



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Álgebras biseriales, álgebras de grafos de Brauer y algunas de sus aplicaciones

Cristian Camilo Fúneme Mateus

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2021

Álgebras biseriales, álgebras de grafos de Brauer y algunas de sus aplicaciones

Cristian Camilo Fúneme Mateus

Trabajo final de maestría como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director:
Ph.D. Agustín Moreno Cañadas

Línea de Investigación:
Álgebra y Combinatoria
Grupo de Investigación:
TERENUFIA

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2021

Dedicatoria

Este trabajo es dedicado al profesor Agustín Moreno Cañadas, quien se ha tomado el arduo trabajo de compartirme sus conocimientos, guiándome con sus consejos y sabiduría en el desarrollo de mis estudios. A él gracias por ser el mejor de los maestros.

A mi familia por ser mi fuente inagotable de amor e inspiración. En especial a mis padres, Yaneth Mateus y Juan Fúneme, que han enfretado al mundo entero contar de impulsarme a seguir adelante.

Agradecimientos

Agradezco a todos los miembros del grupo de investigación TERENUFIA, en especial a Pedro Fernández, Isaías Marín y María Alejandra Osorio, quienes me acompañaron en todo el proceso de construcción de este trabajo.

También quiero agradecer a todos mis compañeros de estudios Ricardo Miranda, Ricardo Arteaga y Carolina Melo López, quienes me animaron en todos los momentos difíciles y se transformaron en un apoyo fundamental en los retos académicos que enfrentamos.

Resumen

Álgebras biseriales, álgebras de grafos de Brauer y algunas de sus aplicaciones

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las álgebras de configuración de Brauer. Para esto, se inicia por la exposición de aspectos básicos de la Teoría de representación de carcajes, luego se describen las álgebras biseriales y especial biseriales desde ejemplos y propiedades de ellas que las relacionan con el surgimiento de las álgebras de grafo de Brauer, estas últimas se definen y ejemplifican para hacer la posterior presentación de las álgebras de configuración de Brauer y algunas de sus propiedades. A partir de lo anterior, el presente trabajo ofrece como resultado la definición de las Álgebras de configuración de Brauer asociadas a puntos en el plano, estableciendo ecuaciones que permiten calcular la dimensión de estas álgebras y de su centro. Además, se presentan ejemplos relacionados con la construcción de álgebras de configuración de Brauer asociadas a puntos en el plano, regiones de congelamiento y regiones de mutación, determinando propiedades para ellas. Por último, se presentan algunas conclusiones y recomendaciones que servirán de base para futuros trabajos de investigación.

Palabras clave: Álgebras de configuración de Brauer, carcaj, matriz de mensajes, región de mutación, región de congelamiento.

Abstract

Biserial algebras, Brauer graph algebras and some of its applications

The main objective of this work is to study Brauer configuration algebras. For this, it begins with the exposition of basic aspects of the representation theory of characters, then biserial and special biserial algebras are described from examples and properties of them that relate them to the emergence of Brauer graph algebras, the latter are defined and exemplified to make the subsequent presentation of Brauer configuration algebras and some of its properties. From the above, the present work offers as a result the definition of Brauer configuration algebras associated to points in the plane, establishing equations that allow calculating the dimension of these algebras and their center. In addition, examples related to the construction of Brauer configuration algebras associated to points in the plane, freezing regions and mutation regions are presented, determining properties for them. Finally, some conclusions and recommendations are presented, which will serve as a basis for future research work.

Keywords: Brauer configuration algebras, quiver, message matrix, mutation region, freezing region.

Contenido

Agradecimientos	vi
Resumen	vii
1 Introducción	2
2 Preliminares	3
2.1 K-álgebras	3
2.2 Representación de Carcajes	8
3 Álgebras Biseriales Especiales	22
4 Álgebras de Configuración de Brauer	30
4.1 Álgebras de Grafo de Brauer	30
4.2 Álgebras de Configuración de Brauer como Generalización de las Álgebras de Grafo de Brauer	33
4.3 Algunas Propiedades de las Álgebras de Configuración de Brauer	36
4.4 El Mensaje de una Configuración de Brauer	45
5 Álgebras de Configuración de Brauer Asociadas al Plano	47
5.1 Configuración de Brauer Para un Punto en el Plano	47
5.2 Regiones de Congelamiento y Mutación	51
6 Conclusiones y Recomendaciones	73
6.1 Conclusiones	73
6.2 Recomendaciones	74
Bibliografía	75

1 Introducción

Las álgebras de grafo de Brauer se definen mediante datos combinatorios basados en grafos, básicamente las álgebras de grafo de Brauer están asociadas a grafos finitos con una orientación cíclica de las aristas en cada vértice y una función de multiplicidad [37]. Estas álgebras fueron definidas por Donovan y Freislich [7], presentando una clasificación de las representaciones indescomponibles de las álgebras de grafo de Brauer en términos de módulos canónicos de tipo cuerda y banda, basando su propuesta en el trabajo de Ringel [34] sobre representaciones indescomponibles de grupos dihedrales y en el trabajo de Gelfand y Ponomarev [19] sobre las representaciones indescomponibles del grupo de Lorentz.

En los últimos años ha existido un renovado interés en las álgebras de grafo de Brauer al encontrar asociaciones de ellas con triangulaciones parciales [6], cubiertas de grafos de Brauer [22], la generación finita del álgebra de Yoneda (o Ext) para un álgebra de grafo de Brauer [2, 23] y la condición de Koszul en un álgebra de grafo de Brauer [23]. También se han encontrado nuevos resultados sobre la no periodicidad de módulos de complejidad finita sobre álgebras de grafo de Brauer débilmente simétricas [10] y se ha destacado que las álgebras de grafo de Brauer desempeñan un papel central en la conexión entre la teoría de la representación de grupos finitos y la teoría de las álgebras de conglomerado [27]. Además, se ha determinado la coincidencia entre la clase de álgebras de grafo de Brauer y la clase de álgebras biseriales especiales simétricas [6, 7].

Es precisamente en este sentido que se dirige el presente trabajo, al buscar relaciones existentes entre las álgebras de configuración de Brauer introducidas por Green y Schroll [20] y algunos objetos combinatorios. Estudiando el caso particular de las álgebras de configuración de Brauer asociadas al plano, mediante el análisis de sus construcciones y propiedades, determinando ejemplos y estableciendo conexiones con otras áreas de la matemática.

2 Preliminares

En este capítulo se presentan algunas de las definiciones, teoremas y resultados de la teoría de representación de álgebras que son base en el desarrollo del presente trabajo, las cuales son tomadas de lo propuesto por Assem, Simson y Skowronski [3] y se encaminan todas a la posterior presentación de las álgebras biseriales y las álgebras de configuración de Brauer.

2.1. K-álgebras

Para iniciar, es importante mencionar qué tipo de álgebras se manejan a lo largo de este trabajo, las cuales se definen en torno a un campo K algebraicamente cerrado de la siguiente manera.

Definición 2.1.1. Sea K un campo algebraicamente cerrado. Una **K -álgebra** es un anillo A con elemento identidad (denotado como 1), tal que A tiene estructura de K -espacio vectorial compatible con la multiplicación del anillo, es decir:

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda,$$

para todo $\lambda \in K$ y todo $a, b \in A$. Una K -álgebra se dice que es de dimensión finita si la dimensión $\dim_K A$ del K -espacio vectorial A es finita.

Definición 2.1.2. Un K -subespacio vectorial B de una K -álgebra A es una **K -subálgebra** de A si la identidad de A está en B y además $bb' \in B$ para todos $b, b' \in B$.

Definición 2.1.3. Un K -subespacio vectorial I de una K -álgebra A es un **ideal a derecha** de A si $xa \in I$ para todo $x \in I$ y todo $a \in A$ (de manera similar, I es **ideal a izquierda** si $ax \in I$). Un **ideal bilateral** de A , o simplemente un ideal de A , es un K -subespacio vectorial I de A que es tanto ideal a derecha como ideal a izquierda de A .

El radical de estos ideales es un elemento de particular interés, al ser útil para establecer de manera sencilla módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles de las álgebras que se estudiarán.

Definición 2.1.4. El **radical de Jacobson** $\text{rad } A$ de una K -álgebra A , es la intersección de todos los ideales maximales a derecha de A .

Aunque esta definición parte de los ideales maximales a derecha, resulta ser equivalente al tomar los ideales maximales a izquierda, para ver esto se presenta el siguiente lema y su respectivo corolario.

Lema 2.1.5. *Sean A una K -álgebra y $a \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) $a \in \text{rad } A$.
- b) a pertenece a la intersección de todos los ideales maximales a izquierda de A .
- c) Para todo $b \in A$, el elemento $1 - ab$ tiene un inverso a ambos lados.
- d) Para todo $b \in A$, el elemento $1 - ab$ tiene un inverso a derecha.
- e) Para todo $b \in A$, el elemento $1 - ba$ tiene un inverso a ambos lados.
- f) Para todo $b \in A$, el elemento $1 - ba$ tiene un inverso a izquierda.

Demostración. a) implica d). Sea $b \in A$. Supóngase que $1 - ab$ no tiene inverso a derecha. Entonces existe un ideal I a derecha, el cual es maximal, tal que $1 - ab \in I$. Como $a \in \text{rad } A \subseteq I$ se tiene que $ab \in I$ y $1 \in I$ lo cual es una contradicción. Luego $1 - ab$ tiene inverso a derecha.

d) implica a). Asíumase que $a \notin \text{rad } A$ entonces existe un ideal I maximal a derecha en A tal que $a \notin \text{rad } A$. Luego $A = I + aA$. Así existen $x \in I$ y $b \in A$ tales que $1 = x + ab$. Esto implica que $x = 1 - ab \in I$ no tiene inverso a derecha, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a \in \text{rad } A$.

b) implica f). Sea $b \in A$ y supóngase que $1 - ba$ no tiene inverso a izquierda. Luego existe un ideal I maximal a izquierda de A tal que $1 - ba \in I$. Como $a \in B \subseteq I$ entonces $ba \in I$ y $1 \in I$, lo cual es una contradicción. De esta forma $1 - ba$ tiene inverso a izquierda.

f) implica b). Asíumase que $a \notin B$. Sea I el ideal maximal a izquierda de A tal que $a \notin I$. Entonces $A = I + Aa$. Así existen $x \in I$ y $b \in A$ tales que $1 = x + ba$. Luego $x = 1 - ba \in I$, es decir x no tiene inverso a izquierda, lo cual es una contradicción. Esto implica que $a \in B$.

Ahora, c) y e) son equivalentes. Como $1 - ab$ tiene inverso a dos lados entonces existe $x \in A$ tal que $(1 - ab)x = 1$. Es decir:

$$\begin{aligned}
 x - abx &= 1 \\
 b(x - abx)a &= ba \\
 bxa - babxa - ba &= 0 \\
 1 + bxa - babxa - ba &= 1 \\
 1 + bxa - ba(1 + bxa) &= 1 \\
 (1 - ba)(1 + bxa) &= 1.
 \end{aligned}$$

De esta forma, $1 - ba$ tiene inverso a derecha. Además $1 - ba$ tiene inverso a izquierda. Ya que se tiene que existe $y \in A$ tal que $y(1 - ab) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} y - yab &= 1 \\ b(y - yab)a &= ba \\ bya - byaba - ba &= 0 \\ 1 + bya - byaba - ba &= 1 \\ 1 + bya - (bya + 1)ba &= 1 \\ (1 + bya)(1 - ba) &= 1, \end{aligned}$$

luego $1 - ba$ tiene inverso a izquierda. De manera similar, como $1 - ba$ tiene inverso a ambos lados entonces existe $x \in A$ tal que $(1 - ba)x = 1$. De esta manera:

$$\begin{aligned} x - bax &= 1 \\ a(x + bax)b &= ab \\ axb - abaxb - ab &= 0 \\ 1 + axb - abaxb - ab &= 1 \\ 1 + axb - ab(1 + axb) &= 1 \\ (1 - ab)(1 + axb) &= 1. \end{aligned}$$

Con lo que $1 - ab$ tiene inverso a derecha. Ahora, $1 - ab$ tiene inverso a izquierda. Para ver esto, se tiene que existe $y \in A$ tal que $y(1 - ba) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} y - yba &= 1 \\ a(y - yba)b &= ab \\ ayb - aybab - ab &= 0 \\ 1 + ayb - aybab - ab &= 1 \\ 1 + ayb - (ayb + 1)ab &= 1 \\ (1 + ayb)(1 - ab) &= 1. \end{aligned}$$

Es decir, $1 - ab$ tiene inverso a izquierda.

d) implica *c)*. Tomando $b \in A$ como valor fijo. Se tiene que, como $1 - ab$ tiene inverso a derecha, entonces existe $x \in A$ tal que $(1 - ab)x = 1$. Luego $x = 1 - a(-bx)$. Así existe $y \in A$ tal que: $1 = xy = (1 + abx)y = y + abxy = y + ab$. Luego $y = 1 - ab$, es decir x es un inverso a izquierda de y , por lo tanto $1 - ab$ tiene inverso a ambos lados.

c) implica *d)*. Esto se obtiene de forma inmediata, pues si para todo $b \in A$ el elemento $1 - ab$ tiene un inverso a ambos lados, en particular tendrá inverso a derecha.

f) implica *e)*. Tomando $b \in A$ como valor fijo. Se tiene que, como $1 - ba$ tiene inverso a izquierda, entonces existe $y \in A$ tal que $y(1 - ba) = 1$. Luego $y = 1 - (-yb)a$. Así, existe

$x \in A$ tal que $1 = xy = x(1 + yba) = x + xyba = x + ba$. Luego $x = 1 - ba$, es decir y es un inverso a derecha de x y por lo tanto $1 - ba$ tiene inverso a ambos lados.

Para finalizar, $e)$ implica $f)$. Esto se obtiene de forma inmediata, pues si para todo $b \in A$ el elemento $1 - ba$ tiene un inverso a ambos lados, en particular tendrá inverso a izquierda.

□

Corolario 2.1.6. *Sea $\text{rad } A$ el radical de una K -álgebra A , entonces:*

1. $\text{rad } A$ es la intersección de todos los ideales maximales a izquierda.
2. $\text{rad } A$ es un ideal bilátero y $\text{rad}(A/\text{rad } A) = 0$.
3. Si I es un ideal bilátero nilpotente de A , entonces $I \subseteq \text{rad } A$. Si, además, el álgebra A/I es isomorfa al producto $K \times \cdots \times K$ de copias de K , entonces $I = \text{rad } A$.

Demostración.

1. La equivalencia entre $a)$ y $b)$ del lema 2.1.5 justifica este hecho.
2. $\text{rad } A$ es un ideal bilátero, esto se ve como consecuencia inmediata del Lema 2.1.5.
Para ver que $\text{rad}(A/\text{rad } A) = 0$, sea $\bar{a} \in \text{rad}(A/\text{rad } A)$, $\bar{b} \in A/\text{rad } A$. Por el Lema 2.1.5 se tiene que existe $\bar{c} \in A/\text{rad } A$ tal que $(1 - \bar{a}\bar{b})\bar{c} = 1$. Así $(1 - ab)c = 1 - x$, para $a, b \in A$, algún $c \in A$ y $x \in \text{rad } A$. Entonces existe un $d \in A$ tal que $(1 - x)d = 1$, es decir $(1 - ab)cd = 1$. Luego $1 - ab$ tiene inverso a derecha. Así $a \in \text{rad } A$ y por lo tanto $\bar{a} = 0 \in A/\text{rad } A$. Con lo cual $\text{rad}(A/\text{rad } A) = 0$.
3. Sean $m > 0$ un entero tal que $I^m = 0$, $x \in I$ y $a \in A$. Entonces $ax \in I$. Luego $(ax)r = 0$, para algún $r > 0$. Se deduce entonces que la igualdad $(1 + ax + (ax)^2 + \cdots + (ax)^{r-1})(1 - ax) = 1$ se mantiene para cualquier $a \in A$. Por el Lema 2.1.5 se tiene que $x \in \text{rad } A$, de donde $I \subseteq \text{rad } A$. Ahora, para probar la inclusión inversa, al asumir que el álgebra A/I es isomorfa al producto de copias de K se tiene que $\text{rad}(A/I) = 0$. El homomorfismo canónico $\pi : A \rightarrow A/I$ envía $\text{rad } A$ al $\text{rad}(A/I) = 0$. En efecto, si $a \in \text{rad } A$ y $\pi(b) = b + I$, $b \in A$, es cualquier elemento de A/I , entonces $1 - ab$ es invertible en A y por lo tanto $\pi(1 - ab) = 1 - \pi(b)\pi(a)$ es invertible en A/I . Luego $\pi(a) \in \text{rad}(A/I) = 0$. Así $\text{rad } A \subseteq \ker \pi = I$. De esta manera $\text{rad } A = I$.

□

Para cerrar estas nociones básicas relacionadas con las K -álgebras se presenta la definición de módulo y módulo indescomponible, elementos fundamentales en la estructura de las álgebras biseriales y multiseriales que se presentarán en capítulos posteriores.

Definición 2.1.7. Sea A una K -álgebra. Un **A -módulo a derecha** (denotado como M_A) es un par (M, \cdot) , donde M es un K -espacio vectorial y \cdot es la acción:

$$\begin{aligned} \cdot : M \times A &\rightarrow M \\ (m, a) &\rightarrow m \cdot a = ma \end{aligned}$$

que satisface:

- $(x + y)a = xa + ya$
- $x(a + b) = xa + xb$
- $x(ab) = (xa)b$
- $x1 = x$
- $(x\lambda)a = x(a\lambda) = (xa)\lambda$

Para todo $x, y \in M$, $a, b \in A$ y $\lambda \in K$.

La definición de un **A-módulo a izquierda** es análoga y se denota ${}_A M$.

Nota 2.1.8. Un módulo M es de dimensión finita si la dimensión $\dim_K M$ del K -espacio vectorial subyacente de M es finita.

Definición 2.1.9. Un A -módulo a derecha M es **generado** por los elementos m_1, \dots, m_s de M si cualquier elemento $m \in M$ es de la forma $m = m_1 a_1 + \dots + m_s a_s$ para elementos $a_1, \dots, a_s \in A$. En este caso, se expresa $M = m_1 A + \dots + m_s A$. Un módulo M se denomina *finitamente generado* si es generado por un subconjunto finito de elementos de M .

Definición 2.1.10. Dados M y N A -módulos a derecha, donde A es una K -álgebra. Una aplicación K -lineal $f : M \rightarrow N$ es un **homomorfismo de A-módulos** si $f(a\lambda) = f(a)\lambda$, para todo $a \in M$ y $\lambda \in A$.

Definición 2.1.11. La **suma directa** de M_1, \dots, M_s de A -módulos a derecha es definida como el K -espacio vectorial de suma directa $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ equipado con estructura de A -módulo a derecha definida por $(m_1, \dots, m_s)a = (m_1 a, \dots, m_s a)$ para $m_1 \in M_1, \dots, m_s \in M_s$ y $a \in A$. Además, se denota como $M^s = \underbrace{M \oplus \dots \oplus M}_{s\text{-copias}}$.

Definición 2.1.12. Un A -módulo M a derecha se dice **indescomponible** si es diferente de cero y no tiene descomposición en suma directa del tipo $M \cong N \oplus L$, donde L y N son A -módulos diferentes de cero.

Como notación adicional, $Mod A$ denota la categoría de todos los módulos derechos sobre A . En esta categoría cada M es un K -espacio vectorial. Además, $mod A$ denota la subcategoría plena de $Mod A$ constituida por los módulos finitamente generados. En esta categoría

es importante mencionar que si A es de dimensión finita, entonces $\text{mod } A$ coincide con la subcategoría plena de $\text{Mod } A$ constituida por los módulos de K -dimensión finita.

Definición 2.1.13. Dos anillos A y B se dicen **Morita equivalentes** si sus categorías de módulos son equivalentes. Es decir, si existen funtores:

$$F : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$$

$$G : \text{mod } B \rightarrow \text{mod } A$$

e isomorfismos naturales $G \circ F \cong \text{mod } A$, $F \circ G \cong \text{mod } B$.

2.2. Representación de Carcajes

Con la claridad del tipo de álgebras a trabajar, se presentan ahora definiciones que permiten mostrar que cada álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado K corresponde a una estructura gráfica, llamada carcaj, y que, recíprocamente, a cada carcaj corresponde un álgebra asociativa K . Aunque son varios los antecedentes a considerar en la teoría de representaciones, las nociones de carcaj y la representación lineal de carcaj fueron introducidas explícitamente por Gabriel en [16, 17], en especial, el estudio de la teoría de representación de álgebras mediante carcajes está asociado al siguiente teorema que él propuso.

Teorema 2.2.1. [15] *Cada álgebra K de dimensión finita y conexa es Morita equivalente a un álgebra KQ/I para un único carcaj Q , donde I es un ideal admisible de KQ .*

Siendo éste el punto de partida de la teoría moderna de la representación gráfica de álgebras asociativas. Lo expuesto en esta sección es de amplia divulgación y tomado del trabajo de Assem, Simson y Skowronski [3].

Definición 2.2.2. Un **Carcaj** Q es una cuadrupla: $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. En donde Q_0 es un conjunto no vacío de vértices, Q_1 es una colección de flechas que conectan vértices de Q_0 y las dos funciones s y t son:

$$\begin{array}{lll} s : Q_1 \rightarrow Q_0 & t : Q_1 \rightarrow Q_0 & \text{si } a \xrightarrow{\alpha} b . \\ \alpha \mapsto s(\alpha) = a & \alpha \mapsto t(\alpha) = b & \end{array}$$

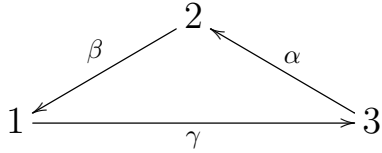
Si $|Q_0| < \infty$ y $|Q_1| < \infty$ se dice que el carcaj Q es finito.

Cuando se omite la dirección de las flechas del carcaj Q se obtiene un grafo \overline{Q} que se denomina **carcaj subyacente** a Q . Además, un carcaj Q se dice que es conexo si su carcaj subyacente \overline{Q} es un grafo conexo.

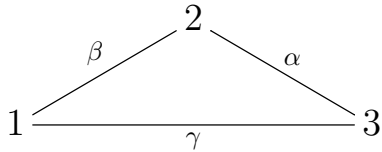
Ejemplo 2.2.3. Dados $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ y $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ de tal forma que:

$$\begin{array}{ll} s(\alpha) = 3 & t(\alpha) = 2 \\ s(\beta) = 2 & t(\beta) = 1 \\ s(\gamma) = 1 & t(\gamma) = 3 \end{array}$$

Se obtiene el carcaj cuya representación es:



para el cual su carcaj subyacente es:



Definición 2.2.4. Sea Q un carcaj y $a, b \in Q_0$, un **camino** P de a hasta b es una colección de flechas y vértices de la forma:

$$P = (a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b),$$

en donde $\alpha_k \in Q_1$ para todo $1 \leq k \leq l$, además $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ y finalmente $t(\alpha_l) = b$.

De esta forma, un camino de longitud $l \geq 1$ es llamado **ciclo** si el vértice de partida coincide con el vértice de llegada. Un ciclo de longitud 1 es llamado **bucle**. Además, cada punto $a \in Q_0$ tiene asociado un camino de longitud $l = 0$, el cual se llama **camino trivial** en a , denotado $\varepsilon_a = (a | | a)$.

Definición 2.2.5. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** KQ de Q es la K -álgebra cuyo K -espacio vectorial correspondiente tiene como base al conjunto de caminos $(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b)$ de longitud $l \geq 0$ en Q . El producto de dos caminos $(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b)$ y $(c | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\gamma | d)$ en KQ se define así:

$$(a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | b) (c | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\gamma | d) = \delta_{bc} (a | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\gamma | d).$$

Donde δ_{bc} denota el delta de Kronecker, es decir, el producto de dos caminos de KQ se define como cero si $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ y es igual a la composición de caminos $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l \beta_1 \beta_2 \dots \beta_\gamma$ si $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$.

Ejemplo 2.2.6. Dados $Q_0 = \{1, 2\}$ y $Q_1 = \{\alpha\}$ de tal forma que $s(\alpha) = 2$ y $t(\alpha) = 1$. Se obtiene el carcaj cuya representación es:

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2$$

En este se determinan tres caminos, α cuya longitud es 1 y los caminos triviales ε_1 y ε_2 . Además, en este carcaj no existen bucles, pues no hay flechas que conecten algún vértice consigo mismo, tampoco existen ciclos, pues el único camino de longitud mayor a cero es $(2|\alpha|1)$ y $s(\alpha) \neq t(\alpha)$. De esta forma el álgebra de caminos KQ está definida por el conjunto base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha\}$, en donde el producto de sus elementos es:

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 \cdot \alpha = 0 & \varepsilon_2 \cdot \alpha = \alpha & \alpha \cdot \varepsilon_1 = \alpha \\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0 & \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 = 0 & \alpha \cdot \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_2 & \alpha \cdot \alpha = 0 \end{array}$$

Esta álgebra KQ es isomorfa al álgebra de matrices 2×2 triangulares inferiores:

$$T_2(K) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}.$$

El isomorfismo es inducido por la aplicación K -lineal:

$$\varepsilon_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los siguientes resultados y definiciones conciernen a la estructura de las álgebras de caminos con y sin relaciones. Mostrando en particular que las álgebras de caminos son asociativas y agregando las definiciones de ideal, ideal admisible, zócalo, radical y tope, considerando que se hará uso de ellas para representar y analizar las álgebras de los capítulos posteriores.

Lema 2.2.7. *Sea Q un carcaj y KQ un álgebra de caminos, entonces:*

- a) KQ es un álgebra asociativa.
- b) KQ tiene un elemento identidad si y sólo si Q_0 es finito.
- c) KQ es de dimensión finita si y sólo si Q es finito y no tiene ciclos orientados.

Demostración.

a) El hecho de que KQ es un álgebra asociativa se deduce directamente de la definición que se ha dado para la operación producto, pues es la composición de caminos y esta operación es asociativa.

b) Para la primer implicación, se considera que cada camino trivial $\varepsilon_a = (a||a)$ es un idempotente de KQ , esto se puede ver como $\varepsilon_a^n = (a||a)\dots(a||a) = (a||a) = \varepsilon_a$. De esta manera

se tiene que si Q_0 es finito, $\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ es un elemento identidad para KQ ; para ver esto, sea $\alpha = \sum_i \lambda_i w_i \in KQ$, con w_i caminos de Q , con esto:

$$\left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a \right) \alpha = \left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a \right) \left(\sum_i \lambda_i w_i \right) = \sum_{a \in Q_0} \sum_i \lambda_i \varepsilon_a w_i,$$

y para cada w_i existe un único $a \in Q_0$ que es el inicio del camino, se tiene que $\varepsilon_a w_i = w_i$ y $\varepsilon_b w_i = 0$ para $b \neq a$, por lo cual:

$$\left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a \right) \alpha = \sum_i \lambda_i w_i = \alpha.$$

Para la otra implicación, se parte de que Q_0 es infinito y se supone que $1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ es una identidad de KQ donde λ_i son escalares diferentes de cero y w_i caminos en Q . Sea Q'_0 el conjunto conformado por todos los vértices que son origen de los w_i , así Q'_0 tiene a lo sumo m elementos y es finito, al tomarse un elemento $a \in Q_0 - Q'_0$ se tendría que $\varepsilon_a 1 = 0$, lo cual es una contradicción.

c) Si Q es infinito, entonces la base de KQ también lo es y por lo tanto KQ es de dimensión infinita. Si $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$ es un ciclo en Q , para cada $t \geq 0$ se tiene un elemento de la base $w^t = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l)^t$, así que KQ es de nuevo de dimensión infinita. Inversamente, si Q es finito y acíclico contiene sólo un número finito de caminos, por lo cual KQ es de dimensión finita. \square

Definición 2.2.8. Sea Q un carcaj finito y conexo, el ideal del álgebra de caminos KQ generado por las flechas de Q recibe el nombre de **ideal flecha** de KQ y es denotado por R_Q o simplemente R .

Es importante tener en cuenta que para R_Q existe una descomposición en sumas directas de la forma:

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \dots \oplus KQ_m \oplus \dots$$

del K -espacio vectorial R_Q , donde KQ_m es el subespacio de KQ generado por el conjunto Q_m de todos los caminos de longitud m . En particular, el K -espacio vectorial asociado a R_Q es generado por todos los caminos en Q de longitud $m \geq 1$. Esto implica que, para cada $m \geq 1$ se tiene:

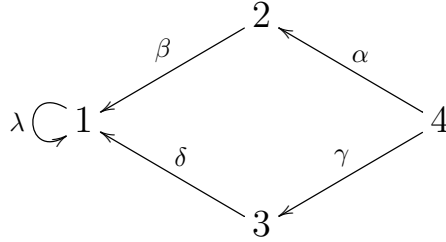
$$R_Q^m = \bigoplus_{l \geq m} KQ_l$$

y por lo tanto, R_Q^m es el ideal de KQ generado, como un K -espacio vectorial, para el conjunto de caminos de longitud $\geq m$.

Definición 2.2.9. Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal flecha del álgebra de caminos KQ . Un ideal bilatero I de KQ se dice **admisibile** si existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$.

Si I es un ideal admisibile de KQ , el par (Q, I) se dice que es un carcaj acotado. El álgebra cociente $A = KQ/I$ se dice que es el álgebra del carcaj acotado (Q, I) .

Ejemplo 2.2.10. Para el carcaj Q :



El ideal $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta, \beta\lambda, \lambda^3 \rangle$ es admisibile, para ver esto hay que iniciar por analizar el cumplimiento de la contendencia $I \subseteq R_Q^2$. Esto se cumple ya que, los caminos que viven en el ideal I contienen alguno de los productos: $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\beta\lambda$ o λ^2 , es decir, todos los caminos pertenecen a R_Q^2 .

En cuanto a la contendencia $R_Q^m \subseteq I$, se cumple para $m = 4$. Esto se sustenta en el hecho de que cada camino de longitud mayor o igual a 4 está en I , de hecho se puede ver cada uno de estos posibles caminos: Si el camino inicia en 1, 2 o 3 entonces contendrá al producto λ^3 y por tanto pertenece a I ; si el camino inicia en 4 hay dos posibilidades, que contenga $\alpha\beta\lambda^2$ o $\gamma\delta\lambda^2$ los cuales pertenecen a I , para el primer caso se tiene que $\beta\lambda \in I$ y para el segundo caso $\gamma\delta\lambda^2 = \gamma\delta\lambda^2 - \alpha\beta\lambda^2 + \alpha\beta\lambda^2 = (\gamma\delta - \alpha\beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda^2$, el cual pertenece a I . De esta forma se concluye que $R_Q^4 \subseteq I \subseteq R_Q^2$ y por tanto I es un ideal admisibile para KQ .

Definición 2.2.11. Sea Q un carcaj finito. Una representación K -lineal, o en otras palabras, una **representación** M de Q es definida por las siguientes condiciones:

- A cada punto a en Q_0 se le asocia un K -espacio vectorial M_a .
- A cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ en Q_1 le es asociada una aplicación K -lineal $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$.

Cada representación es denotada como $M = (M_a, \varphi_\alpha)$.

Definición 2.2.12. Para una representación $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ se tiene que, si cada espacio vectorial M_a es de dimensión finita, entonces la **dimensión de la representación** se define como el vector dimensión $\dim M = (\dim M_a)_{a \in Q_0}$ de las dimensiones de los espacios vectoriales M_a . En caso contrario la dimensión de la representación será infinita. Es decir, una representación es llamada de dimensión finita si cada espacio vectorial M_a es de dimensión finita.

Definición 2.2.13. Sea $A \cong KQ/I$ una K -álgebra y sea M un módulo en $\text{mod } A$. El **vector dimensión** de M se define como el vector:

$$\dim M = \begin{bmatrix} \dim_K M e_1 \\ \vdots \\ \dim_K M e_n \end{bmatrix}$$

en \mathbb{Z}^n , donde e_1, \dots, e_n son idempotentes ortogonales primitivos de A correspondientes a los puntos $1, \dots, n$ de Q_0 .

Definición 2.2.14. Dadas dos representaciones $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ de Q , un **morfismo** (de representaciones) $f : M \rightarrow M'$ es una familia $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de aplicaciones K -lineales $(f_a : M_a \rightarrow M'_a)_{a \in Q_0}$ que son compatibles con la estructura de las aplicaciones φ_α , esto es, para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ se tiene $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$, o equivalentemente, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ \downarrow f_a & & \downarrow f_b \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array}$$

El conjunto de todos los morfismos entre dos representaciones M y M' se denota como $\text{Hom}(M, M')$, el cual es un K -espacio vectorial [3]. Además, un morfismo $f : M \rightarrow M'$ es un **isomorfismo** si cada f_a es biyectivo. La clase de todas las representaciones que son isomorfas a una representación dada M es llamada **isoclase** de M .

Ejemplo 2.2.15. Para el carcaj de Kronecker:

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\alpha} & \\ 1 & & 2 \\ & \xleftarrow{\beta} & \end{array}$$

Se pueden considerar las representaciones:

$$M : K^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \end{array} K \qquad M' : K^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array} K^2$$

En donde 1 indica la aplicación identidad de K en K , $\dim M = (2, 1)$ y $\dim M' = (2, 2)$. Se puede definir además un morfismo de $M \rightarrow M'$ así:

$$\begin{array}{ccc}
 M & & K^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} K \\
 \downarrow f & : & \downarrow f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \downarrow f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 M' & & K^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} K^2 \\
 & & \quad \quad \quad \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}
 \end{array}$$

En donde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo cual, efectivamente el diagrama conmuta. De hecho, dado que ya conocemos que existe al menos un morfismo, se puede establecer $Hom(M, M')$ de la siguiente manera:

Sea $f = (f_1, f_2)$ un morfismo de M a M' , entonces f_1 y f_2 se pueden escribir en forma matricial así:

$$f_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

En donde $a, b, c, d, x, y \in K$. Ahora, como f es un morfismo de representaciones entonces $f_1\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha f_2$ y $f_1\varphi_\beta = \varphi'_\beta f_2$, es decir:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y además} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Lo cual implica que: $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$.

Con lo que se tiene que f es de la forma $f = (\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix})$. De esta manera $Hom(M, M') \cong K^2$ es un espacio vectorial de dimensión 2 con base:

$$B = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}.$$

Definición 2.2.16. Sea Q un carcaj finito. Las representaciones K -lineales de Q definen una categoría denotada $Rep(Q)$. Se denota además por $rep(Q)$ la subcategoría de $Rep(Q)$ compuesta por todas las representaciones de dimensión finita. En particular, $Rep(Q)$ y $rep(Q)$ son K -categorías abelianas [3].

Ahora, dado que uno de los objetivos de la teoría de representaciones es clasificar todas las representaciones de un carcaj Q dado y todos los morfismos entre ellas, es importante introducir la noción de representación indescomponible. Dicha definición es dada a través de la idea de suma directa que se presenta a continuación.

Definición 2.2.17. Sea $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$ representaciones de un carcaj Q , entonces la suma directa de M y M' denotada $M \oplus M'$ es una representación de Q definida de la siguiente forma:

$$M \oplus M' = \left(M_i \oplus M'_i, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} \right)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

Esta definición se puede extender a la suma de cualquier número finito de representaciones que pertenecen a $rep(Q)$.

Definición 2.2.18. Una representación $M \in rep(Q)$ es llamada **indescomponible** si $M \neq 0$ y M no puede ser escrita como suma directa de dos representaciones diferentes de cero, esto es, cuando $M \cong N \oplus L$ con $N, L \in rep(Q)$, entonces $N = 0$ ó $L = 0$.

Ejemplo 2.2.19. Sea Q el carcaj:

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

Y sus representaciones:

$$\begin{array}{ccccc} M & & K & \xrightarrow{1} & K \xleftarrow{0} & 0 \\ M' & & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & K^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} & K \end{array}$$

En donde 1 indica la aplicación identidad. Entonces la suma directa de estas representaciones $M \oplus M'$ es la representación:

$$K \oplus K^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} K \oplus K^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} 0 \oplus K$$

la cual es isomorfa a:

$$K^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} K^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} K.$$

De estas representaciones, M es indescomponible y M' no lo es, dado que M' es isomorfa (pero no igual) a:

$$\left(K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{1} K \right) \oplus \left(K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{0} 0 \right)$$

Ahora bien, para los fines de la teoría de representaciones son de gran importancia las representaciones simples, proyectivas e inyectivas, pues el conocer las representaciones proyectivas e inyectivas indescomponibles implica conocer todas las representaciones proyectivas e inyectivas.

Definición 2.2.20. Para un vertice i en un carcaj Q sin ciclos orientados se tiene que:

- Una **representación simple** en un vertice i se denota por $S(i)$, esta representación $S(i) = (S(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ es tal que:

$$S(i)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ K & \text{si } i = j \end{cases} \quad \varphi_\alpha = 0 \text{ para todo } \alpha \in Q_1$$

- Una **representación proyectiva** $P(i)$ es aquella en la que $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, donde $P(i)_j$ es el K -espacio vectorial que tiene por base al conjunto de caminos que van de i a j en Q ; es decir, los elementos de $P(i)_j$ son de la forma $\sum_c \lambda_c c$ donde c recorre todos los caminos de i a j y $\lambda_c \in K$. Además, si $j \xrightarrow{\alpha} l$ es una flecha en Q entonces $\varphi_\alpha : P(i)_j \rightarrow P(i)_l$ es la aplicación lineal definida sobre las bases por la composición de caminos de i a j con la flecha $j \xrightarrow{\alpha} l$, es decir la flecha α induce una aplicación inyectiva entre las bases:

$$\begin{array}{ccc} \text{Base de } P(i)_j & \longrightarrow & \text{Base de } P(i)_l \\ c = (i|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s|j) & \longmapsto & c\alpha = (i|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \alpha|l) \end{array}$$

con φ_α definido como:

$$\varphi_\alpha \left(\sum_c \lambda_c c \right) = \sum_c \lambda_c c \alpha$$

- Una **representación inyectiva** $I(i)$ es aquella en la que $I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, donde $I(i)_j$ es el K -espacio vectorial que tiene por base al conjunto de caminos que van de j a i en Q ; es decir, los elementos de $I(i)_j$ son de la forma $\sum_c \lambda_c c$ donde c recorre todos los caminos de j a i y $\lambda_c \in K$. Además, si $j \xrightarrow{\alpha} l$ es una flecha en Q entonces $\varphi_\alpha : I(i)_j \rightarrow I(i)_l$ es la aplicación lineal, definida sobre las bases, que elimina la flecha $j \xrightarrow{\alpha} l$ de aquellos caminos de j a i que comienzan con α y enviando a cero los caminos que no inician en α . Más precisamente, la flecha α induce una aplicación sobreyectiva f entre las bases así:

$$\begin{array}{ccc} \text{Base de } I(i)_j & \xrightarrow{f} & \text{Base de } I(i)_l \\ c = (j|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s|i) & \longmapsto & \begin{cases} (l|\beta_2, \dots, \beta_s|i) & \text{si } \beta_1 = \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{array}$$

con φ_α definido como:

$$\varphi_\alpha \left(\sum_c \lambda_c c \right) = \sum_c \lambda_c f(c)$$

Nota 2.2.21.

1. La representación proyectiva en el vértice i es la representación simple en el vértice i si y solo si no hay una flecha α en Q tal que $s(\alpha) = i$. Estos vértices son llamados **sumideros** del carcaj Q . Formalmente se definen así:

$$S(i) = P(i) \iff i \text{ es un sumidero en } Q.$$

2. La representación inyectiva en el vértice i es la representación simple en el vértice i si y solo si no hay una flecha α en Q tal que $t(\alpha) = i$. Estos vértices son llamados **fuentes** del carcaj Q . Formalmente se definen así:

$$S(i) = I(i) \iff i \text{ es fuente en } Q.$$

Definición 2.2.22. Para un A -módulo derecho M se tiene que el **zócalo** $\text{soc } M$ es el módulo semisimple generado por todos los submódulos simples de M .

Definición 2.2.23. El **Top** de un módulo M se define como $\text{top } M = M/\text{rad } M$.

Definición 2.2.24. El **Corazón** de un módulo proyectivo indescomponible P se define como $H(P) = \text{rad } P/\text{soc } P$.

Definición 2.2.25. Sea Q un carcaj finito e I un ideal admisible de KQ . Una representación $M = (M_\alpha, \varphi_\alpha)$ de Q se dice **acotada por** I , o satisface las relaciones de I , si se tiene que:

$$\varphi_\rho = 0, \text{ para todas las relaciones } \rho \in I.$$

Si I es generado por el conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$, la representación M es acotada por I si y solo si $\varphi_{\rho_j} = 0$, para todo j tal que $1 \leq j \leq m$.

Lema 2.2.26. Sea $M = (M_\alpha, \varphi_\alpha)$ una representación acotada de (Q, I) .

a) M es semisimple si y sólo si $\varphi_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in Q_1$.

b) $\text{soc } M = N$, donde $N = (N_\alpha, \psi_\alpha)$ con $N_\alpha = M_\alpha$ si α es un sumidero, mientras que:

$$N_\alpha = \bigcap_{\alpha:a \rightarrow b} \text{Ker}(\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b).$$

Si a no es un sumidero, y $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a} = 0$ para cada flecha α de origen a .

c) $\text{rad } M = J$, donde $J = (J_a, \gamma_\alpha)$ con $J_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Im}(\varphi_\alpha : M_b \rightarrow M_a)$ y $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$ para cada flecha α y origen a .

d) $\text{top } M = L$, donde $L = (L_a, \psi_\alpha)$ con $L_a = M_a$ si a es origen, mientras que $L_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Coker}(\psi_\alpha : M_b \rightarrow M_a)$ si a no es origen y $\psi_\alpha = 0$ para cada flecha α y origen a .

Demostración.

a) Este hecho se sustenta en que $\varphi_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in Q_1$ si y solo si

$$M \cong \bigoplus_{a \in Q_0} S(a)^{\dim_K M_a}$$

b) Dado que $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a}$ entonces N es submódulo de M . Teniendo que $\psi_\alpha = 0$ para cada α entonces N es semisimple. Sea S_A un submódulo simple de M , entonces existe $a \in Q_0$ tal que $S \cong S(a)$. Así se tiene que para cada $\alpha : a \rightarrow b$ un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} K = S(a)_a & \longrightarrow & S(a)_b = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \end{array}$$

Entonces $S(a)_a \subseteq \text{Ker} \varphi_\alpha$ para cada $\alpha : a \rightarrow b$ y por lo tanto $S(a)_a \subseteq N_a$. Esto muestra que $S(a) \subseteq N$ y entonces $N = \text{soc } M$.

c) Sea R el ideal flecha de KQ . Dado que $\text{rad } A = R/I$ es generado como un ideal bilatero por el módulo de clases residuales I de las flechas $\alpha \in Q_1$, de esta forma:

$$J = \text{rad } M = M \cdot \text{rad } A = M \cdot (R/I) = \sum_{\alpha \in Q_1} M\bar{\alpha}.$$

Donde $\bar{\alpha} = \alpha + I$. Entonces para cada $a \in Q_0$ se tiene que $J_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} M\bar{\alpha}$, donde la suma se toma sobre todas las flechas que finalizan en a . Para cada flecha $\alpha : b \rightarrow a$ se tiene:

$$M\bar{\alpha} = M e_b \bar{\alpha} = M_b \bar{\alpha} = \varphi_\alpha(M_b) = \text{Im} \varphi_\alpha$$

entonces la acción de φ_α corresponde a la multiplicación a derecha por $\bar{\alpha}$, así:

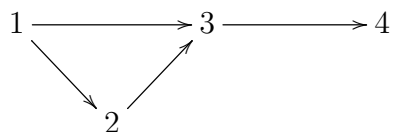
$$J_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Im}(\varphi_\alpha : M_b \rightarrow M_a)$$

y dado que J es un submódulo de M se tiene que $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a}$.

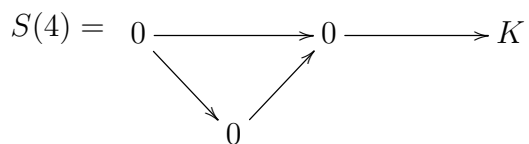
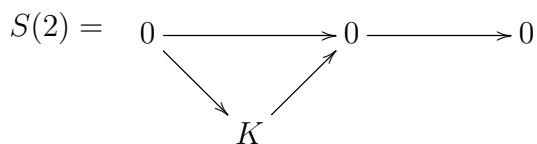
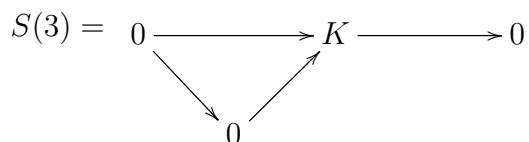
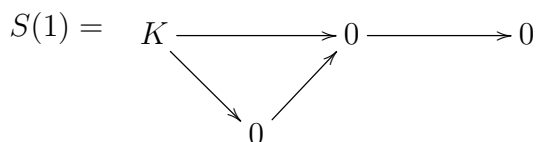
d) Se obtiene como resultado de c) y del hecho que $L = M/(M \text{ rad } A) = M/\text{rad } A$.

□

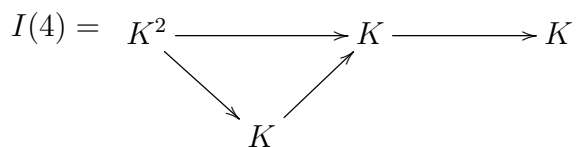
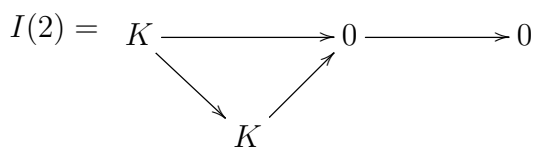
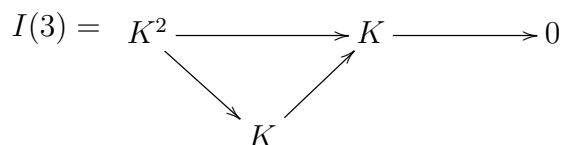
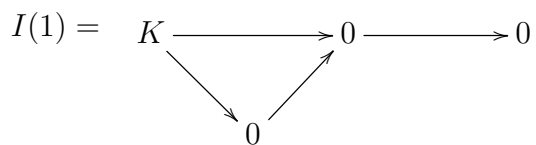
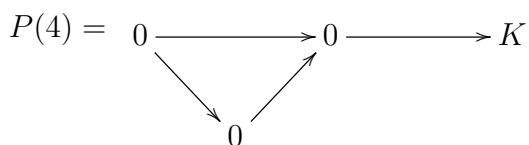
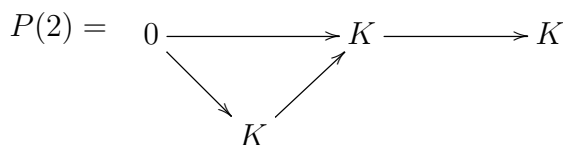
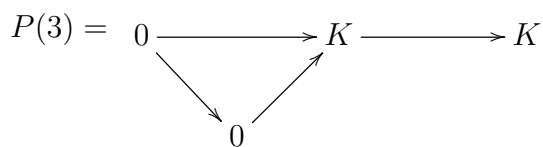
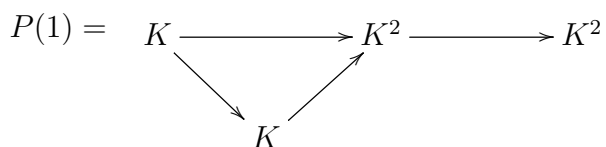
Ejemplo 2.2.27. Para el álgebra de caminos $A = KQ$ del carcaj Q :



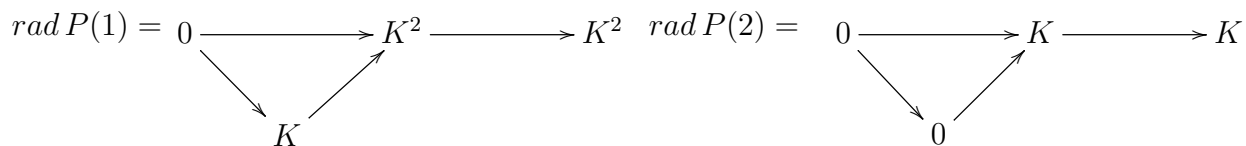
Sus representaciones simples son:



Además las representaciones proyectivas e inyectivas son:



Al calcular el radical de los proyectivos se obtiene:



$$\text{rad } P(3) = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & K \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 0 & & \end{array} \quad \text{rad } P(4) = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 0 & & \end{array}$$

De estas representaciones se observan algunas relaciones:

$$P(4) = S(4) = \text{rad } P(3) \quad I(1) = S(1)$$

Por lo cual el vértice 4 es un sumidero y 1 es un vértice fuente.

Nota 2.2.28. Cuando se analiza la estructura de las representaciones de un carcaj resulta útil la siguiente notación que algunos autores [3, 4, 20] emplean para expresar de manera abreviada dichas representaciones. En esta notación, se omiten las flechas del quiver y se cambian el K de cada vértice por el índice que le fue asignado en el carcaj. Si Q es un carcaj, $Q_0 = [n]$ es su conjunto de vértices y $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ es una representación indescomponible de Q para la cual se tiene el vector dimensión $\dim M = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ (ver Definición 2.2.13). Se representa a M usando los dígitos $i \in [n]$ de tal manera que i aparece exactamente d_i veces. Además, se organizan los dígitos de tal manera que si hay una flecha $\alpha : i \rightarrow j$ y su respectivo morfismo asociado $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$ es no nulo, entonces el dígito i se coloca arriba del dígito j .

Para mostrar como funciona esta notación, se puede ver como se expresan los proyectivos e inyectivos del Ejemplo 2.2.27.

$$\begin{array}{cccc} P(1) = 2 \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} & P(2) = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & P(3) = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} & P(4) = 4 \\ I(1) = 1 & I(2) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & I(3) = 2 \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & I(4) = 2 \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

En ellos se encuentra como relación que $P(1) = I(4)$.

Definición 2.2.29. Una K -álgebra A de dimensión finita se define como un álgebra de tipo de **representación finita** si el número de clases de isomorfismo de A -módulos derechos indescomponibles de dimensión finita es finito. Una K -álgebra A es de tipo de **representación infinita** si no es de tipo de representación finita.

Además, Drozd [8] demostró que las álgebras de tipo infinito se dividen a su vez en dos clases disjuntas: **álgebras mansas** cuyas representaciones indescomponibles pueden ser parametrizadas por varios parámetros discretos y uno continuo y **álgebras salvajes** para las cuales la clasificación de representaciones indescomponibles ocurren en familias de al menos dos parámetros continuos.

Teorema 2.2.30. (Teorema de Gabriel. Parte 1, [36], Teorema 3.1) Un carcaj conexo es de tipo representación finita si y solo si su carcaj subyacente es uno de los diagramas de Dynkin de tipo \mathbb{A} , \mathbb{D} o \mathbb{E} que se presentan a continuación.

$$\mathbb{A}_m = \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array} \quad m \geq 1$$

$$\mathbb{D}_n = \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \diagup \\ \circ \end{array} \quad n \geq 4$$

$$\mathbb{E}_6 = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

$$\mathbb{E}_7 = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

$$\mathbb{E}_8 = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

3 Álgebras Biseriales Especiales

Las álgebras de la forma KQ/I que aparecen en el estudio de la teoría de representación de álgebras mediante carcajes son complicadas y por lo tanto a menudo se consideran subclases de ellas. Por ejemplo, para restringir la clase de álgebras de dimensión finita, se pueden imponer restricciones adicionales sobre I y Q , como la cantidad de flechas que inician y finalizan en cada vértice. La exploración de dichas restricciones lleva en primera instancia a las álgebras de Nakayama (generalización de las álgebras uniseriales [3, 29]) y posteriormente a las álgebras biseriales.

Las álgebras biseriales y biseriales especiales son objeto de un intenso estudio en el último siglo [21], pues a través de ellas se pueden analizar muchos aspectos de la teoría de representación de álgebras, en particular y especialmente importante para el presente trabajo, en la actualidad existe un renovado interés en ellas por su utilidad en el estudio de álgebras autoinyectivas desde las álgebras de grafo de Brauer.

A lo largo de esta sección se denota por A a una K -álgebra y todos los A -módulos son, a menos que se diga otra cosa, A -módulos derechos finitamente generados.

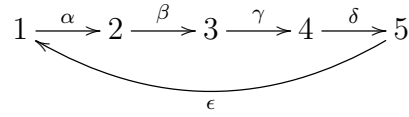
Definición 3.1. Un A -módulo M_A es **uniserial** si tiene una serie de composición única.

Si M es uniserial, entonces también lo es cada submódulo de M y cada cociente de M . Además, el dual DM de M es A -módulo izquierdo uniserial. Debido a que un módulo uniserial M necesariamente tiene un *top* simple (y un zócalo simple), debe ser indescomponible.

En búsqueda de determinar de manera sencilla y natural cuándo los módulos de una álgebra de caminos son uniseriales, se presenta la definición de álgebra uniserial derecha y álgebra uniserial izquierda.

Definición 3.2. Un álgebra A es **uniserial derecha** si cada A -módulo proyectivo indescomponible derecho es uniserial. Un álgebra A es **uniserial izquierda** si cada A -módulo proyectivo indescomponible izquierdo es uniserial.

De manera equivalente, A es uniserial derecha si cada A -módulo inyectivo indescomponible izquierdo es uniserial, y A es uniserial izquierda si cada A -módulo inyectivo indescomponible derecho es uniserial. Por lo tanto, un álgebra A es uniserial derecha si y solo si su álgebra opuesta A^{op} es uniserial izquierda. Más aún, una K -álgebra básica A es uniserial derecha si



Con las relaciones $\alpha\beta\gamma\delta = \beta\gamma\delta\epsilon = \gamma\delta\epsilon\alpha = \delta\epsilon\alpha\beta = \epsilon\alpha\beta\gamma = 0$.

Al ser un álgebra de Nakayama, es uniserial y su carcaj permite deducir que es auto-inyectiva. Esto se puede ver a través de sus módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles.

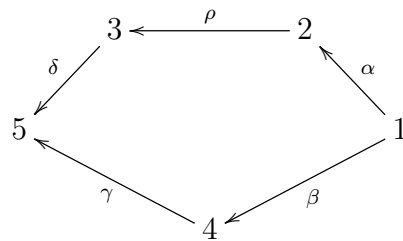
$$\begin{array}{lll}
 P(1) = I(4) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & P(3) = I(1) = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{array} & P(5) = I(1) = \begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\
 P(2) = I(5) = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & P(4) = I(2) = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{array} &
 \end{array}$$

Ahora que se han definido los módulos uniserials y una generalización de álgebras cuyos módulos indescomponibles son uniserials, se revisa qué sucede en un álgebra con módulos biseriales.

Definición 3.7. [14] Un álgebra A es **biserial** si para cada módulo proyectivo indescomponible izquierdo o derecho P , existen submódulos uniserials U y V de P que satisfacen $\text{rad} P = U + V$ (no necesariamente suma directa), tal que $U \cap V$ es cero o simple.

Definición 3.8. [21] Un álgebra A es **multiserial** si para cada A -módulo derecho o izquierdo P su radical $\text{rad} P$ puede ser escrito como suma directa de módulos uniserials U_1, \dots, U_j , de manera que, si $i \neq j$ entonces $U_i \cap U_j$ es cero o un A -módulo simple.

Ejemplo 3.9. Sea Q el carcaj:



Y el ideal admisible $I = \langle \alpha\rho\delta - \beta\gamma \rangle$. Entonces para el álgebra $A = KQ/I$ se tiene que:

$$P(1) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad P(2) = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \quad P(3) = \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} \quad P(4) = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \quad P(5) = 5$$

Es decir, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ y $P(5)$ son uniserials, mientras que $P(1)$ es biserial. Además, como $\text{rad} P(1) = P(2) + P(4)$ y $P(2) \cap P(4) = S(5)$ entonces A es biserial.

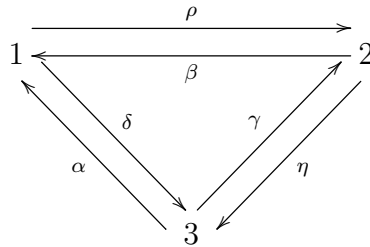
Con la intención de estudiar las álgebras biserials y siguiendo con lo expuesto en las álgebras de Nakayama, surge de manera natural la idea de analizar si las álgebras biserials son aquellas cuyo carcaj ordinario cumple que cada vértice es origen y finalización de máximo dos flechas; sin embargo, la mayoría de álgebras que cumplen esa condición resultan salvajes, por esta razón aparece la necesidad de establecer restricciones en las flechas que hacen parte del carcaj, esto lleva al planteamiento de las álgebras especiales biserials.

Definición 3.10. [4] Un álgebra se llama **especial biserial** si es Morita equivalente a un álgebra de la forma KQ/I que satisface:

- **(S0)** En cada vértice v de Q hay como máximo dos flechas que comienzan en v y hay como máximo dos flechas que terminan en v .
- **(S1)** Para cada flecha α de Q existe como máximo una flecha β tal que $\alpha\beta \notin I$ y existe como máximo una flecha γ tal que $\gamma\alpha \notin I$.

Ejemplo 3.11. El álgebra A del Ejemplo 3.9 es especial biserial.

Ejemplo 3.12. Sea Q el carcaj:



Y el ideal admisible $I = \langle \rho\eta, \eta\alpha, \alpha\rho, \delta\gamma, \gamma\beta, \beta\delta, \rho\beta - \delta\alpha, \eta\gamma - \beta\rho, \alpha\delta - \gamma\eta \rangle$. Entonces para el álgebra $A = KQ/I$ se tiene que:

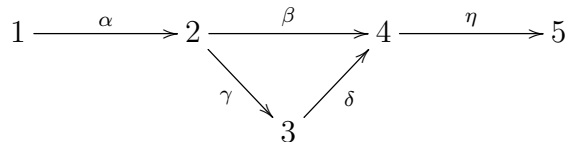
$$P(1) = \begin{matrix} 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 \end{matrix} \quad P(2) = \begin{matrix} 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 \end{matrix} \quad P(3) = \begin{matrix} 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 \end{matrix},$$

son módulos biserials, con radicales que pueden ser vistos como suma de sub-módulos uniserials de intersección cero:

$$\text{rad } P(1) = \begin{matrix} 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} \quad \text{rad } P(2) = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \quad \text{rad } P(3) = \begin{matrix} 1 \\ 3 & 2 \end{matrix},$$

por lo cual A es biserial. Además, es biserial especial pues cumple **(S0)** y **(S1)**.

Ejemplo 3.13. Sea Q el carcaj:



Y el ideal admisible $I = \langle \beta\eta, \alpha\beta - \alpha\gamma\delta \rangle$. Entonces para el álgebra $A = KQ/I$ se tiene:

$$P(1) = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \quad P(2) = \frac{3}{4} \frac{2}{5} \quad P(3) = \frac{3}{4} \frac{4}{5} \quad P(4) = \frac{4}{5} \quad P(5) = 5.$$

Es decir, $P(1)$, $P(3)$, $P(4)$ y $P(5)$ son módulos uniseriales, mientras que $P(2)$ es biserial. Para este último su radical es suma de dos sub-módulos uniseriales de intercepción simple:

$$\text{rad } P(2) = \frac{3}{4} + 4.$$

Por lo cual A es biserial. Sin embargo, no es biserial especial pues cumple **(S0)** pero no **(S1)**. Específicamente, para α se tiene que $\alpha\beta$ y $\alpha\gamma$ no pertenecen a I .

Este último ejemplo muestra que el ser biserial no implica ser biserial especial, no obstante, los demás ejemplos dejan la inquietud de la veracidad de la implicación contraria, esto se ve a través del siguiente teorema.

Teorema 3.14. [40] *Las álgebras especiales biseriales son biseriales.*

Demostración. Toda flecha $\alpha = e_j \leftarrow e_i$ en Q determina un único camino $w = \alpha_s \dots \alpha_2 \alpha_1$, $\alpha_1 = \alpha$, el cual es maximal en el conjunto de todas los caminos u que no están en I comenzando en α , y cualquier camino u de este tipo es un subcamino de w . Entonces el submódulo $A(\alpha + I)$ de $\text{rad } Ae_i$ es uniserial y, por **(S0)**, $\text{rad } Ae_i$ es la suma de a lo sumo dos módulos uniseriales.

Ahora, al suponer que se tienen dos caminos paralelos $u = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ y $v = \beta_m \dots \beta_2 \beta_1$ iniciando en e_i , $\alpha_1 \neq \beta_1$, tal que $A(u + I) = A(v + I) \neq 0$. Entonces por **(S1)** se tiene que $\alpha_n \neq \beta_m$, y se afirma que $A(u + I) = K(u + I) \subseteq \text{soc } Ae_i$. Así que se asume $\gamma u \notin I$ para alguna flecha γ en Q . Como $A(u + I) = A(v + I)$ es un módulo uniserial, se puede ver que por **(S1)** el punto final de γ es el segundo factor superior de $A(u + I)$, y así se tiene que $\gamma v \notin I$, pero entonces ambos $\gamma\alpha_n$ y $\gamma\beta_m$ no pertenecen a I , contrario a **(S1)**, con lo cual la afirmación está probada. Dado que las condiciones **(S)** son simétricas a derecha e izquierda, A es biserial.

□

La prueba de este teorema de hecho demuestra lo siguiente.

Corolario 3.15. *Si el carcaj (Q, I) satisface las condiciones **(S0)** y **(S1)**, entonces I es generado por un conjunto de caminos y un conjunto de elementos $u_i - c_i v_i$, donde u_i y v_i son caminos paralelos distintos y c_i es un elemento distinto de cero en K . Para tal relación $K(u + I)$ se encuentra en el zócalo izquierdo y derecho de $A = KQ/I$.*

Pese a que en general no es cierto el recíproco del Teorema 3.14, si se cumple en el caso en que el álgebra es estándar autoinyectiva [32], recordando que se considera que un álgebra es estándar si es isomorfa a $\oplus \Lambda$ para alguna categoría finita estándar Λ ; es decir, el álgebra es

isomorfa a una Λ categoría que admite un cubrimiento de Galois $R \rightarrow A$ con R simple y conexa. Otro caso en el que se cumple el recíproco es cuando el álgebra es biserial distributiva [40], aclarando que Ringel demostró que si un álgebra A es de representación finita entonces es distributiva [33].

Ejemplo 3.16. El álgebra A del Ejemplo 3.13 es biserial simple y conexa, por tanto estándar, pero no es autoinyectiva, por lo tanto no es especial biserial.

Ejemplo 3.17. Sea Q el carcaj:

$$\alpha \circlearrowleft 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\gamma} 3 \circlearrowright \delta$$

Con relaciones $\alpha^2 = \delta^2 = 0$, entonces:

$$P(1) = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \qquad P(2) = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \qquad P(3) = \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}.$$

Como los proyectivos indescomponibles son uniserials, el álgebra $A = KQ/I$ es biserial y además es distributiva por ser de tipo representación finita. De esta forma el álgebra es especial biserial.

Teorema 3.18. *Las álgebras especiales biserials son de tipo representación manso.*

La demostración de este teorema se puede ver en el trabajo de Wald y Waschbüsch [43], quienes clasificaron todos los módulos indescomponibles de las álgebras especiales biserials y al hacerlo mostraron que estas álgebras son siempre de tipo manso.

Ahora, cada K -álgebra especial biserial de dimensión finita es factor de una simétrica, de ahí lo especial de las álgebras especiales biserials, pues al ser cocientes de álgebras simétricas, resulta que estas álgebras simétricas son nuevamente biserials. Esto es expresado mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.19. [43] *Toda álgebra especial biserial es factor de un álgebra especial biserial simétrica.*

Demostración. Sea A un álgebra especial biserial, en esta demostración construiremos un álgebra especial biserial simétrica A_S a partir de A , con la claridad de que A_S no está determinado únicamente por A .

Para iniciar, es necesario extender la noción de camino a lo siguiente. Una tripla $T = (Q, I, v)$, en donde (Q, I) es un carcaj acotado y $v \in Q$ es un camino (o un ciclo), es llamada *camino lineal* (respectivamente *cíclico*) si $A = KQ/I$ es de dimensión finita y satisface que: **(1)** Cada flecha $\alpha \in Q_1$ ocurre exactamente una vez en v y v se relaciona como máximo dos

veces a través de cada vértice de Q . **(2)** Para cada par de flechas $\alpha, \beta \in Q_1$ que se pueden componer, la composición $\alpha\beta$ vive en I si y solo si $\beta\alpha$ no está en un sub-camino de v .

Sea $A = KQ/I$ donde (Q, I) es un carcaj acotado especial e $\mathbf{I} = \{T_\alpha = (Q_\alpha, I_\alpha, v_\alpha), \alpha \in \Omega \subseteq Q_1\}$ el conjunto de caminos de (Q, I) . Se asigna ahora alguna numeración a los caminos, por ejemplo $I = \{T_1, \dots, T_t\}$, $T_i = (Q_i, I_i, v_i)$ para $1 \leq i \leq t$, tal que para algún $0 \leq s \leq t$ se tiene que v_i es un ciclo o un camino cerrado para $1 \leq i \leq s$, mientras que v_i no es cerrado para $s + 1 \leq i \leq t$.

El primer paso es presentar al álgebra A como factor de un álgebra especial A' cuyos caminos contienen ciclos o caminos cerrados. Esto se puede hacer por inducción sobre el número $n = t - s$ de caminos no cerrados v_i , $n = n(A)$.

Sean a_i y b_i el punto inicial y final de v_i respectivamente, $s + 1 \leq i \leq t$.

Caso 1. Hay caminos que se pueden componer, digamos, $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+m}$, $m \geq 2$.

Si la composición v de ellos es un camino cerrado, se define una nueva álgebra $A' = KQ/I'$ donde I' es obtenido de I borrando las relaciones:

$$\beta_i \alpha_{i+1}, \quad r + 1 \leq i \leq r + m - 1 \quad y \quad \beta_{r+m} \alpha_{r+1}.$$

Donde α_i es la primera y β_i la última flecha en el camino v_i . Entonces A' es especial biserial, A es un factor de A' y $n(A') = t - (s + m) < n(A)$.

Si v no es cerrado, se puede asumir que ningún otro camino v_i , $i \geq r + m$, se puede componer con v . Esto implica que máximo una flecha de Q tiene dominio b_{s+m} y a lo más una flecha de Q tiene rango a_{s+1} . Entonces se puede agregar una nueva flecha $\gamma : b_{s+m} \rightarrow a_{s+1}$ y con las relaciones apropiadas I' en el nuevo carcaj Q' , nuevamente se obtiene un álgebra especial A' , de manera que A es un factor de A' y $n(A') = t - (s + m) < n(A)$.

Caso 2. Los caminos v_i , $s + 1 \leq i \leq t$, no se pueden componer.

En este caso nuevamente se puede agregar una nueva flecha $\gamma : b_{s+m} \rightarrow a_{s+1}$ y se obtiene un álgebra A' como antes con $n(A') = n(A) - 1$.

Se puede asumir ahora que los caminos v_α en T_α , $\alpha \in \Omega$, de A son ciclos o caminos cerrados. Se define $v_\beta := v_\alpha$ para cada flecha β ocurriendo en v_α y se denota por m el índice de nilpotencia del $rad A$. Para cada vértice a de Q y cada flecha α con dominio a se denota como $v_{a,\alpha}$ el camino cerrado que inicia en a , con α recorriendo m veces a través de v_α y finalizando en a . Al considerar el ideal I_s de KQ generado por todos los elementos que tiene alguna de las siguientes formas:

(i) $\beta\alpha$, donde $\beta\alpha$ no es subcamino de v_α ,

(ii) Todos los caminos que contienen propiamente un camino $v_{a,\alpha}$,

(iii) Todas las diferencias $v_{a,\alpha} - v_{a,\beta}$, donde $\alpha \neq \beta$ son flechas con el mismo dominio a .

De esta manera el álgebra $A_s := KQ/I_s$ es especial biserial y tiene al álgebra A como factor.

Finalmente, se puede observar que A_s es también simétrica mediante la aplicación lineal $\varphi : A_s \rightarrow K$ dada sobre las clases residuales de caminos v así:

$$\begin{aligned} \varphi(v + I_s) &:= 1 && \text{si } v = v_{a,\alpha} \text{ para algún } \alpha = a \rightarrow b \in Q_1 \\ \varphi(v + I_s) &:= 0 && \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

φ no se anula en ideales derechos o izquierdos diferentes de cero pero si en los conmutadores, porque para dos caminos u y v que se pueden componer en Q se tiene que $u \cdot v = v_{a,\alpha}$ para alguna flecha $\alpha = a \rightarrow b$ si y solo si $v \cdot u = v_{c,\gamma}$ para alguna flecha $\gamma = c \rightarrow d$.

□

Explorando los cocientes entre álgebras biserials simétricas aparecen relaciones directas con las denominadas álgebras de grafo de Brauer, las cuales se presentan en el Capítulo 4.

4 Álgebras de Configuración de Brauer

La clasificación de álgebras según sean de tipo representación finita, mansas o salvajes ha permitido diversos desarrollos en la estructuración de las álgebras de dimensión finita, las cuales suelen entenderse muy bien y sirven de ejemplos y casos de prueba para la generación de nuevas ideas y conjeturas en la teoría de representación de álgebras. Con las álgebras de tipo representación infinito, en el caso de ser mansas aún se conservan regularidades y aspectos estructurales que permiten establecer conjeturas y resultados; sin embargo, al pasar a las álgebras salvajes el estudio de sus propiedades resulta mucho más complejo. En este sentido, toman importancia las álgebras de grafo de Brauer, las cuales son de tipo de representación manso y cuya teoría de representación está codificada por datos combinatorios basados en grafos, pues éstas pueden ser generalizadas a las denominadas álgebras de configuración de Brauer que usualmente resultan de tipo de representación salvaje [20].

4.1. Álgebras de Grafo de Brauer

Las álgebras de grafo de Brauer se originan en la teoría de la representación modular de grupos finitos, específicamente en el trabajo de Janusz [24] en donde aparecen bajo la forma de álgebras de árboles de Brauer, para luego ser definidas a modo general por Donovan y Freislich [7]. A continuación se presentan algunas definiciones y teoremas fundamentales sobre las álgebras de grafo de Brauer, los cuales son tomados del trabajo de Assem y Trepode [4].

Definición 4.1.1. Un **grafo de Brauer** G es una tupla $G = (G_0, G_1, m, \mathcal{O})$ donde:

- (G_0, G_1) es un grafo conectado finito (no orientado) con un conjunto de vértices G_0 y un conjunto de aristas G_1 .
- $m : G_0 \rightarrow \mathbf{Z}_{>0}$ es una función llamada **multiplicidad** o **función de multiplicidad** de G .
- \mathcal{O} es llamado **orientación** de G y está dado, para cada vértice $v \in G_0$, por un orden cíclico de las aristas incidentes sobre v , de modo que si v es un vértice incidente en una arista simple i entonces: si $m(v) = 1$ el ordenamiento cíclico para v está dado por i , y si $m(v) > 1$ el ordenamiento cíclico para v está dado por $i < i$.

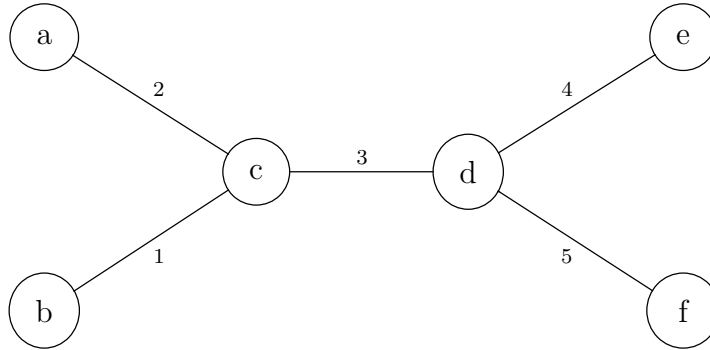
Definición 4.1.2. Para un grafo de Brauer se denota como $val(v)$ a la **valencia** del vértice $v \in G_0$, definiéndose como el número de aristas en G incidentes en v , con la convención de que un bucle se cuenta dos veces.

Definición 4.1.3. Un **árbol de Brauer** es un grafo de brauer $G = (G_0, G_1, m, \mathcal{O})$ tal que (G_0, G_1) es un árbol y $m(v) = 1$ para todos excepto un $v \in G_0$. Además, para una arista i con vértice v , se dice que está **truncada** en v si $m(v)val(v) = 1$.

Ejemplo 4.1.4. Sea el grafo de Brauer $G = (G_0, G_1, m, \mathcal{O})$, tal que:

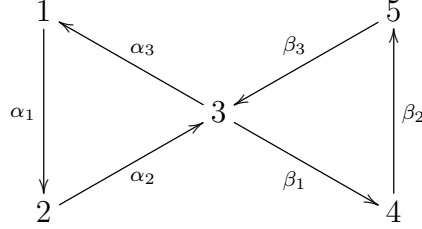
- $m(i) = 1$ para todo $i \in G_0$.
- El orden cíclico de los vértices incidentes en a es 2, $val(a) = 1$.
- El orden cíclico de los vértices incidentes en b es 1, $val(b) = 1$.
- El orden cíclico de los vértices incidentes en c es $1 < 2 < 3 < 1$, $val(c) = 3$.
- El orden cíclico de los vértices incidentes en d es $3 < 4 < 5 < 3$, $val(d) = 3$.
- El orden cíclico de los vértices incidentes en e es 4, $val(e) = 1$.
- El orden cíclico de los vértices incidentes en f es 5, $val(f) = 1$.

Entonces su representación es:



Definición 4.1.5. (Carcaj de un grafo de Brauer) Dado un grafo de Brauer $G = (G_0, G_1, m, \mathcal{O})$, se define un carcaj $Q_G = (Q_0, Q_1)$ de la siguiente forma. El conjunto de vértices Q_0 está dado por el conjunto de aristas G_1 de G , denotando el vértice en Q_0 con i de acuerdo a su correspondiente arista i en G_1 . Las flechas en Q son inducidas por la orientación \mathcal{O} . Más precisamente, sean i y j dos aristas en G_0 incidentes con un vértice común v y tal que j es un sucesor directo de i en el orden cíclico de las aristas en v , entonces hay una flecha $\alpha : i \rightarrow j$ en Q_G . Cada vértice $v \in G_0$ tal que $m(v)val(v) > 1$ da inicio a una flecha de ciclo orientado C_v en Q_G , la cual es única hasta la permutación cíclica. Se denomina a C_v como **ciclo especial** en v .

Ejemplo 4.1.6. El carcaj asociado al grafo de Brauer del Ejemplo 4.1.4 es:



Definición 4.1.7. Un **ideal** de relaciones I_G en KQ_G es generado por tres tipos de relaciones:

Relación tipo I: $C_v^{m(v)} - C_{v'}^{m(v')}$. Para todo $i \in Q_0$ y para todos los i -ciclos especiales C_v y $C_{v'}$ de v y v' tales que v y v' no son truncados.

Relación tipo II: $C_v^{m(v)}\alpha_1$. Para todo $i \in Q_0$, todo $v \in G_0$ y donde $C_v = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_n$ es algún i -ciclo especial.

Relación tipo III: $\alpha\beta$. Para todo $\alpha, \beta \in Q_1$ tal que $\alpha\beta$ no es una subtrayectoria de algún ciclo especial, excepto si $\alpha = \beta$ es un bucle asociado al vértice v de valencia uno y multiplicidad $m(v) > 1$.

Definición 4.1.8. El álgebra $A_G = KQ_G/I_G$ es llamada **Álgebra de un Grafo de Brauer** asociada al Grafo de Brauer G .

Ejemplo 4.1.9. El conjunto de relaciones I_G que definen el álgebra del grafo de Brauer $B = KQ_{G_1}/I_{G_1}$ correspondente al Ejemplo 4.1.4 son:

Ciclos especiales en c : 1-ciclo $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, 2-ciclo $\alpha_2\alpha_3\alpha_1$ y 3-ciclo $\alpha_3\alpha_1\alpha_2$.

Ciclos especiales en d : 3-ciclo $\beta_1\beta_2\beta_3$, 4-ciclo $\beta_2\beta_3\beta_1$ y 5-ciclo $\beta_3\beta_1\beta_2$.

Relaciones tipo I: $\alpha_3\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2\beta_3$.

Relaciones tipo II: $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\alpha_1$, $(\alpha_2\alpha_3\alpha_1)\alpha_2$, $(\alpha_3\alpha_1\alpha_2)\alpha_3$, $(\beta_1\beta_2\beta_3)\beta_1$, $(\beta_2\beta_3\beta_1)\beta_2$ y $(\beta_3\beta_1\beta_2)\beta_3$.

Relaciones tipo III: $\alpha_2\beta_1$ y $\beta_3\alpha_3$.

Si analizamos los módulos proyectivos indescomponibles del álgebra B encontramos que son:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P(3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P(4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P(5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Es decir, B es biserial. Lo cual no es casual, para mostrar esto se presentan a continuación dos teoremas que relacionan las álgebras de grafo de Brauer con las álgebras especiales biserials.

Teorema 4.1.10. *Dado un grafo de Brauer $G = (G_0, G_1, m, \mathcal{O})$ su álgebra de grafo de Brauer asociada $A_G = K_G/I_G$ es un álgebra simétrica de dimensión finita.*

Demostración. Para iniciar, se puede mostrar que el ideal I_G es admisible. Para esto, al tomar la definición de un ciclo especial C_v , se tiene que cada $l(C_v) > 1$ o $m(v) > 1$. Entonces, $I_G \subset KQ^2$. Además, de las relaciones de tipo I, II y III se tiene que, para $N = \max_{v \in G_0} l(C_v^{m(v)})$, cada camino p in Q con $l(p) \geq N + 1$ es tal que $p \in I_G$.

Ahora, para mostrar que A_G es simétrica, se define la función lineal simétrica $f : A_G \rightarrow K$ en la cual:

$$f(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p = C_v^{m(v)} \text{ para algún } v \in G_0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma, no tiene ideal izquierdo diferente de cero en el kernel y como consecuencia A_G es simétrica. □

Teorema 4.1.11. *Sea KQ/I una K -álgebra de dimensión finita. Entonces KQ/I es un álgebra especial biserial simétrica si y solo si KQ/I es un álgebra de grafo de Brauer.*

Este teorema fue demostrado por Roggenkamp [35] quien determinó que si el carcaj asociado a un álgebra biserial simétrica A no tiene flechas dobles, entonces A es un álgebra de grafo de Brauer, esto fue retomado por Schroll [38] (Teorema 1.1) quien demostró que este resultado se mantiene para cualquier carcaj asociado a un álgebra biserial simétrica. Este resultado también es expuesto por Aihara [1] (Proposición 1.2) de la siguiente manera.

Proposición 4.1.12. *Las álgebras de grafo de Brauer son especiales biserials.*

Con la Proposición 4.1.12 y el Teorema 3.17 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.1.13. *Las álgebras de grafo de Brauer son de tipo representación manso. El álgebra de un grafo de Brauer es de tipo representación finita si y sólo si es un álgebra de árbol de Brauer.*

4.2. Álgebras de Configuración de Brauer como Generalización de las Álgebras de Grafo de Brauer

Las álgebras de configuración de Brauer fueron propuestas por Green y Schroll en [20] como una generalización de las álgebras de grafos de Brauer, mostrando que, así como a cada grafo de Brauer le corresponde un álgebra de grafo de Brauer, para cada configuración de Brauer existe un álgebra de configuración de Brauer asociada. Exponiendo además que, subyacente

a cada álgebra de grafo de Brauer hay un grafo finito con una orientación cíclica de las aristas en cada vértice y una función de multiplicidad [37]. La construcción de un álgebra de grafo de Brauer es un caso especial de la construcción de un álgebra de configuración de Brauer en el sentido de que cada grafo de Brauer es una configuración de Brauer con la restricción de que cada polígono es un conjunto con dos vértices. A continuación se detallan algunos elementos de las álgebras de configuración de Brauer expuestos en [4, 13, 20, 31].

Definición 4.2.1. Una **configuración de Brauer** Γ es una cuádrupla de la forma $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mu, \mathcal{O})$ en donde:

(B1) Γ_0 es un conjunto finito cuyos elementos son llamados **vértices**.

(B2) Γ_1 es una colección finita de multiconjuntos llamados **polígonos**. En este caso, si $V \in \Gamma_1$ entonces los elementos de V son vértices posiblemente con repeticiones, $occ(\alpha, V)$ denota la frecuencia del vértice α en el polígono V y la **valencia** de α denotada $val(\alpha)$ es definida de tal manera que:

$$val(\alpha) = \sum_{V \in \Gamma_1} occ(\alpha, V).$$

(B3) μ es una función de valor entera tal que $\mu : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$, donde \mathbb{N} denota el conjunto de enteros positivos, ésta es llamada **función de multiplicidad**.

(B4) \mathcal{O} denota una orientación definida sobre Γ_1 que es una elección, para cada vértice $\alpha \in \Gamma_0$, de un orden cíclico de los polígonos en los que α aparece como vértice, incluidas las repeticiones, se denota S_α tal colección de polígonos. Más específicamente, si $S_\alpha = \{V_1^{(\alpha_1)}, V_2^{(\alpha_2)}, \dots, V_t^{(\alpha_t)}\}$ es la colección de polígonos donde el vértice α ocurre con $\alpha_i = occ(\alpha, V_i)$ y $V_i^{(\alpha_i)}$ lo que significa que S_α tiene α_i copias de V_i , entonces una orientación \mathcal{O} es obtenida dotando de un orden lineal $<$ a S_α y añadiendo una relación $V_t < V_1$, si $V_1 = \min S_\alpha$ y $V_t = \max S_\alpha$. De acuerdo con este orden, las α_i copias de V_i pueden ser ordenadas como $V_{1,i} < V_{2,i} < \dots < V_{(\alpha_i-1),i} < V_{\alpha_i,i}$ y S_α puede ser ordenado en la forma $V_1^{(\alpha_1)} < V_2^{(\alpha_2)} < \dots < V_{(t-1)}^{(\alpha_{(t-1)})} < V_t^{(\alpha_t)}$.

(B5) Cada vértice en Γ_0 es un vértice en al menos un polígono de Γ_1 .

(B6) Cada polígono tiene al menos dos vértices.

(B7) Cada polígono en Γ_1 tiene al menos un vértice α tal que $\mu(\alpha)val(\alpha) > 1$.

El conjunto $(S_\alpha, <)$ es llamado **secuencia sucesora** en el vértice α . Además, un vértice $\alpha \in \Gamma_0$ es llamado **truncado** si $\mu(\alpha)val(\alpha) = 1$, esto es, α es un vértice truncado si ocurre exactamente una vez en exactamente un $V \in \Gamma_1$ y $\mu(\alpha) = 1$. En caso contrario el vértice

será **no truncado**.

Nota 4.2.2. Sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mu, \mathcal{O})$ una configuración de Brauer, Γ se dice **disconexa** si existen dos configuraciones de Brauer $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1, \mu', \mathcal{O}')$ y $\Gamma'' = (\Gamma''_0, \Gamma''_1, \mu'', \mathcal{O}'')$ tales que:

1. $\{\Gamma'_0, \Gamma''_0\}$ es una partición de Γ_0 .
2. Para cada polígono $V \in \Gamma_1$, los vértices de V están todos en Γ'_0 o están todos en Γ''_0 .
3. $\{\Gamma'_1, \Gamma''_1\}$ es una partición de Γ_1 .
4. μ' (respectivamente μ'') es una restricción de μ para Γ'_0 (repectivamente Γ''_0).
5. Las orientaciones \mathcal{O}' y \mathcal{O}'' son inducidos por \mathcal{O} .

En este caso, se tiene que $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$. En otro caso se dice que Γ es conexo.

Definición 4.2.3. El **Carcaj** $Q_\Gamma = ((Q_\Gamma)_0, (Q_\Gamma)_1)$ de una configuración de Brauer se define de tal manera que el conjunto de vértices $(Q_\Gamma)_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de Q_Γ está en correspondencia con el conjunto de polígonos $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ en Γ_1 , notando que hay un vértice en $(Q_\Gamma)_0$ para cada polígono en Γ_1 .

Las flechas en Q_Γ son definidas por la secuencia sucesora. Esto es, hay una flecha $v_i \rightarrow v_{i+1} \in (Q_\Gamma)_1$ siempre que $V_i < V_{i+1}$ en $(S_\alpha, <) \cup \{V_t < V_1\}$ para algún vértice no truncado $\alpha \in \Gamma_0$. En otras palabras, para cada vértice no truncado $\alpha \in \Gamma_0$ y cada sucesor V' de V en α , hay una flecha de v a v' en Q_Γ donde v y v' son vértices en Q_Γ asociados a los polígonos V y V' en Γ_1 , respectivamente.

Definición 4.2.4. Un **Álgebra de configuración de Brauer** A_Γ asociada a una configuración de Brauer Γ es definida expresando a A_Γ como el álgebra de caminos acotada $A_\Gamma = KQ_\Gamma/I_\Gamma$, donde Q_Γ es el carcaj asociado a Γ y I_Γ es el ideal en KQ_Γ generado por el siguiente conjunto de relaciones ρ_Γ de tipo I, II y III.

Relaciones tipo I. Para cada polígono $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \Gamma_1$ y cada par de vértices no truncados α_i y α_j en V , el conjunto de relaciones ρ_Γ contiene todas las relaciones de la forma $C^{\mu(\alpha_i)} - C'^{\mu(\alpha_j)}$ donde C es un α_i -ciclo especial y C' es un α_j -ciclo especial.

Relaciones tipo II. Todos los caminos de la forma $C^{\mu(\alpha)}a$ donde C es un α -ciclo especial y a es la primera flecha en C .

Relaciones tipo III. Relaciones monomiales cuadráticas de la forma $ab \in KQ_\Gamma$ donde ab no es un subcamino de ningún ciclo especial a menos que $a = b$ y a sea un bucle asociado a un vértice de valencia 1 y $\mu(\alpha) > 1$.

Desde este punto, a menos de que sea necesario para evitar confusión, se notará A , I y ρ en lugar de A_Γ , I_Γ y ρ_Γ a las álgebras de configuración de Brauer, el ideal y conjuntos de relaciones, respectivamente, definidas para una configuración de Brauer Γ .

4.3. Algunas Propiedades de las Álgebras de Configuración de Brauer

En esta sección se presentan algunos resultados correspondientes al álgebra de configuración de Brauer, en especial, que estas álgebras son multiseriales [20], así como las expresiones que permiten calcular su dimensión y la dimensión de su centro [39].

Definición 4.3.1. Dada una configuración de Brauer $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mu, \mathcal{O})$, se dice que Γ es **reducida** si y solo si cada polígono V en Γ_1 satisface una de las siguientes condiciones:

- (i) V no contiene vértices truncados.
- (ii) V es un 2-gon con un vértice truncado.

En donde 2-gon se refiere a un polígono de 2 vértices.

Proposición 4.3.2. Sea A_Γ un álgebra de configuración de Brauer asociada a una configuración de Brauer Γ . Suponga que $\alpha \in \Gamma_0$ es un vértice truncado en un polígono $V \in \Gamma_1$ y V es un d -gon, $d \geq 3$. Sea Γ' el álgebra de configuración de Brauer obtenida al remover el vértice α . Entonces la configuración de Brauer $A_{\Gamma'}$ asociada a Γ' es isomorfa a A_Γ .

Demostración. Dado que α es un vértice truncado, existe un único polígono, digamos $V \in \Gamma_1$ es donde α es vértice. Además, dado que α es truncado no existen α -ciclos especiales. Por lo tanto, no se crean flechas en el carcaj de A por α , es decir, los carcaj A y A' son los mismos. De manera similar, los ideales de relaciones se consideran los mismos, por lo cual se obtiene lo que se quería demostrar. □

Proposición 4.3.3. Sea $A = KQ/I$ un álgebra de configuración de Brauer asociada a una configuración de Brauer Γ y sea $V \in \Gamma_1$, $\alpha \in \Gamma_0$ un vértice no truncado en Γ_0 que ocurre en V . Sea $C = a_1 a_2 \dots a_{\text{val}(\alpha)}$ un α -ciclo especial en v y C' la permutación cíclica $a_{j+1} \dots a_{\text{val}(\alpha)} a_1 \dots a_j$. Sea $p = a_1 a_2 \dots a_j$, para algún $1 < j < \text{val}(\alpha) - 1$, $x = C^s p$ y $y = p C'^s$, para algún $0 < s < \mu(\alpha)$. Entonces:

- (1) $a_i \neq a_j$, para $i \neq j$.
- (2) $\bar{x} \neq 0$.
- (3) Si a es una flecha en Q , entonces $\bar{x} a \neq 0$ si y solo si $a = a_{j+1}$.

(4) $\bar{y} \neq 0$.

(5) Si a es una flecha en Q , entonces $\overline{ay} \neq 0$ si y solo si $a = a_{\text{val}(\alpha)}$.

Demostración. Parte (1) se obtiene del hecho que, si a es una flecha en Q entonces hay un único vértice no truncado $\alpha \in \Gamma_0$ y un único α -ciclo especial C tal que a es la primera flecha en C . En particular, no hay flechas repetidas en un ciclo especial. Ahora, las relaciones tipo II y III son caminos monomiales y las tipo I son diferencias $D^{\mu(\alpha)} - D'^{\mu(\alpha)}$ donde D y D' son α -ciclos especiales para algún $\alpha \in \Gamma_0$. Entonces, x y y no tienen subcaminos del tipo II o III, por lo cual se cumplen (2) y (4). De manera similar, si $a \neq a_{j+1}$, entonces $a_j a$ es del tipo de relación III y por tanto (3) se cumple. Finalmente, si $a \neq a_{\text{val}(\alpha)}$ entonces aa_1 es del tipo de relación III y se cumple (5). □

Lema 4.3.4. Sea $A = KQ/I$ un álgebra de configuración de Brauer asociada a una configuración de Brauer Γ . Sea C un ciclo especial y p un camino de longitud ≥ 1 en Q tal que la primera flecha de p es la primera flecha en C . Entonces $\bar{p} \neq 0$ si y solo si p es un prefijo de $C^{\mu(\alpha)}$.

Demostración. Dado que la primera flecha de $p = a_1 \cdots a_m$ es la misma que la primera flecha de C , cada p es prefijo de C^s para algún s o existe una i tal que a_i es una flecha en C pero $a_i a_{i+1}$ no está en C . Primero, si $a_i a_{i+1}$ no está en C , entonces $a_i a_{i+1}$ no está en ningún ciclo especial por la Proposición 4.3.3 parte (3), entonces $a_i a_{i+1}$ es una relación de tipo III y $\bar{p} = 0$.

Al tomar ahora que C es un α -ciclo especial para algún vértice no truncado $\alpha \in \Gamma_0$ y suponer que p es prefijo de C^s , entonces cada $l(p) \leq l(C^{\mu(\alpha)})$ o $l(p) > l(C^{\mu(\alpha)})$. Primero, al asumir que $l(p) > l(C^{\mu(\alpha)})$, entonces p contiene $C^{\mu(\alpha)} a_1$ la cual es una relación de tipo II y por tanto $\bar{p} = 0$. Ahora, al tomar $l(p) \leq l(C^{\mu(\alpha)})$, se tiene que p no contiene relaciones del tipo II o III. Por el supuesto de la longitud, las relaciones de tipo I no afectan p y se obtiene que $\bar{p} \neq 0$. Lo cual completa la prueba. □

Proposición 4.3.5. Sea $A = KQ/I$ un álgebra de configuración de Brauer asociada a una configuración de Brauer Γ . Entonces I es un ideal admisible y A es un álgebra simétrica.

Demostración. Por los tres tipos de relaciones presentadas en la Definición 4.2.4 se obtiene que I está contenido en J^2 (siendo J el ideal bilatero de KQ generado por las flechas en Q). Ahora, al considerar el conjunto:

$$S = \{C^{\mu(\alpha)} \mid \alpha \text{ es un vértice no truncado y } C \text{ es un } \alpha\text{-ciclo especial}\},$$

y $N = \max_{C^{\mu(\alpha)} \in S} (l(C^{\mu(\alpha)})) + 1$. Si p es un camino de longitud N , entonces p no puede ser prefijo de ningún elemento en S . Además, cada flecha en Q es el prefijo de algún ciclo en

S , esto combinado con el Lema 4.3.4 permite deducir que $\bar{p} = 0$; esto es, $p \in I$, por lo cual $J^N \subseteq I$ y de este modo I es admisible.

Además, por el Lema 4.3.3 se tiene que el zócalo de A es generado por los elementos de S . De hecho, para cada $V \in \Gamma_1$, al elegir un vértice no truncado α de V y un α -ciclo especial en v , C_V , en Q , se tiene que $\{C_V^{\mu(\alpha)} \mid V \in \Gamma_1\}$ forma una K -base del zócalo bilatero de A .

Para mostrar que A es un álgebra simétrica, sea $\phi : A \rightarrow K$ una aplicación K -lineal definida así: sea p un camino en Q , entonces $\phi(\bar{p}) = 1$ si y solo si $p \in S$. Si $p \notin S$, $\phi(\bar{p}) = 0$. En ella se tiene que $\phi(ab) = \phi(ba)$ y además el $\text{Ker } \phi$ no contiene ideales izquierdos o derechos, esto por la descripción de K -base del zócalo bilatero de A y por el hecho de que ϕ es 1 sobre elementos de S . De esta forma se tiene que A es simétrica. □

Proposición 4.3.6. *Sea $A = KQ/I$ un álgebra de configuración de Brauer asociada a una configuración de Brauer Γ . Para cada $V \in \Gamma_1$, al elegir un vértice no truncado α de V y exactamente un α -ciclo especial C_V en v , se tiene que para:*

- $\mathcal{A} = \{\bar{p} \mid p \text{ es un prefijo propio de algún } C^{\mu(\alpha)} \text{ donde } C \text{ es un } \alpha\text{-ciclo especial}\}$.
- $\mathcal{B} = \{\overline{C_V^{\mu(\alpha)}} \mid V \in \Gamma_1\}$.

Se cumple que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es una K -base de A .

Demostración. En la demostración de la Proposición 4.3.5 se mostró que $\{\overline{C_V^{\mu(\alpha)}} \mid V \in \Gamma_1\}$ es una K -base del zócalo de A . Además, cada flecha es el inicio de un ciclo especial, así que por el Lema 4.3.3 y el hecho de que las únicas flechas que afectan los subcaminos propios de los ciclos especiales son las relaciones monomiales (tipo II y tipo III), la proposición queda demostrada. □

Proposición 4.3.7. *Si Γ es una configuración de Brauer conexa, entonces el álgebra de configuración de Brauer asociada a Γ es indescomponible como álgebra.*

Demostración. Para iniciar se muestra que si un álgebra de configuración de Brauer es descomponible, entonces la configuración de Brauer es disconexa. Suponga que Γ es una configuración de Brauer con álgebra de configuración de Brauer asociada A , que además A es descomponible y $A \cong A' \times A''$. Sean Q , Q' y Q'' los carcajes asociados a A , A' y A'' , respectivamente, entonces Q es la unión disjunta de Q' y Q'' . Sea $T = \{V \in \Gamma_1 \mid \text{el vértice en } Q \text{ asociado a } V \text{ está en } Q'\}$ y $T' = \{V \in \Gamma_1 \mid \text{el vértice en } Q \text{ asociado a } V \text{ está en } Q''\}$, entonces $T \cup T' = \Gamma_1$ y $T \cap T' = \emptyset$.

Sea \mathcal{A} el conjunto de vértices de los polígonos en T y \mathcal{B} el conjunto de vértices de los polígonos en T' . Entonces se tiene que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. De hecho, suponga que existe un vértice $\alpha \in \Gamma_0$ que es vértice de un polígono $V \in T$ y de un polígono $V \in T'$. Entonces tanto V como V' ocurren en la secuencia sucesora en α . Por lo tanto, si C es un α -ciclo especial, tanto v como v' ocurren como vértices en C . Esto contradice el hecho de que no hay caminos de v a v' en el carcaj de A , ya que v es un vértice en Q' y v' es un vértice en Q'' . Por lo tanto, por la condición **(B5)** en la Definición 4.2.1, se obtiene una partición de $\Gamma_0 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Lo siguiente, es mostrar que Γ es desconexa, esto se puede ver por contradicción. Suponga que Γ es conexa, entonces $\Gamma_1 = T \cup T'$, $T \cap T' = \emptyset$, $\Gamma_0 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, para que Γ sea conexa debe existir algún polígono V que tenga vértices tanto de \mathcal{A} como de \mathcal{B} ; es decir, existe un polígono $V \in \Gamma_1$, $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{B}$, tal que α y β son vértices de V . Esto es una contradicción pues $T \cap T' = \emptyset$. Por lo cual, Γ es desconexa. \square

Teorema 4.3.8. *Sea A un álgebra de configuración de Brauer asociada a una configuración de Brauer reducida Γ . Sea P un A -módulo proyectivo indescomponible asociado a un d -gon V . Se define un entero r estableciendo que $r = d$ si todos los vértices V son no truncados y $r = 1$ si V es un 2 -gon con un vértice truncado. Entonces, el $\text{rad } P$ es la suma de los r A -módulos uniseriales $\sum_C U_1(C)$ donde C se mueve sobre los α -ciclos especiales en v para cada vértice no truncado α de V . Si $r > 1$, entonces $U_i \cap U_j$ es el zócalo simple de P . Más aún, el corazón de P , $\text{rad } P / \text{soc } P$ es una suma directa de A -módulos uniseriales.*

Demostración. Sea:

$$C_v = \{C \mid C \text{ es un } \alpha\text{-ciclo especial en } v, \alpha \text{ un vértice no truncado en } V\} = \{C_1, \dots, C_r\}.$$

Para cada $C_i \in C_v$ el A -módulo uniserial $U_1(C_i)$ es generado por las primeras flechas a_i en C_i . Sea M el submódulo de P generado por a_1, \dots, a_r . Se tiene que a_1, \dots, a_r son precisamente las flechas en el carcaj de A que inician en el vértice v (donde v corresponde a V) y además $P = e_v A$, donde e_v es el idempotente primitivo en A para v . Entonces se tiene que $M = \text{rad } P$ y que $M = \sum_{i=1}^r U_1(C_i)$.

Para $i = 1, \dots, r$ se tiene que $\overline{C_i^{\mu(\alpha)}}$ es un elemento diferente de cero en el zócalo de P y al considerar las relaciones de tipo I resulta que todos son iguales. Dado que las relaciones tipo II y III son monomiales, se tiene que, si $i \neq j$ entonces $U_1(C_i) \cap U_1(C_j)$ es el zócalo de P el cual es un A -módulo simple. De nuevo, por las relaciones tipo I, II y III, se tiene la sucesión exacta corta de A -módulos:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} S_v \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^r U_1(C_i) \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Donde $f(s_1, \dots, s_{r-1}) = (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_{r-1} - s_{r-2}, -s_{r-1})$. Factorizando los zócalos se obtiene el isomorfismo:

$$\bigoplus_{i=1}^r U_1(C_i)/S_v \xrightarrow{\cong} M/\text{soc } P.$$

De esta forma, $M/\text{soc } P$ es el corazón de P , con lo que se completa la prueba.

Por lo tanto, como consecuencia del Teorema 4.3.8 se tienen los resultados que se presentan a continuación.

Corolario 4.3.9. *Sea A un álgebra de grafo de Brauer asociada a una configuración de Brauer Γ , entonces:*

1. *A es un álgebra multiserial.*
2. *El número de sumandos en el corazón de un A -módulo proyectivo indescomponible P , tal que $\text{rad}^2 P \neq 0$, es igual al número de vértices no truncados del polígono en Γ correspondientes a P contando repeticiones.*

Proposición 4.3.10. *Sea A un álgebra de grafo de Brauer asociada a una configuración de Brauer Γ y sea $C = \{C_1, \dots, C_t\}$ un conjunto completo de representantes de clases de equivalencia de ciclos especiales. Al asumir que, para $i = 1, \dots, t$, C_i es un α_i -ciclo especial donde α_i es un vértice no truncado en Γ . Entonces:*

$$\dim_K A = 2|Q_0| + \sum_{C_i \in C} |C_i| (n_i |C_i| - 1).$$

Donde $|Q_0|$ denota el número de vértices de Q , $|C_i|$ denota el número de flechas en los α_i -ciclos C_i y $n_i = \mu(\alpha_i)$.

Demostración. Dado que $\dim_K A = \dim_K(A/\text{rad } A) + \dim_K \text{rad } A$ y $\dim_K(A/\text{rad } A) = |Q_0|$ se debe mostrar que $\dim_K \text{rad } A = |Q_0| + \sum_{i=1}^t |C_i| |C_i - 1|^{\mu(\alpha_i)}$. Ahora, $\dim \text{rad } A = \dim_K(\text{soc}(\text{rad } A)) + \dim_K(\text{rad } A/\text{soc}(\text{rad } A)) = |Q_0| + \dim_K(\text{rad } A/\text{soc}(\text{rad } A))$. De esta forma, resta probar que $\dim_K(\text{rad } A/\text{soc}(\text{rad } A)) = \sum_{i=1}^t |C_i| |C_i - 1|^{\mu(\alpha_i)}$. Por el Teorema 4.3.8 se tiene que el $\text{rad } A/\text{soc } A$ es isomorfo a la suma directa de módulos uniseriales $aA/\text{soc}(aA)$, esto es, $\text{rad } A/\text{soc } A \cong \bigoplus_{a \in Q_1} (aA/\text{soc}(aA))$. Pero si $C = a_1 \cdots a_s$ es el α -ciclo especial con primera flecha $a = a_1$ asociado al módulo uniserial aA , entonces $\dim_K(aA) = \mu(\alpha)s$. De esta forma, $\dim_K(aA/\text{soc}(aA)) = \mu(\alpha)|C| - 1$. Teniendo en cuenta que hay $|C|$ ciclos especiales equivalentes a C , la proposición queda demostrada.

Proposición 4.3.11. [39] *Sea $A = KQ/I$ el álgebra de configuración de Brauer asociada a la configuración de Brauer conexa y reducida Γ . Entonces:*

$$\dim_K Z(A) = 1 + \sum_{\alpha \in \Gamma_0} \mu(\alpha) + |\Gamma_1| - |\Gamma_0| + \#Bucles(Q) - |\mathcal{C}_\Gamma|.$$

Donde $\mathcal{C}_\Gamma = \{\gamma \in \Gamma_0 \mid \text{val}(\gamma) = 1 \text{ y } \mu(\gamma) > 1\}$.

Ejemplo 4.3.12. Considere la configuración $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mu, \mathcal{O})$ tal que:

1. $\Gamma_0 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$,
2. $\Gamma_1 = \{V_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}, V_2 = \{\beta, \gamma, \epsilon, \epsilon\}, V_3 = \{\alpha, \delta, \delta\}, V_4 = \{\alpha, \delta\}, V_5 = \{\alpha, \epsilon, \beta, \beta\}\}$,
3. En el vértice α , se tiene que; $V_1 < V_3 < V_4 < V_5$, $\text{val}(\alpha) = 4$,
4. En el vértice β , se tiene que; $V_1 < V_2 < V_5 < V_5$, $\text{val}(\beta) = 4$,
5. En el vértice γ , se tiene que; $V_1 < V_2$, $\text{val}(\gamma) = 2$,
6. En el vértice δ , se tiene que; $V_1 < V_3 < V_3 < V_4$, $\text{val}(\delta) = 4$,
7. En el vértice ϵ , se tiene que; $V_2 < V_2 < V_1 < V_5$, $\text{val}(\epsilon) = 4$,
8. $\mu(\alpha) = \mu(\beta) = \mu(\delta) = \mu(\epsilon) = 1$ y $\mu(\gamma) = 2$.

El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer Λ_Γ es generada por las siguientes relaciones, para las cuales se asume la siguiente notación para los ciclos especiales:

$$\begin{array}{lll} C_\alpha^{V_1,1} = a_1^\alpha a_2^\alpha a_3^\alpha a_4^\alpha, & C_\alpha^{V_3,1} = a_2^\alpha a_3^\alpha a_4^\alpha a_1^\alpha, & C_\alpha^{V_4,1} = a_3^\alpha a_4^\alpha a_1^\alpha a_2^\alpha, \\ C_\alpha^{V_5,1} = a_4^\alpha a_1^\alpha a_2^\alpha a_3^\alpha, & C_\beta^{V_1,1} = a_1^\beta a_2^\beta a_3^\beta a_4^\beta, & C_\beta^{V_2,1} = a_2^\beta a_3^\beta a_4^\beta a_1^\beta, \\ C_\beta^{V_5,1} = a_3^\beta a_4^\beta a_1^\beta a_2^\beta, & C_\beta^{V_5,2} = a_4^\beta a_1^\beta a_2^\beta a_3^\beta, & C_\gamma^{V_1,1} = a_1^\gamma a_2^\gamma, \\ C_\gamma^{V_2,1} = a_2^\gamma a_1^\gamma, & C_\delta^{V_1,1} = a_1^\delta a_2^\delta a_3^\delta a_4^\delta, & C_\delta^{V_3,1} = a_2^\delta a_3^\delta a_4^\delta a_1^\delta, \\ C_\delta^{V_3,2} = a_3^\delta a_4^\delta a_1^\delta a_2^\delta, & C_\delta^{V_4,1} = a_4^\delta a_1^\delta a_2^\delta a_3^\delta, & C_\epsilon^{V_2,1} = a_1^\epsilon a_2^\epsilon a_3^\epsilon a_4^\epsilon, \\ C_\epsilon^{V_2,2} = a_2^\epsilon a_3^\epsilon a_4^\epsilon a_1^\epsilon, & C_\epsilon^{V_1,1} = a_3^\epsilon a_4^\epsilon a_1^\epsilon a_2^\epsilon, & C_\epsilon^{V_5,1} = a_4^\epsilon a_1^\epsilon a_2^\epsilon a_3^\epsilon. \end{array}$$

Relaciones tipo I

$$\begin{array}{lll} \blacksquare C_\alpha^{V_1,1} - C_\beta^{V_1,1} & \blacksquare C_\beta^{V_1,1} - (C_\gamma^{V_1,1})^2 & \blacksquare C_\alpha^{V_3,1} - C_\delta^{V_3,1} \\ \blacksquare C_\alpha^{V_1,1} - C_\epsilon^{V_1,1} & \blacksquare C_\delta^{V_1,1} - (C_\gamma^{V_1,1})^2 & \blacksquare C_\alpha^{V_3,1} - C_\delta^{V_3,2} \\ \blacksquare C_\beta^{V_1,1} - C_\epsilon^{V_1,1} & \blacksquare C_\epsilon^{V_1,1} - (C_\gamma^{V_1,1})^2 & \blacksquare C_\alpha^{V_4,1} - C_\delta^{V_4,1} \\ \blacksquare C_\alpha^{V_1,1} - C_\delta^{V_1,1} & \blacksquare C_\beta^{V_2,1} - C_\epsilon^{V_2,1} & \blacksquare C_\alpha^{V_5,1} - C_\beta^{V_5,1} \\ \blacksquare C_\beta^{V_1,1} - C_\delta^{V_1,1} & \blacksquare C_\beta^{V_2,1} - C_\epsilon^{V_2,2} & \blacksquare C_\alpha^{V_5,1} - C_\beta^{V_5,2} \\ \blacksquare C_\alpha^{V_1,1} - (C_\gamma^{V_1,1})^2 & \blacksquare C_\beta^{V_2,1} - (C_\gamma^{V_2,1})^2 & \blacksquare C_\alpha^{V_5,1} - C_\epsilon^{V_5,1} \end{array}$$

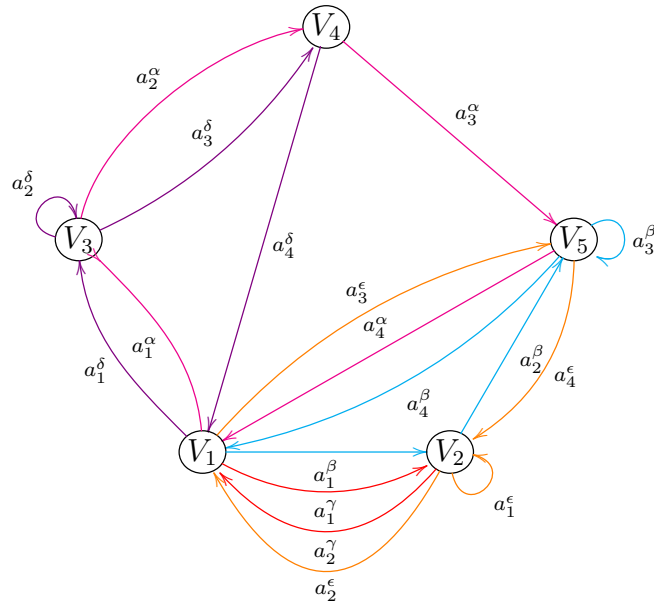
Relaciones tipo II

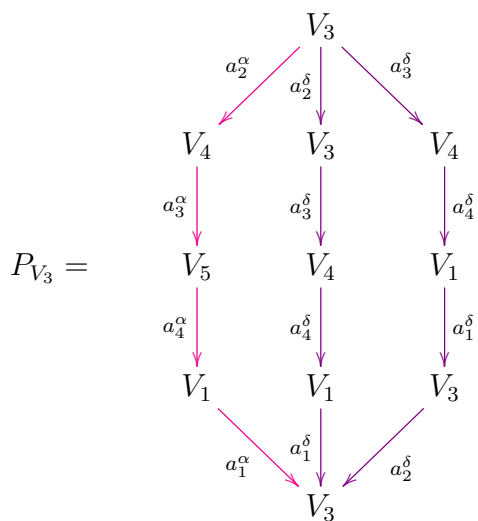
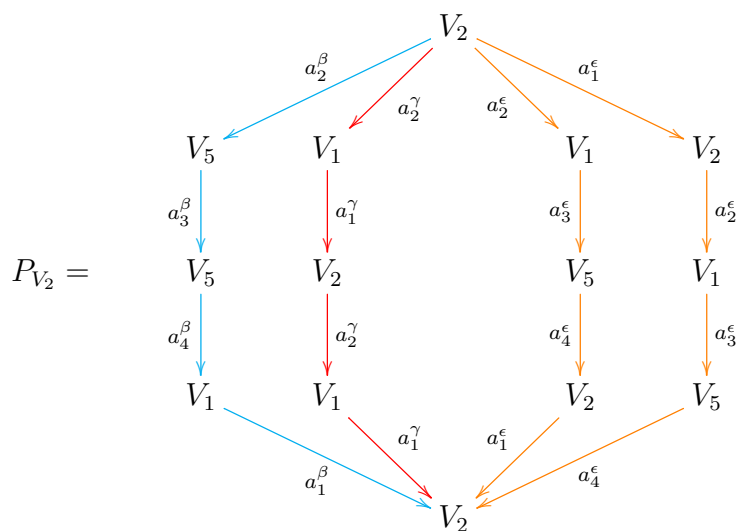
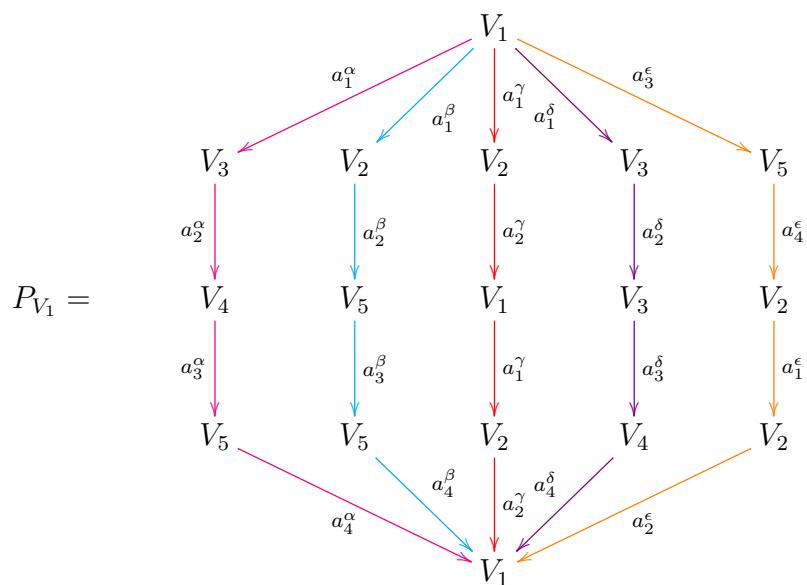
- $C_\alpha^{V_i,j} a (C_\beta^{V_i,j} a')$, donde a (a') es la primera flecha de $C_\alpha^{V_i,j}$ ($C_\beta^{V_i,j}$) para todo i, j .
- $C_\delta^{V_i,j} a (C_\epsilon^{V_i,j} a')$, donde a (a') es la primera flecha de $C_\delta^{V_i,j}$ ($C_\epsilon^{V_i,j}$) para todo i, j .
- $(C_\gamma^{V_i,j})^2 a$, donde a es la primera flecha de $C_\gamma^{V_i,j}$ para todo i, j .

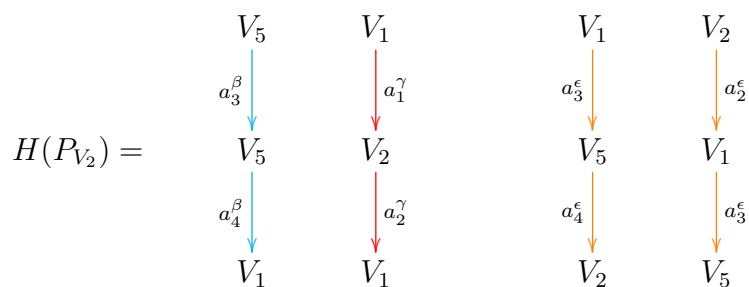
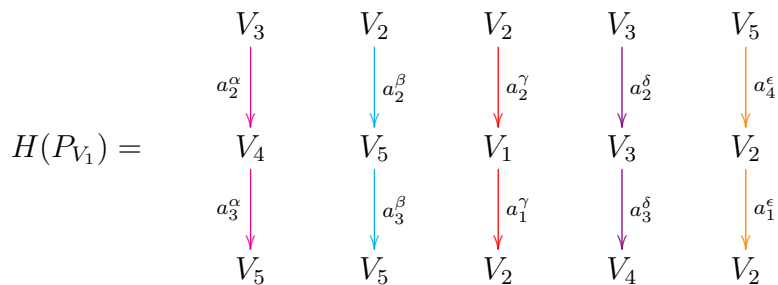
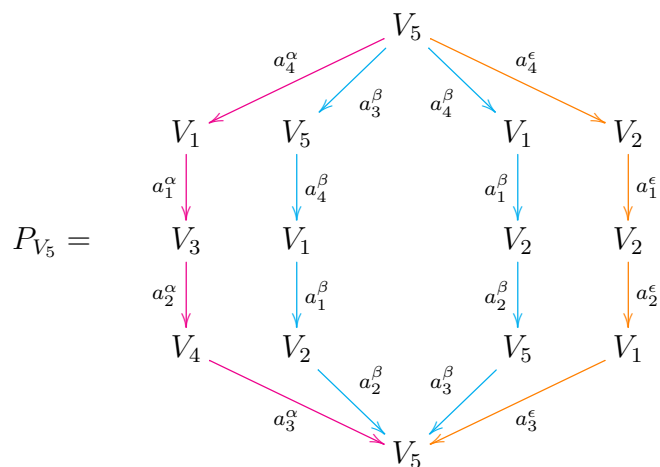
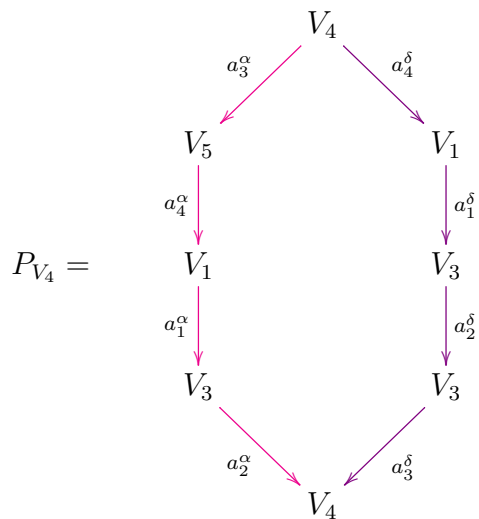
Relaciones tipo III

- $a_i^h a_r^s$, si $h \neq s$, para todos los posibles valores de i y r . Además $(a_3^\beta)^2$, $(a_1^\epsilon)^2$, $(a_2^\delta)^2$.

A continuación se presenta el carcaj Q_Γ asociado a esta configuración y los correspondientes módulos proyectivos indescomponibles P_{V_1} , P_{V_2} , P_{V_3} , P_{V_4} y P_{V_5} , así como el corazón y radical de cada uno de ellos.







$$\begin{array}{c}
H(P_{V_3}) = \begin{array}{ccc}
V_4 & V_3 & V_4 \\
\downarrow a_3^\alpha & \downarrow a_3^\delta & \downarrow a_4^\delta \\
V_5 & V_4 & V_1 \\
\downarrow a_4^\alpha & \downarrow a_4^\delta & \downarrow a_1^\delta \\
V_1 & V_1 & V_3
\end{array} \\
\\
H(P_{V_4}) = \begin{array}{cc}
V_5 & V_1 \\
\downarrow a_4^\alpha & \downarrow a_1^\delta \\
V_1 & V_3 \\
\downarrow a_1^\alpha & \downarrow a_2^\delta \\
V_3 & V_3
\end{array} \\
\\
H(P_{V_5}) = \begin{array}{cccc}
V_1 & V_5 & V_1 & V_2 \\
\downarrow a_1^\alpha & \downarrow a_4^\beta & \downarrow a_1^\beta & \downarrow a_1^\epsilon \\
V_3 & V_1 & V_2 & V_2 \\
\downarrow a_2^\alpha & \downarrow a_1^\beta & \downarrow a_2^\beta & \downarrow a_2^\epsilon \\
V_4 & V_2 & V_5 & V_1
\end{array}
\end{array}$$

4.4. El Mensaje de una Configuración de Brauer

La noción de etiquetas de una configuración de Brauer y el mensaje de una configuración de Brauer fueron introducidas por Fernández [13] para definir especializaciones adecuadas de algunas álgebras de configuración de Brauer. Según ellos, dado que los polígonos en una configuración de Brauer $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \mu, \mathcal{O})$ son conjuntos múltiples, es posible asumir que cualquier polígono $U \in \Gamma_1$ viene dado por una palabra $w(U)$ de la forma:

$$w(U) = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_{t-1}^{s_{t-1}} x_t^{s_t}$$

En donde, para cada i , $1 \leq i \leq t$, x_i es el vértice y s_i es el número de veces que el vértice x_i ocurre en el polígono. En particular, si los vértices x_i en un polígono U de una configuración de Brauer son números enteros, entonces la palabra correspondiente w se interpreta como una partición de un número entero n_U asociado al polígono U donde se asume que cada vértice x_i es parte de la partición y s_i es el número de veces que ocurre la parte x_i en la

partición y $n_U = \sum_{i=1}^t s_i x_i$.

De hecho, el mensaje es un elemento de un álgebra de palabras \mathscr{W}_Γ asociada a una configuración de Brauer fija, tal que para cada campo \mathbb{F} el álgebra de palabras \mathscr{W}_Γ consiste en sumas formales de palabras de la forma $\sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbb{F} \\ U \in \Gamma_1}} \alpha_i w(U)$, donde $0w(U) = \varepsilon$ es la palabra vacía y

$1w(U) = w(U)$ para todo $U \in \Gamma_1$. El producto en este caso viene dado por la concatenación usual de palabras. El producto formal (o producto de palabras):

$$M(\Gamma) = \prod_{U \in \Gamma_1} w(U)$$

se define como el **mensaje de una configuración de Brauer** Γ .

Además, una **especialización entera** de una configuración de Brauer $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \mu, \mathcal{O}\}$ es una configuración de Brauer $\Gamma^e = (\Gamma_0^e, \Gamma_1^e, \mu^e, \mathcal{O}^e)$ dotada con una aplicación $e : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{N}$ que preserva orientación, tal que:

$$\Gamma_0^e = \text{Img } e \subset \mathbb{N},$$

$$\Gamma_1^e = e(\Gamma_1), \quad \text{si } H \in \Gamma_1 \text{ entonces } e(H) = \{e(\alpha_i) \mid \alpha_i \in H\} \in e(\Gamma_1),$$

$$\mu^e(e(\alpha)) = \mu(\alpha), \quad \text{para todo } \alpha \in \Gamma_0.$$

La orientación \mathcal{O}^e se define mediante un orden lineal \triangleleft tal que $e(U) \triangleleft e(V)$ en Γ_1^e siempre que $U < V$ en Γ_1 .

De esta forma, se dice que $w^e(U) = (e(\alpha_1))^{f_1} (e(\alpha_2))^{f_2} \dots (e(\alpha_n))^{f_n}$ denota la especialización bajo e de la palabra $w(U)$. En tal caso, $M(\Gamma^e) = \prod_{U \in \Gamma_1^e} w^e(U)$ es el mensaje especializado de

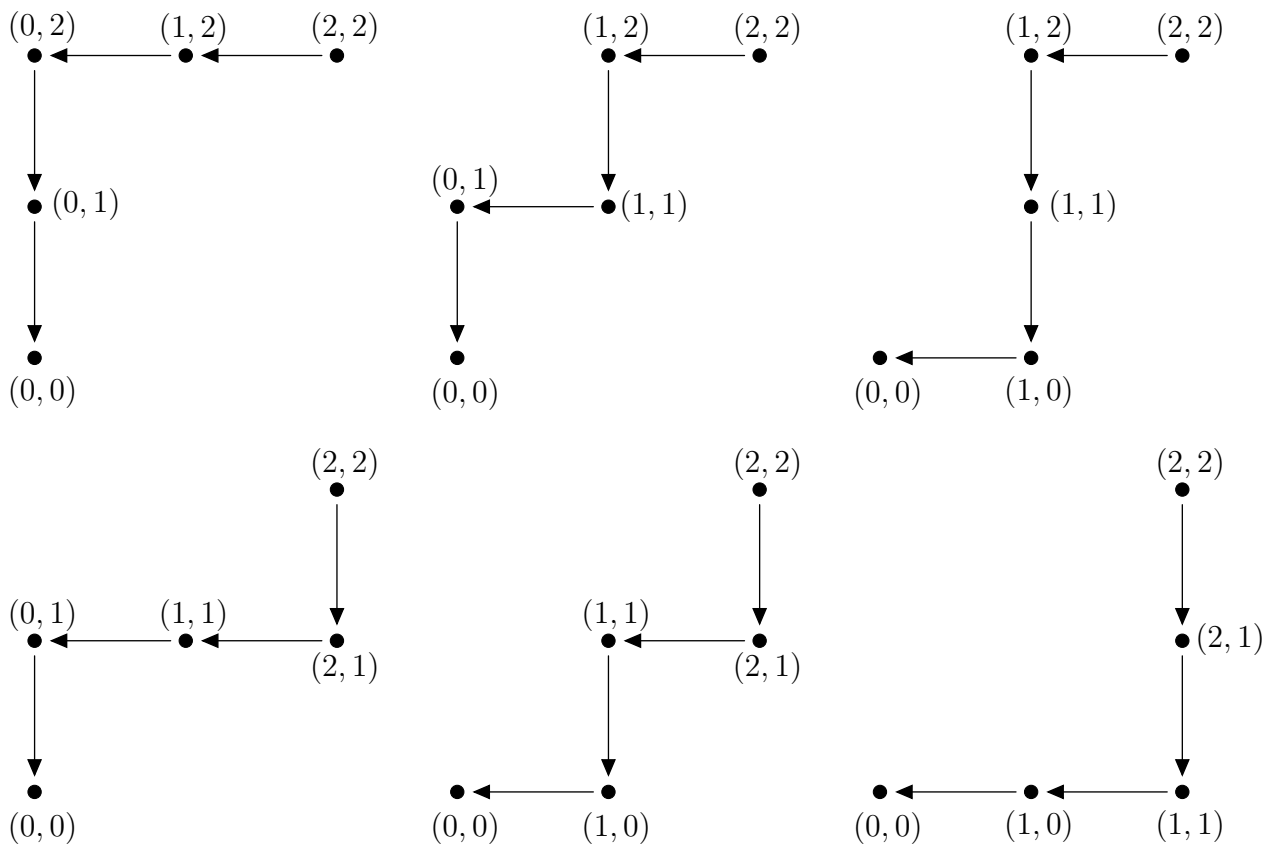
la configuración de Brauer Γ con la suma y multiplicación usual de enteros (en general con la suma y el producto asociado a $\text{Img } e$).

5 Álgebras de Configuración de Brauer Asociadas al Plano

En esta sección, se establecen relaciones entre las álgebras de configuración de Brauer y algunos objetos combinatorios, los cuales permiten expresar la dimensión del álgebra de configuración de Brauer asociada a un punto en el plano en términos de sus coordenadas. Se finaliza con ejemplos de estas álgebras desde la manipulación de regiones en el plano.

5.1. Configuración de Brauer Para un Punto en el Plano

Consideremos el punto $(2, 2)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano y los posibles caminos mediante movimientos horizontales (a izquierda) y verticales (descendientes) que podemos formar desde él hasta $(0, 0)$:



El estudio de este tipo de caminos (caminos reticulares) permitió a Cohecha [5] presentar y tratar algunas definiciones y propiedades que desencadenan en el establecimiento de relaciones entre el Triángulo de Pascal, los números combinatorios y los caminos que existen entre un punto (n, k) del primer cuadrante del plano cartesiano y el origen $(0, 0)$. Exponiendo en particular, que el número de caminos reticulares que parten del punto de coordenadas (n, k) hacia el origen es $\binom{n+k}{k}$.

Por ejemplo, el número de trayectorias reticulares del punto $(2, 2)$ al origen es:

$$T_{(2,2)} = \binom{2+2}{2} = 6.$$

Ahora bien, al codificar los caminos reticulares del punto $(2, 2)$ al origen de acuerdo a la clase desplazamientos, esto es, si el desplazamiento es horizontal se codifica como x y si es vertical como y , entonces obtendríamos que los caminos son:

$$xyxy, xyxy, xyyx, yxxy, yxyx, yyxx.$$

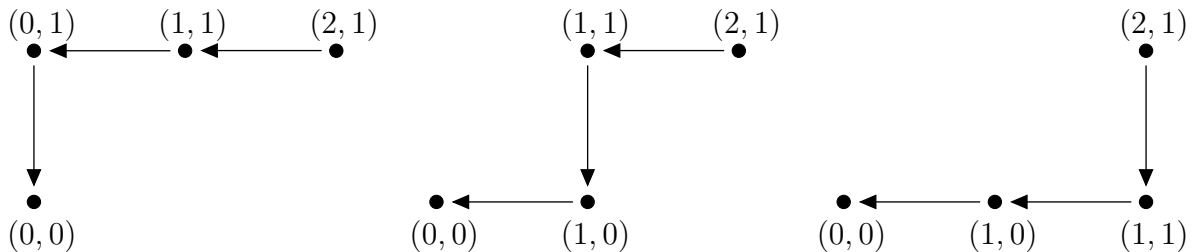
Con lo cual podemos expresar cada camino como una palabra:

$$P_1^{(2,2)} = xyxy, P_2^{(2,2)} = xyxy, P_3^{(2,2)} = xyyx, P_4^{(2,2)} = yxxy, P_5^{(2,2)} = yxyx, P_6^{(2,2)} = yyxx,$$

asociada al vértice $(2, 2)$. Más, aún, de acuerdo a lo expuesto en la Sección 4.4, se puede considerar a x y y como vértices y cada palabra como un polígono, los cuales dotados de un orden establecen una configuración de Brauer.

Definición 5.1.1. Para un punto (n, k) en el primer cuadrante del plano cartesiano, se denota $\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}$ al álgebra de configuración de Brauer asociada al punto (n, k) y a su configuración de Brauer $\Gamma((n, k)) = (\Gamma_0^{(n,k)}, \Gamma_1^{(n,k)}, \mu^{(n,k)}, \mathcal{O}^{(n,k)})$, en donde $\Gamma_0^{(n,k)} = \{x, y\}$, $\Gamma_1^{(n,k)}$ está conformado por los polígonos asociados a cada camino reticular dirigido del punto (n, k) al origen, $\mu^{(n,k)}(x) = \mu^{(n,k)}(y) = 1$ y $\mathcal{O}^{(n,k)}$ es un ordenamiento lineal arbitrario.

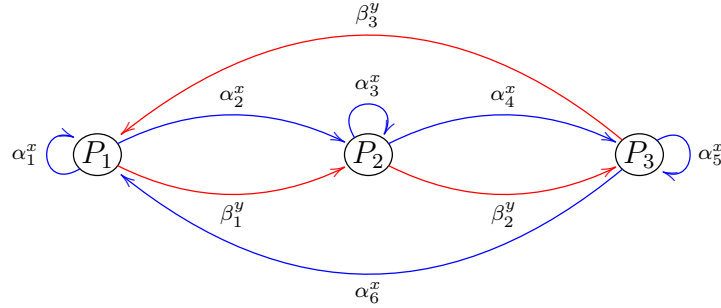
Ejemplo 5.1.2. Al tomar el punto $(2, 1)$ se encuentra que el número de caminos reticulares desde él hasta $(0, 0)$ es $T_{(2,1)} = \binom{2+1}{2} = 3$, estos caminos son:



De esta forma, el álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((2,1))}$ asociada a la configuración de Brauer $\Gamma((2,1)) = (\Gamma_0^{(2,1)}, \Gamma_1^{(2,1)}, \mu^{(2,1)}, \mathcal{O}^{(2,1)})$, es tal que:

1. $\Gamma_0^{(2,1)} = \{x, y\}$,
2. $\Gamma_1^{(2,1)} = \{P_1 = \{xxy\}, P_2 = \{xyx\}, P_3 = \{yxx\}\}$,
3. $\mu^{(2,1)}(x) = \mu^{(2,1)}(y) = 1$,
4. $P_1 < P_2 < P_3$,
5. Para el vértice x , $P_1 < P_1 < P_2 < P_2 < P_3 < P_3$ y $val(x) = 6$.
6. Para el vértice y , $P_1 < P_2 < P_3$ y $val(y) = 3$.

El carcaj asociado a $\Gamma((2,1))$ es:



Proposición 5.1.3. Para cada punto (n, k) en el primer cuadrante del plano cartesiano, su álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}$ asociada es conexa y reducida.

Demostración. Dado el proceso de construcción de $\Gamma((n, k))$, $\Gamma_1^{(n,k)}$ es un conjunto finito compuesto por lo menos de dos polígonos, los cuales siempre tendrán intersección vacía, dado que ellos corresponden a caminos en los que es necesario hacer tanto movimientos horizontales como verticales para poder llegar al origen, así que el vértice x y el vértice y aparecen en cada polígono de $\Gamma_1^{(n,k)}$ por lo menos una vez. Lo anterior implica que $\Gamma^{(n,k)}$ es conexa y que para todo $\alpha \in \Gamma_0^{(n,k)}$ se cumple $val(\alpha) > 1$. Es decir, no existen vértices truncados y por lo tanto $\Gamma((n, k))$ es reducida.

Proposición 5.1.4. Sea $\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}$ el álgebra de configuración de Brauer asociada a la configuración de Brauer $\Gamma((n, k)) = (\Gamma_0^a, \Gamma_1^{(n,k)}, \mu^{(n,k)}, \mathcal{O}^{(n,k)})$ de un punto (n, k) . Entonces:

$$\dim \mathcal{A}_{\Gamma((n,k))} = \binom{n+k}{n} \left[\binom{n+k}{n} (n^2 + k^2) - (n+k) + 2 \right].$$

Demostración. Dado que $\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}$ es un álgebra conexa y reducida (Proposición 5.1.3.) por la Proposición 4.3.11 se tiene que:

$$\dim \mathcal{A} = 2|\Gamma_1^{(n,k)}| + \sum_{C_i \in \mathcal{C}} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1),$$

donde $|C_i|$ denota el número de flechas en los α_i -ciclos C_i y $n_i = \mu(\alpha_i)$.

Ahora, dado que $\mu(x) = \mu(y) = 1$, se tiene que $|C_i| = \text{val}(\alpha_i)$ y como $\text{occ}(x) = n$ y $\text{occ}(y) = k$ para cada polígono en Γ_1^a , entonces $\text{val}(x) = n \binom{n+k}{n}$ y $\text{val}(y) = k \binom{n+k}{n}$ con lo cual:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A}_{\Gamma((n,k))} &= 2 \binom{n+k}{n} + n \binom{n+k}{n} \left(n \binom{n+k}{n} - 1 \right) + k \binom{n+k}{n} \left(k \binom{n+k}{n} - 1 \right), \\ \dim \mathcal{A}_{\Gamma((n,k))} &= \binom{n+k}{n} \left[2 + n \left(n \binom{n+k}{n} - 1 \right) + k \left(k \binom{n+k}{n} - 1 \right) \right], \\ \dim \mathcal{A}_{\Gamma((n,k))} &= \binom{n+k}{n} \left[\binom{n+k}{n} (n^2 + k^2) - n - k + 2 \right], \\ \dim \mathcal{A}_{\Gamma((n,k))} &= \binom{n+k}{n} \left[\binom{n+k}{n} (n^2 + k^2) - (n+k) + 2 \right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.5. Para el álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((2,1))}$ (Ejemplo 5.1.2) se tiene que:

$$\dim \mathcal{A}_{\Gamma((2,1))} = \binom{2+1}{2} \left[\binom{2+1}{2} (2^2 + 1^2) - (2+1) + 2 \right] = 42.$$

Proposición 5.1.6. Sea $\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}$ el álgebra de configuración de Brauer asociada a la configuración de Brauer $\Gamma((n,k)) = (\Gamma_0^a, \Gamma_1^{(n,k)}, \mu^{(n,k)}, \mathcal{O}^{(n,k)})$ de un punto (n,k) . Entonces:

$$\dim Z(\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}) = 1 + (n+k-1) \binom{n+k}{n}.$$

Demostración. Dado que $\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}$ es un álgebra conexa y reducida (Proposición 5.1.3.) entonces por Proposición 4.3.12 se tiene que

$$\dim Z(\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))}) = 1 + \sum_{\alpha \in \Gamma_0^{(n,k)}} \mu(\alpha) + |\Gamma_1^{(n,k)}| - |\Gamma_0^{(n,k)}| + \# \text{Bucles}(Q_{\Gamma((n,k))}) - |\mathcal{C}_{\Gamma((n,k))}|,$$

ahora, $\sum_{\alpha \in \Gamma_0^{(n,k)}} \mu(\alpha) = |\Gamma_0^{(n,k)}|$ y $\mathcal{C}_{\Gamma((n,k))} = 0$ dado que, por Definición 5.1.1, $\mu(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in \Gamma_0^{(n,k)}$. Por lo cual $\dim Z(\mathcal{A}_{\Gamma((n,k))})$ se reduce a:

$$\dim Z(\mathcal{A}) = 1 + |\Gamma_1^a| + \#Bucles(Q_{\Gamma^a}),$$

en donde $|\Gamma_1^{(n,k)}| = \binom{n+k}{n}$. Para el $\#Bucles(Q_{\Gamma^{(n,k)}})$ se tiene que dada la ubicación en el plano, para cada polígono la máxima ocurrencia de los vértices x y y serán n y k respectivamente, por lo que en cada polígono el número de bucles en x será $n - 1$ y en y se tendrá $k - 1$, al aplicar estos valores al total de polígonos en $\Gamma_1^{(n,k)}$ se tiene que existirán $(n - 1)\binom{n+k}{n}$ bucles en el vértice x y $(k - 1)\binom{n+k}{n}$ en y . De esta forma:

$$\dim Z(\mathcal{A}_{\Gamma^{(n,k)}}) = 1 + \binom{n+k}{n} + (n-1)\binom{n+k}{n} + (k-1)\binom{n+k}{n},$$

$$\dim Z(\mathcal{A}_{\Gamma^{(n,k)}}) = 1 + (1 + n - 1 + k - 1)\binom{n+k}{n},$$

$$\dim Z(\mathcal{A}_{\Gamma^{(n,k)}}) = 1 + (n + k - 1)\binom{n+k}{n}.$$

Ejemplo 5.1.7. Para el álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma^{(2,1)}}$ (Ejemplo 5.1.2) se tiene:

$$\dim Z(\mathcal{A}_{\Gamma^{(2,1)}}) = 1 + (2 + 1 - 1)\binom{2+1}{2} = 7.$$

5.2. Regiones de Congelamiento y Mutación

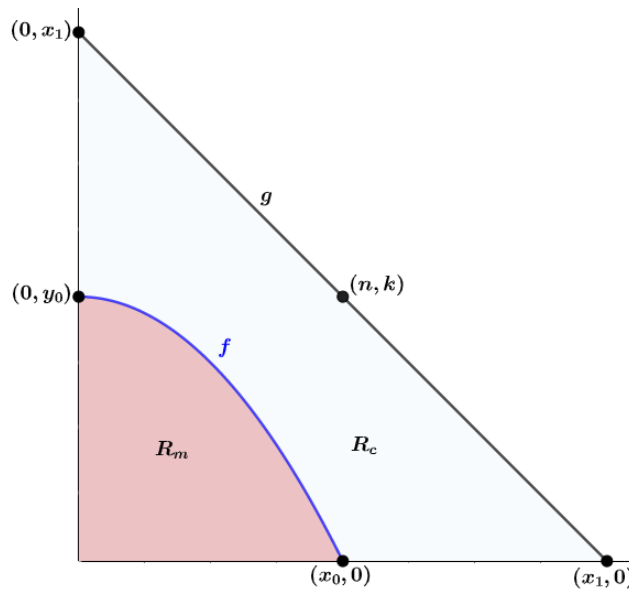


Figura 5.1: Regiones de congelamiento y mutación en el plano

Consideremos un punto (n, k) en el primer cuadrante del plano cartesiano y el segmento de recta g que pasa por él y los puntos $(x_1, 0)$ y $(0, x_1)$ con x_1 un número entero positivo, en

especial x_1 siempre es $n + k$. Tomemos además una curva f que es diferenciable monótona decreciente en el intervalo $[0, x_0]$ e intercepta a los ejes coordenados en $(x_0, 0)$ y $(0, y_0)$ con x_0 y y_0 números reales tales que $0 \leq x_0 \leq x_1$ y $0 \leq y_0 \leq x_1$, con lo cual $0 \leq f \leq g$. De forma que se obtienen 2 regiones, la primera de ellas acotada por f , g y los ejes coordenados denominada **región de congelamiento** R_c , mientras que la región acotada por los ejes coordenados y f de denomina **región de mutación** R_m (Ver Figura 5.1).

Con lo anterior, los caminos reticulares que van de (n, k) al origen pasan por estas dos regiones de acuerdo a quién sea f . Teniendo en cuenta esto, se denotan las flechas verticales de dichos caminos de la siguiente manera:

- Si la flecha cae en la región de congelamiento se denota y ,
- Si la flecha cae en la región de mutación se denota z .

El siguiente es un ejemplo en el que se presentan álgebras de configuración de Brauer asociadas a puntos en el plano y zonas de mutación y congelamiento, para luego exponer algunas propiedades de estas álgebras.

Ejemplo 5.2.1. Sean $g(x) = -x + 4$ y $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1.7$ las funciones con dominios restringidos $[0, 4]$ y $[0, \sqrt{3.4}]$, respectivamente.

Estas funciones determinan las regiones de congelamiento y mutación que se presentan en la siguiente figura.

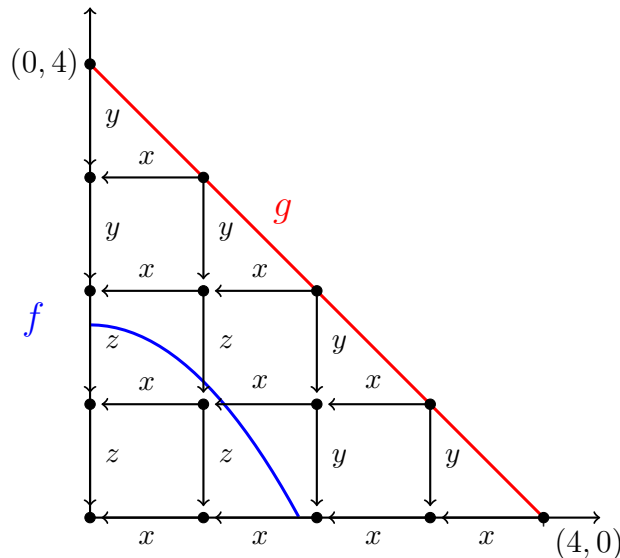


Figura 5.2: Primer ejemplo de regiones R_m y R_c .

Además, consideremos la especialización $e : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e(x) = e(y) = 1$, mientras que $e(z) = e^{i\theta_0}$ con $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ un ángulo fijo.

Como es natural para $P_i \in \Gamma_1$,

$$e(w(P_i)) = (e(x_1))^{\alpha_1} (e(x_2))^{\alpha_2} \dots (e(x_t))^{\alpha_t} \quad \text{si} \quad w(P_i) = (x_1)^{\alpha_1} (x_2)^{\alpha_2} \dots (x_t)^{\alpha_t}.$$

La configuración de Brauer para cada uno de los puntos del primer cuadrante (con coordenadas enteras) que pertenecen a la función g se presentan a continuación.

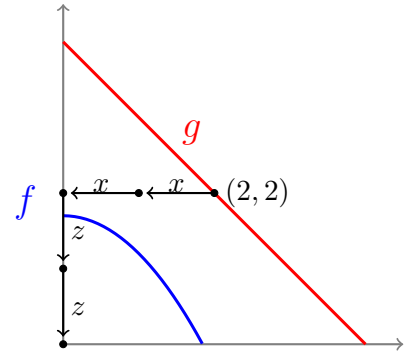
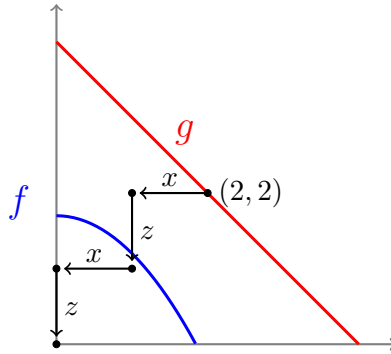
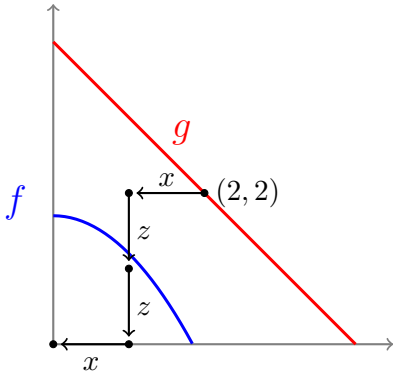
1. En $(2, 2)$ la configuración de Brauer $\Gamma((2, 2), f, g) = (\Gamma_0^{(2,2)}, \Gamma_1^{(2,2)}, \mu^{(2,2)}, \mathcal{O}^{(2,2)})$ es tal que:

- $\Gamma_0^{(2,2)} = \{x, y, z\}$
- $|\Gamma_1^{(2,2)}| = |Q_0| = \binom{4}{2} = 6$
- $\Gamma_1^{(2,2)} = \{P_1^{(2,2)}, P_2^{(2,2)}, P_3^{(2,2)}, P_4^{(2,2)}, P_5^{(2,2)}, P_6^{(2,2)}\}.$

$$w(P_1^{(2,2)}) = xz zx$$

$$w(P_2^{(2,2)}) = xz xz$$

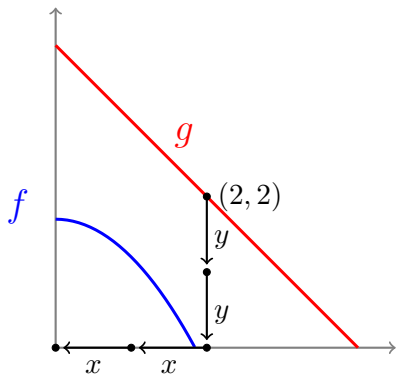
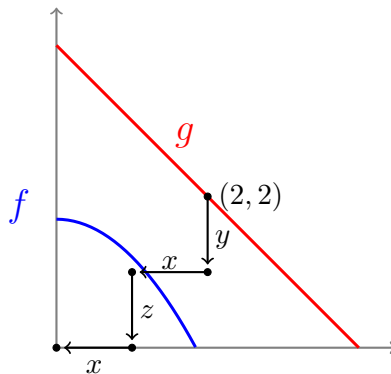
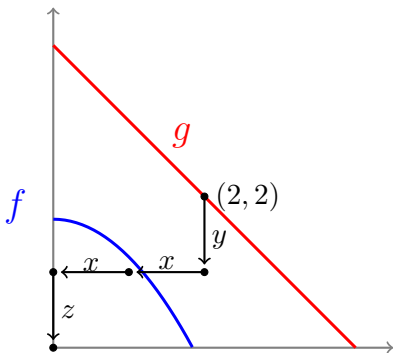
$$w(P_3^{(2,2)}) = x x z z$$



$$w(P_4^{(2,2)}) = y x x z$$

$$w(P_5^{(2,2)}) = y x z x$$

$$w(P_6^{(2,2)}) = y y x x$$



▪ $\mu(x) = \mu(y) = \mu(z) = 1$.

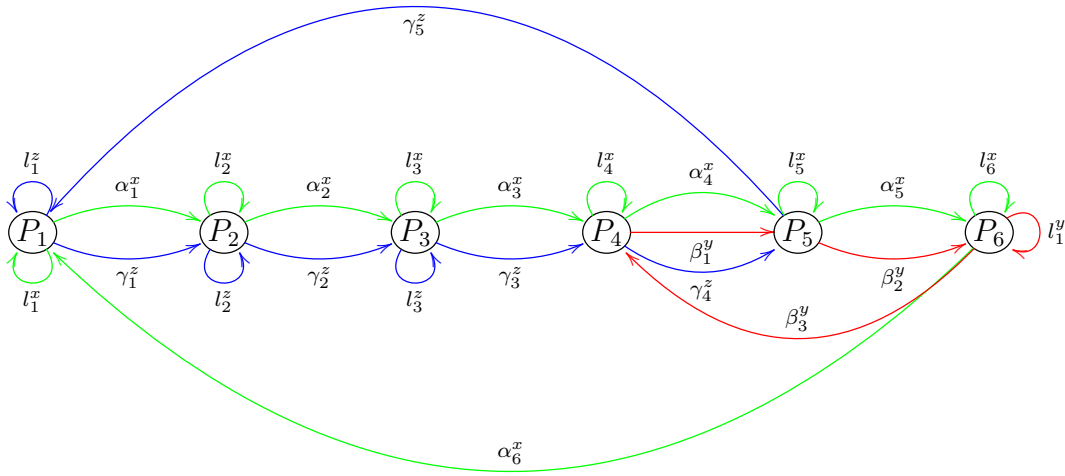
▪ Para x , $val(x) = 12$ y

$$P_1^{(2,2)} < P_1^{(2,2)} < P_2^{(2,2)} < P_2^{(2,2)} < P_3^{(2,2)} < P_3^{(2,2)} < P_4^{(2,2)} < P_4^{(2,2)} < P_5^{(2,2)} < P_5^{(2,2)} < P_6^{(2,2)} < P_6^{(2,2)}.$$

▪ Para y , $val(y) = 4$ y $P_4^{(2,2)} < P_5^{(2,2)} < P_6^{(2,2)} < P_6^{(2,2)}$.

▪ Para z , $val(z) = 8$ y $P_1^{(2,2)} < P_1^{(2,2)} < P_2^{(2,2)} < P_2^{(2,2)} < P_3^{(2,2)} < P_3^{(2,2)} < P_4^{(2,2)} < P_5^{(2,2)}$.

▪ El carcaj $Q_{\Gamma((2,2),f,g)}$ asociado es:



▪ El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((2,2),f,g)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_i^x)^2$, $(l_i^y)^2$ y $(l_i^z)^2$,
- $l_i^a l_j^b$, si $a \neq b$,
- $\gamma_i^z l_j^x$, $l_j^x \gamma_i^z$,
- $\alpha_5^x l_1^y$, $l_1^y \alpha_6^x$,
- $\alpha_i^x l_j^z$, $l_j^z \alpha_i^x$,
- $\beta_j^y l_i^x$, $l_i^x \beta_j^y$,
- $\gamma_i^z \beta_j^y$, $\beta_j^y \gamma_i^z$,
- $\gamma_i^z \alpha_j^x$, $\alpha_j^x \gamma_i^z$,
- $\alpha_i^x \beta_j^y$, $\beta_j^y \alpha_i^x$,
- $s^x \alpha_f^x$, $s^y \beta_f^y$ y $s^z \gamma_f^z$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.

En el caso de $\Gamma((2, 2), f, g)$ se tiene que:

$$e(w(P_1^{(2,2)})) = 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot e^{i\theta_0} \cdot 1$$

$$e(w(P_4^{(2,2)})) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0}$$

$$e(w(P_2^{(2,2)})) = 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0}$$

$$e(w(P_5^{(2,2)})) = 1 \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot 1$$

$$e(w(P_3^{(2,2)})) = 1 \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot e^{i\theta_0}$$

$$e(w(P_6^{(2,2)})) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

De forma que cada palabra $e(w(P_i))$ es dada por la multiplicación usual de números complejos. Mientras que el mensaje especializado $M^e(\Gamma((2, 2), f, g))$ es la suma usual de números complejos. Así tenemos que:

$$M^e(\Gamma((2, 2), f, g)) = e^{2i\theta_0} + e^{2i\theta_0} + e^{2i\theta_0} + e^{i\theta_0} + e^{i\theta_0} + 1$$

$$M^e(\Gamma((2, 2), f, g)) = 3e^{2i\theta_0} + 2e^{i\theta_0} + 1.$$

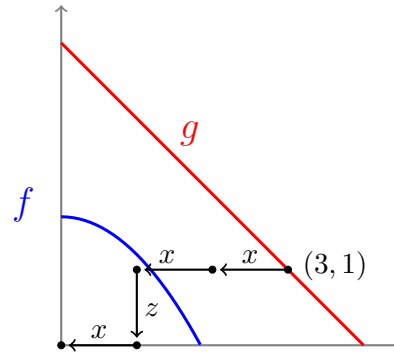
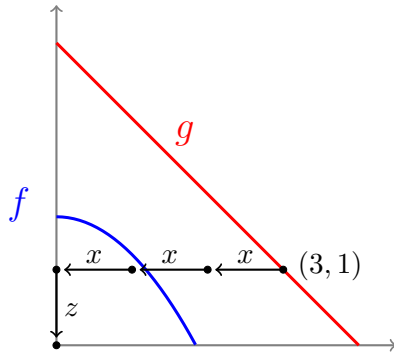
Con lo cual, por ejemplo si $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ entonces $M^e(\Gamma((2, 2), f, g)) = -3 + 2i + 1 = 2i - 2$. Si $\theta_0 = \pi$ entonces $M^e(\Gamma((2, 2), f, g)) = 3 - 2 + 1 = 2$.

2. Calculemos ahora el mensaje para la configuración de Brauer $\Gamma((3, 1), f, g)$.

- $\Gamma_0^{(3,1)} = \{x, y, z\}$
- $|\Gamma_1^{(3,1)}| = |Q_0| = \binom{4}{3} = 4$
- $\Gamma_1^{(3,1)} = \{P_1^{(3,1)}, P_2^{(3,1)}, P_3^{(3,1)}, P_4^{(3,1)}\}$

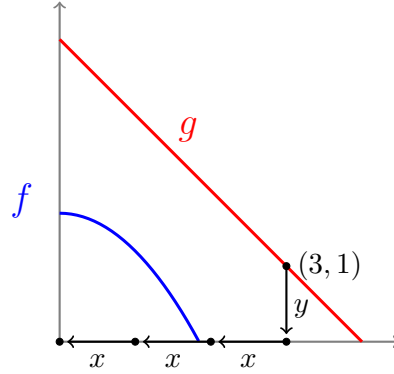
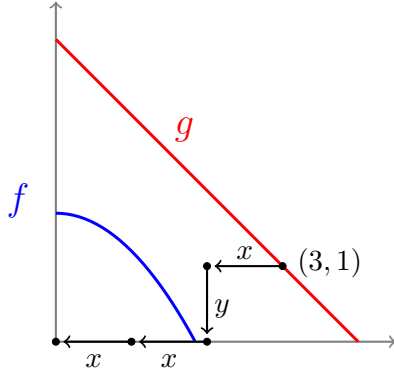
$$w(P_1^{(3,1)}) = xxxz$$

$$w(P_2^{(3,1)}) = xxzx$$



$$w(P_3^{(3,1)}) = xyxx$$

$$w(P_4^{(3,1)}) = yxxx$$



- $\mu(x) = \mu(y) = \mu(z) = 1$.

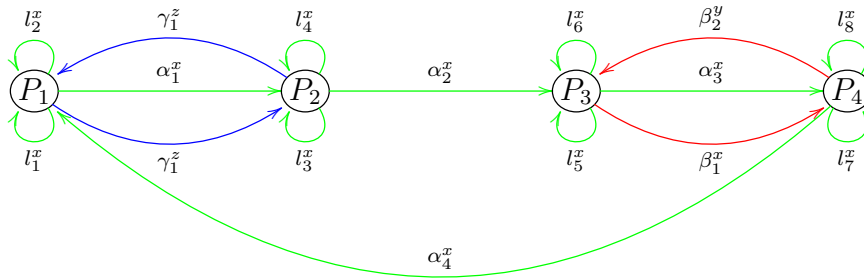
- Para x , $val(x) = 12$ y

$$P_1^{(3,1)} < P_1^{(3,1)} < P_1^{(3,1)} < P_2^{(3,1)} < P_2^{(3,1)} < P_2^{(3,1)} < P_3^{(3,1)} < P_3^{(3,1)} < P_3^{(3,1)} < P_4^{(3,1)} < P_4^{(3,1)} < P_4^{(3,1)}.$$

- Para y , $val(y) = 2$ y $P_3^{(3,1)} < P_4^{(3,1)}$.

- Para z , $val(z) = 2$ y $P_1^{(3,1)} < P_2^{(3,1)}$.

- El carcaj $Q_{\Gamma((3,1),f,g)}$ asociado es:



- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((3,1),f,g)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_i^x)^2$,
- $(l_i^x l_j^x)^2$, para $i \neq j$,
- $l_i^x \gamma_j^z, \gamma_j^z l_i^x$,
- $l_i^x \beta_j^y, \beta_j^y l_i^x$,
- $\gamma_i^z \alpha_j^x, \alpha_j^x \gamma_i^z$,

- $\alpha_i^x \beta_j^y, \beta_j^y \alpha_i^x$,
- $s^x \alpha_f^x, s^y \beta_f^y$ y $s^z \gamma_f^z$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.

Al utilizar la especialización e se tiene que para $\Gamma((3, 1), f, g)$:

$$e(w(P_1^{(3,1)})) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0} \qquad e(w(P_3^{(3,1)})) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$e(w(P_2^{(3,1)})) = 1 \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot 1 \qquad e(w(P_4^{(3,1)})) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$M^e(\Gamma((3, 1), f, g)) = e^{i\theta_0} + e^{i\theta_0} + 1 + 1.$$

$$M^e(\Gamma((3, 1), f, g)) = 2e^{i\theta_0} + 2.$$

Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ entonces $M^e(\Gamma((3, 1), f, g)) = 2i + 2$.

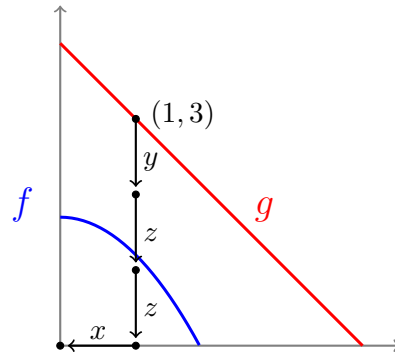
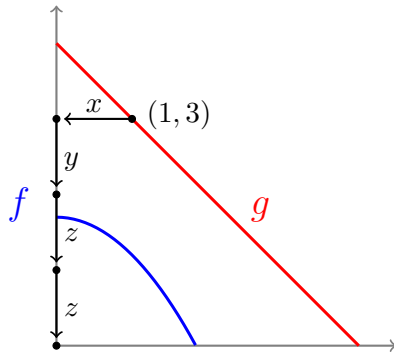
Si $\theta_0 = \pi$ entonces $M^e(\Gamma((3, 1), f, g)) = -2 + 2 = 0$.

3. El mensaje para la configuración de Brauer $\Gamma((1, 3), f, g)$.

- $\Gamma_0^{(1,3)} = \{x, y, z\}$.
- $|\Gamma_1^{(1,3)}| = |Q_0| = \binom{4}{1} = 4$.
- $\Gamma_1^{(1,3)} = \{P_1^{(1,3)}, P_2^{(1,3)}, P_3^{(1,3)}, P_4^{(1,3)}\}$.

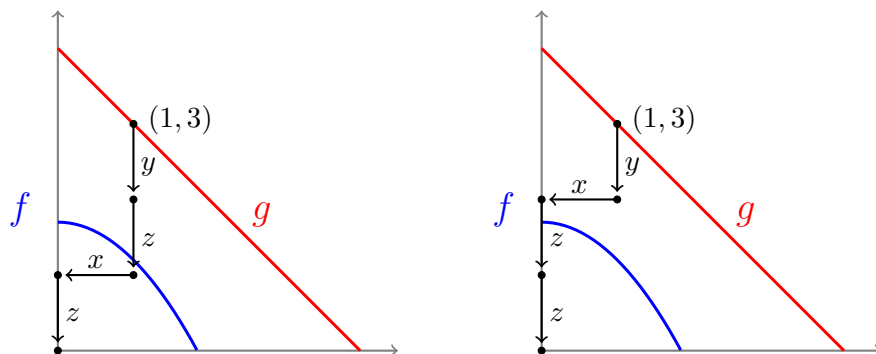
$$w(P_1^{(1,3)}) = xyz z$$

$$w(P_2^{(1,3)}) = yz z x$$

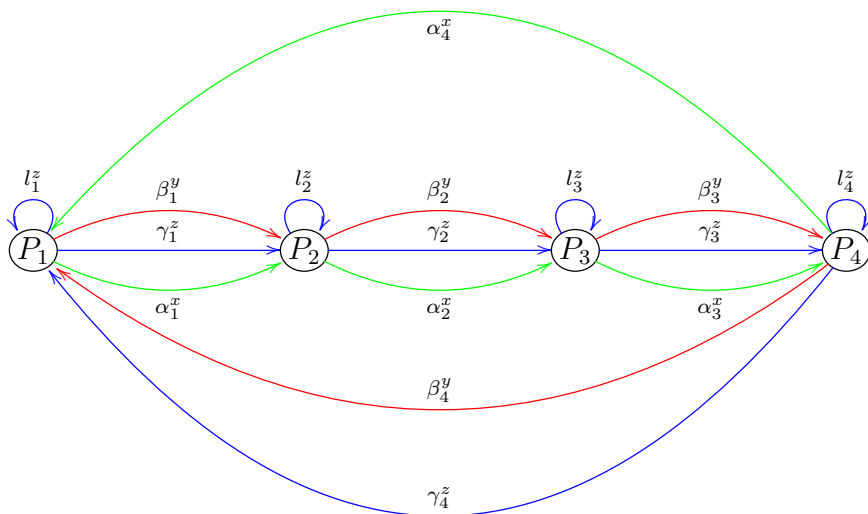


$$w(P_3^{(1,3)}) = yzxz$$

$$w(P_4^{(1,3)}) = yxzz$$



- $\mu(x) = \mu(y) = \mu(z) = 1$.
- Para x , $val(x) = 4$ y $P_1^{(1,3)} < P_2^{(1,3)} < P_3^{(1,3)} < P_4^{(1,3)}$.
- Para y , $val(y) = 4$ y $P_1^{(1,3)} < P_2^{(1,3)} < P_3^{(1,3)} < P_4^{(1,3)}$.
- Para z , $val(z) = 8$ y $P_1^{(1,3)} < P_1^{(1,3)} < P_2^{(1,3)} < P_2^{(1,3)} < P_3^{(1,3)} < P_3^{(1,3)} < P_4^{(1,3)} < P_4^{(1,3)}$.
- El carcaj $Q_{\Gamma((1,3),f,g)}$ asociado es:



- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((1,3),f,g)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_i^z)^2$,
- $l_i^z \alpha_j^x, \alpha_j^x l_i^z$,

- $l_i^z \beta_j^y, \beta_j^y l_i^z,$
- $\gamma_i^z \beta_j^y, \beta_j^y \gamma_i^z,$
- $\gamma_i^z \alpha_j^x, \alpha_j^x \gamma_i^z,$
- $\alpha_i^x \beta_j^y, \beta_j^y \alpha_i^x,$
- $s^x \alpha_f^x, s^y \beta_f^y$ y $s^z \gamma_f^z,$ relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.

Al utilizar la especialización e se tiene que para $\Gamma((1, 3), f, g)$:

$$\begin{aligned} e(w(P_1^{(1,3)})) &= 1 \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot e^{i\theta_0} & e(w(P_3^{(1,3)})) &= 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0} \\ e(w(P_2^{(1,3)})) &= 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot e^{i\theta_0} \cdot 1 & e(w(P_4^{(1,3)})) &= 1 \cdot 1 \cdot e^{i\theta_0} \cdot e^{i\theta_0} \end{aligned}$$

$$M^e(\Gamma((1, 3), f, g)) = e^{2i\theta_0} + e^{2i\theta_0} + e^{2i\theta_0} + e^{2i\theta_0}.$$

$$M^e(\Gamma((1, 3), f, g)) = 4e^{2i\theta_0}.$$

Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ entonces $M^e(\Gamma((1, 3), f, g)) = -4$.

Si $\theta_0 = \pi$ entonces $M^e(\Gamma((1, 3), f, g)) = 4$.

Supongamos ahora que la región de congelamiento está acotada por funciones lineales:

$$f_{x_0} : y = -x + x_0$$

$$g_{x_1} : y = -x + x_1$$

$$0 \leq x_0 \leq x_1, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{Z},$$

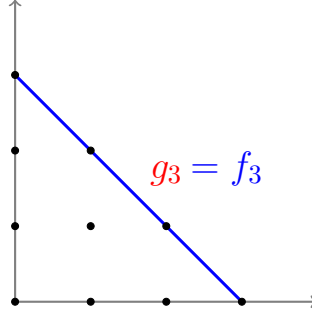
entonces podemos obtener los mensajes especializados $M(x_0, x_1, k)$, con k la coordenada y del punto de partida de los caminos, correspondientes a las configuraciones $\Gamma((x_1, 0), f_{x_0}, g_{x_1}), \Gamma((x_1 - 1, 1), f_{x_0}, g_{x_1}), \Gamma((x_1 - 2, 2), f_{x_0}, g_{x_1}), \dots, \Gamma((0, x_1), f_{x_0}, g_{x_1}), \theta_0 = \pi$ y:

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sum_{P_i \in \Gamma_1} \text{occ}(\alpha, P_i) > 1 \\ 2, & \text{si } \sum_{P_i \in \Gamma_1} \text{occ}(\alpha, P_i) = 1 \end{cases}$$

Esto último con la intención de evitar la existencia de vértices truncados.

Ejemplo 5.2.2. Sea $x_1 = 3$, entonces es posible definir las funciones lineales f_3 para $x_0 = 3$, f_2 para $x_0 = 2$, f_1 para $x_0 = 1$ y f_0 para $x_0 = 0$, determinando las respectivas regiones de mutación y congelamiento en cada caso.

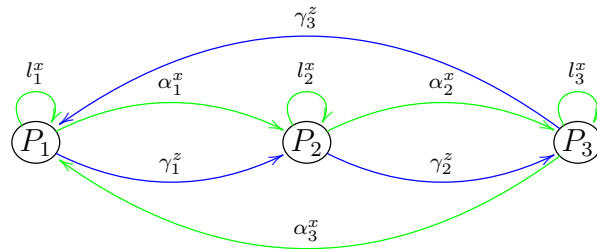
(i) Para $x_0 = x_1 = 3$ se tiene que $f_3 = g_3 : y = -x + 3$ por tanto:



Luego, es posible calcular el mensaje especializado para las configuraciones $\Gamma((2, 1), f_3, g_3)$ y $\Gamma((1, 2), f_3, g_3)$.

Para $\Gamma((2, 1), f_3, g_3) = (\Gamma_0^{(2,1)}, \Gamma_1^{(2,1)}, \mu^{(2,1)}, \mathcal{O}^{(2,1)})$ se tiene:

- $\Gamma_0^{(2,1)} = \{x, z\}$.
 - $|\Gamma_1^{(2,1)}| = |Q_0| = \binom{3}{2} = 3$.
 - $\Gamma_1^{(2,1)} = \{P_1^{(2,1)}, P_2^{(2,1)}, P_3^{(2,1)}\}$,
- $$w(P_1^{(2,1)}) = xxz, \quad w(P_2^{(2,1)}) = xzx, \quad w(P_3^{(2,1)}) = zxx.$$
- $\mu(x) = \mu(z) = 1$.
 - Para x , $val(x) = 6$ y $P_1^{(2,1)} < P_1^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_3^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.
 - Para z , $val(z) = 3$ y $P_1^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.
 - El carcaj $Q_{\Gamma((2,1), f_3, g_3)}$ asociado es:

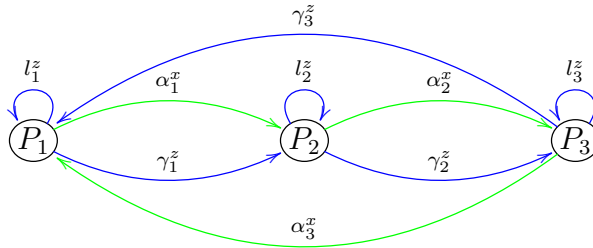


- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((2,1), f_3, g_3)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_i^x)^2$,
 - $l_i^x \gamma_j^z, \gamma_j^z l_i^x$,
 - $\gamma_i^z \alpha_j^x$ y $\alpha_j^x \gamma_i^z$,
 - $s^x \alpha_f^x$ y $s^z \gamma_f^z$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.
- $\dim_k \mathcal{A}_{\Gamma((2,1), f_3, g_3)} = 2|\Gamma_1^{(2,1)}| + \sum_{C_i \in \mathcal{C}} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1) = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 42$.
 - $M^e(\Gamma((2,1), f_3, g_3)) = M(3, 3, 1) = 3e^{i\pi} = -3$.

Para $\Gamma((1,2), f_3, g_3) = (\Gamma_0^{(1,2)}, \Gamma_1^{(1,2)}, \mu^{(1,2)}, \mathcal{O}^{(1,2)})$ se tiene:

- $\Gamma_0^{(1,2)} = \{x, z\}$.
 - $|\Gamma_1^{(1,2)}| = |Q_0| = \binom{3}{1} = 3$.
 - $\Gamma_1^{(1,2)} = \{P_1^{(1,2)}, P_2^{(1,2)}, P_3^{(1,2)}\}$,
- $$w(P_1^{(1,2)}) = xz, \quad w(P_2^{(1,2)}) = zx, \quad w(P_3^{(1,2)}) = zx.$$
- $\mu(x) = \mu(z) = 1$.
 - Para x , $val(x) = 3$ y $P_1^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_3^{(1,2)}$.
 - Para z , $val(z) = 6$ y $P_1^{(1,2)} < P_1^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_3^{(1,2)} < P_3^{(1,2)}$.
 - El carcaj $Q_{\Gamma((1,2), f_3, g_3)}$ asociado es:

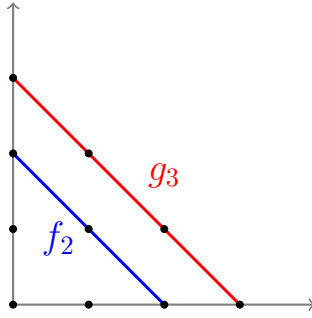


- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((1,2), f_3, g_3)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_i^z)^2$,
- $l_i^z \alpha_j^x, \alpha_j^x l_i^z$,

- $\gamma_i^z \alpha_j^x$ y $\alpha_j^x \gamma_i^z$,
 - $s^x \alpha_f^x$ y $s^z \gamma_f^z$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.
- $\dim_k \mathcal{A}_{\Gamma((1,2), f_3, g_3)} = 2|\Gamma_1^{(1,2)}| + \sum_{C_i \in \mathcal{C}} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 42$.
 - $M^e(\Gamma((1, 2), f_3, g_3)) = M(3, 3, 2) = 3e^{2i\pi} = 3$.

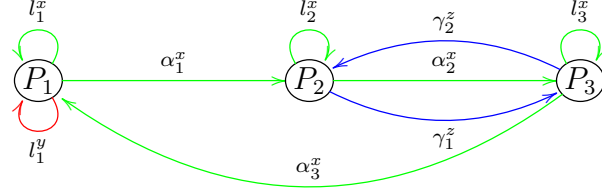
(ii) Para $x_0 = 2$ y $x_1 = 3$ se tiene que $f_2 : y = -x + 2$ y $g_3 : y = -x + 3$ por tanto:



De esta forma, es posible calcular el mensaje especializado para las configuraciones $\Gamma((2, 1), f_2, g_3)$ y $\Gamma((1, 2), f_2, g_3)$.

Para $\Gamma((2, 1), f_2, g_3) = (\Gamma_0^{(2,1)}, \Gamma_1^{(2,1)}, \mu^{(2,1)}, \mathcal{O}^{(2,1)})$ se tiene:

- $\Gamma_0^{(2,1)} = \{x, y, z\}$.
 - $|\Gamma_1^{(2,1)}| = |Q_0| = \binom{3}{2} = 3$.
 - $\Gamma_1^{(2,1)} = \{P_1^{(2,1)}, P_2^{(2,1)}, P_3^{(2,1)}\}$,
- $$w(P_1^{(2,1)}) = yxx, \quad w(P_2^{(2,1)}) = xzx, \quad w(P_3^{(2,1)}) = xxz.$$
- $\mu(x) = \mu(z) = 1, \mu(y) = 2$.
 - Para x , $val(x) = 5$ y $P_1^{(2,1)} < P_1^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_3^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.
 - Para y , $val(y) = 1$ y $P_1^{(2,1)} < P_1^{(2,1)}$.
 - Para z , $val(z) = 2$ y $P_2^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.
 - El carcaj $Q_{\Gamma((2,1), f_2, g_3)}$ asociado es:



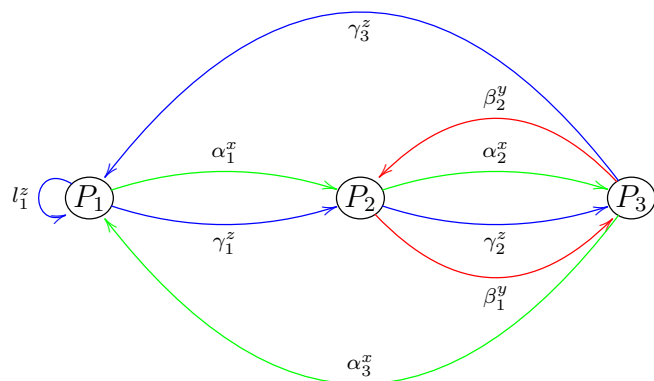
- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((2,1),f_2,g_3)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :
 - $(l_i^x)^2$ y $(l_1^y)^2$,
 - $l_i^x \gamma_j^z, \gamma_j^z l_i^x$,
 - $l_1^y \alpha_1^x, \alpha_3^x l_1^y$,
 - $l_i^a l_j^b$, si $a \neq b$,
 - $\gamma_i^z \alpha_j^x$ y $\alpha_j^x \gamma_i^z$,
 - $s^x \alpha_f^x$ y $s^z \gamma_f^z$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.
- $\dim_k \mathcal{A}_{\Gamma((2,1),f_2,g_3)} = 2|\Gamma_1^{(2,1)}| + \sum_{C_i \in C} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1) = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 29$.
- $M^e(\Gamma((2,1),f_2,g_3)) = M(2,3,1) = 1 + 2e^{i\pi} = -1$.

Para $\Gamma((1,2),f_2,g_3) = (\Gamma_0^{(1,2)}, \Gamma_1^{(1,2)}, \mu^{(1,2)}, \mathcal{O}^{(1,2)})$ se tiene:

- $\Gamma_0^{(1,2)} = \{x, y, z\}$.
- $|\Gamma_1^{(1,2)}| = |Q_0| = \binom{3}{1} = 3$.
- $\Gamma_1^{(1,2)} = \{P_1^{(1,2)}, P_2^{(1,2)}, P_3^{(1,2)}\}$,

$$w(P_1^{(1,2)}) = xzz, \quad w(P_2^{(1,2)}) = yzx, \quad w(P_3^{(1,2)}) = yxz.$$

- $\mu(x) = \mu(z) = \mu(y) = 1$.
- Para x , $val(x) = 3$ y $P_1^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_3^{(1,2)}$.
- Para y , $val(y) = 2$ y $P_2^{(1,2)} < P_3^{(1,2)}$.
- Para z , $val(z) = 4$ y $P_1^{(1,2)} < P_1^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_3^{(1,2)}$.
- El carcaj $Q_{\Gamma((1,2),f_2,g_3)}$ asociado es:



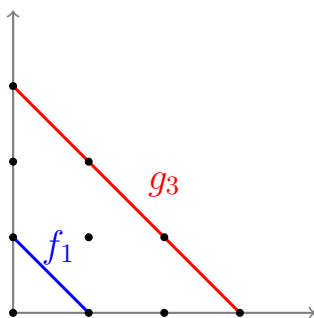
- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((1,2),f_2,g_3)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_1^z)^2$,
- $l_1^z \gamma_1^z, l_1^z \alpha_1^x$,
- $\gamma_3^z l_1^z, \alpha_3^x l_1^z$,
- $\gamma_i^z \beta_j^y, \beta_j^y \gamma_i^z$,
- $\gamma_i^z \alpha_j^x, \alpha_j^x \gamma_i^z$,
- $\alpha_i^x \beta_j^y, \beta_j^y \alpha_i^x$,
- $s^x \alpha_f^x, s^y \beta_f^y$ y $s^z \gamma_f^z$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.

- $\dim_k \mathcal{A}_{\Gamma((1,2),f_2,g_3)} = 2|\Gamma_1^{(1,2)}| + \sum_{C_i \in C} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 26$.

- $M^e(\Gamma((1,2),f_2,g_3)) = M(2,3,2) = 1 + 2e^{i\pi} = -1$.

(iii) Para $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$ se tiene que $f_1 : y = -x + 1$ y $g_3 : y = -x + 3$ por tanto:



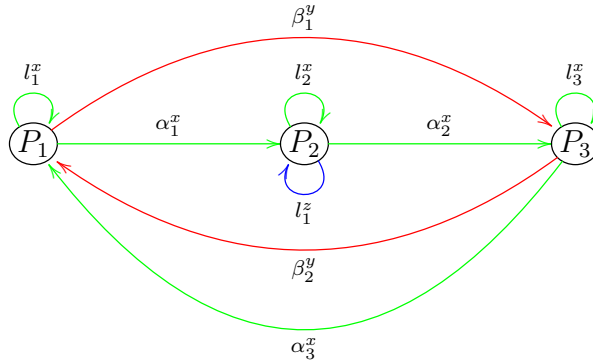
Luego, es posible calcular el mensaje especializado para las configuraciones $\Gamma((2, 1), f_1, g_3)$ y $\Gamma((1, 2), f_1, g_3)$.

Para $\Gamma((2, 1), f_1, g_3) = (\Gamma_0^{(2,1)}, \Gamma_1^{(2,1)}, \mu^{(2,1)}, \mathcal{O}^{(2,1)})$ se tiene:

- $\Gamma_0^{(2,1)} = \{x, y, z\}$.
- $|\Gamma_1^{(2,1)}| = |Q_0| = \binom{3}{2} = 3$.
- $\Gamma_1^{(2,1)} = \{P_1^{(2,1)}, P_2^{(2,1)}, P_3^{(2,1)}\}$,

$$w(P_1^{(2,1)}) = yxx, \quad w(P_2^{(2,1)}) = xxz, \quad w(P_3^{(2,1)}) = xyx.$$

- $\mu(x) = \mu(y) = 1, \mu(z) = 2$.
- Para x , $val(x) = 6$ y $P_1^{(2,1)} < P_1^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_3^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.
- Para y , $val(y) = 2$ y $P_1^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.
- Para z , $val(z) = 1$ y $P_2^{(2,1)} < P_2^{(2,1)}$.
- El carcaj $Q_{\Gamma((2,1), f_1, g_3)}$ asociado es:

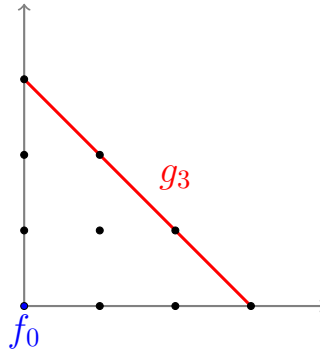


- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((2,1), f_1, g_3)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_i^x)^2$ y $(l_1^z)^2$,
- $l_i^a l_j^b$, si $a \neq b$,
- $l_1^x \beta_1^y$, si $\beta_j^y l_i^x$,
- $l_1^z \alpha_2^x$, si $\alpha_1^x l_1^z$,

- $l_1^y \alpha_2^x$,
 - $\gamma_i^z \beta_j^y, \beta_j^y \gamma_i^z$,
 - $\gamma_i^z \alpha_j^x, \alpha_j^x \gamma_i^z$,
 - $\alpha_i^x \beta_j^y, \beta_j^y \alpha_i^x$,
 - $s^x \alpha_f^x, s^y \beta_f^y$ y $s^z \gamma_f^z$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.
- $\dim_k \mathcal{A}_{\Gamma((1,2), f_1, g_3)} = 2|\Gamma_1^{(1,2)}| + \sum_{C_i \in C} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 26$.
 - $M^e(\Gamma((1,2), f_1, g_3)) = M(1, 3, 2) = 1 + 2e^{i\pi} = -1$.

(iv) Para $x_0 = 0$ y $x_1 = 3$ se tiene que $f_0 : y = -x$ $g_3 : y = -x + 3$ por tanto:



De esta manera, es posible calcular el mensaje especializado para las configuraciones $\Gamma((2,1), f_0, g_3)$ y $\Gamma((1,2), f_0, g_3)$.

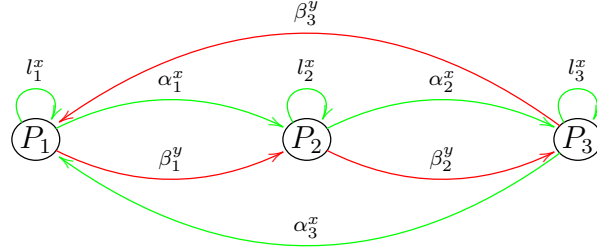
Para $\Gamma((2,1), f_0, g_3) = (\Gamma_0^{(2,1)}, \Gamma_1^{(2,1)}, \mu^{(2,1)}, \mathcal{O}^{(2,1)})$ se tiene:

- $\Gamma_0^{(2,1)} = \{x, y\}$.
- $|\Gamma_1^{(2,1)}| = |Q_0| = \binom{3}{2} = 3$.
- $\Gamma_1^{(2,1)} = \{P_1^{(2,1)}, P_2^{(2,1)}, P_3^{(2,1)}\}$,

$$w(P_1^{(2,1)}) = yxx, \quad w(P_2^{(2,1)}) = xyx, \quad w(P_3^{(2,1)}) = xxy.$$

- $\mu(x) = \mu(y) = 1$.
- Para x , $val(x) = 6$ y $P_1^{(2,1)} < P_1^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_3^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.
- Para y , $val(y) = 3$ y $P_1^{(2,1)} < P_2^{(2,1)} < P_3^{(2,1)}$.

- El carcaj $Q_{\Gamma((2,1),f_0,g_3)}$ asociado es:



- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((2,1),f_0,g_3)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :

- $(l_i^x)^2$,
- $l_i^x \beta_j^y$ y $\beta_j^y l_i^x$,
- $\beta_i^y \alpha_j^x$ y $\alpha_j^x \beta_i^y$,
- $s^x \alpha_j^x$ y $s^y \beta_j^y$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.

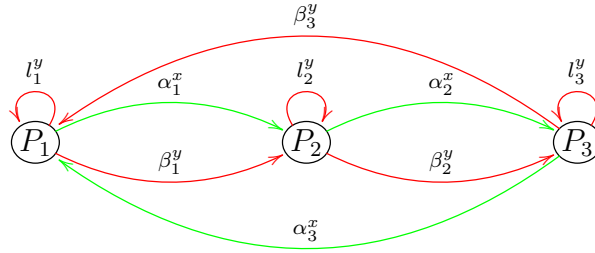
- $\dim_k \mathcal{A}_{\Gamma((2,1),f_0,g_3)} = 2|\Gamma_1^{(2,1)}| + \sum_{C_i \in \mathcal{C}} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1) = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 42$.
- $M^e(\Gamma((2,1),f_0,g_3)) = M(0,3,1) = 3$.

Para $\Gamma((1,2),f_0,g_3) = (\Gamma_0^{(1,2)}, \Gamma_1^{(1,2)}, \mu^{(1,2)}, \mathcal{O}^{(1,2)})$ se tiene:

- $\Gamma_0^{(1,2)} = \{x, y\}$.
- $|\Gamma_1^{(1,2)}| = |Q_0| = \binom{3}{1} = 3$.
- $\Gamma_1^{(1,2)} = \{P_1^{(1,2)}, P_2^{(1,2)}, P_3^{(1,2)}\}$,

$$w(P_1^{(1,2)}) = xyy, \quad w(P_2^{(1,2)}) = yyx, \quad w(P_3^{(1,2)}) = yxy.$$

- $\mu(x) = \mu(y) = 1$.
- Para x , $val(x) = 3$ y $P_1^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_3^{(1,2)}$.
- Para z , $val(y) = 6$ y $P_1^{(1,2)} < P_1^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_2^{(1,2)} < P_3^{(1,2)} < P_3^{(1,2)}$.
- El carcaj $Q_{\Gamma((1,2),f_0,g_3)}$ asociado es:



- El ideal I de la correspondiente álgebra de configuración de Brauer $\mathcal{A}_{\Gamma((1,2),f_0,g_3)}$ es generado por las siguientes relaciones en las que se consideran todos los posibles valores de i y j :
 - $(l_i^y)^2$,
 - $l_i^y \alpha_j^x$ y $\alpha_j^x l_i^y$,
 - $\beta_i^y \alpha_j^x$ y $\alpha_j^x \beta_i^y$,
 - $s^x \alpha_f^x$ y $s^y \beta_f^y$, relaciones que indican ciclo especial por primera flecha de cada ciclo.
- $\dim_k \mathcal{A}_{\Gamma((1,2),f_0,g_3)} = 2|\Gamma_1^{(1,2)}| + \sum_{C_i \in C} |C_i| (\mu(\alpha_i) |C_i| - 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 42$.
- $M^e(\Gamma((1,2), f_0, g_3)) = M(0, 3, 2) = 3$.

Los mensajes obtenidos para g_3 en el desarrollo de este ejemplo se presentan en la siguiente tabla.

(f_{x_0}, g_{x_1}, k)	(0, 3, 1)	(0, 3, 2)	(1, 3, 1)	(1, 3, 2)	(2, 3, 1)	(2, 3, 2)	(3, 3, 1)	(3, 3, 2)
M^e	3	3	1	-1	-1	-1	-3	3

Consideremos ahora, la siguiente matriz con estos mensajes:

$$\begin{bmatrix} M^e(0, 3, 1) & M^e(1, 3, 1) & M^e(2, 3, 1) & M^e(3, 3, 1) \\ M^e(0, 3, 2) & M^e(1, 3, 2) & M^e(2, 3, 2) & M^e(3, 3, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

la cual podemos completar asumiendo que $M^e(i, j, 0) = 1$ para cualquier (i, j) y $M^e(i, j, 3) = (-1)^i$, de manera que adquiere la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M^e(0, 3, 0) & M^e(1, 3, 0) & M^e(2, 3, 0) & M^e(3, 3, 0) \\ M^e(0, 3, 1) & M^e(1, 3, 1) & M^e(2, 3, 1) & M^e(3, 3, 1) \\ M^e(0, 3, 2) & M^e(1, 3, 2) & M^e(2, 3, 2) & M^e(3, 3, 2) \\ M^e(0, 3, 3) & M^e(1, 3, 3) & M^e(2, 3, 3) & M^e(3, 3, 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

este tipo de matrices las denominaremos como **Matriz de mensajes asociada a g_{x_1}** , en este caso matriz de mensajes asociada a g_3 . Estas matrices cumplen las propiedades que se presentan en el siguiente teorema.

Teorema 5.2.3. *Para una matriz de mensajes asociada a g_j se tiene que:*

1. $M^e(i, j, k - 1) + M^e(i, j, k) = M^e(i, j + 1, k)$,
2. $M^e(i - 1, j, k - 1) + M^e(i, j, k) + M^e(i, j, k + 1) = M^e(i - 1, j, k + 1)$,
3. $M^e(1, 2m, 1) = C_{m-1}$, donde C_{m-1} es un número de catalán,
4. $M^e(0, j, k) = \binom{j}{k}$.

Demostración.

1. Dado que:

$$M^e(\Gamma((x_0, y_0), f_{x_0}, g_{x_1+1})) = xM^e(\Gamma((x_0-1, y_0), f_{x_0}, g_{x_1}))|_{x=1} + yM^e(\Gamma((x_0, y_0-1), f_{x_0}, g_{x_1}))|_{y=1},$$

entonces:

$$M^e(\Gamma((x_0, y_0), f_{x_0}, g_{x_1+1})) = M^e(\Gamma((x_0 - 1, y_0), f_{x_0}, g_{x_1})) + M^e(\Gamma((x_0, y_0 - 1), f_{x_0}, g_{x_1})),$$

lo cual corresponde al resultado que se quería demostrar.

2. Sean A y B las siguientes matrices de mensajes:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{bmatrix}$$

y supongamos que para A se cumple la propiedad 2 de este teorema:

$$M^e(i - 1, j, k - 1) + M^e(i, j, k) + M^e(i, j, k + 1) = M^e(i - 1, j, k + 1),$$

entonces, se tiene que:

$$a_4 + a_7 = (a_1 + a_2 + a_5) + (a_4 + a_5 + a_8), \quad (5-1)$$

$$a_4 + a_7 = (a_1 + a_4) + (a_2 + a_5) + (a_5 + a_8), \quad (5-2)$$

pero, por la propiedad 1 se cumplen las siguientes igualdades:

$$a_4 + a_7 = b_9, \quad a_1 + a_4 = b_5, \quad a_2 + a_5 = b_6 \quad y \quad a_5 + a_8 = b_{10}, \quad (5-3)$$

de esta forma, de las expresiones (5-2) y (5-3) se tiene que $b_9 = b_5 + b_6 + b_{10}$, entonces la matriz B cumple la propiedad 2. Es decir, se ha demostrado por inducción el resultado pretendido.

3. Para esta propiedad basta ver que en una matriz de mensajes el lugar (r, s) corresponde al siguiente combinatorio:

$$(M_{n-1}^e)_{r,s} = \sum_{h=0}^{s-1} (-1)^h \binom{s-1}{h} \binom{n-1-s}{r-h-1},$$

para verificar esto, partamos de suponer que si se cumple, de ser así al aplicar la propiedad 1 de este teorema tenemos que:

$$\begin{aligned} (M_{n-1}^e)_{r,s} &= (M_{n-2}^e)_{r-1,s} + (M_{n-2}^e)_{r,s} \\ &= \sum_{h=0}^{s-1} (-1)^h \binom{s-1}{h} \binom{n-2-s}{r-h-2} + \sum_{h=0}^{s-1} (-1)^h \binom{s-1}{h} \binom{n-2-s}{r-h-1} \\ &= \sum_{h=0}^{s-1} (-1)^h \binom{s-1}{h} \left[\binom{n-2-s}{r-h-2} + \binom{n-2-s}{r-h-1} \right] \\ &= \sum_{h=0}^{s-1} (-1)^h \binom{s-1}{h} \left[\binom{n-2-s}{r-h-2} \right] \\ &= (M_{n-1}^e)_{r,s} \end{aligned}$$

4. Dado $M^e(0, j, k)$, se tiene por f_0 que no hay región de mutación, por lo cual la palabra asociada a cada camino tendrá siempre un valor de 1 y para cada punto $(n, k) \in g_j$ el número de caminos $\binom{n+k}{k}$ es precisamente el valor del mensaje $M^e(0, j, k)$. Además, dada la manera en que se construyó g_j , para todo $(n, k) \in g_j$ se tiene que $n + k = j$, entonces $M^e(0, j, k) = \binom{n+k}{k} = \binom{j}{k}$.

□

Nota 5.2.4. Por construcción se observa que si $(M_n^e)_{i_0}$ y $(M_n^e)_{j_0}$ denotan la fila i_0 -ésima y la columna j_0 -ésima de M_n^e , entonces el producto interno:

$$\langle (M_n^e)_{i_0}, (M_n^e)_{j_0} \rangle = \mu(\alpha) = \begin{cases} \sum_{h=0}^n \binom{n}{h}, & \text{si } i_0 = j_0 \\ 0, & \text{si } i_0 \neq j_0. \end{cases}$$

Luego $(M_n^e)^2 = 2^n I_n$. Este tipo de matrices corresponden a las matrices $K^{(n)}$ cuyas entradas (p, q) están dadas por la función generante:

$$(1+t)^{(n-q)}(1-t)^q = \sum_{p=0}^n K_{(p,q)}^{(n)} t^p.$$

Estas matrices también se llaman matrices de Krawtchouk [25, 26, 44], es decir, se ha encontrado una conexión entre las álgebras de configuración de Brauer y matrices para las cuales se han determinado múltiples aplicaciones en campos como el análisis armónico [41], la estadística [9, 42], la teoría de la probabilidad [12] y la teoría cuántica [11], entre otras.

Más aún, si:

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces A^n es una matriz de Krawtchouk tal que $A^n K^{(n)} = K^{(n)} \Lambda^{(n)}$, donde $\Lambda^{(n)}$ es una matriz diagonal $(n+1) \times (n+1)$ con $\Lambda_{(i,i)}^{(n)} = n - 2i$, es decir:

$$\Lambda^{(n)} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

luego existe una conexión inesperada con representaciones del álgebra de Lie:

$$\mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{so}(2, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

Para ello se define el conmutador $\bar{A} = \frac{1}{2}[A, \Lambda]$, por ejemplo, si $n = 3$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Luego la tripla A, \bar{A} y Λ es cerrada por conmutación, por lo que forma un álgebra de Lie:

$$\text{gen}\{A, \bar{A}, \Lambda\} \cong \mathfrak{so}(2, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}),$$

con relaciones de conmutación:

$$[A, \bar{A}] = 2\Lambda, \quad [\bar{A}, \Lambda] = 2A \quad \text{y} \quad [\Lambda, A] = -2\bar{A}.$$

6 Conclusiones y Recomendaciones

6.1. Conclusiones

El desarrollo del presente trabajo es muestra de la importancia de las álgebra de configuración de Brauer, dado que en ellas se hacen explícitas las conexiones que existen entre diferentes áreas de estudio de la matemática. En especial, estas álgebras conectan el estudio de la Teoría de representación de carcajes con la combinatoría, estadística, probabilidad y el análisis armónico, por mencionar algunas conexiones, al revelar que algunas configuraciones de Brauer guardan relación directa con álgebras de Lie, estas últimas con aplicaciones concretas como la valoración de derivados financieros, la toma de decisiones de bajo riesgo por agentes financieros, el tratamiento de problemas referentes a volatilidades [30], el análisis, diseño y control de sistemas dinámicos híbridos [18], el estudio de campos de interacción entre partículas, entre muchas otras.

En cuanto a la estructura de las álgebras de configuración de Brauer asociadas al plano, se encuentra que dada la posibilidad que existe de asociar diversos fenómenos de la realidad a disposiciones en el plano cartesiano, el potencial de aplicación que tienen este tipo de álgebras es muy amplio. Este aspecto resalta la importancia del presente trabajo, pues abre las puertas al desarrollo y profundización en la investigación de estas álgebras y sus aplicaciones concretas, por ejemplo, al hacer una rotación del plano se puede encontrar que las configuraciones realizadas corresponden a los posibles caminos que se marcan en una máquina de Galton y por ende, las configuraciones que se derivan de disposiciones en el plano cartesiano pueden ser llevadas, entre otras cosas, al estudio de la mecánica cuántica [28].

Finalmente, dada la dificultad que existe en el estudio de álgebras de tipo representación salvaje, el surgimiento de patrones y regularidades dentro de las álgebras de configuración de Brauer dan espacio a la expectativa sobre su posible utilidad en la solución de los múltiples aspectos que aún parecen esquivos para la teoría de representación gráfica de álgebras. En este sentido, un aspecto que no se abordó en esta investigación son las propiedades de las álgebras multiseriales, de las cuales pueden surgir resultados importantes para el estudio de álgebras salvajes.

6.2. Recomendaciones

Las temáticas manejadas en esta investigación abordan múltiples aspectos de la Teoría de representación de carcajes, en este sentido, el camino que se siguió para lograr los resultados expuestos puede ser de utilidad para el lector y para futuras investigaciones, dicho camino corresponde inicialmente al estudio de los libros [3] y [36] respecto a la Teoría de representación de carcajes, posteriormente lo expuesto en [4] para los conceptos básicos de las álgebras de grafo de Brauer y finalmente los trabajos [21], [22] y [23] en donde se abordan las propiedades de las álgebras de configuración de Brauer.

Este trabajo finaliza con el reconocimiento de la relación entre las álgebras de configuración de Brauer y las álgebras de Lie, este aspecto implica la posibilidad de futuras investigaciones que profundicen en las implicaciones de esta relación y cómo esto puede llevarse al desarrollo de aplicaciones.

En cuanto a la exploración de álgebras de configuración asociadas al plano desde las regiones de congelamiento y mutación, con esta investigación se deja abierta la posibilidad de establecer regularidades cuando estas regiones no están acotadas por funciones lineales, lo cual sin duda resulta complejo por la naturaleza de continuidad que está implícita en ello, pero así mismo podrían llevar a diferentes conexiones matemáticas y aplicaciones prácticas.

Referencias

- [1] T. Aihara, *Derived equivalences between symmetric special biserial algebras*, <https://arxiv.org/pdf/1312.0328.pdf>, (2014).
- [2] M.A. Antipov, *Derived equivalence of symmetric special biserial algebras*, Journal of Mathematical Sciences **147** (2007), no. 5, 6981-6994.
- [3] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski, *Elements of the representation theory of associative algebras, volume 1, techniques of representation theory*, (2006).
- [4] I. Assem and S. Trepode, *Homological methods, representation theory and cluster algebras*, (2018).
- [5] C. Cohecha, *Teorema del binomio y aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias (2014). Mg. Thesis. Bogotá.
- [6] L. Demonet, *Algebras of partial triangulations*, arXiv:1602.01592 (2016).
- [7] P.W. Donovan and M.R. Freislich, *The indecomposable modular representations of certain groups with dihedral sylow subgroup*, Mathematische Annalen **238** (1978), no. 3, 207-216.
- [8] J.A. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, in: V.O. Dlab, and P. Gabriel (eds.) Representation Theory II, Springer Lecture Notes in Mathematics 832 (1980), 242-258.
- [9] G.K. Eagelson, *A characterization theorem for positive definite sequences of the krawtchouk polynomials*, Australian J. Stat **11**, (1969), 29-38.
- [10] K. Erdmann, *Algebras with non-periodic bounded modules*, Journal of Algebra **475** (2017), 308-326.
- [11] P. Feinsilver and J. Kocik, *Krawtchouk matrices from classical and quantum random walks*, Contemporary Mathematics **287**, (2001), 89-36.
- [12] P. Feinsilver and R. Schott, *Krawtchouk polynomials and finite probability theory*, Probability Measures on Groups X, Plenum, (1991), 129-135.
- [13] P. Fernández, *Categorification of some integer sequences and its applications*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias (2021). PhD Thesis. Bogotá.
- [14] K. Fuller, *Biserial rings*, in: *Ring theory, proc. conf., univ. waterloo, waterloo*, Lecture Notes in Math (1978), 64-90.
- [15] P. Gabriel, *Auslander-reiten sequences and representation-nite algebras*, Lecture Notes in Mat **831** (1980), 1-71.
- [16] ———, *Indecomposable representations 2*, Symposia Mat. Inst. Naz. Alta Mat. **11** (1973), 81-104.
- [17] ———, *Unzerlegbare darstellungen 1*, Manuscripta Math **6** (1972), 71-103.
- [18] J. Villa; M. Duque; A. Gauthier and N. Rakoto, *Modelamiento y control de sistemas híbridos*, Revista de ingeniería **6**, (2004), 177-182.

- [19] I.M. Gelfand and V.A. Ponomarev, *Indecomposable representations of the lorentz group*, Russian Mathematical Surveys **23** (1968), no. 2, 1-58.
- [20] E. Green and S. Schroll, *Brauer configuration algebras: A generalization of brauer graph algebras*, Bulletin des Sciences Mathématiques, **141** (2017), 539-572.
- [21] ———, *Multiserial and special multiserial algebras and their representations*, Advances in Mathematics (2015), 1-24.
- [22] E. Green, S. Schroll, and N. Snashall, *Group actions and coverings of brauer graph algebras*, Glasgow Mathematical Journal **56** (2011), no. 2, 439-464.
- [23] E. Green, S. Schroll, N. Snashall, and R. Taillefer, *The ext algebra of a brauer graph algebra*, Journal of noncommutative geometry **11** (2011), no. 2, 537-579.
- [24] G.J. Janusz, *Indecomposable modules for finite groups*, Annals of Mathematics **89** (1969), no. 2, 209-241.
- [25] M. Krawtchouk, *Sur la distribution des racines des polynomes orthogonaux*, Comptes Rendus **196**, (1933), 739-741.
- [26] ———, *Sur une generalisation des polynomes d'hermite*, Comptes Rendus **189**, (1929), 620-622.
- [27] S. Ladkani, *Mutation classes of certain quivers with potentials as derived equivalence classes*, arXiv:1102.4108 (2011).
- [28] A. Rattew; Y. Sun; P. Minssen and M. Pistoia, *The efficient preparation of normal distributions in quantum registers*, arXiv:2009.06601, (2021), 1-30.
- [29] T. Nakayama, *Note on uni-serial and generalized uni-serial rings*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **16** (1940), 285-289.
- [30] I. Hernández; C. Mateos; J. Núñez and Á. Tenorio, *Algunas aplicaciones de la teoría de lie a la economía y a las finanzas*, Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa **6**, (2008), 74-94.
- [31] M. Osorio and A. Moreno, *Brauer configuration algebras for multimedia based cryptography and security applications*, Multimedia Tools and Applications, (2021), <https://doi.org/10.1007/s11042-020-10239-3>.
- [32] Z. Pogorzaly and A. Skowronski, *Selfinjective biserial standard algebras*, Journal of algebra **138** (1991), 491-504.
- [33] C. M. Ringel, *Indecomposables live in all smaller lengths*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), 655-660.
- [34] C.M. Ringel, *The indecomposable representations of the dihedral 2-groups*, Mathematische Annalen **214** (1975), no. 1, 19-34.
- [35] K.W. Roggenkamp, *Biserial algebras and graphs*, In: I. Reiten, S.O. Smalø, O. Solberg (eds.) Algebras and Modules II (Geiranger, 1996), Conference proceedings - Canadian Mathematical Society, Mathematische Annalen **24** (1998), 481-496.

- [36] R. Schiffler, *Quiver representations*, Canadian Mathematical Society- Department of Mathematics University of Connecticut, CMS Books in Mathematics, Springer International Publishing (2014).
- [37] S. Schroll, *Brauer graph algebras*, Springer, Cham, 2018. In: Assem I., Trepode S. (eds), *Homological Methods, Representation Theory, and Cluster Algebras*, CRM Short Courses, 177-223.
- [38] ———, *Trivial extensions of gentle algebras and brauer graph algebras*, *Journal of Algebra* **444** (2015), 183-200.
- [39] A. Sierra, *The dimension of the center of a brauer configuration algebra*, *J. Algebra* **510**, (2018), 289–318.
- [40] A. Skowronski and J. Waschbüsch, *Representation-finite biserial algebras*, *Journal of pure and applied mathematics* **345** (1983), 172-181.
- [41] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Colloquium Publications, Vol. 23, New York, AMS, revised edition, (1959), 35–37.
- [42] D. Vere-Jones, *Finite bivariate distributions and semi-groups of nonnegative matrices*, *Q. J. Math. Oxford* **22**, 2, (1971), 247–270.
- [43] B. Wald and J. Waschbüsch, *Tame biserial algebras*, *Journal of algebra*, **95** (1985), no. 2, 480-500.
- [44] A. Zavadskij, *On the kronecker problem and related problems of linear algebra*, *Linear Algebra and its Applications* **425**, (2007), 26–62.