomio P de Henrich, [15] y [16], y estudiaremos algunas de sus propiedades. Creemos que nuestra definición es computablemente mejor que la hecha por ella.

4.2.1.1 Los Λ -polinomios

Al hacer una reenumeración sobre los cruces de un código nudal, modificamos la tripleta de una manera controlada, por tanto no perdemos generalidad si los códigos nudales están en forma estándar.

Definición 4.2.1 Sea $\lambda = ((e_i), (a_i), (b_{ij}))$ un elemento irreducible de orden n de $[E, A, B]$. Denotemos por $w_i = b_{i1} + \dots + b_{in}$. Definimos los siguientes polinomios:

$$h_\lambda(t) = \sum_{i=1}^n e_i t^{w_i}, \quad f_\lambda(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^{w_i} \quad \text{y} \quad g_\lambda(t) = \sum_{i=1}^n e_i a_i t^{w_i}$$

Si $\lambda = ((), (), ())$, entonces $h_\lambda(t) = f_\lambda(t) = g_\lambda(t) = 0$.

El siguiente teorema es una consecuencia directa del Teorema 3.2.5.

Teorema 4.2.1 Los polinomios definidos en (4.2.1) no dependen del irreducible escogido.

Prueba. Haremos la prueba para el polinomio h . Para los otros dos se procede de una forma similar. Sean $\lambda_1 = ((s_i), (a_i), (b_{ij}))$ y $\lambda_2 = ((c_i), (d_i), (w_{ij}))$ dos irreducibles de $[X, Y, Z]$. Por el Teorema 3.2.5, existe una matriz P de permutación tal que $\lambda_1 = (P(c_i), P(d_i), P(w_{ij})P^T)$. Como podemos apreciar el polinomio $h_{\lambda_1}(t)$ termina siendo una reescritura del polinomio $h_{\lambda_2}(t)$, por tal motivo $h_{\lambda_1}(t) = h_{\lambda_2}(t)$. ■

Del teorema anterior tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.2.2 (Λ -**polinomios**) Sea $[K]$ un nudo combinatorio y sea $\lambda = ((s_i), (a_i), (b_{ij}))$ un elemento irreducible de $\Lambda([K])$ de orden n . Definimos los Λ -**polinomios** de $[K]$, denotados $h_{[K]}(t)$, $f_{[K]}(t)$ y $g_{[K]}(t)$, como $h_{[K]}(t) = h_\lambda(t)$, $f_{[K]}(t) = f_\lambda(t)$ y $g_{[K]}(t) = g_\lambda(t)$.

Corolario 4.2.2 Si $[K]$ un nudo combinatorio clásico, entonces $h_{[K]}(t) = f_{[K]}(t) = g_{[K]}(t) = 0$.

Ejemplo 4.2.1 Los nudos virtuales mostrados en la Figura 3-1 son diferentes. Esto es debido a que $h_K(t) = 0$ y $h_{K'}(t) = 2t^{-3} - 2t^3$.

4.2.1.2 El polinomio P de Henrich

Henrich asoció a un diagrama de nudo virtual K un polinomio invariante $P_K(t) \in \mathbb{Z}[t]$, vease [15], que tiene sus orígenes en los polinomios u_+ y u_- definidos por Turaev, vease [47]. Este polinomio tiene la particularidad de ser cero sobre la categoría de los nudos clásicos. Nosotros daremos las definiciones de la forma más general posible, pero en términos del invariante Λ . Ellas son definiciones diferentes a las dadas en [15], [16] y [47], allí se estudian otras propiedades de los polinomios P , u_+ y u_- .

Definición 4.2.3 Sea $\lambda = (E, A, B)$ una tripleta. Supongamos que $E^T = (e_1, \dots, e_n)$ y $A^T = (a_1, \dots, a_n)$. Definimos los polinomios $u_+(T)$, $u_-(T) \in \mathbb{Z}[t]$ como sigue

$$u_+(\lambda)(t) = \sum_{e_j=1, a_j>0} t^{a_j} - \sum_{e_j=-1, a_j<0} t^{-a_j} \quad y \quad u_-(\lambda)(t) = \sum_{e_j=1, a_j<0} t^{-a_j} - \sum_{e_j=-1, a_j>0} t^{a_j}.$$

Si $a_j = 0$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$, $u_+(\lambda)(t) = u_-(\lambda)(t) = 0$.

Si $\lambda = ((), (), ())$, definimos $u_{\pm}(\lambda)(t) \equiv 0$.

Definición 4.2.4 Sea K un código nudal y sea $\lambda(K) = ((e_i), (\alpha_i(K)), (\beta_{ij}(K)))$ su tripleta. Definimos

$$P_K(t) = \begin{cases} \sum_{i=1, \alpha_i(K) \neq 0}^n e_i t^{|\alpha_i(K)|}, & \text{si } n \geq 1, \\ 0, & \text{si } n = 0 \text{ ó } \alpha_i(K) = 0, \text{ para todo } i. \end{cases}$$

No es difícil probar que los polinomios definidos anteriormente son invariantes de triplas.

Nota 4.2.1 [47],[16]. Se verifica fácilmente que $P_K(t) = u_+(\lambda(K)) + u_-(\lambda(K))$.

La prueba del siguiente teorema es inmediata de la definición de las movidas Δ_0 , Δ_1 y Δ_2 .

Teorema 4.2.3 [15] Sean K_1 y K_2 códigos nudales equivalentes, entonces $P_{K_1}(t) = P_{K_2}(t)$.

Por el teorema anterior tiene sentido la siguiente definición.

Definición 4.2.5 Sea $[K]$ un nudo combinatorio. Definimos $P_{[K]}(t) = P_K(t)$.

Corolario 4.2.4 Si $[K]$ es un nudo combinatorio clásico, entonces $P_{[K]}(t) = 0$.

El recíproco del Corolario 4.2.4 no se tiene. Consideremos el nudo combinatorio $K = ((-1, -2, 1, -3, 2, 4, 3, -4), (1, 1, 1, -1))$. Tenemos que $P_K(t) = 0$, pero $ord(K) = 4 \neq 0$, vease el Ejemplo 4.2.4, con lo que K no es clásico.

Ejemplo 4.2.2 Consideremos K_n^+ dado en el Teorema 2.5.4, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $[K_n^+]$ no es un nudo combinatorio clásico. En efecto, puesto que $S_i(K_n^+) = \{-(i+1), -(i+2), \dots, -n, 1, 2, \dots, i-1\}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_i(K_n^+) = n - 2i + 1$, entonces:

Si n es par,

$$\begin{aligned} P_{[K_n^+]}(t) &= \sum_{i=1}^n t^{|n-2i+1|} = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} t^{|n-2i+1|} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n t^{|n-2i+1|} = t^{n-1} + t^{n-3} + \dots + t + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} t^{|-2j+1|} \\ &= t^{n-1} + t^{n-3} + \dots + t + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} t^{2j-1} = 2t + 2t^3 + \dots + 2t^{n-3} + 2t^{n-1}. \end{aligned}$$

Si n es impar, $P_{[K_n^+]}(t) = 2t^2 + \dots + 2t^{n-3} + 2t^{n-1}$.

A continuación daremos algunas propiedades del polinomio P . Algunos de los resultados y las pruebas son originales.

El siguiente teorema nos muestra cómo computar el polinomio P de una suma conexas, además nos dice que el resultado no depende donde realizamos dicha suma, por ello, cuando realizamos la suma conexas en distintos puntos, dando lugar a nudos combinatorios diferentes, obtendremos el mismo polinomio P . Esto muestra que es débil en las sumas conexas. Así mismo, la Proposición 4.2.6 nos muestra que no distingue al inverso de un nudo, ni las dos imágenes espejo entre sí.

Teorema 4.2.5 Sean $[K_1]$ y $[K_2]$ nudos combinatorios, entonces $P_{[K_1 \# K_2]}(t) = P_{[K_1]}(t) + P_{[K_2]}(t)$.

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K_1 = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n))$, está en forma estándar y que $K_2 = ((j_1, \dots, j_{2m}), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s))$, donde $\{j_1, \dots, j_{2m}\} = \{n+1, \dots, n+m\} \cup \{-(n+1), \dots, -(n+m)\}$. También podemos suponer que $s = n+m$. Ahora bien, sea (i_t, j_r) la pareja de cruces con respecto a la cual realizaremos la suma conexas. Por definición, $K_1 \# K_2 = K_1 \#_{(i_t, j_r)} K_2 = ((i_1, \dots, i_t, j_r, \dots, j_{2m}, j_1, \dots, j_{r-1}, i_{t+1}, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_s))$. Sea $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $S_l(K_1 \# K_2) = S_l(K_1)$ ó $S_l(K_1 \# K_2) = S_l(K_1) \cup \{j_1, \dots, j_{2m}\}$. En cada caso $\alpha_l(K_1 \# K_2) = \alpha_l(K_1)$. De forma similar se prueba que $\alpha_l(K_1 \# K_2) = \alpha_l(K_2)$, para $l \in \{n+1, \dots, n+k\}$. Por tanto $P_{[K_1 \# K_2]} = P_{[K_1]} + P_{[K_2]}$. ■

Proposición 4.2.6 Sea K un nudo combinatorio, entonces $P_{-K}(t) = P_K(t)$ y $P_{K^*}(t) = P_{K^\#}(t) = -P_K(t)$.

Prueba. Usamos el Teorema 3.5.3 y tenemos que $P_{-K}(t) = P_K(t)$. Por otro lado, por los Teoremas 3.5.1 y 3.5.2, se prueba que $P_{K^*}(t) = P_{K^\#} = -P_K(t)$. ■

Por la Proposición 4.2.6 y el Teorema 4.2.5, para todo nudo combinatorio K , se cumple que

$$P_{K\#K^*}(t) = 0.$$

Una consecuencia inmediata del Corolario 3.6.7 y del Teorema 3.6.9 es la siguiente proposición.

Proposición 4.2.7 *Con la notación de la Sección 3.6. Tenemos que si K es un código geométrico y n un cruce de K , entonces*

$$\begin{aligned} P_{K_v^n}(t) &= P_{K_{sv}^n}(t) = (e_{s+1} + \cdots + e_r)t^{2e_n} + (e_{r+1} + \cdots + e_{n-1})t^{-2e_n} \text{ y} \\ P_{K^n}(t) &= (e_{s+1} + \cdots + e_r)t^{e_n} + (e_{r+1} + \cdots + e_{n-1})t^{-e_n} \end{aligned}$$

4.2.2 El Polinomio Z de Sawollek

En [36] Sawollek adapta las ideas expuestas en [21] para definir un polinomio invariante de enlaces virtuales. En esta sección definiremos, en una forma más algorítmica, el polinomio Z de Sawollek para nudos virtuales. Daremos un ejemplo de un nudo virtual no clásico con polinomio Z igual a cero. Definiremos el polinomio Z sólo para códigos enlaces en forma estándar. Podemos hacer tal consideración debido al hecho de que Z es un invariante de nudos virtuales, ver [36] y [21].

Sea $K = (\{C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n))$ un código enlace. Consideremos las siguientes dos matrices, donde x y y son variables.

$$M_+ = \begin{pmatrix} 1-x & -y \\ -xy^{-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M_- = \begin{pmatrix} 0 & -x^{-1}y \\ -y^{-1} & 1-x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Definimos la matriz diagonal por bloques $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_m)$, de orden $2n \times 2n$, donde $M_i = M_+$ si $e_i = 1$ y $M_i = M_-$ si $e_i = -1$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Para $C_q = (q_1, \dots, q_r)$, $r = r(q)$, sea ahora F_K^q el conjunto:

$$F_K^q = \{(\varepsilon_{q_j} q_j, \varepsilon_{q_{j+1}} q_{j+1}) : j = 1, 2, \dots, r, q_{r+1} = q_1\},$$

donde $\varepsilon_{q_j} = -e_{q_j}$, si $q_j > 0$ y $\varepsilon_{q_j} = e_{-q_j}$, si $q_j < 0$. Y sea

$$F_K = \bigcup_{q=1}^p F_K^q.$$

Cabe aclarar que si $K = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n))$, el conjunto F_K es mucho más simple de encontrar ya que este es igual a:

$$F_K = \{(\varepsilon_{i_j} i_j, \varepsilon_{i_{j+1}} i_{j+1}) : j = 1, 2, \dots, 2n, i_{2n+1} = i_1\},$$

Consideremos la matriz definida por bloques como

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix},$$

donde P_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, es una matriz de orden 2×2 tal que

$$P_{ij}(t, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } ((-1)^r j, (-1)^{t+1} i) \in F_K \\ 0 & \text{si } ((-1)^r j, (-1)^{t+1} i) \notin F_K \end{cases}, \quad r, t = 1, 2.$$

Definición 4.2.6 Sea $K = (\{C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n))$ un código enlace. Definimos el polinomio $Z_K(x, y) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ como:

$$Z_K(x, y) = \begin{cases} (-1)^{w_K} \det(M - P) & \text{si } C_i \neq () \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, p\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde $w_K = e_1 + \dots + e_n$ es el writhe de K y $e_j \in \{1, -1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo 4.2.3 Sea $K = ((1, 2, -1, -2), (1, 1))$, entonces $F_K = \{(-1, -2), (-2, 1), (1, 2), (2, -1)\}$, por tanto

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad M = \begin{pmatrix} 1-x & -y & 0 & 0 \\ -xy^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & -y \\ 0 & 0 & -xy^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

de donde $Z_K(x, y) = (-1)^2 \det(M - P) = \frac{1}{y} (x^2 - y - x - y^2 + xy^2 + x^2y)$.

Para la prueba de los siguientes resultados ver [36] y [21].

Proposición 4.2.8 El polinomio $Z_K(x, y)$ es un invariante de enlaces combinatorios salvo multiplicaciones por potencias de $x^{\pm 1}$.

El polinomio normalizado $\tilde{Z}_K(x, y)$ se define como: si $Z_K(x, y)$ es diferente de cero, y N la menor potencia de la variable x en $Z_K(x, y)$, definimos $\tilde{Z}_K(x, y) = x^{-N} Z_K(x, y)$; si $Z_K(x, y) = 0$, entonces $\tilde{Z}_K(x, y) = 0$.

Proposición 4.2.9 El polinomio $\tilde{Z}_K(x, y)$ es un invariante de enlaces combinatorios.

El polinomio $\tilde{Z}_K(x, y)$ lo usaremos en el Capítulo 5. Este polinomio es mas poderoso que el polinomio de Jones pero menos que la tripleta Λ .

Teorema 4.2.10 Sea K un nudo combinatorio, si K es clásico, entonces $Z_K(x, y) = 0$.

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior no es cierto.

Ejemplo 4.2.4 Sea $[K] = [(-1, -2, 1, -3, 2, 4, 3, -4), (1, 1, 1, -1)]$ un nudo combinatorio. En la Figura 4-5 mostramos un nudo virtual que realiza a K .

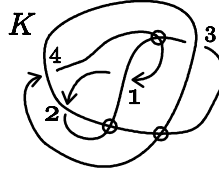


Figura 4-5: Ejemplo de un nudo virtual, no clásico, con polinomio Z igual a cero

Ahora bien, $F_K = \{(1, 2), (2, -1), (-1, 3), (3, -2), (-2, 4), (4, -3), (-3, -4), (-4, 1)\}$, con lo que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad M = \begin{pmatrix} M_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_- \end{pmatrix}$$

Luego $Z_K(x, y) = (-1)^2 \det(M - P) = 0$. Por otro lado $\lambda(K) =$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Como $\lambda(K)$ es irreducible, entonces $\mathbf{Ord}(\Lambda(K)) = 4 \neq 0$, y así $[K]$ no es clásico.

Ejemplo 4.2.5 Para el nudo virtual K , mostrado en la Figura 3-2, $Z_K(x, y) = \frac{1}{x^2y^2}(2x^3 - x^2 - xy - x^4 + y^3 + y^4 + x^2y - xy^3 + x^3y - 2xy^4 - x^4y - x^2y^3 + x^2y^4 + x^3y^3)$, por tanto $\tilde{Z}_K(x, y) = \frac{1}{y^2}(2x^3 - x^2 - xy - x^4 + y^3 + y^4 + x^2y - xy^3 + x^3y - 2xy^4 - x^4y - x^2y^3 + x^2y^4 + x^3y^3)$.

Sean $K_1 = (\{C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n))$ y $K_2 = (\{H_1, \dots, H_q\}, (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m))$ dos códigos enlaces. Supongamos que los cruces de K_1 son $1, 2, \dots, n$ y que los cruces de K_2 son $n + 1, \dots, m$. Recordemos que la suma disconexa entre K_1 y K_2 fue definida como el código enlace

$$K_1 \sqcup K_2 = (\{C_1, \dots, C_p, H_1, \dots, H_q\}, (e_1, \dots, e_n, \tilde{e}_{n+1}, \dots, \tilde{e}_m)).$$

Teorema 4.2.11 *Si K_1 y K_2 son enlaces virtuales, entonces $Z_{K_1 \sqcup K_2}(x, y) = Z_{K_1}(x, y)Z_{K_2}(x, y)$ y $\tilde{Z}_{K_1 \sqcup K_2}(x, y) = \tilde{Z}_{K_1}(x, y)\tilde{Z}_{K_2}(x, y)$.*

Prueba. Si K_1 ó K_2 tienen una componente vacía, el resultado se tiene por definición. Supongamos que ni K_1 ni K_2 tienen una componente vacía, entonces $F_{K_1 \sqcup K_2} = F_{K_1} \cup F_{K_2}$ (unión disjunta), por tanto

$$P_{K_1 \sqcup K_2} = \begin{pmatrix} P_{K_1} & 0 \\ 0 & P_{K_2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{K_1 \sqcup K_2} = \begin{pmatrix} M_{K_1} & 0 \\ 0 & M_{K_2} \end{pmatrix},$$

además, $w_{K_1 \sqcup K_2} = w_{K_1} + w_{K_2}$. Por tanto $Z_{K_1 \sqcup K_2}(x, y) = Z_{K_1}(x, y)Z_{K_2}(x, y)$. ■

Notemos que el teorema anterior es compatible con la definición de que $Z_K(t) = 0$ siempre que K sea un código enlace con alguna componente vacía.

La igualdad dada en el teorema anterior no se cumple para la suma conexa, vease [36].

Con la notación de la Sección 2.3 podemos enunciar el siguiente teorema, [36] y [21], que nos muestra que el polinomio Z satisface una propiedad análoga a la del teorema clásico de Alexander, vease [3], de ahí que se pueda llamar el polinomio Alexander-Conway.

Teorema 4.2.12 [36] *Sea K un código enlace, entonces el polinomio $Z_K(x, y)$ satisface la siguiente ecuación de recursión.*

$$x^{-\frac{1}{2}}Z_{K_+}(x, y) - x^{\frac{1}{2}}Z_{K_-}(x, y) = (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})Z_{K_0}(x, y). \quad (4.4)$$

La fórmula de recursión (4.4) no siempre se puede usar como herramienta de computo del polinomio Z , ya que no todo código enlace se puede transformar en el código enlace trivial usando un número finito de operaciones K_+ , K_- y K_0 , como vimos en la Nota 2.4.1. Por la misma razón no se ha podido dar un algoritmo de recurrencia, sin usar el grupo de un nudo combinatorio, para computar el polinomio de Alexander de un nudo combinatorio en general. Igualmente, no se puede definir el polinomio de HOMFLY mediante su fórmula de recurrencia.

4.2.3 El polinomio de Jones de un nudo virtual

El polinomio de Jones fue presentado por primera vez, para nudos clásicos, en el año de 1984 por V. Jones [22]. Más tarde, Kauffman dio un método algorítmico, usando un polinomio que

él denominó polinomio bracket, para computarlo. A partir de esta aproximación, Kauffman mostró que el polinomio de Jones puede ser extendido, de manera natural, a un invariante de nudos virtuales, [25].

En la primera parte estudiaremos el polinomio de Jones vía nudos combinatorios, para ello definiremos el polinomio bracket para nudos combinatorios. También estudiaremos el comportamiento del polinomio de Jones con respecto a las virtualizaciones. Este polinomio no es tan fuerte para distinguir nudos virtuales como lo es el polinomio Z de Sawollek.

4.2.3.1 El polinomio bracket

Para la definición del polinomio bracket utilizaremos las definiciones y notaciones de suavización dadas en el Capítulo 2.

Recordemos que para un código enlace \mathcal{S} denota el conjunto de todos los estados de K . Si $K_l \in \mathcal{S}$, $C(K_l)$ denota el número de veces que aparece 0 en l menos el número de veces que aparece 1 y $|K_l|$ es el número de componentes del enlace K_l .

Definición 4.2.7 (Kauffman) *Sea K un código enlace, definimos el **polinomio bracket** de K , denotado $\langle K \rangle$, como el polinomio de Laurent*

$$\langle K \rangle (t) = \sum_{K_l \in \mathcal{S}} t^{C(K_l)} (-t^{-2} - t^2)^{|K_l|-1}, \quad (4.5)$$

si K tiene por lo menos un cruce. Y

$$\langle K \rangle (t) = (-t^{-2} - t^2)^{p-1} \text{ si } K = (\{ \overbrace{(\quad, \dots, \quad)}^{p \text{ componentes}} \}, (e_1, \dots, e_n)).$$

Teorema 4.2.13 *Sea K un código enlace, entonces el polinomio bracket $\langle K \rangle$ está univocamente determinado por K .*

Prueba. Aplicamos Teorema 2.3.2 y el numeral 1 de la Nota 2.3.1. ■

Una característica importante del polinomio $\langle \quad \rangle$ es que no se altera por reenumeración, quitar signos superfluos o rotación. Se prueba fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 4.2.14 *Sea $K = (\{C_1, \dots, C_t, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n))$ un código enlace, donde $C_t = (t_1, \dots, t_s)$, $s = s(t)$, $t = 1, 2, \dots, p$. Entonces*

$$\langle K \rangle = \langle (\{C_1, \dots, C_t^-, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n)) \rangle, \quad t = 1, 2, \dots, p.$$

Ejemplo 4.2.6 *Para el código nudal $K = ((1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2), (1, -1, 1, -1))$, vease Figura 2-4, tenemos que $|[K]_{0000}| = 1$, $|[K]_{0001}| = 1$, $|[K]_{0010}| = 2$, $|[K]_{0100}| = 1$, $|[K]_{1000}| = 2$,*

$|[K]_{0011}| = 1$, $|[K]_{0101}| = 1$, $|[K]_{0110}| = 2$, $|[K]_{1010}| = 3$, $|[K]_{1100}| = 1$, $|[K]_{1001}| = 2$,
 $|[K]_{1110}| = 2$, $|[K]_{1101}| = 1$, $|[K]_{1011}| = 2$, $|[K]_{0111}| = 1$, $|[K]_{1111}| = 1$. De donde $\langle K \rangle = 1$.

El siguiente teorema muestra una propiedad del polinomio $\langle K \rangle$ que permite hallar una relación de recurrencia para computar el polinomio $\langle \quad \rangle$ de un nudo combinatorio.

Teorema 4.2.15 *Sea $K = (\{C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n))$ un código enlace, entonces*

$$(1) \quad \langle K \rangle = t \langle K_0 \rangle + t^{-1} \langle K_1 \rangle$$

$$(2) \quad \langle (\{(\quad), C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n)) \rangle = (-t^2 - t^{-2}) \langle K \rangle$$

Prueba. Supongamos que $K = (\{C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n))$ un código enlace con n cruces. Probemos (1). En efecto, denotemos la colección de todos los estados de K_0 y K_1 por \mathcal{S}_0 y \mathcal{S}_1 , respectivamente, y a los elementos de \mathcal{S}_0 y \mathcal{S}_1 por $(K_0)_{(l_2, \dots, l_n)}$ y $(K_1)_{(l_2, \dots, l_n)}$, respectivamente. Es claro que si \mathcal{S} denota el conjunto de todos los estados de K , entonces $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, y esta unión es disjunta. Con esta notación $c(K_{(0, l_2, \dots, l_n)}) = c((K_0)_{(l_2, \dots, l_n)}) + 1$, $c(K_{(1, l_2, \dots, l_n)}) = c((K_1)_{(l_2, \dots, l_n)}) - 1$, $|K_{(0, l_2, \dots, l_n)}| = |(K_0)_{(l_2, \dots, l_n)}|$ y $|K_{(1, l_2, \dots, l_n)}| = |(K_1)_{(l_2, \dots, l_n)}|$, con lo que

$$\langle K \rangle = \sum_{(K_0)_{(l_2, \dots, l_n)} \in \mathcal{S}_0} t^{c((K_0)_{(l_2, \dots, l_n)})+1} d^{|(K_0)_{(l_2, \dots, l_n)}| - 1} +$$

$$\sum_{(K_1)_{(l_2, \dots, l_n)} \in \mathcal{S}_1} t^{c((K_1)_{(l_2, \dots, l_n)})+1} d^{|(K_1)_{(l_2, \dots, l_n)}| - 1} = t \langle K_0 \rangle + t^{-1} \langle K_1 \rangle,$$

donde $d = -t^{-2} - t^2$.

(2) Sabemos que $(\{(\quad), C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n)) = ((\quad), (\quad)) \sqcup K$, por tanto, los estados de $(\{(\quad), C_1, \dots, C_p\}, (e_1, \dots, e_n))$ son de la forma $((\quad), (\quad)) \sqcup K_c$, donde K_c es un estado de K . De lo anterior $(-t^2 - t^{-1})$ es un factor común de $\langle ((\quad), (\quad)) \sqcup K \rangle$, y además $\langle ((\quad), (\quad)) \sqcup K \rangle = (-t^2 - t^{-1}) \langle K \rangle$. ■

Nota 4.2.2 *Una consecuencia inmediata de la Nota 2.3.1 es que la igualdad $\langle K \rangle = t \langle K_0 \rangle + t^{-1} \langle K_1 \rangle$ no es afectada por la decisión de tomar A^- ó B^- en K_0 o en K_1 . Vease Definición 2.3.1*

La prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [25].

Teorema 4.2.16 *El polinomio bracket es invariante bajo los movimientos de Reidemeister II, III y III''.*

El siguiente corolario muestra la no invariancia del polinomio bracket con respecto al movimiento de tipo I. Pero además nos muestra que el cambio del polinomio es por un factor de $-t^3$ ó $-t^{-3}$, lo cual nos indica que dicho polinomio se puede extender a un polinomio invariante.

Corolario 4.2.17 Sea $K = (\{(k, -k, A), C_1, \dots, C_p\}, E)$ un código enlace con n cruces, donde $k \in \{1, 2, \dots, n\} \cup \{-1, -2, \dots, -n\}$, $E = (e_1, \dots, e_n)$. Si $\tilde{K} = (\{(A), C_1, \dots, C_p\}, E)$, entonces

$$\langle K \rangle = -t^{-3e_k} \langle \tilde{K} \rangle.$$

Prueba. No perdemos generalidad si tomamos $k \in \{n, -n\}$.

Supongamos que $k = n$, es decir, $K = (\{(n, -n, A), C_1, \dots, C_p\}, E)$ y $\tilde{K} = (\{(A), C_1, \dots, C_p\}, E)$.

Consideremos los siguientes casos:

Si $e_n = 1$, por definición $K_1 = (\{(), (A), C_1, \dots, C_p\}, E)$ y $K_0 = (\{(A), C_1, \dots, C_p\}, E)$. Por el Teorema 4.2.15, tenemos que

$$\langle K \rangle = t \langle K_0 \rangle + t^{-1} \langle K_1 \rangle = t \langle \tilde{K} \rangle + t^{-1}(-t^{-2} - t^2) \langle \tilde{K} \rangle = -t^{-3} \langle \tilde{K} \rangle.$$

Si $e_n = -1$, lo que tenemos es que $K_0 = (\{(), (A), C_1, \dots, C_p\}, E)$ y $K_1 = (\{(A), C_1, \dots, C_p\}, E)$. Por el Teorema 4.2.15, tenemos que

$$\langle K \rangle = t \langle K_0 \rangle + t^{-1} \langle K_1 \rangle = t(-t^{-2} - t^2) \langle \tilde{K} \rangle + t^{-1} \langle \tilde{K} \rangle = -t^3 \langle \tilde{K} \rangle.$$

Si $k = -n$ el análisis es análogo. ■

La combinación del corolario anterior y los Teoremas 4.2.15 y 4.2.16 nos muestran una forma más simplificada para hallar el polinomio bracket de un diagrama de un nudo virtual.

Ejemplo 4.2.7 Consideremos el diagrama de un nudo virtual K mostrado en la Figura 4-6.

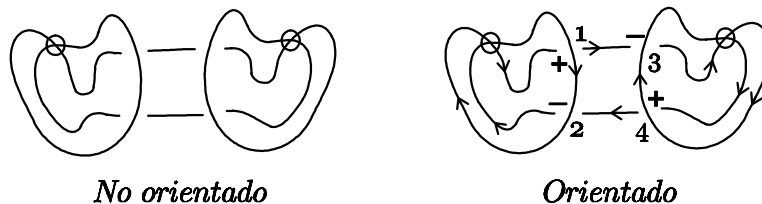


Figura 4-6: Modificación del nudo de Kishino

Un código nudal asociado a una orientación de K es $K = ((1, 2, -1, -3, 4, 3, -4, -2), (1, -1, -1, 1))$. Ahora bien, $K_1 = (\{(2), (-3, 4, 3, -4, -2)\}, (1, 1, -1, 1))$ y $K_0 = ((2, -3, 4, 3, -4, -2), (1, 1, -1, 1))$. Por el Corolario 4.2.17 y el Teorema 4.2.16, $\langle K_0 \rangle = -t^{-3}$. Por otro lado, $K_{10} = K_{11} = ((-3, 4, 3, -4), (1, 1, -1, 1))$. Por el Teorema 4.2.16, $\langle K_{10} \rangle = \langle K_{11} \rangle = 1$. Aplicando el Teorema 4.2.15, $\langle K_1 \rangle = t \langle K_{10} \rangle + t^{-1} \langle K_{11} \rangle = t + t^{-1}$, de donde

$$\langle K \rangle = t \langle K_0 \rangle + t^{-1} \langle K_1 \rangle = t(-t^{-3}) + t^{-1}(t + t^{-1}) = 1.$$

Por otro lado

$$\Lambda([K]) = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \right],$$

Con lo que que K no es un nudo combinatorio clásico.

4.2.3.2 El polinomio de Jones.

En esta sección definiremos el polinomio de Jones o polinomio bracket normalizado, para un nudo combinatorio K , y lo denotaremos V_K . Este nuevo polinomio es, en efecto, un invariante de nudos combinatorio.

Definición 4.2.8 Sea K un código enlace. Definimos el **polinomio de Jones** para K , mediante

$$V_K(t) = (-t^{-3})^{w_K} \langle K \rangle, \text{ donde } w_K \text{ es el writhe de } K.$$

Teorema 4.2.18 El polinomio de Jones es invariante bajo los movimientos de Reidemeister.

Una pregunta que aún sigue abierta en la categoría clásica de nudos es la de encontrar un nudo clásico no trivial con polinomio de Jones 1. El siguiente ejemplo resuelve el interrogante anterior para el caso de los nudos virtuales.

Ejemplo 4.2.8 Consideremos el nudo virtual K mostrado en la Figura 4-6. Sabemos que $\langle K \rangle = 1$, y además $w_K = 0$, de donde $V_K(t) = 1$, y sabemos que K no es trivial.

4.2.3.3 Virtualización

A continuación estudiaremos el comportamiento del polinomio bracket, y por ende del polinomio de Jones, con respecto a las virtualizaciones de códigos nudales. Supondremos que los códigos están en forma estándar.

Teorema 4.2.19 Sea K un nudo combinatorio, y sea m un cruce de K , entonces $\langle K_s^m \rangle = \langle K_v^m \rangle$.

Prueba. Supongamos que $K = ((n, A, -n, B), E)$ con $E = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ y consideremos el caso cuando $m = n$. Entonces $K_v^n = ((n, A, -n, B), (e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n))$. Consideremos los siguientes casos:

Si $e_n = 1$, entonces $(K_v^n)_1 = ((A^-, B), E)$ y $(K_v^n)_0 = (\{(A), (B)\}, E)$. Por la Nota 4.2.2, tenemos que $\langle (K_v^n)_1 \rangle = \langle ((A, B^-), (e_1, \dots, e_n)) \rangle$, por lo tanto

$$\langle K_v^n \rangle = t \langle (K_v^n)_0 \rangle + t^{-1} \langle ((A, B^-), (e_1, \dots, e_n)) \rangle.$$

Por otro lado, puesto que $K_s^n = ((-n, A, n, B), (e_1, \dots, e_{n-1}, -1))$, entonces $(K_s^n)_1 = ((A, B^-), E)$ y $(K_s^n)_0 = (K_v^n)_1$, de donde $\langle K_s^n \rangle = \langle K_v^n \rangle$.

Si $e_n = -1$, entonces $(K_v^n)_1 = (\{(A), (B)\}, E)$ y $(K_v^n)_0 = ((A^-, B), E)$, nuevamente, por la Nota 4.2.2 tenemos que

$$\langle K_v^n \rangle = t \langle ((A, B^-), (e_1, \dots, e_n)) \rangle + t^{-1} \langle (K_v^n)_1 \rangle.$$

Y se verifica que $(K_s^n)_1 = (K_v^n)_1$ y $(K_s^n)_0 = ((A, B^-), (e_1, \dots, e_n))$, con lo que $\langle K_s^n \rangle = \langle K_v^n \rangle$. ■

Corolario 4.2.20 *Sea K un código nudal, entonces $\langle K_{sv}^n \rangle = \langle K \rangle$.*

Dado K un código nudal, decimos que K tiene *número de desanudamiento* 1 si existe un cruce m tal que K_s^m es equivalente al nudo trivial. Por el resultado anterior tenemos el siguiente corolario, que nos permite construir un número infinito de nudos virtuales cuyo polinomio de Jones es 1.

Corolario 4.2.21 *Sea K un diagrama de un nudo clásico con número de desanudamiento 1. Entonces $V_{K_v^n}(t) = 1$.*

Capítulo 5

Clasificación de nudos virtuales

En este capítulo haremos una breve introducción a la clasificación de nudos virtuales usando la versatilidad de los nudos combinatorios y mostrando el poder del invariante Λ para distinguir nudos virtuales, por lo menos para un número bajo de cruces. Para la clasificación utilizamos también los otros invariantes que se introdujeron en el Capítulo 4, aprovechándonos de la posibilidad de computar dichos invariantes sin necesidad de recurrir a diagramas. Sólo hacemos un esquema del método de clasificación y presentamos las tablas para $n = 2$ y $n = 3$, ya que el número de nudos virtuales ya es muy grande para $n = 4$. En un trabajo posterior continuaremos con la clasificación.

Queremos enfrentar el problema de hacer una enumeración de nudos virtuales, es decir, construir una tabla en la que se listen los nudos virtuales, de tal forma que no haya repeticiones ni omisiones. Este problema es el análogo de la tarea emprendida a finales del siglo XIX para nudos clásicos y que fue motor de muchos desarrollos, vease [31]. Para compilar dicha tabla necesitamos poder identificar un código combinatorio particular que represente de forma única un diagrama de nudo virtual. Adicionalmente, necesitamos un orden en el conjunto de códigos combinatorios que nos permita elegir el mínimo entre todos los códigos que representan el mismo nudo combinatorio y éste será el representante normal elegido para el nudo combinatorio. Para los nudos clásicos, el código de Dowker, [17], fue utilizado muy exitosamente, vease el trabajo [43], en el que se usa muy fuertemente el orden lexicográfico en el conjunto de todos los posibles códigos de Dowker. Una filosofía parecida a ésta es la que utilizan en la página web [49]. Nosotros implementaremos un proceso diferente al realizado por ellos, ya que deseamos simultáneamente minimizar número de cruces y de puentes.

Ya sabemos que un nudo combinatorio tiene infinitos códigos combinatorios asociados a él. Habíamos dicho que un código combinatorio está en forma standard, ver Sección 1.2.1, si los cruces están etiquetados con el conjunto de enteros $\{1, \dots, n\}$ y no tiene signos obsoletos, es decir, es de la forma $((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n))$. Pero una forma standard no es única y para nuestro trabajo es necesaria la unicidad. También definimos presentación en puentes en la Sección 2.5, pero de nuevo, ésta no es única. Así que nuestro primer paso es definir una *forma normal de un código*, para garantizar unicidad.

El esquema de nuestro trabajo es el siguiente:

- i. Definimos una codificación en forma normal en la Sección 5.1. De esta forma, un código

es único, salvo movimientos de Reidemeister. Es decir, definimos una numeración particular como la única aceptable para un diagrama específico de un nudo virtual.

ii. Definimos un orden en el conjunto de códigos que se encuentran en forma normal en la Sección 5.2. Este orden depende del número de cruces y número de puentes. Es muy natural querer minimizar el número de cruces, pero para nosotros es importante el concepto de puente y deseamos también tenerlo en cuenta.

iii. Se va haciendo la lista de todos los posibles códigos en forma normal. Al producir un nuevo código, se determina si el nudo ya es uno de los obtenidos. Para esto contamos con la ayuda de los invariantes estudiados en los capítulos anteriores. Si el conjunto de invariantes muestra que es un nudo nuevo, lo agregamos a la lista. Si los invariantes dan la indicación que es uno de los anteriores, se trata de hacer las simplificaciones, para verificar que en efecto ya estaba. Para eso es particularmente útil el invariante delta. Por supuesto, a medida que el número de cruces aumenta, el problema se va volviendo más complejo y se pueden encontrar con nudos en los que la determinación de si es o no un nudo nuevo no se puede hacer con los invariantes disponibles. Cuando el nudo es clásico, usamos la clasificación que ya se conoce. Queremos hacer una clasificación completa, es decir, que distinga el inverso y las imágenes espejos. Usualmente estos nudos son más difíciles de distinguir y para n grande puede ser mucho más práctico hacer primero una clasificación sin distinguir espejos e inversos y posteriormente refinar la clasificación.

En el resto del capítulo, para un entero positivo n utilizaremos la notación $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

5.1 Forma normal de un nudo combinatorio

Para definir la forma normal se deben buscar los puentes y escoger el de mayor longitud. Vamos a suponer que el nudo siempre está en forma estándar, así que los cruces van de 1 hasta n . La lista de signos la denotamos E y tiene longitud n .

El esquema del nudo combinatorio será $((-1, A_1, -2, A_2, -3, \dots, -n, A_n), E)$, con la posibilidad de que algunos de los A_i sean vacíos, pero tal que $\cup_i^n A_i = [n]$. Notemos que los arcos del diagrama serán $(-i, A_i, -(i+1))$, $i = 1, 2, \dots, n$, donde $n+1 \equiv 1$. Recordemos que un arco del diagrama es un puente si pasa por encima de algún cruce. En este caso los puentes van a corresponder a los A_i tales que $|A_i| > 0$. Con esta notación podemos numerar los arcos con el número del cruce en el que empieza, y de esa manera los arcos están numerados en el orden en el que se recorre el nudo. Esto es particularmente útil para encontrar el grupo del nudo. Queremos que el puente de mayor longitud sea el primero, así que $|A_1| \geq |A_i|$ para todo $i = 2, \dots, n$. Elegir esta forma de numeración corresponde, en un diagrama, a ir recorriendo el diagrama poniendo el punto de inicio inmediatamente antes del cruce negativo en el que se inicia el puente de mayor longitud. Si el diagrama tiene al menos un cruce, siempre existe

tal punto. Al ir recorriendo el diagrama, se van numerando los cruces cuando los recorramos por debajo. Si hay sólo un puente de longitud máxima, no hay ninguna confusión en la forma de la enumeración, pero si hay más de un puente de longitud máxima debemos tener otras consideraciones.

A la sucesión de las longitudes de los arcos lo llamamos el *tablero de puentes* o *marco de puentes* del nudo. O sea que el marco del nudo $((-1, A_1, -2, A_2, -3, \dots, -n, A_n), E)$ es el arreglo $(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$ y se puede representar de forma análoga a los tableros de Young, pero sólo pedimos que $|A_1|$ sea el mayor y no se dice nada de los otros grupos de casillas, que incluso pueden ser 0. Por ejemplo, para nudos de dos cruces hay dos posibles tableros: $(1, 1)$ y $(2, 0)$. Estos tableros se pueden representar en forma diagramática mediante un arreglo de n columnas, tal que en la columna i hay $k_i = |A_i|$ casillas, $(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_m|)$ sujetas a las condiciones:

- i. $0 \leq k_i \leq n$, ii. $k_i \leq k_1$ para $i = 1, \dots, n$ y iii. $\sum_{i=1}^n k_i = n$.

Por ejemplo:

$$(1, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, (2, 0) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, (1, 1, 1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, (2, 0, 1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array},$$

$$(2, 1, 0) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, (3, 0, 0) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

El conjunto de los k_i que no son cero forman una partición de n . Pero para nuestros propósitos es fundamental permitir los valores de cero.

Los tableros los organizamos en orden lexicográfico con respecto a los valores de k_i . Si hay un sólo puente de longitud máxima, es claro donde poner el punto inicial. Si hay más de un puente de longitud máxima, al tomar el mayor en el orden lexicográfico de los tablero se determina en forma única donde se inicia el recorrido en el diagrama.

Por ejemplo, si un nudo de 4 cruces tiene dos puentes de longitud 2 cada uno, que están contiguos, tenemos dos posibilidades para el marco: $(2, 2, 0, 0)$ y $(2, 0, 0, 2)$. Se toma el mayor en el orden lexicográfico, que es $(2, 2, 0, 0)$. Esto corresponde al deseo de recorrer primero los puentes de mayor tamaño.

Otro ejemplo es el marco $(2, 2, 0, 0, 2, 0)$ que se podría describir también como $(2, 0, 0, 2, 0, 2)$ ó $(2, 0, 2, 2, 0, 0)$. Entre estos, el primero es el mayor en el orden lexicográfico.

Si el tablero tiene simetrías, por ejemplo el tablero de un nudo alternante o los tableros $(2, 0, 2, 0)$, $(2, 0, 2, 0, 2, 0)$ y $(3, 0, 0, 3, 0, 0)$, entonces hay ambigüedad en el lugar en el cual se deba elegir el punto inicial. Esto se decide entonces considerando todos los posibles códigos que se forman con el marco simétrico dado y eligiendo aquel menor en el orden lexicográfico. De esa forma el código normal queda unívocamente determinado. Con esta forma de elegir el representante de la clase usamos una convención parecida a la usada en [43].

El problema de la simetría es particularmente notorio en los nudos combinatorios alternantes, pues cualquier punto antes de un cruce negativo nos da el esquema correcto de puentes. Así, si el nudo es de n cruces, se tienen que considerar n posibles esquemas de numeración y elegir el menor entre ellos. Por ejemplo, la lista de cruces $(-1, 5, -2, 4, -3, 1, -4, 3, -5, 2)$ es equivalente por reenumeración a: $(-1, 3, -2, 1, -3, 5, -4, 2, -5, 4)$, $(-1, 5, -2, 4, -3, 2, -4, 1, -5, 3)$, $(-1, 4, -2, 1, -3, 5, -4, 3, -5, 2)$, $(-1, 3, -2, 5, -3, 2, -4, 1, -5, 4)$, de las cuales la menor en el orden lexicográfico es $(-1, 3, -2, 1, -3, 5, -4, 2, -5, 4)$.

Puede suceder que la reenumeración de una lista de cruces dé la misma que la inicial, como le sucede a la lista de cruces del nudo combinatorio $L = ((-1, 3, -2, 4, -3, 1, -4, 2), (1, -1, 1, 1))$. Este nudo es equivalente, por reenumeraciones que son simplemente rotaciones, a

$$\begin{aligned} &((-2, 4, -3, 1, -4, 2, -1, 3), (1, 1, -1, 1)), ((-3, 1, -4, 2, -1, 3, -2, 4), (1, 1, 1, -1)), \\ &((-4, 2, -1, 3, -2, 4, -3, 1), (-1, 1, 1, 1)) \end{aligned}$$

que corresponden a

$$\begin{aligned} &((-1, 3, -2, 4, -3, 1, -4, 2), (1, 1, -1, 1)), ((-1, 3, -2, 4, -3, 1, -4, 2), (1, 1, 1, -1)), \\ &((-1, 3, -2, 4, -3, 1, -4, 2), (-1, 1, 1, 1)) \end{aligned}$$

que tienen exactamente la misma lista de cruces, pero no la lista de signos, por lo que el menor sería $(-1, 3, -2, 4, -3, 1, -4, 2), (-1, 1, 1, 1)$.

Explícitamente tenemos la siguiente definición

Definición 5.1.1 *Un código combinatorio de n cruces se encuentra en forma normal si:*

1. *El código está en forma standard, es decir los cruces están numerados con los enteros de 1 hasta n y no hay signos obsoletos.*

2. *El código está en forma de puentes, es decir es de la forma*

$$((-1, A_1, -2, A_2, -3, \dots, -n, A_n), E),$$

donde E es la lista de signos, con la posibilidad de que algunas de las sucesiones A_i sean vacías, pero que $\cup_{i=1}^n \{A_i\} = [n]$.

3. *Si $k_i = |A_i|$, el tablero de puentes (k_1, k_2, \dots, k_n) satisface las condiciones. $0 \leq k_i \leq n \leq k_1$ para $i = 1, \dots, n$ y $\sum_{i=1}^n k_i = n$.*

4. *El tablero de puentes es el mayor en el orden lexicográfico entre todos los posibles tableros de puentes que se obtienen por reenumeración. Si el tablero de puentes no tiene simetría, con estas consideraciones sobre el tablero se garantiza que el código combinatorio es único y ese se toma como su forma normal. Si el tablero de puentes tiene simetría, la lista de cruces debe satisfacer, además, ser la menor en el orden lexicográfico entre todos los códigos obtenidos por reenumeraciones de puentes. En el caso que todas las listas de cruces sean las mismas, se toma*

el orden lexicográfico teniendo en cuenta también la lista de signos.

5.2 Orden en el conjunto de códigos combinatorios normales

Ahora queremos establecer un orden en el conjunto de todos los códigos combinatorios. Para que esto tenga más sentido práctico debemos simplificar en lo posible los códigos, así que pedimos que sean reducidos, es decir que no halla reducción de cruces mediante movimientos de Reidemeister de Tipos I y II que sean evidentes, y pedimos que los códigos estén en forma normal. Para este orden tendremos en cuenta los siguientes valores:

$nc_v(L)$: número de cruces del código combinatorio L .

$br_v(L)$: número de puentes del código combinatorio L .

$tab(L)$: tablero de puentes del código combinatorio L .

Primero definamos un orden entre tableros de puentes.

Definición 5.2.1 *Dados dos tableros de puentes (k_1, k_2, \dots, k_n) y (l_1, l_2, \dots, l_m) , tales que $0 \leq k_i \leq k_1 \leq n$, para $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n k_i = n$, $0 \leq l_j \leq l_1 \leq m$, para $j = 1, \dots, m$, y $\sum_{i=1}^m l_i = m$, decimos que*

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \prec (l_1, l_2, \dots, l_m)$$

si

i. $n < m$, o

ii. si $n = m$, $|\{k_i : k_i > 0\}_{i=1, \dots, n}| < |\{l_j : l_j > 0\}_{j=1, \dots, m}|$, es decir el número de puentes de (k_1, k_2, \dots, k_n) es menor que el número de puentes de (l_1, l_2, \dots, l_m) , o

iii. si el número de puentes es igual y $k_1 > l_1$, o

iv. si el número de puentes es igual y $k_1 = l_1, \dots, k_i = l_i$ y $k_{i+1} > l_{i+1}$, $i = 2, \dots, n - 1$.

Nótese que cuando el número de puentes es igual se está usando el orden lexicográfico inverso.

Definición 5.2.2 *Dados dos códigos combinatorios en forma normal reducida L_1 y L_2 diremos que L_1 "está primero que" L_2 o que $L_1 \prec L_2$ si*

1. $nc_v(L_1) < nc_v(L_2)$, o

2. $nc_v(L_1) = nc_v(L_2)$ y $br_v(L_1) < br_v(L_2)$, o

3. $nc_v(L_1) = nc_v(L_2)$, $br_v(L_1) = br_v(L_2)$ y $tab(L_1) \prec tab(L_2)$, o

4. $nc_v(L_1) = nc_v(L_2)$, $br(L_1) = br(L_2)$, $tab(L_1) = tab(L_2)$ y considerados como sucesión de enteros, L_1 es menor en el orden lexicográfico a L_2 .

5.3 Generación de lista de nudos

Queremos que la lista de candidatos para producir los nudos combinatorios nuevos, que vamos a agregar a los ya obtenidos de hasta $n - 1$ cruces, sea lo más depurada posible, puesto que después

debemos calcular los invariantes para estar seguros de que en efecto son nudos combinatorios nuevos.

Para generar la lista de todos los posibles nudos combinatorios de n cruces, desarrollamos el siguiente algoritmo:

Paso 1. Generación de tableros: Generamos todos los posibles marcos o tableros de puentes. Estos corresponden al esquema de las posiciones de los cruces por debajo. Debemos tomar el conjunto $[n]$ y partirlo en todos los posibles t subconjuntos, $t = 1, \dots, n$. Asignar todas las posiciones posibles para estos subconjuntos. Luego, por cada subconjunto debemos tomar todas las permutaciones. Hay que suprimir aquellas en la que el primer entero sea menor que los otros. Esto se hace seleccionando aquellas en las que el máximo esté en el primer elemento. Ordenamos los tableros en el orden dado en la Definición 5.2.1, así el primer tablero corresponde al esquema de los nudos de un puente y el último tablero corresponde al esquema de los nudos alternantes. Se eliminan aquellos que son sólo rotación de otros. Este fenómeno es notorio a medida que n crece. En ese caso se deja aquel que es mayor en el orden de tableros de la Definición 5.2.1.

A continuación mostramos una tabla con el número de tableros hasta $n = 10$, y escribimos explícitamente los posibles tableros hasta $n = 5$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
número tableros	2	4	10	26	80	246	810	2704	9252	

$n = 2$, hay 2 tableros: $\{2, 0\}$ y $\{1, 1\}$.

$n = 3$, hay 4 tableros: $\{3, 0, 0\}$, $\{2, 1, 0\}$, $\{2, 0, 1\}$ y $\{1, 1, 1\}$.

$n = 4$, hay 10 tableros: $\{4, 0, 0, 0\}$, $\{3, 1, 0, 0\}$, $\{3, 0, 1, 0\}$, $\{3, 0, 0, 1\}$, $\{2, 2, 0, 0\}$, $\{2, 0, 2, 0\}$, $\{2, 1, 1, 0\}$, $\{2, 1, 0, 1\}$, $\{2, 0, 1, 1\}$ y $\{1, 1, 1, 1\}$.

$n = 5$, hay 26 tableros: $\{5, 0, 0, 0, 0\}$, $\{4, 1, 0, 0, 0\}$, $\{4, 0, 1, 0, 0\}$, $\{4, 0, 0, 1, 0\}$, $\{4, 0, 0, 0, 1\}$, $\{3, 2, 0, 0, 0\}$, $\{3, 0, 2, 0, 0\}$, $\{3, 0, 0, 2, 0\}$, $\{3, 0, 0, 0, 2\}$, $\{3, 1, 1, 0, 0\}$, $\{2, 0, 1, 1, 1\}$, $\{2, 0, 2, 0, 1\}$, $\{2, 1, 0, 1, 1\}$, $\{2, 1, 0, 2, 0\}$, $\{3, 1, 0, 1, 0\}$, $\{3, 1, 0, 0, 1\}$, $\{3, 0, 1, 1, 0\}$, $\{3, 0, 1, 0, 1\}$, $\{3, 0, 0, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1, 0, 0\}$, $\{2, 2, 0, 1, 0\}$, $\{2, 2, 0, 0, 1\}$, $\{2, 1, 2, 0, 0\}$, $\{2, 1, 0, 2, 0\}$, $\{2, 1, 0, 0, 2\}$, $\{2, 0, 2, 0, 1\}$, $\{2, 0, 0, 2, 1\}$, $\{2, 1, 1, 1, 0\}$, $\{2, 1, 1, 0, 1\}$ y $\{1, 1, 1, 1, 1\}$.

De estos tableros, aparte de los alternantes, el único que admite posibles reenumeraciones es $\{2, 0, 2, 0\}$. Esto se tiene en cuenta para generar la lista de cruces.

Paso 2. Generación de lista de cruces: Se generan todas las posibles permutaciones de cruces por encima para un nudo de n cruces, y así con ellos llenar todos los tableros. Claramente se pueden eliminar todos los órdenes que empiezan con 1, pues quedaría $-1, 1$, que da lugar a un movimiento de Reidemeister de Tipo I. Se eliminan en la lista de cruces los que corresponden a movimiento de Reidemeister de Tipo I.

Paso 3. Generación de signos: La lista de signo es generada independientemente, con

todos los posibles signos de nudos de n cruces. Este conjunto de signos corresponde a $\{1, -1\}^n$. La función se define por recurrencia para que quede en el orden de signos que queremos.

Paso 4. Generación de códigos: A cada una de estas listas de cruces obtenidas en el Paso 2 le asociamos cada una de las listas de signos que se obtuvieron en el Paso 3. Luego se simplifica la lista al realizar todos los posibles movimientos de Reidemeister de Tipo II, ó III, que van a depender de no sólo de la lista de cruces, sino también de los signos. Cuando se efectúa un movimiento de Tipo II, se obtiene un código de menos cruces, por tanto se elimina. Cuando se puede efectuar uno del Tipo III, se lleva a la forma normal y se compara con los otros posibles códigos, y se deja el menor en el orden de tableros.

Paso 5. Depuración de listas de candidatos. Con las listas obtenidas en los pasos anteriores, se tienen todos los posibles candidatos de nudos virtuales de n cruces, pero por supuesto hay repeticiones. Así que usamos invariantes para eliminar duplicaciones. Calculamos el invariante Λ , el polinomio Z y el polinomio de Jones y, agrupamos los nudos combinatorios con los mismos invariantes. Dentro de cada grupo tratamos de probar que son el mismo nudo usando otras técnicas, por ejemplo el flip, analizando el grupo del nudo, etc. De esta forma reducimos cada grupo. A medida que n crece se va haciendo necesario buscar otros invariantes. Para los nudos clásicos utilizamos la clasificación ya conocida

5.4 Tablas de clasificación para $n \leq 3$

Damos las tablas completas de todos los nudos virtuales de 2 y 3 cruces. Un trabajo posterior que deseamos emprender es continuar con esta clasificación. La lista de cruces la escribimos en forma diagramática, llenando el tablero de puentes, de tal forma que $\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$ representa la lista de cruces $(-1, 2, 1, -2)$. Como la lista de signos es la primera columna del invariante Λ , la escribimos sólo en el invariante Λ y no la repetimos. Escribimos el invariante Λ completamente y señalamos con * aquellos que se pueden reducir.

5.4.1 $n = 2$

Cruces	Invariante Λ	Pol. Swallowek	Pol. Jones	C. Euler
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{x^2}{y} - x^2 - yx + \frac{x}{y} + y + 1$	$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^{3/2}} - \frac{1}{q^{5/2}}$	0
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{x^2}{y} + x^2 + yx - \frac{x}{y} - y - 1$	$-q^{5/2} + q^{3/2} + q$	0

Hay sólo dos nudos virtuales, el uno es la imagen espejo del otro. Ambos los distingue tanto el invariante Λ , como el polinomio Z y el polinomio de Jones.

5.4.2 $n = 3$

Dividimos la tabla según el número de puentes. Para simplificar, cómo sólo hay 6 posibles polinomios de Jones, no triviales, los denotamos de la siguiente forma

$$pol_1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^{3/2}} - \frac{1}{q^{5/2}}, \quad pol_2 = -q^{5/2} + q^{3/2} + q, \quad pol_3 = -q^4 + q^3 + q, \quad pol_4 = -\frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q},$$

$$pol_5 = \sqrt{q} + 1 - \frac{1}{\sqrt{q}} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}, \quad pol_6 = q^2 - q - \sqrt{q} + 1 + \frac{1}{\sqrt{q}}$$

1 Puente

Cruces	Invariante Λ	Pol. Swallowek	Jones	C. Euler
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{x^3}{y} - x^3 + y^2x + \frac{x}{y} - y^2 + 1$	pol_1	-2
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$-yx^2 - x^2 - y^2x + x + y^2 + y$	pol_5	-2
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y^2} + x - 1/y - 1$	pol_6	-2
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{x^3}{y^2} + x^3 + yx^2 + \frac{x^2}{y^2} - y - 1$	pol_2	-2
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{x^3}{y^2} - x^3 - \frac{x^2}{y^2} + x^2 + y^2x - x - y^2 + 1$	pol_1	0
$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{x^3}{y^2} + x^3 + \frac{x^2}{y^2} - x^2 - y^2x + x + y^2 - 1$	pol_3	0
$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{x^3}{y^2} - x^3 - yx^2 - \frac{x^2}{y^2} + y + 1$	pol_1	-2
$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$yx^2 + x^2 + y^2x - x - y^2 - y$	pol_6	-2
$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{x^2}{y} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y^2} - x + \frac{1}{y} + 1$	pol_5	-2
$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{x^3}{y} + x^3 - y^2x - \frac{x}{y} + y^2 - 1$	pol_2	-2