Sistema robusto de gestión predictiva de energía en redes de distribución con múltiples microrredes con inclusión de energías renovables

Edwin Alberto Cervera Farfán

Facultad de ingeniería
Programa de ingeniería eléctrica y electrónica
Universidad Nacional de Colombia, Colombia
2024

Sistema robusto de gestión predictiva de energía en redes de distribución con múltiples microrredes con inclusión de energías renovables

Edwin Alberto Cervera Farfán

Tesis presentada como requisito parcial para optar por el título de:
Magíster en ingeniería eléctrica - Modalidad Investigación

Director(a):
Sergio Rivera
Profesor Titular - Programa de ingeniería eléctrica y electrónica
Facultad de ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Codirector(a):
Eduardo Mojica Nava
Profesor Titular - Programa de ingeniería eléctrica y electrónica
Facultad de ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Línea de investigación:
Sistemas de Potencia-Optimización
Grupo de investigación:
Programa de adquisición y análisis de señales (PAAS)

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ingeniería
Programa de ingeniería eléctrica y electrónica
2024

Wenn du es nicht einfach erklären kannst, hast du es nicht genug verstanden - Si no eres capaz de explicar algo claramente, es que aún no lo has entendido lo suficiente.

Albert Einstein

Declaración

Me permito afirmar que he realizado ésta tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados el presente texto. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Universidad Nacional de Colombia., Fecha entrega

Edwin Alberto Cervera Farfán

Agradecimientos

Agradezco con todo mi ser a mis padres, quienes han sido mi faro en la oscuridad, motivándome cada día a ser una mejor persona. A mis primos, que con su paciencia infinita escucharon mis divagaciones sobre incertidumbre, frustración y las múltiples etapas que marcaron el camino de este documento, les estoy profundamente agradecido. También quiero rendir homenaje a la vida misma; aunque a menudo resulta incierta y, en ocasiones, abrumadora, es un viaje similar a pedalear en bicicleta: el destino final solo se alcanza si se mantiene la perseverancia y nunca se deja de pedalear. A lo largo de este trayecto, cada momento vivido y cada lección aprendida se convierten en parte esencial de la experiencia, recordándonos que, aunque se desee llegar a la meta, son los aprendizajes en el camino los que perduran para siempre. Y al final de este recorrido, mi gratitud se extiende al Programa de Investigación de Colciencias (código 70169), cuya valiosa ayuda y apoyo han sido fundamentales en el desarrollo de este estudio.

Listado de símbolos y abreviaturas

A continuación, se presenta una tabla que resume las notaciones empleadas a lo largo de la tesis. Esta tabla incluye las variables, parámetros y símbolos más relevantes utilizados en el texto, acompañados de sus respectivas descripciones.

Indices

$\mathcal{T}, t$	Número de periodos de tiempo, e indice de periodo de tiempo,
$\mathcal{M}, m$	Número de generadores convencionales, y sus indices
$\mathcal{S}, s$	Número de sistemas de almacenamiento de energía, y sus indices
$\mathcal{I}, i$	Número de generadores renovables, y sus indices
$\mathcal{K}, k$	Número de variables aleatorias, y sus indices
$\mathcal{J}, j$	Número de elementos de soporte de las variables aleatorias, y sus indices
$\mathcal{N}, n$	Número de demandas, y sus indices

Constantes

$P_{G_m}^{min}, P_{G_m}^{max}$	Limites mínimos y máximos de energía generada por el generador convencional m
$P_{B_s}^{min}, P_{B_s}^{max}$	Limites mínimos y máximos de energía suministrada por el ESS s
$R_{m,up}, R_{m,down}$	Limites mínimos y máximos de rampa arriba y rampa abajo del generador convencional m
SR^t	Reserva rodante del generador convencional m
L^t	Energía demandada por los usuarios de la microrred
${B_s}^{min}, {B_s}^{max}$	Mínima y máxima energía almacenada en el sistema de almacenamiento s, en el periodo t
a_m, b_m, c_m	Precios de venta de energía del generador m
C_{pv_i}	Precio de venta de energía del generador renovable i
$\|_{jk}$	
η_s	Eficiencia del sistema de almacenamiento s

Variables aleatorias

ξ_k^t	Error en la estimación de energía de salida del generador renovable i

Variables de decisión

P_{Gm}^{t}	Energía de salida del generador renovable m en el instante t
$P_{B_s}^{t}$	Energía de carga o de descarga del sistema de almacenamiento s, en el instante t
B_s^t	Energía almacenada en el sistema de almacenamiento s en el instante t
α_k	Multiplicador de Lagrange presente en al reformular la variable aleatoria k
ω_k	Variable auxiliar al hallar la función conjugada de $f(x, \xi)$
v_{jk}	Variable auxiliar de función de soporte para el elemento de soporte j de la variable aleatoria k

Resumen

Sistema robusto de gestión predictiva de energía en redes de distribución con múltiples microrredes con inclusión de energías renovables

Esta tesis aborda el desafío de modelar y optimizar la operación de sistemas de múltiples microrredes interconectadas (NMG) bajo condiciones de incertidumbre. Las microrredes, como evolución de los sistemas de distribución eléctrica, integran fuentes de generación distribuida —principalmente renovables— junto con sistemas de almacenamiento y cargas. Sin embargo, la variabilidad inherente a las fuentes renovables y al comportamiento de la demanda introduce importantes incertidumbres en su operación.

El trabajo explora distintas metodologías para gestionar estas incertidumbres, enfocándose en la Optimización Robusta Distribucional (DRO) mediante la distancia de Wasserstein. Esta metodología se presenta como un enfoque intermedio entre la programación estocástica y la optimización robusta, ofreciendo una toma de decisiones más equilibrada, realista y menos conservadora frente a la incertidumbre.

Se desarrolla un modelo de despacho económico para microrredes aisladas, utilizando el enfoque DRO-W para optimizar su operación. Además, se amplía el análisis a sistemas de múltiples microrredes interconectadas, introduciendo el concepto de energía transactiva para evaluar sus beneficios en el despacho eficiente de energía entre varias microrredes.

Este estudio contribuye al desarrollo de herramientas para la gestión eficiente y confiable de sistemas energéticos distribuidos, incorporando las incertidumbres de las fuentes renovables y la demanda. De este modo, promueve la transición hacia sistemas energéticos más sostenibles, resilientes y orientados al futuro.

Palabras clave: Microrredes, Optimización Robusta Distribucional (DRO), Distancia de Wasserstein, Energías renovables, Incertidumbre, Despacho económico, Sistemas de múltiples microrredes, Generación distribuida, Transición energética.

Abstract

Robust predictive energy management system for distribution networks with multiple microgrids incorporating renewable energy sources

This thesis addresses the challenge of modeling and optimizing the operation of interconnected multi-microgrid systems (NMG) under uncertainty. Microgrids, as an evolution of electrical distribution systems, integrate distributed generation sources—mainly renewables—alongside storage systems and loads. However, the inherent variability of renewable sources and demand behavior introduces significant uncertainties into their operation.

The study explores various methodologies for managing these uncertainties, focusing on Distributionally Robust Optimization (DRO) using the Wasserstein distance. This approach offers a middle ground between stochastic programming and robust optimization, enabling more balanced, realistic, and less conservative decision-making under uncertainty.

An economic dispatch model is developed for isolated microgrids, applying the DRO-W approach to optimize their operation. Additionally, the analysis extends to interconnected multi-microgrid systems, incorporating the concept of transactive energy to evaluate its benefits for efficient energy dispatch across multiple microgrids.

This research contributes to the advancement of tools for efficient and reliable management of distributed energy systems by accounting for the uncertainties of renewable sources and demand. In doing so, it promotes the transition toward more sustainable, resilient, and future-oriented energy systems.

Keywords: Microgrids, Distributionally Robust Optimization (DRO), Wasserstein distance, Renewable energies, Uncertainty, Economic dispatch, Multiple microgrid systems, Distributed generation, Energy transition.

Lista de figuras

3-1 Diferentes enfoques de modelamiento de incertidumbres en la optimización análitica 19
3-2 Ilustración de estimación de densidad de kernel 21
3-3 Esquema ilustrativo distancia de Wasserstein 22

4-1 Interacciones físicas y de comunicación entre diferentes dispositivos de una Microred 29
4-2 Comportamiento sistema de generación durante 1 semana de muestreo 35
4-3 Resultados despacho económico estocástico microrred para 8 instantes de tiempo 36
4-4 Resultados despacho económico robusto microrred para 8 instantes de tiempo 38
4-5 Funciones de densidad de probabilidad por cada instante de tiempo 41
4-6 Resultados despacho económico robusto distribucional (DROW) para microrred para 8 instantes de tiempo 43
4-7 Topologías Físicas de NMG 46
4-8 Modelo de multiples microrredes implementado 48
4-9 Despacho económico múltiples microrredes 24 instantes de tiempo 53

Lista de tablas

1-1 Tipos de parámetros inciertos en la operación de las MGsN. 2

4-1 Datos de generadores de la microrred. 34
4-2 Datos de demanda por intervalo de tiempo 34
4-3 Parámetros de sistemas de lmacenamiento 35
4-4 Valores de soporte ζ para diferentes instancias 42
4-5 Tabla de pesos de probabilidad q, para los valors de soporte ζ. 42
4-6 Resumen de los modelos optimizados 43
4-7 Parámetros de Unidades Generadoras por Microrred 47
4-8 Datos de microrredes y sus características. 48
4-9 Parámetros de Interconexión entre Microrredes 48
4-10 Demanda en los nodos descritos en la Figura **4-8** (franja 12am-7am) 49
4-11 Demanda en los nodos descritos en la Figura **4-8** (franja 8am-3pm) 50
4-12 Demanda en los nodos descritos en la Figura **4-8** (franja 4am-11pm) 51
4-13 Consumo por Microrred en Cada Intervalo de Tiempo 52

Contenido

Agradecimientos II

Listado de símbolos y abreviaturas III

Resumen V

Abstract VI

Lista de figuras VII

Lista de tablas VIII

Contenido IX

1 Introducción 1

1.1 Objetivos . . . 5

1.1.1 Objetivos específicos . . . 5

1.2 Estudios previos y contribuciones en el campo de la optimización . . . 5

1.2.1 Capitulo en un libro: Optimización de múltiples microrredes en sistemas de distribución [2023], Editorial UD (en proceso de publicación) . . . 6

1.2.2 Resumen en conferencia WEA 2023: Distributionally Robust Optimization for Networked Microgrids: An Overview . . . 7

1.2.3 Conferencia Colombiana de Matematicas Aplicadas e Industriales (MAPI III- 2024): Analyzing the Influence of Key Parameters Variation in Distributionally Robust Optimization with Wasserstein Distance: A Networked Microgrids Perspective . . . 7

2 Fundamentos de optimización 8

2.1 Funciones convexas y espacios relacionados . . . 8

2.2 Nociones básicas de optimización . . . 10

2.3 Teoría de la dualidad en optimización convexa . . . 12

2.4 Optimización robusta y conjuntos de incertidumbre . . . 14

3 DRO con enfoque en distancia Wasserstein 17

3.1 Distancia de Wasserstein . . . 21

3.2 Reformulación usando métrica de Wasserstein . . . 24

4 Despacho economico de una microrred aislada 28

4.1 Modelamiento general de una microrred . . . 28
4.1.1 Modelamiento de la demanda . . . 29
4.1.2 Modelamiento del almacenamiento distribuido . . . 30
4.1.3 Modelamiento de restricciones de rampa de subida y rampa de bajada . . . 31
4.2 El problema del despacho económico . . . 31
4.3 Lidiando con la incertidumbre en el DE de una MG . . . 33
4.3.1 Optimización Estocástica . . . 35
4.3.2 Optimización Robusta . . . 37
4.3.3 Optimización Robusta Distribucional . . . 38
4.4 Optimización de múltiples microrredes . . . 45
4.4.1 Modelamiento de NMGs usando DROW . . . 46

5 Conclusiones **54**

A Anexo 1: Outputs de simulación **55**
A.1 Resultados despacho económico de MG con SO . . . 55
A.2 Resultados despacho económico de MG con RO . . . 56
A.3 Resultados despacho económico de MGs con DROW . . . 58
A.4 Resultados despacho económico de NMGs con DROW . . . 60

Referencias Bibliográficas **64**

1 Introducción

La creciente preocupación global sobre el cambio climático ha impulsado tendencias internacionales hacia una transición energética con el objetivo principal de reducir las emisiones de gases de efecto invernadero. Aproximadamente un tercio de estas emisiones proviene de la generación de energía eléctrica, que representa alrededor a nivel global de 15,6 GtCO2 anuales [23]. Tras los acuerdos de la COP21, en los que Colombia se unió al pacto del cambio climático, el país estableció metas a corto y mediano plazo. Esto culminó en la promulgación de la ley 1715 de 2014, que otorga incentivos para la implementación de Fuentes No Convencionales de Energía Renovable (FCNER). Estas tecnologías son cruciales para la reducción de gases de efecto invernadero [11], permitiendo a los usuarios finales satisfacer completamente su demanda energética y, en algunos casos, vender el excedente a la red principal. Así, estos usuarios se convierten en Generadores Distribuidos (GD), agentes que están conectados directamente a la red de distribución o que operan del lado del consumidor final [68], tal y como las fuentes de generación a partir de la energía solar y eólica [8].

En el panorama energético de los próximos años, se anticipa un aumento en la implementación de generación distribuida y la interconexión de múltiples microrredes a la red de distribución principal. Este nuevo escenario plantea situaciones en las que la energía almacenada en ciertos sistemas de generación podría exceder sus propias necesidades de abastecimiento, lo que permitiría transferir el excedente energético a otros sistemas cercanos, o viceversa.

La configuración física y de comunicación de estos sistemas podría permitir transacciones energéticas potencialmente más económicas que las ofrecidas por la red eléctrica convencional. Sin embargo, la administración de estas transacciones y la generación de las correspondientes retribuciones, tanto para la energía cedida como para la adquirida por diferentes tipos de usuarios, plantea un desafío complejo. Esta complejidad deriva de la necesidad de considerar múltiples factores: aspectos técnicos (como restricciones de flujo de potencia o de reserva rodante), socioeconómicos y elementos estocásticos, entre los que destacan las condiciones climáticas.

En este contexto, se hace imperativa la implementación de un Sistema de Gestión de Energía (EMS, por sus siglas en inglés) distribuido. Este sistema debe ser capaz de proporcionar la funcionalidad necesaria para garantizar que la operación de los sistemas de generación (tanto renovables como convencionales) y de distribución suministre energía con los menores costos operativos posibles. La naturaleza altamente incierta de estos parámetros añade un nivel adicional de complejidad al problema, ya que la capacidad de generación estimada para cada agente renovable influye directamente en los parámetros técnicos, así como en los parámetros operacionales relacionados con la programación del despacho de energía de cada agente con un día de anticipación.

Dichos sistemas son conocidos con el termino de microrredes (MG por sus siglas en inglés), las cuales son redes de distribución formadas por diversas fuentes de generación distribuida (por lo general renovables), de cargas y de diferentes tipos de almacenamiento de energía, que pueden operar en modo aislado o también pueden operar conectadas a la red principal [8], estas pueden ser categorizadas de acuerdo a su uso final, su tamaño, su aplicación o según la naturaleza de sus parámetros de operación estas pueden ser de corriente directa o de corriente alterna, todo dependiendo del tipo de cargas que atienda y del tipo de generación predominante en la

Tabla 1-1: Tipos de parámetros inciertos en la operación de las MGsN

Parámetros Técnicos	Valores de Demanda Valores de Generación Expansión de Red Fallas o Salidas de Elementos
Parámetros Económicos	Crecimiento Económico Precio de la Energía Costos de Producción Tasas de Desempleo Incremento del Producto Interno Bruto Inflación

MG [30], mientras que un sistema de múltiples microrredes interconectadas (NMG) aprovecha varias fuentes de energía complementarias renovables o convencionales distribuidas disponibles localmente y coordina de manera efectiva el intercambio de energía entre las microrredes y la red principal para mejorar la estabilidad, confiabilidad, mitigando así la congestión en líneas de distribución, y durante los momentos donde sea necesario la suplencia de cargas críticas durante largos periodos [39; 3; 43; 24; 45; 31; 53; 30] y eficiencia energética del sistema [4]. Siendo esta etapa una evolución natural de los desarrollos tecnológicos de las microrredes, con tendencia a operar como una red inteligente o SmartGrid.

A medida que aumenta la interconexión de múltiples microrredes (NMG) con la red principal, también se incrementa la complejidad del sistema eléctrico, lo que exige mayor capacidad de procesamiento para un Sistema de Gestión de Energía (EMS) centralizado. Esta limitación puede superarse mediante un EMS distribuido, que no solo optimiza la eficiencia operativa sino que también garantiza el cumplimiento de los derechos legales de los usuarios en cuanto al manejo y la cantidad de datos recopilados por dispositivos de medición inteligente.

La operación de un sistema NMG requiere un algoritmo capaz de estimar la generación renovable con al menos un día de anticipación y de optimizar la programación del despacho de energía. Este algoritmo debe ser robusto para gestionar las incertidumbres propias del sistema y flexible para adaptarse a las condiciones cambiantes de la red eléctrica moderna.

Uno de los mayores retos en la investigación de microrredes es modelar parámetros con propiedades inciertas [34; 2], especialmente aquellos que afectan la calidad de la energía en los sistemas de distribución. La incertidumbre en la generación renovable, como la solar fotovoltaica (PV) y la eólica (WP), depende de factores ambientales, pronósticos climáticos y del comportamiento variable del consumo de los usuarios finales [67]. Estas incertidumbres, junto con las fluctuaciones en la demanda energética y posibles fallos en los equipos, deben ser incorporadas en los modelos para representar de manera precisa y confiable la operación interconectada de múltiples microrredes (NMG).

Al integrar estas incertidumbres en la modelación, se identifican dos categorías principales de parámetros: técnicos y económicos [68], como se muestra en la Tabla **1-1**. Esto permite desarrollar algoritmos capaces de estimar la generación renovable con al menos un día de anticipación y optimizar la programación del despacho de energía. Un enfoque robusto y flexible para la gestión de estas incertidumbres es fundamental para facilitar la toma de decisiones informadas y garantizar un suministro energético eficiente, confiable y sostenible en un entorno dinámico y en constante evolución.

Para controlar este factor de incertidumbre, es crucial acceder a la mayor cantidad de información posible.

Esto se logra mediante el uso de medidores inteligentes (Smart-Meters), concentradores de información y sistemas de gestión y almacenamiento de datos. Esta información proporciona los parámetros necesarios para generar señales de control en el sistema de distribución, beneficiando a los usuarios del EMS y mejorando la toma de decisiones operativas mediante algoritmos de optimización.

Las estrategias comúnmente empleadas para abordar las incertidumbres en diversos problemas pueden clasificarse en tres categorías principales. La primera categoría involucra enfoques de programación estocástica (SO), que asumen que los datos disponibles siguen una distribución de probabilidad específica, como la función de densidad de probabilidad de Weibull, utilizada para describir el comportamiento de la energía eólica. Al transformar el problema en una forma determinística mediante programación matemática, se facilita su resolución. SO permite modelar la incertidumbre y evaluar soluciones potenciales basadas en su desempeño esperado. Estos tipos de problemas pueden formularse como:

$$\min_{x \in X} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]$$

donde x es la variable de decisión, ξ es un parámetro incierto que toma valores dependiendo de una PDF conocida, y $\mathbb{P}$ es una PDF conocida para el parámetro ξ. Como ilustración, [58; 32; 33] modelan sistemas de gestión de energía utilizando un enfoque estocástico para tratar con las incertidumbres de generación y demanda. Sin embargo, resolver problemas de optimización estocástica también puede ser desafiante debido a la complejidad matemática y computacional asociada con la incorporación de la incertidumbre, realizar cálculos estadísticos y la dificultad añadida de integrar numerosas microredes para su análisis.

Por otro lado, la optimización robusta se centra en encontrar soluciones óptimas para problemas donde la información disponible es incompleta o incierta, pero se pueden determinar un conjunto de escenarios posibles y sus probabilidades asociadas. Busca garantizar la estabilidad y el rendimiento satisfactorio incluso en los escenarios más desfavorables mediante la incorporación de restricciones adicionales en el modelo de optimización que limitan el desempeño en el peor caso[63]. Este enfoque conservador minimiza el peor resultado posible en lugar de maximizar el resultado esperado. Es ventajoso en situaciones donde la incertidumbre es alta o los riesgos son elevados, y donde se debe garantizar la seguridad y la estabilidad del sistema. Estos tipos de problemas pueden formularse como[29]:

$$\min_{x \in X} \quad \max_{\xi \in \mathcal{U}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

El conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$ representa diferentes escenarios para el parámetro ξ y permite una solución factible. Sin embargo, este enfoque puede ser excesivamente conservador al no considerar la probabilidad de los escenarios. La optimización robusta puede ignorar información probabilística valiosa y puede ser computacionalmente desafiante para problemas adaptativos. Por otro lado, la optimización estocástica puede requerir demasiada información sobre la distribución de probabilidad. Ambos enfoques pueden resultar en soluciones sesgadas o de bajo rendimiento. Además, la optimización robusta y los programas estocásticos pueden implicar integraciones de alta dimensionalidad, que típicamente son intratables. Es necesario encontrar una manera de aprovechar la alta calidad del estimador $\hat{\mathbb{P}}_i$, sin sobreajustar la solución a una instancia particular de $\mathbf{w}$. Asimismo, debe reconocerse que la distribución$\mathbb{P}$ se encuentra significativamente cerca de la estimada, es decir, ambas comparten muchas similitudes.

La Optimización Robusta Distribucional (DRO) tiene como objetivo encontrar una solución óptima que pueda desempeñarse bien incluso en el peor de los casos dentro de un conjunto de ambigüedad cuyos elementos son distribuciones posibles. Este conjunto de ambigüedad distribucional ayuda a superar la dificultad de estimar

una distribución subyacente y el error derivado de la dependencia ingenua de un solo modelo probabilístico en la optimización estocástica (SO), así como la conservaduría de ignorar información estadística en la optimización robusta (RO). Adoptando un enfoque de peor caso, DRO regulariza el problema de optimización y mitiga la brecha de error característica asociada con SO. Los problemas de DRO pueden formularse como:

$$\min_{x \in X} \quad \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})].$$

A diferencia de SO, DRO se basa en supuestos más débiles con respecto a la distribución de probabilidad precisa de variables inciertas, como la salida de generadores distribuidos (DG). DRO utiliza propiedades estadísticas conocidas, como momentos o desviaciones acotadas de una distribución de referencia, para crear un conjunto de ambigüedad y tomar decisiones. El conjunto de ambigüedad es una familia de distribuciones de probabilidad que comparten cierta información estadística. Dado que el método DRO utiliza información parcial sobre la distribución de los datos, se puede considerar que ofrece una solución conservadora situada entre la Optimización Robusta (RO) y la Programación Estocástica (SO) [47].

Modelar las incertidumbres a través de un enfoque determinista implica estar completamente seguro sobre el valor del parámetro incierto. En contraste, SO permite modelar las incertidumbres al determinar una función de densidad de probabilidad. Esto significa que SO captura una gama de configuraciones de parámetros posibles, expresando el conjunto de incertidumbres como un poliedro azul. Por lo tanto, en el caso de RO, la modelización de las incertidumbres se realiza considerando un conjunto de valores de parámetros representados por un poliedro azul, en lugar de definir explícitamente una distribución de probabilidad como en SO. Este enfoque permite a RO manejar parámetros inciertos de manera que garantice un cierto nivel de desempeño bajo el peor de todos los escenarios posibles dentro del conjunto de incertidumbre.

Por otro lado, DRO adopta un enfoque diferente. DRO representa el conjunto de ambigüedad como un poliedro azul que contiene un número infinito de distribuciones de probabilidad. A diferencia de SO, que modela directamente la función de densidad de probabilidad, DRO se centra en la robustez contra todas las distribuciones posibles dentro del conjunto de ambigüedad.

En el contexto de la optimización bajo incertidumbre, un desafío fundamental es la caracterización precisa de la distribución de probabilidad subyacente. En la práctica, rara vez se conoce la distribución exacta del elemento aleatorio en cuestión. En su lugar, se dispone de información sobre sus momentos estadísticos, como la media, la varianza o la covarianza. Estos momentos pueden estimarse a partir de muestras independientes e idénticamente distribuidas (iid) extraídas de la distribución desconocida, en un marco de modelado basado en datos.

La importancia de la información de los momentos radica en su capacidad para proporcionar una caracterización básica pero fundamental de una variable aleatoria. Desde una perspectiva matemática, esto nos lleva a considerar el problema de los momentos, una cuestión que se remonta al final del siglo XIX y que ha influido en diversas áreas como la teoría de la probabilidad, la optimización y la estadística.

El problema de los momentos plantea la siguiente interrogante: dada una variable aleatoria ξ con distribución de probabilidad $\mathbb{P}$, si todos sus momentos $m^k := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi^k]$, para $k = 1, 2, \ldots$, son finitos y conocidos, ¿es posible determinar de manera única la distribución $\mathbb{P}$ mediante la secuencia de momentos $\{m^k\}_{k=1}^{\infty}$?

En algunos casos, la distribución de probabilidad se determina únicamente por sus momentos, lo que se conoce como distribución determinada por los momentos (o $M - det$). En estas situaciones, la probabilidad $\mathbb{P}$ está completamente caracterizada por la secuencia de momentos, lo que sugiere que si dos secuencias de momentos son similares, sus distribuciones correspondientes también deberían serlo. Sin embargo, en otros casos, no es posible determinar la distribución de manera única solo a partir de sus momentos, lo que implica que pueden existir múltiples distribuciones que comparten la misma secuencia de momentos. Por ello, es

esencial realizar un análisis desde una perspectiva métrica, evaluando la "*distancia*" entre funciones de densidad de probabilidad similares.

En la optimización robusta distribucional (DRO), la distancia de Wasserstein se utiliza para medir la discrepancia entre la distribución empírica de los datos observados y un conjunto de distribuciones candidatas que representan posibles incertidumbres en la distribución verdadera. Al acotar la distancia entre la distribución empírica y estas distribuciones candidatas, DRO busca soluciones que sean robustas ante la incertidumbre inherente a las distribuciones subyacentes.

Este documento se centra en la metodología de Optimización Robusta Distribucional (DRO) con énfasis en la distancia de Wasserstein, aplicándola a la optimización de la operación de sistemas de múltiples microrredes. Esta métrica resulta ser una herramienta poderosa para cuantificar la distancia entre distribuciones de probabilidad, ofreciendo ventajas significativas en contextos de optimización bajo incertidumbre.

En la segunda sección, se presentarán los fundamentos de conjuntos convexos, optimización y dualidad necesarios para comprender en detalle la reformulación del enfoque DRO con la distancia de Wasserstein, destacando sus propiedades y ventajas en comparación con otros métodos, tema que se abordará en la tercera sección. La cuarta sección se dedicará a la modelación del despacho económico de energía en microrredes, utilizando el enfoque DRO-W para resolver el despacho económico de estos sistemas. Además, se realizará una verificación comparativa con las teorías de optimización estocástica y robusta, proporcionando una visión integral sobre la aplicación de estas técnicas avanzadas de optimización en sistemas de energía complejos.

1.1 Objetivos

Diseñar un Algoritmo Robusto de Gestión de energía para sistemas de distribución con transacciones de energía entre microrredes con participación de energías renovables.

1.1.1 Objetivos específicos

- Modelar un sistema de distribución conectando varías microrredes y generadores renovables.
- Diseñar un algoritmo de gestión de energía robusto para sistemas de distribución con transacciones de energía entre microrredes.
- Simular múltiples escenarios de operación de sistemas de potencia con transacciones de energía entre microrredes.

1.2 Estudios previos y contribuciones en el campo de la optimización

La optimización de sistemas de energía, particularmente en el ámbito de las microrredes, enfrenta desafíos significativos debido a la incertidumbre inherente en diversos parámetros. Esta incertidumbre puede influir de manera crucial en la toma de decisiones, afectando la eficiencia y la confiabilidad de la operación de estos sistemas. A lo largo de mi trayectoria académica, he participado en investigaciones que abordan estas complejidades, contribuyendo a la literatura mediante publicaciones que exploran en profundidad los conceptos de optimización robusta, estocástica y robusta distribucional. En este capítulo, se presenta un

resumen de mis aportes, destacando los objetivos, metodologías y resultados más significativos de cada una de estas investigaciones.

1.2.1 Capitulo en un libro: Optimización de múltiples microrredes en sistemas de distribución [2023], Editorial UD (en proceso de publicación)

Abstract

En este capítulo se examinan los conceptos fundamentales de la optimización en los sistemas de distribución con múltiples microrredes acopladas al sistema. Se hace una revisión del estado del arte y se presentan las diferentes perspectivas sobre el tema, incluyendo técnicas de optimización que abordan la incertidumbre, específicamente la optimización robusta distribucional (DRO), mediante la reformulación basada en la métrica de Wasserstein. Adicionalmente, se menciona el impacto de la variación de los parámetros de la distancia Wasserstein y de la forma de la función de densidad de probabilidad empírica en la respuesta óptima de un problema de optimización bajo DRO.

Contribuciones clave

Este capítulo presenta contribuciones clave en el ámbito de las técnicas de optimización robusta, con un enfoque específico en su aplicación a microrredes. Una de las aportaciones más destacadas es la introducción de la métrica de Wasserstein, que ofrece un enfoque innovador para abordar la incertidumbre en la gestión de energía. Los resultados obtenidos subrayan cómo las variaciones en los parámetros pueden influir significativamente en la solución óptima de problemas complejos.

Asimismo, se identifica que el camino hacia redes más inteligentes enfrenta desafíos considerables en la gestión óptima de energía, especialmente al integrar recursos de energía distribuidos (DER) heterogéneos. Con la creciente cantidad de dispositivos accediendo a las redes de comunicación para negociar energía en tiempo real, la dependencia de un ente de control centralizado resulta inviable. En respuesta a esta necesidad, se propone la implementación de controladores distribuidos jerárquicos en sistemas de redes de microredes (NMG), los cuales operarán en diferentes escalas de tiempo y con un tráfico de información mínimo, asegurando así una operación segura y confiable en tiempo real.

Además, se plantea que, más allá de los DER tradicionales, el nuevo sistema multienergía tiene el potencial de suministrar diversas formas de energía a las NMG. Un aspecto crucial a considerar en la implementación futura de estas redes es la incertidumbre en todos los niveles, desde el modelado incompleto hasta las predicciones de carga variable. Para enfrentar estos desafíos, se enfatiza la necesidad de desarrollar métodos de gestión de energía que sean conscientes del riesgo, garantizando así una respuesta óptima ante la incertidumbre inherente a los sistemas energéticos.

1.2.2 Resumen en conferencia WEA 2023: Distributionally Robust Optimization for Networked Microgrids: An Overview

Abstract

An overview of the use of distributed robust optimization (DRO) to solve optimization problems with highly uncertain parameters related to microgrids and networked microgrids is presented. Microgrids are small-scale electrical systems that integrate distributed generation sources, loads, and storage devices, and can operate in isolation or connected to the main grid. Optimizing microgrids involves determining the optimal operation, design, and planning of these systems, considering multiple objectives and constraints. However, many of the parameters involved in these problems are uncertain, such as power demand, electricity prices, and renewable generation. DRO is a methodology that allows incorporating uncertainty into the optimization process, ensuring feasible and robust solutions under different scenarios. This paper introduces the main characteristics, advantages, and challenges of DRO, as well as its applications in different optimization problems related to microgrids.

Contribuciones clave

El documento realiza contribuciones clave al proporcionar una visión integral sobre las aplicaciones de la optimización robusta distribuida (DRO) en microrredes interconectadas, abordando las incertidumbres asociadas con la generación intermitente de energías renovables y las fluctuaciones en la demanda. Además, el artículo explora cómo la planificación de la instalación y la operación de estas microrredes pueden optimizar costos y maximizar beneficios a corto, mediano y largo plazo. También se propone un enfoque para seleccionar el radio de Wasserstein, lo que permite un análisis más detallado de los problemas de optimización. En conjunto, estas contribuciones establecen un marco sólido para la gestión eficiente y sostenible de la energía en entornos con incertidumbre.

1.2.3 Conferencia Colombiana de Matematicas Aplicadas e Industriales (MAPI III- 2024): Analyzing the Influence of Key Parameters Variation in Distributionally Robust Optimization with Wasserstein Distance: A Networked Microgrids Perspective

Resumen

La interconexión de múltiples microrredes permite compartir energía, promover la energía renovable y reducir costos asociados a la generación fósil. Además, mejora la estabilidad del sistema y facilita el autoconsumo, ya que las MGs pueden intercambiar electricidad y coordinar sus operaciones. Este modelo mejora la fiabilidad y la resiliencia energética, permitiendo a las MGs aislarse y restablecer el suministro tras interrupciones locales o desastres. Sin embargo, las incertidumbres, como la variabilidad en la generación renovable y la demanda, complican su gestión. Un sistema de gestión energética confiable es esencial para optimizar costos, integrar energía renovable y mejorar la seguridad y el rendimiento en las MGs interconectadas.

2 Fundamentos de optimización

En las últimas décadas, la transformación del sector energético hacia modelos más sostenibles y descentralizados ha planteado nuevos desafíos en la operación y planificación de sistemas eléctricos. La integración de fuentes de energía renovable, la gestión de la demanda y la optimización de recursos distribuidos requieren herramientas analíticas robustas capaces de manejar la complejidad y la incertidumbre inherentes a estos sistemas. Es en este contexto donde la optimización convexa emerge como una herramienta indispensable.

La optimización constituye un pilar fundamental en el análisis y diseño de sistemas complejos, particularmente en el ámbito de la ingeniería eléctrica y los sistemas de gestión de energía. Este capítulo establece los fundamentos necesarios para comprender y aplicar los métodos de optimización convexa en el contexto de las redes eléctricas inteligentes y la gestión eficiente de recursos energéticos.

Este capítulo se organiza en tres secciones principales. La primera presenta los conceptos fundamentales de espacios y funciones convexas, estableciendo las propiedades matemáticas que sustentan la teoría de la optimización convexa. La segunda sección aborda las nociones básicas de optimización, incluyendo la formulación de problemas, la existencia de soluciones y las condiciones de optimalidad. En la tercera sección, se explora la teoría de la dualidad, un concepto crucial que ofrece valiosos insights y métodos alternativos para resolver problemas de optimización complejos. Finalmente, se aborda la optimización robusta y se discuten los diferentes conjuntos de incertidumbre que se utilizan para enfrentar problemas robustos.

El objetivo de este capítulo es proporcionar al lector una base sólida en optimización, preparándolo para enfrentar los desafíos más avanzados que se presentarán en capítulos posteriores. Se busca no solo transmitir el rigor matemático necesario, sino también desarrollar la intuición y el entendimiento práctico requeridos para aplicar estas herramientas en escenarios reales de ingeniería eléctrica y gestión energética.

2.1 Funciones convexas y espacios relacionados

En la teoría de la optimización, los conceptos de convexidad proporcionan una base sólida para formular y resolver problemas de forma eficiente. Tanto los conjuntos como las funciones convexas permiten garantizar la existencia de soluciones óptimas globales y simplificar la búsqueda de estas. A continuación, se presentan las definiciones fundamentales, estableciendo relaciones claras entre ellas.

Definición 2.1.1 ***Conjunto Convexo*** *Un conjunto C ,descrito como $C \subseteq \mathbb{R}^n$,es convexo si el segmento de línea entre cualquier par de puntos en C se mantiene en C, es decir, para cualesquiera x_1 y x_2 en C y cualquier θ con $0 \leq \theta \leq 1$, se cumple que:*

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \tag{2-1}$$

Este concepto es fundamental para formular restricciones factibles en problemas de optimización, ya que asegura que cualquier combinación ponderada de puntos factibles pertenezca igualmente al conjunto factible.

Definición 2.1.2 ***Estructuras convexas*** *Sea $a \in \mathbb{R}^n$ diferente al origen, $b \in \mathbb{R}$, se pueden definir las siguientes estructuras*

- *Hiperplano:* $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a^\top x = b\}$
- *Semiespacio:* $M := \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\right\}$
- *Poliedro:* $P := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a_j^\top x \leq b_j\}$ *con* $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$ *y* $b_1, b_2, ..., b_m \in \mathbb{R}$.
- *Cono:* $K := \{x \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^n : \quad \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + ...\theta_k x_k \in C\}$
- *Cono Dual:* $K^* := \{y : x^\top y \geq 0 \quad \forall \quad x \in K\}$ *esta estructura conserva su convexidad a pesar que el cono K no sea convexo*

Estas estructuras son esenciales para definir regiones factibles y juegan un papel crucial en la formulación de restricciones, siendo los poliedros y semiespacios particularmente comunes en problemas de programación lineal.

Definición 2.1.3 ***Función afín*** *Una función $f : \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^m$ es afín si esta es la suma de una función lineal y una constante, es decir que esta tiene la forma:*

$$f(x) = Ax + b \tag{2-2}$$

en donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. suponiendo que C es un conjunto convexo y $f : \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^m$es afín entonces la imagen de C bajo la función f es:

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

Las funciones afines son tanto convexas como cóncavas, ya que satisfacen una igualdad en la condición de convexidad. La imagen de un conjunto convexo bajo una función afín también es convexa, lo que facilita la propagación de la convexidad en problemas más complejos.

Definición 2.1.4 ***Función convexa*** *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y $f : C \to \mathbb{R}$ es convexa si* $\boldsymbol{dom} f$ *es un conjunto convexo y si para todo $x, y \in$* $\boldsymbol{dom} f$ *y θ con $0 \leq \theta \leq 1$, se obtiene:*

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y) \tag{2-3}$$

una función es estrictamente convexa si las desigualdad permanece en (2-3) *en los momentos en que $x \neq y$ y $0 \leq \theta \leq 1$. Se puede afirmar que f es concava si $-f$ es convexa, y estrictamente concava si $-f$ es estrictamente convexa.*

Por otro lado una función afín es aquella que satisface una igualdad en (2-3), es decir que todas las funciones afines (incluidas las lineales) son convexas y concavas. por lo que tambien se puede afirmar que cualquier función que sea convexa y concava es afín.

Nota : En problemas de optimización cuando la función de costo es convexa, todos los minimos locales tambien son globales.

En el ámbito del estudio de la convexidad de funciones, los conjuntos convexos juegan un papel crucial. Estos conjuntos son esenciales no solo por su capacidad para proporcionar una base sólida en la formulación teórica, sino también por su relación intrínseca con el concepto de epígrafo de una función. La estructura y las propiedades de estos conjuntos convexos permiten una formulación exhaustiva y rigurosa de la teoría de la convexidad.

Definición 2.1.5 ***Epígrafo de una función*** *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^n f : X \to [-\infty, \infty]$ *una función, entonces se define:*

$$epi(f) := \{(x, w) : x \in X, w \in \mathbb{R} \quad tal\ que \quad w \geq f(x)\}$$

$$dom(f) := \{x \in X : \exists \quad w \in \mathbb{R} \quad tal\ que \quad (x, w) \in epi(f)\}$$

El análisis detallado de los conjuntos convexos y sus propiedades no solo enriquece la comprensión teórica, sino que también tiene implicaciones profundas en la teoría de optimización convexa. Esta teoría, a su vez, se traduce en aplicaciones prácticas que abarcan diversas disciplinas, desde la ingeniería hasta la economía. Por tanto, el estudio de estos conjuntos no solo contribuye a la teoría matemática, sino que también facilita la resolución de problemas de optimización complejos en contextos aplicados, demostrando la relevancia y la utilidad de los conceptos fundamentales de la convexidad en escenarios prácticos.

2.2 Nociones básicas de optimización

Al abordar problemas complejos de optimización en diversas áreas, la optimización convexa se revela como una herramienta invaluable. Esta rama de la teoría de la optimización se fundamenta en el uso de funciones y conjuntos convexos, permitiendo simplificar y resolver problemas difíciles de manera más eficiente. En la sección anterior, se definieron conceptos clave relacionados con conjuntos y funciones convexas. A continuación, se explorarán los principios fundamentales de la optimización convexa, centrándonos en aspectos cruciales que facilitarán la resolución efectiva de estos problemas.

Se tratarán temas esenciales como la existencia de soluciones y la viabilidad de las mismas dentro del marco de la optimización convexa. Además, se discutirá la relevancia de las soluciones factibles y otros conceptos fundamentales que permiten aplicar la teoría a situaciones del mundo real. Al comprender estos elementos, se posibilita la construcción de modelos más precisos y eficientes, lo cual es esencial para la toma de decisiones informadas en contextos donde los recursos y las condiciones son variables.

En el ámbito de la optimización, se considera una función f que representa el proceso en función de ciertos parámetros y el retorno esperado, la cual deseamos minimizar. Esta función se conoce como función objetivo. Junto con la definición de la función objetivo, es crucial establecer las restricciones que afectan a los parámetros. El conjunto X representa dichas restricciones y define el dominio en el cual se busca optimizar la función f. En este sentido, X establece los límites y condiciones bajo las cuales se evaluará la función objetivo.

El problema de optimización convexa puede formularse como sigue:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & f(x) \\
s.t \quad & h_i(x) = 0 \quad \forall \quad i = 1, \ldots, m \\
& g_j(x) \geq 0 \quad \forall \quad j = 1, \ldots, p \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

Definición 2.2.1 *Para un problema de optimización (P) con función objetivo f y conjunto de restricciones X, un punto x se considera factible si $x \in X \cap dom(f)$. En términos generales, un problema de optimización se considera factible si $X \cap dom(f) \neq \varnothing$. Esta definición establece la condición necesaria para que el problema cuente con al menos un punto que cumpla todas las restricciones y se encuentre dentro del dominio de la función objetivo.*

La exploración de la optimización convexa comienza con la comprensión de lo que constituye un punto factible en el contexto de un problema de optimización. La definición de un punto factible es fundamental, ya que permite determinar si una solución está dentro de los límites y condiciones definidos por el conjunto de restricciones X y el dominio de la función objetivo f. Esta definición no solo establece una base sólida para evaluar la viabilidad del problema, sino que también proporciona un marco crítico para la búsqueda de soluciones efectivas. Al asegurar que existe al menos un punto que satisface todas las restricciones, se establece la posibilidad de que el problema tenga una solución, lo que abre la puerta a un análisis más profundo sobre la naturaleza de estas soluciones y su relación con la función objetivo.

Definición 2.2.2 *Un problema de optimización (P) con función objetivo f y un conjunto de restricciones X es factible si*

$$\inf_{x \in X} f(x) < \infty.$$

En este contexto, un punto x se considera una solución al problema si $x \in dom(f) \cap X$ y $f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$. Es importante notar que, de acuerdo con la definición anterior, no se puede inferir que las soluciones sean únicas.

Esta definición establece un criterio claro para determinar si existe al menos una solución viable, garantizando así que el problema no sea trivial. Al identificar que un punto x es una solución si pertenece al dominio de la función objetivo f y al conjunto de restricciones X, se facilita la búsqueda de soluciones efectivas. Además, la aclaración de que no se puede inferir la unicidad de las soluciones resalta la complejidad inherente a muchos problemas, permitiendo así un enfoque más flexible en la selección de la mejor solución. Esta definición también sienta las bases para análisis adicionales, como el análisis de sensibilidad, y tiene relevancia en aplicaciones prácticas en diversas disciplinas, asegurando que los problemas formulados sean aplicables a situaciones reales donde se requieren decisiones informadas.

Definición 2.2.3 *Sea (P) un problema de optimización y $x^* \in X$, donde X es el conjunto de restricciones del problema. Decimos que x^* es un mínimo local si existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(y)$ para todo $y \in X$ que satisface $d(x^*, y) < \epsilon$.*

Dado que el objetivo principal en los problemas de optimización es encontrar un mínimo global, es fundamental considerar el siguiente teorema, que aborda problemas con funciones objetivo convexas.

Esta propiedad permite identificar soluciones que, aunque no necesariamente sean globales, representan puntos donde la función objetivo no presenta mejoras en un vecindario específico. Esto es particularmente relevante en problemas de optimización complejos, donde encontrar un mínimo global puede ser computacionalmente difícil. Al definir un punto x^* como un mínimo local, se establece un marco para evaluar soluciones en función de su vecindad. Sin embargo, el desafío radica en que múltiples mínimos locales pueden existir en problemas no convexos, lo que complica la búsqueda de una solución óptima global. Por lo tanto, el entendimiento de esta definición es esencial, especialmente al considerar teoremas relacionados con funciones objetivo convexas, que garantizan que un mínimo local es también un mínimo global, simplificando significativamente el proceso de optimización.

Teorema 2.2.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ una función convexa y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Si existe un punto $x^* \in X$ tal que $f(x^*)$ es un mínimo local, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *x^* es una solución al problema de optimización, es decir, $x^* \in \arg\min_{x \in X} f(x)$.*
2. *Si f es estrictamente convexa, entonces x^* es la única solución. Es decir, $x^* = \arg\min_{x \in X} f(x)$.*

El teorema sobre los mínimos locales de funciones convexas es fundamental en la teoría de la optimización, ya que establece una conexión clara entre la localización de soluciones y la optimalidad global. Específicamente, garantiza que si un punto x^* es un mínimo local dentro de un conjunto convexo X y la función objetivo f es convexa, entonces x^* es, de hecho, una solución óptima al problema de optimización. Este resultado se vuelve aún más potente en el caso de funciones estrictamente convexas, donde se asegura la unicidad de la solución. Así, el teorema no solo simplifica el proceso de búsqueda de soluciones óptimas, sino que también refuerza la relevancia de trabajar con funciones y conjuntos convexos en la optimización.

A medida que se profundiza en la optimización, surge una conexión natural con la teoría de la dualidad. Esta teoría complementa la optimización primal al proporcionar una perspectiva alternativa sobre los problemas de optimización, facilitando el análisis de la relación entre soluciones primales y duales. En el contexto de la convexidad, la dualidad permite abordar problemas complejos desde diferentes ángulos, optimizando no solo la función objetivo, sino también las restricciones y condiciones impuestas por el problema. Así, la teoría de la dualidad se convierte en una herramienta esencial que enriquecerá la comprensión y resolución de problemas de optimización en general.

2.3 Teoría de la dualidad en optimización convexa

En la optimización convexa, la teoría de la dualidad ofrece una perspectiva diferente para resolver problemas complejos. Dado un problema de optimización definido por una función objetivo f y un conjunto de restricciones X, la dualidad permite formular un problema asociado, denominado problema dual, que proporciona un enfoque diferente para abordar el problema original.

En esta sección, exploraremos los conceptos clave de la dualidad, incluyendo la formulación del problema dual y las condiciones necesarias para asegurar la igualdad entre las soluciones primal y dual. Esta comprensión nos permitirá aplicar la dualidad para mejorar la eficiencia y efectividad en la resolución de problemas de optimización convexa.

Definición 2.3.1 ***Función Dual de Lagrange*** *Dado un problema de optimización primal de la forma:*

$$
\begin{aligned}
(P)\,\text{mín} \quad & f(x) \\
s.t \quad & h_i(x) = 0 \quad \forall \quad i = 1, ..., m \\
& g_j(x) \geq 0 \quad \forall \quad j = 1, ..., p \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función objetivo convexa, $g_i(x)$ son funciones de desigualdad y $h_j(x)$ son funciones de igualdad, la función dual de Lagrange se define como:

$$
L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_j h_j(x),
$$

donde $\lambda_i \geq 0$ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad $g_i(x) \leq 0$, y μ_j son los multiplicadores asociados a las restricciones de igualdad $h_j(x) = 0$.

La función dual de Lagrange combina la función objetivo del problema primal con las restricciones ponderadas por los multiplicadores de Lagrange, proporcionando una forma de analizar y resolver el problema dual asociado.

Definición 2.3.2 ***Problema Dual de Lagrange*** *Dado un problema de optimización primal de la forma $\text{mín}_{x \in X} f(x)$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función objetivo convexa y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, podemos formular el problema dual asociado de la siguiente manera.*

Supongamos que el problema primal está sujeto a un conjunto de restricciones en forma estándar, que incluye restricciones de igualdad y desigualdad. En general, el problema primal puede ser expresado como:

$$
\begin{aligned}
(P)\,\text{mín} \quad & f(x) \\
s.t \quad & h_i(x) = 0 \quad \forall \quad i = 1, ..., m \\
& g_j(x) \geq 0 \quad \forall \quad j = 1, ..., p \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

El problema dual asociado se formula como:

$$
(D)\,\text{máx} \quad L(x, \lambda, \mu) \tag{2-4}
$$

$$
s.t \quad \lambda_i \geq 0 \tag{2-5}
$$

donde λ_i son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de desigualdad $g_i(x) \leq 0$ y μ_j son los multiplicadores asociados a las restricciones de igualdad $h_j(x) = 0$.

El problema dual busca maximizar una función que se deriva de las restricciones del problema primal y de la función objetivo mediante los multiplicadores de Lagrange. La relación entre el problema primal y su dual ofrece una herramienta poderosa para analizar y resolver problemas de optimización, y bajo ciertas condiciones, puede llevar a la igualdad entre los valores óptimos de ambos problemas, conocido como la propiedad de optimalidad fuerte.

Definición 2.3.3 ***Dualidad Débil*** *y* ***Dualidad Fuerte***

Dado un problema de optimización primal de la forma $\min_{x \in X} f(x)$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función objetivo convexa y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, y su problema dual es 2-4, entonces es correcto afirmar que:

- ***Dualidad Débil:*** *Se dice que la dualidad débil se cumple si el valor óptimo del problema dual proporciona una cota inferior al valor óptimo del problema primal. Formalmente, si (P) tiene un valor óptimo finito y (D) tiene un valor óptimo finito, entonces se cumple la relación:*

  $$(D) \leq (P).$$

  Es decir, el valor máximo alcanzado por el problema dual es siempre menor o igual al valor mínimo alcanzado por el problema primal.

- ***Dualidad Fuerte:*** *Se dice que la dualidad fuerte se cumple si los valores óptimos del problema primal y del problema dual son iguales. Formalmente, si (P) y (D) tienen valores óptimos finitos, entonces:*

  $$(D) = (P).$$

  La dualidad fuerte implica que no solo el valor óptimo del problema dual es una cota inferior del valor óptimo del problema primal, sino que ambos valores óptimos coinciden.

2.4 Optimización robusta y conjuntos de incertidumbre

La optimización robusta es una metodología para abordar problemas de decisión bajo incertidumbre, buscando minimizar el costo en el peor escenario posible. El modelo básico se expresa como:

$$\begin{aligned} \min_{x} \max_{c \in \mathscr{C}} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \forall (A, b) \in \mathscr{U}, \end{aligned} \tag{2-6}$$

donde $\mathscr{C}$ y $\mathscr{U}$ son conjuntos de incertidumbre para los parámetros c y (A, b), respectivamente.

Una característica clave es la reformulación del problema, transformando la función objetivo del peor caso en una restricción adicional. Esto se logra introduciendo una nueva variable t, resultando en un problema con objetivo determinista y restricciones robustas.

Los conjuntos de incertidumbre juegan un papel crucial en esta reformulación. Algunos tipos comunes incluyen:

- Conjunto Poliédrico: Cierre convexo de escenarios finitos.
- Conjunto de Caja: $\mathscr{U}_{box} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \exists \xi \text{ s.t. } \boldsymbol{a} = \overline{a} + \boldsymbol{\Delta\xi}, ||\boldsymbol{\xi}||_\infty \leq 1\}$
- Conjunto Presupuestario: $\mathscr{U}_{budget} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \exists \xi \text{ s.t. } \boldsymbol{a} = \overline{a} + \boldsymbol{\Delta\xi}, ||\boldsymbol{\xi}||_\infty \leq 1, \sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq r\}$
- Conjunto Elipsoidal: $\mathscr{U}_{ellip} = \{\boldsymbol{a} : \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a} \leq 1\}$

Estos conjuntos permiten modelar diferentes tipos de incertidumbre y facilitan la reformulación de problemas robustos en formas tratables computacionalmente, como restricciones cónicas de segundo orden o restricciones positivas semidefinidas.

Definición 2.4.1 ***Función conjugada*** *La conjugada de una función extendida a traves de los numeros enteros $l(\xi)$ en $\mathbb{R}$ es una función $l^*(z)$ en $\mathbb{R}^m$*

$$l^*(z) = \sup_{\xi} \quad z^\top \xi - l(x)$$

Definición 2.4.2 ***Función de Soporte*** *La Función indicador de un conjunto $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$ es una función $\delta_\Xi(\xi)$ definida como:*

$$\delta_\Xi(\xi) = \begin{cases} 0 & si \quad \xi \in \Xi \\ \infty & si \quad \xi \notin \Xi \end{cases}$$

La función de soporte de $\Xi \subseteq \mathbb{R}^m$, es una función $\sigma_\Xi \in \mathbb{R}^m$ definida como:

$$\sigma_\Xi(z) = \sup_{\xi \in \Xi} z^\top \xi$$

una de sus principales propiedades es que $\delta_\Xi(\xi)^*(z) = \sigma_\Xi(z)$, pero si Ξ es un conjunto cerrado y convexo, entonces la conjugada de la función superior coincide con la función indicadora de Ξ, es decir que $\sigma_\Xi(\xi) = \delta_\Xi(\xi)$

Definición 2.4.3 ***Norma Dual*** *Si $||\cdot||$ es la norma en $\mathbb{R}^m$, entonces la norma dual $||\cdot||_*$ en $\mathbb{R}^m$ es definida como:*

$$||z||_* = \sup_{||\xi|| \leq 1} \quad z^\top \xi$$

Una de las principales propiedades de la norma dual, es que la norma dual de la norma dual, es la norma inicial, es decir $||\cdot||_{**} = ||\cdot||$

La comprensión de los conceptos básicos de optimización, como la convexidad y las estructuras asociadas, es esencial para abordar problemas que involucran incertidumbre. Al enfrentar condiciones del mundo

real, donde las variables pueden fluctuar y no siempre se pueden predecir con certeza, se hace evidente la necesidad de enfoques que manejen esta variabilidad. La optimización convexa ofrece un marco sólido para garantizar la existencia de soluciones óptimas en condiciones bien definidas; sin embargo, muchos problemas de optimización en la práctica se ven afectados por incertidumbres que pueden surgir de variaciones en los datos, los parámetros o las condiciones del entorno. Esta incertidumbre puede invalidar los resultados obtenidos en un contexto determinista, lo que resalta la necesidad de enfoques más robustos, como la optimización robusta distribucional. Este enfoque no solo incorpora distribuciones de probabilidad en la formulación de problemas, sino que también permite modelar la variabilidad inherente en los datos, buscando soluciones óptimas que se mantengan efectivas y viables en diferentes escenarios inciertos. Así, se establece un fundamento crítico para la toma de decisiones informadas en entornos complejos y cambiantes.

3 Optimización robusta distribucional con enfoque en distancia de Wasserstein

En el presente capítulo, se profundizará en la distancia de Wasserstein, un enfoque fundamental para medir la "similitud.^en^tre dos funciones de densidad de probabilidad. Esta distancia, conocida también como distancia de transporte, proporciona una herramienta robusta para cuantificar cómo una distribución de probabilidad puede transformarse en otra, lo que resulta crucial para la modelación analítica de incertidumbres en sistemas complejos. La implementación de esta metodología permite una reformulación analítica de los problemas de optimización, facilitando la integración de variables aleatorias en el modelado de microrredes, tales como la velocidad del viento o la irradiancia en un instante de tiempo. A lo largo de este capítulo, se explorarán detalladamente los fundamentos teóricos de la distancia de Wasserstein y su implementación en la solución de problemas de optimización robusta distribucional (DROW).

Las estrategias comúnmente empleadas para abordar las incertidumbres en diversos problemas pueden clasificarse en tres categorías principales. La primera categoría involucra enfoques de programación estocástica (SO), que asumen que los datos disponibles siguen una distribución de probabilidad específica, como la función de densidad de probabilidad de Weibull, utilizada para describir el comportamiento de la energía eólica. Al transformar el problema en una forma determinística mediante programación matemática, se facilita su resolución. SO permite modelar la incertidumbre y evaluar soluciones potenciales basadas en su desempeño esperado. Estos tipos de problemas pueden formularse como:

$$\min_{x \in X} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})] \tag{3-1}$$

En la formulación de problemas de optimización estocástica, la estructura matemática se fundamenta en variables clave: la variable de decisión x, el parámetro incierto ξ que sigue una función de densidad de probabilidad (PDF) conocida, y $\mathbb{P}$ que representa la PDF asociada a ξ. Esta formulación ha sido aplicada exitosamente en diversos campos, particularmente en sistemas de gestión de energía [58; 32; 33], donde la incertidumbre en la generación y demanda requiere un tratamiento estocástico. No obstante, la implementación de estos modelos presenta desafíos significativos, desde la complejidad matemática inherente a la incorporación de la incertidumbre, hasta las demandas computacionales en el procesamiento estadístico y la integración de sistemas complejos como las microredes.

En este contexto, el Valor en Riesgo Condicional (CVaR) emerge como una medida fundamental para la evaluación de riesgos. Su relevancia radica en su capacidad para proporcionar una evaluación exhaustiva del riesgo, especialmente en escenarios caracterizados por pérdidas extremas. [22] El CVaR complementa al valor en riesgo (VaR) al estimar la pérdida promedio esperada en aquellos casos que superan el umbral establecido

por el VaR. Mientras el VaR determina la pérdida máxima posible en un horizonte temporal específico con un nivel de confianza dado, el CVaR profundiza en el análisis al examinar el comportamiento de las pérdidas en el extremo de la distribución, permitiendo una mejor comprensión del riesgo de cola, elemento crítico en la gestión de carteras.

Definición 3.0.1 (Valor en riesgo y valor en riesgo condicional) *Para una distribución de pérdidas L con función de distribución acumulada F_L, un nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$ y horizonte temporal T:*

El Valor en riesgo se define como:

$$VaR_\alpha(L) = \text{ínf}\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}$$

El valor en riesgo condicional se define como:

$$CVaR_\alpha(L) = \mathbb{E}[L|L > VaR_\alpha(L)]$$

donde L representa la pérdida durante el período de tiempo T.

La incorporación del CVaR en la formulación de problemas de optimización representa un avance significativo en la gestión del riesgo. Esta medida no solo permite una evaluación más precisa y una gestión más efectiva de los riesgos asociados, sino que también facilita el desarrollo de estrategias más robustas frente a la incertidumbre. Al integrar el CVaR en el análisis de riesgo, los tomadores de decisiones obtienen una comprensión más profunda de su exposición al riesgo y pueden identificar medidas de mitigación más adecuadas.

Como extensión natural de este enfoque, la optimización robusta se posiciona como una metodología complementaria, especialmente valiosa en contextos donde la información es incompleta o incierta. Este método se distingue por su capacidad para determinar soluciones óptimas considerando un conjunto de escenarios posibles y sus probabilidades asociadas. La optimización robusta adopta un enfoque conservador, priorizando la estabilidad y el rendimiento satisfactorio en escenarios adversos mediante la incorporación de restricciones que acotan el desempeño en el peor caso [63]. Esta aproximación resulta particularmente ventajosa en situaciones caracterizadas por alta incertidumbre o riesgos elevados, donde la garantía de seguridad y estabilidad del sistema es primordial [29].

$$\min_{x \in X} \quad \max_{\xi \in \mathcal{U}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}). \tag{3-2}$$

El conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$ representa diferentes escenarios para el parámetro ξ y permite una solución factible. Sin embargo, este enfoque puede ser excesivamente conservador al no considerar la probabilidad de los escenarios. La optimización robusta puede ignorar información probabilística valiosa y puede ser computacionalmente desafiante para problemas adaptativos. Por otro lado, la optimización estocástica puede requerir demasiada información sobre la distribución de probabilidad. Ambos enfoques pueden resultar en soluciones sesgadas o de bajo rendimiento. Además, la optimización robusta y los programas estocásticos pueden implicar integraciones de alta dimensionalidad, que típicamente son intratables. Es necesario encontrar una manera de aprovechar la alta calidad del estimador $\hat{\mathbb{P}}_i$ sin sobreajustar la solución a una instancia particular de $\mathbf{w}$. Asimismo, debe reconocerse que $\mathbb{P}$ se encuentra significativamente cerca de la distribución

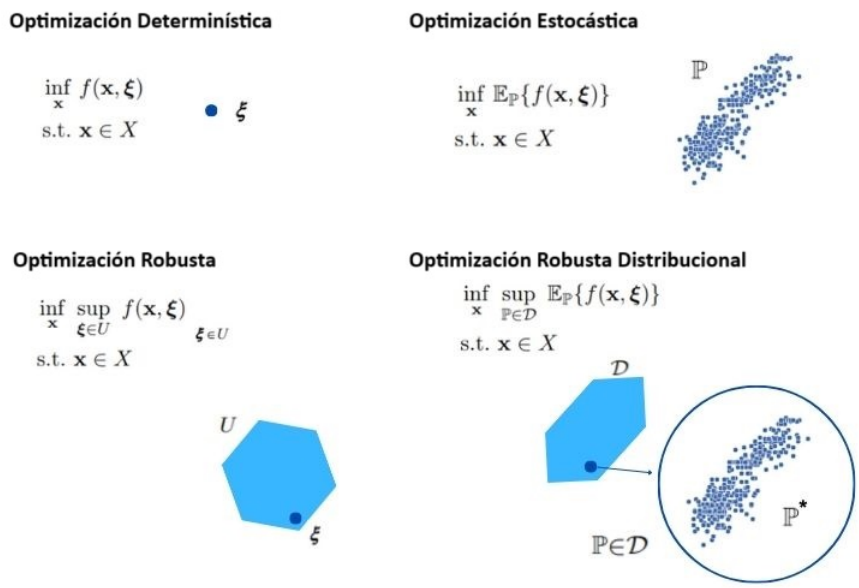


Figura 3-1: Diferentes enfoques de modelamiento de incertidumbres en la optimización análitica

estimada, es decir, ambas comparten muchas similitudes.

La Optimización Robusta Distribucional (DRO) tiene como objetivo encontrar una solución óptima que pueda desempeñarse bien incluso en el peor de los casos dentro de un conjunto de ambigüedad cuyos elementos son distribuciones posibles. Este conjunto de ambigüedad distribucional ayuda a superar la dificultad de estimar una distribución subyacente y el error derivado de la dependencia ingenua de un solo modelo probabilístico en la optimización estocástica (SO), así como la conservaduría de ignorar información estadística en la optimización robusta (RO). Adoptando un enfoque de peor caso, DRO regulariza el problema de optimización y mitiga la brecha de error característica asociada con SO. Los problemas de DRO pueden formularse como:

$$\min_{x \in X} \quad \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]. \tag{3-3}$$

A diferencia de SO, DRO se basa en supuestos más débiles con respecto a la distribución de probabilidad precisa de variables inciertas, como la salida de generadores distribuidos (DG). DRO utiliza propiedades estadísticas conocidas, como momentos o desviaciones acotadas de una distribución de referencia, para crear un conjunto de ambigüedad y tomar decisiones. El conjunto de ambigüedad es una familia de distribuciones de probabilidad que comparten cierta información estadística. Dado que el método DRO utiliza información parcial sobre la distribución de los datos, se puede considerar que ofrece una solución conservadora situada entre la Optimización Robusta (RO) y la Programación Estocástica (SO) [47].

Como se puede observar en la Figura **3-1**, modelar las incertidumbres a través de un enfoque determinista implica estar completamente seguro sobre el valor del parámetro incierto. En contraste, SO permite modelar las incertidumbres al determinar una función de densidad de probabilidad. Esto significa que SO captura

una gama de configuraciones de parámetros posibles, expresando el conjunto de incertidumbres como un poliedro azul. Por lo tanto, en el caso de RO, la modelización de las incertidumbres se realiza considerando un conjunto de valores de parámetros representados por un poliedro azul, en lugar de definir explícitamente una distribución de probabilidad como en SO. Este enfoque permite a RO manejar parámetros inciertos de manera que garantice un cierto nivel de desempeño bajo el peor de todos los escenarios posibles dentro del conjunto de incertidumbre.

Por otro lado, DRO adopta un enfoque diferente. DRO representa el conjunto de ambigüedad como un poliedro azul que contiene un número infinito de distribuciones de probabilidad. A diferencia de SO, que modela directamente la función de densidad de probabilidad, DRO se centra en la robustez contra todas las distribuciones posibles dentro del conjunto de ambigüedad.

En el contexto de la optimización bajo incertidumbre, un desafío fundamental es la caracterización precisa de la distribución de probabilidad subyacente. En la práctica, rara vez se conoce la distribución exacta del elemento aleatorio en cuestión. En su lugar, se dispone de información sobre sus momentos estadísticos, como la media, la varianza o la covarianza. Estos momentos pueden estimarse a partir de muestras independientes e idénticamente distribuidas (iid) extraídas de la distribución desconocida, en un marco de modelado basado en datos.

La importancia de la información de los momentos radica en su capacidad para proporcionar una caracterización básica pero fundamental de una variable aleatoria. Desde una perspectiva matemática, esto nos lleva a considerar el problema de los momentos, una cuestión que se remonta al final del siglo XIX y que ha influido en diversas áreas como la teoría de la probabilidad, la optimización y la estadística.

El problema de los momentos plantea la siguiente interrogante: dada una variable aleatoria ξ con distribución de probabilidad $\mathbb{P}$, si todos sus momentos $m^k := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi^k]$, para $k = 1, 2, \ldots$, son finitos y conocidos, ¿es posible determinar de manera única la distribución $\mathbb{P}$ mediante la secuencia de momentos $\{m^k\}_{k=1}^{\infty}$?

En algunos casos, la distribución de probabilidad se determina únicamente por sus momentos, lo que se conoce como distribución determinada por los momentos (o $M - det$). En estas situaciones, la probabilidad $\mathbb{P}$ está completamente caracterizada por la secuencia de momentos, lo que sugiere que si dos secuencias de momentos son similares, sus distribuciones correspondientes también deberían serlo. Sin embargo, en otros casos, no es posible determinar la distribución de manera única solo a partir de sus momentos, lo que implica que pueden existir múltiples distribuciones que comparten la misma secuencia de momentos. Por ello, es esencial realizar un análisis desde una perspectiva métrica, evaluando la "*distancia*" entre funciones de densidad de probabilidad similares.

Una forma alternativa de analizar los conjuntos de ambigüedad es evaluando la distancia entre funciones de densidad de probabilidad similares. Una metodología efectiva para este propósito es la distancia de Wasserstein, que mide la diferencia entre dos funciones de densidad de probabilidad. En el contexto de la optimización robusta, esta distancia se utiliza para comparar una familia de funciones de densidad de probabilidad con una función de densidad empírica derivada de datos históricos. Esta función empírica puede describirse de diversas maneras; por ejemplo, en un escenario en el que todos los datos históricos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. No obstante, existen otras metodologías que permiten asignar "pesos.ª las probabilidades, basándose en la proximidad entre los puntos de datos. Estas metodologías se consideran estimadores de densidad, entre los cuales destacan los estimadores de kernel.[49]

Definición 3.0.2 (Estimador de densidad de kernel) *El estimador kernel $\hat{f}(x)$ de una función de densidad de probabilidad es:*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

donde K es una función kernel que cumple la condición $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1$, $h > 0$ representa el ancho de ventana, también conocido como parámetro de suavizado o ancho de banda, $X_1, \ldots, X_n$ son las observaciones de la muestra, y n denota el tamaño de la muestra. Es común que la función K sea una función de densidad de probabilidad simétrica, como la densidad normal.

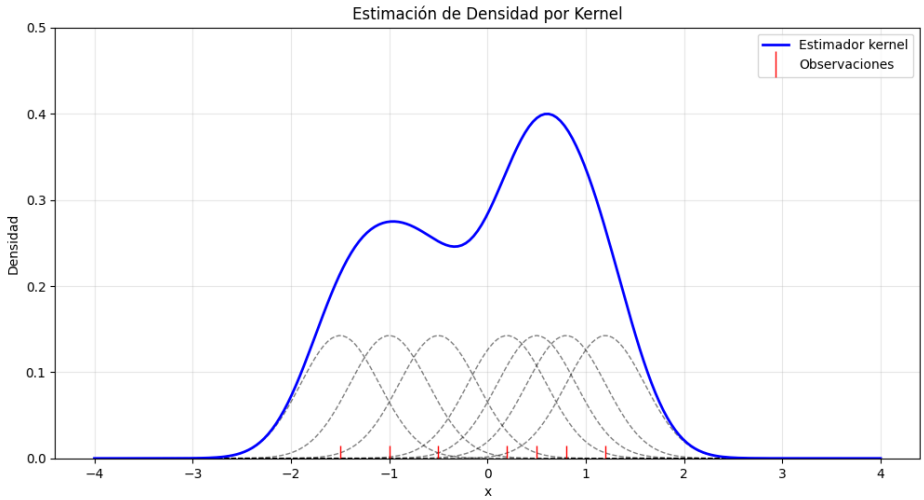


Figura 3-2: Ilustración de estimación de densidad de kernel

La Figura **3-2** ilustra cómo el estimador kernel, mediante la combinación de funciones kernel asociadas a las observaciones de la muestra, genera una estimación suave de la densidad subyacente de los datos. Esta visualización permite apreciar cómo el ancho de banda h influye en la forma de la estimación, destacando la importancia de la elección adecuada de este parámetro en el proceso de estimación.

Estas metodologías, que permiten analizar la distancia entre funciones de densidad, son fundamentales en el ámbito de la optimización robusta. En particular, la distancia de Wasserstein se destaca como una herramienta poderosa para cuantificar la divergencia entre una familia de funciones de densidad de probabilidad y una función empírica derivada de datos históricos. A medida que se explore este concepto, se abordará su definición formal, así como su implementación práctica dentro del marco de la optimización robusta distribucional. Esto facilitará una comprensión más profunda de cómo la distancia de Wasserstein puede contribuir a la gestión de la incertidumbre y a la mejora de la toma de decisiones en sistemas complejos.

3.1 Distancia de Wasserstein

La distancia de Wasserstein es una medida de distancia entre distribuciones de probabilidad, también conocida como la Distancia del Movedor de Tierra (EMD por sus siglas en inglés), debido a que puede ser interpretado como el costo mínimo de la energía necesaria para mover y transformar una monto de "masa de probabilidad"de una función de densidad de probabilidad en otra distribución (véase figura ilustrativa **3-3**), siendo dicho costo como la cantidad de masa por la distancia.

En la optimización robusta distribucional (DRO), la distancia de Wasserstein se utiliza para medir la discrepancia entre la distribución empírica de los datos observados y un conjunto de distribuciones candidatas que representan posibles incertidumbres en la distribución verdadera. Al acotar la distancia entre la distribución empírica y estas distribuciones candidatas, DRO busca soluciones que sean robustas ante la incertidumbre inherente a las distribuciones subyacentes.

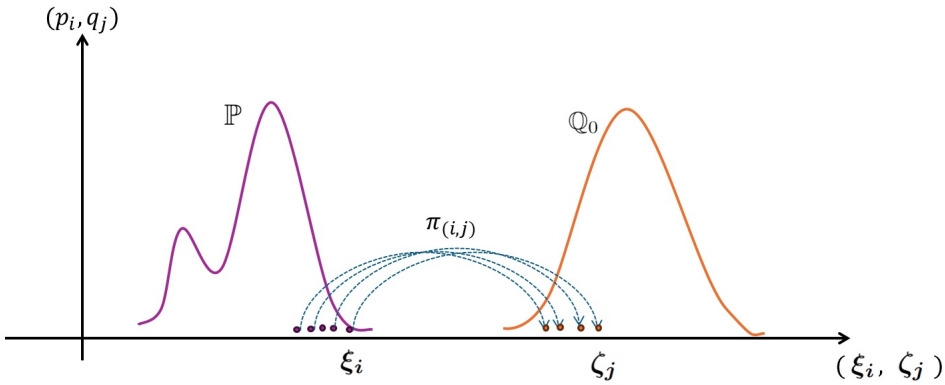


Figura 3-3: Esquema ilustrativo distancia de Wasserstein

Para profundizar en el concepto descrito anteriormente, se puede analizar el problema del transporte óptimo. El objetivo es encontrar un plan de transporte que permita enviar la totalidad del suministro de los proveedores para satisfacer la demanda total de los clientes, minimizando al mismo tiempo el costo total de transporte. Este problema se conoce como el problema de transporte óptimo.

Se considera un escenario con m proveedores y n clientes de un bien determinado. Cada proveedor i dispone de p_i unidades del bien para ofrecer, mientras que cada cliente j demanda q_j unidades del mismo. El costo de transportar una unidad del bien desde el proveedor i hasta el cliente j es c_{ij}, para cada par (i, j) donde $i \in [m] = \{1, \ldots, m\}$ y $j \in [n] = \{1, \ldots, n\}$.

Se define π_{ij} como la cantidad de bienes enviados del proveedor i al cliente j. De este modo, el problema de transporte óptimo se formula como el siguiente programa lineal:

$$d^P(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{\pi} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \pi_{ij} \tag{3-4}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = p_i, i \in [m], \tag{3-5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} = q_j, j \in [n], \tag{3-6}$$

$$\pi_{ij} \geq 0, i \in [m], j \in [n] \tag{3-7}$$

donde (3-6) establece que toda la demanda del consumidor (j) debe ser satisfecha, y (3-5) indica que todo el suministro del proveedor (i) debe ser enviado. El problema de transporte óptimo mencionado anteriormente puede ser formulado en su versión dual, de acuerdo con lo expuesto en el segundo capítulo:

$$d^D(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \max_{u,v} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i u_i + \sum_{j=1}^{n} q_j v_j \tag{3-8}$$

$$\text{s.t.} \quad u_i + v_j \leq c_{ij}, \forall i \in [m], j \in [n] \tag{3-9}$$

donde u_i y v_j son las variables duales del problema (3-4). El principio de la dualidad fuerte sostiene que $d^P(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = d^D(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ si cualquiera de los problemas primales (3-4) y el problema dual (3-8) tiene un óptimo finito.

Ahora suponga que la oferta p y la demanda q en el problema de transporte óptimo son medidas de probabilidad. Más específicamente, en un espacio de muestra Ω en $\mathbb{R}^l$, la oferta $p = (p_1, p_2, ..., p_m)^\top$ es una función de masa de probabilidad sobre m puntos de soporte $\{\xi_1, \xi_2 ..., \xi_m\}$ en Ω, y de manera similar la demanda $q = (q_1, q_2, ..., q_m)^\top$ es otra función de masa de probabilidad sobre n puntos de soporte $\{\zeta_1, \zeta_2 ..., \zeta_n\}$ en Ω.

Asociando las restricciones (3-4) y (3-8) en términos de probabilidad, se tiene que $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 1$ para $i \in [m]$ y $j \in [n]$, siendo $\pi_{ij} \geq 0$ debido a (3-7). Por lo tanto, $\boldsymbol{\pi}$ es una distribución conjunta de probabilidad sobre el producto $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\} \times \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$. De este modo, las restricciones (3-4) y (3-8) indican que las distribuciones marginales de $\boldsymbol{\pi}$ son $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$.

Con respecto al costo de transporte unitario c_{ij} desde i hasta j, este suele depender de la distancia entre las ubicaciones i y j y puede caracterizarse mediante alguna distancia entre los vectores ξ_i y ζ_j en $\mathbb{R}^l$. Así, el costo se puede definir como $c_{ij} = ||\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}||^p$, donde $||\cdot||$ es una norma en $\mathbb{R}^l$ y $p \in [1, +\infty)$.

Finalmente, el problema primal de transporte óptimo puede interpretarse como encontrar una distribución conjunta de probabilidad π cuyas distribuciones marginales sean p y q, de modo que la medida de probabilidad p, apoyada en los valores de soporte $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$, se transporte a través de π hacia la medida de probabilidad q, apoyada en los valores de soporte $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$, de la forma más rentable posible. La $1/p$-ésima potencia del costo óptimo $(d^P(p,q))^{1/p}$, con $c_{ij} = ||\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}||^p$, se denomina distancia de Wasserstein de orden p entre p y q.

Definición 3.1.1 ***Distancia de Wasserstein*** *La distancia de Wasserstein se puede definir para medidas de probabilidad generales $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ en $\mathscr{P}(\mathscr{U})$, distribuciones no necesariamente discretas sobre un soporte finito, donde $\mathscr{U}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^l$. En particular, se define la distancia de Wasserstein de $p-$ésimo orden entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ como:*

$$(W_p(\mathbb{P},\mathbb{Q}))^p = \inf_{\pi \in \mathscr{P}(\mathscr{U}\times\mathscr{U})} \int_{\mathscr{U}\times\mathscr{U}} ||\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}||^p d\pi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) \tag{3-10}$$

$$s.t. \int_{\{\xi\}\times\mathscr{U}} d\pi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\xi}), \forall \xi \in \mathscr{U}. \tag{3-11}$$

$$\int_{\mathscr{U}\times\{\zeta\}} d\pi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) = \mathbb{Q}(\boldsymbol{\zeta}), \forall \zeta \in \mathscr{U}. \tag{3-12}$$

La métrica de Wasserstein se prefiere sobre las métricas de divergencia ϕ por dos razones fundamentales:

- **Riqueza y flexibilidad del conjunto de ambigüedades:** El conjunto de ambigüedades de Wasserstein es notablemente versátil, abarcando tanto distribuciones continuas como discretas de relevancia. En contraste, otras métricas, como la divergencia de Kullback-Leibler (KL), presentan limitaciones significativas. Por ejemplo, la divergencia KL excluye todas las distribuciones continuas cuando la distribución nominal es discreta [15; 17]. Además, al considerar distribuciones dentro de una distancia KL de la empírica, se restringe la asignación de masa de probabilidad fuera del soporte de la distribución empírica, lo cual puede ser una limitación importante en ciertos contextos.

- **Propiedades estadísticas y geométricas superiores:** Los resultados de concentración de medida garantizan que, para un tamaño de muestra suficientemente grande, el conjunto de Wasserstein contiene la verdadera distribución generadora de datos con un alto nivel de confianza [14]. Una característica distintiva de la métrica de Wasserstein es su capacidad para considerar la proximidad entre los puntos de soporte. Esta propiedad geométrica la diferencia de otras métricas, como las divergencias ϕ, que solo tienen en cuenta las probabilidades en estos puntos, sin considerar su ubicación relativa en el espacio de características.

Tras haber explorado la distancia de Wasserstein y su relevancia en la medición de la discrepancia entre distribuciones de probabilidad, es fundamental considerar cómo esta métrica puede aplicarse en contextos de optimización. En particular, la reformulación de problemas de optimización robusta distribucional (DRO) utilizando la distancia de Wasserstein ofrece un enfoque innovador para manejar incertidumbres en sistemas complejos. A continuación, se abordará cómo integrar esta herramienta en la formulación de problemas de optimización, destacando sus ventajas y las implicaciones prácticas que conlleva.

3.2 Reformulación usando métrica de Wasserstein

En la optimización robusta distribucional (DRO), la distancia de Wasserstein se utiliza como una herramienta para medir la discrepancia entre la distribución empírica de los datos observados y un conjunto de distribuciones candidatas que representan posibles incertidumbres en la distribución verdadera adquirida de los datos. Al acotar la distancia entre la distribución empírica y un conjunto de distribuciones candidatas utilizando la métrica de Wasserstein, DRO busca encontrar una solución que sea robusta frente a la incertidumbre en las distribuciones subyacentes a la distribución adquirida de los datos. El problema de maximización interna de (3-3) puede formularse, utilizando la distancia de Wasserstein, como

$$\begin{aligned} &\operatorname*{máx}_{\mathbb{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{U})} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] \\ &\text{s.t.} \quad W_p(\mathbb{P},\mathbb{Q}_0) \leq d \end{aligned} \tag{3-13}$$

Es posible utilizar la distancia de Wasserstein para definir un conjunto de ambigüedad alrededor de una distribución nominal.

$$\mathscr{P}_W(\mathbb{Q}_0, d) := \{\mathbb{P} \in \mathscr{P}_0(\mathscr{U}) : W_p(\mathbb{P},\mathbb{Q}_0) \leq d\} \tag{3-14}$$

donde $\mathbb{Q}_0$ es la distribución hallada a partir de datos históricos, es decir, una distribución empírica, y d es la distancia Wasserstein límite, la cual nos garantiza la cercanía entre las funciones de densidad candidatas $\mathbb{P}$.

El objetivo es realizar una reformulación equivalente del problema de maximización interno (3-13) utilizando la teoría de la dualidad de la optimización convexa. En este estudio, se prestará especial atención al caso en el que $\mathbb{Q}_0$ se define como una medida discreta con soporte finito, es decir, $\mathbb{Q}_0 = \sum_{j=1}^{n} q_j \delta_{\zeta_j}$, donde δ_x es la medida de Dirac. Esta medida es una función que concentra la probabilidad en un punto específico de un espacio medible, tomando el valor infinito en ese punto y cero en cualquier otro lugar. La elección de este enfoque no es arbitraria, sino que responde a su aplicabilidad directa en escenarios de investigación reales. En la práctica científica y en el análisis de datos empíricos, $\mathbb{Q}_0$ generalmente representa una distribución estimada a partir de un conjunto finito de observaciones o datos muestrales.

Esta aproximación discreta y finita refleja la naturaleza de los datos que se utilizarán para evaluar los parámetros aleatorios de los generadores renovables y su impacto en la operación de microrredes. En estos contextos, las observaciones son inherentemente discretas y limitadas en número, lo que hace que una representación continua o infinita sea menos apropiada o incluso impracticable desde el punto de vista computacional. Así, al integrar la distancia de Wasserstein en este enfoque, se abre la puerta a una formulación robusta que permite una gestión efectiva de la incertidumbre en la optimización de sistemas energéticos complejos.

En este caso, la distancia de Wasserstein es dada por los programas lineales (3-4) y (3-8) considerando así la teoría de dualidad fuerte y relajar la restricción de la distancia de Wasserstein, lo que lleva a la creación del dual de Lagrange α.

$$= \min_{\alpha \geq 0} \max_{\mathbb{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{U})} \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i}) + d^p \cdot \alpha - \alpha \cdot W_p^p(\mathbb{P}, \mathbb{Q}_0) \right\} \tag{3-15}$$

$$= \min_{\alpha \geq 0} \left\{ d^p \cdot \alpha - \min_{\mathbb{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{U})} \left\{ \alpha \cdot W_p^p(\mathbb{P}, \mathbb{Q}_0) - \sum_{i=1}^{m} p_i f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i}) \right\} \right\} \tag{3-16}$$

$$= \min_{\alpha \geq 0} \left\{ d^p \cdot \alpha - \min_{\substack{\mathbb{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{U}) \\ (\boldsymbol{\pi}:(3-5)-(3-7))}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha \|\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}\|^p \pi_{ij} - \sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i}) \right\} \right\} \tag{3-17}$$

$$= \min_{\alpha \geq 0} \left\{ d^p \cdot \alpha - \min_{\substack{\mathbb{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{U}) \\ (\boldsymbol{\pi}:(3-8)-(3-7))}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha \|\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}\|^p - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i})) \pi_{ij} \right\} \right\} \tag{3-18}$$

Como paso siguiente, se elimina la variable $\mathbb{P}$ usando la restricción $\sum_j \pi_{ij} = p_i$ para todo $i \in [m]$, siguiendo el enfoque de la ecuación (3-18). Esto nos permite derivar el problema en forma cerrada, simplificando significativamente el problema general.

Esta transformación convierte un problema de optimización complejo en uno más manejable, mejorando la eficiencia computacional y permitiendo el uso de técnicas de optimización estándar. El resultado es la obtención de soluciones más rápidas y robustas, crucial para la toma de decisiones en entornos inciertos. Retomando ahora la ecuación (3-18):

$$\min_{\boldsymbol{\pi}} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(\alpha\|\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}\|^p - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i})\right) \pi_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} \pi_{ij} = q_j, \quad \forall j \in [n], \tag{3-19}$$

$$\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0} \tag{3-20}$$

y su respectivo equivalente dual:

$$\max_{\boldsymbol{v}} \min_{\boldsymbol{\pi}\geq 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left(\alpha\|\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}\|^p - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i})\right) \pi_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\left(q_j - \sum_{i=1}^{m}\pi_{ij}\right) v_j, \tag{3-21}$$

puede ser escrito como:

$$\max_{\boldsymbol{v}} \quad \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{v}$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha\|\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}\|^p - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i}) - v_j \geq 0, \quad \forall i \in [m], j \in [n] \tag{3-22}$$

$$\max_{\boldsymbol{v}} \quad \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{v}$$

$$\text{s.t.} \quad v_j \leq \min_{i\in[m]} \{\alpha\|\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}\|^p - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi_i})\} \tag{3-23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \min_{i\in[m]} \alpha||\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}||^p - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi i}) \tag{3-24}$$

Teorema 3.2.1 *A partir de la reformulación dual del problema de maximización interno del problema de optimización* (3-13) *:*

$$\max_{\mathbb{P}\in\mathscr{P}(\mathbb{U})} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]$$

$$s.t. \quad Wp(\mathbb{P}, \mathbb{Q}0) \leq d,$$

$$= \min_{\alpha\geq 0} \left\{ d^p \cdot \alpha - \sum_{j=1}^{n} q_j \min_{i\in[m]} \alpha||\boldsymbol{\xi_i} - \boldsymbol{\zeta_j}||^p - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi i}) \right\}$$

Se puede hallar la reformulación equivalente general del problema general de DRO usando la distancia de Wasserstein en:

$$\min_{x\in\mathcal{X},\alpha\geq 0}\left\{d^p\cdot\alpha+\sum_{j=1}^{n}q_j\min_{i\in[m]}\alpha||\boldsymbol{\xi_i}-\boldsymbol{\zeta_j}||^p-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi i})\right\} \tag{3-25}$$

Es relevante afirmar que (3-25) es un problema de optimización unidimensional que involucra solo la variable escalar α, considerando que el problema primal (3-13) en el caso más general involucra un espacio de medidas de probabilidad de dimensión infinita. Si se define la función $h(\alpha) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_0}\left[\max_{\xi\in\mathcal{U}}\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi i})-\alpha||\boldsymbol{\xi_i}-\boldsymbol{\zeta_j}||^p\}\right]$, se puede afirmar que la función $h(\alpha)$ es convexa y no creciente en α. Además, se observa que la suma $d^p\cdot\alpha+h(\alpha)\geq d^p\cdot\alpha+\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_0}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi i})$ al seleccionar $\xi=\zeta$ en el supremo interno, lo que indica que la suma $d^p\cdot\alpha+h(\alpha)$ se aproxima a $+\infty$ cuando α se aproxima a $+\infty$.

Por lo tanto, el valor mínimo de la ecuación (3-13) se alcanza en un valor finito de α^*, cuando $h(\alpha)$ es una función convexa apropiada. Después de encontrar reformulaciones equivalentes a un problema de optimización robusta distribucional desde un enfoque de distancia de Wasserstein, surge la pregunta de cómo abordarlas. En su forma actual, la ecuación (3-25) implica problemas de optimización anidados que son bastante complejos. Por lo tanto, es necesario hacer una serie de suposiciones que permitan asegurar la solución de cada problema de optimización. Comúnmente se asume que $\mathbb{Q}_0$ es una medida discreta con soporte finito, ya que la información recopilada de datos históricos es crucial en la práctica, a menudo representada por una distribución empírica estimada a partir de datos.

Además, asumiendo que el orden de la distancia de Wasserstein es uno ($p=1$). Adicionalmente, [6] ofrece una descripción general de las características de la función objetivo definiéndola como

$$\max_{1\leq k\leq K}\quad[f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})] \tag{3-26}$$

Donde $f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ es convexa en x y cóncava en ξ, basada en k muestras donde $K\leq\infty$, y el conjunto de soporte $\mathcal{U}$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^l$, estas suposiciones permiten la reformulación del problema general considerando varias propiedades de optimización como dualidad, norma dual, adición de una función indicadora que asegura que todas las realizaciones de ξ están en el conjunto de soporte, y la utilización de funciones conjugadas. En consecuencia, la reformulación final del problema DRO en uno determinístico es la siguiente

$$\min_{x\in X,\alpha\geq 0,w,v,z}d^p\cdot\alpha+\sum_{j=1}^{n}q_jz_j \tag{3-27}$$

$$\text{s.t.}\quad[-f_k]*(x,wjk-v_{jk})+\sigma_{\mathcal{U}}(v_{jk})+\boldsymbol{w_{jk}}^T\zeta_j\leq z_j \tag{3-28}$$

$$||\boldsymbol{w_{jk}}||*\leq\alpha\quad\forall j\in[n],\forall k\in[\mathcal{K}] \tag{3-29}$$

Dado que la reformulación final de DRO nos permite resolver problemas de optimización con parámetros inciertos de manera determinística, también es cierto que esta metodología depende de los parámetros utilizados para modelar el problema. Entre estos parámetros, la naturaleza de nuestra $\mathbb{Q}_0$ destaca como una consideración primaria. Además, el parámetro del límite de la distancia de Wasserstein que define nuestro conjunto de ambigüedad sirve como otro factor crucial.

4 Despacho economico de una microrred aislada

La optimización de los procesos operativos es un aspecto fundamental en la gestión eficiente de microrredes, especialmente en el actual contexto de transición energética y creciente integración de fuentes de energía renovable. Las microrredes, como sistemas de distribución de energía a pequeña escala, abarcan diversos elementos, incluyendo fuentes de generación, sistemas de almacenamiento, redes de distribución y cargas eléctricas. Cada uno de estos componentes debe ser modelado cuidadosamente para asegurar un funcionamiento armónico que minimice costos y maximice la eficiencia.

En este capítulo, se presentará un modelamiento general de una microrred, analizando todos sus elementos y cómo interactúan entre sí. Se explorarán las distintas metodologías de optimización aplicables en este contexto, incluyendo la optimización robusta, la optimización estocástica y, en particular, la Optimización Robusta Distribucional (DRO). Esta última se valida como la mejor solución para abordar problemas con incertidumbre, ya que permite gestionar de manera efectiva las variabilidades en la generación de energía renovable y la demanda fluctuante [61; 7].

Finalmente, se implementará esta metodología en un escenario de múltiples microrredes interconectadas, utilizando DRO para optimizar su operación. Esta implementación no solo demostrará la aplicabilidad de la DRO en situaciones reales, sino que también resaltará sus ventajas sobre otras técnicas de optimización al enfrentar los desafíos inherentes a la gestión de la incertidumbre en sistemas energéticos complejos.

4.1 Modelamiento general de una microrred

Una microrred al ser un conjunto de DER, como generadores distribuidos o dispositivos de almacenamiento de energía, y un conjunto de cargas controlables, con la capacidad de autogestionar su energía y su conexión/desconexión a la red principal. Las MGs permiten una integración flexible de estos recursos y proporcionan energía eléctrica confiable [65]. Una característica clave de las MGs es su independencia en terminos de energía, debido a que pueden operar en modo aislado o conectado a la red [64]. tal y como se puede observar en la Figura **4-1**.

Considere una microred en la cual se encuentran $\mathcal{M}$ generadores convencionales (combustibles fósiles), $\mathcal{I}$ generadores de energía renovable y $\mathcal{S}$ centros de almacenamiento distribuido. El horizonte de programación se define como $\mathcal{T} := \{1, 2, ..., T\}$, tambien conocida como la programación del día anterior (day ahead). La modelación especifica de los agentes presente en las microredes se describen a continuación.

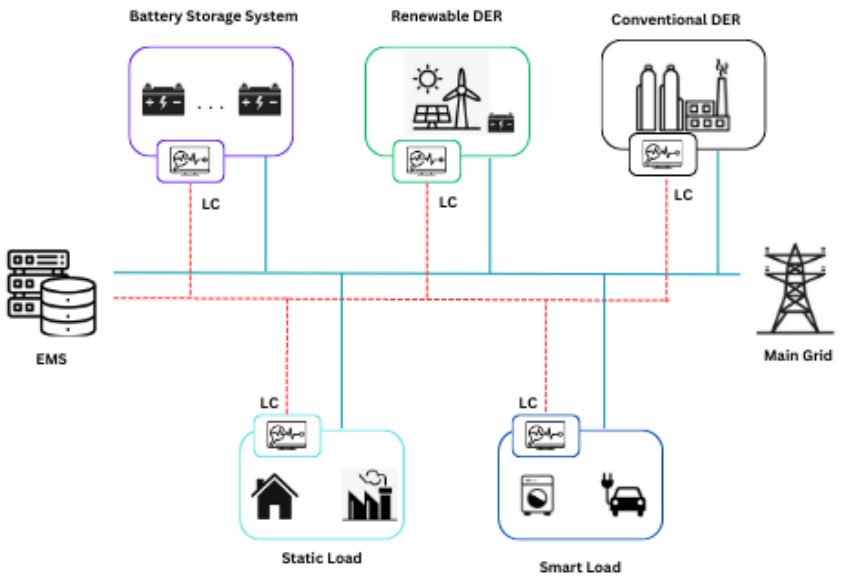


Figura 4-1: Interacciones físicas y de comunicación entre diferentes dispositivos de una Microred

4.1.1 Modelamiento de la demanda

Las cargas eléctricas se clasifican en dos categorías principales: inelásticas y elásticas. Las cargas inelásticas se caracterizan por tener una demanda de potencia que debe satisfacerse en todo momento, siendo su consumo inflexible y prioritario. Ejemplos de estas cargas incluyen los equipos médicos en hospitales, la iluminación esencial en áreas residenciales, los sistemas de seguridad y emergencia, y los centros de datos críticos.

Por otro lado, las cargas elásticas son despachables, lo que significa que su consumo de energía es ajustable y puede programarse según las necesidades del sistema. Estas cargas elásticas se pueden dividir en dos subclases. La primera subclase comprende aquellas con flexibilidad temporal, que pueden desplazar su consumo en el tiempo, como los sistemas de calefacción, ventilación y aire acondicionado (HVAC), la carga de vehículos eléctricos y las bombas de agua. La segunda subclase incluye cargas con flexibilidad en la cantidad de energía consumida, como los sistemas de iluminación regulable y los procesos industriales adaptables.

Las cargas en un sistema pueden clasificarse en dos tipos principales: inelásticas y elásticas. Cada tipo de carga tiene un impacto significativo en la operación y optimización de sistemas de energía, especialmente en microrredes.

- **Cargas Inelásticas**:

  Estas consumen energía de forma fija y se representan como $P^t_{D_n}$, donde $n \in \mathcal{N} := \{1, \ldots, N\}$ y $t \in \mathcal{T}$. Mantienen un consumo constante a lo largo de $\mathcal{T}$, sin posibilidad de ajuste. Este tipo de demanda es crítico para cargas esenciales que no pueden ser moduladas, como equipos de soporte vital o sistemas de refrigeración crítica.

- **Cargas Elásticas**:

  Estas cargas son despachables, es decir, su consumo de energía es ajustable y programable según las necesidades del sistema. Se indexan por $f \in \mathcal{F} := \{1, \ldots, F\}$. Estas cargas tienen límites de consumo definidos por $P^{\min}_f$ y $P^{\max}_f$ y operan dentro de un intervalo específico, desde S_f hasta T_f. Además, deben cumplir con la siguiente restricción de demanda total:

$$\sum_{t=S_f}^{T_f} P_{E_f}^t = E_f, \quad t \in \mathcal{T}.$$

Fuera del periodo de operación ($t \notin \mathcal{T}$), su consumo es nulo:

$$P_f^{\min,t} = P_f^{\max,t} = 0.$$

Un ejemplo típico de estas cargas elásticas son los vehículos híbridos "plug-in", que pueden ajustar su consumo dentro del intervalo $[S_f, T_f]$.

Para gestionar ambos tipos de carga de manera integral, se construye un vector $\mathbf{L}_t$ que representa el consumo total de toda la microrred en cada instante $t \in \mathcal{T}$. Este vector captura tanto las demandas fijas de las cargas inelásticas como las demandas variables y programadas de las cargas elásticas, proporcionando una visión completa del perfil de consumo del sistema.

El vector $\mathbf{L}_t$ se compone de la siguiente manera:

$$\mathbf{L}_t = \sum_{n=1}^{N} P_{D_n}^t + \sum_{f=1}^{F} P_{E_f}^t, \quad \forall t \in \mathcal{T} \tag{4-1}$$

El vector $\mathbf{L}_t$ se compone de dos términos fundamentales: $\sum_{n=1}^{N} P_{D_n}^t$, que representa la suma de las cargas inelásticas, y $\sum_{f=1}^{F} P_{E_f}^t$, que engloba las cargas elásticas para cada instante t.

Para las cargas inelásticas, $\mathbf{L}_t$ incorpora los valores constantes de $P_{D_n}^t$, reflejando su naturaleza estable. En contraste, para las cargas elásticas, registra valores dinámicos dentro de los límites $P_f^{\min}$ y $P_f^{\max}$, considerando las restricciones temporales previamente establecidas. Esta representación vectorial ofrece una visión integral del perfil de consumo, facilitando una planificación y optimización eficientes en sistemas con diversas cargas. Al unificar demandas fijas y variables en un solo vector, $\mathbf{L}_t$ permite una gestión más robusta y adaptativa de los recursos energéticos posibilitando un análisis profundo de la demanda energética temporal. Esto permite a los operadores prever picos de consumo, identificar períodos de baja demanda y optimizar la generación y distribución de energía. Además, esta representación fomenta la implementación de estrategias de respuesta a la demanda y la integración eficaz de energías renovables, contribuyendo significativamente a la estabilidad y eficiencia global del sistema eléctrico.

4.1.2 Modelamiento del almacenamiento distribuido

Sea Bs^t la energía almacenada en la batería al final de un intervalo de tiempo dado, con una energía inicial disponible Bs^0 y una capacidad máxima Bs^{max}. La relación entre estas variables se puede expresar como $Bs^0 \leq Bs^t \leq Bs^{max}$, donde $s \in \mathcal{S} := \{1, \ldots, S\}$ y $t \in \mathcal{T}$.

P_{Bs}^t representa la potencia entregada o extraída del dispositivo de almacenamiento j durante el intervalo de tiempo t, correspondiendo al proceso de carga ($P_{Bs}^t \geq 0$) o descarga ($P_{Bs}^t \leq 0$). Así, la energía almacenada sigue el siguiente comportamiento dinámico:

$$Bs^t = Bs^{t-1} + P^t_{Bs}, \quad s \in \mathcal{S}, \quad t \in \mathcal{T} \tag{4-2}$$

La variable P^t_{Bs} está sujeta a las siguientes restricciones:

$$P^{min,t}_{Bs} \leq P^t_{Bs} \leq P^{max,t}_{Bj} \tag{4-3}$$

$$-\eta_s Bs^{t-1} \leq P_{Bs^t} \tag{4-4}$$

donde η_s es la eficiencia de la unidad de almacenamiento s, con $\eta_s \in (0, 1]$. La ecuación (4-4) indica que una fracción ηs de la energía almacenada en el intervalo de tiempo anterior Bs^{t-1} está disponible para la descarga. Adicionalmente, la cantidad máxima de energía almacenada también está limitada para facilitar futuros planes de programación, es decir, $Bs^T \leq Bs^{min}$.

4.1.3 Modelamiento de restricciones de rampa de subida y rampa de bajada

Las restricciones de rampa de subida y bajada son limitaciones técnicas cruciales en el despacho económico de microrredes. Estas representan la velocidad máxima a la que un generador puede aumentar o disminuir su producción de energía en un período determinado. Su inclusión en el modelado de un Sistema de Gestión de Energía (EMS) es fundamental para reflejar el realismo operativo de los generadores, que no pueden cambiar instantáneamente su nivel de producción. Estas restricciones son esenciales para mantener la estabilidad del sistema, proteger la vida útil de los equipos y permitir una planificación más precisa de la generación, especialmente al integrar fuentes renovables intermitentes. Ignorarlas podría llevar a soluciones de despacho que, aunque parezcan óptimas en teoría, no sean factibles en la práctica, resultando en costos operativos más altos y posibles inestabilidades en la red.

Dicha restricción puede ser modelada como

$$\sum_{m=1}^{M} (P^{max}_{G_m} - P^t_{G_m}) \leq SR^t \tag{4-5}$$

$$P^t_{G_m} - P^{t-1}_{G_m} \leq R_{m,up} \tag{4-6}$$

$$P^t_{G_m} - P^{t-1}_{G_m} \leq R_{m,down} \tag{4-7}$$

4.2 El problema del despacho económico

La operación económica de una microrred es fundamental para la recuperación y maximización de los beneficios del capital invertido en equipos de generación distribuida. Las tarifas energéticas son establecidas por las instituciones reguladoras, lo que enfatiza la importancia de la conservación del combustible y presiona

a las compañías generadoras a alcanzar la máxima eficiencia operativa. Este enfoque no solo minimiza el costo del kilovatio/hora, sino que también es crucial ante el incremento constante de los precios del combustible, la mano de obra, las materias primas y el mantenimiento. Además, resulta imperativo considerar el papel de los generadores de energía renovable en este contexto.[18].

El concepto de despacho económico es esencial, ya que se centra en determinar la producción óptima de cada unidad activa dentro de una microrred, tomando en cuenta los costos operativos, las restricciones de generación y las limitaciones de demanda. El objetivo principal es encontrar la combinación más eficiente de producción entre las unidades disponibles, con el fin de minimizar los costos de generación de energía. Por ejemplo, en el trabajo de [26], se propone un enfoque que busca equilibrar los costos operativos y el riesgo, en un contexto donde no se dispone de una distribución de probabilidad precisa de la energía eólica. Este estudio emplea intervalos de confianza y un conjunto de ambigüedad fundamentado en la teoría de probabilidad imprecisa, transformando el problema en un problema de despacho no lineal que se resuelve mediante técnicas de optimización convexa secuencial y aproximación lineal por partes.

Por otra parte, el estudio de [60] presenta un modelo de despacho económico multiperiodo con restricciones de seguridad (M-SCED) aplicable a sistemas que integran fuentes de energía renovable. Este modelo utiliza un enfoque de optimización robusta distribuida (DRO) basado en momentos para abordar las incertidumbres inherentes y mejorar la seguridad del sistema, incorporando reglas de decisión lineales segregadas que optimizan la eficiencia computacional.

En resumen, la optimización del despacho económico en microrredes, mediante enfoques como la optimización robusta y técnicas de gestión de incertidumbre, es esencial para abordar los desafíos asociados a la integración de fuentes de energía renovable. Este enfoque no solo mejora la eficiencia económica, sino que también contribuye a la sostenibilidad y viabilidad de los sistemas energéticos en un entorno en constante cambio.

El objetivo principal es minimizar el costo de operación de una red eléctrica aislada, o microrred, que está compuesta por generadores renovables distribuidos no despachables (RG), como turbinas eólicas y paneles fotovoltaicos, generadores térmicos despachables (TG) y cargas regulares no despachables (L). El cálculo del flujo de potencia óptimo en corriente alterna (AC) exacto es un problema complejo, no convexo e intratable; sin embargo, puede aproximarse de manera razonable utilizando diferentes modelos lineales.

El desafío de la gestión energética consiste en minimizar el costo social neto de la microrred. Este costo incluye tanto el costo de la generación convencional como el costo potencial de transacción asociado a la volatilidad de las fuentes de energía renovable. Además, se considera que la utilidad de las cargas despachables se resta de este costo.

A continuación, se presentará un modelo de optimización que incorpora las restricciones de los elementos de las microrredes mencionados anteriormente.

$$\min_{P_g,P_s} \sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\left(a_m\left(P_{Gm}^t\right)^2 + b_m P_{Gm}^t + c_m\right) + G\left(\{P_{Pv_i}^t\}\right) \tag{4-8}$$

$$\text{s.t.} \quad P_{Gm}^{\min} \leq P_{Gm}^t \leq P_{Gm}^{\max} \tag{4-9}$$

$$\sum_{m=1}^{M}\left(P_{Gm}^{\max} - P_{Gm}^t\right) \geq SR^t \tag{4-10}$$

$$P_{Dn}^{\min} \leq P_{Dn}^t \leq P_{Dn}^{\max} \tag{4-11}$$

$$\sum_{m=1}^{M} P_{Gm}^t + \sum_{s=1}^{S} P_{Bs}^t = \mathbf{L}_t \tag{4-12}$$

$$B_s^t = B_s^{t-1} + P_{Bs}^t, \quad s \in \mathcal{S}, \quad t \in \mathcal{T} \tag{4-13}$$

$$P_{Bs}^{\min,t} \leq P_{Bs}^t \leq P_{Bs}^{\max,t} \tag{4-14}$$

$$-\eta_s B_s^{t-1} \leq P_{Bs}^t \tag{4-15}$$

Las restricciones (4-10) a (4-15) establecen los requisitos físicos fundamentales del sistema de generación, considerando los límites de potencia y la disponibilidad de reservas giratorias. En particular, la restricción (4-13) garantiza el equilibrio entre la oferta y la demanda de energía, asegurando que la generación total cubra la demanda en cada intervalo de tiempo.

Por otro lado, dado que $G(\{P_{Pv_i}^t\})$ representa los costos asociados a la generación de energía renovable, esta función involucra parámetros inciertos debido a la naturaleza aleatoria de los recursos renovables como la energía solar y eólica. Factores como la variabilidad climática, los errores de pronóstico y la disponibilidad fluctuante afectan la producción de energía, ya que esta depende de condiciones ambientales fuera de control. Para capturar estas incertidumbres, es fundamental utilizar enfoques de optimización capaces de ofrecer soluciones robustas, apoyándose en datos históricos de las variables aleatorias. Esto garantiza que las decisiones de despacho energético sean viables bajo diferentes escenarios futuros, minimizando los riesgos asociados a una posible insuficiencia en la generación.

4.3 Lidiando con la incertidumbre en el DE de una MG

En esta subsección, se abordará el problema de despacho económico de microrredes mediante la formulación de la función $G(\{P_{Pv_i}^t\}$. Este análisis se realizará desde tres perspectivas: primero, la perspectiva estocástica, que considera la variabilidad de las fuentes de energía renovable y la demanda; segundo, la perspectiva robusta, que busca garantizar soluciones viables en condiciones adversas; y, finalmente, la perspectiva robusta distribucional, que combina enfoques estocásticos y robustos para minimizar el costo esperado en el peor de los casos. Estos enfoques permitirán optimizar la gestión de microrredes en un entorno incierto. Para los siguientes casos, se formularán las restricciones presentes en las ecuaciones de (4-10) a (4-15) como $x \in \mathcal{X}$.

Para validar el concepto de Optimización Robusta Distribucional (DRO) y evaluar su eficiencia en comparación con otras metodologías, se emplea Mosek Fusion, una API para Python reconocida por su capacidad para manejar problemas de gran escala y resolver optimizaciones complejas, incluidas aquellas de programación lineal, cuadrática y convexa. El uso de Mosek garantiza soluciones eficientes y adecuadas para la optimización del despacho de energía en múltiples microrredes, asegurando el cumplimiento de todas las restricciones y criterios definidos en el modelo.

El estudio se enfoca en una microrred aislada que consta de $m = 5$ generadores convencionales, $i = 1$ generador renovable con 10 datos históricos, $s = 3$ sistemas de almacenamiento de energía, $n = 9$ demandas y $t = 8$ instantes de tiempo. La información detallada sobre los generadores, la carga y los datos históricos del generador renovable se presenta en las siguientes tablas.

Tabla 4-1: Datos de generadores de la microrred

MG	Und	P_{g_min}	P_{g_max}	a_m	b_m	c_m	ramp_up	ramp_down
1	101_Oil	16	40	0.04872	53.21	400.6849	20	20
1	102_Agua	20	50	0	0.001	0.001	25	25
1	103_Gas	15.2	76	0.064142	14.0811	212.3076	40	40
1	104_Carbon	25	100	0.05272	43.6615	581.521	40	24
1	105_Carbon	54.3	135	0.08342	12.3883	382.2391	50	60

La Tabla **4-1** presenta las características principales de los generadores presentes en la microrred. Cada generador está identificado por su unidad y tipo de tecnología (columna *Und*), especificando los límites de potencia mínima (P_{g_min}) y máxima (P_{g_max}) que puede suministrar. Además, se incluyen los parámetros a_m, b_m y c_m, los cuales corresponden a los coeficientes del costo de generación asociados a cada generador. Estos parámetros permiten modelar el comportamiento de costos de cada unidad, siendo esenciales para la optimización del despacho económico. Las columnas *ramp_ up* y *ramp_ down* indican las tasas máximas de aumento y disminución de potencia, respectivamente, lo que refleja la capacidad de respuesta del generador ante cambios en la demanda. La información contenida en esta tabla es clave para asegurar un control eficiente y seguro de la operación de la microrred, permitiendo determinar qué generadores deben activarse en cada instante para satisfacer la demanda de manera óptima.

Tabla 4-2: Datos de demanda por intervalo de tiempo

Time_slot	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	L_t
1	30	40.4	15.75	18.9	18.24	48.2	36	20.2	57	284.69
2	0	30	40.4	50.5	40.2	80.41	53	0	0	294.51
3	0	30.4	20.6	30.5	50	30	35.75	38.9	25	261.15
4	0	38.76	35.26	31.84	28.53	25.12	22.68	19.35	67.18	268.72
5	20.9	26	32.5	34.6	36.7	0	20.8	32.1	30	233.6
6	22.15	35.2	34.8	33.9	20	0	32.7	31.8	32.53	243.08
7	35.2	33.5	0	0	33.6	34.3	32.5	32.7	32.28	234.08
8	35.3	32.2	0	0	32.6	33.3	31.5	31.7	30.47	227.07

La Tabla **4-2** presenta los datos de demanda correspondientes al intervalo de tiempo de 8am a 4pm en la microrred, siendo estos periodos los de mayor impacto por parte de las energías basadas en energía solar. En cada intervalo, se registra el consumo de varias cargas (l_1 a l_9) junto con la demanda total del sistema (L_t). Como se puede observar, las cargas l_2, l_5, l_7 y l_8 se consideran demandas inflexibles, ya que su consumo está presente de manera constante a lo largo de los diferentes intervalos. En contraste, las demás cargas (l_1, l_3, l_4, l_6, l_9) se activan únicamente en ciertos momentos, lo que las clasifica como demandas flexibles o controlables. Esta flexibilidad permite gestionar el consumo de manera más eficiente, ajustando estas cargas según la disponibilidad de energía o las condiciones operativas de la microrred en cada instante de tiempo.

Tabla 4-3: Parámetros de sistemas de lmacenamiento

Und	B_{s_max}	B_{s_min}	P_{bs_min}	P_{bs_max}	ef_{bs}
1	200	50	-20	20	-0.95
2	150	50	-15	15	-0.9
3	150	50	-10	10	-0.9

La Tabla **4-3** presenta los principales parámetros de estos sistemas, que incluyen la capacidad máxima (B_{s_max}), la capacidad mínima (B_{s_min}), así como las potencias de carga y descarga mínima y máxima (P_{bs_min} y P_{bs_max}). Además, se detalla la eficiencia del sistema de almacenamiento (ef_{bs}), que es crucial para evaluar su desempeño y viabilidad dentro de la microrred.

Los parámetros utilizados para modelar las salidas de energía de los dispositivos de generación renovable se basan en datos históricos de generación de una planta solar fotovoltaica con una capacidad de 130 kWp, ubicada en Tocancipá, Cundinamarca. Esta planta opera con un *performance ratio* del 80 % y los datos fueron recolectados durante los meses de agosto y septiembre del 2024 (vease Figura **4-2**). Dichos registros históricos reflejan la variabilidad inherente en la generación solar debido a factores como las condiciones climáticas y la irradiancia local, lo que los hace fundamentales para la correcta modelación de los escenarios de generación renovable.

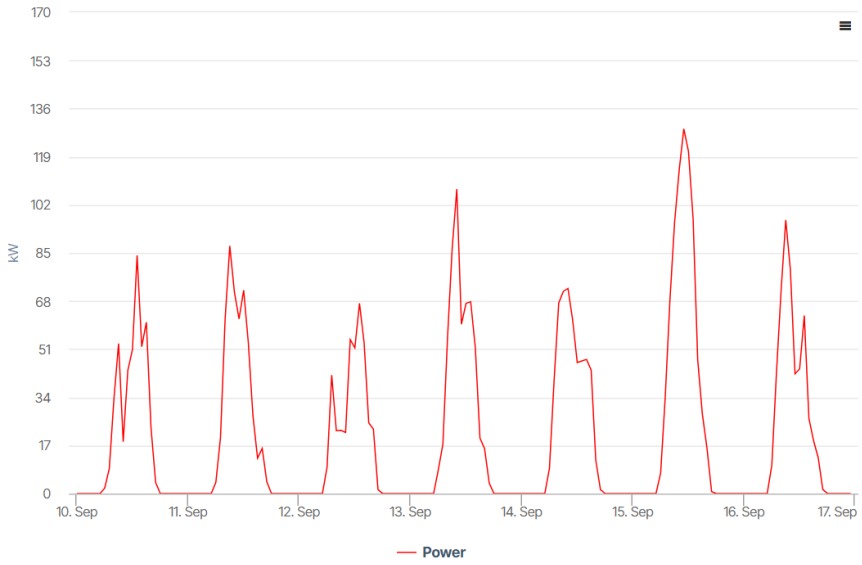


Figura 4-2: Comportamiento sistema de generación durante 1 semana de muestreo

Estos datos serán modelados de manera diferente según la metodología de optimización empleada: estocástica, robusta y robusta distribucional, cada una de las cuales proporciona un enfoque particular para manejar la incertidumbre asociada a la generación renovable. A continuación, se presentará un análisis detallado de cada metodología y su impacto en el desempeño del sistema.

4.3.1 Optimización Estocástica

Como se mencionaba en la introducción, el problema SO permite modelar la incertidumbre y evaluar soluciones potenciales basadas en su desempeño esperado. Estos tipos de problemas pueden formularse como:

$$\min_{x \in X} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})] \tag{4-16}$$

donde x es la variable de decisión, ξ es el parámetro incierto relacionado a la energía presente en cada instante de tiempo por el generador distribuido i que toma valores a partir de los datos históricos de dicho generador, dicho comportamiento puede ser descrito como una función de densidad de probabilidad $\mathbb{P}$ conocida para el parámetro ξ, por lo cual la reformulación del problema (4-8) en términos estocásticos se puede analizar como:

$$\min_{P_g, P_s} \sum_{t=1}^{T} \sum_{m=1}^{M} \left(a_m P_{Gm}^{t^2} + b_m P_{Gm}^{t} + c_m \right) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}\left[C_{pv_i} \cdot \xi \right] \tag{4-17}$$

$$\text{s.t.} \quad x \in \mathcal{X}$$

Para este caso, se realiza un proceso de optimización basado en el valor esperado de la variable aleatoria ξ_i, es decir, el promedio de generación por parte de las energías renovables en cada uno de los instantes de tiempo. Esto convierte nuestra función de costos asociados a la generación renovable, $G(P_{Pv_i}^t)$, en una esperanza matemática expresada como $\mathbb{E}_{\mathbb{P}0}\left[Cpv_i \cdot \xi\right]$.

Este parámetro de generación esperada se incorpora tanto en la función objetivo como en la restricción (4-13), de la forma $\sum_{m=1}^{M} P_{Gm}^t + \sum_{s=1}^{S} P_{Bs}^t + \mathbb{E}\left[\xi\right] = \mathbf{L}_t$,asegurando así que el despacho energético refleje de manera adecuada las expectativas de generación renovable en el horizonte temporal analizado. A continuación se puede observar el despacho de energía programado para la microrred en donde se identifican la energía que debe suministrar cada agente en cada uno de los instantes de tiempo.

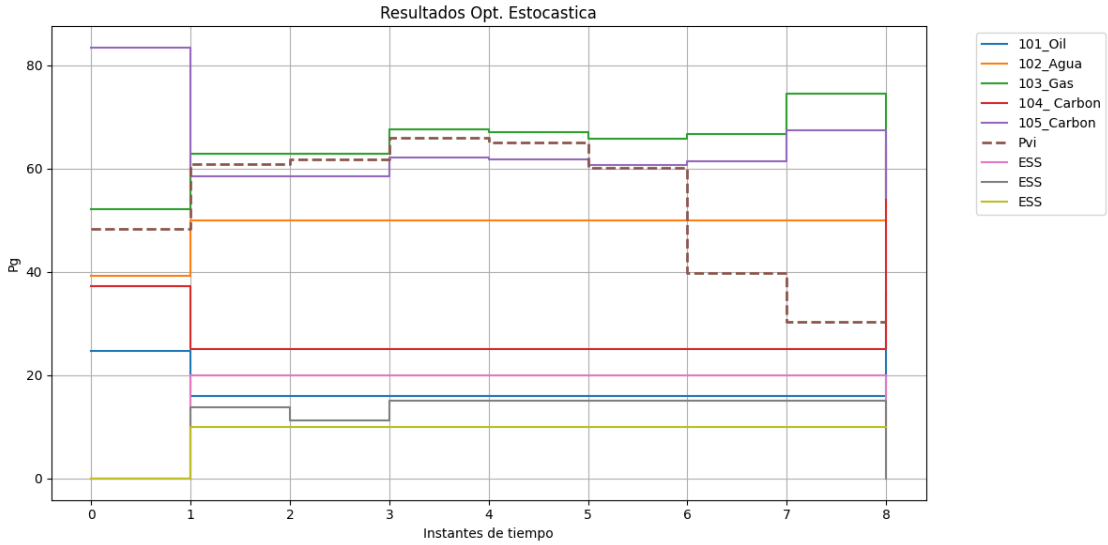


Figura 4-3: Resultados despacho económico estocástico microrred para 8 instantes de tiempo

De acuerdo con lo mostrado en la Figura **4-3**, las fuentes de generación como la hidráulica, al tener una capacidad conocida, permiten programar un despacho energético a máxima capacidad, ya que presentan costos más bajos. En contraste, fuentes como el carbón, por ser más costosas, se mantienen en sus niveles

mínimos de operación siempre que no haya cambios en los límites de generación de recursos más económicos, como la hidráulica.

El problema (4-17) incluye 159 variables escalares y 445 restricciones, de las cuales 5 son restricciones afines cónicas. La optimización se resolvió en 15 iteraciones utilizando el método de punto interior, logrando una solución óptima tanto para el problema primal como para el dual. El costo total obtenido fue de 51,185.70 unidades. El proceso completo tomó 0.06 segundos, alcanzando un gap de optimalidad relativa del 0 %, lo que garantiza que se obtuvo una solución precisa y eficiente.

4.3.2 Optimización Robusta

Como se mencionaba en la introducción, el problema RO permite modelar la incertidumbre y evaluar soluciones potenciales basadas en el peor escenario posible de la variable aleatoria. El problema de despacho económico en microrredes puede formularse como:

$$\min_{x \in X} \quad \max_{\xi \in \mathcal{U}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}). \tag{4-18}$$

donde x es la variable de decisión, ξ es el parámetro incierto relacionado a la energía presente en cada instante de tiempo por el generador distribuido i que toma valores a partir de los datos históricos de dicho generador, dicho comportamiento se basa en los datos históricos los cuales son acotados mediante un conjunto de incertidumbre $\mathcal{U}$, de los cuales se tiene en cuenta la peor realización conocida para el parámetro ξ, por lo cual la re formulación del problema (4-8) en términos de optimización robusta se puede analizar como:

$$\begin{aligned} \min_{P_g, P_s} \sum_{t=1}^{T} \sum_{m=1}^{M} \left(a_m {P_{Gm}^t}^2 + b_m P_{Gm}^t + c_m \right) + \max_{\xi \in \mathcal{U}} \left(C_{pv_i} \cdot \xi \right) \\ \text{s.t.} \quad x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{4-19}$$

Esto convierte nuestra función de costos asociados a la generación renovable, $G(P_{Pv_i}^t)$, en un producto entre el costo unitario de generación de energía renovable y el peor escenario de generación energía renovable para el instante de tiempo t es decir $[Cpv_i \cdot \xi_{max}^t]$. Este peor escenario de generación solar es incorporado tanto en la función objetivo como en la restricción (4-13)de la forma $\sum_{m=1}^{M} P_{Gm}^t + \sum_{s=1}^{S} P_{Bs}^t + \max_{\xi} [\xi] = \mathbf{L}_t$, asegurando así que el despacho energético refleje de manera adecuada las expectativas de generación renovable en el horizonte temporal analizado.

El modelo contiene 159 variables escalares y 445 restricciones, incluidas 5 restricciones afines cónicas. El proceso de optimización, resuelto con el método de punto interior, alcanzó una solución óptima en 17 iteraciones. El costo total obtenido es 51,335.52. El cálculo se completó en 0.05 segundos, con un gap de optimalidad relativa del 0 %, lo que garantiza precisión en la solución.

A continuación se puede observar el despacho de energía programado para la microrred en donde se identifican la energía que debe suministrar cada agente en cada uno de los instantes de tiempo.

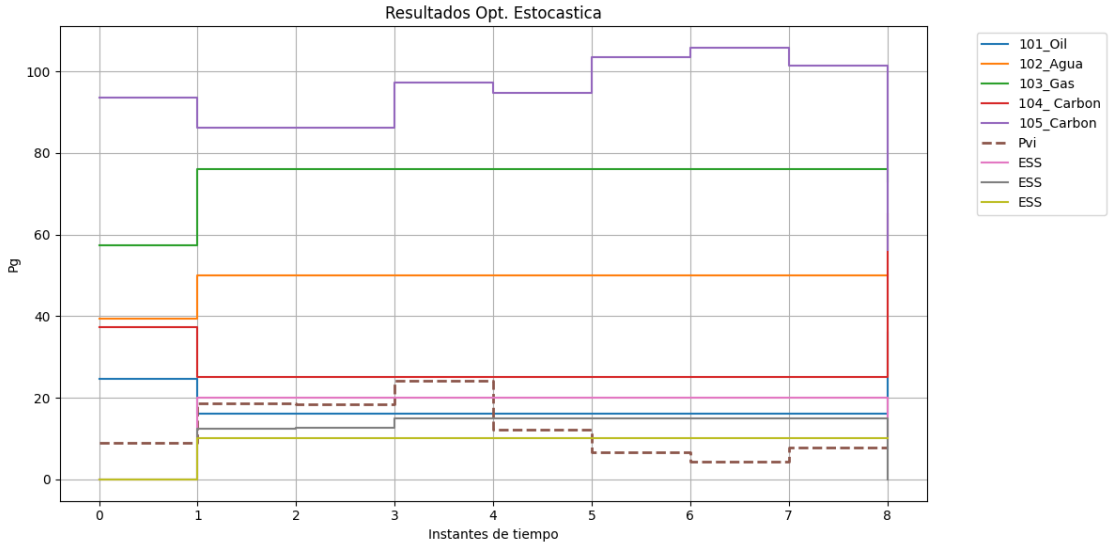


Figura 4-4: Resultados despacho económico robusto microrred para 8 instantes de tiempo

4.3.3 Optimización Robusta Distribucional

Como se mencionaba en la introducción, el problema de Optimización Robusta Distribucional (DRO), por sus siglas en inglés) permite encontrar una solución óptima que pueda desempeñarse bien incluso en el peor de los casos dentro de un conjunto de ambigüedad cuyos elementos son distribuciones posibles. Los problemas de DRO pueden formularse como:

$$\min_{x \in X} \quad \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{x}, \xi)]. \tag{4-20}$$

A diferencia de la Optimización Estocástica (SO), DRO se basa en supuestos más débiles respecto a la distribución precisa de las variables inciertas, como la salida de generadores distribuidos (DG). Utiliza propiedades estadísticas conocidas, como momentos o desviaciones acotadas de una distribución de referencia, para definir un conjunto de ambigüedad $\mathcal{P}$ y tomar decisiones. En este contexto, se define el comportamiento de la potencia generada por el generador renovable mediante la siguiente función afín:

$$P_{pv_i}(\xi) = \widetilde{P}_{pv_i} + \xi.$$

Donde $\widetilde{P}_{pv_i}$ es el promedio de los datos históricos de generación del generador renovable i, y el parámetro aleatorio ξ representa el error en la estimación de la energía generada en cada instante de tiempo para dicho generador. Este parámetro debe considerarse tanto en la función objetivo como en las restricciones de flujo de potencia.

Para el caso de las restricciones, se debe evaluar el impacto de esta variable aleatoria utilizando un costo de riesgo de oportunidad mediante el valor condicional en riesgo (CVAR), de la siguiente forma:$\sum_{m=1}^{M} P_{Gm}^{t} + \sum_{s=1}^{S} P_{Bs}^{t} + CVAR[\xi] = \mathbf{L}_t$. El uso de este parámetro para modelar el riesgo es esencial, ya que una formulación basada en optimización robusta distribucional implicaría un problema anidado, es decir, multinivel.

Por lo tanto, la reformulación del problema (4-8) en términos de optimización robusta distribucional se expresa como:

$$\min_{P_g,P_s} \sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M} \left(a_m {P_{Gm}^t}^2 + b_m P_{Gm}^t + c_m\right) + \max_{\mathbb{Q}_0 \in \mathscr{P}_W(\mathbb{Q}_0,\epsilon)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_0}\left[C_{pv_i} \cdot P_{pv_i}(\xi)\right] \tag{4-21}$$

$$\text{s.t.} \quad x \in \mathcal{X}.$$

El comportamiento de la variable aleatoria ξ se define bajo el conjunto de ambigüedad $\mathscr{P}_W(\mathbb{Q}_0,\epsilon)$:

$$\mathscr{P}_W(\mathbb{Q}_0,\epsilon) := \{\mathbb{P} \in \mathscr{P}_0(\mathscr{U}) : W_p(\mathbb{P},\mathbb{Q}_0) \leq \epsilon\}, \tag{4-22}$$

donde $\mathscr{U}$ es el conjunto de incertidumbre de los datos de soporte de la variable aleatoria. Este conjunto se define de forma poliédrica como:

$$\mathscr{U} := \left\{\xi \in \mathbb{R}^j \mid H\xi \preceq d\right\}, \tag{4-23}$$

con j como el número de valores de soporte presentes en la función de densidad de probabilidad empírica $\mathbb{Q}_0$. En la ecuación (4-23), $H = [-I, I] \in \mathbb{R}^{2j\times j}$ y $d = \left[\widetilde{P}_{pv_i}^t - P_{pv_i}^{\text{mín}}, -\widetilde{P}_{pv_i}^t + P_{pv_i}^{\text{máx}}\right]$.

Para realizar la reformulación del problema (4-8), es necesario hallar la función conjugada con respecto a ξ y la función de soporte del conjunto de incertidumbre $\mathscr{U}$. La función conjugada se define como:

$$[-f*](\omega) = \max_{\xi} \left\{\omega^T\xi + f(\boldsymbol{x},\xi)\right\} \tag{4-24}$$

$$= \max_{\xi} \left\{\omega^T\xi + C_{pv_i}\xi\right\} + l(x), \quad \begin{cases} l(x) & \text{si } \omega = C_{pv_i}, \\ +\infty & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Aquí, $l(x) = sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\left(a_m\left(P_{Gm}^t\right)^2 + b_m P_{Gm}^t + c_m\right) + \widetilde{P}_{pv_i}C_{pv_i}$y ω es una variable auxiliar que surge al hallar la función conjugada. La función de soporte del conjunto de incertidumbre $\mathscr{U}$ es:

$$\sigma_{\mathscr{U}}(v) = \max_{\xi\in\mathscr{U}} \left\{v^T\xi\right\} \tag{4-25}$$

$$\text{sujeto a} \quad H\xi \leq d,$$

donde v es una variable auxiliar introducida en la función de soporte. De acuerdo con la teoría de robustez presentada en el capítulo anterior, la contraparte robusta de (4-24) se expresa como:

$$\min_{\kappa} \quad d^T \kappa \tag{4-26}$$

$$\text{s.t.} \quad H\kappa = v, \tag{4-27}$$

$$\kappa \geq 0.$$

Aquí, κ es la variable auxiliar resultante de la reformulación robusta del problema (4-25). Por lo cual la reformulación (tal y como fue plasmado en 3-27) del problema (4-8), para un generador renovable para $\mathcal{T}$ instantes de tiempo, sería:

$$\min_{\kappa} \quad d^T \kappa \tag{4-28}$$

$$[-f^*](x,\omega) + \sigma_{\mathcal{U}}(v) + \boldsymbol{w_{j,t}}^T \zeta_{j,t} \leq z_{j,t}$$

$$||\omega||^* \leq \alpha \quad \forall j \in [\mathcal{J}], \forall t \in [\mathcal{T}]$$

Acorde a los parámetros hallados anteriormente en las ecuaciones (4-24) y (4-26)

$$\min_{x \in X, \alpha \geq 0, w, v, z} \epsilon \cdot \alpha + \sum_{t=1}^{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{\mathcal{J}} q_{j,t} z_{j,t} \tag{4-29}$$

$$\text{s.t.} \quad l(x) + d^T \kappa - C_{pv_i} \zeta_{j,t} \leq z_{j,t}$$

$$-C_{pv_i} - v_{j,t} + C_{pv_i} = 0$$

$$H\kappa_{j,t} = v_{j,t}$$

$$||C_{pv_i}||* \leq \alpha \quad \forall j \in [\mathcal{J}], \forall t \in [\mathcal{T}]$$

$$\kappa \geq 0$$

como $\omega_{j,t} = -C_{pv_i}$ simplifica el problema en:

$$\min_{x\in X,\alpha\geq 0,w,v,z} \epsilon\cdot\alpha + \sum_{t=1}^{\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{\mathcal{J}} q_{j,t}z_{j,t} \tag{4-30}$$

$$\text{s.t.} \quad l(x) + d^T\kappa - C_{pv_i}\zeta_{j,t} \leq z_{j,t}$$

$$v_{j,t} = 0$$

$$H\kappa_{j,t} = v_{j,t} \iff \kappa_{j,t} = 0$$

$$||C_{pv_i}||* \leq \alpha \quad \forall j \in [\mathcal{J}], \forall t \in [\mathcal{T}]$$

$$\kappa \geq 0,$$

Para el problema de despacho económico que se ha venido desarrollando a lo largo de la presente sección, se tiene en cuenta el mismo generador de energía renovable descrito en la Figura **4-2**, para eso se realiza una estimación de una función de densidad de probabilidad empírica $\mathbb{Q}_0$ por medio de estimación de densidad de Kernel, teniendo en cuenta el historial de generación por cada uno de los instantes de tiempo $t \in \mathcal{T}$, a continuación se puede analizar el las funciones de densidad de probabilidad empíricas para cada uno de los espacios de tiempo desde las 6 de la mañana hasta las 6 de la tarde.

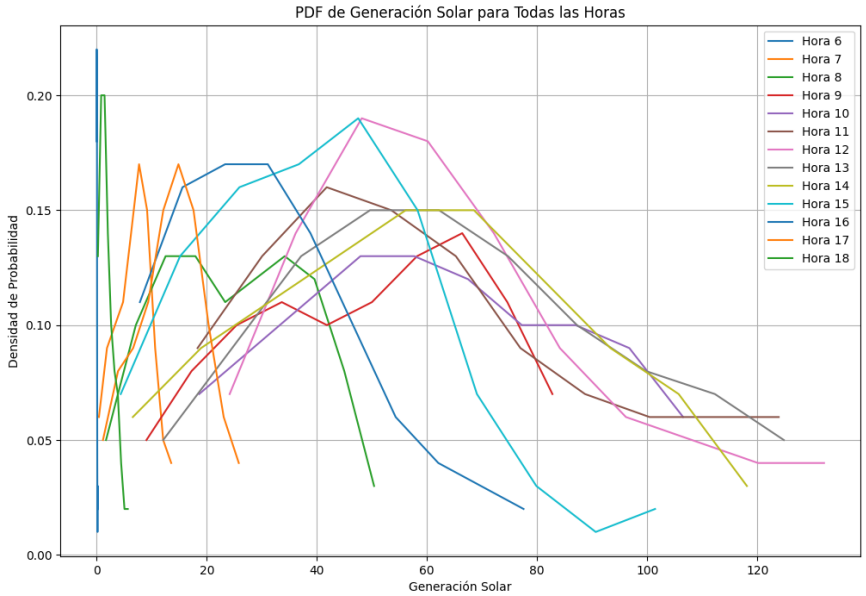


Figura 4-5: Funciones de densidad de probabilidad por cada instante de tiempo

en donde el eje x de la gráfica permite analizar los datos de soporte de nuestras funciones de densidad de probabilidad, y el y hace referencia a la probabilidad de que dicho dato de soporte ocurra, dichas funciones son descritas de manera discreta para $j = 20$ puntos de soporte mediante la siguiente tabla.

Tabla 4-4: Valores de soporte ζ para diferentes instancias

	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	ζ_6	ζ_7	ζ_8	ζ_9	ζ_{10}	ζ_{11}	ζ_{12}	ζ_{13}
0	-0.05	-6.21	-23.26	-39.37	-42.27	-43.41	-41.80	-53.05	-53.52	-35.35	-22.53	-12.17	-1.61
1	-0.04	-5.52	-20.70	-35.49	-37.64	-37.85	-36.12	-47.12	-47.65	-30.24	-18.86	-10.87	-1.32
2	-0.03	-4.83	-18.14	-31.61	-33.02	-32.30	-30.44	-41.18	-41.78	-25.14	-15.20	-9.57	-1.04
3	-0.02	-4.14	-15.57	-27.73	-28.39	-26.74	-24.76	-35.25	-35.91	-20.03	-11.53	-8.27	-0.75
4	-0.01	-3.45	-13.01	-23.85	-23.76	-21.19	-19.07	-29.32	-30.04	-14.92	-7.86	-6.98	-0.47
5	0.01	-2.75	-10.45	-19.97	-19.14	-15.63	-13.39	-23.39	-24.17	-9.81	-4.19	-5.68	-0.18
6	0.02	-2.06	-7.89	-16.09	-14.51	-10.08	-7.71	-17.45	-18.30	-4.71	-0.53	-4.38	0.10
7	0.03	-1.37	-5.33	-12.21	-9.89	-4.52	-2.03	-11.52	-12.43	0.40	3.14	-3.08	0.39
8	0.04	-0.68	-2.76	-8.33	-5.26	1.03	3.65	-5.59	-6.56	5.51	6.81	-1.78	0.68
9	0.05	0.01	-0.20	-4.45	-0.63	6.59	9.33	0.34	-0.69	10.62	10.48	-0.48	0.96
10	0.06	0.70	2.36	-0.56	3.99	12.14	15.02	6.28	5.18	15.72	14.14	0.81	1.25
11	0.07	1.39	4.92	3.32	8.62	17.70	20.70	12.21	11.05	20.83	17.81	2.11	1.53
12	0.08	2.08	7.49	7.20	13.25	23.25	26.38	18.14	16.92	25.94	21.48	3.41	1.82
13	0.09	2.77	10.05	11.08	17.87	28.81	32.06	24.07	22.79	31.05	25.15	4.71	2.11
14	0.10	3.46	12.61	14.96	22.50	34.36	37.74	30.01	28.66	36.15	28.81	6.01	2.39
15	0.12	4.16	15.17	18.84	27.12	39.92	43.42	35.94	34.53	41.26	32.48	7.31	2.68
16	0.13	4.85	17.73	22.72	31.75	45.47	49.11	41.87	40.40	46.37	36.15	8.60	2.96
17	0.14	5.54	20.30	26.60	36.38	51.03	54.79	47.80	46.27	51.48	39.82	9.90	3.25
18	0.15	6.23	22.86	30.48	41.00	56.58	60.47	53.74	52.14	56.58	43.48	11.20	3.53
19	0.16	6.92	25.42	34.36	45.63	62.14	66.15	59.67	58.01	61.69	47.15	12.50	3.82

Tabla 4-5: Tabla de pesos de probabilidad q, para los valors de soporte ζ.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	0.09	0.03	0.03	0.02	0.03	0.04	0.04	0.02	0.03	0.04	0.06	0.02	0.07
1	0.10	0.04	0.04	0.03	0.04	0.05	0.05	0.03	0.03	0.05	0.07	0.03	0.08
2	0.11	0.04	0.05	0.04	0.04	0.06	0.07	0.04	0.04	0.06	0.08	0.04	0.10
3	0.11	0.05	0.06	0.04	0.05	0.07	0.08	0.05	0.05	0.07	0.08	0.04	0.10
4	0.11	0.05	0.06	0.05	0.05	0.08	0.09	0.06	0.05	0.08	0.08	0.04	0.10
5	0.10	0.05	0.06	0.05	0.06	0.08	0.09	0.07	0.05	0.08	0.08	0.05	0.09
6	0.09	0.05	0.06	0.05	0.06	0.08	0.09	0.07	0.06	0.08	0.08	0.05	0.07
7	0.07	0.06	0.06	0.05	0.06	0.07	0.08	0.08	0.06	0.09	0.08	0.06	0.06
8	0.06	0.06	0.05	0.05	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.09	0.07	0.07	0.05
9	0.04	0.07	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07	0.09	0.07	0.08	0.05
10	0.03	0.08	0.05	0.05	0.06	0.05	0.05	0.07	0.07	0.08	0.05	0.08	0.04
11	0.02	0.08	0.06	0.06	0.06	0.04	0.04	0.06	0.07	0.06	0.04	0.08	0.04
12	0.01	0.08	0.06	0.06	0.05	0.04	0.03	0.05	0.06	0.04	0.03	0.08	0.04
13	0.01	0.07	0.06	0.07	0.05	0.03	0.03	0.05	0.06	0.03	0.03	0.07	0.03
14	0.01	0.06	0.06	0.07	0.05	0.03	0.03	0.04	0.05	0.02	0.02	0.06	0.02
15	0.01	0.04	0.06	0.07	0.05	0.03	0.03	0.04	0.04	0.01	0.02	0.04	0.02
16	0.01	0.03	0.05	0.06	0.05	0.03	0.02	0.03	0.04	0.01	0.01	0.04	0.01
17	0.01	0.03	0.04	0.05	0.04	0.03	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.03	0.01
18	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.03	0.02	0.03	0.03	0.01	0.01	0.02	0.01
19	0.00	0.01	0.01	0.04	0.03	0.03	0.01	0.04	0.04	0.00	0.03	0.02	0.01

Teniendo en cuenta la reformulación implementada anteriormente, se desarrolla el problema de despacho económico para los mismos instantes de tiempo y parámetros de modelamiento de los elementos de la microrred, que se tuvieron en cuenta para las subsecciones anteriores de optimización robusta y optimización estocastica, a continuación se analizarán los resultados.

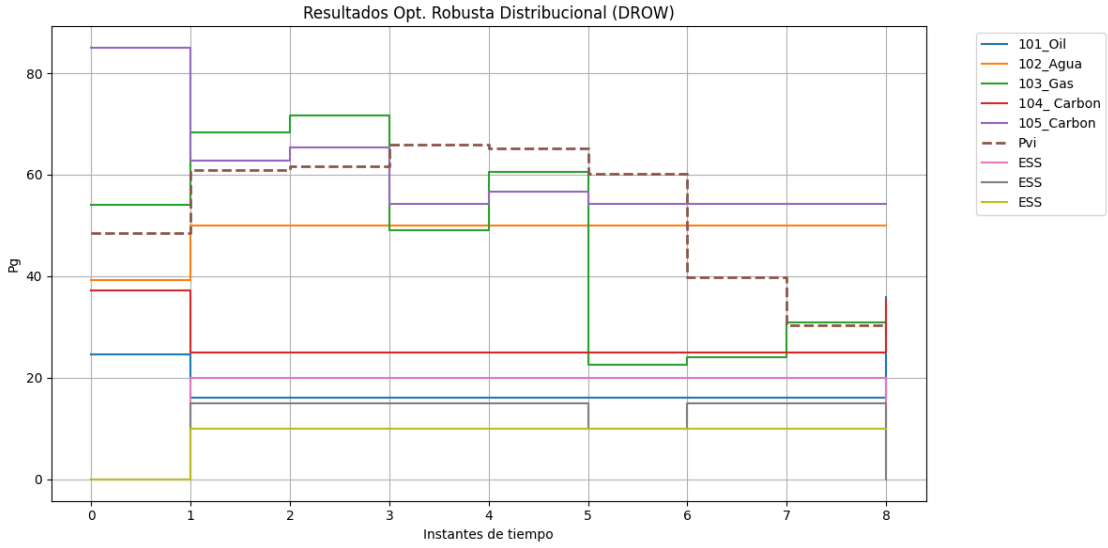


Figura 4-6: Resultados despacho económico robusto distribucional (DROW) para microrred para 8 instantes de tiempo

El modelo robusto distribucional contiene 327 variables escalares y 613 restricciones, incluidas 5 restricciones afines cónicas. La optimización, realizada mediante el método de punto interior, alcanzó una solución óptima en 17 iteraciones, con un costo total de 2,536,776.15. El cálculo se completó en 0.08 segundos, con un gap de optimalidad relativa del 0 %, garantizando alta precisión en la solución. El estado del problema fue primal y dual factibles, logrando una solución óptima.

A continuación, se presentará una síntesis adecuada de los resultados obtenidos al implementar el problema de optimización utilizando las tres metodologías mencionadas en la presente sección.

Modelo	Variables	Restricciones	Cónicas	Iteraciones	Costo Total	Tiempo (s)
Robustas Distribucional	327	613	5	17	52,073.1804	0.08
Estocástico	159	445	5	15	51,185.7005	0.06
Robustas	159	445	5	17	55,700.3688	0.05

Tabla 4-6: Resumen de los modelos optimizados

Al examinar la Tabla **4-6**, se observa que el modelo robusto distribucional, aunque presenta un mayor número de variables (327) y restricciones (613) es un problema mucho más sencillo de resolver en comparación con los modelos estocástico y robusto, logra una solución más conservadora, con un costo total de 52,073.18. Este enfoque le permite gestionar mejor la incertidumbre, proporcionando resultados que garantizan mayor fiabilidad. A pesar de que el modelo estocástico tiene un costo total más bajo de 51,185.70 y se resuelve en menos tiempo (0.06 segundos), su complejidad al escalar el problema y considerar más variables y restricciones podría hacerlo menos efectivo ante situaciones de alta variabilidad. Por otro lado, el modelo robusto, que también tiene 159 variables y 445 restricciones, presenta un costo total de 55,700.37 y se resuelve en 0.05 segundos, lo que sugiere que su solución es más costosa en comparación con el modelo estocástico, pero con un enfoque robusto que podría ofrecer una mejor seguridad ante la incertidumbre. En resumen, el modelo robusto distribucional, aunque más complejo y costoso, proporciona una solución más segura y confiable en entornos inciertos, a diferencia de los otros modelos.

Esta comparación entre los distintos enfoques de modelamiento resalta la importancia de seleccionar el modelo adecuado según las características del problema y el entorno en el que se aplican. Dado que el modelo robusto distribucional ha demostrado ser superior en términos de confiabilidad, se justifica su uso

en situaciones de alta incertidumbre. En la siguiente sección, se realizará el análisis y modelamiento de problemas de optimización utilizando una metodología robusta distribucional (DROW), implementada en un sistema de múltiples microrredes interconectadas. Este enfoque permitirá explorar de manera más profunda las ventajas del modelado robusto en la gestión eficiente de recursos energéticos, asegurando soluciones que mantengan la fiabilidad ante variaciones en la demanda y oferta de energía.

4.4 Optimización de múltiples microrredes

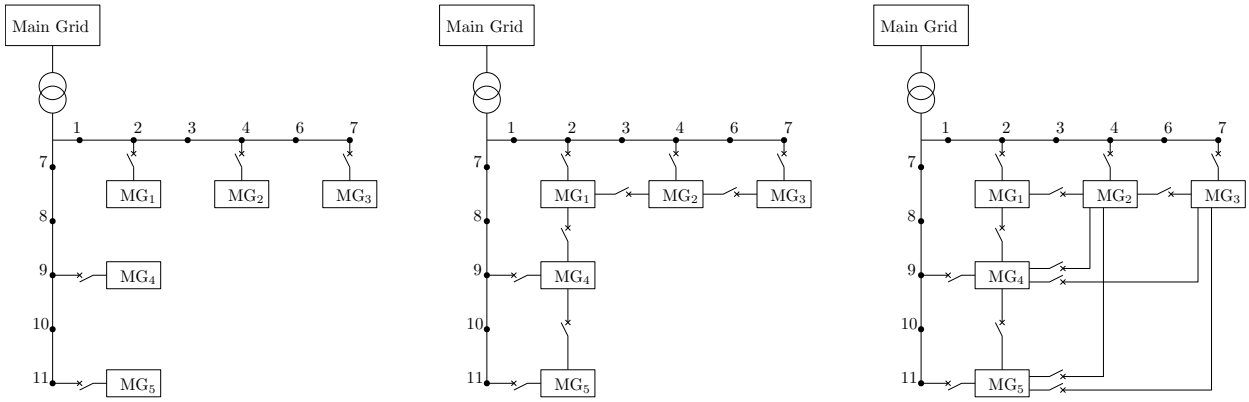
Con el fin de explotar las ventajas de los MG y superar algunas de sus limitaciones en la inclusión de DER, los sistemas de múltiples MGs o NMG han surgido como paradigma fundamental para la gestión energética de los sistemas de distribución con alta inclusión de DER [4]. Por ejemplo, un NMG es mucho más confiable, duradero y resistente que cualquier MG individual [28; 54] y puede brindarse soporte de energía entre sí [66]. Es posible lograr esta reducción de costos a través de estrategias apropiadas de intercambio de energía [62]. De hecho, algunos resultados numéricos muestran una reducción de costes de alrededor del 30 % [53]. Además, la resiliencia intrínseca de los NMG los hace bastante aptos para respaldar las operaciones de la ciudad durante eventos extremos o catástrofes [51; 16; 55]. Además, la cooperación entre GMN muestra serias ventajas para una operación de MG individual [38]. Por ejemplo, la coordinación entre los NMG puede reducir los costos de generación y mejorar la confiabilidad y la resiliencia de todo el sistema [64; 4; 41; 67; 40; 59]. Sin embargo, los sistemas NMG tienen sus propios desafíos particulares. Por ejemplo, el intercambio de información entre los diferentes componentes de la red sigue siendo un problema. Sabemos que la gestión de información centralizada no es una solución conveniente para este problema, y un alcance distribuido donde las entidades comparten solo información parcial es un enfoque atractivo. Otro desafío crucial de los NMG es modelar las incertidumbres y trabajar con un nivel de precisión limitado, ya sea incertidumbres de generación de recursos renovables o simplificaciones del sistema .El principal inconveniente de la generación distribuida son las incertidumbres debidas a las condiciones climáticas. [1] Herramientas como redes neuronales artificiales, soporte de vectores y regresión de procesos gaussianos se utilizan para modelar y predecir la generación eólica y solar o los comportamientos de la demanda de electricidad. Permite proponer metodologías de control que pueden mejorar el desempeño de las técnicas actuales y brindar información que se utiliza en las decisiones del operador de la MG. Se realiza una revisión de estos temas en [46], [25]. Estas técnicas predicen el comportamiento de las MGs solo utilizando mediciones en el punto de acople común, información meteorológica e información sobre el precio de la electricidad sin una identificación completa del sistema o conocimiento previo [57].

Existen diversas clasificaciones de microrredes (NMG), las cuales se pueden categorizar en microrredes de corriente alterna (CA), corriente continua (DC) y híbridas (CA/DC) [64; 34; 3; 50; 21]. Las microrredes de CA son las más comunes, ya que su diseño e implementación son relativamente sencillos y son compatibles con la red eléctrica existente. Sin embargo, requieren dispositivos electrónicos complejos para gestionar algunos recursos energéticos distribuidos (DER). Por su parte, las NMG de DC presentan la ventaja de que varios DER operan de forma nativa en corriente continua, lo que facilita su integración con sistemas de almacenamiento de energía (ESS) y reduce costos. No obstante, su principal desventaja es la incompatibilidad con los sistemas de energía convencionales [50]. Según la tecnología de interconexión utilizada, las NMG pueden emplear transformadores de potencia o convertidores de electrónica de potencia. La interconexión física de las NMG es fundamental, ya que define características clave, como su conexión al sistema de distribución central y la capacidad de una microrred con déficit de generación para recibir apoyo de otras microrredes cercanas. Además, la elección de la interconexión impacta significativamente en el costo, al determinar el tipo de dispositivos requeridos [9].

La topología más adecuada para una NMG dependerá de su alcance y aplicación específica [10]. A continuación, se describen las topologías físicas más comunes:

Topología radial

La topología radial se caracteriza por la conexión directa de cada microrred a la red central, lo que implica que cada microrred puede operar de manera aislada o conectada, sin interacción directa entre ellas. Se comunican con el operador de red distribuida (DNO) para coordinar su relación con la red principal. Si una microrred no puede satisfacer su demanda, puede adquirir energía de la red, y si tiene un excedente,



((a)) Topología Radial ((b)) Topología Cadena Margarita ((c)) Topología Mesh

Figura 4-7: Topologías Físicas de NMG

puede venderlo para obtener beneficios económicos [67]. Esta arquitectura permite el aislamiento de una microrred en caso de contingencias, lo que permite que las microrredes no afectadas continúen operando. Su capacidad plug-and-play es una ventaja adicional, facilitando su implementación en sistemas de distribución a gran escala [56]. Sin embargo, puede haber problemas de estabilidad cuando las microrredes operan en modo aislado [24].

Topología de cadena margarita

En esta arquitectura, las microrredes están conectadas a la red principal y también entre sí, lo que permite un flujo más rápido y directo de energía e información. Esta conexión facilita la colaboración y el comercio de energía, y permite el aislamiento de microrredes específicas en caso de fallos. Las múltiples conexiones también permiten redirigir la energía a través de rutas alternativas según sea necesario [24; 36]. No obstante, el intercambio de información necesario presenta un desafío en términos de protección de la privacidad del usuario [4; 67].

Topología de malla

La topología de malla conecta cada microrred a varias otras microrredes mediante enlaces físicos o de comunicación. Aunque esta topología es más compleja y dificulta la coordinación, permite una mejora en el rendimiento operativo y la reducción de costos si las microrredes colaboran de manera efectiva [41; 67]. Las decisiones operativas se ven influenciadas no solo por la generación y demanda local, sino también por las decisiones de otras microrredes en la red [67].

4.4.1 Modelamiento de NMGs usando DROW

Para validar el concepto de Optimización Robusta Distribucional (DRO) y evaluar su eficiencia en un escenario de despacho económico del día anterior, se utiliza Mosek Fusion como herramienta de optimización. El estudio se basa en el modelo de red presentado en [5], con modificaciones que consisten en 4 microrredes interconectadas mediante $r = 5$ puntos de acople común (PCC). Los rangos operacionales de estos puntos

de acople se detallan en la Tabla **4-9**. A continuación se pueden observar las restricciones adicionales para tener en cuenta en nuestro modelo de múltiples microrredes.

$$P_{cc}^{min,t} \leq P_{cc}^{t} \leq P_{cc}^{max,t} \tag{4-31}$$

En la operación de múltiples microrredes es fundamental considerar la energía inyectada desde los Puntos Comunes de Acoplo (PCC) en los flujos de potencia internos. Los PCC permiten la interacción entre las microrredes y la red principal o entre diferentes microrredes, facilitando el intercambio de energía. Para cada microrred i, el balance de potencia se expresa como:

$$\sum_{m=1}^{M} P_{Gm}^{t} + \sum_{s=1}^{S} P_{Bs}^{t} + CVAR\left[\xi\right] + \sum_{r=1}^{R} P_{cc}^{r,t} = \mathbf{L}_{r,t} \tag{4-32}$$

en donde $\sum_{r=1}^{R} P_{cc}^{r,t}$ es la energía inyectada desde las microrredes a las que se encuentra conectada cada una de las microrredes que se están modelando, acorde al esquema presentado en la Figura **4-8**. La inclusión de estos términos son escenciales para garantizar un despacho de energía eficiente y mantener el equilibrio entre oferta y demanda en escenarios con alta penetración de fuentes renovables e interconexiones múltiples entre microrredes.

Por otro lado, la Tabla **4-7** presenta los parámetros de operación de los $m = 16$ generadores distribuidos entre las 5 microrredes. Cada microrred incluye $i = 3$ generadores renovables con 50 datos históricos. Además, se consideran $s = 4$ sistemas de almacenamiento de energía (ESS), cuya ubicación y características específicas se describen en la Tabla **4-8**. Estos sistemas operan durante $t = 24$ instantes de tiempo.

A continuación, se presentan las tablas que contienen la información detallada sobre los generadores, las cargas y los datos históricos de los generadores renovables.

Tabla 4-7: Parámetros de Unidades Generadoras por Microrred

MG	Und	Pg_min	Pg_max	a_m	b_m	c_m	ramp_up	ramp_down
1	101_Oil	36	120	0,04872	53,21	400,6849	20	20
1	102_Agua	50	250	0	0,001	0,001	25	25
1	103_Gas	30,4	228	0,064142	14,0811	212,3076	40	40
1	104_Carbon	50	250	0,05272	43,6615	581,521	40	24
1	105_Carbon	60,6	300	0,08342	12,3883	382,2391	50	60
1	106_Oil	4,8	36	0,328412	57	864	12	12
2	202_Agua	50	250	0	0,001	0,001	25	25
2	205_Carbon	60,6	300	0,08342	12,3883	382,2391	50	60
2	206_Oil	4,8	36	0,328412	57	864	12	12
3	301_Oil	36	120	0,04872	53,21	400,6849	20	20
3	302_Agua	50	250	0	0,001	0,001	25	25
3	306_Oil	4,8	36	0,328412	57	864	12	12
3	302_Agua	50	250	0	0,001	0,001	25	25
4	403_Gas	30,4	228	0,064142	14,0811	212,3076	40	40
4	404_Carbon	50	250	0,05272	43,6615	581,521	40	24
4	405_Carbon	60,6	300	0,08342	12,3883	382,2391	50	60

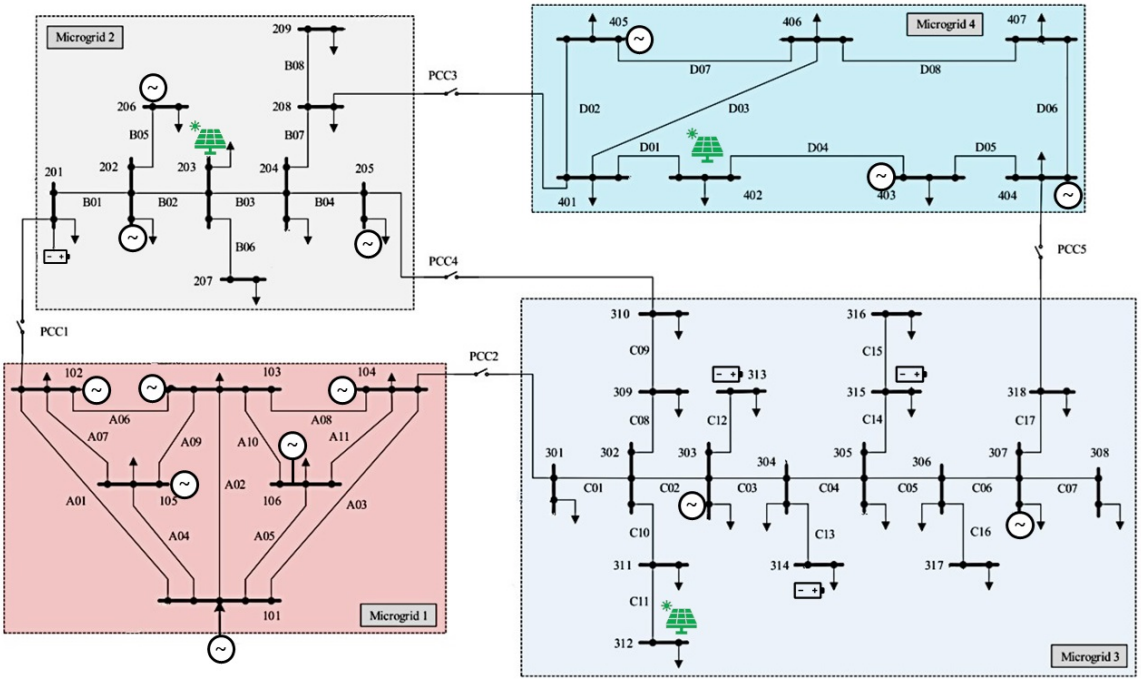


Figura 4-8: Modelo de multiples microrredes implementado

MG	Und	Bs_max	Bs_min	Pbs_min	Pbs_max	efbs
2	1	200	50	-20	20	-0.95
3	2	150	50	-15	15	-0.9
3	3	150	50	-10	10	-0.9
3	4	300	100	-20	20	-0.95

Tabla 4-8: Datos de microrredes y sus características.

Tabla 4-9: Parámetros de Interconexión entre Microrredes

Pcc	**from_mg**	**to_mg**	**from_bus**	**to_bus**	**Lenght**	**I_Rat [A]**	**caliber**	**energy_rat**
1	1	2	102	201	1,0	195	2/0 AWG	156
2	1	3	104	301	1,5	195	2/0 AWG	156
3	2	3	208	401	2,0	130	2 AWG	104
4	2	4	205	310	2,5	130	2 AWG	104
5	3	4	318	404	1,0	130	2 AWG	104

Load	t0	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7
101	0	0	0	0	0	0	0	0
102	172.125	163.625	170	167.875	167.875	174.25	178.5	184.875
103	269.649	256.333	266.32	262.991	262.991	272.978	279.636	289.623
104	166.05	157.85	164	161.95	161.95	168.1	172.2	178.35
105	0	0	0	0	0	103.074	105.588	109.359
106	85.536	81.312	84.48	83.424	83.424	86.592	88.704	91.872
201	0	0	0	0	0	0	0	0
202	101.25	96.25	100	98.75	98.75	102.5	105	108.75
203	97.443	92.631	96.24	95.037	95.037	98.646	101.052	104.661
204	110.646	105.182	109.28	107.914	107.914	112.012	114.744	118.842
205	61.884	58.828	61.12	60.356	60.356	62.648	64.176	66.468
206	40.743	38.731	40.24	39.737	39.737	41.246	42.252	43.761
207	27.945	26.565	27.6	27.255	27.255	28.29	28.98	30.015
208	50.949	48.433	50.32	49.691	49.691	51.578	52.836	54.723
209	52.002	49.434	51.36	50.718	50.718	52.644	53.928	55.854
301	46.98	44.66	46.4	45.82	45.82	47.56	48.72	50.46
302	52.65	50.05	52	51.35	51.35	53.3	54.6	56.55
303	54.513	51.821	53.84	53.167	53.167	55.186	56.532	58.551
304	35.559	33.803	35.12	34.681	34.681	35.998	36.876	38.193
305	48.6	46.2	0	0	0	0	0	0
306	45.36	43.12	44.8	44.24	44.24	45.92	47.04	48.72
307	68.931	65.527	68.08	67.229	67.229	69.782	71.484	74.037
308	34.02	32.34	33.6	33.18	33.18	34.44	35.28	36.54
309	40.5	38.5	40	39.5	39.5	41	42	43.5
310	51.597	49.049	50.96	50.323	50.323	52.234	53.508	55.419
311	115.242	0	0	0	0	0	0	0
312	10.125	9.625	10	9.875	9.875	10.25	10.5	10.875
313	13.689	13.013	13.52	13.351	13.351	13.858	14.196	14.703
314	16.2	15.4	16	15.8	15.8	16.4	16.8	17.4
315	20.25	19.25	20	19.75	19.75	20.5	21	21.75
316	0	0	0	16.827	16.827	17.466	17.892	18.531
317	10.773	10.241	10.64	10.507	10.507	10.906	11.172	11.571
318	16.2	15.4	16	15.8	15.8	16.4	16.8	17.4
401	34.506	32.802	34.08	33.654	33.654	34.932	35.784	37.062
402	25.758	24.486	25.44	25.122	25.122	26.076	26.712	27.666
403	28.836	27.412	28.48	28.124	28.124	29.192	29.904	30.972
404	37.179	35.343	36.72	36.261	36.261	37.638	38.556	39.933
405	66.42	63.14	65.6	64.78	64.78	67.24	68.88	71.34
406	202.5	192.5	200	197.5	197.5	205	210	217.5
407	66.096	62.832	65.28	64.464	64.464	66.912	68.544	70.992

Tabla 4-10: Demanda en los nodos descritos en la Figura **4-8** (franja 12am-7am)

Load	t8	t9	t10	t11	t12	t13	t14	t15
101	0	0	0	0	0	0	0	0
102	191.25	199.75	201.875	199.75	197.625	193.375	187	184.875
103	299.61	312.926	316.255	312.926	309.597	302.939	292.952	289.623
104	184.5	192.7	194.75	192.7	190.65	186.55	180.4	178.35
105	113.13	118.158	119.415	118.158	116.901	114.387	110.616	109.359
106	95.04	99.264	100.32	99.264	98.208	96.096	92.928	91.872
201	0	0	0	0	55.8	54.6	52.8	52.2
202	112.5	117.5	118.75	117.5	116.25	113.75	110	108.75
203	108.27	113.082	114.285	113.082	111.879	109.473	105.864	104.661
204	122.94	128.404	129.77	128.404	127.038	124.306	120.208	118.842
205	68.76	71.816	72.58	71.816	71.052	69.524	67.232	66.468
206	45.27	47.282	47.785	47.282	46.779	45.773	44.264	43.761
207	31.05	32.43	32.775	32.43	32.085	31.395	30.36	30.015
208	56.61	59.126	59.755	59.126	58.497	57.239	55.352	54.723
209	57.78	60.348	60.99	60.348	59.706	58.422	56.496	55.854
301	52.2	54.52	55.1	54.52	53.94	52.78	51.04	50.46
302	58.5	61.1	61.75	61.1	60.45	59.15	57.2	56.55
303	60.57	63.262	63.935	63.262	62.589	61.243	59.224	58.551
304	39.51	41.266	41.705	41.266	40.827	39.949	38.632	38.193
305	0	0	0	0	0	0	52.8	52.2
306	50.4	52.64	53.2	52.64	52.08	50.96	49.28	48.72
307	76.59	79.994	80.845	79.994	79.143	77.441	74.888	74.037
308	37.8	39.48	39.9	39.48	39.06	38.22	36.96	36.54
309	45	47	47.5	47	46.5	45.5	44	43.5
310	57.33	59.878	60.515	59.878	59.241	57.967	56.056	55.419
311	0	0	0	0	0	0	0	0
312	11.25	11.75	11.875	11.75	11.625	11.375	11	10.875
313	15.21	15.886	16.055	15.886	15.717	15.379	14.872	14.703
314	18	18.8	19	18.8	18.6	18.2	17.6	17.4
315	22.5	23.5	23.75	23.5	23.25	22.75	22	21.75
316	19.17	20.022	20.235	20.022	19.809	19.383	18.744	18.531
317	11.97	12.502	12.635	12.502	12.369	12.103	11.704	11.571
318	18	18.8	19	18.8	18.6	18.2	17.6	17.4
401	38.34	40.044	40.47	40.044	39.618	38.766	37.488	37.062
402	28.62	29.892	30.21	29.892	29.574	28.938	27.984	27.666
403	32.04	33.464	33.82	33.464	33.108	32.396	31.328	30.972
404	41.31	43.146	43.605	43.146	42.687	41.769	40.392	39.933
405	73.8	77.08	77.9	77.08	76.26	74.62	72.16	71.34
406	225	235	237.5	235	232.5	227.5	220	217.5
407	73.44	76.704	77.52	76.704	75.888	74.256	71.808	70.992

Tabla 4-11: Demanda en los nodos descritos en la Figura **4-8** (franja 8am-3pm)

Load	t16	t17	t18	t19	t20	t21	t22	t23
101	0	0	0	0	0	0	0	0
102	193.375	201.875	208.25	212.5	206.125	199.75	178.5	187
103	302.939	316.255	326.242	332.9	322.913	312.926	279.636	292.952
104	186.55	194.75	200.9	205	198.85	192.7	172.2	180.4
105	114.387	119.415	123.186	125.7	121.929	118.158	105.588	110.616
106	96.096	100.32	103.488	105.6	102.432	99.264	88.704	92.928
201	54.6	57	58.8	60	58.2	56.4	50.4	52.8
202	113.75	118.75	122.5	125	121.25	117.5	105	110
203	109.473	114.285	117.894	120.3	116.691	113.082	101.052	105.864
204	124.306	129.77	133.868	136.6	132.502	128.404	114.744	120.208
205	69.524	72.58	74.872	76.4	74.108	71.816	64.176	67.232
206	45.773	47.785	49.294	50.3	48.791	47.282	42.252	44.264
207	31.395	32.775	33.81	34.5	33.465	32.43	28.98	30.36
208	57.239	59.755	61.642	62.9	61.013	59.126	52.836	55.352
209	58.422	60.99	62.916	64.2	62.274	60.348	53.928	56.496
301	52.78	55.1	56.84	58	56.26	54.52	48.72	51.04
302	59.15	61.75	63.7	65	63.05	61.1	54.6	57.2
303	61.243	63.935	65.954	67.3	65.281	63.262	56.532	59.224
304	39.949	41.705	43.022	43.9	42.583	41.266	36.876	38.632
305	54.6	57	58.8	60	58.2	56.4	50.4	52.8
306	50.96	53.2	54.88	56	54.32	52.64	47.04	49.28
307	77.441	80.845	83.398	85.1	82.547	79.994	71.484	74.888
308	38.22	39.9	41.16	42	40.74	39.48	35.28	36.96
309	45.5	47.5	49	50	48.5	47	42	44
310	57.967	60.515	62.426	63.7	61.789	59.878	53.508	56.056
311	171.708	74.86	77.224	78.8	76.436	74.072	66.192	69.344
312	11.375	11.875	12.25	12.5	12.125	11.75	10.5	11
313	15.379	16.055	16.562	16.9	16.393	15.886	14.196	14.872
314	18.2	19	19.6	20	19.4	18.8	16.8	17.6
315	22.75	23.75	24.5	25	24.25	23.5	21	22
316	0	0	0	0	0	0	0	0
317	12.103	12.635	13.034	13.3	12.901	12.502	11.172	11.704
318	18.2	19	19.6	20	19.4	18.8	16.8	17.6
401	38.766	40.47	41.748	42.6	41.322	40.044	35.784	37.488
402	28.938	30.21	31.164	31.8	30.846	29.892	26.712	27.984
403	32.396	33.82	34.888	35.6	34.532	33.464	29.904	31.328
404	41.769	43.605	44.982	45.9	44.523	43.146	38.556	40.392
405	74.62	77.9	80.36	82	79.54	77.08	68.88	72.16
406	227.5	237.5	245	250	242.5	235	210	220
407	74.256	77.52	79.968	81.6	79.152	76.704	68.544	71.808

Tabla 4-12: Demanda en los nodos descritos en la Figura **4-8** (franja 4am-11pm)

Teniendo en cuenta la reformulación implementada en la ecuación 4-30, se desarrolla el problema de despacho económico para los mismos instantes de tiempo y parámetros de modelamiento de los elementos de la microrred. Estos parámetros fueron considerados en las subsecciones anteriores de optimización robusta y optimización estocástica. La estructura general del problema de optimización para múltiples variables aleatorias es la misma que se tiene en el texto escrito anteriormente, por lo que la única variación que tendrá el nuevo problema de múltiples microrredes interconectadas radicará en la adición de esos parámetros *pcc*. Dicha restricción es únicamente parte del conjunto $x \in \mathcal{X}$, haciendo así que no se tome en cuenta a la hora de realizar la reformulación.

Tabla 4-13: Consumo por Microrred en Cada Intervalo de Tiempo

Time_slot	Lt_mg1	Lt_mg2	Lt_mg3	Lt_mg4	Lt_Total
1	693,36	542,862	681,189	461,295	2.378,71
2	659,12	516,054	537,999	438,515	2.151,69
3	684,8	536,16	510,96	455,6	2.187,52
4	676,24	529,458	521,4	449,905	2.177,00
5	676,24	529,458	521,4	449,905	2.177,00
6	804,994	549,564	541,2	466,99	2.362,75
7	824,628	562,968	554,4	478,38	2.420,38
8	854,079	583,074	574,2	495,465	2.506,82
9	883,53	603,18	594	512,55	2.593,26
10	922,798	629,988	620,4	535,33	2.708,52
11	932,615	636,69	627	541,025	2.737,33
12	922,798	629,988	620,4	535,33	2.708,52
13	912,981	679,086	613,8	529,635	2.735,50
14	893,347	664,482	600,6	518,245	2.676,67
15	863,896	642,576	633,6	501,16	2.641,23
16	854,079	635,274	626,4	495,465	2.611,22
17	893,347	664,482	807,525	518,245	2.883,60
18	932,615	693,69	738,625	541,025	2.905,96
19	962,066	715,596	761,95	558,11	2.997,72
20	981,7	730,2	777,5	569,5	3.058,90
21	952,249	708,294	754,175	552,415	2.967,13
22	922,798	686,388	730,85	535,33	2.875,37
23	824,628	613,368	653,1	478,38	2.569,48
24	863,896	642,576	684,2	501,16	2.691,83

A continuación, se podrá observar los resultados obtenidos en la simulación de la multimicrorred expuesta en la presente sección.

El problema de optimización con enfoque robusto distribucional para multiples microrredes interconectadas presenta 1015 variables escalares y 2783 restricciones, de las cuales 16 son restricciones afines cónicas. La optimización, llevada a cabo mediante el método de punto interior, logró una solución óptima con un valor objetivo primal de 9.8384555171e+07 y un valor dual de 9.8384555178e+07. La solución fue alcanzada en un tiempo total de 0.31 segundos.

La utilización del enfoque de Optimización Robusta Distribucional (DROW) presenta varias ventajas al abordar problemas con un elevado número de variables y restricciones. En primer lugar, la formulación del DROW permite manejar la incertidumbre de manera efectiva al considerar múltiples escenarios, lo que enriquece la solución y la hace más robusta frente a variaciones en los parámetros. A pesar de un incremento en el número de variables y restricciones, la naturaleza lineal de estas últimas garantiza que se mantenga la convexidad de la función objetivo principal. Esto resulta en una mayor seguridad de que cualquier mínimo identificado será, de hecho, un mínimo global. En consecuencia, el enfoque DROW no solo optimiza la solución en contextos complejos, sino que también asegura la validez de los resultados obtenidos.

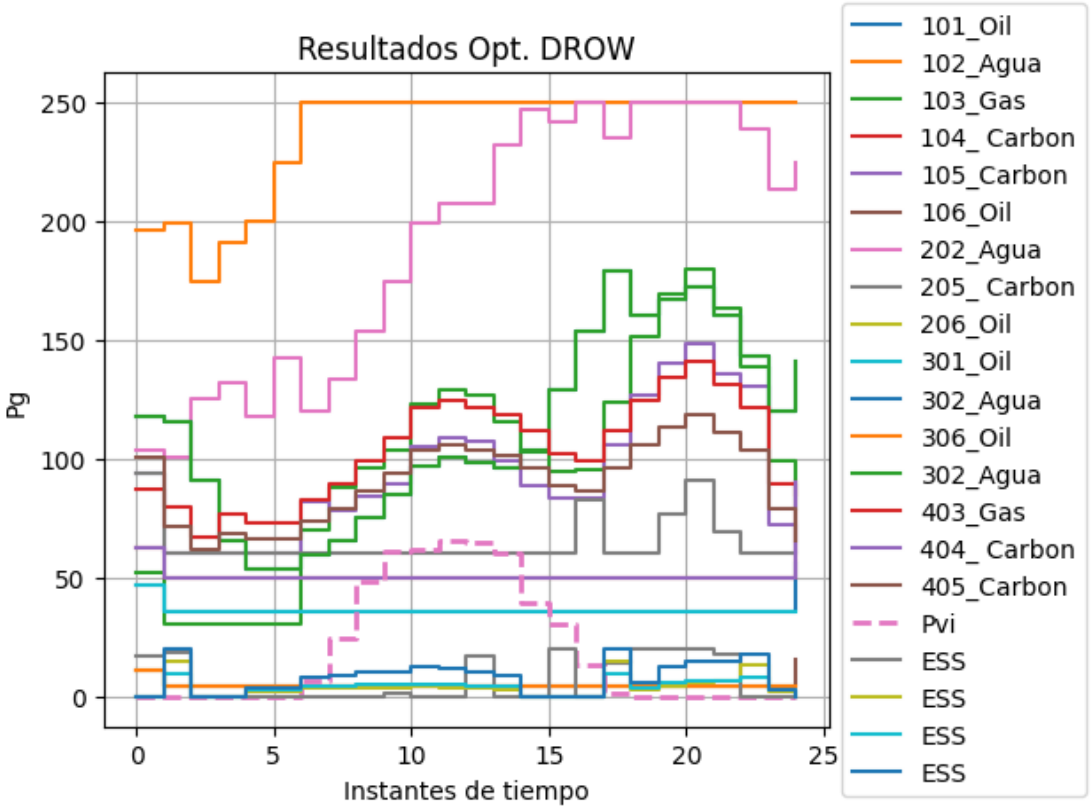


Figura 4-9: Despacho económico múltiples microrredes 24 instantes de tiempo

5 Conclusiones

La presente investigación ha logrado desarrollar un algoritmo robusto de gestión de energía para sistemas de distribución que integran transacciones de energía entre microrredes, destacando la relevancia de la participación de fuentes de energía renovable. A través de la modelación de un sistema de distribución que conecta diversas microrredes y generadores renovables, se ha demostrado la viabilidad de un enfoque que optimiza la gestión de recursos energéticos en un entorno de creciente complejidad e incertidumbre.

El diseño del algoritmo de gestión de energía robusto ha permitido abordar de manera efectiva las variaciones inherentes a la generación de energía renovable y las demandas fluctuantes en las microrredes. Al aplicar el enfoque de Optimización Robusta Distribucional (DROW), se ha garantizado la capacidad del algoritmo para manejar un número considerable de variables y restricciones, conservando las propiedades de convexidad de la función objetivo principal. Esto asegura que los mínimos identificados sean globales, lo que incrementa la confiabilidad de las soluciones propuestas.

La simulación de múltiples escenarios de operación ha evidenciado la flexibilidad del sistema ante diferentes condiciones de operación y ha permitido validar el desempeño del algoritmo en situaciones reales. Los resultados obtenidos sugieren que la gestión eficaz de la energía a través de transacciones entre microrredes no solo es factible, sino que también contribuye a un uso más eficiente y sostenible de los recursos energéticos. En resumen, la investigación proporciona un marco sólido para el desarrollo futuro de sistemas de gestión de energía en redes eléctricas interconectadas, sentando las bases para la implementación de soluciones innovadoras que promuevan la transición hacia sistemas energéticos más sostenibles.

A Anexo 1: Outputs de simulación

A.1 Resultados de modelo de optimización estocástica de una microrred aislada

```
Problem SO [Costo total: 51185.70058856257]

Problem
  Name                   :
  Objective sense        : minimize
  Type                   : CONIC (conic optimization problem)
  Constraints            : 445
  Affine conic cons.     : 5 (50 rows)
  Disjunctive cons.      : 0
  Cones                  : 0
  Scalar variables       : 159
  Matrix variables       : 0
  Integer variables      : 0

Optimizer started.
Presolve started.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 24
Eliminator terminated.
Linear dependency checker started.
Linear dependency checker terminated.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 0
Eliminator terminated.
Eliminator - tries                  : 2                 time                   : 0.00
Lin. dep.  - tries                  : 1                 time                   : 0.00
Lin. dep.  - primal attempts        : 1                 successes              : 1
Lin. dep.  - dual attempts          : 0                 successes              : 0
Lin. dep.  - primal deps.           : 0                 dual deps.             : 0
Presolve terminated. Time: 0.02
Optimizer  - threads                : 8
Optimizer  - solved problem         : the dual
Optimizer  - Constraints            : 120
Optimizer  - Cones                  : 6
Optimizer  - Scalar variables       : 421               conic                  : 59
Optimizer  - Semi-definite variables: 0                 scalarized             : 0
Factor     - setup time             : 0.00
Factor     - dense det. time        : 0.00              GP order time          : 0.00
Factor     - nonzeros before factor : 6680              after factor           : 6680
```

```
Factor     - dense dim.              : 0                    flops                    : 5.30e+05
ITE PFEAS    DFEAS    GFEAS    PRSTATUS   POBJ              DOBJ              MU
TIME
0   2.6e+02  5.3e+01  2.9e+00  0.00e+00   1.261420487e+04   1.261226103e+04   1.0e+00
0.02
1   1.1e+02  2.2e+01  1.8e+00  -9.62e-01  1.337485437e+04   1.337423752e+04   4.2e-01
0.03
2   4.5e+01  9.4e+00  1.1e+00  -9.24e-01  1.478925138e+04   1.479137121e+04   1.8e-01
0.03
3   2.5e+01  5.1e+00  8.1e-01  -8.90e-01  1.581218764e+04   1.581797057e+04   9.5e-02
0.03
4   1.2e+01  2.5e+00  5.1e-01  -8.28e-01  1.851183915e+04   1.852366171e+04   4.6e-02
0.05
5   8.3e+00  1.7e+00  4.2e-01  -7.61e-01  1.939969275e+04   1.941635155e+04   3.2e-02
0.05
6   1.7e+00  3.5e-01  1.4e-01  -7.27e-01  2.830560937e+04   2.835523844e+04   6.7e-03
0.05
7   4.2e-01  8.6e-02  3.7e-02  -3.54e-01  3.718056638e+04   3.723892570e+04   1.6e-03
0.05
8   1.1e-01  2.3e-02  6.5e-03  2.06e-01   4.158030098e+04   4.160622319e+04   4.3e-04
0.05
9   3.5e-02  7.3e-03  1.0e-03  9.13e-01   4.292172923e+04   4.292825477e+04   1.4e-04
0.05
10  5.0e-03  1.0e-03  5.5e-05  9.97e-01   4.331735364e+04   4.331827586e+04   1.9e-05
0.05
11  5.9e-04  1.2e-04  2.4e-06  1.00e+00   4.337747515e+04   4.337759781e+04   2.3e-06
0.05
12  1.0e-04  2.1e-05  1.7e-07  9.98e-01   4.338527621e+04   4.338529749e+04   3.9e-07
0.05
13  2.1e-05  2.5e-06  7.8e-09  1.01e+00   4.338654088e+04   4.338654402e+04   5.6e-08
0.05
14  3.2e-07  4.7e-08  1.8e-11  1.00e+00   4.338687457e+04   4.338687463e+04   1.1e-09
0.05
15  4.3e-08  3.5e-10  5.1e-12  1.00e+00   4.338688100e+04   4.338688100e+04   7.9e-12
0.05
Optimizer terminated. Time: 0.06


Interior-point solution summary
  Problem status  : PRIMAL_AND_DUAL_FEASIBLE
  Solution status : OPTIMAL
  Primal.  obj: 4.3386880998e+04    nrm: 3e+04    Viol.  con: 4e-07    var: 0e+00
acc: 4e-09
  Dual.    obj: 4.3386880997e+04    nrm: 8e+03    Viol.  con: 0e+00    var: 9e-08
acc: 1e-09
Solution status:  SolutionStatus.Optimal
Relative optimiality gap: 0.00%
Total solution time: 0.06s
```

A.2 Resultados de modelo de optimización robusto de una microrred aislada

```
Problem
  Name                    :
```

```
  Objective sense         : minimize
  Type                    : CONIC (conic optimization problem)
  Constraints             : 445
  Affine conic cons.      : 5 (50 rows)
  Disjunctive cons.       : 0
  Cones                   : 0
  Scalar variables        : 159
  Matrix variables        : 0
  Integer variables       : 0

Optimizer started.
Presolve started.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 24
Eliminator terminated.
Linear dependency checker started.
Linear dependency checker terminated.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 0
Eliminator terminated.
Eliminator - tries                  : 2                 time                   : 0.00
Lin. dep.  - tries                  : 1                 time                   : 0.00
Lin. dep.  - primal attempts        : 1                 successes              : 1
Lin. dep.  - dual attempts          : 0                 successes              : 0
Lin. dep.  - primal deps.           : 0                 dual deps.             : 0
Presolve terminated. Time: 0.02
Optimizer  - threads                : 8
Optimizer  - solved problem         : the dual
Optimizer  - Constraints            : 120
Optimizer  - Cones                  : 6
Optimizer  - Scalar variables       : 421               conic                  : 59
Optimizer  - Semi-definite variables: 0                 scalarized             : 0
Factor     - setup time             : 0.00
Factor     - dense det. time        : 0.00              GP order time          : 0.00
Factor     - nonzeros before factor : 6680              after factor           : 6680
Factor     - dense dim.             : 0                 flops                  : 5.30e+05
ITE PFEAS    DFEAS    GFEAS    PRSTATUS   POBJ              DOBJ              MU
TIME
0   3.0e+02  5.3e+01  2.9e+00  0.00e+00   1.261420487e+04   1.261226103e+04   1.0e+00
0.02
1   1.2e+02  2.2e+01  1.8e+00  -9.64e-01  1.339970177e+04   1.339907060e+04   4.2e-01
0.03
2   5.2e+01  9.3e+00  1.1e+00  -9.33e-01  1.471497319e+04   1.471712733e+04   1.7e-01
0.03
3   2.6e+01  4.7e+00  7.7e-01  -8.85e-01  1.675938505e+04   1.676547057e+04   8.8e-02
0.03
4   1.5e+01  2.7e+00  5.7e-01  -8.61e-01  1.776653649e+04   1.777824836e+04   5.1e-02
0.03
5   5.7e+00  1.0e+00  3.1e-01  -8.26e-01  2.235076114e+04   2.237908317e+04   1.9e-02
0.03
6   1.7e+00  3.1e-01  1.3e-01  -6.65e-01  3.145519631e+04   3.151256773e+04   5.8e-03
0.03
7   5.8e-01  1.0e-01  4.7e-02  -3.35e-01  4.095999728e+04   4.102693952e+04   1.9e-03
0.03
8   2.5e-01  4.5e-02  1.8e-02  2.97e-02   4.564550441e+04   4.569404540e+04   8.5e-04
0.03
9   1.8e-01  3.1e-02  1.2e-02  2.27e-01   4.744882649e+04   4.749580163e+04   5.9e-04
0.03
10  6.3e-02  1.1e-02  2.9e-03  5.05e-01   4.985167342e+04   4.987209622e+04   2.1e-04
```

```
0.05
11  1.4e-02  2.5e-03  2.9e-04  9.25e-01   5.111533424e+04   5.111956250e+04   4.7e-05
0.05
12  2.3e-03  4.0e-04  1.9e-05  9.96e-01   5.130239054e+04   5.130309361e+04   7.6e-06
0.05
13  1.1e-04  1.9e-05  2.2e-07  1.00e+00   5.133315918e+04   5.133320104e+04   3.6e-07
0.05
14  6.1e-06  1.1e-06  3.0e-09  1.00e+00   5.133539435e+04   5.133539673e+04   2.1e-08
0.05
15  1.2e-07  2.1e-08  4.3e-12  1.00e+00   5.133552718e+04   5.133552722e+04   4.0e-10
0.05
16  8.0e-08  1.1e-08  2.3e-12  1.00e+00   5.133552849e+04   5.133552851e+04   2.0e-10
0.05
17  3.7e-07  7.5e-11  2.3e-12  1.00e+00   5.133552981e+04   5.133552982e+04   1.4e-12
0.05
Optimizer terminated. Time: 0.05


Interior-point solution summary
  Problem status  : PRIMAL_AND_DUAL_FEASIBLE
  Solution status : OPTIMAL
  Primal.  obj: 5.1335529814e+04    nrm: 7e+04    Viol.  con: 1e-07    var: 0e+00
acc: 5e-10
  Dual.    obj: 5.1335529816e+04    nrm: 1e+04    Viol.  con: 0e+00    var: 3e-08
acc: 3e-10
Solution status:  SolutionStatus.Optimal
Relative optimiality gap: 0.00%
Total solution time: 0.05s
```

A.3 Resultados de modelo de optimización robusto distribucional de una microrred aislada

```
Problem
  Name                   :
  Objective sense        : minimize
  Type                   : CONIC (conic optimization problem)
  Constraints            : 613
  Affine conic cons.     : 5 (50 rows)
  Disjunctive cons.      : 0
  Cones                  : 0
  Scalar variables       : 327
  Matrix variables       : 0
  Integer variables      : 0

Optimizer started.
Presolve started.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 24
Eliminator terminated.
Linear dependency checker started.
Linear dependency checker terminated.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 0
Eliminator terminated.
```

```
Eliminator - tries                  : 2                 time                    : 0.00
Lin. dep.  - tries                  : 1                 time                    : 0.00
Lin. dep.  - primal attempts        : 1                 successes               : 1
Lin. dep.  - dual attempts          : 0                 successes               : 0
Lin. dep.  - primal deps.           : 0                 dual deps.              : 0
Presolve terminated. Time: 0.00
Optimizer  - threads                : 8
Optimizer  - solved problem         : the dual
Optimizer  - Constraints            : 120
Optimizer  - Cones                  : 6
Optimizer  - Scalar variables       : 421               conic                   : 59
Optimizer  - Semi-definite variables: 0                 scalarized              : 0
Factor     - setup time             : 0.00
Factor     - dense det. time        : 0.00              GP order time           : 0.00
Factor     - nonzeros before factor : 6680              after factor            : 6680
Factor     - dense dim.             : 0                 flops                   : 5.30e+05
ITE PFEAS    DFEAS    GFEAS    PRSTATUS   POBJ              DOBJ              MU
TIME
0   2.8e+02  3.4e+03  1.4e+01  0.00e+00   8.073172967e+05   8.073042604e+05   1.0e+00
0.02
1   6.0e+01  7.4e+02  6.5e+00  -9.99e-01  7.808986346e+05   7.808891668e+05   2.2e-01
0.02
2   2.8e+01  3.5e+02  4.4e+00  -9.86e-01  8.017494931e+05   8.017449952e+05   1.0e-01
0.02
3   1.3e+01  1.6e+02  2.8e+00  -9.44e-01  8.581496941e+05   8.581554069e+05   4.7e-02
0.02
4   1.0e+01  1.3e+02  2.5e+00  -8.88e-01  8.768320003e+05   8.768417407e+05   3.7e-02
0.02
5   5.3e+00  6.5e+01  1.7e+00  -8.60e-01  9.846405580e+05   9.846672292e+05   1.9e-02
0.02
6   3.8e+00  4.7e+01  1.4e+00  -7.94e-01  1.006289324e+06   1.006328561e+06   1.4e-02
0.02
7   1.9e+00  2.3e+01  8.5e-01  -7.42e-01  1.205850216e+06   1.205920507e+06   6.7e-03
0.02
8   1.6e+00  2.0e+01  7.7e-01  -6.37e-01  1.221861083e+06   1.221941119e+06   5.8e-03
0.03
9   5.3e-01  6.5e+00  3.4e-01  -5.96e-01  1.609058188e+06   1.609205918e+06   1.9e-03
0.03
10  1.5e-01  1.9e+00  1.2e-01  -4.20e-01  2.072392786e+06   2.072607254e+06   5.6e-04
0.03
11  4.7e-02  5.8e-01  3.7e-02  -2.78e-01  2.439938287e+06   2.440170091e+06   1.7e-04
0.03
12  1.5e-02  1.8e-01  8.6e-03  1.78e-01   2.727231573e+06   2.727360749e+06   5.4e-05
0.03
13  2.5e-03  3.1e-02  7.8e-04  5.22e-01   2.907515743e+06   2.907551823e+06   9.2e-06
0.03
14  4.0e-04  5.0e-03  5.3e-05  9.13e-01   2.949459583e+06   2.949466096e+06   1.5e-06
0.03
15  2.5e-05  3.1e-04  8.2e-07  9.79e-01   2.957367438e+06   2.957367847e+06   9.1e-08
0.03
16  1.4e-06  1.7e-05  1.1e-08  1.00e+00   2.957866735e+06   2.957866758e+06   5.1e-09
0.03
17  2.4e-08  2.9e-07  3.9e-11  1.00e+00   2.957895748e+06   2.957895749e+06   8.6e-11
0.03
18  3.7e-08  1.5e-07  8.9e-11  1.00e+00   2.957895991e+06   2.957895991e+06   4.4e-11
0.03
19  4.3e-08  1.4e-07  2.0e-10  1.00e+00   2.957896006e+06   2.957896006e+06   4.1e-11
0.03
20  7.5e-08  7.1e-08  5.9e-11  1.00e+00   2.957896123e+06   2.957896124e+06   2.1e-11
```

```
0.03
21  8.9e-08  6.3e-08  7.6e-11  1.00e+00   2.957896138e+06   2.957896138e+06   1.8e-11
0.03
22  9.9e-08  5.9e-08  4.4e-11  1.00e+00   2.957896145e+06   2.957896145e+06   1.7e-11
0.03
23  1.2e-07  4.4e-08  5.1e-11  1.00e+00   2.957896170e+06   2.957896170e+06   1.3e-11
0.03
24  1.6e-07  2.2e-08  3.7e-11  1.00e+00   2.957896207e+06   2.957896207e+06   6.6e-12
0.05
25  1.9e-07  2.0e-08  6.1e-11  1.00e+00   2.957896211e+06   2.957896211e+06   5.7e-12
0.05
26  1.9e-07  2.0e-08  5.7e-12  1.00e+00   2.957896211e+06   2.957896212e+06   5.7e-12
0.05
27  2.9e-07  9.8e-09  4.6e-11  1.00e+00   2.957896228e+06   2.957896228e+06   2.9e-12
0.05
Optimizer terminated. Time: 0.06


Interior-point solution summary
  Problem status  : PRIMAL_AND_DUAL_FEASIBLE
  Solution status : OPTIMAL
  Primal.  obj: 2.9578962280e+06    nrm: 5e+04    Viol.  con: 2e-06    var: 0e+00
acc: 7e-09
  Dual.    obj: 2.9578962280e+06    nrm: 4e+05    Viol.  con: 0e+00    var: 2e-05
acc: 4e-09
Solution status:  SolutionStatus.Optimal
Relative optimiality gap: 0.00%
Total solution time: 0.06s
```

A.4 Resultados de modelo de optimización robusto distribucional en múltiples microrredes interconectadas

```
  Name                   :
  Objective sense        : minimize
  Type                   : CONIC (conic optimization problem)
  Constraints            : 2783
  Affine conic cons.     : 16 (416 rows)
  Disjunctive cons.      : 0
  Cones                  : 0
  Scalar variables       : 1015
  Matrix variables       : 0
  Integer variables      : 0

Optimizer started.
Presolve started.
Linear dependency checker started.
Linear dependency checker terminated.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 144
Eliminator terminated.
Eliminator started.
Freed constraints in eliminator : 0
Eliminator terminated.
```

```
Eliminator - tries                  : 2                 time                    : 0.00
Lin. dep.  - tries                  : 1                 time                    : 0.01
Lin. dep.  - primal attempts        : 1                 successes               : 1
Lin. dep.  - dual attempts          : 0                 successes               : 0
Lin. dep.  - primal deps.           : 0                 dual deps.              : 0
Presolve terminated. Time: 0.01
GP based matrix reordering started.
GP based matrix reordering terminated.
Optimizer  - threads                : 8
Optimizer  - solved problem         : the dual
Optimizer  - Constraints            : 573
Optimizer  - Cones                  : 17
Optimizer  - Scalar variables       : 2660              conic                   : 465
Optimizer  - Semi-definite variables: 0                 scalarized              : 0
Factor     - setup time             : 0.02
Factor     - dense det. time        : 0.02              GP order time           : 0.00
Factor     - nonzeros before factor : 4262              after factor            : 1.07e+04
Factor     - dense dim.             : 8                 flops                   : 2.61e+05
ITE PFEAS    DFEAS    GFEAS    PRSTATUS   POBJ              DOBJ              MU
TIME
0   9.8e+02  9.6e+03  1.9e+02  0.00e+00   2.485255620e+07   2.485236332e+07   1.0e+00
0.05
1   2.9e+02  2.8e+03  1.1e+02  -1.00e+00  2.459280009e+07   2.459260963e+07   3.0e-01
0.06
2   8.9e+01  8.7e+02  5.8e+01  -9.99e-01  2.401001156e+07   2.400982909e+07   9.1e-02
0.06
3   6.1e+01  5.9e+02  4.8e+01  -9.88e-01  2.443935692e+07   2.443918030e+07   6.2e-02
0.06
4   3.7e+01  3.6e+02  3.7e+01  -9.75e-01  2.504183021e+07   2.504166511e+07   3.8e-02
0.08
5   2.1e+01  2.0e+02  2.7e+01  -9.54e-01  2.610506287e+07   2.610491909e+07   2.1e-02
0.08
6   1.9e+01  1.9e+02  2.6e+01  -9.22e-01  2.625948540e+07   2.625934586e+07   1.9e-02
0.08
7   9.3e+00  9.0e+01  1.7e+01  -9.14e-01  2.873127525e+07   2.873118533e+07   9.4e-03
0.08
8   7.3e+00  7.1e+01  1.5e+01  -8.50e-01  2.951083375e+07   2.951076601e+07   7.4e-03
0.08
9   3.5e+00  3.4e+01  9.5e+00  -8.29e-01  3.373365415e+07   3.373368420e+07   3.5e-03
0.08
10  1.8e+00  1.7e+01  6.1e+00  -7.38e-01  3.841110136e+07   3.841126096e+07   1.8e-03
0.09
11  1.3e+00  1.2e+01  4.9e+00  -6.71e-01  4.040649139e+07   4.040672608e+07   1.3e-03
0.09
12  6.6e-01  6.4e+00  3.0e+00  -6.21e-01  4.702268261e+07   4.702309441e+07   6.7e-04
0.09
13  5.4e-01  5.2e+00  2.6e+00  -5.48e-01  4.852381702e+07   4.852429672e+07   5.5e-04
0.09
14  1.8e-01  1.7e+00  1.1e+00  -5.15e-01  6.102694377e+07   6.102783230e+07   1.8e-04
0.09
15  6.7e-02  6.5e-01  4.5e-01  -2.67e-01  7.254808214e+07   7.254918312e+07   6.8e-05
0.11
16  3.0e-02  3.0e-01  1.9e-01  1.20e-02   8.102843106e+07   8.102942017e+07   3.1e-05
0.11
17  1.4e-02  1.4e-01  8.0e-02  1.51e-01   8.738588238e+07   8.738670430e+07   1.4e-05
0.11
18  3.0e-03  2.9e-02  1.0e-02  5.05e-01   9.533658272e+07   9.533687651e+07   3.0e-06
0.11
19  5.4e-04  5.3e-03  8.9e-04  7.91e-01   9.776015594e+07   9.776022364e+07   5.5e-07
```

0.11
20 4.7e−05 4.5e−04 2.3e−05 9.51e−01 9.832989046e+07 9.832989653e+07 4.8e−08
0.12
21 1.0e−05 9.7e−05 2.3e−06 1.00e+00 9.837294192e+07 9.837294323e+07 1.0e−08
0.12
22 3.2e−06 3.1e−05 4.1e−07 1.00e+00 9.838088143e+07 9.838088186e+07 3.2e−09
0.12
23 1.6e−06 1.5e−05 1.4e−07 1.00e+00 9.838276534e+07 9.838276555e+07 1.6e−09
0.12
24 4.9e−07 4.8e−06 1.9e−08 1.00e+00 9.838400044e+07 9.838400051e+07 5.0e−10
0.12
25 9.4e−08 9.2e−07 3.5e−10 1.00e+00 9.838446394e+07 9.838446396e+07 9.7e−11
0.12
26 9.4e−08 9.2e−07 1.8e−10 1.00e+00 9.838446394e+07 9.838446396e+07 9.7e−11
0.14
27 9.4e−08 9.2e−07 8.6e−10 1.00e+00 9.838446396e+07 9.838446397e+07 9.7e−11
0.14
28 8.8e−08 8.6e−07 1.4e−10 1.00e+00 9.838447071e+07 9.838447072e+07 9.1e−11
0.14
29 7.8e−08 7.6e−07 3.9e−10 1.00e+00 9.838448343e+07 9.838448344e+07 8.0e−11
0.16
30 7.6e−08 7.4e−07 6.1e−10 1.00e+00 9.838448483e+07 9.838448484e+07 7.9e−11
0.16
31 7.5e−08 7.3e−07 7.2e−10 1.00e+00 9.838448621e+07 9.838448622e+07 7.8e−11
0.16
32 7.5e−08 7.3e−07 4.6e−11 1.00e+00 9.838448623e+07 9.838448624e+07 7.8e−11
0.17
33 7.3e−08 7.1e−07 1.9e−10 1.00e+00 9.838448895e+07 9.838448896e+07 7.5e−11
0.17
34 7.1e−08 6.9e−07 4.6e−10 1.00e+00 9.838449159e+07 9.838449160e+07 7.3e−11
0.17
35 6.6e−08 6.5e−07 1.9e−10 1.00e+00 9.838449671e+07 9.838449672e+07 6.9e−11
0.19
36 5.0e−08 4.9e−07 2.5e−10 1.00e+00 9.838451595e+07 9.838451595e+07 5.2e−11
0.19
37 5.0e−08 4.9e−07 5.4e−10 1.00e+00 9.838451595e+07 9.838451595e+07 5.2e−11
0.19
38 5.3e−08 4.7e−07 6.5e−10 1.00e+00 9.838451777e+07 9.838451777e+07 5.0e−11
0.20
39 5.4e−08 4.7e−07 3.9e−10 1.00e+00 9.838451778e+07 9.838451779e+07 5.0e−11
0.20
40 5.0e−08 4.7e−07 2.0e−10 1.00e+00 9.838451780e+07 9.838451780e+07 5.0e−11
0.20
41 5.2e−08 4.7e−07 2.5e−10 1.00e+00 9.838451780e+07 9.838451780e+07 5.0e−11
0.22
42 5.5e−08 4.7e−07 4.8e−10 1.00e+00 9.838451781e+07 9.838451782e+07 5.0e−11
0.22
43 6.5e−08 3.5e−07 2.8e−10 1.00e+00 9.838453192e+07 9.838453193e+07 3.8e−11
0.22
44 6.5e−08 3.5e−07 2.8e−10 1.00e+00 9.838453192e+07 9.838453193e+07 3.8e−11
0.24
45 6.5e−08 3.5e−07 1.5e−10 1.00e+00 9.838453192e+07 9.838453193e+07 3.8e−11
0.24
46 6.6e−08 3.5e−07 4.5e−10 1.00e+00 9.838453193e+07 9.838453193e+07 3.8e−11
0.24
47 6.4e−08 3.3e−07 1.8e−12 1.00e+00 9.838453459e+07 9.838453459e+07 3.5e−11
0.25
48 6.4e−08 3.3e−07 1.8e−12 1.00e+00 9.838453459e+07 9.838453459e+07 3.5e−11
0.25

```
49   6.4e-08   3.3e-07   1.8e-12   1.00e+00   9.838453459e+07   9.838453459e+07   3.5e-11
0.25
50   8.9e-08   2.5e-07   3.3e-10   1.00e+00   9.838454457e+07   9.838454457e+07   2.6e-11
0.27
51   8.6e-08   2.5e-07   2.0e-10   1.00e+00   9.838454503e+07   9.838454504e+07   2.6e-11
0.27
52   9.1e-08   2.3e-07   1.4e-11   1.00e+00   9.838454688e+07   9.838454688e+07   2.4e-11
0.27
53   1.0e-07   1.7e-07   4.6e-11   1.00e+00   9.838455380e+07   9.838455380e+07   1.8e-11
0.28
54   1.1e-07   1.7e-07   1.4e-10   1.00e+00   9.838455445e+07   9.838455445e+07   1.8e-11
0.28
55   1.1e-07   1.7e-07   1.4e-10   1.00e+00   9.838455449e+07   9.838455449e+07   1.8e-11
0.28
56   1.1e-07   1.7e-07   1.4e-10   1.00e+00   9.838455449e+07   9.838455449e+07   1.8e-11
0.28
57   1.1e-07   1.7e-07   1.4e-10   1.00e+00   9.838455449e+07   9.838455449e+07   1.8e-11
0.30
58   9.9e-08   1.6e-07   3.1e-10   1.00e+00   9.838455518e+07   9.838455518e+07   1.7e-11
0.30
Optimizer terminated. Time: 0.31


Interior-point solution summary
  Problem status  : PRIMAL_AND_DUAL_FEASIBLE
  Solution status : OPTIMAL
  Primal.  obj: 9.8384555171e+07    nrm: 2e+06    Viol.  con: 2e-04    var: 0e+00
acc: 2e-07
  Dual.    obj: 9.8384555178e+07    nrm: 4e+07    Viol.  con: 0e+00    var: 2e-03
acc: 1e-07
Solution status:  SolutionStatus.Optimal
Relative optimiality gap: 0.00%
Total solution time: 0.31s
```

Referencias Bibliográficas

[1] Aboli, R., Ramezani, M., and Falaghi, H. A hybrid robust distributed model for short-term operation of multi-microgrid distribution networks. *Electric Power Systems Research 177* (2019), 106011.

[2] Ahl, A., Yarime, M., Tanaka, K., and Sagawa, D. Review of blockchain-based distributed energy: Implications for institutional development. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 107* (2019), 200--211.

[3] Ahmed, M., Meegahapola, L., Vahidnia, A., and Datta, M. Stability and control aspects of microgrid architectures–a comprehensive review. *IEEE Access 8* (2020), 144730--144766.

[4] Alam, M. N., Chakrabarti, S., and Ghosh, A. Networked microgrids: State-of-the-art and future perspectives. *IEEE Transactions on Industrial Informatics 15*, 3 (2019), 1238--1250.

[5] Alam, M. N., Chakrabarti, S., and Liang, X. A benchmark test system for networked microgrids. *IEEE Transactions on Industrial Informatics 16*, 10 (Oct 2020), 6217--6226.

[6] Andyysun, X., and Conejo, A. *Robust Optimization in Electric Energy Systems.* International Series in Operations Research and Management Science. Springer, 2020.

[7] Baringo, L., and Conejo, A. J. Strategic offering for a wind power producer. *IEEE Transactions on Power Systems 28*, 4 (2013), 4645--4654.

[8] Bordons, C., García-Torres, F., and Valverde, L. Gestión óptima de la energía en microrredes con generación renovable. *RIAI - Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial 12*, 2 (2015), 117--132.

[9] Bullich-Massagué, E., Díaz-González, F., Aragüés-Peñalba, M., Girbau-Llistuella, F., Olivella-Rosell, P., and Sumper, A. Microgrid clustering architectures. *Applied Energy 212* (2018), 340--361.

[10] Cagnano, A., De Tuglie, E., and Mancarella, P. Microgrids: Overview and guidelines for practical implementations and operation. *Applied Energy 258* (2020), 114039.

[11] Cagnano, A., De Tuglie, E., Mancarella, P., and Mitolo, M. Online optimal reactive power control strategy of pv inverters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics 58*, 10 (2011), 4549--4558.

[12] Cai, C., Liu, H., Tao, Y., Deng, Z., Dai, W., and Chen, J. Microgrid equivalent modeling based on long short-term memory neural network. *IEEE Access 8* (2020), 23120--23133.

[13] Cervera, E., Morales, P., Linares-Rugeles, S., Rivera, S., and Mojica-Nava, E. Distributionally robust optimization for networked microgrids: An overview. In *Applied Computer Sciences in Engineering* (Cham, 2023), J. C. Figueroa-García, G. Hernández, J. L. Villa Ramirez, and E. E. Gaona García, Eds., Springer Nature Switzerland, pp. 311--323.

[14] Chen, R., and Paschalidis, I. C. Distributionally robust learning. *Foundations and Trends® in Optimization 4* (2020), 1--243.

[15] Esfahani, P. M., and Kuhn, D. Data-driven distributionally robust optimization using the wasserstein metric: performance guarantees and tractable reformulations. *Mathematical Programming 171* (9 2018), 115--166.

[16] Farzin, H., Fotuhi-Firuzabad, M., and Moeini-Aghtaie, M. Enhancing power system resilience through hierarchical outage management in multi-microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid 7*, 6 (2016), 2869--2879.

[17] Gao, R., and Kleywegt, A. J. Distributionally robust stochastic optimization with wasserstein distance.

[18] Grainger, J. J. *Análisis de Sistemas de Potencia*, 1 ed. McGraw Hill, 1996.

[19] Hatziargyriou, N. *Microgrids: Architectures and Control*, 1st ed. John Wiley and Sons Ltd, UK, 2014. Accessed: Jun. 11, 2022. [Online]. Available: `https://ieeexplore-ieee-org.ezproxy.unal.edu.co/xpl/ebooks/bookPdfWithBanner.jsp?fileName=6685216.pdf&bkn=6685216&pdfType=book`.

[20] Hirsch, A., Parag, Y., and Guerrero, J. Microgrids: A review of technologies, key drivers, and outstanding issues. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 90* (2018), 402--411.

[21] Hu, J., Shan, Y., Guerrero, J. M., Ioinovici, A., Chan, K. W., and Rodriguez, J. Model predictive control of microgrids – an overview. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 136* (2021), 110422.

[22] Hull, J. C. *Risk Management and Financial Institutions*, fourth edition ed. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2015.

[23] Institute, W. R. World greenhouse gas emissions in 2018 (sector | end use | gas). Tech. rep., World Resources Institute, 2020.

[24] Kumar, D., Zare, F., and Ghosh, A. Dc microgrid technology: System architectures, ac grid interfaces, grounding schemes, power quality, communication networks, applications, and standardizations aspects. *IEEE Access 5* (2017), 12230--12256.

[25] Kumar, K. P., and Saravanan, B. Recent techniques to model uncertainties in power generation from renewable energy sources and loads in microgrids – a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 71* (2017), 348--358.

[26] Li, P., Yang, M., and Wu, Q. Confidence interval based distributionally robust real-time economic dispatch approach considering wind power accommodation risk. *IEEE Transactions on Sustainable Energy 12*, 1 (2021), 58--69.

[27] Li, Y., Wang, Z., Yang, J., Wang, X., and Feng, J. Dynamic equivalence modeling for microgrid cluster by using physical-data-driven method. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity 31*, 8 (2021), 1--4.

[28] Li, Z., Bahramirad, S., Paaso, A., Yan, M., and Shahidehpour, M. Blockchain for decentralized transactive energy management system in networked microgrids. *The Electricity Journal 32*, 4 (2019), 58--72. Special Issue on Strategies for a sustainable, reliable and resilient grid.

[29] Lin, F., Fang, X., and Gao, Z. Distributionally robust optimization: A review on theory and applications. *Numerical Algorithms, Control and Optimization 12*, 1 (2022), 159--212.

[30] Lotfi, H., and Khodaei, A. Ac versus dc microgrid planning. *IEEE Transactions on Smart Grid 8*, 1 (2017).

[31] Ma, W.-J., Wang, J., Gupta, V., and Chen, C. Distributed energy management for networked microgrids using online admm with regret. *IEEE Transactions on Smart Grid 9*, 2 (2018), 847--856.

[32] Malekpour, A. R., and Pahwa, A. Stochastic networked microgrid energy management with correlated wind generators. *IEEE Transactions on Power Systems 32*, 5 (Sep. 2017), 3681--3693.

[33] Malekpour, A. R., and Pahwa, A. Stochastic networked microgrid energy management with correlated wind generators. *IEEE Transactions on Power Systems 32*, 5 (2017), 3681--3693.

[34] Mariam, L., Basu, M., and Conlon, M. F. Microgrid: Architecture, policy and future trends. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 64* (2016), 477--489.

[35] Optimization, I. D. Ucp pandas: Model api - decision optimization for python 2.20.20210630 documentation. `http://ibmdecisionoptimization.github.io/docplex-doc/mp/ucp_pandas.html`. [Online].

[36] Orji, U., Schantz, C., Leeb, S. B., Kirtley, J. L., Sievenpiper, B., Gerhard, K., and McCoy, T. Adaptive zonal protection for ring microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid 8*, 4 (2017), 1843--1851.

[37] Parhizi, S., Lotfi, H., Khodaei, A., and Bahramirad, S. State of the art in research on microgrids: A review. *IEEE Access 3* (Jun. 2015), 890--925.

[38] Parisio, A., Wiezorek, C., Kyntäjä, T., Elo, J., Strunz, K., and Johansson, K. H. Cooperative mpc-based energy management for networked microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid 8*, 6 (2017), 3066--3074.

[39] Pogaku, N., Prodanovic, M., and Green, T. C. Modeling, analysis and testing of autonomous operation of an inverter-based microgrid. *IEEE Transactions on Power Electronics 22*, 2 (2007), 613--625.

[40] Priyadharshini, N., Gomathy, S., and Sabarimuthu, M. A review on microgrid architecture, cyber security threats and standards. *Materials Today: Proceedings* (2020).

[41] Rahbar, K., Chai, C. C., and Zhang, R. Energy cooperation optimization in microgrids with renewable energy integration. *IEEE Transactions on Smart Grid 9*, 2 (2018), 1482--1493.

[42] Roald, L., Pozo, D., Papavasiliou, A., Molzahn, D., Kazempour, J., Conejo, A., Papavasiliou, R., and Conejo, D. Power systems optimization under uncertainty: A review of methods and applications. *IEEE Transactions on Power Systems 33*, 6 (2018), 6630--6650.

[43] S., N., K.N., S., E.A., J., and Ahamed, T. P. I. Comparative analysis of communication assisted grid synchronization methods in microgrids. *IEEE Systems Journal 14*, 1 (2020), 1007--1014.

[44] Sen, S., and Kumar, V. Microgrid modelling: A comprehensive survey. *Annual Reviews in Control 46* (2018), 216--250.

[45] Serban, I., Céspedes, S., Marinescu, C., Azurdia-Meza, C. A., Gómez, J. S., and Hueichapan, D. S. Communication requirements in microgrids: A practical survey. *IEEE Access 8* (2020), 47694--47712.

[46] Sharifzadeh, M., Sikinioti-Lock, A., and Shah, N. Machine-learning methods for integrated renewable power generation: A comparative study of artificial neural networks, support vector regression, and gaussian process regression. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 108* (2019), 513--538.

[47] Shi, Z. Data-driven distributionally robust chance-constrained unit commitment with uncertain wind power. *IEEE Transactions on Power Systems 34*, 2 (March 2019), 1233--1244.

[48] Shuai, Z., Peng, Y., Liu, X., Li, Z., Guerrero, J. M., and Shen, Z. J. Dynamic equivalent modeling for multi-microgrid based on structure preservation method. *IEEE Transactions on Smart Grid 10*, 4 (2019), 3929--3942.

[49] Silverman, B. W. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis.* Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall, London, 1986.

[50] Sood, V. K., and Abdelgawad, H. Chapter 1 - microgrids architectures. In *Distributed Energy Resources in Microgrids*, R. K. Chauhan and K. Chauhan, Eds. Academic Press, 2019, pp. 1--31.

[51] Tang, Z., Zhang, P., Krawec, W. O., and Jiang, Z. Programmable quantum networked microgrids. *IEEE Transactions on Quantum Engineering 1* (2020), 1--13.

[52] Vorobev, P., Huang, P., Al Hosani, M., Kirtley, J. L., and Turitsyn, K. High-fidelity model order reduction for microgrids stability assessment. *IEEE Transactions on Power Systems 33*, 1 (2018), 874--887.

[53] Wang, H., and Huang, J. Incentivizing energy trading for interconnected microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid 9*, 4 (2018), 2647--2657.

[54] Wang, Y., Nguyen, T.-L., Xu, Y., Tran, Q.-T., and Caire, R. Peer-to-peer control for networked microgrids: Multi-layer and multi-agent architecture design. *IEEE Transactions on Smart Grid 11*, 6 (2020), 4688--4699.

[55] Wang, Y., Rousis, A. O., and Strbac, G. On microgrids and resilience: A comprehensive review on modeling and operational strategies. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 134* (2020), 110313.

[56] Wong, Y. C. C., Lim, C. S., Rotaru, M. D., Cruden, A., and Kong, X. Consensus virtual output impedance control based on the novel droop equivalent impedance concept for a multi-bus radial microgrid. *IEEE Transactions on Energy Conversion 35*, 2 (2020), 1078--1087.

[57] Xiao, H., Pei, W., Deng, W., Kong, L., Sun, H., and Tang, C. A comparative study of deep neural network and meta-model techniques in behavior learning of microgrids. *IEEE Access 8* (2020), 30104--30118.

[58] Xiong, P., and Jirutitijaroen, P. A stochastic optimization formulation of unit commitment with reliability constraints. *IEEE Trans Smart Grid 4*, 4 (Dec. 2013), 2200--2208.

[59] Xu, W., Li, J., Dehghani, M., and GhasemiGarpachi, M. Blockchain-based secure energy policy and management of renewable-based smart microgrids. *Sustainable Cities and Society 72* (2021), 103010.

[60] Yang, Y., and Wu, W. A distributionally robust optimization model for real-time power dispatch in distribution networks. *IEEE Transactions on Smart Grid 10*, 4 (2019), 3743--3752.

[61] Yurdakul, O., Sivrikaya, F., and Albayrak, S. A distributionally robust optimization approach for unit commitment in microgrids. *arXiv preprint* (2020).

[62] Zargar, R. H. M., and Yaghmaee, M. H. Energy exchange cooperative model in sdn-based interconnected multi-microgrids. *Sustainable Energy, Grids and Networks 27* (2021), 100491.

[63] Zhang, Y., Gatsis, N., and Giannakis, G. Robust energy management for microgrids with high-penetration renewables. *IEEE Transactions on Sustainable Energy 4*, 4 (2013).

[64] Zhou, B., Zou, J., Chung, C. Y., Wang, H., Liu, N., Voropai, N., and Xu, D. Multi-microgrid energy management systems: Architecture, communication, and scheduling strategies. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy 9*, 3 (2021), 463--476.

[65] Zhou, Q., Shahidehpour, M., Paaso, A., Bahramirad, S., Alabdulwahab, A., and Abusorrah, A. Distributed control and communication strategies in networked microgrids. *IEEE Communications Surveys Tutorials 22*, 4 (2020), 2586--2633.

[66] Zhou, X., Zhou, L., Chen, Y., Guerrero, J. M., Luo, A., Wu, W., and Yang, L. A microgrid cluster structure and its autonomous coordination control strategy. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems 100* (2018), 69--80.

[67] Zou, H., Mao, S., Wang, Y., Zhang, F., Chen, X., and Cheng, L. A survey of energy management in interconnected multi-microgrids. *IEEE Access 7* (2019), 72158--72169.

[68] Zubo, R. H. A., Mokryani, G., Rajamani, H. S., Aghaei, J., Niknam, T., and Pillai, P. Operation and planning of distribution networks with integration of renewable distributed generators considering uncertainties: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews 72* (2017), 1177--1198.